

D'ORDRE  
258

H. F. n. f. 166. (8,1)

# THÈSES

PRÉSENTÉES

## A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

Par M. H. DURRANDE,

Ancien Élève de l'École Normale, Agrégé, Professeur au Lycée de Moulins.

- 1<sup>re</sup> THÈSE. — PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES SURFACES ANALOGUES A LA SURFACE DES ONDES.  
2<sup>e</sup> THÈSE. — DÉTERMINATION DES COEFFICIENTS DES TERMES PÉRIODIQUES DE LA FONCTION PERTURBATRICE.

Soutenues le 20 Juillet 1864, devant la  
Commission d'Examen.

MM. CHASLES, *Président*  
PUISEUX, }  
SERRET, } *Examineurs.*



MOULINS

IMPRIMERIE ET LITHOGRAPHIE DE FUDEZ FRÈRES,

AUX JARDINS-BAS.

1864

# ACADÉMIE DE PARIS.

---

## FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

---

---

<b>DOYEN</b> . . . . .	MILNE EDWARDS, Professeur. Zoologie, Anatomie, Physiologie
<b>PROFESSEURS HONORAIRES</b> . . . . .	{ PONCELET. LEFÈBRE DE FOURCY.
	{ DUMAS . . . . . Chimie. DELAFOSSÉ . . . . . Minéralogie. BALARD . . . . . Chimie. CHASLES . . . . . Géométrie supérieure. LE VERBIER . . . . . Astronomie. DUHAMEL . . . . . Algèbre supérieure. LAMÉ . . . . . Calcul des probabilités, Physique mathématique. DELAUNAY . . . . . Mécanique physique. C. BERNARD . . . . . Physiologie générale. P. DESAINS . . . . . Physique. LIOUVILLE . . . . . Mécanique rationnelle. HÉBERT . . . . . Géologie. PUISEUX . . . . . Astronomie. DUCHARTRE . . . . . Botanique. P. GRATIOLET . . . . . Anatomie, Physiologie comparée, Zoologie. JAMIN . . . . . Physique. SERRET . . . . . Calcul différentiel et intégral.
<b>PROFESSEURS</b> . . . . .	{
<b>AGRÉGÉS</b> . . . . .	{ BERTRAND . . . . . } Sciences mathématiques. J. VIEILLE . . . . . } PELIGOT . . . . . Sciences physiques.
<b>SECRÉTAIRE</b> . . . . .	E. PREZ-REYNIER.

---

---

A MA FAMILLE.

---

A LA MÉMOIRE DE

**J.-B. DURRANDE,**

ÉLÈVE ET COLLABORATEUR DE GERGONNE

(1815—1823)

# THÈSE D'ANALYSE

---

## PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES

DES

SURFACES ANALOGUES A LA SURFACE DES ONDES.

---

Je me propose d'étudier dans ce travail les propriétés d'une famille de surfaces qui se déduisent d'une manière très simple des surfaces du second ordre. L'une d'elles, la surface des ondes de Fresnel, joue, comme on le sait, un rôle fort important dans la théorie de la double réfraction ; à ce point de vue, elle a été étudiée par les géomètres les plus éminents. Après Fresnel, qui en a fait connaître l'existence, elle a fait l'objet des travaux d'Ampère. Plücker, dans un beau Mémoire, inséré au journal de Crelle, a simplifié considérablement la manière d'en obtenir l'équation par la considération de deux ellipsoïdes inverses. Il a démontré d'une manière élégante les propriétés des points singuliers et des plans tangents qui touchent la surface suivant un cercle. Je citerai encore à ce sujet les travaux d'Hamilton, de Sénarmont, et enfin les importants chapitres que M. Lamé a consacrés à cette étude dans ses *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité*.

Dans le travail que je présente, je ne m'occupe que des propriétés purement géométriques des surfaces analogues à celle de Fresnel. Je pars d'une définition commune à toutes les surfaces de la même famille, et que j'ai fait connaître dans les *Nouvelles Annales de mathématiques* (\*). Je démontre les propriétés générales des surfaces contenues dans l'équation que j'obtiens; puis je m'occupe des divers genres que cette équation peut contenir. Naturellement la *surface des ondes* proprement dite doit tenir une place importante dans cette étude; mais comme j'ai publié dans les *Annales* une monographie de cette surface, j'ai pu renvoyer à ce travail pour les démonstrations d'un certain nombre de propriétés que je me borne à énoncer (\*\*).

---

I

DÉFINITION.

(1) Soient

$$(1) \quad A x^2 + B y^2 + C z^2 = 1,$$

l'équation d'une surface du second ordre à centre, et

$$(2) \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

celle d'une sphère concentrique à cette surface. Si on suppose le rayon R compris entre le plus grand et le plus petit des demi-axes, l'intersection de ces surfaces est une conique sphérique que l'on peut représenter par les équations

$$(3) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ \left( A - \frac{1}{R^2} \right) x^2 + \left( B - \frac{1}{R^2} \right) y^2 + \left( C - \frac{1}{R^2} \right) z^2 = 0, \end{cases}$$

---

(\*) *Nouv. Annales*, t. XX, p. 456.

(\*\*) *Id.* t. II (2<sup>e</sup> Série), p. 193 et 252.

la seconde s'obtenant en retranchant de l'équation (1), l'équation (2), dont on a préalablement divisé les deux membres par  $R^2$ .

La conique sphérique supplémentaire de celle que représente le groupe (3) aura pour équations

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ \frac{x^2}{AR^2-1} + \frac{y^2}{BR^2-1} + \frac{z^2}{CR^2-1} = 0, \end{array} \right.$$

la seconde des équations (4), représentant le cône supplémentaire de celui que représente la seconde des équations (3).

Ceci posé, si l'on fait varier le paramètre  $R$ , pendant que la conique (3) décrit la surface (1), la conique sphérique (4) engendre une certaine surface, dont on aura l'équation en éliminant  $R$  entre les deux équations du groupe (4). On obtient ainsi

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} (x^2 + y^2 + z^2) [BC x^2 + AC y^2 + AB z^2] \\ - (B+C) x^2 - (C+A) y^2 - (A+B) z^2 + 1 = 0. \end{array} \right.$$

Telle est l'équation des surfaces que je me propose d'étudier; on voit qu'on peut les définir : *le lieu géométrique des coniques sphériques supplémentaires de celles qu'on obtient en coupant une surface du second ordre à centre par des sphères concentriques.*

Nous verrons que l'équation (5) renferme comme cas particulier l'équation de la surface des ondes de Fresnel; c'est pourquoi nous donnerons encore aux surfaces représentées par cette équation le nom générique de *surfaces des ondes.*

## II

EXISTENCE DE DEUX NAPPES EN GÉNÉRAL. — CONIQUES ORTHOGONALES.

---

(2) Pour abrégér, nous désignerons souvent dans ce qui va suivre, un groupe de termes analogues par l'un d'entre eux, précédé du signe S: c'est ainsi, par exemple, que la seconde équation du groupe (3) pourra s'écrire :

$$S. \left( A - \frac{1}{R^2} \right) x^2 = 0.$$

THÉORÈME I. — *Le plan tangent commun aux deux cônes*

$$(6) \quad S. \left( A - \frac{1}{R^2} \right) x^2 = 0, \quad (7) \quad S. \left( A - \frac{1}{R'^2} \right) x^2 = 0,$$

*coupe la surface du second ordre (1) suivant une section passant par le centre, dont les axes sont 2 R, et 2 R'.*

Je désigne par  $OA = R$ , l'arête de contact du cône (6) avec son plan tangent; soit  $AT$  la tangente à la conique sphérique (3) au point  $A$ . La droite  $AT$  est à la fois tangente à la sphère de rayon  $R$  et à la surface (1); elle est de plus dans le plan tangent au cône mené suivant  $OA$ ; donc  $OA$  étant perpendiculaire à  $AT$ , le plan mené par ces deux droites coupe la surface du second ordre suivant une section dont  $OA = R$  est un demi-axe.

Donc la section déterminée dans la surface (1) par le plan tangent commun aux cônes (6) et (7) aura bien pour axes  $2 R$  et  $2 R'$ .

(3) Il résulte de ce théorème un moyen bien simple pour trouver immédiatement l'équation dont les racines sont les axes d'une section faite dans une surface du second ordre par un plan central

$$(8) \quad mx + ny + pz = 0.$$

Désignons par  $R, R'$ , les demi-axes inconnus de cette section; le plan (8) doit être tangent au cône

$$(6) \quad S. \left( A - \frac{1}{R^2} \right) x^2 = 0,$$

et doit, par conséquent, pouvoir se mettre sous la forme

$$S. \left( A - \frac{1}{R^2} \right) x' x = 0,$$

$(x' y' z')$  étant les coordonnées d'un point quelconque de l'arête de contact, ce qui entraîne les conditions suivantes

$$\frac{\left( A - \frac{1}{R^2} \right) x'}{m} = \frac{\left( B - \frac{1}{R^2} \right) y'}{n} = \frac{\left( C - \frac{1}{R^2} \right) z'}{p};$$

comme les coordonnées  $x' y' z'$  doivent satisfaire à l'équation (6), on en conclut

$$(9) \quad \frac{m^2}{A - \frac{1}{R^2}} + \frac{n^2}{B - \frac{1}{R^2}} + \frac{p^2}{C - \frac{1}{R^2}} = 0.$$

Comme d'ailleurs rien ne distingue  $R$  de  $R'$ , l'équation (9) est bien l'équation cherchée.

(4) THÉORÈME II. — *Les deux cônes*

$$(10) \quad S. \frac{x^2}{A - \frac{1}{R^2}} = 0, \quad (11) \quad S. \frac{x^2}{A - \frac{1}{R'^2}} = 0,$$

*supplémentaires des cônes (6) et (7), ont une arête commune perpendiculaire au plan tangent commun aux deux cônes (6) et (7), et ils se coupent orthogonalement suivant cette arête.*

Puisque les cônes (10) et (11) sont supplémentaires des cônes (6) et (7), leur arête commune est bien évidemment perpendiculaire au plan tangent,



commun à ces deux derniers, et leurs plans tangents, suivant cette arête commune, sont perpendiculaires aux deux arêtes de contact du plan tangent commun; or, ces deux droites sont perpendiculaires entre elles comme axes d'une section plane de la surface (1); donc les plans tangents aux cônes (10) et (11), suivant l'arête commune, sont aussi perpendiculaires entre eux.

(5) Il résulte du théorème précédent et de la définition des *surfaces des ondes*, que, sur une même direction et d'un même côté du centre, il y a deux rayons vecteurs  $R$ ,  $R'$ . En effet, le cône (10) et la surface (5) ont leurs points communs sur la sphère  $R$ ; le cône (11) et la surface (5) se coupent sur la sphère  $R'$ ; donc l'arête commune aux deux cônes (10) et (11) perce la surface (5) en deux points ayant pour rayons vecteurs  $R$ ,  $R'$ . Les surfaces des ondes sont donc, en général, des surfaces à deux nappes, ce que l'on pourrait d'ailleurs prévoir d'après le degré de l'équation (5).

(6) THÉORÈME III. — *Les cônes (10) et (11) déterminent sur chaque nappe de la surface des courbes orthogonales.*

En effet, les deux cônes (10) et (11) sont orthogonaux; l'un coupe la surface des ondes suivant une conique sphérique, dont la tangente, au point d'intersection des deux courbes, est perpendiculaire à l'intersection des deux plans tangents aux cônes (10) et (11). Cette tangente est dans l'un de ces plans tangents, elle est donc perpendiculaire à l'autre, et par suite à la tangente à la seconde courbe, qui passe par son pied dans ce plan. Donc les deux courbes sont orthogonales.

(7) Il résulte des théorèmes I et II, une autre manière de définir les surfaces des ondes.

*On fait passer un plan par le centre d'une surface du second ordre; ce plan détermine une section dont les demi-axes sont  $R$ ,  $R'$ ; sur la perpendiculaire au plan diamétral passant par le centre, et de part et d'autre de ce point, on porte les longueurs  $R$ ,  $R'$ ; le lieu des extrémités de ces droites est une surface des ondes.*

### III

POINTS CORRESPONDANTS SUR LA SURFACE DU SECOND ORDRE  
ET SUR LA SURFACE DES ONDES.

---

(8) Je viens de faire voir comment on passe d'une surface du second ordre à la surface des ondes correspondante; il s'agit de savoir déterminer les relations qui existent entre les coordonnées de deux points qui se correspondent sur les deux surfaces. Soit M un point de la surface (1), O, le centre; il existe une section plane de cette surface et une seule, sauf le cas des sections principales, pour laquelle le diamètre OM est un axe. Sur la normale, au plan de cette section, je porte une longueur OM' égale à OM, et le point M' est un point de la surface des ondes. *C'est le point M' que j'appelle le correspondant du point M.*

Je désigne par  $(x' y' z')$  les coordonnées du point M, par  $(x'' y'' z'')$  celles du point M'. J'observe que la droite OM' est perpendiculaire au plan de la section dont OM est le demi-axe, et par suite en faisant  $OM = R$ , au plan tangent du cône

$$S. \quad \left( A - \frac{1}{R^2} \right) x^2 = 0,$$

c'est-à-dire au plan

$$S. \quad \left( A - \frac{1}{R^2} \right) x' x = 0;$$

le point M' étant sur la perpendiculaire à ce plan, on a les relations

$$(12) \quad \frac{x''}{\left( A - \frac{1}{R^2} \right) x'} = \frac{y''}{\left( B - \frac{1}{R^2} \right) y'} = \frac{z''}{\left( C - \frac{1}{R^2} \right) z'} = \frac{R}{D'}$$

en faisant

$$D' = \sqrt{S. \left(A - \frac{1}{R^2}\right)^2 x'^2};$$

d'où

$$(13) \left\{ \begin{array}{l} x'' = \pm \frac{R}{D'} \left(A - \frac{1}{R^2}\right) x' , \\ y'' = \pm \frac{R}{D'} \left(B - \frac{1}{R^2}\right) y' , \\ z'' = \pm \frac{R}{D'} \left(C - \frac{1}{R^2}\right) z' , \end{array} \right.$$

Où si l'on écrit les relations (12) sous la forme

$$\frac{\frac{x'}{x''}}{A - \frac{1}{R^2}} = \frac{\frac{y'}{y''}}{B - \frac{1}{R^2}} = \frac{\frac{z'}{z''}}{C - \frac{1}{R^2}} = -\frac{R}{D} ,$$

en posant

$$D = \sqrt{S. \frac{x''^2}{\left(A - \frac{1}{R^2}\right)^2}}$$

on aura

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} x' = \pm \frac{R}{D} \frac{x''}{A - \frac{1}{R^2}} \\ y' = \pm \frac{R}{D} \frac{y''}{B - \frac{1}{R^2}} \\ z' = \pm \frac{R}{D} \frac{z''}{C - \frac{1}{R^2}} \end{array} \right.$$

Ce sont ces dernières formules qui serviront à passer des propriétés

d'une surface du second ordre aux propriétés de la surface des ondes. Ainsi le point M décrivant une certaine courbe sur la surface du second ordre, on pourra facilement en déduire la courbe que décrit le point correspondant sur la surface des ondes.

Par exemple, si on multiplie les équations (14) respectivement par  $x'' y'' z''$ ; qu'on les ajoute en remarquant que

$$x' x'' + y' y'' + z' z'' = 0,$$

on obtient

$$(15) \quad \text{S.} \quad \frac{x''^2}{A - \frac{1}{R^2}} = 0,$$

ce qui est une des formes de l'équation de la surface des ondes, résultant directement de l'équation (5).

Ou bien encore, si on multiplie les équations (14) par  $Ax'$ ,  $By'$ ,  $Cz'$ , et qu'on les ajoute en ayant soin de remplacer dans les seconds membres  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , par leurs valeurs en  $x''$ ,  $y''$ ,  $z''$ , nous aurons en remarquant que

$$\text{S.} \quad Ax'^2 = 1,$$

$$(16) \quad \frac{R^2}{D^2} \text{S.} \quad \frac{Ax''^2}{\left(A - \frac{1}{R^2}\right)^2} = 1,$$

autre forme de l'équation de la surface des ondes, et qui se ramène facilement à l'équation (15).

Remarquons en passant une relation assez remarquable entre les dénominateurs  $D$ ,  $D'$  des équations (14) et (13).

En multipliant l'une par l'autre, les équations correspondantes des groupes (13) et (14) il vient

$$\frac{R^2}{DD'} = 1,$$

ou bien

$$DD' = R^2.$$

Ainsi le produit de ces deux dénominateurs est constant.

---

## IV

### PLAN TANGENT.

(9) Il existe entre les plans tangents d'une surface du second ordre et de la surface des ondes qui s'en déduit, aux points correspondants une relation importante et qui fournit l'énoncé suivant :

**THÉORÈME IV.** — *En deux points correspondants M, M', sur la surface du second ordre et sur la surface des ondes, les plans tangents sont perpendiculaires entre eux et parallèles au second axe de la section de la surface du second ordre dont OM est déjà un demi-axe.*

Soit

$$S \frac{x^2}{A - \frac{1}{R^2}} = F(x, y, z) = 0,$$

l'équation de la surface des ondes, R étant non plus une constante, mais la somme des carrés des variables ; on en déduit

$$\frac{dF}{dx} = \frac{2x}{A - \frac{1}{R^2}} - \frac{1}{R^4} \frac{dR^2}{dx} S. \frac{x^2}{\left(A - \frac{1}{R^2}\right)^2}$$

ou bien

$$\frac{dF}{dx} = \frac{2x}{A - \frac{1}{R^2}} - 2 \frac{D^2}{R^4} x,$$

avec des valeurs analogues pour  $\frac{dF}{dy}$ ,  $\frac{dF}{dz}$ .

D'autre part, en désignant par  $f(x, y, z) = 0$  l'équation (1), on a

$$\frac{df}{dx} = 2Ax;$$

on aura donc en particulier pour les points  $(x', y', z')$  et  $(x'', y'', z'')$  :

$$(17) \quad \frac{dF}{dx''} = \frac{2x''}{A - \frac{1}{R^2}} - 2 \frac{D^2}{R^4} x'',$$

et 
$$\frac{df}{dx'} = 2Ax',$$

ou à cause de la première des équations (14),

$$(18) \quad \frac{df}{dx'} = 2 \left[ \frac{R x''}{D} + \frac{x'}{R^2} \right],$$

multipliant membre à membre (17) et (18), on a

$$\frac{1}{4} \frac{dF}{dx''} \frac{df}{dx'} = \frac{R}{D} \frac{x''^2}{A - \frac{1}{R^2}} \frac{D}{R^3} x''^2 + \frac{1}{R^2} \frac{x' x''}{A - \frac{1}{R^2}} - 2 \frac{D^2}{R^6} x' x'',$$

Si on fait la somme des trois expressions analogues, et si l'on remarque que

$$S. \frac{x''^2}{A - \frac{1}{R^2}} = 0, \quad S. x''^2 = R^2, \quad S. \frac{x' x''}{A - \frac{1}{R^2}} = \frac{D}{R}, \quad S. x' x'' = 0,$$

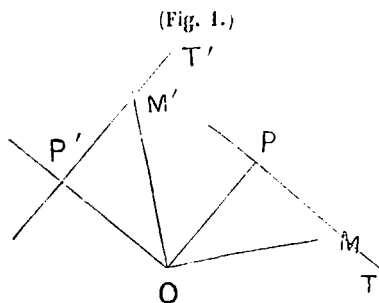
on trouve

$$\frac{1}{4} S. \frac{dF}{dx''} \frac{df}{dx'} = \frac{D}{R} - \frac{D}{R} = 0.$$

Donc les plans tangents en  $(x', y', z')$  et  $(x'', y'', z'')$  sont perpendiculaires entre eux.

