

N° D'ORDRE

446.

H. F. n. f. 166 (14<sup>5</sup>)

# THÈSES

PRÉSENTÉES

## A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. MARCEL BRILLOUIN,

Ancien Élève de l'École Normale supérieure, Agrégé-Préparateur de Physique  
au Collège de France.

1<sup>re</sup> THÈSE. — INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES AUXQUELLES CONDUIT  
L'ÉTUDE DES PHÉNOMÈNES D'INDUCTION DANS LES CIRCUITS DÉRIVÉS.

2<sup>e</sup> THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues, le 2 juillet 1880, devant la Commission  
d'Examen.



MM. BRIOT, *Président*,

TISSERAND, }

TANNERY, }

*Examineurs.*



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE  
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,  
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1880



# ACADÉMIE DE PARIS.

## FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
<b>DOYEN</b> .....	MILNE EDWARDS,	Professeur. Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
<b>PROFESSEURS HONORAIRES</b> {	DUMAS.	
	PASTEUR.	
	CHASLES .....	Géométrie supérieure.
	P. DESAINS.....	Physique.
	LIOUVILLE.....	Mécanique rationnelle.
	PUISEUX .....	Astronomie.
	HÉBERT.....	Géologie.
	DUCHARTRE.....	Botanique.
	JAMIN.....	Physique.
	SERRET.....	Calcul différentiel et intégral.
	H. S <sup>te</sup> -CLAIRE DEVILLE.....	Chimie.
	DE LACAZE-DUTHIERS.....	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
<b>PROFESSEURS</b> .....	BERT.....	Physiologie.
	HERMITE.....	Algèbre supérieure.
	BRIOT.....	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	BOUQUET.....	Mécanique physique et expérimentale.
	TROOST .....	Chimie.
	WURTZ.....	Chimie organique.
	FRIEDEL.....	Minéralogie.
	O. BONNET.....	Astronomie.
<b>AGRÉGÉS</b> .....	BERTRAND.....	} Sciences mathématiques.
	J. VIEILLE.....	
	PELIGOT.....	Sciences physiques.
<b>SECRETARE</b> .....	PHILIPPON.	



6231 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCESSEUR DE MALLET-BACHELIER, Quai des Augustins, 55.

**A LA MÉMOIRE DE M. BERSOT,**

DIRECTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE.

M. BRILLOUIN.

---

# PREMIÈRE THÈSE.

---

## INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

AUXQUELLES CONDUIT L'ÉTUDE DES PHÉNOMÈNES D'INDUCTION  
DANS LES CIRCUITS DÉRIVÉS.

---

### INTRODUCTION.

---

Lorsque des courants électriques, arrivés à l'état permanent, circulent dans un système quelconque de fils conducteurs, les lois d'Ohm permettent d'étudier facilement leur répartition entre ces fils. Mais, pendant la période variable, ces lois ne sont plus applicables. Le partage du courant entre les fils dépend alors des phénomènes d'induction, et n'a été étudié, à ma connaissance, que dans un nombre restreint de cas particuliers. C'est l'étude générale des lois de ce partage, aboutissant à une règle précise pour la formation de l'équation algébrique unique à laquelle se ramène la question, qui fait l'objet de ce travail.



La première partie est relative à un système particulier de fils. La deuxième se rapporte à un réseau quelconque de fils, dont chacun fait partie au moins d'un circuit fermé. On peut alors négliger la capacité des fils, et regarder chacun d'eux comme parcouru à chaque instant par le même courant dans toute sa longueur. Il s'agit uniquement de fils qui ne subissent ni déplacement ni déformation, et dans le voisinage desquels aucun aimant ne se déplace. Les résistances sont supposées constantes, ainsi que la force électromotrice des piles. Les variations d'intensité peuvent être dues à une modification quelconque de l'état du réseau, pourvu qu'elle laisse tous les circuits fermés. Telles sont : la fermeture simultanée de tous les circuits qui contiennent des piles ; la substitution instantanée, à un nombre quelconque des piles, de fils de même résistance, ou la substitution inverse. Ces substitutions peuvent avoir lieu soit pendant l'état permanent, soit à un moment quelconque de la période variable, ce qui altère brusquement les constantes qui dépendent de l'état initial, sans changer les équations différentielles.

---

## PREMIÈRE PARTIE.

### ÉTUDE D'UN SYSTÈME PARTICULIER DE BOBINES.

---

1. Un circuit est formé par une pile de force électromotrice constante  $E$ , un fil de résistance  $R$ , enroulé en bobine, dont le potentiel sur lui-même est  $w$  <sup>(1)</sup>.

L'équation d'établissement du courant, à la fermeture du circuit,

---

<sup>(1)</sup> J.-C. Maxwell, dont la Science déplore la perte récente, appelle *coefficient de self-induction du circuit* la quantité  $2w$  et la désigne par  $L$ . Le même nom et le même symbole  $L$  s'appliquent, dans le *Traité élémentaire* de Cumming, à la quantité  $w$  elle-même.

ANNÉE

est (BRIOT, *Théorie mécanique de la chaleur*, p. 335)

$$Ei = Ri^2 + \frac{d(wi^2)}{dt}.$$

Quand le circuit ne subit ni déplacement ni déformation, l'équation se réduit à

$$E = Ri + 2w \frac{di}{dt}.$$

L'intégrale qui satisfait à la condition que l'intensité soit nulle au début est

$$i = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{2w}t} \right).$$

Comme l'intensité ne peut évidemment pas croître indéfiniment avec le temps, il faut que  $w$  soit positif. Donc, *le potentiel d'un circuit sur lui-même est une quantité positive.*

Toutes choses égales d'ailleurs, plus le potentiel  $w$  est petit, plus l'époque à laquelle le courant atteint une intensité donnée est voisine du début. Au cas limite où  $w$  est nul, le terme exponentiel disparaît; l'intensité atteint immédiatement sa valeur finale, d'accord avec l'équation réduite  $E = Ri$ .

2. Un nombre déterminé quelconque  $n$  de circuits pareils au précédent sont assez voisins les uns des autres pour s'influencer. Ils ne subissent ni déplacement ni déformation.

Soit  $W_{p,q} = W_{q,p}$  le potentiel mutuel de deux fils quelconques  $p$  et  $q$  (1). Pour simplifier l'écriture, je désigne par  $W_{p,p}$  le double du potentiel sur lui-même du fil  $p$ ;  $W_{p,p} = 2w_p$ . L'équation d'un circuit quelconque  $p$  du système est, en désignant par  $i'$  la dérivée de  $i$  par rapport au temps,

$$E_p = R_p i_p + \sum_{q=1}^{q=n} W_{p,q} i'_q \quad (2)$$

(1) Les mêmes quantités sont désignées, dans le *Traité de Maxwell*, sous le nom de *coefficients d'induction mutuelle* et désignés par la lettre  $M$ . Même désignation et même symbole dans Cumming.

(2) BRIOT, *Théorie mécanique de la chaleur*, p. 336.

On intégrera ce système de  $n$  équations, en posant

$$i_p = \frac{E_p}{R_p} + \sum_{q=1}^{q=n} A_q e^{\alpha_q t},$$

et déterminant les  $n$  exposants différents  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  par l'équation algébrique de degré  $n$  qui résulte de l'élimination des coefficients  $A$  :

$$(1) \quad \begin{vmatrix} R_1 + W_{1,1}\alpha & W_{1,2}\alpha & W_{1,3}\alpha & \dots & W_{1,n}\alpha \\ W_{2,1}\alpha & R_2 + W_{2,2}\alpha & W_{2,3}\alpha & \dots & W_{2,n}\alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{n,1}\alpha & W_{n,2}\alpha & \dots & \dots & R_n + W_{n,n}\alpha \end{vmatrix} = 0.$$

Les coefficients  $A_1, \dots, A_n$  sont ensuite déterminés au moyen des conditions initiales.

### 3. L'équation (1) a toujours toutes ses racines réelles.

Prenons pour inconnue  $x = -\frac{1}{\alpha}$ . Divisons le terme qui appartient à la  $p^{\text{ième}}$  ligne et à la  $q^{\text{ième}}$  colonne par  $\sqrt{R_p R_q}$ . Cela revient à diviser tout le déterminant par  $R_1 R_2 \dots R_n \alpha^n$ .

Posons

$$\frac{W_{p,p}}{R_p} = a_{p,p},$$

$$\frac{W_{p,q}}{\sqrt{R_p R_q}} = \frac{W_{q,p}}{\sqrt{R_q R_p}} = a_{p,q} = a_{q,p}.$$

L'équation (1) est ramenée à

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} - x & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - x & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} - x \end{vmatrix} = 0,$$

dont toutes les racines sont réelles (1).

---

(1) On connaît plusieurs démonstrations de la réalité des racines de cette équation. Je citerai seulement la remarquable application du théorème de Sturm due à M. Borchardt (SERRET, *Algèbre supérieure*, t. I, p. 575 et suiv.).

4. Il est évident qu'aucune des intensités ne peut croître indéfiniment avec le temps. Il faut donc que toutes les valeurs de  $\alpha$  soient négatives. Comme elles sont toutes réelles, il faut que tous les coefficients de l'équation (1) soient de même signe.

Désignons  $m$  indices différents par  $a, b, \dots, k$ , et posons

$$\Delta(a, b, \dots, k) = \begin{vmatrix} W_{a,a} & W_{a,b} & \dots & W_{a,k} \\ W_{b,a} & W_{b,b} & \dots & W_{b,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{k,a} & W_{k,b} & \dots & W_{k,k} \end{vmatrix}.$$

On voit facilement que, avec cette notation, l'équation développée par rapport aux puissances de  $\alpha$  est

$$0 = \begin{cases} \alpha^n \Delta(1, 2, \dots, n) + \dots \\ + \alpha^{n-p+1} [\Sigma R_1 R_2 \dots R_{p-1} \Delta(p, p+1, \dots, n)] + \dots \\ + \alpha (W_{1,1} R_2 \dots R_n + R_1 W_{2,2} R_3 \dots R_n + \dots + R_1 R_2 \dots R_{n-1} W_{n,n}) \\ + R_1 R_2 \dots R_n. \end{cases}$$

Le signe  $\Sigma$  désigne une somme symétrique par rapport à tous les indices. Tous les déterminants qui y entrent sont symétriques par rapport à la diagonale et peuvent être représentés par le signe  $\Delta(a, b, \dots, k)$ . En effet, dans le déterminant qui forme le premier membre de l'équation (1), les éléments de la diagonale sont les seuls qui contiennent un terme indépendant de  $\alpha$ . Il faut les prendre tous avec le signe +, comme le premier qui se présente dans le développement, car, en échangeant d'une manière convenable les lignes du déterminant (1) et opérant de même sur les colonnes, on amènerait un quelconque d'entre eux au premier rang sans changer le signe du déterminant (1).

