

H.F. n. 1. 78 (I 2)

PHÉNOMÈNES
ÉLECTRO-DYNAMIQUES.

ACTION MUTUELLE
DES FILS CONDUCTEURS
DE COURANS ÉLECTRIQUES.

THÈSE

Soutenue devant la Faculté des Sciences, Académie
de Paris, Université de France,

PAR R.-T. GUÉRIN,

Le / novembre 1828.



Professeurs de la Faculté des Sciences.

MM. THÉNARD, *Doyen.*

LACROIX.

GAY-LUSSAC.

DESFONTAINES.

GEOFFROY.

BIOT.

DULONG.

BLAINVILLE.

HACHETTE.

CAUCHY.

LEFEBURE-DE-FOURCY.

POUILLET.

BEUDANT.

MIRBEL.

FRANCOEUR.

A

MONSIEUR AMPÈRE,

MEMBRE DE L'INSTITUT.

***S**ouffrage de respect et de reconnaissance.*

R.-T. GUÉRIN.

PHÉNOMÈNES

ÉLECTRO-DYNAMIQUES.

INTRODUCTION.

LEMME PREMIER.

Dans l'action mutuelle de deux points matériels, les forces qui résultent pour chacun d'eux de l'action de l'autre, sont égales et dirigées en sens contraires suivant la droite qui joint ces deux points.

En effet, si ces deux points étaient liés invariablement entre eux, il faudrait que ces forces se fissent équilibre, sans quoi un système de forme invariable se mettrait lui-même en mouvement par l'action mutuelle de ses parties.

Corollaire. Ces deux forces étant en équilibre quand le système est invariable, la somme de leurs moments autour d'un axe quelconque est nécessairement nulle.

LEMME II.

Action et réaction de deux systèmes de points matériels.

Action. Nous regarderons la distance des deux systèmes comme très grande relativement aux espaces qu'ils occupent, et nous supposerons les points matériels très voisins les uns des autres.

1°. Concevons chacun des deux systèmes composé de points matériels de même espèce, c'est-à-dire ceux de l'un agissant tous par attraction, ou tous par répulsion sur ceux de l'autre, avec des forces proportionnelles à leurs masses. Soient $M, M', M'',$ etc. (fig. 1), les points du premier, et m un point quelconque du second; en composant successivement toutes les actions mA, mB, mC sensiblement parallèles entre elles et exercées par les points $M, M', M'',$ etc., sur m , nous obtiendrons les résultantes partielles $mD, mE,$ etc., qui donneront une résultante totale appliquée au point m , et passant très près du centre des forces parallèles du système des points matériels $M, M', M'',$ etc. En raisonnant de même par rapport aux autres points matériels du second système, nous trouverons que les résultantes correspondantes à chaque point de ce système passeront toutes très près du centre des forces parallèles du premier système, en sorte que nous aurons une résultante générale passant très près de ce centre et de celui du second système. Nous nommerons *centre d'action* chacun des points extrêmement voisins des centres des forces parallèles des deux systèmes par lequel passe cette résultante générale; il est facile de voir qu'elle ne tendra à imprimer à chaque système qu'un mouvement de translation, à cause des petites distances qui séparent les centres d'actions des centres des forces parallèles.

2°. Supposons que les points matériels du second système restant tous de même nature, ceux du premier soient, les uns attractifs, les autres répulsifs à

l'égard des points du second : les points attractifs donneront une résultante OF (fig. 2) passant par leur centre d'action N et par le centre d'action O de l'autre système ; de même , les points répulsifs donneront une résultante OQ passant par leur centre d'action P et par le même point O . La résultante générale sera représentée en grandeur et en direction par la diagonale OG ; et comme elle passe à peu près par le centre des forces parallèles du second système , elle ne tendra à lui imprimer qu'un mouvement de translation. Cette résultante se trouve dans le plan mené par les trois centres d'action N, P, O ; quand les points attractifs sont en même nombre que les points répulsifs et agissent avec la même intensité , sa direction est perpendiculaire à la droite OS qui divise l'angle PON en deux parties égales.

3°. Supposons les deux systèmes composés l'un et l'autre de points matériels d'espèces différentes. Soient N et P (fig. 3) les centres d'action respectifs des points attractifs et répulsifs du premier, n et p les centres correspondans du second, de sorte qu'il y a attraction entre N et p , ainsi qu'entre n et P , et répulsion entre N et n , ainsi qu'entre P et p . Les actions combinées de N et P sur p donneront une résultante dirigée suivant la diagonale pe : semblablement les actions de N et P sur n donneront une résultante nf . La résultante générale s'obtiendra en prolongeant les deux droites nf, pe jusqu'à leur rencontre en o . Prenant $oh = pe, ok = nf$, la diagonale ol sera la résultante cherchée qui représentera l'action exercée par le système P, N sur le système p, n . Mais comme

le point o ne fait pas partie du système p, n , il faudra concevoir qu'il y soit lié d'une manière invariable sans l'être au système P, N : la force ol tendra en général, en vertu de cette liaison, à opérer sur p, n un mouvement de translation et un mouvement de rotation autour du centre des forces parallèles de ce système.

Réaction. Cherchons maintenant les réactions exercées par le second système sur le premier. Nous les obtiendrons en composant successivement des forces égales et directement opposées aux actions des points du premier système sur ceux du second ; il en résultera que la réaction totale sera toujours égale et directement opposée à l'action totale.

Cela posé, dans le premier cas, la réaction sera représentée par la droite mE' , égale et opposée à la résultante mE (fig. 1). On pourra supposer mE' appliquée au centre d'action du premier système qui se trouve sur sa direction ; d'où il suit qu'en négligeant la petite distance qui sépare le centre d'action du centre des forces parallèles, on n'aura qu'un mouvement de translation.

Dans le second cas, la réaction sera représentée par la droite OG' , égale et opposée à OG (fig. 2) ; mais en observant que le point O n'appartient pas au premier système, qui, généralement, ne sera pas traversé par la direction OG' , nous concevrons le point O lié invariablement à ce système sans l'être à l'autre. Par cette liaison, la force OG' tendra à opérer sur le système P, N un double mouvement de translation et de rotation. Cette force sera située comme OG dans

le plan PON; et lorsqu'il y aura autant de points attractifs que de répulsifs agissant avec la même intensité, sa direction sera perpendiculaire à OS.

Dans le troisième cas, la réaction sera représentée par la ligne ol' , égale et opposée à la résultante ol (fig. 3) et appliquée au point o . Seulement nous concevrons en o un point lié au premier système sans l'être au second, et nous appliquerons à ce point la force ol' , qui tendra à produire sur P, N un double mouvement de translation et de rotation.

Ordre des découvertes des phénomènes électro-dynamiques.

On connaît depuis très long-temps l'action que deux aimans exercent l'un sur l'autre, et l'on a démontré que chacun d'eux peut être regardé comme composé d'une multitude de petits aimans, qu'on nomme *particules magnétiques*. Ces particules contenant en même nombre des points attractifs et répulsifs, nous fournissent un exemple du troisième cas.

M. Oersted découvrit une action entre un aimant et un fil conducteur. On trouva que les forces qui en résultent, pour chaque élément de fil conducteur, étaient perpendiculaires à des plans menés par l'élément et par des points déterminés de la particule magnétique; ce qui donne un exemple du deuxième cas, lorsqu'on y suppose autant de points attractifs que de répulsifs. On doit donc regarder l'élément comme un système homogène, parce qu'autrement la force ne serait pas perpendiculaire au plan dont

nous venons de parler. Cette manière de voir est confirmée par les expériences, à l'aide desquelles M. Oersted a prouvé, contre l'opinion des physiciens qui imaginaient des pôles dans le fil conducteur, qu'il n'y en avait pas, et que l'action était la même tout autour de ce fil : en outre, comme il est probable que cette action n'a lieu que par la composition du fluide neutre, une fois ce fluide produit, on peut considérer chacune de ses molécules comme étant homogène.