D'ailleurs les tangentes en ces deux points aux deux coniques sphériques (3) et (4) sont bien évidemment parallèles au second axe de la section de la surface du second ordre dont  $OM$  est déjà un axe, il en est donc de même des deux plans tangents en  $M$  et en  $M'$  qui contiennent respectivement ces deux droites.

(10) Il résulte de ce théorème un nouveau mode de génération des surfaces des ondes.



Soit  $O$  le centre de la surface du second ordre et de la surface des ondes;  $M$ , un point de la première;  $M'$ , le point correspondant sur la seconde;  $MT$  la trace du plan tangent en  $M$  sur le plan des deux rayons  $OM, OM'$ , qui est celui de la fig. 1;  $M'T'$  la trace du plan tangent en  $M'$  sur le même plan. Nous savons que par  $OM$  passe

une section de la surface du second ordre dont le second axe est perpendiculaire au plan de la figure. Il résulte évidemment du théorème IV que l'on peut amener le plan tangent en  $M$  à coïncider avec le plan tangent en  $M'$ , par une rotation de  $90^\circ$  autour de l'axe perpendiculaire au plan de la figure.

Si nous remarquons encore que les perpendiculaires  $OP, OP'$  sont dans le plan  $MO M'$ , et que ces perpendiculaires sont les plus courtes distances du centre aux deux plans tangents en  $M$  et en  $M'$ , nous pourrions avoir l'énoncé suivant :

*La surface des ondes d'une surface de second ordre est l'enveloppe des plans tangents à celle-ci que l'on fait tourner, chacun de  $90^\circ$  autour d'un diamètre perpendiculaire au plan du diamètre du point de contact et de la plus courte distance de ce plan tangent au centre.*

V

RELATIONS ENTRE LES PODAIRES CENTRALES D'UNE SURFACE DU SECOND  
ORDRE ET DE LA SURFACE DES ONDES CORRESPONDANTE.

---

(11) J'appelle *Podaire centrale* d'une surface à centre quelconque le lieu des *pieds* des perpendiculaires abaissées du centre sur tous les plans tangents à cette surface; pour abrégier, je dirai simplement Podaire, mais il est entendu que tout ce qui suit se rapporte aux podaires centrales.

La podaire d'une surface du second ordre a une équation facile à trouver; si on désigne par  $\xi$ ,  $\tau$ ,  $\zeta$ , les coordonnées du pied de la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent à la surface (1), au point  $(x', y', z')$ , on trouve les relations suivantes en posant

$$\begin{aligned} \xi^2 + \tau^2 + \zeta^2 &= \Delta^2, \\ \xi &= \Delta^2.Ax', \quad \tau = \Delta^2.By', \quad \zeta = \Delta^2.Cz', \end{aligned}$$

et en éliminant  $x', y', z'$ , entre ces relations et l'équation (1),

$$(19) \quad \Delta^4 = \frac{\xi^2}{A} + \frac{\tau^2}{B} + \frac{\zeta^2}{C}.$$

(12) Pour trouver l'équation de la podaire de la surface des ondes qui correspond à la surface (1), je remarque que les plans tangents aux deux surfaces en des points correspondants sont à la même distance du centre; c'est une conséquence du théorème IV. Ainsi,  $OP' = OP$  (*fig. 1*), c'est-à-dire que

*La podaire de la surface du second ordre et celle de la surface des ondes ont les mêmes rayons vecteurs.*



Je remarque encore que l'équation (19) peut se mettre sous la forme

$$(20) \quad \left(\Delta^2 - \frac{1}{A}\right) \xi^2 + \left(\Delta^2 - \frac{1}{B}\right) \eta^2 + \left(\Delta^2 - \frac{1}{C}\right) \zeta^2 = 0$$

et on voit que si  $\Delta$  reste constant, ce rayon vecteur (OP) décrit un cône représenté par l'équation (20); je dis que le rayon vecteur OP' de la podaire de la surface des ondes décrit en même temps le cône supplémentaire. Soient  $\xi', \eta', \zeta'$ , les coordonnées du point P';  $\xi, \eta, \zeta$ , celles du point P;  $x', y', z'$ , celles du point M; la droite OP' est parallèle à MP; donc on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\xi'}{\zeta'} = \frac{\frac{\xi}{\zeta} - \frac{x'}{z'}}{\frac{\eta}{\zeta} - \frac{z'}{z}} \frac{\zeta'}{\zeta}, \\ \frac{\eta'}{\zeta'} = \frac{\frac{\eta}{\zeta} - \frac{y'}{z'}}{\frac{\eta}{\zeta} - \frac{z'}{z}} \frac{\zeta'}{\zeta}; \end{array} \right.$$

et, en exprimant  $x', y', z'$ , en  $\xi, \eta, \zeta$ , on trouve

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\xi'}{\zeta'} = \frac{\Delta^2 - \frac{1}{A}}{\Delta^2 - \frac{1}{C}} \frac{\xi}{\zeta}, \\ \frac{\eta'}{\zeta'} = \frac{\Delta^2 - \frac{1}{B}}{\Delta^2 - \frac{1}{C}} \frac{\eta}{\zeta}; \end{array} \right.$$

enfin si on élimine les rapports  $\frac{\xi'}{\zeta'}$ ,  $\frac{\eta'}{\zeta'}$ , entre ces relations et l'équation (20), il vient :

$$(22) \quad \frac{\xi'^2}{\Delta^2 - \frac{1}{A}} + \frac{\eta'^2}{\Delta^2 - \frac{1}{B}} + \frac{\zeta'^2}{\Delta^2 - \frac{1}{C}} = 0,$$

équation d'un cône supplémentaire du cône (20) tant que  $\Delta$  reste constant, mais qui représente bien la podaire de la surface des ondes si  $\Delta$  est con-

sidéré comme le rayon vecteur de la surface, c'est-à-dire comme égal à  $\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2}$ .

Les équations des deux podaires ayant les formes (20) et (22), on voit donc que :

*Une même sphère de rayon  $\Delta$  coupe les podaires de la surface du second ordre et de la surface des ondes suivant deux coniques sphériques supplémentaires.*

Ainsi il est remarquable que les podaires jouissent de la même propriété que les surfaces elles-mêmes.

(13) J'ai encore découvert une analogie de plus. Tout le monde sait que la somme des carrés de trois rayons vecteurs de la podaire d'une surface du second ordre, perpendiculaires entre eux, deux à deux, est constante. C'est le théorème de Monge, sous un énoncé différent ; il résulte d'ailleurs immédiatement de l'équation (19).

Soient en effet  $(\alpha, \xi, \gamma)$  les cosinus des angles qu'un rayon vecteur  $\Delta$  fait avec les axes ; en donnant les indices 1, 2, 3, à trois rayons vecteurs rectangulaires et aux cosinus correspondants, l'équation (19) fournit trois équations telles que

$$\Delta_1^2 = \frac{\alpha_1^2}{A} + \frac{\xi_1^2}{B} + \frac{\gamma_1^2}{C},$$

d'où, en faisant la somme, et tenant compte des relations bien connues entre les neuf cosinus,

$$S. \Delta_1^2 = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}.$$

Voici la propriété correspondante de la podaire de la surface des ondes.

Si dans l'équation (21) nous résolvons, par rapport à  $\Delta$ , il vient d'abord en chassant les dénominateurs,

$$\Delta^6 - S. \frac{(B + C) \zeta'^2}{BC} \Delta^4 + S. \frac{\zeta'^2}{BC} = 0,$$

ou bien en remplaçant les coordonnées  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$ , par leurs valeurs en fonctions des cosinus des angles du rayon vecteur  $\Delta$  avec les axes, on aura

$$(23) \quad \Delta^4 - S. \frac{(B + C) \alpha^2}{BC} \Delta^2 - S. \frac{\alpha^2}{BC} = 0.$$

On voit d'abord que la surface a deux rayons vecteurs de longueurs différentes sur chaque direction; en d'autres termes, la surface est à deux nappes en général. Désignons par  $\Delta'$ ,  $\Delta''$  les deux racines différentes de l'équation (23), on aura

$$(24) \quad \begin{cases} \Delta'^2 + \Delta''^2 = S. \frac{B + C}{BC} \alpha^2, \\ \Delta'^2 \Delta''^2 = S. \frac{\alpha^2}{BC}. \end{cases}$$

Cela posé, si nous affectons les indices 1, 2, 3, à trois directions rectangulaires, on aura, d'après la première des deux relations précédentes, trois relations de la forme

$$\Delta_1'^2 + \Delta_1''^2 = S. \frac{B + C}{BC} \alpha_1^2;$$

et en faisant leur somme comme précédemment, il vient

$$S. (\Delta_1'^2 + \Delta_1''^2) = S. \frac{B + C}{BC} = 2 \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \right).$$

*Donc la somme des trois couples de carrés des rayons vecteurs de la podaire de la surface des ondes pris sur trois directions rectangulaires est constante, et égale au double de la somme des carrés de trois rayons vecteurs rectangulaires de la podaire de la surface du second ordre.*

La seconde des relations (24) fournira de même l'équation

$$S. \Delta_1'^2 \Delta_1''^2 = S. \frac{1}{BC}.$$

*Donc la somme des carrés des trois produits que l'on obtient en multi-*

pliant les deux rayons vecteurs pris sur chacune des trois directions rectangulaires est constante.

## VI

### POINTS CORRESPONDANTS SUR LES DEUX PODAIRES.

(14) Désignons, comme nous l'avons déjà fait, par  $(\xi', \eta', \zeta')$ ,  $(\xi, \eta, \zeta)$  les pieds des perpendiculaires abaissées du centre sur les plans tangents à la surface des ondes et à la surface du second ordre en deux points correspondants M, M'. Ces points, P, P', dans la fig. 1, sont ce que j'appelle deux points correspondants sur les deux podaires; nous avons déjà dans les équations (21) des relations entre les coordonnées de ces deux points; on peut leur donner une forme plus commode; on a en effet :

$$\frac{\xi'}{\left(\Delta^2 - \frac{1}{A}\right) \xi} = \frac{\eta'}{\left(\Delta^2 - \frac{1}{B}\right) \eta} = \frac{\zeta'}{\left(\Delta^2 - \frac{1}{C}\right) \zeta} = \pm \sqrt{S \left(\Delta^2 - \frac{1}{A}\right)^2 \xi^2}$$

d'où, en désignant le radical par H,

$$(25) \left\{ \begin{array}{l} \xi' = \pm \frac{\Delta}{H} \left(\Delta^2 - \frac{1}{A}\right) \xi, \\ \eta' = \pm \frac{1}{H} \left(\Delta^2 - \frac{1}{B}\right) \eta, \\ \zeta' = \pm \frac{\Delta}{H} \left(\Delta^2 - \frac{1}{C}\right) \zeta; \end{array} \right.$$

ou bien, si l'on résout par rapport à  $\xi, \eta, \zeta$ , et qu'on pose

$$\sqrt{S \cdot \frac{\xi'^2}{\left(\Delta - \frac{1}{A}\right)^2}} = H',$$

on trouve

$$(26) \left\{ \begin{array}{l} \zeta = \pm \frac{\Delta}{H'} \cdot \frac{\zeta'}{\Delta^2 - \frac{1}{A}}, \\ \eta = \pm \frac{\Delta}{H'} \cdot \frac{\eta'}{\Delta^2 - \frac{1}{B}}, \\ \zeta = \pm \frac{\Delta}{H'} \cdot \frac{\zeta''}{\Delta^2 - \frac{1}{C}}. \end{array} \right.$$

Si l'on multiplie respectivement les équations de même rang des groupes (25) et (26), on trouve

$$\Delta^2 = HH',$$

relation analogue à celle qui existe entre les dénominateurs  $D$ ,  $D'$  des relations entre les points correspondants sur la surface des ondes et sur la surface du second ordre.

Il est d'ailleurs facile de déduire des relations (25), combinées avec les équations (13) ou (14), des relations entre les coordonnées  $(\zeta', \eta', \zeta'')$  et  $(x'', y'', z'')$  du point  $P'$  et du point  $M'$ ; on trouverait encore ces relations au moyen des coefficients du plan tangent; il viendrait ainsi

$$(27) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\zeta'}{\Delta^2} = -2 \frac{R^2}{D^2} \cdot \frac{dF}{dx''}, \\ \frac{\eta'}{\Delta^2} = -2 \frac{R^2}{D^2} \cdot \frac{dF}{dy''}, \\ \frac{\zeta''}{\Delta^2} = -2 \frac{R^2}{D^2} \cdot \frac{dF}{dz''}. \end{array} \right.$$

Ces dernières relations sont, comme on le voit, assez compliquées; cependant elles peuvent devenir utiles dans certains cas particuliers.

## VII

DISCUSSION DES DIVERSES FORMES DE SURFACES DONNÉES PAR L'ÉQUATION (5).

(15) Nous pouvons faire plusieurs hypothèses particulières sur ces coefficients A, B, C, qui entrent dans l'équation (5).

PREMIER GENRE. —  $A > 0, B > 0, C > 0$ ; ce que l'on exprime en posant

$$A = \frac{1}{a^2}, B = \frac{1}{b^2}, C = \frac{1}{c^2},$$

ce qui n'exclut pas les hypothèses particulières :

$$B = C,$$

ou bien encore

$$A = B = C.$$

La surface du second ordre appartient alors au genre ellipsoïde ; dans le cas des trois axes inégaux, elle a pour équation

$$(29) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

et la surface des ondes

$$(29) \quad \frac{a^2 x^2}{R^2 - a^2} + \frac{b^2 y^2}{R^2 - b^2} + \frac{c^2 z^2}{R^2 - c^2} = 0,$$

ou en chassant les dénominateurs :

$$(30) \quad (x^2 + y^2 + z^2) [a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2] - a^2 (b^2 + c^2) x^2 - b^2 (a^2 + c^2) y^2 - c^2 (a^2 + b^2) z^2 + a^2 b^2 c^2 = 0;$$

on retrouve bien là l'équation de la surface des ondes de Fresnel. La forme en est bien connue, et je puis d'ailleurs renvoyer sur ce point au travail déjà mentionné (\*).

---

(\*) *Nouvelles Annales*. — 2<sup>me</sup> série, t. II, p. 196.

(16) Si l'on suppose que l'ellipsoïde soit de révolution autour de l'un de ses axes, de  $2a$  par exemple, il suffit de faire

$$b^2 = c^2,$$

et l'équation (30) se transforme facilement en celle-ci :

$$(31) [x^2 + y^2 + z^2 - b^2] [a^2x^2 + b^2(y^2 + z^2) - a^2b^2] = 0;$$

ce qui montre que la surface se compose d'un ellipsoïde aplati de révolution (\*), et d'une sphère qui est intérieure à l'ellipsoïde et qui le touche en deux points situés au milieu de l'axe de révolution.

Si l'on suppose  $b = a$ , la conclusion est la même avec cette différence que la sphère est extérieure. Enfin si l'on suppose

$$a = b = c,$$

la surface des ondes se réduit à une sphère.

Ainsi le premier genre de surfaces contenu dans l'équation (5) se compose de surfaces fermées à deux nappes en général, réunies par quatre points ou ombilics si les axes sont inégaux, par deux points seulement si l'ellipsoïde primitif est de révolution; se réduisant enfin à une seule nappe sphérique en même temps que l'ellipsoïde primitif. Nous pourrions donc désigner ce genre sous le nom de *Surface des ondes ellipsoïdale*.

(17) L'équation de la podaire correspondante est

$$(32) \frac{\xi'^2}{\Delta^2 - a^2} + \frac{\eta'^2}{\Delta^2 - b^2} + \frac{\zeta'^2}{\Delta^2 - c^2} = 0.$$

On en déduirait facilement les variétés correspondant aux diverses variétés de la surface des ondes.

(18) DEUXIÈME GENRE. —  $A > 0$ ,  $B > 0$ ,  $C < 0$ . — Posons :

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad B = \frac{1}{b^2}, \quad C = -\frac{1}{c^2};$$

(\*) On suppose  $a > b > c$ .

la surface du second ordre est alors un hyperboloïde à une nappe ayant pour équation

$$(33) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

et la surface des ondes

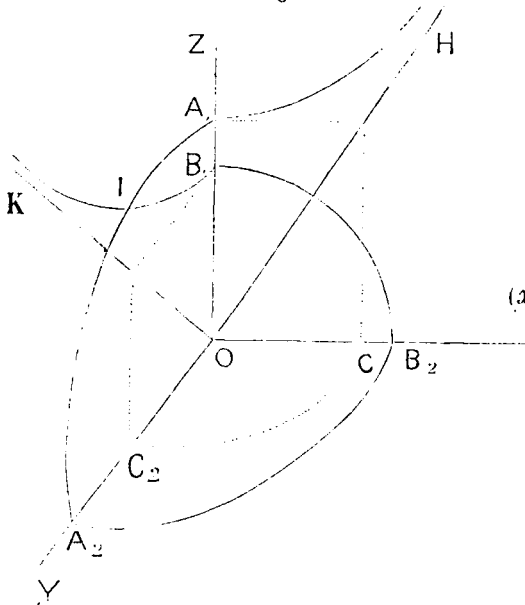
$$(34) \quad (x^2 + y^2 + z^2) [a^2 x^2 + b^2 y^2 - c^2 z^2] - a^2 (b^2 - c^2) x^2 - b^2 (a^2 - c^2) y^2 + c^2 (a^2 + b^2) z^2 - a^2 b^2 c^2 = 0.$$

Pour se faire une idée de la forme de la surface, cherchons ses intersections par les plans coordonnés. Pour  $z = 0$ , on aura

$$(x^2 + y^2 + c^2) (a^2 x^2 + b^2 y^2 - a^2 b^2) = 0;$$

équation qui se décompose en deux autres représentant par leur combi-

(Fig. 2.)



naison avec  $z = 0$ , une ellipse réelle  $(a, b)$  et un cercle imaginaire  $(c)$ , sur le plan XY (fig. 2).

Pour  $y = 0$ , l'équation (34) devient

$$(x^2 + z^2 - b^2) (a^2 x^2 - c^2 z^2 + a^2 c^2) = 0$$

× laquelle se décompose en deux autres, représentant, avec  $y = 0$ , un cercle réel  $(b)$  et une hyperbole  $(a, c)$ .

Enfin pour  $x = 0$ , on aurait encore un cercle réel  $(a)$  et une hyperbole  $(b, c)$ .

Il est facile de voir que ces deux dernières courbes se coupent en quatre points situés dans le plan ZY; ces points ont pour coordonnées :

$$x = 0, \quad y = \pm c \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + c^2}}, \quad z = \pm b \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2}}.$$



En construisant les portions des traces de la surface, situées dans l'angle trièdre des coordonnées positives, on obtiendra la fig. 2. Pour se faire une idée encore plus complète de cette surface, il faut se représenter le cône dont les traces sont les asymptotes OH, et OK, aux deux hyperboles que nous avons trouvées sur le plan des ZX et des ZY; ce cône, qui est symptote à la surface des ondes a pour équation

$$(35) \quad a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 = 0,$$

et est le supplémentaire du cône asymptote de l'hyperboloïde primitif.