5. Il faut que tous les coefficients soient de même signe et, comme le terme constant est positif, que tous le soient aussi. Cela donne en particulier, pour le coefficient de  $\alpha^n$ ,

$$(2) \quad \Delta(1, 2, \dots, n) \geq 0.$$

Considérons un système formé d'un nombre quelconque  $p$  des fils primitifs, et enlevons les  $(n-p)$  autres. A ce système de  $p$  fils s'appli-

queront les mêmes raisonnements; en particulier, le coefficient de  $\alpha^p$ , dans l'équation de degré  $p$  correspondante, devra être aussi positif. Cela conduit à une condition de même forme que la précédente, le déterminant n'ayant plus que  $(p)^2$  termes. Il en est de même pour toute valeur de  $p$  et pour tout système de  $p$  des fils.

6. L'ensemble de conditions du type (2), obtenues par la considération du premier terme des équations relatives à une partie seulement des fils, rend positifs tous les coefficients de l'équation relative aux  $n$  fils. En effet, le coefficient de  $\alpha^{n-p}$  dans cette équation est la somme des produits des coefficients de  $\alpha^{n-p}$  dans tous les systèmes de  $n-p$  seulement des fils, par les résistances des  $p$  autres; c'est-à-dire une somme de quantités toutes positives (1).

7. Lorsque, parmi les  $n$  fils, on en considère isolément deux quelconques (1) et ( $p$ ), leurs potentiels satisfont à la condition (5)

$$\Delta(1, p) = W_{1,1} W_{p,p} - (W_{1,p})^2 \geq 0.$$

Supposons que  $W_{1,1}$  soit nul: l'inégalité réduite par cette condition ne peut être satisfaite que si  $W_{1,p}$  est aussi nul. *Quand le potentiel d'un fil sur lui-même est nul, le potentiel mutuel de ce fil avec un autre quelconque est aussi nul.* Un tel fil n'entre donc plus dans les équations; le système de  $n$  fils se décompose alors en un système de  $(n-1)$  fils et un fil indépendant des autres.

8. Considérons maintenant un nombre quelconque  $p$  des  $n$  fils, et posons

$$\delta = \Delta(1, 2, \dots, p).$$

Soient  $\delta_{q,r}$  le mineur obtenu en supprimant dans  $\delta$  la ligne  $q$  et la colonne  $r$  ( $\delta_{q,r}$  et  $\delta_{r,q}$  sont égaux, à cause de la symétrie du déterminant  $\delta$  par rapport à la diagonale);  $\delta_{q,r|s,t}$  le mineur obtenu en supprimant

---

(1) Dans la théorie de l'induction exposée par Maxwell (*A Treatise on Electricity and Magnetism*, t. II, chap. VI), on déduirait immédiatement ces inégalités du n° 366, chap. V, sur les équations de Lagrange.

dans  $\delta$  les lignes  $q$  et  $r$ , et les colonnes  $r$  et  $t$ . On sait que, quel que soit le déterminant  $\delta$ , on a toujours entre ses mineurs la relation

$$\delta_{q,r} \delta_{s,t} - \delta_{q,t} \delta_{s,r} = \delta \cdot \delta_{q,r|s,t}.$$

Posons  $q=r$ ,  $s=t$ ; la relation devient

$$(1) \quad \delta_{r,r} \delta_{s,s} - (\delta_{r,s})^2 = \delta \cdot \delta_{r,r|s,s}$$

et tous les déterminants qui y entrent sont positifs ou nuls (5).

Supposons que  $\Delta(2, \dots, p) = \delta_{1,1}$  soit nul; la relation (1) donne alors

$$- (\delta_{1,s})^2 = \delta \cdot \delta_{1,1|s,s}$$

et, le second membre étant positif, il faut que  $\delta_{1,s}$  soit nul. Donc  $\delta_{1,1} = 0$  entraîne, quel que soit  $s$ ,  $\delta_{1,s} = 0$ , et  $\delta_{1,s}$  s'obtient au signe près en remplaçant dans  $\delta_{1,1}$  la colonne (1)

$$W_{2,s}, W_{3,s}, \dots, W_{s-1,s}, W_{s,s}, W_{s+1,s}, \dots, W_{p,s}$$

par la colonne (1)

$$W_{2,1}, W_{3,1}, \dots, W_{s-1,1}, W_{s,1}, W_{s+1,1}, \dots, W_{p,1},$$

laquelle ne contient pas de potentiel d'un fil sur lui-même. C'est ce qu'on peut écrire symboliquement comme il suit :

$$\Delta(2, 3, \dots, p) = 0$$

a pour conséquence, quel que soit  $s$ ,

$$\Delta \left[ 2, 3, \dots, s-1, \binom{s}{1}, s+1, \dots, p \right] = 0,$$

le symbole  $\binom{s}{1}$  indiquant le remplacement de la colonne (s) par la colonne (1).

9. Lorsque le mineur  $\delta_{1,1}$  est nul, le déterminant  $\delta$  l'est aussi. En effet,  $\delta$  est une fonction linéaire et homogène des mineurs  $\delta_{1,1}, \delta_{1,2}, \dots, \delta_{1,s}, \dots, \delta_{1,p}$ , qui s'annulent tous à la fois lorsque le premier,  $\delta_{1,1}$ , s'annule.

10. Aux  $p$  fils considérés dans les n<sup>os</sup> 8 et 9 ajoutons-en un nouveau. Le déterminant de  $(p+1)^2$  éléments correspondants aura parmi les mineurs de  $p^2$  éléments le déterminant  $\delta$  (n<sup>o</sup> 8). Si  $\delta_{1,1}$  est nul,  $\delta$  est aussi nul (9), et, par suite, les conclusions des n<sup>os</sup> 8 et 9 s'appliquent au nouveau déterminant de  $(p+1)^2$  éléments. Il en est de même du déterminant de  $(p+2)^2$  éléments formé par l'addition d'un nouveau fil, et ainsi jusqu'au déterminant  $\Delta(1, 2, \dots, n)$  de  $n^2$  éléments. Donc, si, entre les potentiels de  $(p-1)$  quelconques des  $n$  fils, on a la relation

$$\Delta(2, 3, \dots, p) = 0,$$

il en résulte entre les potentiels des  $n$  fils la relation

$$\Delta(1, 2, \dots, n) = 0,$$

et entre les potentiels de ces  $n$  fils avec un  $(n+1)^{\text{ième}}$  quelconque,  $x$ ,

$$\Delta\left[1, 2, \dots, m-1, \begin{pmatrix} m \\ x \end{pmatrix}, m+1, \dots, n\right] = 0,$$

quelle que soit la colonne  $m$ , que l'on remplace par la colonne  $x$ , différente des  $n$  premières.

11. Si, dans l'équation en  $\alpha$ , le coefficient d'une puissance  $(p+1)$  de  $\alpha$  est nul, tous les coefficients des puissances de  $\alpha$ , supérieures à  $p+1$ , sont aussi nuls. Car, pour annuler le coefficient de  $\alpha^{p+1}$ , il faut annuler séparément tous les déterminants de  $(p+1)^2$  termes qui le composent, et alors tous les déterminants symétriques de  $(p+2)^2, \dots, n^2$  termes formés avec les potentiels des mêmes  $n$  fils sont aussi nuls (10).

L'équation se réduit alors au  $p^{\text{ième}}$  degré. Il faut pour cela qu'il y ait entre les intensités un nombre  $n-p$  de relations indépendantes des dérivées des intensités, égal au nombre des coefficients qui disparaissent de l'équation. En effet, les équations générales étant linéaires par rapport aux intensités et à leurs dérivées, il ne peut exister entre les intensités seules que des équations linéaires. S'il y en a  $n-p$ , on peut entre elles et les  $p$  équations restantes éliminer  $n-p$  des intensités et leurs dérivées, et les  $p$  équations qui restent sont encore linéaires par rapport aux dérivées des intensités conservées;

elles s'intègrent de la même manière, et l'équation caractéristique qui leur correspond est nécessairement de degré  $p$ .

12. L'étude directe de la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une relation entre les intensités seules, indépendamment de leurs dérivées, conduit à une conséquence intéressante.

Considérons à part  $p$  des fils du système, et enlevons les  $n - p$  autres; l'équation relative à un quelconque  $q$  de ces  $p$  fils, auxquels j'attribue les indices  $1, 2, \dots, p$ , est

$$E_q = R_q i_q + \sum_{h=1}^{h=p} W_{q,h} i'_h.$$

Pour qu'il existe entre les intensités seules une relation indépendante de leurs dérivées, la théorie des équations linéaires fournit la condition nécessaire et suffisante :

$$(1) \quad \Delta(1, \dots, p) = 0,$$

et la relation indépendante des dérivées des intensités est

$$(2) \quad \delta_{1,r}(E_1 - R_1 i_1) + \delta_{2,r}(E_2 - R_2 i_2) + \dots + \delta_{p,r}(E_p - R_p i_p) = 0,$$

en désignant par  $(-1)^{r+q} \delta_{q,r}$  le résultat de la suppression de la ligne  $q$  et de la colonne  $r$  dans le déterminant (1). Cette relation est, comme on sait, indépendante de la colonne  $r$  choisie, les mineurs correspondants des diverses colonnes étant proportionnels.

13. Aux  $p$  fils entre lesquels existe la relation (2) quand on les prend à part, ajoutons les  $n - p$  autres qui complètent le système de  $n$  fils que nous étudions. Les équations relatives à chaque fil sont changées,

$$E_q = R_q i_q + \sum_{h=1}^{h=n} W_{q,h} i'_h,$$

et pourtant la même relation (2) subsiste entre les mêmes  $p$  intensités seules. En effet, entre les  $p$  équations des mêmes fils, éliminons  $p - 1$  des dérivées de leurs intensités  $i'_1, \dots, i'_{p-1}$ ; je dis que toutes les autres

dérivées  $i'_p, \dots, i'_n$  disparaissent de l'équation ainsi obtenue. En effet, le coefficient de  $i'_p$ , c'est le déterminant symétrique nul (1). Le coefficient de  $i'_r$ , c'est ce déterminant, dans lequel la dernière colonne  $W_{1,p}, W_{2,p}, \dots, W_{p,p}$  est remplacée par une colonne de potentiels mutuels des fils  $1, \dots, p$ , avec le fil  $r$ ,  $W_{1,r}, W_{2,r}, \dots, W_{p,r}$ , et, le déterminant symétrique étant nul, le nouveau déterminant est aussi nul, quel que soit  $r$  (10). Toutes les dérivées des intensités disparaissent donc ensemble, en vertu des relations particulières aux potentiels des fils, et le résultat de l'élimination est évidemment le même que si aucun fil n'était ajouté aux  $p$  premiers. La même condition (1) est donc toujours nécessaire et suffisante pour que, dans le système complet des  $n$  fils, il existe une relation indépendante des dérivées de toutes les intensités, et ne contenant que les intensités des  $p$  premiers fils.