C'est à M. Ampère que nous devons la découverte d'une troisième espèce d'action qui s'exerce entre deux fils conducteurs. En considérant chaque élément de ces fils comme un très petit système homogène, il en a conclu que l'action mutuelle de deux élémens est dirigée suivant la droite qui joint leurs milieux, et il a donné, pour représenter cette action, des formules qui sont vérifiées par toutes les expériences.

Cette vérification vient à l'appui de l'hypothèse de l'homogénéité des points matériels d'un même élément.

*fermes offre l'angle
du 1er cas.*

Ce savant physicien a été conduit à substituer à la particule magnétique un assemblage de petits courans fermés, situés dans des plans parallèles, les uns tournant dans un sens, les autres en sens contraire, autour de la particule magnétique, ce qui constitue des points matériels attractifs et répulsifs en même nombre et nous fournit un exemple du ~~cas~~ ^{de même} cas. Aussi, en appliquant aux élémens de ces petits courans la formule relative à l'action mutuelle de deux élémens de fils conducteurs, il a obtenu pour l'action d'un de ces assemblages sur un élément de fil

conducteur, précisément la même formule que l'expérience avait donnée pour l'action d'un petit aimant sur un élément de fil conducteur. De plus, en calculant l'action mutuelle de deux de ces assemblages, il est parvenu à la formule connue de l'action mutuelle de deux particules magnétiques.

Il résulte des considérations précédentes que toute action est ramenée à celle de deux élémens de courans électriques qui s'exerce suivant la droite qui joint leurs milieux. Cette sorte d'action étant la plus simple, c'est par elle que nous commencerons.

§ I^{er}.

Action mutuelle de deux portions infiniment petites, ou élémens de fils conducteurs situés d'une manière quelconque.

Les deux élémens étant semblables dans toutes leurs parties, il n'y a pas lieu à examiner ce qui arriverait si l'un d'eux était fixe et l'autre mobile, parce que tout ce que nous dirions de l'un pourrait se dire de l'autre.

Soient $Mm = ds$, $M'm' = ds'$ (fig. 4), deux élémens que nous convenons de prendre à partir des points fixes M , M' , situés vers l'origine des courans, dont les directions sont indiquées par des flèches; $OO' = r$ la droite qui joint leurs milieux; ϵ l'angle formé par leurs directions; θ , θ' les angles que chaque élément fait avec la droite OO' , angles que nous compterons toujours à partir de la portion de l'élément la plus voisine de l'origine des courans. Les quantités r , ϵ , θ , θ' étant déterminées, la position des élémens le sera.

Nommons i, i' les actions des élémens ds, ds' sur un fil conducteur, dont la longueur et l'intensité seraient prises pour unités; leur action mutuelle est directement proportionnelle à leurs longueurs, à leurs intensités, à une fonction inconnue des angles que nous représenterons par $F(\epsilon, \theta, \theta')$, et inversement proportionnelle à une certaine puissance n de leur distance. Nous aurons donc pour cette action l'expression

$$\frac{ii' ds ds' F(\epsilon, \theta, \theta')}{r^n},$$

dans laquelle $F(\epsilon, \theta, \theta')$ et n sont inconnues. Nous déterminerons d'abord $F(\epsilon, \theta, \theta')$ en nous appuyant sur l'expérience.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Lorsqu'un courant électrique se meut suivant une ligne quelconque, il exerce sur un autre courant une action telle, que si l'on change le sens d'un des courans, l'action change de signe sans changer d'intensité.

Ce fait est démontré en s'assurant par l'expérience qu'il n'y a pas d'action exercée par deux portions de fil conducteur sensiblement superposées et dirigées en sens contraires.

Cette expérience étant vérifiée pour des fils conducteurs de grandeur finie, quelle que soit cette grandeur, a lieu évidemment pour des élémens de ces mêmes fils.

Cela posé, désignons par Mm (fig. 5) un élément de fil conducteur situé dans un plan XY ; par $M'm'$,

$M'm''$, deux élémens égaux de fils conducteurs placés à égale distance de ce plan sur une droite qui lui est perpendiculaire, et dont les courans vont en s'en approchant; joignons le milieu O avec les milieux O' , O'' . Les angles qui déterminent la position de chacun des élémens $M'm'$, $M''m''$, à l'égard de l'élément Mm , étant égaux, et les distances OO' , OO'' étant égales, les actions de $M'm'$, $M''m''$ sur Mm sont égales et de même signe. Il en résulte que si ces deux élémens sont liés ensemble d'une manière invariable, les actions exercées sur eux par Mm se composeront en une seule force appliquée au point O''' , milieu de la distance $O'O''$, ce dernier point étant supposé uni invariablement aux deux élémens $M'm'$, $M''m''$.

Soient

$$OO' = r, \quad O'G' = R, \quad OO'm' = \theta,$$

la force $O'G' = R$ se décompose en

$$O'H' = R \sin \theta, \quad O'K' = R \cos \theta;$$

de même, la force $O''G'' = R$ se décompose en

$$O''H'' = R \sin \theta, \quad O''K'' = R \cos \theta.$$

Les deux forces $O'K'$, $O''K''$, égales et opposées, se détruisent; il reste les forces $O'H'$, $O''H''$ égales et parallèles, dont la résultante est

$$2R \sin \theta.$$

Concevons les élémens $M'm'$, $M''m''$ transportés en $M'''m'''$ suivant la perpendiculaire au plan XY , et soit menée la droite OO''' . L'angle θ étant droit, $\sin \theta = 1$;

la résultante se réduit à

$$2R;$$

mais les deux élémens $M'm'$, $M''m''$ étant superposés en $M'''m'''$, et agissant en sens contraires, doivent donner une résultante nulle d'après l'expérience précédente ; nous aurons donc

$$R = 0.$$

1^{er} *Corollaire.* Nous concluons de là que toutes les fois qu'un élément de fil conducteur est situé dans un plan passant par le milieu d'un autre élément de fil conducteur perpendiculairement à sa direction, leur action mutuelle est nulle.

2^e *Corollaire.* Nous en déduisons aussi que quand les deux élémens sont dans un même plan, et que la direction de l'un est perpendiculaire sur le milieu de l'autre, leur action mutuelle est nulle.

DEUXIÈME EXPÉRIENCE.

L'action d'un conducteur rectiligne est égale à celle d'un conducteur sinueux terminé aux mêmes extrémités et s'écartant très peu du premier.

Pour constater ce fait, nous prenons un fil de cuivre revêtu de soie dont une portion est rectiligne et l'autre est repliée autour d'elle, de manière qu'elle forme des sinuosités quelconques sans se séparer de la première, dont elle est isolée par la soie qui les recouvre. Nous montrons alors qu'une autre portion de fil conducteur est sans action sur l'assemblage de ces

deux portions ; et comme elle le serait également sur l'assemblage de deux fils rectilignes parcourus en sens contraires par un même courant électrique , il s'ensuit que l'action d'un courant sinueux est précisément égale à celle d'un courant rectiligne compris entre les mêmes extrémités , puisque ces deux actions font l'une et l'autre équilibre à l'action d'un même courant rectiligne de même longueur que ce dernier , mais dirigé en sens contraire.

Corollaire. Il en résulte qu'on peut remplacer un élément par ses deux projections.