(19) Si l'on suppose

$$b = a$$

l'équation (34) prend la forme

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2) [a^2(x^2 + y^2) - c^2z^2 + a^2c^2] = 0,$$

et elle représente l'ensemble d'une sphère et d'un hyperboloïde de révolution à deux nappes.

Enfin si l'hyperboloïde primitif se réduit à son cône asymptote, il en est de même de la surface des ondes.

L'aspect général des surfaces du second genre est donc celui d'un hyperboloïde à deux nappes, entre lesquelles serait placé un noyau de forme ellipsoïdale pénétrant les deux nappes de l'hyperboloïde. On peut donc désigner ce genre par le nom de surface des ondes hyperboloïdales à deux nappes.

(20) TROISIÈME GENRE. —  $A > 0, B < 0, C < 0$ . — Posons :

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad B = -\frac{1}{b^2}, \quad C = -\frac{1}{c^2};$$

ce qui n'exclut pas l'hypothèse

$$b = c.$$

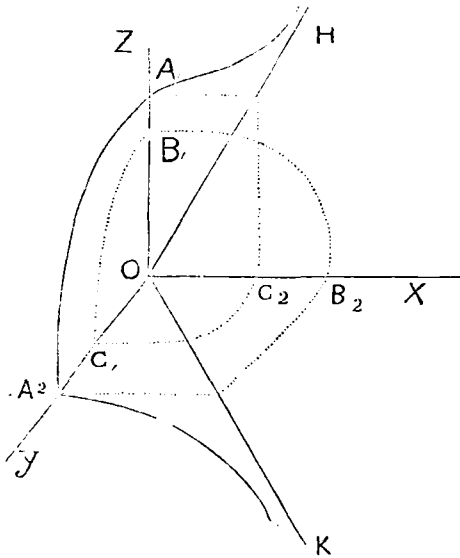
La surface du second ordre est alors un hyperboloïde à deux nappes

$$(36) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

et la surface des ondes

$$(37) \quad (x^2 + y^2 + z^2) [a^2 x^2 - b^2 y^2 - c^2 z^2] + a^2 (b^2 + c^2) x^2 + b^2 (a^2 - c^2) y^2 + c^2 (a^2 - b^2) z^2 + a^2 b^2 c^2 = 0.$$

(Fig. 3.)



hyperboloïde à une nappe.

Si l'on suppose

$$b^2 = c^2,$$

la surface se réduit à un hyperboloïde de révolution.

Enfin si l'on suppose l'hyperboloïde primitif réduit à son cône asymptote, il en est de même de la surface des ondes. Nous désignerons ce genre par le nom de surface des ondes hyperboloïdales à une nappe.

## VIII

### ÉTUDE SPÉCIALE DE LA SURFACE DES ONDES DE FRESNEL.

(21) Quoique je n'ai en vue dans ce travail que l'étude purement géo-

métrique des surfaces des ondes, il n'est pas inutile de montrer comment la définition que j'ai donnée se rattache à la théorie de Fresnel.

Il avait admis comme point de départ le principe suivant : *la vitesse de propagation des ondes planes, mesurée perpendiculairement à la surface, est proportionnelle à la racine carrée de l'élasticité qui pousse les molécules vibrantes parallèlement à leur surface.*

Je n'ai point à discuter ici ce principe; ce serait sortir du cadre que je me suis tracé. On démontre que l'ellipsoïde

$$(38) \quad a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1,$$

appelé *ellipsoïde inverse d'élasticité*, a pour diamètres les inverses des racines carrées des élasticités; on est amené à la construction suivante : on coupe l'ellipsoïde (38) par un plan diamétral; on mène un plan parallèle à ce dernier à une distance du centre égale à l'inverse de l'un des demi-axes de la section, on a ainsi une position du plan d'onde, et comme la section a deux axes, il y a aussi deux plans d'ondes parallèles d'un même côté du centre; *la surface des ondes est l'enveloppe des positions de tous ces plans.*

Pour montrer l'identité de la surface ainsi définie avec celle que représente l'équation (30), je m'appuie sur ce que : *deux surfaces qui ont tous leurs plans tangents communs, sont identiques; en d'autres termes : deux surfaces qui ont même podaire sont identiques.*

Je cherche donc l'équation de la podaire de la surface définie, d'après le principe de Fresnel.

Soit

$$(39) \quad mx + ny + pz = 0,$$

l'équation d'un plan diamétral de l'ellipsoïde (38). Il résulte du théorème I, démontré au n° 3, que si l'on désigne par  $\frac{1}{\Delta'}$ ,  $\frac{1}{\Delta''}$ , les deux demi-axes de la section que le plan (39) détermine dans l'ellipsoïde (38), ces quantités sont les racines de l'équation

$$(40) \quad \frac{m^2}{a^2 - \Delta^2} + \frac{n^2}{b^2 - \Delta^2} + \frac{p^2}{c^2 - \Delta^2} = 0.$$

Or si l'on désigne par  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$ , les coordonnées du point placé sur la normale au plan (39), à une distance du centre  $\Delta$  égale à l'une des racines de l'équation (40); comme les coordonnées de ce point sont proportionnelles à  $m$ ,  $n$ ,  $p$ , le lieu de ses positions a pour équation

$$(41) \quad \frac{\xi'^2}{a^2 - \Delta^2} + \frac{\eta'^2}{b^2 - \Delta^2} + \frac{\zeta'^2}{c^2 - \Delta^2} = 0$$

avec  $\Delta^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$ .

Or l'équation (41) coïncide avec l'équation (32) qui représente la podaire de la surface (30); donc celle-ci est bien l'enveloppe des plans d'ondes.

J'aurais pu remarquer que l'équation du plan d'onde est

$$mx + ny + pz = \Delta,$$

$\Delta$  étant assujéti à satisfaire à l'équation (40), et chercher par la méthode ordinaire l'enveloppe du plan d'onde; mais cette question est traitée dans les *Exercices de calcul différentiel et intégral de M. Frenet*.

(22) Reprenons l'étude de la surface des ondes proprement dite.

Les équations des cônes (10) et (11) deviennent

$$S. \frac{a^2 x^2}{a^2 - R^2} = 0, \quad S. \frac{a^2 x^2}{a^2 - R'^2} = 0;$$

nous savons déjà que ces cônes sont orthogonaux et coupent la surface suivant des coniques orthogonales.

Les deux rayons  $R$ ,  $R'$  sont les deux demi-axes d'une section diamétrale faite dans l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

par le plan

$$mx + ny + pz = 0,$$

et par suite (§ II n° 3), ce sont les racines de l'équation

$$\frac{a^2 m^2}{a^2 - R^2} + \frac{b^2 n^2}{b^2 - R^2} + \frac{c^2 p^2}{c^2 - R^2} = 0,$$

ou en remplaçant les paramètres  $m, n, p$ , par les coordonnées d'un point de la normale,

$$\frac{a^2 x^2}{a^2 - R^2} + \frac{b^2 y^2}{b^2 - R^2} + \frac{c^2 z^2}{c^2 - R^2} = 0.$$

Done on doit avoir entre  $R, R'$ , les relations suivantes :

$$(42) \left\{ \begin{array}{l} R^2 + R'^2 = \frac{a^2 b^2 (x^2 + y^2) + a^2 c (x^2 + z^2) + b^2 c^2 (y^2 + z^2)}{a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2}, \\ R^2 R'^2 = \frac{a^2 b^2 c^2 (x^2 + y^2 + z^2)}{a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2} \end{array} \right.$$

La seconde de ces relations va nous fournir quelques conséquences importantes; puisque  $(x, y, z)$  est un point quelconque de la normale au plan  $(m, n, p)$ , rien n'empêche de supposer que ce soit l'extrémité de l'un des rayons vecteurs  $R, R'$  de la surface des ondes. Soient  $(x, y, z)$  l'extrémité de  $R$ , et  $(x', y', z')$  celle de  $R'$ ; on en conclut facilement de la seconde équation du groupe (42) :

$$R^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{a^2 x'^2 + b^2 y'^2 + c^2 z'^2},$$

et si l'on pose

$$(43) \quad a^2 x'^2 + b^2 y'^2 + c^2 z'^2 = P'^2,$$

il vient

$$(44) \quad R^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{P'^2},$$

et avec des notations analogues

$$(45) \quad R'^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{P^2}.$$

L'équation (44) montre que si  $R$  est constant,  $P'$  l'est aussi, et par suite si  $(x, y, z)$  décrit une conique sphérique sur une nappe de la surface des ondes, le point  $(x, y, z)$ , placé sur le même rayon vecteur, décrit une

conique qui, étant en même temps sur l'ellipsoïde (43), est une conique ellipsoïdale.

L'équation (45) montre d'ailleurs la réciprocité des relations entre les deux nappes de la surface des ondes.

(23) Il résulte de là qu'un point  $(x, y, z)$  de la surface des ondes peut être déterminé au moyen de deux paramètres  $(R, P)$  qui déterminent les deux coniques orthogonales qui se coupent en ce point; voici l'expression des coordonnées  $x, y, z$ ,

$$(46) \left\{ \begin{array}{l} x^2 = - \frac{(R^2 - a^2)(P^2 - b^2c^2)}{(a^2 - c^2)(a^2 - b^2)}, \\ y^2 = \frac{(R^2 - b^2)(P^2 - a^2c^2)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \\ z^2 = - \frac{(R^2 - c^2)(P^2 - a^2b^2)}{(b^2 - c^2)(a^2 - c^2)}. \end{array} \right.$$

Les deux paramètres  $R, P$  ne sont pas tout à fait arbitraires; si l'on suppose

$$a > b > c,$$

et si  $R$  est compris entre  $a$  et  $b$ ,  $R'$  est compris entre  $b$  et  $c$  et par suite  $P$  entre  $ab$  et  $ca$ , et si  $R$  est compris entre  $b$  et  $c$ ,  $P$  est compris entre  $ca$  et  $bc$ .

(24) Les deux cônes qui coupent la surface suivant deux coniques orthogonales peuvent être représentés par les équations :

$$(47) \left\{ \begin{array}{l} \text{S. } \frac{a^2x^2}{R^2 - a^2} = 0, \\ \text{S. } \frac{x^2}{P^2 - b^2c^2} = 0, \end{array} \right.$$

la seconde de ces équations s'obtenant en remplaçant dans l'équation

$$\text{S. } \frac{a^2x^2}{R'^2 - a^2} = 0,$$

$R'$  par son expression en  $P$  (45).

Enfin ces deux équations (47) sont aussi des formes de la surface des ondes, lorsqu'on y remplace R et P par les fonctions des coordonnées que ces quantités représentent et qu'on suppose constantes dans les équations des cônes.

(25) Nous savons que les deux nappes de la surface des ondes ont quatre points communs placés sur le plan des ZX, et ayant pour coordonnées,

$$y = 0, \quad x = \pm c \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad z = \pm a \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$$

ces points, que M. Lamé nomme les ombilics de la surface, jouent, comme on sait, un rôle important dans la théorie de la double réfraction. Les quatre rayons vecteurs passant par ces points, et situés deux à deux sur une même ligne droite, portent le nom d'axes optiques; ce sont les normales aux sections circulaires de l'ellipsoïde (28).

De plus, il est facile de voir que ce sont les axes focaux des deux séries de cônes représentés par les équations (47). En effet, ces cônes sont les supplémentaires des cônes décrits par les axes de longueur constante de l'ellipsoïde, ainsi qu'on l'a vu au n<sup>o</sup> 1; or ces derniers ont les plans de leurs sections circulaires parallèles aux plans des sections circulaires de l'ellipsoïde, ainsi que l'on peut s'en assurer; donc, en vertu d'un théorème bien connu de M. Chasles, les lignes focales des cônes supplémentaires étant perpendiculaires aux plans des sections circulaires, seront les axes optiques.

On peut, comme le fait M. Lamé (\*) mettre les équations des deux séries de cônes sous une forme qui rende évidente cette dernière propriété. En désignant par R<sub>1</sub>, R<sub>2</sub>, les deux rayons vecteurs de même direction, et posant :

$$(48) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{\rho^2}{K}, & \frac{1}{h^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{\beta^2}{K}, \\ \frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{\mu^2}{K}, & \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{\gamma^2}{K}, \end{array} \right.$$

(\*) *Leçons sur la théorie de l'élasticité*, p. 266.

$k$  étant une constante et  $\varrho$  et  $\mu$  deux nouveaux paramètres; la constante  $\gamma$  surpassant  $\beta$ , on trouve aisément que les deux séries de cônes

$$S. \quad \frac{a^2 x^2}{R_1^2 - a^2} = 0, \quad S. \quad \frac{a^2 x^2}{R_2^2 - a^2} = 0,$$

auront pour équations

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{\varrho^2} - \frac{y^2}{\varrho^2 - \varrho'^2} - \frac{z^2}{\gamma^2 - \varrho'^2} = 0, \\ \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - \varrho'^2} - \frac{z^2}{\gamma^2 - \mu^2} = 0, \end{array} \right.$$

dans lesquelles on reconnaît bien deux séries de cônes homofocaux et asymptotes à deux familles d'hyperboloïdes homofocaux.

(26) On peut mettre l'équation de la surface des ondes sous une forme nouvelle en se servant des paramètres  $\varrho$  et  $\mu$ , et des angles que les rayons vecteurs font avec les axes optiques. Désignons par  $m$ ,  $n$ ,  $p$ , les cosinus des angles qu'un rayon vecteur de la surface fait avec les axes des coordonnées, par  $\theta$ ,  $\theta'$ , les angles que ce même rayon fait avec les axes optiques. Les angles que ces derniers font avec les axes ont pour cosinus

$$-\frac{c}{b} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad 0, \quad \pm \frac{a}{b} \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}},$$

ou, d'après la transformation (48),

$$\frac{\beta}{\gamma}, \quad 0, \quad \pm \frac{\sqrt{\gamma^2 - \varrho'^2}}{\gamma};$$

on en conclut

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{m\varrho + p \sqrt{\gamma^2 - \varrho'^2}}{\gamma}, \\ \cos \theta' = \frac{m\varrho - p \sqrt{\gamma^2 - \varrho'^2}}{\gamma}, \end{array} \right.$$



d'où

$$(51) \left\{ m = \frac{\gamma}{2\beta} [\cos \theta + \cos \theta'], \quad p = \frac{\gamma}{2\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}} [\cos \theta - \cos \theta'] \right\}$$

Cela passé, il est facile de remarquer d'après la composition symétrique des équations (49) en  $\rho$  et  $\mu$ , que ces deux quantités sont les racines de l'équation

$$\frac{x^2}{V^2} + \frac{y^2}{V^2 - \beta^2} + \frac{z^2}{V^2 - \gamma^2} = 0$$

ou par la substitution des cosinus aux coordonnées

$$(52) \quad \frac{m^2}{V^2} + \frac{n^2}{V^2 - \beta^2} + \frac{p^2}{V^2 - \gamma^2} = 0.$$

Si on chasse les dénominateurs, il vient :

$$V^4 - \left\{ (\beta^2 + \gamma^2) m^2 + \gamma^2 n^2 + \beta^2 p^2 \right\} V^2 + \beta^2 \gamma^2 m^2 = 0,$$

ou en éliminant  $n$ , au moyen de la relation

$$m^2 + n^2 + p^2 = 1,$$

$$V^4 - \left\{ \beta^2 m^2 - (\gamma^2 - \beta^2) p^2 + \gamma^2 \right\} V^2 + \beta^2 \gamma^2 m^2 = 0.$$

En remplaçant  $m$  et  $p$ , par leurs valeurs (51), on déduit les relations suivantes entre les coefficients et les racines de l'équation précédente

$$\rho^2 + \mu^2 = \gamma^2 [1 + \cos \theta \cos \theta'],$$

$$\rho^2 \mu^2 = \frac{\gamma^4}{4} [\cos \theta + \cos \theta']^2,$$

et par suite

$$\rho^2 = \frac{\gamma^2}{2} \left[ 1 + \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \right],$$

$$\mu^2 = \frac{\gamma^2}{2} \left[ 1 + \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \right],$$

ou enfin

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \pm \gamma \cos \frac{\theta - \theta'}{2}, \\ \mu = \pm \gamma \cos \frac{\theta + \theta'}{2}. \end{array} \right.$$

Telles sont les relations remarquables qui existent entre les deux paramètres  $\rho$  et  $\mu$  et les angles  $\theta$ ,  $\theta'$  que la direction commune des rayons vecteurs liés à ces paramètres par les équations (48) fait avec les axes optiques. Si on suppose la constante  $k$  égale à un, et qu'on regarde  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $\theta$ ,  $\theta'$ , comme de nouvelles coordonnées, il est facile de voir que les équations (53) sont celles des deux nappes de la surface des ondes; un point est en effet complètement défini par les trois quantités  $(\rho, \theta, \theta')$  ou  $(\mu, \theta, \theta')$ .

Dans ce nouveau système de coordonnées, les deux séries de coniques orthogonales projetées sur une sphère de rayon 1, ont pour équations

$$\begin{aligned} \theta + \theta' &= \text{constante}, \\ \theta - \theta' &= \text{constante}, \end{aligned}$$

et on voit que, dans le premier cas,  $\rho$ , et par suite  $R_1$ , restent constants, tandis que  $\mu$ , et par suite  $R_2$  varient; c'est l'inverse dans le second.

Enfin on déduit encore des formules (53) ou plutôt des valeurs de  $\rho^2$  et de  $\mu^2$ , une conséquence importante dans la théorie des cristaux à deux axes; on trouve en effet

$$\mu^2 - \rho^2 = \gamma^2 \sin \theta \sin \theta',$$

ou en tenant compte des relations (48)

$$(54) \quad \frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} = \left[ \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right] \sin \theta \sin \theta'.$$

*Ainsi la différence des carrés des inverses des rayons vecteurs pour une même direction est proportionnelle au produit des sinus des angles que cette direction fait avec les axes optiques.*

(27) La surface des ondes possède encore des propriétés qui méritent d'être remarquées; mais comme j'en ai donné des démonstrations extrême-

ment simples et dont la reproduction ici ferait double emploi, je renvoie aux *Nouvelles Annales* (\*) pour tout ce qui concerne les points singuliers, les plans tangents touchant la surface suivant un cercle, et les propriétés polaires des deux nappes.

---

## IX

### VOLUME DE LA SURFACE DES ONDES.

(23) M. J.-A. Serret a bien voulu me communiquer deux formules très élégantes de M. William Roberts, qui expriment par les fonctions elliptiques, les volumes des solides compris sous les deux nappes de la surface des ondes; il m'a indiqué en même temps deux formules trouvées par lui et qui se transforment très-aisément dans celles du géomètre irlandais.