14. Voici maintenant une importante généralisation de la propriété du n° 10. Entre les équations des  $p$  fils relatives au système complet (13), de quelque manière que nous éliminions  $p-1$  dérivées des intensités, toutes les autres doivent disparaître d'elles-mêmes lorsque la seule condition (1) du n° 12 est satisfaite. Désignons donc  $p$  indices différents quelconques par  $\alpha, \beta, \dots, \lambda, \mu$ , et éliminons les dérivées  $i'_\alpha, i'_\beta, \dots, i'_\lambda$ ; dans l'équation qui résulte de l'élimination, le coefficient de  $i'_\mu$ , qui doit être nul, est

$$(3) \quad \Delta \left[ \binom{1}{\alpha}, \binom{2}{\beta}, \dots, \binom{p-1}{\lambda}, \binom{p}{\mu} \right] = 0.$$

La condition (3) entre les potentiels mutuels des fils  $1, 2, \dots, p$  avec les fils  $\alpha, \beta, \dots, \lambda, \mu$ , dont quelques-uns peuvent se confondre avec autant des fils donnés, est donc une conséquence nécessaire de la condition (1) du n° 12.

En outre, la relation qui reste entre les seules intensités  $i_1, \dots, i_p$  est nécessairement identique à (2). Désignons donc par  $(-1)^{y+z} \Delta_{y,z}$  le mineur qui résulte de la suppression de la ligne  $y$  et de la colonne  $z$  dans le déterminant (3); il faut que l'on ait, quel que soit le déterminant (3) choisi,

$$(4) \quad \frac{\Delta_{1,z}}{\delta_{1,1}} = \frac{\Delta_{2,z}}{\delta_{2,1}} = \frac{\Delta_{3,z}}{\delta_{3,1}} = \dots = \frac{\Delta_{p,z}}{\delta_{p,1}}.$$

15. Il est bien évident qu'aucun système de bobines ne peut réaliser rigoureusement la condition (1), pas plus qu'un fil ne peut avoir un potentiel sur lui-même rigoureusement nul. C'est seulement un état limite dont il doit être possible d'approcher beaucoup dans certaines conditions expérimentales. Voici, par exemple, une disposition qui donne sensiblement une relation entre les seules intensités dans deux fils voisins : Formons deux torons, l'un de  $a$  fils, l'autre de  $b$  fils, et enroulons-les côte à côte de manière à former une seule bobine. Supposons qu'un courant parcourt successivement les  $a$  fils du premier toron, et un autre les  $b$  fils du deuxième toron dans le même sens.

Soit  $w$  le potentiel sur lui-même d'un seul fil enroulé comme l'ont été les deux torons. Le potentiel mutuel de deux fils ainsi enroulés côte à côte sera à peu près  $2w$  : on sait, en effet, que le potentiel sur lui-même d'un fil est la limite vers laquelle tend la moitié du potentiel mutuel de deux fils qui se rapprochent jusqu'à se confondre.

Le potentiel sur lui-même du premier toron est donc

$$aw + \frac{a(a-1)}{2} 2w = aw^2;$$

le potentiel sur lui-même du deuxième toron,  $b^2w$ ; le potentiel mutuel des deux torons,  $ab2w$ . La condition pour que les dérivées des intensités puissent être éliminées de leurs équations,

$$2a^2 \times 2b^2w - (ab2w)^2 = 4w^2(a^2b^2 - a^2b^2) = 0,$$

est satisfaite par la construction de la bobine, quels que soient les nombres entiers de fils qui composent chaque toron, et la relation indépendante des dérivées des intensités est

$$2b^2w(E_a - R_a i_a) - 2abw(E_b - R_b i_b) = 0$$

ou

$$b(E_a - R_a i_a) = a(E_b - R_b i_b).$$

Une bobine ainsi construite permettrait donc de graduer les potentiels sur eux-mêmes et les potentiels mutuels des deux circuits, de manière à donner une valeur choisie à l'avance au rapport des coefficients de la relation indépendante des dérivées des intensités.

Pour un plus grand nombre  $p$  de fils, il paraît plus difficile d'imaginer un arrangement qui donne entre eux tous une relation indépendante des dérivées de leurs intensités, sans qu'aucun groupe de  $p-1$  d'entre eux réalise la même condition.

---

## SECONDE PARTIE

---

16. Les systèmes que je vais étudier sont formés de fils qui se réunissent en certains points nommés *sommets*; ces fils sont disposés de telle sorte qu'on puisse toujours aller d'une extrémité à l'autre d'un fil donné par un chemin composé uniquement de fils différents du premier : tout fil fait donc partie d'un circuit fermé et est parcouru à chaque instant par le même courant dans toute sa longueur.

17. *Sommets*. — A chaque sommet correspond une équation de conservation de l'électricité :

$$\Sigma(i) = 0.$$

Les intensités  $y$  sont précédées des signes  $+$  ou  $-$ , suivant que le sens positif sur le fil correspondant est dirigé vers le sommet ou en sens inverse.

*Groupes*. — Il peut arriver qu'un certain nombre de sommets reliés entre eux par des fils ne soient reliés à aucun des autres sommets; on dit alors que les fils qui communiquent seulement avec les premiers sommets forment un groupe distinct. Soient  $g$  le nombre de ces groupes dans le système de  $n$  fils que nous considérons, et  $s+g$  le nombre total des sommets. Il n'y a que  $s$  équations distinctes relatives aux sommets. En effet, en ajoutant toutes celles d'un même groupe, on obtient une identité, car toute intensité qui entre avec le signe  $+$  dans l'équation d'un sommet, entre avec le signe  $-$  dans l'équation d'un autre du même groupe et n'entre pas ailleurs.

18. Pour établir les équations relatives à chaque fil, il faut tenir compte de deux sortes d'actions : celles qui proviennent du courant électrique ou de ses variations, et celles qui tiennent à la distribution superficielle de l'électricité sur les conducteurs. Occupons-nous d'abord des premières.

Pour les forces électrodynamiques, un réseau tel que je l'ai défini (n° 16) équivaut, à chaque instant, à un ensemble de circuits fermés, parcourus chacun par le même courant dans toute son étendue.

Considérons un groupe de  $\nu$  fils, ayant  $\sigma + 1$  sommets. Mettons à part  $\sigma$  fils aboutissant aux  $\sigma + 1$  sommets. Un seul des  $\nu - \sigma$  autres fils forme avec les  $\sigma$  premiers un circuit fermé.

Soit  $i$  l'intensité actuelle dans un de ces  $\nu - \sigma$  fils; le groupe peut être divisé par la pensée en deux parties : 1° le circuit fermé obtenu au moyen du fil considéré et des  $\sigma$  fils mis à part, parcouru dans toute son étendue par le courant  $i$ ; 2° le groupe qui reste après avoir enlevé ce seul fil, les intensités étant diminuées de  $i$  dans les fils communs au groupe et au circuit fermé mis à part, et conservées dans tous les autres fils. La force électrodynamique exercée par l'ensemble de ces deux parties sur un élément de courant quelconque est identiquement la même que celle du groupe entier, car la force due à un courant  $I = \Sigma(i)$  parcourant un fil donné a la même valeur que la somme des forces dues séparément à chacun des courants composants  $i$ .

Le groupe réduit par la suppression d'un fil satisfait aux mêmes conditions que le groupe complet, et peut être subdivisé de même. Quand il n'aboutit que deux fils à un sommet, ce sommet disparaît du groupe. Quand, par réductions successives, on a formé  $(\nu - \sigma - 1)$  circuits fermés, les fils qui restent ne forment plus qu'un seul circuit fermé, sans sommet, et où l'intensité a même valeur dans toute son étendue. On voit donc que le groupe entier équivaut, à chaque instant, à un ensemble de circuits fermés. La force électrodynamique que le réseau exerce sur un élément quelconque est donc normale à l'élément de courant et se calcule par la loi d'Ampère.

Dans cette décomposition fictive, la configuration des circuits fermés reste la même, mais le rapport des intensités dans chacun d'eux se modifie continuellement pendant la période variable.

19. *Force électromotrice d'induction.* — Lorsque deux circuits fermés invariables de forme et de position sont parcourus par des courants variables, la force électromotrice totale dans le premier circuit, due à une variation  $\frac{di'}{dt} dt$  de l'intensité dans le deuxième circuit, est, comme on sait,

$$- W \frac{di'}{dt},$$

en posant

$$W = \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds ds',$$

$\varepsilon$  étant l'angle des deux éléments  $ds, ds'$ , et  $r$  leur distance.

Il faut donc que la force électromotrice produite dans un élément  $ds$  par une variation  $\frac{di'}{dt} dt$  dans un autre élément  $ds'$  soit de la forme

$$- \frac{di'}{dt} \left( \frac{\cos \varepsilon}{r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial s'} \right) ds ds',$$

$\varphi$  étant une fonction de la distance seule des deux éléments, condition nécessaire et suffisante pour que  $\varphi$  disparaisse dans l'action de deux circuits fermés.

Désignons par  $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$  des indices qui se rapportent aux extrémités de deux fils non fermés.  $W$  désignant toujours la même intégrale double, étendue aux deux fils donnés, la force électromotrice dans le premier fil, due à une variation  $\frac{di'}{dt} dt$  dans le deuxième, est

$$- \frac{di'}{dt} (W + \varphi_{\alpha, \alpha'} - \varphi_{\alpha, \beta'} - \varphi_{\beta, \alpha'} + \varphi_{\beta, \beta'}),$$

et, pour l'action de tous les fils du réseau (16) sur le premier fil, c'est la somme de termes pareils.

Groupons tous les termes  $\varphi_{\alpha, \alpha'}$  qui se rapportent au même sommet  $\alpha'$ ; ils se réduisent au produit de  $\varphi_{\alpha, \alpha'}$  par la dérivée de la somme des intensités qui aboutissent à ce sommet; comme  $\varphi_{\alpha, \alpha'}$  change de signe suivant que le sens positif choisi sur le fil est dirigé vers le sommet ou en sens inverse, les intensités entrent dans la somme avec le même signe que dans l'équation de ce sommet. Ce coefficient est donc identiquement nul.

La force électromotrice dans un fil donné, due à l'ensemble du réseau (16), est donc égale à

$$-\sum \frac{di'}{dt} W,$$

avec

$$W = \int_0^s \int_0^{s'} \frac{\cos \varepsilon}{r} ds ds'.$$

On verrait même que, s'il y avait entre deux éléments des actions électromotrices proportionnelles aux dérivées successives des intensités, par le seul fait qu'elles disparaissent de l'action mutuelle de deux circuits fermés, elles disparaîtraient aussi du système (16).

20. Nous conserverons donc à l'intégrale double

$$W = \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds ds'$$

le nom de *potentiel mutuel* des deux fils, puisqu'elle définit complètement la force électromotrice des deux fils, formant partie du réseau que j'étudie. Lorsque les deux éléments appartiennent au même fil, c'est la moitié de l'intégrale qu'on appelle *potentiel du fil sur lui-même*.

Rappelons que, par sa forme même, elle fournit les lois d'addition suivantes :

1° *Le potentiel mutuel de deux circuits formés chacun de plusieurs parties est égal à la somme des potentiels mutuels de toutes les parties de l'un avec toutes celles de l'autre circuit.*

2° *Le potentiel sur lui-même d'un fil formé de plusieurs parties est égal à la somme des potentiels sur elles-mêmes de chaque partie, augmentée de la somme des potentiels mutuels de toutes ces parties entre elles.*

21. *Équations du mouvement de l'électricité dans un quelconque des fils.* — Soit AB un fil, sur lequel la direction AB est choisie arbitrairement comme positive. Une pile est placée sur ce fil; sa force électromotrice rapportée à la direction positive sur le fil, c'est-à-dire l'accroissement de potentiel électrostatique qu'on observe en la traversant de A vers B, est E.