Les principes précédens étant établis , cherchons la valeur de l'action mutuelle de deux élémens de fils conducteurs.

1^{er} *Cas.* Les deux élémens sont situés dans le même plan et perpendiculaires à la droite qui joint leurs milieux.

Soient $MN = ds$, $M'N' = ds'$ (fig. 6) les deux élémens , OO' la droite qui joint leurs milieux. Si les courans vont dans le même sens , comme ils sont parallèles , nous avons

$$\epsilon = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \theta' = \frac{\pi}{2};$$

l'expression

$$\frac{ii' ds ds' F(\epsilon, \theta, \theta')}{r^n}$$

devient

$$\frac{ii' ds ds' F\left(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}{r^n},$$

si les courans vont en sens contraires

$$\epsilon = \pi;$$

il en résulte

$$\frac{ii' ds ds' F\left(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}{r^n}.$$

D'après la première expérience, ces deux valeurs doivent être égales et de signes contraires,

$$F\left(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = -F\left(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Si nous prenons $F\left(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ pour unité, l'action mutuelle de deux élémens de fils conducteurs parcourus par des courans électriques dirigés dans le même sens, sera

$$\frac{ii' ds ds'}{r^n}.$$

2° *Cas.* Les deux élémens sont situés sur les prolongemens de la même droite.

Supposons que $M'N'$ (fig. 7) restant fixe, MN soit transporté parallèlement à lui-même, par exemple, dans la position N_1M_1 , telle que son milieu O_1 demeure toujours à la distance $O'O_1 = r$ du milieu O' . Si nous considérons cet élément dans la position N_2M_2 prolongement de $N'M'$, il existe les relations

$$\epsilon = 0, \theta = 0, \theta' = 0;$$

l'expression

$$\frac{ii' ds ds' F(\epsilon, \theta, \theta')}{r^n}$$

se transforme en

$$\frac{ii' ds ds' F(0, 0, 0)}{r^n}.$$

Soit k le rapport de $F(0, 0, 0)$ à $F\left(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ prise

pour unité, il vient

$$\frac{kii'dsds'}{r^n}.$$

Telle est l'expression de l'action mutuelle de deux élémens situés sur les prolongemens de la même droite.

3^e Cas. Les deux élémens sont situés d'une manière quelconque dans un même plan.

Remplaçons les élémens MN, M'N' (fig. 8) par leurs projections rectangulaires

$$\begin{aligned} \text{MP} &= ds \sin \theta, & \text{NP} &= ds \cos \theta, \\ \text{M'P'} &= ds' \sin \theta', & \text{N'P'} &= ds' \cos \theta', \end{aligned}$$

les deux projections MP, M'P' ont pour expression de leur action mutuelle

$$\frac{ii'dsds' \sin \theta \sin \theta'}{r^n}.$$

De même, les deux projections NP, N'P' ont pour expression de leur action mutuelle

$$\frac{kii'dsds' \cos \theta \cos \theta'}{r^n}.$$

Or, l'action totale étant la somme algébrique des actions des élémens composans, si nous la représentons par $Rdsds'$, nous avons

$$Rdsds' = \frac{ii'dsds' (\sin \theta \sin \theta' + k \cos \theta \cos \theta')}{r^n};$$

remplaçant $\sin \theta \sin \theta'$ par sa valeur tirée de la relation

$$\cos(\theta' - \theta) = \cos \theta' \cos \theta + \sin \theta' \sin \theta,$$

nous obtenons pour l'action mutuelle de deux élémens de fils conducteurs situés d'une manière quelconque dans un plan

$$Rdsds' = \frac{i i' ds ds' [\cos (\theta' - \theta) + (k - 1) \cos \theta' \cos \theta]}{r^2}.$$

4° *Cas.* Les deux élémens sont situés d'une manière quelconque dans l'espace.

Par l'élément MN (fig. 9) et la droite OO', conduisons un plan sur lequel nous projetons l'élément M'N' suivant O'P'; posons

$$M'O'P' = \alpha, \quad P'O'O = \epsilon.$$

L'élément composant M'P' et l'élément MN n'ont aucune action l'un sur l'autre, parce que le premier est perpendiculaire au plan qui contient le dernier. Il reste l'action mutuelle de l'élément composant O'P' et de l'élément MN, situés d'une manière quelconque dans un même plan. Nous avons

$$MN = ds, \quad O'P' = ds' \cos \alpha;$$

remplaçant dans la formule précédente ds' par $ds' \cos \alpha$ et θ' par ϵ , il vient

$$Rdsds' = \frac{i i' ds ds' [\cos \alpha \cos (\epsilon - \theta) + (k - 1) \cos \theta \cos \epsilon \cos \alpha]}{r^2},$$

expression qui peut être simplifiée de la manière suivante :

Menons par le point O' la droite O'M'' parallèle à MN, et soit ϵ l'angle des deux élémens MN, M'N'. Les trois angles ϵ , $\epsilon - \theta$, α , considérés comme formant les côtés d'un triangle sphérique rectangle en ϵ , sont

liés par la relation

$$\cos \epsilon = \cos \alpha \cos (\mathcal{E} - \theta);$$

de même, les trois angles θ' , $\mathcal{E}$, α , sont liés par la relation

$$\cos \theta' = \cos \alpha \cos \mathcal{E}.$$

Ces deux valeurs, portées dans la formule précédente, la changent en

$$(1) \dots R ds ds' = \frac{ii' ds ds' [\cos \epsilon + (k-1) \cos \theta \cos \theta']}{r^n}.$$

Telle est l'expression de l'action mutuelle de deux élémens de fils conducteurs situés d'une manière quelconque dans l'espace.

Discussion. Si un seul des courans, par exemple MN, prend une direction opposée à celle qu'il avait, $\cos \theta$, $\cos \epsilon$ changent de signe, et par suite la formule (1) en change aussi. Si les deux courans changent à la fois de directions, $\cos \theta$, $\cos \theta'$ changent de signe, $\cos \epsilon$ conserve le sien, ainsi que la formule (1).

Remarque. Cette valeur de l'action mutuelle de deux élémens n'a été déduite que de la substitution des projections de chaque élément à cet élément même; mais il est facile de s'assurer qu'elle exprime qu'on peut substituer à un élément un contour polygonal quelconque, et par suite un arc quelconque de courbe terminé aux mêmes extrémités, pourvu que toutes les dimensions de ce polygone ou de cette courbe soient infiniment petites.

En effet, soient $ds_1, ds_2, \dots, ds_m$, les différens côtés du polygone infiniment petit substitué à ds , la direc-

tion OO' (fig. 9) pourra toujours être considérée comme celle des lignes qui joignent les milieux respectifs de ces côtés avec $M'N'$.

Nommons $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ les angles qu'ils font avec OO' , et $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m$ ceux qu'ils font avec $M'N'$; désignons par Σ une somme de termes de même forme: la somme des actions des côtés $ds_1, ds_2, \dots, ds_m$ sur ds' sera

$$\frac{ii' ds'}{r^n} [\Sigma ds \cos \epsilon + (k-1) \cos \theta' \Sigma ds \cos \theta].$$

Or, $\Sigma ds \cos \epsilon$, représentant la projection du contour polygonal sur la direction de ds' , est égal à la projection de ds sur la même direction, c'est-à-dire à $ds \cos \epsilon$: nous avons de même $\Sigma ds \cos \theta = ds \cos \theta$; l'action exercée sur ds' par le contour polygonal terminé aux extrémités de ds a donc pour expression

$$\frac{ii' ds'}{r^n} [ds \cos \epsilon + (k-1) \cos \theta' ds \cos \theta],$$

qui est la même que celle de ds sur ds' .