Pour établir ces formules, reprenons l'équation de la surface des ondes sous la forme

$$(55) \quad \frac{a^2 x^2}{r^2 - a^2} + \frac{b^2 y^2}{r^2 - b^2} + \frac{c^2 z^2}{r^2 - c^2} = 0$$

où l'on a

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

et

$$a > b > c.$$

Nous avons vu que lorsqu'on suppose  $r$  constant, l'équation (55) représente un cône; et que si l'on donne à  $r$  deux valeurs, l'une  $u$ , comprise entre  $c$  et  $b$ , l'autre  $v$ , entre  $b$  et  $a$ , les deux cônes correspondants sont orthogonaux (th. II).

Cela posé, nous pouvons prendre pour les coordonnées d'un point quel-

---

(\*) Tome II, 2<sup>e</sup> Série, pages 255 et 257.

conque de l'espace des paramètres  $(r, u, v)$  du système triple orthogonal

$$(56) \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \\ -\frac{a^2 x^2}{a^2 - u^2} - \frac{b^2 y^2}{b^2 - u^2} + \frac{c^2 z^2}{u^2 - c^2} = 0, \\ -\frac{a^2 x^2}{a^2 - v^2} + \frac{b^2 y^2}{v^2 - b^2} + \frac{c^2 z^2}{v^2 - c^2} = 0, \end{array} \right.$$

On voit que tout point pour lequel  $r$  sera égal à  $u$  ou à  $v$  appartiendra à la surface des ondes; en d'autres termes cette surface a pour équation

$$(r^2 - u^2) (r^2 - v^2) = 0;$$

une des nappes est représentée par  $r^2 = u^2$ , et l'autre par  $r^2 = v^2$ .

Désignons par  $ds_r, ds_u, ds_v$ , les éléments infiniment petits des intersections des trois surfaces orthogonales  $(r), (u), (v)$ ; le premier se compte sur le rayon vecteur  $r$ ; on a donc

$$ds_r = dr.$$

Pour calculer les deux autres, on peut tirer les valeurs  $x, y, z$  des équations (56) et les différencier soit par rapport à  $u$ , soit par  $v$ , en laissant constants les autres éléments.

Ainsi on trouve par exemple,

$$x^2 = \frac{b^2 c^2 (b^2 - c^2) (a^2 - u^2) (a^2 - v^2)}{S. b^2 c^2 (b^2 - c^2) (a^2 - u^2) (a^2 - v^2)}$$

Le dénominateur se réduit facilement à

$$\left[ S. b^2 c^2 (b^2 - c^2) \right] u^2 v^2,$$

de sorte que si l'on pose :

$$S. b^2 c^2 (b^2 - c^2) = - S. a^4 (b^2 - c^2) = H,$$

il vient

$$x = \pm \frac{b c r \sqrt{b^2 - c^2} \sqrt{a^2 - u^2} \sqrt{a^2 - v^2}}{H u v}.$$

En différenciant les logarithmes des deux membres, par rapport à  $u$ , on aura

$$\frac{dx_u}{x} = - \frac{u du}{a^2 - u^2} - \frac{du}{u} = - \frac{a^2 du}{u (a^2 - u^2)},$$

d'où

$$dx_u = \pm \frac{abc r \sqrt{b^2 - c^2} \sqrt{a^2 - v^2}}{H u^2 v \sqrt{a^2 - u^2}} du,$$

et par suite

$$ds_u = \pm \frac{abc r}{H u^2 v} \sqrt{S. \frac{(b^2 - c^2) (a^2 - v^2)}{a^2 - u^2}} du,$$

et comme la quantité sous le radical se réduit à

$$\frac{H^2 u^2 (v^2 - u^2)}{(a^2 - u^2) (b^2 - u^2) (u^2 - c^2)},$$

on a donc

$$ds_u = \pm \frac{abc r \sqrt{v^2 - u^2}}{u v \sqrt{a^2 - u^2} \sqrt{b^2 - u^2} \sqrt{u^2 - c^2}} du,$$

et de même

$$dv_v = \pm \frac{abc r \sqrt{v^2 - u^2}}{u v \sqrt{a^2 - v^2} \sqrt{v^2 - b^2} \sqrt{v^2 - c^2}} dv,$$

On a donc pour l'élément de volume

$$dV = ds_r ds_u ds_v,$$

ou

$$dV = \frac{a^2 b^2 c^2 r^2 (v^2 - u^2) dr du dv}{u^2 v^2 \sqrt{M} \sqrt{N}} = Q dr du dv,$$

en posant

$$\sqrt{M} = \sqrt{a^2 - u^2} \sqrt{b^2 - u^2} \sqrt{u^2 - c^2}, \quad \sqrt{N} = \sqrt{a^2 - v^2} \sqrt{v^2 - b^2} \sqrt{v^2 - c^2}$$

Désignons par  $V_1$  le volume compris sous la nappe  $r = u$ ; et par  $V_2$  celui qui est compris sous la nappe  $r = v$ ; on aura en intégrant l'expression  $dV$

entre les limites convenables

$$V_1 = 8 \int_b^a dv \int_c^b du \int_0^u Q dr,$$

$$V_2 = 8 \int_b^a dv \int_c^b du \int_0^v Q dr;$$

l'intégration par rapport à  $r$  est immédiate; et on trouve

$$V_1 = \frac{8}{3} a^2 b^2 c^2 \int_b^a \int_c^b \frac{(v^2 - u^2) u du dv}{v^2 \sqrt{M} \sqrt{N}},$$

$$V_2 = \frac{8}{3} a^2 b^2 c^2 \int_b^a \int_c^b \frac{(v^2 - u^2) v du dv}{u^2 \sqrt{M} \sqrt{N}},$$

ce qui peut s'exprimer par des intégrales simples de la manière suivante :

$$V_1 = \frac{8}{3} a^2 b^2 c^2 \left[ \int_b^a \frac{dv}{\sqrt{N}} \int_c^b \frac{u du}{\sqrt{M}} - \int_b^a \frac{dv}{v^2 \sqrt{N}} \int_c^b \frac{u^3 du}{\sqrt{M}} \right],$$

$$V_2 = \frac{8}{3} a^2 b^2 c^2 \left[ \int_b^a \frac{v^3 dv}{\sqrt{N}} \int_c^b \frac{du}{u^2 \sqrt{M}} - \int_b^a \frac{v dv}{\sqrt{N}} \int_c^b \frac{du}{\sqrt{M}} \right].$$

Telles sont les formules obtenues par M. J.-A. Serret.

Il n'est pas difficile d'apercevoir que chacune des intégrales définies qui entrent dans les expressions précédentes rentre dans les types étudiés par Legendre, dans son *Traité des fonctions elliptiques* (\*).

Prenons par exemple  $\int_b^a \frac{dv}{\sqrt{N}} = \int_b^a \frac{dv}{\sqrt{(a^2 - v^2)(v^2 - b^2)(v^2 - c^2)}}$ ;

on fera

$$v^2 = \frac{b^2 c^2 (1 - k^2 \sin^2 \varphi)}{c^2 - k^2 b^2 \sin^2 \varphi},$$

(\*) Tome I. — Chap. XXXIII. — Pages 265 et 266.

et 
$$k^2 = \frac{c^2(a^2 - b^2)}{b^2(a^2 - c^2)} = 1 - k'^2,$$

il vient

$$\int_b^a \frac{dv}{\sqrt{N}} = \frac{1}{b\sqrt{a^2 - c^2}} F(k);$$

de même en posant

$$u^2 = c^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi,$$

$$h^2 = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2} = 1 - h'^2,$$

on aura

$$\int_c^b \frac{u du}{\sqrt{M}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - c^2}} F(h).$$

Voici d'ailleurs le tableau des huit intégrales, dans lequel les modules  $k, k'$  et  $h, h'$  sont complémentaires :

$$\int_b^a \frac{dv}{\sqrt{N}} = \frac{1}{b\sqrt{a^2 - c^2}} F(k), \quad \int_b^a \frac{dv}{v^2 \sqrt{N}} = \frac{1}{bc^2 \sqrt{a^2 - c^2}} F(k) - \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a^2 bc^2} E(k),$$

$$\int_b^a \frac{v dv}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - c^2}} F(h'), \quad \int_b^a \frac{v^3 dv}{\sqrt{N}} = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 - c^2}} F(h') + \sqrt{a^2 - c^2} E(h'),$$

$$\int_c^b \frac{u du}{\sqrt{M}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - c^2}} F(h), \quad \int_c^b \frac{u^3 du}{\sqrt{M}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - c^2}} F(h) - \sqrt{a^2 - c^2} E(h),$$

$$\int_c^b \frac{du}{\sqrt{N}} = \frac{1}{b\sqrt{a^2 - c^2}} F(k'), \quad \int_c^b \frac{du}{u^2 \sqrt{M}} = \frac{1}{ba^2 \sqrt{a^2 - c^2}} F(k') + \sqrt{a^2 - c^2} E(k').$$

Si on substitue ces expressions dans les formules de M. Serret, on trouve

enfin

$$V_1 = \frac{8 a^2 b}{3} \left[ F(k)E(h) + F(h)E(k) - F(k)F(h) - \frac{a^2 - c^2}{a^2} E(k)E(h) \right],$$

$$V_2 = \frac{8 b c^2}{3} \left[ F(k')E(h') + F(h')E(k') - F(k')F(h') - \frac{a^2 - c^2}{a^2} E(k')E(h') \right].$$

Ce sont les formules de M. William Roberts.

---

## X

### PROPRIÉTÉ RELATIVE AUX MOMENTS D'INERTIE.

(29) Dans une thèse sur les axes principaux d'inertie soutenue en 1858, par M. Peslin, je trouve une propriété assez remarquable des surfaces que j'étudie : *c'est de représenter le lieu géométrique des points d'un corps pour lesquels un rayon de gyration principal conserve une valeur constante.*

M désignant la masse d'un corps,  $x, y, z$ , les coordonnées d'un de ses points; le moment d'inertie par rapport à un axe passant par ce point a pour expression

$$M \varrho^2,$$

$\varrho$  étant le rayon de gyration par rapport à cet axe.

On sait de plus que le rayon de gyration  $\varrho$ , est lié au rayon  $\varrho_0$  relatif à un axe parallèle au premier, passant par le centre de gravité, par la formule

$$\varrho^2 = \varrho_0^2 + d^2,$$

$d$ , désignant la distance des deux axes.



Autour d'un même point, les rayons de gyration varient en raison inverse des diamètres d'un ellipsoïde, dont les trois axes se nomment les axes principaux d'inertie en ce point; les rayons de gyration relatifs à ces trois axes se nomment les trois rayons principaux.

M. Peslin fait voir qu'en un point quelconque  $(x, y, z)$ , les directions des axes principaux sont les normales aux trois surfaces homofocales à l'ellipsoïde des moments relatifs au centre de gravité, et que les trois rayons de gyration principaux sont donnés par la formule

$$\varrho^2 = r^2 - \lambda,$$

dans laquelle  $r$  exprime la distance du point  $(x, y, z)$  au centre de gravité et  $\lambda$  l'un des paramètres des trois surfaces homofocales à l'ellipsoïde central qui se coupent en ce point.

Or si l'on représente par

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} = 1$$

l'ellipsoïde central, les surfaces homofocales sont comprises dans l'équation

$$\frac{x^2}{A + \lambda} + \frac{y^2}{B + \lambda} + \frac{z^2}{C + \lambda} = 1.$$

Ainsi les trois rayons principaux de gyration en un point donné  $(x_1, y_1, z_1)$  seront fournis par l'équation

$$\frac{x_1^2}{A + r^2 - \varrho^2} + \frac{y_1^2}{B + r^2 - \varrho^2} + \frac{z_1^2}{C + r^2 - \varrho^2} = 1,$$

dans laquelle on a

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r^2;$$

Si l'on veut le lieu des points pour lesquels un des rayons principaux reste

constant, il suffit de poser

$$\xi^2 = A = A',$$

$$\eta^2 = B = B',$$

$$\zeta^2 = C = C',$$

un ou deux des seconds membres pouvant être négatifs, et l'équation du lieu est alors

$$\frac{x^2}{r^2 - A'} + \frac{y^2}{r^2 - B'} + \frac{z^2}{r^2 - C'} = 1;$$

on reconnaît facilement une des formes de l'équation générale des surfaces des ondes. Cette équation peut en effet représenter l'un des trois genres suivant que le rayon constant sera l'un ou l'autre des trois rayons principaux.

---

### NOTE.

On a pu remarquer les élégantes formules au moyen desquelles M. William Roberts exprime les volumes compris sous les deux nappes de la surface des ondes par les fonctions elliptiques de première et de seconde espèce. En suivant une marche analogue à celle qui est exposée au n<sup>o</sup> 28, on arrive à exprimer les volumes compris sous les deux nappes de la podaire correspondante. Les aires de ces deux surfaces peuvent aussi s'exprimer au moyen des intégrales elliptiques.

Du reste, j'ai remarqué une liaison nouvelle entre les surfaces des ondes

et leurs podaires, liaison qui constitue une analogie de plus avec les surfaces du second ordre ; voici en quoi elle consiste :

*Soient  $S, S'$  deux surfaces du second ordre à axes inverses ;  $P, P'$  leurs podaires centrales ;  $S$  et  $P'$  sont des surfaces à rayons vecteurs réciproques ainsi que  $S'$  et  $P$ .*

*Soient de même  $O, O'$  deux surfaces des ondes correspondant aux surfaces  $S, S'$  ;  $\Pi, \Pi'$  leurs podaires ;  $O$  et  $\Pi'$  sont des surfaces à rayons vecteurs réciproques ainsi que  $O'$  et  $\Pi$ .*

*Vu et approuvé.*

Le 27 mai 1864.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,  
MILNE EDWARDS.

*Permis d'imprimer.*

Le 28 mai 1864.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,  
A. MOURIER.

# THÈSE D'ASTRONOMIE

---

## DÉTERMINATION

DES COEFFICIENTS DES TERMES PÉRIODIQUES DE LA FONCTION PERTURBATRICE

---

### INTRODUCTION

On sait que le calcul des perturbations des éléments d'une planète dépend d'une certaine fonction que Laplace désigne par  $R$  dans la *Mécanique céleste*, et qu'il a nommé la *fonction perturbatrice*. Si on désigne par  $m_i$  une quelconque des planètes qui agissent sur la planète  $m$ , par  $s_i$  le cosinus de la distance apparente des deux planètes vue du soleil, par  $\Delta_i$  leur distance réelle, par  $r, r_i$  leurs rayons vecteurs, la fonction  $R$  a pour expression :

$$R = \sum m_i \left( \frac{rs_i}{r_i^2} - \frac{1}{\Delta_i} \right).$$

Dans une première approximation, on remplace les coordonnées des diverses planètes par leurs valeurs elliptiques; par suite, chaque terme de la fonction perturbatrice ne dépend, dans cet ordre d'approximation, que des éléments des deux planètes  $m, m_i$ ; la partie de la perturbation totale qui dépend de ce terme peut donc se calculer séparément; en effet les expressions des dérivées partielles de  $R$  qui servent à former les variations des éléments sont indépendantes de la constance ou de la variabilité de ces éléments.

On est donc ramené pour le calcul des perturbations du premier ordre à développer une expression de la forme

$$R = \frac{rs}{r'^2} - \frac{1}{\Delta},$$

en laissant de côté jusqu'à la fin du calcul le facteur  $m'$ , masse de la seule planète troublante que l'on considère.

Toutes les fois que les excentricités et les inclinaisons mutuelles des orbites sont peu considérables, ce qui est le cas des principales planètes du système solaire, on développe  $R$  en une série double de sinus et cosinus d'arcs multiples des anomalies moyennes  $T, T'$ , des deux planètes, ou, ce qui revient au même, en une série ordonnée suivant les puissances des exponentielles imaginaires

$$x = e^{Ti}, \quad x' = e^{T'i},$$

les coefficients de cette série étant eux-mêmes ordonnés par rapport aux puissances des excentricités et des inclinaisons mutuelles des orbites. C'est la méthode exposée par Laplace au livre II de la *Mécanique céleste*.

Ce développement dépend du calcul de certaines transcendentes  $a_j^{(\lambda)}$  définies par la relation

$$a_j^{(\lambda)} = \frac{1}{a'} \alpha_j^{(\lambda)} \cdot \alpha^{\lambda - \frac{1}{2}},$$

$a'$  désignant le demi-grand axe de la planète troublante, et  $\alpha$  le rapport  $\frac{a}{a'}$ ,  $a$  étant le demi-grand axe de la planète  $m$  (\*). Il dépend en outre des dérivées

$$\alpha^n \frac{d^n \alpha}{d\alpha^n}.$$

Ces transcendentes et leurs dérivées se calculent au moyen de séries théoriquement convergentes pour  $\alpha < 1$ , mais qui ne sont pas d'un emploi utile dès que  $\alpha$  n'est pas une très petite fraction.

(\*) *Mécanique céleste*, livre II, p. 307.

M. Leverrier, suivant une méthode due à Euler, a substitué à ces séries d'autres séries dont les termes sont des progressions géométriques ayant pour raison  $\alpha^2$ , et dont les coefficients sont les différences premières, secondes, etc., des coefficients de la série primitive.

Legendre a démontré que la détermination des quantités  $a_0(\frac{1}{2})$ ,  $a_1(\frac{1}{2})$  se ramène aux fonctions elliptiques de première et de deuxième espèce pour le module  $\alpha$ .

Presque tous les géomètres se sont occupés du développement de R, et de la simplification du calcul des coefficients.

Dans un mémoire inséré dans la *Connaissance des Temps* pour 1836, Poisson fit connaître la méthode des quadratures doubles, dans laquelle les coefficients des termes ayant pour argument

$$i' T' + iT,$$

sont exprimés par des intégrales doubles de la forme

$$A_{r,i} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R_m \cos (i'T' + iT) dT dT',$$

$$B_{r,i} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R_m \sin (i'T' + iT) dT dT'.$$

Cette méthode a été appliquée par M. Hansen de Gotha, au calcul des coefficients de la grande inégalité de Jupiter et de Saturne, dans un mémoire couronné par l'Académie de Berlin.

Dans une note présentée à l'Académie des sciences (\*), en 1836, M. Liouville fit connaître une nouvelle méthode dans laquelle les quadratures doubles de Poisson sont remplacées par une intégration simple et une interpolation faite au moyen d'un petit nombre de valeurs de la variable. Poisson lui-même, dans le rapport qu'il fit à l'occasion de cette note, reconnut la simplification apportée par ce procédé au développement de la

(\*) *Journal de Mathém.*, t. I. page 197.

fonction perturbatrice ; plus tard, M. Leverrier s'exprime ainsi au sujet de cette même méthode, après avoir énuméré les inconvénients de la méthode des quadratures doubles : « Aussi M. Liouville a-t-il fait plus que d'ap-  
« porter une simplification au calcul des coefficients de la fonction per-  
« turbatrice par les quadratures. On peut dire qu'il a véritablement rendu  
« cette méthode accessible aux déterminations numériques, etc. (\*) »

Dans la même année, Cauchy appliquait déjà les développements suivant les puissances des exponentielles imaginaires, et commençait ainsi une série de travaux qui allaient se succéder avec une très grande rapidité.