Soient  $V_A, V_B$  les potentiels électrostatiques aux extrémités A, B du fil; la force électromotrice due à la distribution superficielle de l'électricité est  $V_A - V_B$ ; pendant le temps  $dt$ , la chaleur dégagée dans le fil est  $R_1 i_1^2 dt$ ; le travail chimique de la pile est  $E_1 i_1 dt$ ; le travail des forces électromotrices, tant électrostatiques que d'induction, est

$$\left( V_A - V_B - \sum_{p=1}^{p=n} W_{1,p} \frac{di_p}{dt} \right) i_1 dt;$$

enfin, les circuits étant invariables de forme et de position, le travail des forces électrodynamiques est nul. L'équation des forces vives donne donc

$$R_1 i_1^2 dt = E_1 i_1 dt + (V_A - V_B) i_1 dt - \left( \sum_{p=1}^{p=n} W_{1,p} \frac{di_p}{dt} \right) i_1 dt,$$

ou

$$E_1 = R_1 i_1 + \sum_{p=1}^{p=n} W_{1,p} \dot{i}_p + V_B - V_A.$$

Ces équations sont en nombre égal à celui des fils.

22. Remarquons qu'elles ne contiennent que les différences des potentiels électrostatiques aux divers sommets. Comme chaque groupe est, à cet égard, complètement indépendant des autres, on peut rapporter les potentiels des sommets à celui d'un quelconque du même groupe. Le nombre des différences de potentiel distinctes qui entrent dans les équations d'un groupe est égal au nombre des sommets, moins un; pour le réseau entier contenant  $s + g$  sommets et  $g$  groupes, il n'y a que  $s$  différences de potentiel distinctes, autant que d'équations distinctes de conservation de l'électricité.

23. Toutes les équations étant linéaires à coefficients constants, on sait qu'on les intégrera par des sommes d'exponentielles. Posons donc

$$i_p = \frac{E_p}{R_p} + A_p e^{\alpha t},$$

$$V_q - V_0 = B_q e^{\alpha t},$$

et formons l'équation en  $\alpha$ . On sait qu'elle résulte de l'élimination des constantes A, B entre les  $n$  équations des fils

$$\sum_{h=1}^{h=n} A_h W_{p,h} \alpha + A_p R_p + B_q - B_q' = 0$$

et les  $s$  équations des fils

$$\sum A_k = 0,$$

qu'on aura soin d'écrire dans l'ordre des indices des sommets. Cette équation est donc

$R_1 + W_{1,1} \alpha$	$W_{1,2} \alpha$	$\dots$	$W_{1,n} \alpha$	$\mu_{1,1}$	$\mu_{1,2}$	$\dots$	$\mu_{1,s}$	$= F(\alpha) = 0.$
$W_{2,1} \alpha$	$R_2 + W_{2,2} \alpha$	$\dots$	$W_{2,n} \alpha$	$\mu_{2,1}$	$\mu_{2,2}$	$\dots$	$\mu_{2,s}$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
$W_{n,1} \alpha$	$W_{n,2} \alpha$	$\dots$	$R_n + W_{n,n} \alpha$	$\mu_{n,1}$	$\mu_{n,2}$	$\dots$	$\mu_{n,s}$	
$\mu_{1,1}$	$\mu_{2,1}$	$\dots$	$\mu_{n,1}$	0	0	$\dots$	0	
$\mu_{1,2}$	$\mu_{2,2}$	$\dots$	$\mu_{n,2}$	0	0	$\dots$	0	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
$\mu_{1,s}$	$\mu_{2,s}$	$\dots$	$\mu_{n,s}$	0	0	$\dots$	0	

J'ai représenté par  $\mu_{xy}$  des quantités qui sont  $+1$ ,  $-1$  ou  $0$ ; elles dépendent de l'ordre des indices. Pour tout fil  $x$ , deux des  $\mu_{xy}$  seulement sont différents de zéro : l'un d'eux est  $+1$ , l'autre  $-1$ . Si le fil  $x$  aboutit au sommet par rapport auquel on compte toutes les différences de potentiel de son groupe, un seul des  $\mu_{xy}$  est différent de zéro.

Le polynôme  $F(\alpha)$  est de degré  $n - s$ . — Car, pour obtenir un produit différent de zéro, il faut prendre  $s$  facteurs dans les  $n$  premières lignes des  $s$  dernières colonnes. Il ne contient donc plus que  $n - s$  lignes des  $n$  premières colonnes, et  $\alpha$  y entre au plus au degré  $n - s$ .

24. Les racines de  $F(\alpha)$  sont toujours toutes réelles. — Multiplions les  $s$  dernières lignes et les  $s$  dernières colonnes chacune par  $\alpha$ . On introduit ainsi  $\alpha^{2s}$  en facteur, c'est-à-dire  $2s$  racines nulles. Les remarques relatives aux potentiels aux sommets montrent que le déterminant est symétrique par rapport aux lignes et aux colonnes, pourvu que les

potentiels et les équations aux mêmes sommets soient écrits dans le même ordre.

Opérons maintenant comme sur le déterminant (1) du n° 2, en remplaçant les diviseurs  $R_{n+1}, \dots, R_{n+s}$  par 1; nous aurons ramené l'équation actuelle au type connu du n° 3, dans lequel une partie des termes  $a$  sont nuls. Il est évident, à cause de la continuité des racines, que celles-ci sont encore toutes réelles.

Il en résulte qu'il ne peut s'introduire ni sinus ni cosinus du temps dans l'expression des intensités et des potentiels aux sommets d'un système de fils quelconque soumis aux seules lois de l'induction électrodynamique. Aucun phénomène périodique ne peut y prendre naissance.

25. Tout problème sur les courants dérivés pendant la période variable d'induction est ramené à l'étude de l'équation correspondante  $F(\alpha) = 0$ . Il est donc important de pouvoir écrire immédiatement l'équation ordonnée suivant les puissances de  $\alpha$ . Les paragraphes suivants conduisent à une règle générale pour la formation des coefficients de l'équation. Cette règle résultera de la comparaison des diverses manières de réduire à  $(n-s)^2$  termes le déterminant  $F(\alpha)$ . Je vais étudier en détail une de ces réductions: toutes les autres s'en déduiront.

26. *Déterminant dont les éléments  $a_{x,y}$  sont indépendants de l'ordre des indices.* — La transformation la plus générale d'un déterminant par addition des lignes et des colonnes revient à le multiplier par un autre déterminant quelconque, différent de zéro, du même nombre d'éléments; mais, lorsque les éléments du déterminant sont indépendants de l'ordre des indices, ce caractère n'est pas conservé par la transformation. On peut éviter cet inconvénient en multipliant le déterminant donné par le carré d'un déterminant de la manière suivante.

Soient

$$A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

le déterminant donné, et

$$a_{x,y} = a_{y,x}.$$

Soit

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_{1,1} & \dots & \lambda_{1,y} & \dots & \lambda_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{z,1} & \dots & \lambda_{z,y} & \dots & \lambda_{z,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n,1} & \dots & \lambda_{n,y} & \dots & \lambda_{n,n} \end{vmatrix}$$

un autre déterminant, dans lequel  $\lambda_{z,y}$  diffère de  $\lambda_{y,z}$ , le premier indice se rapportant à la ligne, le second à la colonne dont l'élément fait partie.

Le produit de ces deux déterminants est un déterminant dont un élément est

$$(1) \quad \mathfrak{a}_{x,y} = \sum_{z=1}^{z=n} \lambda_{z,x} a_{z,y}.$$

Multiplions de la même manière, par le même déterminant  $\Lambda$ , le déterminant

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{1,1} & \dots & \mathfrak{a}_{z,1} & \dots & \mathfrak{a}_{n,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{a}_{1,y} & \dots & \mathfrak{a}_{z,y} & \dots & \mathfrak{a}_{n,y} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{a}_{1,n} & \dots & \mathfrak{a}_{z,n} & \dots & \mathfrak{a}_{n,n} \end{vmatrix},$$

où les lignes ont été prises pour colonnes, et inversement, ce qui ne change ni sa valeur ni son signe. Un élément du produit est

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{v}_{\xi,\eta} = \sum_{\zeta=1}^{\zeta=n} \lambda_{\zeta,\xi} \mathfrak{a}_{\eta,\zeta}, \\ \mathfrak{v}_{\xi,\eta} = \sum_{\zeta=1}^{\zeta=n} \sum_{z=1}^{z=n} \lambda_{\zeta,\xi} \lambda_{z,\eta} a_{z,\zeta} = \sum_{z=1}^{z=n} \lambda_{z,\eta} \mathfrak{a}_{\xi,z}, \end{array} \right.$$

et  $\mathfrak{v}_{\xi,\eta}$  est évidemment indépendant de l'ordre des indices  $\xi, \eta$ , en même temps que  $a_{z,\zeta}$ .

Cette transformation équivaut aux opérations suivantes :

Addition de lignes multipliées par des coefficients quelconques. Mêmes opérations avec les mêmes coefficients sur le nouveau déterminant, en y remplaçant les lignes par les colonnes correspondantes, et réciproquement.

Lorsque le déterminant  $\Lambda$  est égal à  $\pm 1$ , son carré est  $+1$ . La transformation ne change alors ni le signe ni la grandeur du déterminant donné  $\Lambda$ .

27. Soit  $\sigma_p + 1$  le nombre des sommets du  $p^{\text{ième}}$  groupe de fils. nO a

$$s = \sum \sigma_p.$$

Dans l'équation  $F(\alpha) = 0$ , je m'occupe d'abord des fils du premier groupe. J'en choisis  $\sigma_1$  qui réunissent le premier sommet au deuxième, le deuxième au troisième, ..., le  $(\sigma_1)^{\text{ième}}$  au  $(\sigma_1 + 1)^{\text{ième}}$ ; et sur chacun d'eux je prends pour sens positif le sens dans lequel un mobile les parcourt en partant du premier sommet. Les  $\sigma_1$  lignes du déterminant qui correspondent à ces fils sont mises au premier rang. Je mets à leur suite  $\sigma_2$  lignes du deuxième groupe, ...,  $\sigma_p$  lignes du  $p^{\text{ième}}$  groupe, choisies de la même manière.

Il suffit alors d'un seul fil du  $p^{\text{ième}}$  groupe pour former un circuit fermé avec un ou plusieurs des  $\sigma_p$  fils du même groupe, mis à part. Par conséquent, en ajoutant un nombre convenable des  $\sigma_1$  premières lignes à une des autres du premier groupe, on forme une ligne nouvelle, de laquelle tous les  $\mu$  ont disparu, car les  $V$  auraient disparu des équations correspondantes, le circuit étant fermé. Grâce aux signes choisis, il suffit pour cela d'une simple addition arithmétique.

En opérant ainsi pour tous les groupes, on transforme le déterminant, sans changer sa valeur, en un autre où tous les éléments des  $(n+1)^{\text{ièmes}}$ , ...,  $(n+s)^{\text{ièmes}}$  colonnes sont nuls, depuis la  $s^{\text{ième}}$  ligne jusqu'à la dernière.