Cette conséquence étant indépendante du nombre des côtés du polygone, aura lieu pour un arc infiniment petit d'une courbe quelconque.

Nous prouverions semblablement que l'action de ds' sur ds est susceptible d'être remplacée par celle d'une courbe infiniment petite.

Nous en concluons que cette dernière formule exprime qu'un élément curviligne quelconque produit le même effet qu'un élément rectiligne terminé aux mêmes extrémités.

Changement produit dans la formule.

$$(1) \dots R ds ds' = \frac{ii' ds ds' [\cos \epsilon + (k-1) \cos \theta \cos \theta']}{r^n},$$

par l'introduction des différentielles partielles de la distance des deux élémens.

La conclusion que nous venons de tirer nous permet de remplacer les élémens rectilignes par des élémens curvilignes terminés aux mêmes extrémités, et, par suite, d'introduire dans cette formule les différentielles partielles de la distance des deux élémens.

Soient $NB = s$, $N'B' = s'$ (fig. 10) deux fils conducteurs curvilignes dont les courans vont dans le sens indiqué par les flèches; $MN = ds$, $M'N' = ds'$, deux élémens de ces fils; $OO' = r$, la droite qui joint leurs milieux; cette droite variant avec la longueur des arcs BN , $B'N'$, en est une fonction : nous adopterons la notation suivante,

$$\frac{dr}{ds} ds = dr, \quad \frac{dr}{ds'} ds' = dr.$$

Nous nous proposons d'exprimer $\cos \theta$, $\cos \theta'$, $\cos \epsilon$ en fonction de dr et de dr . Rapportons le système à trois axes rectangulaires, et désignons par

$$\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right., \quad \begin{matrix} x' \\ y' \\ z' \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} 0' \\ 0' \\ 0' \end{matrix} \right.,$$

nous avons

$$\cos \theta = \frac{x-x'}{r} \frac{dx}{ds} + \frac{y-y'}{r} \frac{dy}{ds} + \frac{z-z'}{r} \frac{dz}{ds},$$

$$\cos \theta' = \frac{x-x'}{r} \frac{dx'}{ds'} + \frac{y-y'}{r} \frac{dy'}{ds'} + \frac{z-z'}{r} \frac{dz'}{ds'},$$

$$r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2.$$

Prenant les coefficients différentiels de cette dernière équation, successivement, par rapport à s et à s' ,

$$\begin{aligned}\frac{rdr}{ds} &= (x-x')\frac{dx}{ds} + (y-y')\frac{dy}{ds} + (z-z')\frac{dz}{ds}, \\ \frac{rdr}{ds'} &= -(x-x')\frac{dx'}{ds'} - (y-y')\frac{dy'}{ds'} - (z-z')\frac{dz'}{ds'};\end{aligned}$$

d'où

$$\cos \theta = \frac{dr}{ds}, \quad \cos \theta' = -\frac{dr}{ds'};$$

mais

$$\cos \epsilon = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{dz'}{ds'}.$$

Prenant le coefficient différentiel, par rapport à s' de la valeur $\frac{rdr}{ds}$,

$$\frac{rd^2r}{dsds'} + \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{ds'} = -\frac{dx}{ds} \cdot \frac{dx'}{ds'} - \frac{dy}{ds} \cdot \frac{dy'}{ds'} - \frac{dz}{ds} \cdot \frac{dz'}{ds'};$$

par suite,

$$\cos \epsilon = -\frac{rd^2r}{dsds'} - \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{ds'}.$$

Substituant ces valeurs de $\cos \theta$, $\cos \theta'$, $\cos \epsilon$ dans la formule (1), elle devient

$$\begin{aligned}Rdsds' &= -\frac{i'dsds'}{r^n} \left(\frac{rd^2r}{dsds'} + k \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{ds'} \right) \\ &= -\frac{i'(rdd'r + kdd'r)}{r^n} = -\frac{i'(r^k dd'r + kr^{k-1} dd'r)}{r^{n+k-1}} \\ (2) \dots Rdsds' &= -\frac{i'd(r^k d'r)}{r^{n+k-1}}.\end{aligned}$$

Nous tirons de la relation $\cos \theta' = -\frac{dr}{ds'}$,

$$dr = -ds' \cos \theta';$$

d'où

$$(3) \dots Rdsds' = i' ds' r^{-n-k+1} d(r^k \cos \theta').$$

Cette équation renfermant deux inconnues n et k , nous chercherons d'abord une relation entre ces quantités; nous nous appuierons sur l'expérience suivante.

TROISIÈME EXPÉRIENCE.

Un circuit fermé circulaire ne produit jamais de mouvement en agissant sur un conducteur mobile d'une forme quelconque partant d'un point de la droite menée par le centre du cercle perpendiculairement à son plan, et se terminant à un autre point de la même perpendiculaire, lorsque ce conducteur mobile ne peut se mouvoir qu'en tournant autour de cette droite.

Nous supposerons toutes les parties du conducteur mobile situées dans un plan passant par l'axe du circuit circulaire, parce que c'est ainsi qu'on fait l'expérience, et parce que c'est la position la plus commode pour le calcul.

Concevons un élément $M'N'$ (fig. 11) d'un fil conducteur circulaire horizontal, dont le courant soit dirigé dans le sens de la flèche, et agisse sur un élément MN d'un conducteur mobile assujéti à tourner autour de la verticale AZ , passant par le centre A du cercle dont le rayon sera représenté par a .

Nous avons trouvé pour l'action mutuelle de deux élémens MN , $M'N'$,

2..

$$Rdsds' = \frac{ii'ds'[ds \cos \epsilon + (k-1) ds \cos \theta \cos \theta']}{r^n},$$

et pour sa direction la droite OO'

Projetons cette force sur la tangente $O'T'$ menée par le point O' , et remarquons que l'élément $M'N'$ faisant avec OO' un angle désigné par θ' , si nous nommons $Tdsds'$ la composante, et si nous avons égard à la relation $dr = ds \cos \theta$, nous obtenons

$$Tdsds' = \frac{ii'ds'[ds \cos \epsilon \cos \theta' + (k-1) \cos^2 \theta' dr]}{r^n}.$$

Prenant le moment par rapport au centre A ,

$$aTdsds' = \frac{aii'ds'[ds \cos \epsilon \cos \theta' + (k-1) \cos^2 \theta' dr]}{r^n}.$$

Intégrant par rapport à s ,

$$ads' \int Tds = aii'ds' \left[\int \frac{\cos \epsilon \cos \theta' ds}{r^n} + (k-1) \int \frac{\cos^2 \theta' dr}{r^n} \right]$$

$$\int \frac{\cos^2 \theta' dr}{r^n} = - \frac{\cos^2 \theta'}{(n-1)r^{n-1}} + \frac{2}{n-1} \int \frac{\cos \theta' d \cos \theta'}{r^{n-1}};$$

mais

$$\cos \theta' = \frac{(x-x')}{r} \frac{dx'}{ds'} + \frac{(y-y')}{r} \frac{dy'}{ds'} + \frac{(z-z')}{r} \frac{dz'}{ds'},$$

qui peut être mis sous la forme

$$r \cos \theta' = (x-x') \frac{dx'}{ds'} + (y-y') \frac{dy'}{ds'} + (z-z') \frac{dz'}{ds'}.$$