Mais jusque-là on n'avait à peu près rien fait pour le développement de la fonction perturbatrice dans le cas des petites planètes dont les excentricités et les inclinaisons se refusaient au développement en série ordonnée par rapport aux puissances de ces quantités. M. Leverrier annonça en 1840 qu'il était parvenu à déterminer les coefficients de la grande inégalité de Pallas produite par Jupiter, et cela par une méthode qui parut à la fois neuve et hardie à Cauchy, le rapporteur de la commission chargée d'examiner ce travail (\*\*). Cette méthode consiste à déterminer les coefficients d'une inégalité d'argument donné au moyen d'un certain nombre de valeurs particulières de la fonction perturbatrice. M. Hoüel, professeur à la Faculté des sciences de Bordeaux, a repris cette méthode d'interpolation dans un Mémoire présenté à l'Académie des sciences, et qui a été l'objet d'un rapport favorable de M. J.-A. Serret (\*\*\*), mais qui n'a encore été publié dans aucun recueil. J'aurai occasion d'indiquer le principe du remarquable travail de M. Hoüel.

A la suite du rapport de Cauchy, sur le Mémoire de M. Leverrier, l'illustre analyste fit connaître, dans une série de notes, diverses méthodes dont il se servit pour vérifier les calculs de M. Leverrier. L'une d'elles est fondée sur l'emploi des anomalies excentriques, et a servi, comme on le verra, au travail que je présente aujourd'hui. Dans la troisième de ces notes,

---

(\*) *Comptes-rendus*, 1840, t. II, pa 698.

(\*\*) *Id.* 1845, p. 767 et suiv.

(\*\*\*) *Id.* 1853, p. 830.

Cauchy donne des détails sur le passage du développement effectué suivant les anomalies excentriques au développement correspondant suivant les anomalies moyennes.

Enfin, dans ces derniers temps, M. Hansen a fait connaître des méthodes nouvelles, fondées également sur l'emploi des anomalies excentriques et particulièrement applicables aux petites planètes. Il m'est impossible de parler de nombreux travaux sur le sujet qui m'occupe, n'ayant que des ressources très limitées en fait d'informations.

Voici maintenant le but de l'essai que je présente. Il résulte de ce qui précède que la méthode de M. Liouville, exposée dans sa note du 29 février 1856, présente une grande simplification dans le calcul des coefficients de la fonction perturbatrice. La seule difficulté qui reste, consiste dans la réduction en nombres des intégrales simples, peu nombreuses d'ailleurs, que l'on a à calculer. Deux moyens peuvent servir à cette fin : le premier, dont je n'indiquerai que le principe sans l'appliquer, consiste à employer la méthode d'interpolation de M. Hoüel; l'autre consiste à combiner la méthode de M. Liouville avec un développement algébrique par rapport aux anomalies excentriques.

Je crois que cette marche peut s'appliquer avec quelque avantage au cas des petites planètes dont les excentricités ne sont pas trop considérables, les inclinaisons pouvant être assez fortes. C'est ce que l'on verra dans l'indication d'un calcul numérique, dans lequel je prends comme exemple le calcul des coefficients d'une inégalité de Cérés, produite par Jupiter.



# I

MÉTHODE DE M. LIOUVILLE.

(1) Soit en général

$$R = F(T', T),$$

une fonction périodique de deux variables  $T'$ ,  $T$ , qu'il s'agit de développer en série double de sinus et cosinus d'arcs de la forme

$$i'T' + iT,$$

ou, ce qui revient au même, en une série ordonnée suivant les puissances des exponentielles imaginaires

$$e^{T'i}, \quad e^{Ti},$$

Il faut pour cela savoir calculer les coefficients des termes dont les arguments sont donnés. Proposons-nous donc de déterminer les coefficients des termes ayant pour argument

$$\theta = i'T' + iT.$$

(2) Remarquons d'abord la composition de  $R$ , son développement renferme : 1° des termes dont les exposants sont des multiples de l'argument  $\theta$ , parmi lesquels se trouve le terme constant; 2° de termes périodiques dépendant d'arguments autres que  $\theta$ . On suppose les indices  $i'$ ,  $i$ , qui entrent dans  $\theta$ , premiers entre eux; s'il n'en était pas ainsi, on prendrait le quotient de  $\theta$  par le plus grand commun diviseur de ces indices. Nous aurons d'après cela

$$R = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_j e^{j\frac{\theta}{i}} + \varphi(T', T),$$

$j$  est un indice quelconque qui peut prendre toutes les valeurs entières positives ou négatives et la fonction  $\varphi$  désigne un ensemble de termes périodiques dont les arguments ne sont pas des multiples de  $\theta$ .

Prenons  $\theta$  comme une nouvelle variable et posons

$$T = \frac{\theta}{i} - \frac{i'T'}{i},$$

ou bien, si l'on fait  $T' = i\sigma$ ,

$$T = \frac{\theta}{i} - i'\sigma,$$

Par ce changement de variables, la valeur de  $R$  devient

$$(1) \quad R = F\left(i\sigma, \frac{\theta}{i} - i'\sigma\right) = \sum A_j e^{j\theta} + \varphi\left(i\sigma, \frac{\theta}{i} - i'\sigma\right).$$

La variable  $\sigma$  doit entrer dans tous les termes de la fonction  $\varphi$ . Si donc on multiplie les deux membres de l'équation précédente par  $d\sigma$ , et qu'on intègre entre les limites  $0$ , et  $2\pi$ , on aura :

$$(2) \quad \sum A_j e^{j\theta} = \Theta,$$

en posant

$$\Theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F\left(i\sigma, \frac{\theta}{i} - i'\sigma\right) d\sigma.$$

Supposons que l'on sache déterminer la valeur de  $\Theta$  pour une valeur particulière de  $\theta$ ; cela revient, comme on le voit, à la réduction en nombres de l'intégrale  $\int R d\sigma$ . Si on désigne par  $g$ , la somme algébrique  $i' + i$ , on sait que les coefficients

$$A_0, A_{\pm 1}, A_{\pm 2}, \dots \dots A_{\pm k},$$

sont respectivement des ordres

$$0, \quad g, \quad 2g, \quad \dots \dots kg,$$

par rapport aux excentricités et aux inclinaisons mutuelles. Ces coefficients

vont donc en diminuant à mesure que l'indice  $j$  augmente, en sorte que l'on pourra, en négligeant des termes de l'ordre  $(k + 1)g$  réduire l'équation (2) à la forme

$$\sum_{-k}^{+k} A_j e^{j\theta_i} = \Theta.$$

Cette équation n'est pas exacte, et les valeurs de  $A_j$  qu'on en pourra tirer ne le sont pas non plus; mais ces valeurs sont exactes aux termes près de l'ordre  $(k + 1)g$ . Le premier membre ne contient plus que  $2k + 1$  termes et par suite un même nombre de coefficients. Si donc on calcule les valeurs de l'intégrale  $\Theta$  pour  $2k + 1$  valeurs particulières de l'angle  $\theta$ , on obtiendra un système de  $2k + 1$  équations du premier degré qui détermineront les coefficients inconnus

$$\begin{array}{cccccccc} A_0 & A_1, & A_2, & . & . & . & . & A_k, \\ & A_{-1}, & A_{-2}, & . & . & . & . & A_{-k}. \end{array}$$

---

## II

### DÉTERMINATION DES $A_j$ .

(3) Dans la plupart des cas il suffit de donner à  $k$  une petite valeur. Si, par exemple, il suffit de tenir compte des termes de l'ordre  $g$ , ou plutôt si l'on veut négliger les termes de l'ordre  $2g$ , il faudra faire  $k = 1$  dans l'équation (3); si donc on pose

$$\theta = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \theta = -\frac{\pi}{2},$$

on aura le système suivant :

$$(4) \begin{cases} A_0 + A_1 + A_{-1} = \Theta_0, \\ A_0 + A_1 e^{\frac{\pi}{2}i} + A_{-1} e^{-\frac{\pi}{2}i} = \Theta_1, \\ A_0 + A_1 e^{-\frac{\pi}{2}i} + A_{-1} e^{\frac{\pi}{2}i} = \Theta_{-1}, \end{cases}$$

d'où l'on déduit facilement :

$$(5) \begin{cases} A_0 = \frac{\Theta_1 + \Theta_{-1}}{2}, \\ A_1 + A_{-1} = \Theta_0 - \frac{\Theta_1 + \Theta_{-1}}{2}, \\ A_1 - A_{-1} = \frac{1}{2i} (\Theta_1 - \Theta_{-1}). \end{cases}$$

Il est d'ailleurs facile de remarquer que les quantités  $A_1 + A_{-1}$ , et  $i(A_1 - A_{-1})$ , ne sont autre chose que les coefficients de  $\cos \theta$ , et de  $\sin \theta$ , dans le développement de  $R$  en série de sinus et de cosinus.

Au lieu de donner à  $\theta$  des valeurs égales à des arcs sous-multiples de la circonférence, on peut, suivant la méthode de M. Leverrier, prendre pour valeurs particulières les multiples d'un angle quelconque  $\alpha$ , en faisant successivement  $\theta$  égal à

$$\begin{aligned} 0, & \quad \alpha, & \quad 2\alpha, & \dots & \dots & \dots & \quad k\alpha, \\ & & -\alpha, & & -2\alpha, & & \dots & \dots & \dots & \quad -k\alpha, \end{aligned}$$

et calculant les valeurs correspondantes

$$\begin{aligned} \Theta_0, & \quad \Theta_1, & \quad \Theta_2, & \dots & \dots & \dots & \quad \Theta_k, \\ \Theta_{-1}, & \quad \Theta_{-2}, & \dots & \dots & \dots & \dots & \quad -\Theta_{-k}, \end{aligned}$$

de l'intégrale  $\Theta$ .

Ainsi dans le cas de  $k = 1$ , si l'on suppose

$$e^{\alpha i} = a,$$

les équations à résoudre seront :

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 + A_{-1} &= \Theta_0, \\ A_0 + A_1 a + A_{-1} a^{-1} &= \Theta_1, \\ A_0 + A_1 a^{-1} + A_{-1} a &= \Theta_{-1}. \end{aligned}$$

En éliminant d'abord  $A_0$  entre ces équations, on en tire

$$\begin{aligned} (A_1 + A_{-1}) (2 - a - a^{-1}) &= 2 \Theta_0 - \Theta_1 - \Theta_{-1}, \\ (A_1 - A_{-1}) (a - a^{-1}) &= \Theta_1 - \Theta_{-1}. \end{aligned}$$

Or comme

$$\begin{aligned} a + a^{-1} &= 2 \cos z, \\ a - a^{-1} &= 2i \sin z, \end{aligned}$$

on en conclut

$$A_1 + A_{-1} = \frac{2 \Theta_0 - \Theta_1 - \Theta_{-1}}{4 \sin^2 \frac{z}{2}},$$

$$A_1 - A_{-1} = \frac{1}{i} \frac{\Theta_1 - \Theta_{-1}}{2 \sin z};$$

et par suite

$$A_0 = \frac{\Theta_1 + \Theta_{-1} - 2 \Theta_0 \cos z}{4 \sin^2 \frac{z}{2}}.$$

En faisant  $z = \frac{\pi}{2}$ , on retrouve les formules (5). Si l'on veut tenir compte des termes de l'ordre  $2g$ , il faudrait prendre  $k = 2$ ; les équations à résoudre seront alors :

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 + A_{-1} + A_2 + A_{-2} &= \Theta_0, \\ A_0 + A_1 a + A_{-1} a^{-1} + A_2 a + A_{-2} a^{-2} &= \Theta_2, \\ A_0 + A_1 a^{-1} + A_{-1} a + A_2 a^{-2} + A_{-2} a^2 &= \Theta_{-1}, \\ A_0 + A_1 a^2 + A_{-1} a^{-2} + A_2 a^4 + A_{-2} a^{-4} &= \Theta_4, \\ A_0 + A_1 a^{-2} + A_{-1} a^2 + A_2 a^{-4} + A_{-2} a^4 &= \Theta_{-2}. \end{aligned}$$

Ajoutons et retranchons la 2<sup>e</sup> avec la 3<sup>e</sup>, puis la 4<sup>e</sup> avec la 5<sup>e</sup> de ces équations

tions. Posons pour abréger :

$$\Theta_1' = \Theta_1 + \Theta_{-1}, \quad \Theta_1'' = \Theta_1 - \Theta_{-1},$$

Avec des notations analogues pour les autres quantités. Les équations précédentes se partagent en deux groupes :

$$(z') \left\{ \begin{array}{l} A_0 + A_1' + A_2' = \Theta_0, \\ 2 A_0 + A_1' a_1' + A_2' a_2' = \Theta_1', \\ 2 A_0 + A_2' a_2' + A_1' a_1' = \Theta_2', \end{array} \right.$$

et

$$(z'') \left\{ \begin{array}{l} A_1'' a_1'' + A_2'' a_2'' = \Theta_1'', \\ A_1'' a_2'' + A_2'' a_1'' = \Theta_2''. \end{array} \right.$$

Des équations (z') on tire, en éliminant  $A_0$ ,

$$\begin{aligned} A_1' (2 - a_1') + A_2' (2 - a_2') &= 2 \Theta_0 - \Theta_1', \\ A_1' (2 - a_2') + A_2' (2 - a_1') &= 2 \Theta_0 - \Theta_2', \end{aligned}$$

on bien

$$\begin{aligned} 4 A_1' \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 4 A_2' \sin^2 \alpha &= 2 \Theta_0 - \Theta_1', \\ 4 A_1' \sin^2 \alpha + 4 A_2' \sin^2 2\alpha &= 2 \Theta_0 - \Theta_2'; \end{aligned}$$

on en déduit

$$\begin{aligned} A_1' &= \frac{2 \Theta_0 \sin \alpha \sin 3\alpha - \Theta_1' \sin^2 2\alpha + \Theta_2' \sin^2 \alpha}{16 \sin^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 \frac{2\alpha}{2} \cdot \sin \frac{5\alpha}{2}}, \\ A_2' &= \frac{2 \Theta_0 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{5\alpha}{2} - \Theta_1' \sin^2 \alpha + \Theta_2' \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{16 \sin^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 \frac{2\alpha}{2} \cdot \sin \frac{5\alpha}{2}}; \end{aligned}$$

et enfin

$$A_0 = \Theta_0 - A_1' - A_2'.$$

Ces formules sont des cas particuliers des formules plus générales auxquelles parvient M. Höiel.

On trouverait de même en résolvant le système ( $x''$ ) :

$$A_1'' = -i \frac{\Theta_1'' \sin 4x - \Theta_2'' \sin 2x}{8 \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{2x}{2} \cdot \sin \frac{3x}{2} \cdot \sin \frac{4x}{2}},$$

$$A_2'' = +i \frac{\Theta_1'' \sin 2x - \Theta_2'' \sin x}{8 \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{2x}{2} \cdot \sin \frac{3x}{2} \cdot \sin \frac{4x}{4}}.$$

Ces formules se simplifient si on fait  $x = \frac{\pi}{4}$ ; alors

$$A_1' = \frac{\Theta_0 - \Theta_1' + \frac{1}{2} \Theta_2'}{\sqrt{2} - 1},$$

$$A_2' = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \Theta_0 - \frac{1}{2} \Theta_1' + \frac{1}{4} (2 - \sqrt{2}) \Theta_2'}{\sqrt{2} - 1}.$$

Mais en général les formules (5) seront bien suffisantes pour l'objet que j'ai en vue.

---

### III

#### DÉTERMINATION DES TERMES DONT LES ARGUMENTS NE SONT PAS DES MULTIPLES DE $\theta$ .

(4) Nous avons besoin de calculer les coefficients des termes dont les arguments ne sont pas les multiples de  $\theta$ .

Soit

$$\lambda = l'\Gamma' + l\Gamma,$$

un argument quelconque; on pourra toujours le mettre sous la forme

$$\lambda = m\theta + n'T + nT,$$

en choisissant le nombre arbitraire  $m$  de telle sorte que la somme algébrique  $n' + n$  soit la plus petite possible, et par suite que le terme d'argument  $n'T + nT$  soit de l'ordre le moins élevé possible. Ainsi on peut faire en sorte que  $n' + n$  soit moindre que  $\frac{1}{2}g$ , en augmentant ou en diminuant convenablement  $m$ .

Si on fait le même changement de variables qu'au n° 2, on aura :

$$\lambda = m\theta + n'i\sigma + n\left(\frac{\theta}{i} - i'\sigma\right) = (mi + n)\frac{\theta}{i} + (n'i - n'')\sigma.$$

Cet argument fait nécessairement partie de  $\varphi(T' T)$ , de sorte que cette fonction se compose : 1° de termes relatifs aux arguments de la forme  $\lambda + h\theta$ ; 2° des termes dont les arguments ne peuvent rentrer dans cette forme. On peut donc poser

$$R = \sum A_j e^{j\theta} + \sum B_h e^{(\lambda + h\theta)i} + \chi\left(i\sigma, \frac{\theta}{i} - i'\sigma\right);$$

et si on multiplie les deux membres de cette expression par  $e^{-\lambda i}$ , il vient :

$$R e^{-\lambda i} = \sum A_j e^{(j-\lambda)i} + \sum B_h e^{h\theta i} + e^{-\lambda i} \chi\left(i\sigma, \frac{\theta}{i} - i'\sigma\right).$$

Dans le second membre, les termes du groupe

$$\sum B_h e^{h\theta i},$$

sont les seuls qui soient indépendants de  $\sigma$ , de sorte que si on multiplie les deux membres de l'équation précédente par  $d\sigma$  et qu'on intègre entre les limites 0 et  $2\pi$ , on aura :

$$\sum B_h e^{h\theta i} = A,$$



en posant

$$\Lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Re}^{-\lambda i} d\sigma.$$

En donnant à  $\theta$  les mêmes valeurs particulières que précédemment, on voit que le calcul de l'intégrale  $\Lambda$  se fera à l'aide des mêmes valeurs de  $R$  qui auront servi au calcul de  $\Theta$ . Si on met à la place de  $\lambda$  sa valeur

$$(mi + n) \frac{\theta}{i} + (n'i - m'i) \sigma,$$

l'intégrale  $\Lambda$  pourra s'écrire ainsi :

$$\Lambda = e^{-(mi+n) \frac{\theta}{i}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Re}^{-(n'i - m'i) \sigma} d\sigma.$$

Supposons que l'on ait développé  $R$  en série ordonnée suivant les puissances de l'exceptionnelle  $e^{\sigma i}$ , et soit

$$R = \Sigma C_j e^{j \sigma i},$$

la forme de ce développement.