28. Faire sur les nouvelles colonnes les mêmes opérations que sur les anciennes lignes équivaut à éliminer entre les  $\sigma$  équations et une quelconque des complémentaires de chaque groupe les intensités dans ces  $\sigma$  premiers fils. Cela transforme le déterminant en un autre symé-

trique,

$b_{1,1}$	...	$b_{1,s}$	$b_{1,s+1}$	...	$b_{1,n}$	$\mu_{1,n+1}$	...	$\mu_{1,n+s}$
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$b_{s,1}$	...	$b_{s,s}$	$b_{s,s+1}$	...	$b_{s,n}$	$\mu_{s,n+1}$	...	$\mu_{s,n+s}$
$b_{s+1,1}$	...	$b_{s+1,s}$	$b_{s+1,s+1}$	...	..	0	...	0
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.	.....	.
$b_{n,1}$	...	$b_{n,s}$	$b_{n,s+1}$	...	$b_{n,n}$	0	...	0
$\mu_{n+1,1}$	...	$\mu_{n+1,s}$	0	...	0	0	...	0
.....	.....	.....	.	.....	.	.	.....	.
$\mu_{n+s,1}$	...	$\mu_{n+s,s}$	0	...	0	0	...	0

où tous les éléments dont l'un des indices serait compris entre  $n + 1$  et  $n + s$  et l'autre entre  $s + 1$  et  $n + s$  inclusivement sont nuls; les éléments  $\mu$  sont les mêmes qu'au n° 23.

29. On voit immédiatement que ce déterminant est égal au déterminant B, obtenu en supprimant les  $s$  premières et les  $s$  dernières lignes ainsi que les mêmes colonnes, multiplié par le carré du déterminant des  $s$  premières lignes et des  $s$  dernières colonnes. Ce dernier déterminant est d'ailleurs égal à  $+1$ . Ses éléments ne sont autres que les  $\mu$  des  $s$  lignes correspondantes du déterminant primitif, et, d'après l'ordre dans lequel les lignes et les colonnes sont écrites, il est égal à

	1	0	0	...	0	0	0	...	0
	--1	1	0	...	0	0	0	...	0
	0	--1	1	...	0	0	0	...	0
	.	...	.	.....	.	.	.	.....	.
$(\sigma_1)^{\text{ième}} \text{ ligne...}$	0	0	0	...	1	0	0	...	0
	0	0	0	...	0	1	0	...	0
	0	0	0	...	0	--1	1	...	0
	.	.	.	.....	.	...	.	.....	.
	0	0	0	..	0	0	0	...	1
					$(\sigma_1)^{\text{ième}} \text{ col.}$				

Considérons une ligne  $q$  quelconque. Le fil va, par exemple, du  $q^{\text{ième}}$  au

$(q + 1)^{\text{ième}}$  sommet du premier groupe. A cause du sens positif choisi sur le fil, le terme de la  $(q - 1)^{\text{ième}}$  colonne est égal à  $-1$ , celui de  $q^{\text{ième}}$  à  $+1$ , et tous les autres sont nuls.

Il en est de même si le fil considéré est un fil intermédiaire d'un groupe quelconque. Quant au premier fil de chaque groupe, il ne donne qu'un seul élément  $+1$ , situé sur la diagonale du déterminant, car l'équation correspondante ne contient que le potentiel du deuxième sommet par rapport au premier, qui sert de point de comparaison à tous ceux du groupe.

30. Occupons-nous donc seulement du premier déterminant B. Les  $\lambda$  du n° 26 sont déterminés par la première transformation (27).

Les  $s$  premières lignes sont conservées, d'où

$$\left. \begin{array}{l} (z \leq s) \\ (y \leq s) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lambda_{x,y} = 0 \quad (z \leq y), \\ \lambda_{x,z} = +1. \end{array}$$

Pour une ligne  $x$ ,  $x > s$ ,

$$\lambda_{x,x} = +1$$

La ligne  $x$  appartenant au  $p^{\text{ième}}$  groupe,

$$\lambda_{x,x} = +1$$

pour une série de valeurs consécutives de  $z$  comprises entre

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_{p-1} \quad \text{et} \quad \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_{p-1} + \sigma_p + 1.$$

Pour toute autre valeur de  $z$ ,

$$\lambda_{z,x} = 0.$$

31. Pour  $\xi > s$ ,  $\eta > s$ , la formule (2) du n° 26 donne

$$b_{\xi,\eta} = \sum \sum \lambda_{\xi,\xi} \lambda_{x,\eta} a_{z,\zeta},$$

les signes  $\sum$  s'étendant à toutes les valeurs des indices  $z$ ,  $\zeta$ . On doit y remplacer  $a_{z,\zeta}$  par  $\alpha W_{z,\zeta}$ , quand  $z$  diffère de  $\zeta$ , et  $a_{z,z}$  par  $R_z + \alpha W_{z,z}$ .

Si les deux lignes  $\xi$ ,  $\eta$  du premier déterminant appartiennent à deux groupes différents, il n'y a pas de terme en  $a_{z,z}$  dans la somme, car  $\lambda_{z,z}$  est nul :

$$\sum \lambda_{z,\eta} W_{z,\zeta},$$

où  $\Sigma$  s'étend à toutes les valeurs de  $z$ , est le potentiel mutuel du fil  $\zeta$  du deuxième groupe avec le circuit entier du premier groupe que ferme le fil  $\eta$  (20);

$$\Sigma \lambda_{\zeta, \xi} (\Sigma \lambda_{z, \eta} W_{z, \zeta}),$$

où le premier  $\Sigma$  s'étend à toutes les valeurs de  $\zeta$ , est le potentiel mutuel du circuit du premier groupe, fermé par le fil  $\eta$ , avec tout le circuit du deuxième groupe que ferme le fil  $\xi$ . Désignons-le par  $W_{\xi-s, \eta-s}$ ; alors

$$b_{\xi, \eta} = \alpha W_{\xi-s, \eta-s}.$$

32. Si les lignes  $\xi$ ,  $\eta$  appartiennent au même groupe, un certain nombre des  $a_{z, z}$  y entrent, et l'on a

$$b_{\xi, \eta} = \Sigma \Sigma \lambda_{\zeta, \xi} \lambda_{z, \eta} W_{z, \zeta} \alpha + \Sigma \lambda_{z, \eta} \lambda_{z, \xi} R_z,$$

les deux premières sommes étant étendues à toutes les valeurs de  $z$  et  $\zeta$ , celle du second terme aux valeurs de  $z$  seulement. La première partie de la somme est encore égale au potentiel mutuel des deux circuits fermés. La seule différence avec le cas précédent, c'est que les deux circuits, appartenant au même groupe, ont un certain nombre de fils communs. Ce sont ceux dont les potentiels  $W_{z, z}$  entrent dans  $b_{\xi, \eta}$ . Désignons encore par  $W_{\xi-s, \eta-s}$  ce potentiel mutuel.

La seconde partie  $\Sigma \lambda_{z, \eta} \lambda_{z, \xi} R_z = R_{\xi-s, \eta-s}$  est la résistance des fils communs aux deux circuits; car il faut, pour que  $R_z$  y entre, que  $\lambda_{z, \eta}$  et  $\lambda_{z, \xi}$  soient tous les deux différents de zéro. Donc

$$b_{\xi, \eta} = \alpha W_{\xi-s, \eta-s} + R_{\xi-s, \eta-s}.$$

Si  $\xi = \eta$ , les deux circuits se confondent, et

$$b_{\xi, \xi} = \alpha W_{\xi-s, \xi-s} + R_{\xi-s} = 2a \omega_{\xi-s} + R_{\xi-s},$$

où  $\omega_{\xi-s}$  est le potentiel du circuit sur lui-même, et  $R_{\xi-s}$  sa résistance que l'on peut décomposer ainsi,

$$R_{\xi-s} = R'_{\xi-s} + R''_{\xi-s},$$

$R'_{\xi-s}$  étant la résistance des fils communs à d'autres circuits du même groupe, et  $R''_{\xi-s}$  celle du fil qui ferme ce circuit particulier, laquelle n'entre que dans l'élément  $b_{\xi, \xi}$ .

33. L'équation  $F(\alpha) = 0$  devient alors

$$\begin{vmatrix} W_{1,1}\alpha + R_{1,1} & W_{1,2}\alpha + R_{1,2} & \dots & W_{1,n-s}\alpha + R_{1,n-s} \\ W_{2,1}\alpha + R_{2,1} & W_{2,2}\alpha + R_{2,2} & \dots & W_{2,n-s}\alpha + R_{2,n-s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{n-s,1}\alpha + R_{n-s,1} & W_{n-s,2}\alpha + R_{n-s,2} & \dots & W_{n-s,n-s}\alpha + R_{n-s,n-s} \end{vmatrix} = 0,$$

équation dans laquelle les  $W$  désignent des potentiels de circuits fermés, les  $R$  des résistances qui s'annulent quand les deux indices appartiennent à des groupes différents. Toutes ces quantités  $W$ ,  $R$  sont d'ailleurs indépendantes de l'ordre des indices.

34. *Autres manières de réduire le déterminant à l'ordre  $n-s$ .* — Conservons  $s$  lignes quelconques, et à chacune des autres lignes ajoutons ou retranchons un nombre quelconque des  $s$  premières; le déterminant des  $\lambda$  reste égal à 1 en valeur absolue. En effet, tous les éléments  $\lambda_{x,x}$  sont égaux à +1 ou à -1, et tous ceux  $\lambda_{x,z}$ , où  $z$  est plus grand que  $x$ , sont nuls. La double transformation qui porte sur les lignes et sur les colonnes n'altère donc ni la valeur ni le signe du déterminant.

35. Le déterminant des  $\mu$  (29) s'annule lorsque, parmi les  $s$  lignes conservées les premières, un certain nombre forment un circuit fermé. Dans ce cas, en effet, il suffit d'ajouter ou de retrancher les équations correspondantes pour en faire disparaître tous les  $V$ ; la même combinaison des lignes du déterminant des  $\mu$  fait apparaître une ligne formée uniquement de zéros. Une pareille transformation n'est donc pas permise.

Lorsqu'il n'y a aucun circuit fermé, les  $s$  lignes sont formées nécessairement de  $\sigma_1$  du premier groupe,  $\sigma_2$  du deuxième, etc., car autrement il y aurait, pour l'un des groupes au moins, autant de lignes que de sommets, et il est impossible de former avec elles un circuit ouvert. De plus, pour chaque groupe, il faut qu'à chaque sommet aboutisse au moins un fil, sans quoi quelques-uns formeraient inévitablement un circuit fermé. Ces fils peuvent d'ailleurs être consécutifs, comme dans la première transformation, ou partir tous d'un des sommets pour rayonner vers les autres, ou former plusieurs faisceaux analogues. Il suffit qu'il en aboutisse au moins un à chaque sommet, parce qu'il est

impossible de former un circuit fermé avec  $\sigma$  fils qui aboutissent à  $\sigma + 1$  sommets.