Prenant le coefficient différentiel par rapport à s ,

$$\frac{\cos \theta' dr + r d \cos \theta'}{ds} = \frac{dx}{ds} \frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds} \frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds} \frac{dz'}{ds'} = \cos \epsilon;$$

d'où

$$d \cos \theta' = \frac{\cos \epsilon ds - \cos \theta' dr}{r}.$$

Substituant cette valeur dans $\int \frac{\cos^2 \theta' dr}{r^n}$, et réduisant,

$$\int \frac{\cos^2 \theta' dr}{r^n} = -\frac{\cos^2 \theta'}{(n+1)r^{n-1}} + \frac{2}{n+1} \int \frac{\cos \epsilon \cos \theta' ds}{r^n};$$

par suite,

$$ads' \int T ds = aii' ds' \left[\frac{n+2k-1}{n+1} \int \frac{\cos \epsilon \cos \theta' ds}{r^n} - \frac{(k-1) \cos^2 \theta'}{n+1} \frac{1}{r^{n-1}} \right],$$

Soient $\theta'_1, r_1, \theta'_2, r_2$ les valeurs de θ' et de r aux limites entre lesquelles on intègre; cette expression devient

$$ads' \int T ds = aii' ds' \left[\frac{n+2k-1}{n+1} \int \frac{\cos \epsilon \cos \theta' ds}{r^n} + \frac{k-1}{n+1} \frac{\cos^2 \theta'_1}{r_1^{n-1}} - \frac{k-1}{n+1} \frac{\cos^2 \theta'_2}{r_2^{n-1}} \right].$$

Telle est l'action mutuelle d'un élément de circuit circulaire non fermé et d'un conducteur mobile dont les deux extrémités ne sont pas situées dans l'axe du circuit.

Discussion :

Si $r_1 = r_2$ et $\theta'_1 = \theta'_2$, le circuit circulaire est fermé;

Si $\theta'_1 = \frac{\pi}{2}$ et $\theta'_2 = \frac{\pi}{2}$, les deux extrémités du conducteur mobile sont dans l'axe AZ.

Dans l'une ou l'autre hypothèse, les deux derniers termes disparaissent, et la formule se réduit à

$$ads' \int T ds = aii' ds' \frac{n+2k-1}{n+1} \int \frac{\cos \epsilon \cos \theta' ds}{r^n}.$$

Pour obtenir l'action totale du circuit circulaire, nous intégrerons, par rapport à s' , depuis 0 jusqu'à 2π , parce que nous supposons que le courant se meut en partant de l'axe des X vers l'axe des Y,

$$a \int_0^{2\pi} ds' f T ds = \frac{n+2k-1}{n+1} a i i' \int_0^{2\pi} ds' \int \frac{\cos \epsilon \cos \theta' ds}{r^n}.$$

Or, l'expérience montrant que le circuit circulaire n'a aucune action pour mouvoir le conducteur mobile, il faut donc que le second membre de cette expression soit nul. Cette condition peut être remplie, soit par

$$n+2k-1=0,$$

soit par

$$\int_0^{2\pi} ds' \int \frac{\cos \epsilon \cos \theta' ds}{r^n} = 0.$$

Il est facile de démontrer que cette double intégrale ne peut jamais être nulle.

A cet effet, calculons les valeurs de $\cos \epsilon$, $\cos \theta'$ et de ds' .

Soient MN (fig. 12) un élément d'un fil conducteur mobile situé dans le plan des ZX, et M'N' un élément d'un circuit circulaire immobile situé dans le plan des XY. Choisissons l'axe de rotation pour l'axe des Z; menons AO' = a , OO' = r ; posons O'AX = γ . Les éléments MN = ds , M'N' = ds' font avec les axes coordonnés X, Y, Z, des angles dont les cosinus sont,

$$\text{pour } ds, \quad \frac{dx}{ds}, \quad 0, \quad \frac{dz}{ds},$$

$$\text{pour } ds', \quad \sin \gamma, \quad \cos \gamma, \quad 0.$$

Le cosinus de l'angle de ces élémens est

$$\cos \epsilon = \frac{dx}{ds} \sin \gamma.$$

Il existe la relation

$$r^2 = a^2 - 2ax \cos \gamma + x^2 + z^2,$$

qui, étant différenciée par rapport à r et à γ , donne

$$rdr = ax \sin \gamma d\gamma \quad \text{ou} \quad \frac{dr}{a d\gamma} = \frac{x \sin \gamma}{r}.$$

Prenons l'arc $O'C = M'N' = ds'$, qui peut être considéré comme la différentielle de l'arc BO' , compté à partir du point B ; nous avons

$$\text{arc } BO' = a\gamma, \quad d. \text{arc } BO' = a d\gamma = ds';$$

par suite,

$$\cos \theta' = -\frac{dr}{ds'} = -\frac{dr}{a d\gamma} = -\frac{x \sin \gamma}{r}.$$

Substituant les valeurs de $\cos \epsilon$, $\cos \theta'$ et de ds' dans la double intégrale,

$$a \int_0^{2\pi} ds' \int T ds = -\frac{2k + n - 1}{n + 1} a^2 i i' \int_0^{2\pi} \sin^2 \gamma dr \int \frac{x dx}{r^{n+1}}.$$

$\int \frac{x dx}{r^{n+1}}$ devant être prise entre deux tangentes verticales qui limitent le conducteur mobile, si les deux extrémités de ce dernier sont dans l'axe AZ , cet axe est une de ces limites. Les deux élémens MN , mn ayant les mêmes abscisses, en nommant r_1 , r_2 les valeurs de r aux limites, l'action mutuelle du circuit circulaire et du conducteur mobile est repré-

sentée par

$$a \int_0^{2\pi} ds' \int T ds = - \frac{2k+n-1}{n+1} a^2 i i' \int_0^{2\pi} \sin^2 \gamma d\gamma \int x dx \left(\frac{1}{r_2^{n+1}} - \frac{1}{r_1^{n+1}} \right);$$

mais, $r_1 < r_2$; donc $\frac{1}{r_2^{n+1}} - \frac{1}{r_1^{n+1}} < 0$.

En outre, comme nous supposons les abscisses d'un même côté,

$$x dx > 0; \text{ par suite, } \int x dx \left(\frac{1}{r_2^{n+1}} - \frac{1}{r_1^{n+1}} \right) < 0.$$

$\sin^2 \gamma, d\gamma$ sont toujours positifs; par conséquent, la double intégrale est négative, et ne peut jamais être nulle: il s'ensuit que le second membre de la formule est positif. Nous avons donc nécessairement

$$2k+n-1=0 \quad \text{ou} \quad n=1-2k.$$

Portant cette valeur de n dans l'équation (5), elle se change en

$$(4) \dots R ds ds' = i i' ds' r^k d(r^k \cos \theta).$$

Telle est l'expression de l'action mutuelle de deux élémens de fils conducteurs situés d'une manière quelconque dans l'espace.

§ II.

Action mutuelle d'un élément et d'une portion de fil conducteur d'une longueur quelconque.

Nous pouvons considérer cette action sous deux points de vue différens.

1°. Supposer l'élément mobile et la portion de fil conducteur fixe ;

2°. Supposer l'élément fixe et la portion de fil conducteur mobile.

Dans la deuxième hypothèse, les forces exercées par l'élément fixe sur les différens élémens de la portion de fil conducteur mobile étant dirigées vers le milieu de l'élément fixe, et leurs directions passant toutes par ce point, ont une résultante unique ; en outre, le moment de chaque force appliquée à la portion mobile pour la faire tourner autour d'un axe passant par le milieu de l'élément fixe étant nul, la portion mobile ne tournera pas autour de cet axe. Pour se faire une idée nette de cette résultante unique, il faut concevoir au milieu de l'élément fixe un point lié invariablement avec la portion mobile, sans l'être avec l'élément fixe, et supposer toutes les forces qui agissent sur la portion mobile transportées à ce point ; elles s'y composeront en une force unique, qui est évidemment égale et directement opposée à la force unique exercée par la portion de fil conducteur, supposée fixe, sur l'élément mobile. Il suit de là qu'il suffit de calculer la grandeur et la direction de l'une de ces forces.