Pour une valeur particulière de  $\theta$ , l'intégrale  $\Theta$  correspondante définie par l'équation (2), ne dépendant pas de  $\sigma$ , sera égale au terme constant  $C_0$ , du développement; en sorte que pour calculer les coefficients des inégalités dont les arguments sont les multiples de  $\theta$ , on aura l'équation

$$(f) \quad \Sigma A_j e^{j \theta i} = C_0.$$

De plus si on remarque que le second facteur de l'intégrale  $\Lambda$  n'est autre chose que le coefficient de  $e^{(n'i - m'i) \sigma i}$  du même développement, on en conclura que l'équation

$$\Sigma B_h e^{h \theta i} = e^{-(mi+n) \frac{\theta}{i}} C_{n'i - m'i},$$

servira à calculer les coefficients des inégalités dont les arguments sont de

la forme

$$h\theta + m\theta + n'\Gamma' + n\Gamma,$$

ou simplement

$$h\theta + n'\Gamma' + n\Gamma,$$

si l'on prend pour  $\lambda$  l'argument

$$n'\Gamma' + n\Gamma,$$

dont la somme des indices est la plus petite possible; la dernière équation devient alors

$$(7) \quad \Sigma B_k e^{k\theta} = e^{-n \frac{\theta}{\Gamma}} C_{n'\Gamma' - n\Gamma}.$$

Il est assez naturel de se demander si dans le calcul des intégrales  $\Lambda$ , on pourra se borner à donner à  $\theta$  un petit nombre de valeurs particulières. Pour résoudre la question, il suffit de se rappeler que les coefficients des termes dont les arguments sont

$$0, \quad 2\theta, \quad 3\theta, \quad \dots$$

sont respectivement des ordres

$$g, \quad 2g, \quad 3g, \quad \dots$$

Or si parmi les termes dont les arguments sont de la forme  $\lambda + h\theta$ , on prend pour  $\lambda$  celui d'ordre le moins élevé et que nous avons désigné par

$$n'\Gamma' + n\Gamma,$$

il est facile de voir que, comme la somme  $n' + n$  est plus petite que  $\frac{1}{2}g$ , si on pose  $n' + n = \varepsilon$ , les coefficients des termes dont les arguments sont

$$\lambda, \quad \lambda \pm \theta, \quad \lambda \pm 2\theta, \quad \dots \quad \lambda \pm h\theta,$$

sont respectivement des ordres

$$\varepsilon, \quad \varepsilon \pm g, \quad \varepsilon \pm 2g, \quad \dots \quad -\varepsilon \pm hg;$$

De sorte qu'il suffira encore d'un petit nombre de valeurs particulières de  $\lambda$  pour calculer les  $B_n$ .

---

## IV

### CALCUL DES $\Theta$ . — INDICATION DE QUELQUES MÉTHODES.

(5) Nous venons de voir comment, par le changement de variables imaginé par M. Liouville, une première intégration a été remplacée par la résolution d'un petit nombre d'équations du premier degré. Mais pour cela il faut que l'on ait calculé préalablement les valeurs numériques des intégrales simples que nous avons désignées par  $\Theta$ . C'est la partie la plus pénible du calcul; et on doit chercher autant que possible à la simplifier. Je vais indiquer le principe de deux méthodes sans les appliquer toutefois.

(6) Dans la première, on prend pour  $\sigma$  des valeurs différant d'une quantité constante; on fera, par exemple,

$$d\sigma = 1^\circ = \frac{\pi}{180},$$

ce qui revient à donner à  $T'$  et à  $T$  des accroissements égaux à  $\frac{i\pi}{180}$  et à  $-\frac{i'\pi}{180}$ ; si cet accroissement  $d\sigma$  était trop grand pour avoir une approximation suffisante, il faudrait prendre une plus petite partie de la circonférence. Ainsi on commence par faire une hypothèse sur  $\theta$ ; on donnera à  $\sigma$  les valeurs  $0^\circ, 1^\circ, 2^\circ, \dots$  et on en conclura les valeurs correspondantes de  $T', T$  et de  $R = F(T', T)$ . Cela fait, on aura la valeur de l'intégrale  $\Theta$  par la méthode des quadratures ou par la formule de Simpson.

Ce procédé a l'inconvénient d'exiger le calcul d'un très grand nombre de valeurs de  $R$ , et on ne peut s'assurer de l'approximation obtenue qu'en





terminer directement l'intégrale  $\Theta$  par la méthode des quadratures, soit dans le cas où l'on emploierait la méthode d'interpolation dont je viens d'exposer le principe. Je pense qu'il y a avantage à donner à  $\theta$ , non plus des valeurs multiples d'un arc  $\frac{2\pi}{n}$ , mais bien des valeurs multiples d'un arc

$$i''z.$$

Remarquons en effet que donner à  $\sigma$  les valeurs

$$\begin{array}{ccccccc} 0, & z, & 2z, & . . . . . & kz, \\ & - z, & - 2z, & . . . . . & - kz, \end{array}$$

c'est donner à  $T'$  les valeurs

$$\begin{array}{ccccccc} 0, & iz, & 2iz, & . . . . . & kiz, \\ & - iz, & - 2iz, & . . . . . & - kiz, \end{array}$$

et à  $T$ , les valeurs

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{\theta}{i}, & \frac{\theta}{i} - i''z, & \frac{\theta}{i} - 2i''z, & . . . . . & \frac{\theta}{i} - ki''z, \\ & \frac{\theta}{i} + i''z, & \frac{\theta}{i} + 2i''z, & . . . . . & \frac{\theta}{i} + ki''z. \end{array}$$

Les valeurs de  $T'$ , et par suite les quantités qui en dépendent, comme le rayon vecteur, l'anomalie vraie, etc., dont on a besoin pour calculer les valeurs de  $R$ , sont indépendantes de  $\theta$ , et ne changent pas avec cette variable. Il en est tout autrement de  $T$  et des quantités qui s'en déduisent. Mais si on donne à  $\theta$  des valeurs multiples de

$$i''z,$$

les valeurs de  $T$  correspondant aux valeurs de  $\sigma$  changent de rang d'un tableau à l'autre, mais restent à peu près les mêmes.

EXEMPLE : pour  $\theta = 0$ ,  $T$  devient

$$\begin{array}{ccccccc} 0, & - i''z, & - 2i''z, & . . . . . & - ki''z, \\ & + i''z, & + 2i''z, & . . . . . & + ki''z; \end{array}$$

pour  $\theta = i'z$ , T prend, pour les mêmes valeurs de  $\sigma$ , les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} i'z, \quad 0, \quad -i'z, \quad . . . . . & - (k-1) i'z, \\ 2i'z, \quad 3i'z, \quad . . . . . & (k+1) i'z; \end{aligned}$$

tableau qui ne renferme qu'une nouvelle valeur de T. On aurait un résultat analogue en faisant

$$\theta = -i'z.$$

En opérant ainsi on prendrait non plus les formules (5) du n° 3, mais celles qui suivent et dans lesquelles on a donné à  $\theta$  des valeurs multiples d'un arc quelconque.

---

## V

### EMPLOI DES ANOMALIES EXCENTRIQUES.

(9) On sait que le rayon vecteur, l'anomalie vraie, et l'anomalie moyenne d'une planète s'expriment simplement, sous forme finie, en fonction de l'anomalie excentrique; et par suite on peut prévoir que toute fonction des coordonnées pourra se développer facilement par rapport aux anomalies excentriques. Un développement étant fait sous cette forme, on passe ensuite au développement correspondant suivant les anomalies moyennes par l'intermédiaire d'intégrales faciles à calculer et connues sous le nom de *transcendantes* de Bessel.

Ainsi nous nous proposons de développer une fonction périodique  $F(u, u')$ , et par conséquent rien ne nous empêche d'appliquer à ces développements le changement de variables de M. Liouville.

Nous poserons donc

$$\begin{aligned} \theta &= i'u' + iu, \\ u &= \frac{\theta}{i} = i\sigma, \\ u' &= i\sigma'. \end{aligned}$$

En répétant ce que nous avons déjà dit, on aura les coefficients des termes  $e^{i\theta}$ , lorsqu'on connaîtra les intégrales

$$\Theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R d\sigma.$$

(10) Pour calculer les quantités  $\Theta$ , il faut développer  $R$  en série ordonnée suivant les puissances de

$$x = e^{i\sigma},$$

$\sigma$  étant défini par les équations précédentes. Il faut d'abord exprimer toutes les quantités qui entrent dans  $R$  au moyen des anomalies excentriques et des éléments. Nous savons que la fonction à développer a pour expression

$$R = \frac{rs}{r'^2} - \frac{1}{\Delta}$$

en désignant par :

$r$ , le rayon vecteur de la planète troublée,

$r'$ , celui de la planète troublante,

$s$ , le cosinus de l'angle  $(r, r')$ ,

$\Delta = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr's}$ , la distance mutuelle des deux astres.

Ces quantités dépendant elles-mêmes des suivantes :

$w, w'$  anomalies vraies,

$g, g'$  longitudes des périhélies comptées à partir de l'intersection des orbites,



$u, u'$  anomalies excentriques,  
 $e, e'$ , excentricités,  
 $a, a'$ , distances moyennes au soleil,  
 $f, f'$ , les quantités  $\sqrt{1-e^2}$ ,  $\sqrt{1-e'^2}$ ,  
 $\gamma$ , inclinaison mutuelle des orbites.

Si l'on fait

$$\begin{aligned}\omega &= g' - g, & \Omega &= g' + g, \\ \varrho &= \cos^2 \frac{1}{2} \gamma, & \nu &= \sin^2 \frac{1}{2} \gamma,\end{aligned}$$

on trouve

$$s = \varrho \cos (w' - w + \omega) + \nu \cos (w' + w + \Omega);$$

ou, en posant

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \varrho \cos \omega + \nu \cos \Omega, \\ \mathbf{M}' &= \varrho \cos \omega - \nu \cos \Omega, \\ \mathbf{N} &= \varrho \sin \omega + \nu \sin \Omega, \\ \mathbf{N}' &= \varrho \sin \omega - \nu \sin \Omega,\end{aligned}$$

$$s = \mathbf{M} \cos w \cos w' + \mathbf{M}' \sin w \sin w' - \mathbf{N} \cos w \sin w' + \mathbf{N}' \sin w \cos w'.$$

On sait que l'on a en outre :

$$\begin{aligned}r \cos w &= a (\cos u - e), \\ r \sin w &= af' \sin u, \\ r \cos w' &= a' (\cos u' - e'), \\ r \sin w' &= af' \sin u'.\end{aligned}$$

On en déduit facilement

$$\begin{aligned}rr's &= \mathbf{M}aa'e'e' + \frac{1}{2} (\mathbf{M} + \mathbf{M}'ff') aa' \cos (u-u') - \frac{1}{2} (\mathbf{N}f' + \mathbf{N}'f) aa' \sin (u-u') \\ &+ \frac{1}{2} (\mathbf{M} - \mathbf{M}'ff') aa' \cos (u'+u) - \frac{1}{2} (\mathbf{N}f' - \mathbf{N}'f) aa' \sin (u'+u) \\ &- \mathbf{M}aa'e' \cos u - \mathbf{N}'f'aa'e' \sin u \\ &- \mathbf{M}aa'e' \cos u' - \mathbf{N}f'aa'e' \sin u'.\end{aligned}$$

On a de plus

$$r^2 = a^2 \left| 1 + \frac{1}{2} e^2 - 2e \cos u + \frac{1}{2} e^2 \cos 2u \right|,$$

$$r'^2 = a'^2 \left| 1 + \frac{1}{2} e'^2 - 2e' \cos u' + \frac{1}{2} e'^2 \cos 2u' \right|;$$

Si donc on pose

$$h = a^2 \left( 1 + \frac{1}{2} e^2 \right) + a'^2 \left( 1 + \frac{1}{2} e'^2 \right) - 2 \text{Maa}'e'e',$$

$$hk \cos \alpha = \frac{1}{2} (\text{M} + \text{M}'ff') aa' \quad , \quad hk \sin \alpha = \frac{1}{2} (\text{N}f' + \text{N}'f) aa' \quad ,$$

$$hc \cos \gamma = \frac{1}{2} (\text{M} - \text{M}'ff') aa' \quad , \quad hc \sin \gamma = \frac{1}{2} (\text{N}f' - \text{N}'f) aa' \quad ,$$

$$hd \cos \gamma = - \text{Maa}'e' \quad , \quad hd \sin \delta = \text{N}'aa'f'e' \quad ,$$

$$hd' \cos \delta' = - \text{Maa}'e \quad , \quad hd' \sin \delta' = - \text{Naa}'f'e \quad ,$$

$$hb \cos \xi = a^2 e - \text{Maa}'e' \quad , \quad hb \sin \xi = \text{N}'aa'f'e' \quad ,$$

$$hb' \cos \xi' = a'^2 e' - \text{Maa}'e \quad , \quad hb' \sin \xi' = \text{Naa}'f'e \quad ,$$

$$hg = \frac{1}{4} a^2 e^2, \quad hl = \text{Maa}'e'e', \quad hg' = \frac{1}{4} a'^2 e'^2,$$

on aura

$$\frac{rr's}{h} = k \cos(u' - u + \alpha) + c \cos(u' + u + \gamma) + d \cos(u + \delta) + d' \cos(u' + \delta) + l,$$

$$\frac{\Delta^2}{h} = 1 - 2k \cos(u' - u + \alpha) - 2c \cos(u' + u + \gamma) - 2b \cos(u + \xi) - 2b' \cos(u + \xi')$$

$$+ 2g \cos 2u + 2g' \cos 2u'. \quad (*)$$

(II) Nous pouvons maintenant exprimer R au moyen des anomalies excentriques et des constantes  $h, k, c, \dots, \alpha, \gamma, \dots$

Occupons-nous d'abord de la première partie de R,

$$\frac{rs}{r'^2} = \frac{rr's}{r'^3}$$

(\*) M. Hénel, dans un cours fait à la Faculté des sciences de Bordeaux, en 1862, ayant indiqué quelques-unes des méthodes de Cauchy, s'est servi, pour la transformation de R, des formules ci-dessus; j'ai cru devoir conserver ces formules et ces notations qui m'ont paru commodes, en ayant soin d'indiquer où je les avais puisées.

Ou a

$$r' = a' (1 - e' \cos u);$$

on transforme cette expression au moyen des exponentielles imaginaires, en posant :

$$e^{u\tau} = v',$$

et

$$\tau' = \text{tang } \frac{1}{2} (\text{arc sin } e');$$

on trouve

$$r' = \frac{a'e'}{2\tau'} (1 - \tau'v') (1 - \tau'v'^{-1}).$$

On en déduit

$$\frac{1}{r'^n} = \left( \frac{2\tau'}{a'e'} \right)^{3+\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} (\tau')_j v'^j,$$

en faisant :

$$\begin{aligned} (\tau')_0 &= 1 + 9\tau'^2 + 36\tau'^4 + \dots, \\ (\tau')_1 = (\tau')_{-1} &= 3\tau' (1 + 6\tau'^2 + 20\tau'^4 + \dots), \\ (\tau')_2 = (\tau')_{-2} &= 6\tau'^2 (1 + 5\tau'^2 + 15\tau'^4 + \dots), \\ &\dots \end{aligned}$$

En posant

$$H_j = \frac{h}{2} \left( \frac{2\tau'}{a'e'} \right)^3 (\tau')_j.$$

l'expression de  $\frac{rr's}{r'^3}$  devient

$$\left[ \begin{aligned} &2l + 2k \cos(u' - u + \alpha) + 2c \cos(u' + u + \gamma) \\ &+ 2d \cos(u + \delta) + 2d' \cos(u' + \delta') \end{aligned} \right] \sum H_j v'^j.$$

Appliquons maintenant le changement de variables de M. Liouville, et posons

$$u' = i\sigma, \quad u = \frac{\theta}{i} - i'\sigma;$$

remplaçons les cosinus par des imaginaires, et faisons pour abrégier :

$$\begin{aligned} e^{(\alpha - \frac{\theta}{i})i} &= a, & e^{(\gamma + \frac{\theta}{i})i} &= c, \\ e^{(\delta + \frac{\theta}{i})i} &= d, & e^{\delta'i} &= d', \\ e^{\sigma_1} &= x; \end{aligned}$$

convenons encore de représenter par

$$[ax]$$

une expression imaginaire de la forme

$$ax + a^{-1}x^{-1}.$$

Cela posé, on aura :

$$(8) \frac{rr's}{r^3} = \left\{ 2l + k [ax^{i-i'}] + c [cx^{i-i'}] + d [dx^{-i}] + d' [d'x^{i'}] \right\} \geq \Pi_i x^{ii'}.$$

Sous cette forme on voit combien il est facile d'effectuer le développement de cette première partie de R par rapport aux puissances de x.

On peut même obtenir sans faire aucune hypothèse numérique sur les indices i, i', le terme indépendant de x; comme les indices i, i' sont premiers entre eux, on verra que ce terme a pour expression

$$2/H_0 + d'H_1 [d].$$

Quant aux autres termes, on les connaîtra dès qu'on connaîtra les valeurs de i, i'.

Passons maintenant à la seconde partie de R qui est, comme on le sait, la plus importante. Nous l'avons déjà mise sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^2}{h} &= 1 - 2k \cos(u' - u + \alpha) - 2c \cos(u' + u + \gamma) - 2b \cos(u + \xi) \\ &\quad - 2b' \cos(u' + \xi') + 2g \cos 2u + 2g' \cos 2u'; \end{aligned}$$

avant d'introduire les nouvelles variables, nous ferons encore subir quelques transformations à cette expression.