Dans ce cas, la valeur absolue du déterminant des  $\mu$  est  $+ 1$ . Il est en effet facile d'ordonner les lignes de manière que tous les  $\mu_{xx}$  soient  $\pm 1$ , et tous les  $\mu_{xy}$  nuls pour  $y$  plus grand que  $x$ . On peut alors supprimer le carré du déterminant des  $\mu$ , sans altérer ni la valeur ni le signe du déterminant principal.

36. Dans les éléments du déterminant nouveau, il n'entre plus que des potentiels de circuits fermés, comme dans la première transformation, car il suffit d'un  $(\sigma + 1)^{\text{ième}}$  fil quelconque pour fermer le circuit des  $\sigma$  premiers.

Telles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour le succès de la transformation.

37. Toutes ces transformations sont indépendantes de toute hypothèse sur la grandeur des résistances : elles n'altèrent ni la valeur absolue, ni le signe du déterminant; par conséquent, *le facteur indépendant des résistances qui multiplie le produit d'un nombre quelconque de résistances a même valeur et même signe dans tous ces développements*, bien que sa forme apparente soit différente. Cette remarque permet de former facilement l'équation ordonnée suivant les puissances de  $\alpha$ .

38. Considérons en effet le déterminant sous sa forme primitive, avec  $(n + s)^2$  éléments (22). Pour obtenir le coefficient de  $\alpha^{n-\xi-s}$ , il faut former la somme des produits de  $\xi$  résistances  $R$  différentes par le déterminant symétrique qui résulte de la suppression des lignes et colonnes où entrent ces résistances, dans lequel on efface les  $R$  qui restent. Considérons donc un de ces produits de  $\xi$  résistances  $R$  différentes. Parmi tous les déterminants de  $(n - s)^2$  éléments, que les transformations indiquées permettent de former, cherchons-en un dans lequel les  $\xi$  résistances considérées occupent la place des  $\xi$  premiers  $R'$  du déterminant type que j'ai écrit (32-33). S'il n'y en a pas, c'est que le coefficient de ce produit est nul. S'il y en a un, supprimons les  $\xi$  premières lignes et colonnes, effaçons dans les autres tous les  $R', R''$ ; le déterminant qui reste est, en grandeur et en signe, le coefficient du produit de ces

$\xi$  résistances considérées. S'il y en a plusieurs, on choisira l'un quelconque d'entre eux, et l'on fera comme précédemment.

Pour qu'un produit de  $\xi$  résistances entre dans le terme considéré, il faut donc que parmi les  $(n-\xi)$  autres résistances on ait pu en trouver  $\sigma_1$  du premier groupe,  $\sigma_2$  du second, . . . , aboutissant à tous les sommets de ces groupes; car c'est la condition nécessaire et suffisante de possibilité de la transformation (35). Si l'on peut faire ce groupement de plusieurs manières, on aura plusieurs formes apparentes du coefficient entre lesquelles il est indifférent de choisir une quelconque, toutes étant équivalentes d'après la remarque (37). On peut d'ailleurs toujours amener aux premiers rangs les  $\xi$  résistances considérées, sans altérer le signe du déterminant, les permutations portant sur autant de colonnes que de lignes.

Le déterminant facteur de ce produit est facile à écrire : les éléments sont les potentiels mutuels des circuits formés de toutes les manières possibles avec tout ou partie des  $s$  fils choisis comme point de départ de la transformation, et chacun des  $n - \xi - s$  autres; et tous ces circuits sont fermés.

39. Règle pour écrire immédiatement l'équation qui donne les exposants  $\alpha$  d'un système quelconque de bobines.

- 1<sup>o</sup>, degré du terme le plus élevé;
- $n$ , nombre total des bobines;
- $g$ , nombre des groupes distincts;
- $s + g$ , nombre total des sommets.

Le plus haut exposant de  $\alpha$  est  $n - s$ , et l'équation est

$$F(\alpha) = A_{n-s} \alpha^{n-s} + A_{n-s-1} \alpha^{n-s-1} + \dots + A_1 \alpha + A_0 = 0.$$

40. Former le coefficient  $A_{n-s-\xi}$ . — On a choisi d'avance arbitrairement la direction positive sur chaque fil. Ecrivons toutes les combinaisons différentes  $\xi$  à  $\xi$  des  $n$  résistances. Pour chacune d'elles, parmi les  $n - \xi$  autres résistances, choisissons-en  $s$ , telles qu'au moins une aboutisse à chacun des  $s + g$  sommets. Si c'est impossible, cette combinaison n'entre pas dans le terme  $A_{n-s-\xi}$ . Si c'est possible de plusieurs manières, fixons notre choix sur une, n'importe laquelle d'ail-

leurs, et ne nous occupons pas des autres. Formons tous les circuits fermés qu'on peut obtenir avec un nombre quelconque des  $s$  fils et un seul des  $(n - \xi - s)$ . Ils sont au nombre de  $n - \xi - s$ . Au moyen des potentiels des fils pris dans le sens positif, formons, d'après la règle du n° 20, les potentiels de tous ces circuits sur eux-mêmes, et entre eux, et écrivons le déterminant symétrique de  $(n - \xi - s)^2$  termes qu'on peut former avec eux. C'est le facteur du produit des  $\xi$  résistances considérées dans le terme  $A_{n-s-\xi}$ .

41. Les racines de l'équation  $F(\alpha) = 0$  sont toujours toutes négatives. — En effet, elles sont réelles (24), et tous les coefficients de l'équation  $F(\alpha) = 0$  sont positifs. Un coefficient de  $F(\alpha)$  est la somme de produits de résistances par des déterminants symétriques

$$\begin{vmatrix} W_{1,1} & W_{1,2} & \dots & W_{1,p} \\ W_{2,1} & W_{2,2} & \dots & W_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{p,1} & W_{p,2} & \dots & W_{p,p} \end{vmatrix},$$

où tous les éléments se rapportent à des circuits fermés. Ces déterminants sont donc tous positifs (I<sup>re</sup> Partie, 5), et par suite aussi tous les coefficients de  $F(\alpha)$ .

Parmi ces coefficients, remarquons les deux extrêmes.

Le dernier ne contient que des résistances. Le premier, qui ne contient pas de résistances, se réduit à un seul déterminant symétrique de circuits fermés.

42. Du système complet, j'enlève  $\zeta$  fils quelconques qui ne laissent aucun circuit ouvert. Le nouveau système ainsi formé a  $n - \zeta$  fils; j'appelle  $g'$  le nombre de ses groupes,  $s' + g'$  le nombre total de ses sommets. Tous les sommets appartiennent au système complet; mais ses groupes peuvent être différents, un seul groupe du système complet ayant pu être subdivisé en plusieurs par suppression des fils. On a

$$\begin{aligned} s' + g' &\leq s + g, \\ g' &\leq g. \end{aligned}$$

Un coefficient quelconque  $A'_{n-\zeta-s'-\xi}$  de l'équation en  $\alpha$  correspondante

s'obtient en appliquant la règle du n° 40. Parmi les combinaisons de  $n - \zeta - \xi'$  des  $n - \zeta$  fils, choisissons celles qui contiennent  $s'$  fils aboutissant aux  $s' + g'$  sommets. Les potentiels des circuits formés avec tout ou partie des  $s'$  fils, et chacun des  $n - \zeta - \xi' - s'$  d'une quelconque de ces combinaisons, sont les éléments du déterminant symétrique qui, dans  $A'_{n-\zeta-s'-\xi'}$ , multiplie le produit des  $\xi'$  autres résistances.

Parmi les  $\zeta + s'$  fils, les  $s'$  aboutissent à tous les sommets conservés, et les  $\zeta$  à tous ceux enlevés; on peut donc toujours trouver parmi eux  $s$  fils aboutissant aux  $s + g$  sommets du système complet, et les  $\xi = \zeta + s' + \xi' - s$  autres ont nécessairement pour coefficient le déterminant en question, dans le terme  $A_{n-s-\xi}$  de l'équation relative au système complet.

Réciproquement, tout déterminant de  $A_{n-s-\xi}$  se trouve dans un ou plusieurs des  $A'_{n-\zeta-s'-\xi'}$  des systèmes qu'on peut former en supprimant convenablement une partie des fils.

43. Considérons dans  $A_{n-s-\xi}$  un déterminant  $\delta$  de  $(n - s - \xi)^2$  éléments. Mettons à part les  $s$  fils qui sont la base de la transformation par laquelle ce déterminant est mis en évidence, et les  $\xi$  résistances qui le multiplient. Les éléments sont les potentiels des circuits fermés obtenus avec les  $s$  fils et un seul des  $(n - s - \xi)$  fils restants.

Dans le produit de  $\xi$  résistances, par lequel il est multiplié, ôtons seulement une d'elles; nous aurons  $\xi$  produits de  $\xi - 1$  résistances. Tous entrent dans  $A_{n-s-\xi+1}$ . Le coefficient de l'un d'eux est un déterminant de  $(n - s - \xi + 1)^2$  termes, qui a pour éléments tous les potentiels des circuits fermés obtenus avec les  $s$  fils et un seul des  $(n - s - \xi + 1)$  autres, lesquels sont les  $n - s - \xi$  qui entrent dans  $\delta$  et un  $a$ , de ceux du produit des  $\xi$  résistances. Ce déterminant a donc le déterminant  $\delta$  pour mineur relatif au potentiel sur lui-même du circuit formé des  $s$  fils fermés par le fil  $a$ .

Inversement, quand un produit de  $\xi$  résistances a pour coefficient dans  $A_{n-s-\xi}$  un déterminant  $\delta$ , tous les produits de  $\xi + 1$  résistances formés des  $\xi$  premières et de l'une des  $(n - s - \xi)$  autres ont pour coefficients dans  $A_{n-s-\xi+1}$  les mineurs symétriques de  $\delta$ .

*Conséquence.* -- Si un terme  $A_{n-s-\xi}$  est nul, tous ses déterminants

sont nuls, et par suite aussi tous ceux qui les ont pour mineurs, c'est-à-dire ceux de  $A_{n-s-\xi+1}$ , ..., jusqu'à  $A_{n-s}$ ; car, leurs éléments étant des potentiels de circuits fermés, les théorèmes des nos 8, 9, 10 de la première Partie sont applicables.

Donc, quand un terme  $A_{n-s-\xi}$  est nul dans  $F(\alpha)$ , tous les termes d'indice supérieur sont aussi nuls.

44. *Combinaisons indépendantes des potentiels aux sommets, et des dérivées des intensités.* — Pour que les potentiels aux sommets puissent s'éliminer, il faut que les équations que l'on combine se rapportent à des fils formant un ou plusieurs circuits fermés. Lorsqu'il en est ainsi, prenons les équations des sommets, dérivons-les et éliminons entre toutes ces équations toutes les dérivées des intensités, sauf une. On reconnaît immédiatement que le coefficient de la dernière dérivée d'intensité est égal au coefficient de la plus haute puissance de  $(\alpha)$  dans l'équation  $F(\alpha)=0$ , relative à ce système de fils, prise sous sa première forme (22). Formé par la règle du n° 40, ce coefficient est un déterminant symétrique, dont tous les éléments sont des potentiels de circuits fermés. Pour que la dernière dérivée disparaisse, il faut et il suffit que ce déterminant soit nul. Il reste alors une relation qui ne contient plus que les forces électromotrices des piles et les intensités.