Nous ferons le calcul pour le cas où l'élément est mobile et la portion de fil conducteur fixe.

Soient $Mm = ds$ (fig. 13), $M'm' = ds'$, $OO' = r$. Décomposons toutes les forces exercées sur le point O' suivant deux droites, l'une $O'G$, dont la direction est arbitraire, et l'autre perpendiculaire à $O'G$. En faisant la somme des composantes suivant $O'G$, nous

aurons la composante de la résultante suivant la même ligne, et nous obtiendrons la direction de cette résultante en cherchant quelle direction doit avoir O'G pour que la composante suivant cette droite atteigne son *maximum*. Joignons le milieu O' de l'élément M'm' avec le milieu O de l'élément Mm, et tirons les droites MO', mO' et OO'. La composante, suivant O'G, de l'action totale de la portion de fil conducteur étant la somme des composantes des actions des élémens tels que Mm, il suffira d'intégrer la composante de cet élément pour toute la portion de fil conducteur.

Menons par l'élément M'm' et la droite O'G un plan LQ sur lequel nous projetons la résultante dirigée suivant OO', et soit O'P cette projection; posons

$$O'P = p, m'O'O = \theta', m'O'P = \psi, m'O'G = b;$$

l'action mutuelle de deux élémens M'm', Mm dirigée suivant OO' a été trouvée égale à

$$Rdsds' = i'ids'r^k d(r^k \cos \theta').$$

Observant que $\cos \angle OO'P = \frac{p}{r}$, la projection de cette force sur le plan LQ est

$$i'ids'r^{k-1}pd(r^k \cos \theta'). \quad d$$

Les trois angles $\angle OO'P$, ψ , θ' étant considérés comme faisant partie d'un triangle sphérique rectangle en θ' , donnent

$$\cos \theta' = \frac{p}{r} \cos \psi,$$

par suite

$$i'ids'r^{k-1}pd(pr^{k-1} \cos \psi);$$

projetant cette force sur O'G, remarquant que...

$PO'G = b - \psi$, et nommant $V ds ds'$ cette projection, il vient

$$\begin{aligned} V ds ds' &= ii' ds' \cos(b - \psi) pr^{k-1} d(pr^{k-1} \cos \psi) \\ &= ii' ds' (\cos b \cos \psi + \sin b \sin \psi) pr^{k-1} d(pr^{k-1} \cos \psi) \\ &= ii' (\cos b + \sin b \tan \psi) pr^{k-1} \cos \psi d(pr^{k-1} \cos \psi) \\ &= \frac{1}{2} ii' ds' (\cos b + \sin b \tan \psi) d(p^2 r^{2k-2} \cos^2 \psi); \end{aligned}$$

remplaçant k par sa valeur $\frac{1-n}{2}$,

$$V ds ds' = \frac{1}{2} ii' ds' (\cos b + \sin b \tan \psi) d\left(\frac{p^2 \cos^2 \psi}{r^{n+1}}\right);$$

intégrant par rapport à s ,

$$\begin{aligned} ds' f V ds &= \frac{1}{2} ii' ds' \left[(\cos b + \sin b \tan \psi) \frac{p^2 \cos^2 \psi}{r^{n+1}} \right. \\ &\quad \left. - \int \frac{p^2 \cos^2 \psi d(\cos b + \sin b \tan \psi)}{r^{n+1}} \right]. \end{aligned}$$

Décomposant $\frac{p^2 \cos^2 \psi}{r^{n+1}}$ hors du signe f en deux facteurs $\frac{p^2 \cos \psi}{r^{n+1}} \times \cos \psi$, faisant passer le second facteur dans la parenthèse qui le précède, et observant que b est constant,

$$ds' f V ds = \frac{1}{2} ii' ds' \left[(\cos b \cos \psi + \sin b \sin \psi) \frac{p^2 \cos \psi}{r^{n+1}} - \sin b \int \frac{p^2 d\psi}{r^{n+1}} \right].$$

Soient $p_1, r_1, \psi_1, p_2, r_2, \psi_2$, les valeurs de p, r, ψ aux limites

$$\begin{aligned} ds' f V ds &= \frac{1}{2} ii' ds' \left[\frac{\cos(b - \psi_2) p_2^2 \cos \psi_2}{r_2^{n+1}} - \frac{\cos(b - \psi_1) p_1^2 \cos \psi_1}{r_1^{n+1}} \right. \\ &\quad \left. - \sin b \int \frac{p^2 d\psi}{r^{n+1}} \right]. \end{aligned}$$

Telle est l'action mutuelle suivant $O'G$, d'un élé-

ment et d'une portion de fil conducteur, d'une longueur quelconque.

Nous appliquerons d'abord cette formule au cas où un fil conducteur, assez long pour qu'il puisse être regardé comme infini dans les deux sens, agit sur un élément qui lui est parallèle.

Soient $M'm' = ds'$ (fig. 14) un élément, $Mm = ds$ un élément de fil conducteur indéfini, parallèle au premier; du point O' , milieu de $M'm'$, abaissons $O'D$ perpendiculaire sur Mm , tirons $O'M$, et posons

$$O'D = a, \quad O'M = r, \quad M'O'M = \psi;$$

dans ce cas

$$p = r, \quad b = \frac{\pi}{2}, \quad a = r \sin \psi, \quad \text{d'où} \quad r = \frac{a}{\sin \psi};$$

par suite

$$ds' \int V ds = \frac{1}{2} \frac{ii' ds'}{a^{n-1}} (\sin^n \psi_2 \cos \psi_2 - \sin^n \psi_1 \cos \psi_1 - \int \sin^{n-1} \psi d\psi).$$

$$\text{Or} \quad \psi_1 = 0, \quad \psi_2 = \pi;$$

les deux premiers termes de la paranthèse disparaissent, pourvu que n soit positif, ce qui a lieu, parce que l'action de deux fils conducteurs diminue quand on les éloigne l'un de l'autre. Il reste

$$ds' \int V ds = -\frac{1}{2} ii' \frac{ds'}{a^{n-1}} \int_0^\pi \sin^{n-1} \psi d\psi,$$

ou, en changeant l'ordre des limites,

$$ds' \int V ds = \frac{1}{2} ii' \frac{ds'}{a^{n-1}} \int_\pi^0 \sin^{n-1} \psi d\psi,$$

ψ allant en croissant de 0 jusqu'à π ; cet angle est

positif, ainsi que son sinus; par conséquent $n - 1$ doit toujours être positif. L'intégrale composée de deux facteurs positifs est positive, et toujours un nombre déterminé, dépendant seulement de la valeur de n : par exemple,

si $n = 1$, elle se réduit à π ,

si $n = 2$, à 2,

si $n = 3$, à $\frac{\pi}{2}$;

nommant ce nombre déterminé c ,

$$ds' \int V ds = \frac{1}{2} ii' ds' \frac{c}{a^{n-1}};$$

intégrant par rapport à s' , et représentant par s'_1 , s'_2 , les limites de s' ,

$$\int ds' \int V ds = \frac{1}{2} ii' \frac{c}{a^{n-1}} (s'_2 - s'_1).$$

Soit $s'_2 - s'_1 = h$,

$$\int ds' \int V ds = \frac{1}{2} ii' c \frac{h}{a^{n-1}};$$

telle est l'action mutuelle d'un élément dont la longueur est h , et d'une portion de fil conducteur indéfini dans les deux sens parallèle à l'élément. Cette expression nous apprend que la force est proportionnelle à $\frac{h}{a^{n-1}}$; or l'action diminuant à mesure que l'élément $M'm'$ s'éloigne du fil conducteur indéfini, il s'ensuit que $n - 1$ est positif: donc n est plus grand que l'unité. Cela posé, déterminons la valeur de n .