On remarque facilement qu'on peut l'écrire

$$\frac{\Delta^2}{h} = \left[ 1 - 2k \cos(u' - u + \alpha) \right] \left[ 1 - 2c \cos(u' + u + \gamma) \right] \\ - 4kc \cos(u' - u + \alpha) \cos(u' + u + \gamma) - 2b \cos(u + \epsilon) - 2b' \cos(u' + \epsilon') \\ + 2g \cos 2u + 2g' \cos 2u' ;$$

et, comme

$$2 \cos(u' - u + \alpha) \cos(u' + u + \gamma) = \cos(2u' + \gamma + \alpha) + \cos(2u + \gamma - \alpha),$$

on voit que

$$2g \cos 2u + 2g' \cos 2u' - 4kc \cos(u' - u + \alpha) \cos(u' + u + \gamma) \\ = - 2 \cos 2u' [kc \cos(\gamma + \alpha) - g'] + 2 \sin 2u' \cdot kc \sin(\gamma + \alpha) \\ - 2 \cos 2u [kc \cos(\gamma - \alpha) - g] + 2 \sin 2u \cdot kc \sin(\gamma - \alpha) ;$$

de sorte qu'en posant

$$f \cos \zeta = kc \cos(\gamma - \alpha) - g, \\ f \sin \zeta = kc \sin(\gamma - \alpha) \quad , \\ f' \cos \zeta' = kc \cos(\gamma + \alpha) - g', \\ f' \sin \zeta' = kc \sin(\gamma + \alpha) \quad ,$$

il vient

$$\frac{\Delta^2}{h} = \left[ 1 - 2k \cos(u' - u + \alpha) \right] \left[ 1 - 2c \cos(u' + u + \gamma) \right] - 2b \cos(u + \epsilon) \\ - 2b' \cos(u' + \epsilon') - 2f \cos(\zeta + 2u) - 2f' \cos(\zeta' + 2u').$$

Si nous changeons de variables et que nous remplaçons les cosinus par des exponentielles, il vient, en nous servant des notations précédemment

posées, et faisant en outre

$$\begin{aligned} e^{\left(\xi + \frac{\theta}{r}\right)i} &= b, & e^{\xi i} &= b', \\ e^{\left(\zeta + 2\frac{\theta}{r}\right)i} &= f, & e^{\zeta i} &= f', \end{aligned}$$

$$(9) \quad \frac{\Delta^2}{h} = \left(1 - k [ax^{i+r}]\right) \left(1 - c [cx^{i-r}]\right) - b [bx^{i-r}] - b' [b'x^i] \\ - - f [fx^{i-2r}] - f' [f'x^{2r}].$$

Nous avons besoin de former les puissances  $\left(\frac{\Delta^2}{h}\right)^{-\lambda}$ ,  $\lambda$  prenant les valeurs  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ ; pour cela nous poserons :

$$\begin{aligned} P &= \left(1 - k [ax^{i+r}]\right) \left(1 - c [cx^{i-r}]\right), \\ Q &= b [bx^{i-r}] + b' [b'x^i] + f [fx^{i-2r}] + f' [f'x^{2r}]; \end{aligned}$$

l'on aura alors

$$(10) \quad \left(\frac{\Delta^2}{h}\right)^{-\lambda} = P^{-\lambda} + [\lambda]_1 P^{-\lambda+1} Q + [\lambda]_2 P^{-\lambda+2} Q^2 + \dots,$$

$[\lambda]_n$  désignant le  $(n + 1)^e$  coefficient binomial. Nous sommes donc ramenés comme on le voit à former les puissances de  $P$  et de  $Q$ ; pour cela nous emploierons l'artifice dont on a déjà fait usage, et nous décomposerons chacun des deux facteurs de  $P$  en deux autres. Posons

$$\omega = \text{tang } \frac{i+1}{2} (\text{arc sin } 2k),$$

on aura

$$(11) \quad \left(1 - k [ax^{i+r}]\right)^{-\lambda} = \left(\frac{k}{\omega}\right)^{-\lambda} \left(1 - \omega ax^{i+r}\right)^{-\lambda} \left(1 - \omega a^{-1}x^{i+r}\right)^{-\lambda}.$$

Développant les puissances des deux facteurs binômes et effectuant le produit, on trouve

$$\left(1 - k [ax^{i+r}]\right)^{-\lambda} = \left(\frac{k}{\omega}\right)^{-\lambda} \left\{ \omega_0^{-\lambda} + \omega_1^{-\lambda} [ax^{i+r}] + \omega_2^{-\lambda} [a^2x^{2i+r}] + \dots \right\}$$

en posant

$$\begin{aligned} \omega_0^{(\lambda)} &= 1 + [\lambda]_1^2 \omega^2 + [\lambda]_2^2 \omega^4 + \dots, \\ \omega_1^{(\lambda)} &= \omega \left\{ [\lambda]_1 + [\lambda]_1 [\lambda]_2 \omega^2 + \dots \right\}, \\ \dots \dots \dots \\ \omega_j^{(\lambda)} &= \omega^j \left\{ [\lambda]_j + [\lambda]_1 [\lambda]_{j+1} \omega^2 + \dots + [\lambda]_j [\lambda]_{2j+1} \omega^{2j} + \dots \right\}, \end{aligned}$$

On aura de la même manière en faisant

$$\omega' = \text{tang } \frac{1}{2} (\text{arc sin } 2c),$$

$$\left( 1 - c [c x^{i-r}] \right)^{-\lambda} = \left( \frac{c}{\omega'} \right)^{-\lambda} \left\{ \omega_0^{(\lambda)} + \omega_1^{(\lambda)} [c x^{i-r}] + \omega_2^{(\lambda)} [c^2 x^{2i-r}] + \dots \right\},$$

les  $\omega_j^{(\lambda)}$  étant définis comme les  $\omega_j^{(\lambda)}$ .

On en déduit le tableau suivant :

$$\begin{aligned} (12) \quad \frac{P^{-\lambda}}{\left( \frac{kc}{\omega\omega'} \right)^{-\lambda}} &= \omega_0^{(\lambda)} \left\{ \omega_0^{(\lambda)} + \omega_1^{(\lambda)} [a x^{i+r}] + \omega_2^{(\lambda)} [a^2 x^{2i+r}] + \dots \right\} \\ &+ \omega_1^{(\lambda)} \left\{ \omega_0^{(\lambda)} [c x^{i-r}] + \omega_1^{(\lambda)} \left[ \begin{array}{l} [a c x^{2i}] \\ + [a c^{-1} x^{2i}] \end{array} \right] + \omega_2^{(\lambda)} \left[ \begin{array}{l} [a_2 c x^{3i+r}] \\ + [a^2 c^{-1} x^{i+3r}] \end{array} \right] + \dots \right\} \\ &+ \omega_2^{(\lambda)} \left\{ \omega_0^{(\lambda)} [c^2 x^{2i-r}] + \omega_1^{(\lambda)} \left[ \begin{array}{l} [a c^2 x^{3i-r}] \\ + [a c^{-2} x^{3i-r}] \end{array} \right] + \omega_2^{(\lambda)} \left[ \begin{array}{l} [a^2 c^2 x^{4i}] \\ + [a^2 c^{-2} x^{4i}] \end{array} \right] + \dots \right\} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

La série des  $\omega_j^{(\lambda)}$  est habituellement très convergente; en sorte qu'on peut se borner aux premiers termes du développement précédent; quant aux quantités qui multiplient les  $\omega_j^{(\lambda)}$ , on prendra un nombre de termes d'autant moindre que les  $\omega_j^{(\lambda)}$  décroîtront plus rapidement.

On formera ensuite les puissances de  $Q$ ; on peut remarquer dans les applications numériques que les termes importants de  $Q$  sont ceux qui ont pour coefficients  $b$  et  $b'$ ; en général les coefficients  $f, f'$  sont assez petits par rapport à  $b$  et  $b'$ , de sorte qu'à partir d'un ordre assez peu élevé, on peut négliger les puissances de ces coefficients.

En donnant à  $i$  et à  $i'$  des valeurs particulières, on obtiendra très simplement le développement de  $\left(\frac{\Delta^2}{h}\right)^{-\lambda}$  par rapport aux puissances de  $x$ ; pour le calcul de  $R$  on fera  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

Quand cela sera fait, on pourra déterminer les coefficients des termes ayant pour argument

$$i'u' + iu,$$

et même d'après le n° 4, ceux des termes ayant des arguments quelconques, au moyen des coefficients

$$C_0, C_{\pm 1}, C_{\pm 2}, \dots \dots C_{\pm s}, \dots \dots,$$

du développement de  $R$  par rapport à  $x$ . J'indiquerai plus loin la marche à suivre dans un calcul numérique, je vais d'abord montrer comment on passe du développement relatif aux anomalies excentriques au développement suivant les anomalies moyennes.

---

## VI

### PASSAGE DU DÉVELOPPEMENT PAR RAPPORT AUX ANOMALIES EXCENTRIQUES AU DÉVELOPPEMENT SUIVANT LES ANOMALIES MOYENNES.

(12) Je désignerai pour un instant par

$$(u_j, u'_j),$$



le coefficient d'un terme ayant pour argument

$$ju + j'u',$$

et par

$$(T_j, T'_j),$$

le coefficient d'un terme ayant pour argument

$$jT + j'T';$$

le premier est relatif au développement suivant les anomalies excentriques, le second au développement suivant les anomalies moyennes. On désignera en outre par

$$(u_j, T'_j)$$

un coefficient relatif à un développement mixte servant de passage du premier au second des deux développements en question.

(13) Cela posé, voici par quelles formules on passe des coefficients  $(u_j, u'_j)$  aux coefficients  $(T_j, T'_j)$ ; on a d'abord :

$$(13) \quad (u_j, T'_j) = \sum_{j'=-\infty}^{j'+\infty} \frac{j'-l'}{j'} \mathcal{E}_l^{(j')} (u_j, u'_{j'-l'}),$$

puis

$$(14) \quad (T_j, T'_j) = \sum_{l'=-\infty}^{l'+\infty} \frac{j-l'}{j} \mathcal{E}_l^{(j')} (u_{j-l'}, T'_{j'})..$$

Les seconds membres de ces expressions sont des séries qui peuvent se réduire à un petit nombre de termes que l'on obtient en donnant à  $l, l'$  les valeurs  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Les symboles  $\mathcal{E}_l^{(j)}$ ,  $\mathcal{E}_l^{(j')}$ , sont les intégrales connues sous le nom de transcendentes de Bessel, et on les exprime à l'aide de séries très convergentes. Ainsi  $e$  désignant l'excentricité de la planète  $m$ , on a

$$\mathcal{E}_l^{(j)} = \frac{e^l}{l!} \left\{ 1 - \frac{1}{1!} \frac{e^2}{(l+1)} + \frac{1}{2!} \frac{e^4}{(l+1)(l+2)} - \dots \right\}^l$$

expression dans laquelle on a fait

$$\frac{je}{2} = e_j,$$

et

$$l! = 1. 2. 3. \dots l.$$

On démontre facilement les relations suivantes :

$$(15) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_{-l}^{\text{D}} = (-1)^l \mathcal{E}_l^{\text{D}} , \\ \mathcal{E}_i^{(-j)} = (-1)^j \mathcal{E}_i^{\text{D}} , \\ \mathcal{E}_{i-1}^{\text{D}} + \mathcal{E}_{i+1}^{\text{D}} = \frac{l}{e_j} \mathcal{E}_i^{\text{D}} , \end{array} \right.$$

On trouvera la démonstration de ces formules dans la 3<sup>e</sup> note de Cauchy sur le mémoire de M. Leverrier (\*). On déduit des formules (13) et (14)

$$(16) \left( \mathbf{T}_j, \mathbf{T}'_j \right) = \sum \mathcal{E}_i^{\text{D}} \mathcal{E}_i'^{\text{D}} \left( 1 - \frac{l}{j} \right) \left( 1 - \frac{l'}{j'} \right) \left( u_{j-l}, u'_{j'-l} \right);$$

et on aurait de même

$$\left( \mathbf{T}_{-j}, \mathbf{T}'_{-j} \right) = \sum \mathcal{E}_i^{(-j)} \mathcal{E}_i'^{(-j)} \left( 1 + \frac{l}{j} \right) \left( 1 + \frac{l'}{j'} \right) \left( u_{-j-l}, u'_{-j'-l} \right),$$

ou, en tenant compte des relations (15),

$$(17) \left( \mathbf{T}_{-j}, \mathbf{T}'_{-j} \right) = \sum \mathcal{E}_i^{\text{D}} \mathcal{E}_i'^{\text{D}} (-1)^{j+l} \left( 1 + \frac{l}{j} \right) \left( 1 + \frac{l'}{j'} \right) \left( u_{-j-l}, u'_{-j'-l} \right).$$

(14) Si dans les formules précédentes nous remplaçons les indices généraux par les indices  $i, i'$  de l'argument  $\theta$ ; et si nous représentons pour abrégé par  $A_{i,i'}$  le coefficient  $(\mathbf{T}_i, \mathbf{T}'_{i'})$ , et par  $A_{i,i'}$  le coefficient  $(u_i, u_{i'})$ , on

(\*) *Comptes-rendus*. Tome XX, page 782.

aura en ajoutant et retranchant les équations (16) et (17) :

$$(18) \quad A_{i,p} \pm A_{-i,-p} = \varepsilon_i^i \varepsilon_p^{p'} \left\{ \left(1 - \frac{l}{i}\right) \left(1 - \frac{p'}{p}\right) A_{i-i, p-p'} \pm (-1)^{l+p'} \left(1 + \frac{l}{i}\right) \left(1 + \frac{p'}{p}\right) A_{-i-l, -p-p'} \right\}$$

Si on développe cette expression en donnant à  $l, p'$ , les valeurs  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$  il vient :

$$(19) \quad A_{i,p} \pm A_{-i,-p} = \varepsilon_i^i \varepsilon_p^{p'} (A_{i,p} \pm A_{-i,-p}) \\ + \varepsilon_i^i \varepsilon_p^{p'} \left\{ A_{i,p-1} \mp A_{-i,-p-1} - (A_{i,p+1} \mp A_{-i,-p+1}) - \frac{l}{i} \left[ A_{i,p-1} \pm A_{-i,-p-1} + A_{i,p+1} \pm A_{-i,-p+1} \right] \right\} \\ + \varepsilon_i^i \varepsilon_p^{p'} \left\{ A_{i-1, p} \mp A_{-i+1, -p} - (A_{i+1, p} \mp A_{-i-1, -p}) - \frac{1}{i} \left[ A_{i-1, p} \pm A_{-i+1, -p} + A_{i+1, p} \pm A_{-i-1, -p} \right] \right\} \\ + \text{etc.}$$

La manière dont je groupe les termes dans cette expression permet d'exprimer directement  $A_{i,p} \pm A_{-i,-p}$  au moyen des coefficients  $C_{\pm s}$  du développement de  $R$  par rapport à  $\sigma$ .

Remarquons en effet que l'on n'a que des sommes ou des différences de la forme de

$$A_{i-l, p-p'} \pm A_{-i-l, -p-p'}$$

Or  $A_{i-l, p-p'}$  est le coefficient d'un terme d'argument

$$iu + i'u - lu - l'u' = \theta - lu - l'u';$$

$A_{-i-l, -p-p'}$  est le coefficient d'un terme d'argument

$$-(iu + i'u) - lu - l'u' = -\theta - lu - l'u';$$

si donc on pose  $\lambda = -(lu + l'u')$ ,

la formule (7) du n° 4 montre que les coefficients en question sont les  $B_{\pm 1}$  de l'équation

$$\varepsilon B_i e^{i\theta} = e^{\frac{i\theta}{i}} C_{i-p-i}$$

qu'on obtient en faisant  $n = -l$ ,  $n' = -l'$  dans l'équation que je viens de rappeler.

On exprimera donc facilement

$$A_{l-l', p-q} \pm A_{-l-l', p-r},$$

au moyen des valeurs particulières de  $C_{l', p}$ .

Ainsi, en particulier, on voit que

$$A_{i, p} \pm A_{-i, -p},$$

sera calculé au moyen de  $C_0$ , ce que l'on pouvait prévoir d'ailleurs.

(15) Les formules que nous venons de donner pour exprimer les  $A_{\pm i, \pm l}$ , ne paraissent pas renfermer le terme constant  $A_0$  du développement de la fonction perturbatrice; je vais faire voir qu'il peut s'exprimer aussi au moyen des  $C_{\pm s}$ .

Si on suppose  $R$  développée par rapport aux puissances de  $e^{Ti}$ , on sait que le terme constant ( $T_0$ ) de ce développement est donné par l'équation

$$(20) \quad (T_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R dT$$

Supposons d'autre part  $R$  développée par rapport aux puissances de

$$\psi = e^{ui},$$

et soit

$$R = \sum_{-\infty}^{+\infty} (u_{-l}) e^{-lu} = \sum (u_{-l}) \psi^{-l}$$

$l$  pouvant prendre toutes les valeurs entières positives ou négatives; si dans l'équation (20) on remplace  $R$  par cette dernière expression, on aura :

$$(T_0) = \frac{1}{2\pi} \sum (u_{-l}) \int_0^{2\pi} \psi^{-l} dT.$$

Mais entre  $u$  et  $T$ , on a la relation

$$T = u - e \sin u,$$

d'où

$$dT = du (1 - e \cos u) = du \left( 1 - \frac{e}{2} \frac{\psi + \psi^{-1}}{2} \right);$$

on aura donc :

$$(T_0) = \frac{1}{2\pi} \sum (u_{-l}) \int_0^{2\pi} \left[ \psi^{-l} - \frac{e}{2} (\psi^{l-1} + \psi^{-l-1}) \right] du;$$

or les seuls termes qui ne disparaissent pas par l'intégration sont ceux que l'on obtient en donnant à  $l$  les valeurs

$$0, \quad 1, \quad -1,$$

done

$$(T_0) = u_0 - \frac{e}{2} [(u_1) + (u_{-1})],$$

On en conclura comme dans le cas général des formules (13) (14)

$$(T_0, T_0') = (u_0, T_1') - \frac{e}{2} [(u_1, T_0') + (u_{-1}, T_0')],$$

et en recommençant sur chacun des termes du second membre le raisonnement que nous avons fait pour obtenir  $(T_0)$ , on aura

$$(u_0, T_0') = (u_0, u_0') - \frac{e'}{2} [(u_0, u_1') + (u_0, u_{-1}')],$$

$$(u_1, T_0') = (u_1, u_0') - \frac{e'}{2} [(u_1, u_1') + (u_1, u_{-1}')],$$

$$(u_{-1}, T_0') = (u_{-1}, u_0') - \frac{e'}{2} [(u_{-1}, u_1') + (u_{-1}, u_{-1}')],$$

et par suite :

$$\begin{aligned} (T_0, T_0') &= (u_0, u_0') - \frac{e}{2} [(u_1, u_1') + (u_{-1}, u_0')] - \frac{e'}{2} [(u_0, u_1') + (u_0, u_{-1}')] \\ &\quad + \frac{ee'}{4} [(u_1, u_1') + (u_1, u_{-1}') + (u_{-1}, u_1') + (u_{-1}, u_{-1}')] \end{aligned}$$

ou en reprenant les notations des équations (18) et (19) :

$$(21) \Lambda_0 = A_0 - \frac{e}{2} \{ A_{1,0} + A_{1,-0} \} - \frac{e'}{2} \{ A_{0,1} + A_{0,-1} \} \\ + \frac{ee'}{4} \{ A_{1,1} + A_{1,-1} + A_{-1,1} + A_{-1,-1} \}$$

On reconnaît bien sous cette forme la possibilité d'exprimer  $\Lambda_0$  au moyen des valeurs particulières des  $C_{\pm s}$ . Je crois donc avoir complètement démontré que le calcul des coefficients de la fonction perturbatrice se ramène en définitive au développement de cette fonction par rapport aux puissances de  $x = e^{\sigma i}$ , et que ce développement s'effectue très simplement quand on exprime  $R$  au moyen des anomalies excentriques.

(16) Quoique je puisse regarder comme terminé le travail que j'avais en vue, j'ajouterai cependant que la méthode que je viens d'exposer permet de former non-seulement le développement de la fonction perturbatrice, mais encore ceux de ses dérivées partielles, par rapport aux coordonnées  $r, s, v$ , de la planète  $m$ , qui servent à obtenir les perturbations des éléments. En effet,  $r, s$  ayant la signification que nous savons, et  $v$  désignant la longitude dans l'orbite, on trouve en différenciant partiellement la fonction  $R$ ,

$$r \frac{dR}{ds} = \frac{rs}{r'^2} = \frac{r' - rr's}{\Delta^3}, \\ \frac{dR}{ds} = rr' \left( \frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\Delta^3} \right), \\ \frac{dR}{dv} = rr' \frac{ds}{dv} \left( \frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\Delta^3} \right).$$

Les explications dans lesquelles je suis entré sur les développements de  $\frac{rr's}{r'^3}$ , et de  $\frac{1}{\Delta}$ , font comprendre comment on devra s'y prendre pour calculer ceux de  $\frac{rr'}{r'^3}$ ,  $\frac{rr'}{r'^3} \cdot \frac{ds}{dv}$ ,  $\frac{1}{\Delta^3}$ . Ce dernier se déduira de l'expression

de

$$\left(\frac{\Delta^2}{h}\right)^{-\lambda},$$

en posant  $\lambda = \frac{3}{2}$ .