45. Je suppose que les fils, entre lesquels existe, lorsqu'ils sont seuls, cette combinaison indépendante des dérivées des intensités, aient maintenant dans leur voisinage d'autres fils parcourus aussi par des courants.

Tous ces fils, tant anciens que nouveaux, forment des circuits fermés, pour que tous les potentiels aux sommets puissent disparaître. Les nouveaux fils peuvent avoir des sommets extérieurs à l'ancien réseau, d'autres communs avec lui, ou même faire apparaître sur les anciens fils des sommets nouveaux. On peut toujours ramener ce dernier cas au précédent et supposer que tous les sommets qui apparaissent sur l'ancien réseau, lorsqu'on introduit les nouveaux fils, existaient auparavant. Il suffit, pour cela, de subdiviser tout fil R sur lequel apparaissent  $m$  sommets, en  $m+1$  parties fixes,  $r_0, r_1, \dots, r_m$ , en traitant les points de division comme des sommets. A cause des lois

d'addition tant des résistances que des potentiels des circuits, l'équation du fil complet est exactement équivalente, dans le système primitif, aux équations relatives à chaque partie, accompagnées des équations de conservation de l'électricité à chacun des  $m$  sommets du fil divisé. On peut donc choisir de préférence cette dernière forme, qui se prête plus facilement à l'énoncé du résultat. Alors, tous les sommets communs sont des sommets du réseau primitif.

Cela posé, soient :

$G, S + G$  le nombre total des groupes et des sommets du réseau primitif;

$G', S' + G'$  les nombres correspondants du réseau complet formé par l'addition des  $n$  nouveaux fils;

$I$  les intensités actuelles dans les fils du réseau primitif;

$i$  dans les  $n$  nouveaux fils.

Choisissons  $S'$  fils aboutissant aux  $S' + G'$  sommets; parmi eux,  $S' - S = s$  sont nécessairement des fils nouveaux, aboutissant aux  $S' + G' - S - G = s + g$  sommets extérieurs au réseau primitif, introduits par les  $n$  fils. Les  $S$  autres peuvent être tous des fils du réseau primitif. Alors chacun des  $n - s$  nouveaux fils qui restent forme, avec tout ou partie des  $S'$  fils mis à part, un circuit fermé. Il en est de même de chacun des  $N - S$  anciens fils avec les  $S$  mis à part qui appartiennent au réseau primitif.

Prenons les dérivées des  $S'$  équations, seules distinctes, de tous les sommets, et les  $N$  équations des fils primitifs. Ces  $N$  dernières ne contiennent que les potentiels aux  $S + G$  sommets anciens, les intensités  $I$  dans les anciens fils et leurs dérivées, ainsi que les dérivées  $i'$  des intensités dans les nouveaux fils, mais non ces intensités  $i$  elles-mêmes.

Par les  $S'$  équations distinctes aux sommets, on peut éliminer dans les  $N$  équations des anciens fils les  $i'$  des  $s$  fils nouveaux et les  $I'$  des  $S$  fils anciens qu'on a mis à part. Il ne reste plus que  $N - S$  des  $I'$  et  $n - s$  des  $i'$ . Grâce au choix des  $S + s$  fils, dans une quelconque  $\alpha$  des  $N$  équations, le coefficient de  $i'_x$  est le potentiel mutuel du fil  $\alpha$  avec un circuit formé des  $S'$  fils fermés par le fil  $x$ ; le coefficient de  $I'_y$  est le potentiel mutuel du fil  $\alpha$  avec un circuit formé des  $S$  fils fermés par le fil  $y$ .

Éliminant alors les  $S$  potentiels distincts aux sommets,  $V$ , entre ces  $N$  équations, elles se réduisent à  $N - S$ , où les coefficients des  $I'$  et  $i'$  sont tous des potentiels mutuels de deux circuits fermés. Pour faire cette élimination, on a ajouté tout ou partie des équations relatives aux  $S$  fils mis à part, à chacune des  $N - S$  autres. Dans l'équation du fil  $\alpha$ , ainsi modifiée, l'un des circuits est formé des  $S$  fils fermés par le fil  $\alpha$ ; le second circuit est formé : pour  $i'_x$ , des  $S'$  fils fermés par le fil  $\alpha$ ; pour  $I'_y$ , des  $S$  fils fermés par le fil  $\gamma$ . Les termes indépendants des  $i'$  sont identiquement les mêmes que s'il n'y avait pas de fils supplémentaires. Les résultats de ces transformations sont évidents quand on les compare avec les nos 27, 28, 31, 32.

Éliminons alors  $(N - S - 1)$  des  $(N - S), I'$ , et désignons par  $I'_1$  celle qui est conservée :

Dans l'équation résultante :

1° Les termes indépendants des  $i'$  et de  $I'_1$  sont identiquement les mêmes que s'il n'y avait pas de fils supplémentaires.

2° Le coefficient de  $I'_1$  est le même déterminant symétrique ayant pour éléments des potentiels mutuels de circuits fermés, lequel est nul par hypothèse.

3° Le coefficient d'un  $i'_x$  quelconque s'obtient en remplaçant dans le coefficient d' $I'_1$  la colonne (1) par la colonne  $x$ , formée des potentiels mutuels des circuits «  $S'$  fermé par  $x$  » avec tous les circuits successifs formés des  $S$  fils anciens fermés par  $N - S$  autres. Ces déterminants ne contiennent que des potentiels de circuits fermés; le théorème 8 s'y applique donc, et tous s'annulent dès que le coefficient de  $I'_1$  est nul.

Donc, lorsqu'il existe entre les intensités des courants dans certains fils, considérés à part, une relation indépendante des dérivées des intensités, la même relation subsiste, quels que soient les nouveaux fils qu'on y ajoute, pourvu qu'on ait eu soin d'écrire la relation primitive en y séparant les termes relatifs aux divers morceaux que l'addition des nouveaux fils doit former avec chacun des anciens.

44. *Comparaison avec l'équation en  $\alpha$ .* — Lorsqu'il existe une relation entre les seules intensités d'un certain nombre  $n - p$  des fils du système, cela annule le premier terme  $A'_{n-s-p}$  de l'équation en  $\alpha$  que

l'on obtient en supprimant tous les autres fils. Ce premier terme se réduit, comme on sait (41), à un déterminant unique qui entre dans le terme  $A_{n-s-q}$ , ( $s+q=s'+p$ ), de l'équation en  $\alpha$ , relative au système complet (42), et y est multiplié par un certain produit de  $q$  résistances. Tout produit de  $\xi$  d'entre ces dernières ( $\xi < q$ ) a pour coefficient dans  $A_{n-s-\xi}$  un déterminant  $\delta$  de  $(n-s-\xi)^2$  éléments, qui a comme mineur symétrique de  $(n-s-q)^2$  éléments le déterminant  $A'_{n-s'-p}$  (43). Donc, lorsque  $A'_{n-s'-p}$  s'annule, tous ces déterminants  $\delta$  s'annulent, et  $A_{n-s}$ , qui est l'un d'eux, s'annule. Mais les termes suivants  $A_{n-s-1}$  ne s'annulent pas, parce qu'ils contiennent en même temps d'autres déterminants que ceux qui ont  $A'_{n-s'-p}$  pour mineur.

Une relation indépendante des dérivées des intensités dans une partie des fils annule donc le coefficient de la plus haute puissance de  $\alpha$  dans  $F(\alpha)$ , et celui-là seul.

Les mêmes propriétés permettent de reconnaître que le nombre de relations distinctes indépendantes des dérivées des intensités est toujours égal au nombre des coefficients des plus hautes puissances de  $\alpha$ , qui sont nuls dans  $F(\alpha)$ .

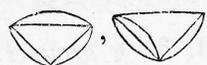
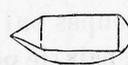
50. APPLICATIONS. — Classons d'abord les systèmes de fils d'après le degré de l'équation qu'ils fournissent. Désignons par  $S$  le nombre total ( $s+g$ ) de sommets; à chaque sommet aboutissent au moins 3 fils, de sorte que le nombre de fils minimum est le premier nombre entier non inférieur à  $\frac{3}{2}S$ , c'est-à-dire  $\frac{3}{2}S$  si  $S$  est pair, et  $\frac{3}{2}S + \frac{1}{2}$  si  $S$  est impair.

51. 1° *Un seul groupe :*

$$S = 2N - 1 \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{Nombre minimum de fils} \dots \dots 3N - 1 \\ \text{Degré minimum de l'équation} \dots \dots N + 1 \end{array} \right.$$

$$S = 2N \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{Nombre minimum de fils} \dots \dots 3N \\ \text{Degré minimum de l'équation} \dots \dots N + 1 \end{array} \right.$$

Les systèmes qui conduisent à des équations de degrés résolubles sont donc seulement les suivants :

$S = 0$ .....	1 fil.	1 <sup>er</sup> degré . . .	
$S = 2$ .....	3 fils.	2 <sup>e</sup> » . . . . .	
		4 » . . . . .	
		5 » . . . . .	
$S = 3$ . . . . .	5 » . . . . .	3 <sup>e</sup> » . . . . .	
		6 » . . . . .	
$S = 4$ . . . . .	6 » . . . . .	3 <sup>e</sup> » . . . . .	
		7 » . . . . .	
$S = 5$ .....	8 » . . . . .	4 <sup>e</sup> » . . . . .	
$S = 6$ . . . . .	9 » . . . . .	4 <sup>e</sup> » . . . . .	

52. 2<sup>o</sup> Deux groupes :

$$S = S_1 + S_2.$$

	Nombre minimum de fils.	Degré minimum.
$S_1 = 2N_1 - 1.$ } $S_2 = 2N_2 - 1.$ }	$3(N_1 + N_2) - 2$	$N_1 + N_2 + 2$
$S_1 = 2N_1 - 1.$ } $S_2 = 2N_2 \dots$ }	$3(N_1 + N_2) - 1$	$N_1 + N_2 + 2$
$S_1 = 2N_1 \dots$ } $S_2 = 2N_2 - 1.$ }	$3(N_1 + N_2) - 1$	$N_1 + N_2 + 2$
$S_1 = 2N_1 \dots$ } $S_2 = 2N_2 \dots$ }	$3(N_1 + N_2)$	$N_1 + N_2 + 2$

Systèmes qui conduisent à des équations de degrés résolubles :

$S_1 = 0, S_2 = 0 \dots$	2 fils	2 <sup>e</sup> degré....	
$S_1 = 0, S_2 = 2 \dots$	4 »	3 <sup>e</sup> » ....	
		5 »	4 <sup>e</sup> » ....
$S_1 = 2, S_2 = 2 \dots$	6 »	4 <sup>e</sup> » ....	

et c'est tout.