Nous nous appuierons sur l'expérience suivante.

QUATRIÈME EXPÉRIENCE.

Soit un conducteur fixe indéfini AB (fig. 15), de chaque côté duquel sont deux conducteurs rectangulaires mobiles GCD, FHE dont les longueurs FH, CD parallèles à AB sont inégales. Concevons que les courans électriques se meuvent dans le même sens suivant ces longueurs, et dans un sens contraire à celui du conducteur fixe, il y aura répulsion entre chacune des portions CD, FH, et le conducteur fixe.

Si les deux portions mobiles avaient même longueur et qu'elles fussent à la même distance du conducteur AB, il est évident qu'elles resteraient toujours dans leur position primitive d'équilibre; mais les longueurs étant inégales, il faut que les distances le soient aussi pour que l'équilibre puisse avoir lieu. L'expérience montre que quand il y a équilibre, en nommant h, h' les longueurs, a, a' les distances de chacune des portions CD, FH au conducteur fixe, il existe la relation

$$\frac{h}{a} = \frac{h'}{a'} \quad (*)$$

Or, d'après la formule précédente, il faudrait pour l'équilibre qu'on eût $\frac{h}{a^{n-1}} = \frac{h'}{a'^{n-1}}$, d'où

$$n - 1 = 1 \quad \text{ou} \quad n = 2,$$

(*) Nous avons choisi la répulsion, afin que l'équilibre fût stable. Si nous eussions pris l'attraction, l'équilibre eût été instable, et l'expérience aurait été très difficile à faire.

par suite

$$\int ds' \int V ds = \frac{1}{2} ii' c \frac{h}{a};$$

résultat qui nous montre que l'action mutuelle d'un élément et d'une portion de fil conducteur indéfini dans les deux sens, est proportionnelle à la longueur de l'élément, et en raison inverse de sa distance au fil conducteur.

Corollaire. Les parties d'un même courant rectiligne se repoussent mutuellement.

En effet, nous avons trouvé pour l'action mutuelle de deux élémens de fils conducteurs situés dans un même plan,

$$R ds ds' = \frac{ii' ds ds' (\sin \theta \sin \theta' + k \cos \theta \cos \theta')}{r^n}.$$

Pour que cette formule puisse convenir aux différens élémens d'un même courant rectiligne, il suffit d'y poser

$$\theta = 0, \quad \theta' = 0;$$

elle devient

$$\frac{k ii' ds ds'}{r^n}.$$

Substituant la valeur $k = -\frac{n-1}{2}$, qui est négative, cette expression devient négative : donc il y a répulsion ; ce qui s'accorde avec l'expérience.

On se rend compte géométriquement de ce résultat, en considérant un même courant MM' (fig. 16) divisé en deux courans au point A : l'un s'approchant de ce point, et l'autre s'en éloignant, ils doivent se repousser.

§ III.

Action mutuelle d'un élément et d'un fil conducteur formant un circuit fermé, ou d'un assemblage de circuits fermés.

Idée qu'on doit attacher à l'expression circuit fermé employée dans les expériences.

La pile, les réophores, les conducteurs fixes et mobiles composent toujours un assemblage de courans électriques formant des circuits complètement fermés.

Les conducteurs mobiles employés dans les expériences, et désignés sous le nom de *circuits fermés*, ne le sont jamais rigoureusement, parce qu'il faut laisser un petit intervalle entre les deux extrémités du fil pour faire passer le courant.

Nous avons obtenu pour l'action mutuelle d'un élément et d'une portion quelconque de fil conducteur la formule

$$ds' f V ds = \frac{1}{2} i i' ds' \left[\frac{\cos(b - \psi_2) p_2^2 \cos \psi_2}{r_2^{n+1}} - \frac{\cos(b - \psi_1) p_1^2 \cos \psi_1}{r_1^{n+1}} - \sin b \int \frac{p^2 d\psi}{r^{n+1}} \right].$$

Le circuit étant fermé,

$$r_1 = r_2, \quad p_1 = p_2, \quad \psi_1 = \psi_2.$$

Les deux premiers termes de la parenthèse s'évaluent ; il reste

$$ds' f V ds = -\frac{1}{2} i i' ds' \sin b \int \frac{p^2 d\psi}{r^{n+1}}.$$

Telle est l'expression de l'action mutuelle, suivant J'G (fig. 17), d'un élément et d'un fil conducteur formant un circuit fermé; il est facile de voir que cette expression peut s'étendre à un assemblage de circuits fermés.

Remarque. Nous ne substituerons pas dans cette formule la valeur $n = 2$, parce que nous allons obtenir des résultats qui sont les mêmes, quelle que soit n .

Discussion. Les lignes O'P, O'N, étant très voisines l'une de l'autre, font sensiblement le même angle ψ avec m'O'. Si nous concevons la ligne O'P tournant autour de O' dans le plan LQ, et arrivée dans la position O'n, l'angle NO'n pourra être pris pour $d\psi$; alors $p^2 d\psi$ sera le double de l'aire du secteur NO'n, projection du secteur MO'm sur le plan LQ. Si nous donnons successivement à l'élément M'm' diverses positions dans ce plan, de manière que son milieu O' reste fixe, il est évident que les angles désignés par ψ , relatifs à une nouvelle position de l'élément, seront égaux aux angles ψ de la première, augmentés ou diminués d'une quantité constante. Les valeurs de $d\psi$, par suite, celles de $\int \frac{p^2 d\psi}{r^{n+1}}$, seront les mêmes que dans la première position; d'où il suit que l'action mutuelle sera la même, pourvu que l'angle b soit constant, c'est-à-dire que la ligne O'G tourne, avec l'élément M'm', dans le plan LQ, de telle sorte qu'elle forme toujours avec lui le même angle.

Déterminons la direction de la résultante.

Il suffit de chercher quelle position doit prendre la droite O'G pour que l'expression de la force dirigée suivant cette droite atteigne son *maximum*. Cette condition sera remplie en rendant *maximum* chacun des facteurs $\sin b$ et $\int \frac{p^2 d\psi}{r^{n+1}}$: le premier atteint sa plus grande valeur en posant

$$b = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi donc la résultante est perpendiculaire à l'élément.

Pour rendre $\int \frac{p^2 d\psi}{r^{n+1}}$ *maximum*, nous calculerons la valeur de cette intégrale.