## VII

### INDICATION D'UN CALCUL NUMÉRIQUE.

(17) Pour que la méthode que je viens d'exposer soit avantageuse dans la pratique, il faut que les séries que l'on a à multiplier les unes par les autres soient très rapidement convergentes. Ainsi il faut que les transcendentes que nous avons désignées par  $\omega_j^{(\lambda)}$ ,  $\omega'_j^{(\lambda)}$ , décroissent rapidement à mesure que l'indice  $j$  augmente. Il faut en second lieu que les puissances de  $Q$ , soient également rapidement décroissantes, et puissent se réduire à leurs premiers termes; ce qui revient à dire que les quantités que nous avons désignées par  $b$ ,  $b'$  doivent être assez petites, et que les quantités  $f$ ,  $f'$  sont elles-mêmes très petites par rapport à  $b$ , et  $b'$ . En effet, si cette double condition est remplie, les puissances de  $Q$  décroîtront rapidement, et les puissances de  $f$  et de  $f'$ , pourront, à partir d'un ordre peu élevé, être négligées par rapport à celles de  $b$ ,  $b'$ . Enfin il faut que les transcendentes de Bessel, dont je fais usage pour repasser du développement, par rapport aux anomalies excentriques, au développement par rapport aux anomalies moyennes, diminuent aussi très vite.

J'ai essayé d'appliquer ce mode de développement de la fonction perturbatrice à différentes petites planètes, et je crois avoir reconnu qu'il convient particulièrement à celles dont l'excentricité n'est pas très considérable, et dont l'inclinaison peut d'ailleurs être assez grande. Prenons par exemple la première, en date du groupe des petites planètes, Cérés ①, et proposons-nous de calculer les coefficients d'une des inégalités périodiques

produites par l'action de Jupiter. Le double du moyen mouvement de Cérés étant très sensiblement égal à cinq fois le moyen mouvement de Jupiter, nous considérons l'inégalité dont l'argument est

$$5T' - 2T.$$

Je commencerai par faire observer que je veux plutôt tracer la marche à suivre dans un calcul de cette espèce, que chercher à déterminer avec une extrême précision les coefficients en question; aussi je profiterai de toutes les simplifications qui se présenteront.

(18) La formule (19) donne, dans le cas où l'on y fait  $i' = 5$ ,  $i = 2$ :

$$\begin{aligned} \Lambda_{-2,5} \pm \Lambda_{2,-5} &= \mathcal{E}_0^{(2)} \mathcal{E}'_0^{(3)} (A_{-2,5} \pm A_{2,-5}) \\ &+ \mathcal{E}_0^{(2)} \mathcal{E}'_1^{(5)} \left\{ A_{-2,4} \mp A_{2,-6} - (A_{-2,6} \mp A_{2,-4}) - \frac{1}{5} \left[ A_{-2,4} \pm A_{2,-4} + A_{-2,6} \pm A_{2,-6} \right] \right\} \\ &- \mathcal{E}_1^{(2)} \mathcal{E}'_0^{(5)} \left\{ A_{-3,5} \mp A_{1,-5} - (A_{-1,5} \mp A_{-3,1}) + \frac{1}{2} \left[ A_{-3,5} \pm A_{1,-5} + A_{-1,5} \pm A_{3,-5} \right] \right\} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

Nous avons vu comment s'expriment ces différents termes au moyen des  $C_{\pm s}$ .

Voici le tableau des  $\mathcal{E}_i^{(2)}$ ,  $\mathcal{E}'_i^{(5)}$ :

$\mathcal{E}_0^{(2)} . . . . .$	$\bar{1},99780$	$\mathcal{E}'_0^{(5)} . . . . .$	$\bar{1},99363$
$\mathcal{E}_1^{(2)} . . . . .$	$\bar{2},89907$	$\mathcal{E}'_1^{(5)} . . . . .$	$\bar{1},07825$
$\mathcal{E}_2^{(2)} . . . . .$	$\bar{3},49894$	$\mathcal{E}'_2^{(5)} . . . . .$	$\bar{3},85973$
. . . . .		. . . . .	

en les multipliant deux à deux, on aura :

$\mathcal{E}_0^{(2)} \mathcal{E}'_0^{(5)} . . . . .$	$\bar{1},99143$
$\mathcal{E}_0^{(2)} \mathcal{E}'_1^{(5)} . . . . .$	$\bar{1},07605$
$\mathcal{E}_1^{(2)} \mathcal{E}'_0^{(5)} . . . . .$	$\bar{2},89276$
$\mathcal{E}_1^{(2)} \mathcal{E}'_1^{(5)} . . . . .$	$\bar{3},97732$
. . . . .	

et ces produits vont ensuite en diminuant très rapidement.



Je prends ensuite les éléments des deux planètes dans l'Annuaire du Bureau des longitudes; je corrige les éléments de Jupiter, de manière qu'ils coïncident avec l'époque de Cérès (15, 0 février 1857); et je détermine la position relative des deux orbites. Cela fait, je forme le tableau des constantes  $h, k, c, \dots \alpha, \gamma, \dots$  du n<sup>o</sup> 12. Je trouve ainsi :

$$h = 1,77646.$$

$k . . . .$	$\bar{1},34706$	$\alpha = \text{II}^{\circ} 46^{\circ} 30' 42''$ ,
$c . . . .$	$\bar{3},09923$	$\gamma = 0$
$b . . . .$	$\bar{2},32119$	$\epsilon = \text{III}, 68^{\circ} 8' 15''$ ,
$b' . . . ,$	$\bar{2},54159$	$\epsilon' = \text{III}. 77^{\circ} 4' 30''$ ,
$f . . . .$	$\bar{4},64715$	$\zeta = \text{I}. 62^{\circ} 48' 52''$ ,
$f' . . . .$	$\bar{4},67801$	$\zeta' = 23^{\circ} 58' 40''$

Je n'ai calculé que les constantes relatives à la partie  $\frac{1}{\Delta}$  du développement de R, parce que je ne m'occupe ici que de cette partie qui est la plus importante; le développement de  $\frac{rr's}{r'^3}$  présente d'ailleurs bien moins de difficultés.

Je forme comme je l'ai dit le tableau des  $\omega_j^{(\lambda)}, \omega'_p^{(\lambda)}$ ; celui des puissances de Q, qui dépendent des puissances et des produits, de  $b, b', f, f'$ . Ces puissances de Q doivent en outre être multipliées par des facteurs de la forme :

$$h^{-\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{2} \right]_j \left( \frac{kc}{\omega\omega'} \right)^{-\frac{2j+1}{2}}.$$

Voici encore le tableau de ces facteurs, pour

$Q^0 . . . . .$	$\bar{1},11552$
$Q^1 . . . . .$	$\bar{2},81309$
$Q^2 . . . . .$	$-\bar{2},21395$
$Q^3 . . . . .$	$\bar{3},91781$
$\dots . . . . .$	$\dots$

Quand tous ces préliminaires sont terminés, on procède facilement à la détermination des coefficients  $C_{\pm s}$ .

Ici vient se placer une remarque importante. Je suppose que l'on puisse se contenter de donner à  $\theta$  les trois valeurs  $0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ , et que de plus l'on ne veuille calculer que les coefficients d'une inégalité périodique comme je le fais ici; il est facile de remarquer que dans la formation des  $C_{\pm s}$ , il y a un grand nombre de termes inutiles à calculer, parce qu'ils disparaissent dans les opérations que l'on a à faire sur les  $C_{\pm s}$ .

Ainsi pour calculer  $A_{-2,5} \pm A_{2,-5}$ , il faut donner à  $\theta$  les valeurs particulières  $0, \frac{1}{2} \pi, -\frac{1}{2} \pi$ ; soit  $(C_0)_0, (C_0)_1, (C_0)_{-1}$ , les valeurs correspondantes du terme  $C_0$ , on aura

$$\begin{aligned} A_{-2,5} + A_{2,-5} &= (C_0)_0 - \frac{1}{2} [(C_0)_1 + (C_0)_{-1}] \\ A_{-2,5} - A_{2,-5} &= \frac{1}{2i} [(C_0)_1 - (C_0)_{-1}]. \end{aligned}$$

Or il est évident que dans les seconds membres de ces expressions, les termes indépendants de  $\theta$  disparaissent; on pourra donc se dispenser de les calculer.

La même remarque s'applique au calcul de  $C_{\pm 2}$ , qui sert à la détermination de  $A_{-2,4} \mp A_{2,-6}, A_{-2,6} \mp A_{2,-4}$ ; mais pour  $C_{\pm 5}$ , il faut faire attention que ces coefficients doivent être multiples par  $e^{\pm \frac{\theta}{2} i}$  d'après l'équation (7) du n<sup>o</sup> 4, de sorte qu'il faudra omettre les termes dont les arguments, augmentés ou diminués de  $\frac{1}{2} \theta$ , seraient indépendants de  $\theta$ .

Voici maintenant la manière de calculer les  $C_{\pm s}$ . Je forme le tableau théorique des puissances  $P^{-\lambda}$ , comme l'indique la formule (12) du n<sup>o</sup> 11, en faisant  $i = -2, i' = 5$ ; je forme en même temps le tableau des puissances de  $Q$ . D'autre part j'ai dressé des petites tables logarithmiques des  $\omega_j^{(\lambda)}$ , et des  $\omega'_j{}^{(\lambda)}$ ; puis des coefficients des termes des puissances de  $Q$ , préalablement multipliées par les facteurs convenables.

L'inspection des tableaux théoriques indique les termes qui, par leur multiplication, peuvent donner un terme de l'ordre qu'on veut former, en

même temps qu'elle apprend si le produit est ou n'est pas indépendant de  $\theta$ . D'un autre côté les tableaux numériques qu'on a sous les yeux donnent une idée de la grandeur des coefficients et permettent de savoir si on doit les conserver ou les négliger.

On a vu par la formule (18) du n° 14, comment on passe des anomalies excentriques aux anomalies moyennes, et comment, par les formules des nos 3 et 4, les sommes ou les différences des quantités  $A_{i\pm l}$ ,  $A_{i'\pm l'}$ , s'expriment en fonction des coefficients  $C_{\pm s}$ . Nous avons de plus remarqué que parmi les termes des  $C_{\pm s}$ , qu'il faut combiner pour former ces sommes ou ces différences, ceux dont les arguments sont indépendants de  $\theta$  ne donnent rien. Or si l'on jette un coup d'œil sur le tableau IV, on verra que les termes qui restent ont des arguments de la forme

$$\omega + \theta$$

$\omega$  étant un angle quelconque; de sorte qu'en effectuant sur ces termes les opérations indiquées précédemment, on trouve facilement que de l'équation (18) se déduisent les deux suivantes :

$$\begin{aligned} A_{i,r} + A_{-i,-r} &= \Sigma \mathcal{E}_i^i \mathcal{E}_r^r \left(1 - \frac{l}{i}\right) \left(1 - \frac{l'}{i'}\right) \Sigma 2 V_m \cos \omega_m; \\ i (A_{i,r} - A_{-i,-r}) &= \Sigma \mathcal{E}_i^i \mathcal{E}_r^r \left(1 - \frac{l}{i}\right) \left(1 - \frac{l'}{i'}\right) \Sigma 2 V_m \sin \omega_m. \end{aligned}$$

dans lesquelles  $V$  désigne le coefficient numérique du terme d'argument  $\omega + \theta$ .

Ces deux développements divisés par 2 donnent les valeurs des coefficients de  $\cos (iT + i'T')$  et de  $\sin (iT + i'T')$ .

C'est de cette manière qu'en me bornant à prendre les termes les plus importants du tableau IV, j'ai trouvé

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} &= - 0,00000041506 \cos (5T' - 2T) \\ &+ 0,0000005922 \sin (5T' - 2T). \end{aligned}$$

# DÉVELOPPEMENTS

## ET TABLEAUX DES CALCULS NUMÉRIQUES

TABLEAU I. — ÉLÉMENTS ET CONSTANTES.

	$\varphi$	①
$e = \sin \varphi$ . . . . .	$\bar{2},68549$	$\bar{2},90045$
$\omega$ (long. du périhélie) . . . . .	$0^\circ. 12^\circ. 1'.58$	$1^\circ 59'.25'.39''.$
$i$ (inclinaison) . . . . .	$0.1.18.58$	$0.10.36.28$
$\Omega$ (long. du nœud ascend.)	$I. 8.58.25$	$0.80.48.25$
$f = \cos \varphi$ . . . . .	$\bar{1},999495$	$\bar{1},998622$
$\omega - \Omega$ . . . . .	$III. 5^\circ 3'.15''$	$0.68^\circ.57'.14''$
$a$ . . . . .	$0,716257$	$0,441957$
$a^2$ . . . . .	$1,452474$	$0,885874$
$e^2$ . . . . .	$\bar{5},366990$	$\bar{5},80090$
$\varphi \cap$ (long. de l'intersect. mutuelle — $\Omega'$ ) . . . . .		$III. 69.21.41$
① P ( <i>id.</i> — $\Omega$ ) . . . . .		$III. 87.20.25$
$g' = \omega' - \Omega - \Pi$ . . . . .		$III. 23.41.52$
$g = \omega - \Omega - P$ . . . . .		$0. 71. 7.51$
$\omega = g' - g$ . . . . .		$II, 42.55.41$
$\Omega = g' + g$ . . . . .		$0. 5.49.23$
$k$ .... $\bar{1},347064$	$\alpha = II. 46^\circ 30' 42''$	$h$ .... $1,776462.$
$c$ .... $\bar{3},099235$	$\gamma = 0. 0. 0. 0.$	$\omega = \frac{1}{2}$ arc tang. (sin $2k$ ).... $\bar{1},570526$
$b$ .... $\bar{2},321188$	$\epsilon = III. 68.8.15$	$\omega' = \frac{1}{2}$ arc tang. (sin $2c$ ).... $\bar{5},098875$
$b'$ ... $\bar{2},541592$	$\epsilon' = III. 77.4.30$	
$f$ .... $\bar{4},647155$	$\zeta = I. 62^\circ 48' 52''$	
$f'$ .... $\bar{4},678007$	$\zeta' = 25^\circ 58' 40''$	

II. — TABLEAU DES  $\omega_j^\lambda$  ET DES  $\omega_j^{\lambda'}$ .

$\lambda =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
$j = 0$	0,00595	0,05086	0,13185	0,23870
1	1,06630	1,55528	1,81119	0,09022
2	— 5,83153	2,10514	1,02550	1,42194
3	4,89922	— 4,89334	3,59828	2,46119
4	5,27984	5,76716	— 4,05465	4,90987
5		— 6,89909	6,90029	— 5,26704
6			— 7,87963	6,02587
7				— 8,94105
$j' = 0$	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	4,79784	3,27497	3,49681	3,64294
2	— 7,29466	7,7717	6,47075	6,85873
3		— 10,0925	10,79147	9,65657

III. — COEFFICIENTS DES PUISSANCES DE Q

MULTIPLIÉS PAR LES FACTEURS :  $h^{-\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{2} \right]_j \left( \frac{kc}{\omega \omega'} \right)^{-\frac{2j+1}{2}}$

$h^{-\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{2} \right]_0 \left( \frac{kc}{\omega \omega'} \right)^{-\frac{1}{2}} Q^0$	$h^{-\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{2} \right]_1 \left( \frac{kc}{\omega \omega'} \right)^{-\frac{3}{2}} Q^1$	$h^{-\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{2} \right]_2 \left( \frac{kc}{\omega \omega'} \right)^{-\frac{5}{2}} Q^2$	$h^{-\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{2} \right]_3 \left( \frac{kc}{\omega \omega'} \right)^{-\frac{7}{2}} Q^3$
1,115220	$b \dots \dots \bar{3},15628$ $b' \dots \dots \bar{3},35668$ $f \dots \dots \bar{5},46224$ $f \dots \dots \bar{5},49510$	$b^2 \dots \dots \bar{6},85851$ $2bb' \dots \bar{5},57974$ $b' \dots \dots \bar{5},89911$ $2bf \dots \dots \bar{7},49530$ $2b'f \dots \bar{7},52616$ $2bf' \dots \bar{7},70570$ $2b'f' \dots \bar{7},75656$ . . .	$b^3 \dots \dots \bar{8},88158$ $3b^2b' \dots \bar{7},57890$ $b'^3 \dots \dots \bar{7},64258$ $3b^2f \dots \dots \bar{9},69446$ $6bb'f \dots \dots \bar{9},20589$ $6bb'f' \dots \dots \bar{9},75963$ $3b^3f' \dots \dots \bar{8},15612$ $3b^3f' \dots \dots \bar{9},71552$ $3b^2f \dots \dots \bar{9},64814$

IV. — TABLEAU DES  $C_{\pm 5}$ .

$P^{-\frac{1}{2}} Q^0 h^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{kc}{\omega\omega'} \right)^{-\frac{1}{2}}$	$P^{-\frac{3}{2}} Q^1 h^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{kc}{\omega\omega'} \right)^{-\frac{3}{2}}$	$P^{-\frac{5}{2}} Q^2 h^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{kc}{\omega\omega'} \right)^{-\frac{5}{2}}$	$P^{-\frac{7}{2}} Q^3 h^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{kc}{\omega\omega'} \right)^{-\frac{7}{2}}$
$C_0$			
	$-\overline{13,80152} [a^3c^2b^{-1}]$ $-\overline{9,52499} [a^3cb']$ $+\overline{14,8954} [a^4c^2b'^{-1}]$	$-\overline{12,59559} [a^3bf]$ $-\overline{9,12444} [a^3b'f']$ $+\overline{11,76035} [a^4b'f]$ $-\overline{8,76006} [a^2b'f']$ $-\overline{12,51165}$	$\overline{11,98406} [a^3cb']$ $\overline{10,48877} [a^4b^2b']$ $\overline{12,55164} [a^4cb]$ $\overline{8,25949} [a^3bb'^2]$ $\overline{10,86518} [a^2cb^{-1}b'^2]$ $\overline{7,07452} [a^2b'^3]$
$C_2 \pm C_{-2}$			
$\overline{8,81028} [a^3c]$ $-\overline{12,469} [a^4c^{-2}]$	$\overline{9,22940} [af]$ $\overline{7,59824} [a^2f']$ $-\overline{11,66141} [a^3c^{-1}f'^{-1}]$	$-\overline{10,25445} [a^3c]$ $+\overline{10,91296} [a^4b^2]$ $-\overline{8,97802} [a^3bb']$ $-\overline{9,90005} [a^2c^{-1}b^{-1}b']$ $-\overline{9,29525} [a^3c]$ $-\overline{6,92261} [a^2b'^2]$	$\overline{10,57806} [a^2b'^{-2}f'^{-1}]$ $\overline{10,87909} [a^2f']$
$e^{-\frac{\theta}{2}} C_5 \pm e^{\frac{\theta}{2}} C_{-5}$			
Les arguments doivent être diminués de $\frac{1}{2} \theta$ .			
$-\overline{9,97525} [a^4c]$	$-\overline{10,56135} [a^5f]$ $-\overline{8,35558} [a^3f']$	$-\overline{10,47485} [a^3cb^{-1}b']$ $-\overline{7,49739} [a^3b'^2]$	$\overline{8,24634} [b'^{-2}f'^{-1}a^{-1}]$ $\overline{10,70746} [a^2c^{-1}b'^3]$

Vu et approuvé.

Le 27 mai 1864.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,  
MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer.

Le 28 mai 1864.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,  
A. MOURIER.

---

ERRATA.

Page 15, ligne 10, lisez : —  $\frac{D}{R^3} x''^2 + \text{etc.}$

15, — 13, lisez :  $S. \frac{x'x''}{A - \frac{1}{R^2}} = DR,$

38, — 13, au lieu de  $dr_v$ , lisez  $ds_v$ .

79, — 18, lisez :  $r \frac{dR}{dr} = \text{etc.}$