53. 3<sup>o</sup>  $g$  groupes. — On verra facilement que tous les systèmes formés avec  $S_p = 2N_p - 1$  ou  $S_p = 2N_p$ , d'une manière quelconque, conduisent au même degré minimum pour l'équation en  $\alpha$

$$(N_1 + N_2 + \dots + N_g) + g.$$

Si  $p$  des groupes ont un nombre impair de sommets et les  $g - p$  autres un nombre pair, le nombre minimum des fils est

$$3(N_1 + N_2 + \dots + N_g) - p.$$

On trouve ainsi le reste des systèmes résolubles :

*Trois groupes :*

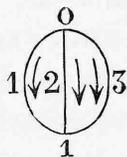
$S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = 0 \dots$	3 fils.	3 <sup>e</sup> degré....	
$S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = 2 \dots$	5 » .	4 <sup>e</sup> » ....	

*Quatre groupes :*

$S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = 0, S_4 = 0 \dots$	4 fils.	4 <sup>e</sup> degré..	
--	---------	------------------------	--

54. Je vais maintenant reprendre le raisonnement général sur

l'exemple le plus simple, celui d'un seul groupe de trois fils à deux sommets.



Les équations des fils sont

$$\begin{aligned} R_1 i_1 + 2 W_1 i'_1 + W_{1,2} i'_2 + W_{1,3} i'_3 - E_1 + V_1 - V_0 &= 0, \\ R_2 i_2 + W_{2,1} i'_1 + 2 W_2 i'_2 + W_{2,3} i'_3 - E_2 + V_1 - V_0 &= 0, \\ R_3 i_3 + W_{3,1} i'_1 + W_{3,2} i'_2 + 2 W_3 i'_3 - E_3 + V_1 - V_0 &= 0 \end{aligned}$$

et celle de l'un des sommets

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0.$$

Elles conduisent directement à l'équation

$$F(\alpha) = \begin{vmatrix} 2W_1\alpha + R_1 & W_{1,2}\alpha & W_{1,3}\alpha & 1 \\ W_{2,1}\alpha & 2W_2\alpha + R_2 & W_{2,3}\alpha & 1 \\ W_{3,1}\alpha & W_{3,2}\alpha & 2W_3\alpha + R_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation finale étant du deuxième degré, ramenons le déterminant à n'avoir que deux lignes et deux colonnes. C'est ce que l'on peut faire de trois manières différentes, suivant le fil que l'on choisit pour base de la transformation.

1° Retrançons la première ligne de la deuxième et de la troisième; il vient

$$F(\alpha) = \begin{vmatrix} 2W_1\alpha + R_1 & W_{1,2}\alpha & W_{1,3}\alpha & 1 \\ (W_{2,1} - 2W_1)\alpha - R_1 & (2W_2 - W_{1,2})\alpha + R_2 & (W_{3,2} - W_{1,3})\alpha & 0 \\ (W_{3,1} - 2W_1)\alpha - R_1 & (W_{3,2} - W_{1,2})\alpha & (2W_3 - W_{1,3})\alpha + R_3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Retrançons la première colonne de la deuxième et de la troisième;

il vient

$$F(\alpha) = \begin{vmatrix} 2w_1\alpha + R_1 & (W_{1,2} - 2w_1)\alpha - R_1 & (W_{1,3} - 2w_1)\alpha - R_1 & 1 \\ (W_{2,1} - 2w_1)\alpha - R_1 & (2w_2 - W_{1,2} - W_{2,1} + 2w_1)\alpha + R_2 + R_1 & (W_{2,3} - W_{1,3} - W_{2,1} + 2w_1)\alpha + R_1 & 0 \\ (W_{3,1} - 2w_1)\alpha - R_1 & (W_{3,2} - W_{1,2} - W_{3,1} + 2w_1)\alpha + R_1 & (2w_3 - W_{1,3} - W_{3,1} + 2w_1)\alpha + R_3 + R_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

et, en posant

$$\begin{aligned} 2w_2 + 2w_1 - 2W_{1,2} &= 2\omega_{1,2}, \\ 2w_3 + 2w_1 - 2W_{1,3} &= 2\omega_{1,3}, \\ W_{2,3} - W_{1,3} - W_{1,2} + 2w_1 &= W_{1,2|1,3} \end{aligned}$$

et supprimant la première et la dernière ligne et les mêmes colonnes,

$$F(\alpha) = \begin{vmatrix} 2\omega_{1,2}\alpha + R_1 + R_2 & W_{1,2|1,3}\alpha + R_1 \\ W_{1,2|1,3}\alpha + R_1 & 2\omega_{1,3}\alpha + R_1 + R_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est la première transformation.

$\omega_{1,2}$ ,  $\omega_{1,3}$ ,  $W_{1,2|1,3}$  étant les potentiels des circuits formés par les fils 1, 2; 1, 3, lesquels sont fermés (17).

Les deux autres transformations donneront de même

$$F(\alpha) = \begin{vmatrix} 2\omega_{3,2}\alpha + R_3 + R_2 & W_{3,2|3,1}\alpha + R_3 \\ W_{3,2|3,1}\alpha + R_3 & 2\omega_{3,1}\alpha + R_3 + R_1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$F(\alpha) = \begin{vmatrix} 2\omega_{1,2}\alpha + R_1 + R_2 & W_{2,1|2,3}\alpha + R_2 \\ W_{2,1|2,3}\alpha + R_2 & 2\omega_{2,3}\alpha + R_2 + R_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ces trois expressions sont identiques quelles que soient les résistances. Le coefficient de  $\alpha^2$  est le même dans les trois expressions, quoique sous trois formes différentes; choisissons, par exemple, la première. Le terme constant est le même,  $R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1$ , dans toutes trois. C'est pour le terme du premier degré que leur comparaison est utile: le coefficient de  $R_3$ , dans ce terme, a sa forme la plus simple dans la première expression, ainsi que le coefficient de  $R_2$ . Mais le coefficient de  $R_1$  y est compliqué, tandis que dans la seconde expression sa forme est plus simple: c'est celle-là que nous prendrons, puisqu'elles sont identiques.

L'équation est donc

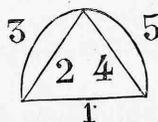
$$F(\alpha) = (4\omega_{1,2}\omega_{1,3} - W_{1,2|1,3}^2)\alpha^2 + (2\omega_{1,2}R_3 + 2\omega_{1,3}R_2 + 2\omega_{3,2}R_1)\alpha + R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1 = 0,$$

tandis que le développement direct d'une des transformations choisie à l'exclusion des autres, la première par exemple, aurait donné

$$F(\alpha) = (4\omega_{1,2}\omega_{1,3} - W_{1,2|1,3}^2)\alpha^2 + [2\omega_{1,2}R_3 + 2\omega_{1,3}R_2 + (2\omega_{1,2} + 2\omega_{1,3} - 2W_{1,2|1,3})R_1]\alpha + R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1 = 0.$$

Il est d'ailleurs facile de reconnaître directement l'identité des deux formes dans ce cas très simple, et la symétrie de l'expression y aurait conduit.

55. APPLICATION DE LA RÈGLE : *Un seul groupe, trois sommets.* —



L'équation est du troisième degré :

$$A_3\alpha^3 + A_2\alpha^2 + A_1\alpha + A_0 = 0.$$

Pour faire rapidement le choix indiqué (40), il est bon d'écrire d'abord le Tableau des contours fermés qui correspondent à chaque réduction (34) :

*Réductions.*

Nos d'ordre.	Premiers fils.	Contours fermés.		
1	1, 2	1, 2, 4	1, 2, 5	2, 3
2	1, 3	1, 3, 4	1, 3, 5	2, 3
3	1, 4	1, 4, 2	1, 4, 3	4, 5
4	1, 5	1, 5, 2	1, 5, 3	5, 4
5	2, 4	2, 4, 1	2, 3	5, 4
6	2, 5	2, 5, 1	2, 3	5, 4
7	3, 4	3, 4, 1	3, 2	4, 5
8	3, 5	3, 5, 1	3, 2	5, 4

Les arrangements 2, 3; 4, 5, formant chacun un circuit fermé, ne sont pas susceptibles de servir à une réduction.

56. *Formation des coefficients.* —  $A_0$  : Ce coefficient ne comprend que des produits de trois résistances. Écrivons donc toutes les combinaisons possibles de trois fils, et, au-dessous, les deux fils qui restent; ceux qui sont en chiffres gras doivent être exclus, parce qu'il n'y a aucune réduction possible qui leur corresponde d'après le premier Tableau :

<b>1, 2, 3</b>	1, 2, 4	1, 2, 5	1, 3, 4	1, 3, 5
<b>4, 5</b>	3, 5	3, 4	2, 5	2, 4
1, 4, 5	2, 3, 4	2, 3, 5	2, 4, 5	3, 4, 5
<b>2, 3</b>	1, 5	1, 4	1, 3	1, 2

La règle donne donc

$$A_0 = r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_5 + r_1 r_3 r_4 + r_1 r_3 r_5 + r_2 r_3 r_4 + r_2 r_3 r_5 + r_2 r_4 r_5 + r_3 r_4 r_5.$$

$A_1$  : Formons toutes les combinaisons de deux résistances, écrivons au-dessous les trois autres résistances et indiquons dans chaque cas par une parenthèse la combinaison choisie pour base de la réduction :

1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	2, 3
(3, 4), 5	(2, 4), 5	2, (3, 5)	2, (3, 4)	(1, 4), 5
2, 4	2, 5	3, 4	3, 5	4, 5
(1, 3), 5	(1, 3), 4	(1, 2), 5	(1, 2), 4	(1, 2), 3

Ici il n'y a aucune exclusion; mais certaines des réductions sont possibles de plusieurs manières : la première, par exemple, peut se faire en choisissant la combinaison (3, 4) ou la combinaison (3, 5); tandis que la sixième peut se faire en choisissant soit (1, 3), soit (1, 5), soit (3, 5), de trois manières différentes.

J'écris le potentiel d'un circuit fermé en mettant en indices tous les fils qui le forment.

Prenons le premier produit de résistances  $r_1 r_2$ . Son facteur, d'après



pour écrire immédiatement l'équation algébrique dont dépend la question (39-40). Cette équation a toujours toutes ses racines réelles et négatives (3, 24, 41). Quoique les divers fils, qui constituent le réseau aboutissent à des sommets éloignés les uns des autres, les coefficients de l'équation définitive ne dépendent que de potentiels relatifs à des circuits fermés. La règle de formation est établie pour un nombre de fils quelconques, qui peuvent être subdivisés en un nombre quelconque de groupes n'ayant d'action mutuelle que par induction.

Un classement des réseaux de fils, d'après le degré de l'équation finale, et deux exemples terminent ce travail. J'ai choisi le premier assez simple pour reprendre le raisonnement; le second montre comment on doit appliquer la règle générale.

*Vu et approuvé :*

Paris, le 17 juin 1880.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,  
MILNE EDWARDS.

*Permis d'imprimer :*

Paris, le 18 juin 1880.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,  
GRÉARD.

---

# SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

---

Théorie mathématique de la réflexion et de la réfraction de la lumière dans des milieux isotropes ou cristallisés.

*Vu et approuvé :*

Paris, le 17 juin 1880.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,  
MILNE EDWARDS.

*Permis d'imprimer :*

Paris, le 18 juin 1880.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,  
GRÉARD.