Prenons le milieu O' de l'élément M'm' (fig. 18) pour l'origine des coordonnées rectangulaires, et soit Mm un élément de fil conducteur ; projetons le secteur MO'm sur le plan XY, et soit NO'n cette projection ; faisons

$$MO'X = \chi, \quad O'M = w,$$

$$x = w \cos \chi, \quad y = w \sin \chi, \quad \frac{y}{x} = \tan \chi,$$

$$\frac{d\chi}{\cos^2 \chi} = \frac{x dy - y dx}{w^2}.$$

Remplaçant x par sa valeur $w \cos \chi$,

$$w^2 d\chi = x dy - y dx.$$

En projetant le secteur MO'm sur les deux autres

plans coordonnés, nous avons

$$\begin{aligned} ydz - zdy, \\ zdx - xdz \end{aligned}$$

Ces trois expressions sont les doubles projections du secteur $MO'm$ sur les trois plans coordonnés. Soient α, ϵ, γ les angles formés, avec les trois axes, par une normale au plan du secteur $MO'm$, et soit l'angle $MO'm = d\omega$. Le double de l'aire de ce secteur est $w^2 d\omega$, qui, projetée sur les trois plans coordonnés, donne

$$(f) \dots \begin{cases} w^2 d\omega \cos \gamma = xdy - ydx, \\ w^2 d\omega \cos \alpha = ydz - zdy, \\ w^2 d\omega \cos \epsilon = zdx - xdz. \end{cases}$$

Nommons λ, μ, ν les angles formés, avec les trois axes, par une normale au plan mené par l'élément $M'm'$ et la droite $O'G$. L'angle formé par la normale au plan du secteur $MO'm$, avec cette dernière, est

$$\cos \alpha \cos \lambda + \cos \epsilon \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu.$$

Si nous projetons le secteur $MO'm$ sur le plan $M'O'G$, désigné par LQ dans la figure 17, et si nous égalons cette double projection à $p^2 d\downarrow$, il vient

$$p^2 d\downarrow = w^2 d\omega (\cos \alpha \cos \lambda + \cos \epsilon \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu).$$

Substituant dans cette expression les valeurs (f), et divisant par r^{n+1} ,

$$\frac{p^2 d\downarrow}{r^{n+1}} = \frac{(ydz - zdy) \cos \lambda + (zdx - xdz) \cos \mu + (xdy - ydx) \cos \nu}{r^{n+1}}.$$

Intégrant et observant que λ, μ, ν sont constans,

nous avons pour la somme des aires projetées ,

$$\int \frac{p^2 d\psi}{r^{n+1}} = \cos \lambda \int \frac{y dz - z dy}{r^{n+1}} + \cos \mu \int \frac{z dx - x dz}{r^{n+1}} + \cos \nu \int \frac{x dy - y dx}{r^{n+1}}.$$

Soient A, B, C les valeurs de ces intégrales ,

$$\int \frac{p^2 d\psi}{r^{n+1}} = A \cos \lambda + B \cos \mu + C \cos \nu.$$

Conduisons par l'origine O' une droite O'E, faisant avec les axes les angles ξ , η , ζ , tels qu'en posant

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

nous avons

$$\cos \xi = \frac{A}{D}, \quad \cos \eta = \frac{B}{D}, \quad \cos \zeta = \frac{C}{D},$$

d'où

$$A = D \cos \xi, \quad B = D \cos \eta, \quad C = D \cos \zeta.$$

Ces valeurs portées dans $\int \frac{p^2 d\psi}{r^{n+1}}$, la changent en

$$\int \frac{p^2 d\psi}{r^{n+1}} = D (\cos \lambda \cos \xi + \cos \mu \cos \eta + \cos \nu \cos \zeta).$$

Soit δ l'angle de la droite O'E et de la normale au plan M'O'G

$$\int \frac{p^2 d\psi}{r^{n+1}} = D \cos \delta,$$

par suite

$$ds' \int V ds = -\frac{1}{2} ii' D \cos \delta \sin b ds'.$$

Cette expression est susceptible de la transformation suivante.

Soient O'E (fig. 19) la droite que nous venons de déterminer en grandeur et en direction, et que nous nommerons désormais *directrice*, UVS un plan

mené par le point O' milieu de l'élément M'm' perpendiculairement à O'E. Par la directrice O'E et par l'élément M'm' prolongé jusqu'en F, conduisons un plan qui rencontrera UVS suivant O'S, projection de l'élément sur ce dernier plan. Par la direction de l'élément et par la droite O'G suivant laquelle nous avons décomposé la résultante, menons le plan O'FH coupant UVS suivant O'H, l'angle FHS formé par ces deux plans a été désigné par $\mathcal{J}$. Faisons passer par la directrice le plan EO'H qui sera perpendiculaire à UVS, et décrivons tous les arcs de cercle représentés dans la figure.

L'angle EHS étant droit,

$$\cos \mathcal{J} = \sin \text{EHF};$$

l'angle FO'G= b est mesuré par l'arc FG. Soit $\epsilon = \text{EO'F}$ l'angle de la directrice et de l'élément, qui a pour mesure l'arc EF; concevons un triangle sphérique EFH; le côté EH = $\frac{\pi}{2}$ donne

$$1 : \sin \text{EFH} :: \sin \epsilon : \sin \text{EHF},$$

ou

$$1 : \sin \text{HFS} :: \sin \epsilon : \cos \mathcal{J} = \sin \epsilon \sin \text{HFS},$$

$$ds' \int \sqrt{V} ds = - \frac{1}{2} i' D \sin b \sin \epsilon \sin \text{HFS} ds'.$$

Par la droite O'G, menons le plan O'GT perpendiculaire au plan EO'S; le triangle sphérique FGT étant rectangle en T

$$1 : \sin b :: \sin \text{HFS} : \sin \text{GT},$$

d'où

$$\sin b \sin \text{HFS} = \sin \text{GT},$$

$$ds' \int \sqrt{V} ds = - \frac{1}{2} i' D \sin \epsilon \sin \text{GT} ds'.$$

L'arc GT mesurant l'angle GO'T de la droite O'G et du plan EO'S, nous en concluons que la force suivant O'G est égale à la constante $-\frac{1}{2} ii'D ds'$ multipliée par le sinus de l'angle de l'élément et de la directrice, et par le sinus de l'angle formé par le plan passant par ces deux dernières droites avec la droite O'G. Or, cet angle étant le complément de celui que cette droite fait avec la normale O'I à ce plan, c'est-à-dire de l'angle GO'I que nous nommerons ϕ , il en résulte

$$\sin GT = \cos \phi,$$

/D

$$ds' \int V ds' = -\frac{1}{2} ii' \sin \epsilon \cos \phi ds'.$$

L'élément restant immobile, pour que cette valeur atteigne son *maximum*, il suffit de poser

$$\phi = 0;$$

en désignant par $R_1 ds'$ ce que devient la force,

$$R_1 ds' = -\frac{1}{2} ii'D \sin \epsilon ds'.$$

Ainsi donc, la résultante est dirigée suivant la normale au plan passant par la directrice et par l'élément, par conséquent elle est perpendiculaire à ces deux droites; de plus elle est proportionnelle au sinus de l'angle qu'elles forment entre elles.

Discussion :

$$\text{si} \quad \epsilon = 0, \quad R_1 ds' = 0.$$

Alors l'élément est dirigé suivant la directrice et la résultante est nulle. On peut donc dire que la directrice au point O' est la droite suivant laquelle il faut placer l'élément, pour qu'il n'éprouve aucune action de la part d'un circuit fermé.

$$\text{Si} \quad \epsilon = \frac{\pi}{2}, \quad R_1 ds' = -\frac{1}{2} i i' D ds'.$$

Dans ce cas, l'élément est situé d'une manière quelconque dans le plan UVS ; la force atteint son *maximum* ; sa direction, celles de l'élément et de la directrice sont trois droites rectangulaires entre elles.

Transformations de la valeur

$$ds' \int \nabla ds = -\frac{1}{2} i i' ds' \sin b \int \frac{p^3 d\phi}{r^{n+1}}, \text{ dans l'hypothèse } n = 2.$$

Cette valeur devient, par la substitution $n = 2$,

$$ds' \int \nabla ds = -\frac{1}{2} i i' ds' \sin b \int \frac{p^3 d\psi}{r^3}.$$

$$\text{Calculons } \int \frac{p^3 d\psi}{r^3}.$$

Projetons le circuit fermé $M_1 M_2 m_1 m_2$ (fig. 20) sur le plan qui passe par l'élément $M'm'$, et par la droite $O'G$; par le point O' , concevons deux plans perpendiculaires au plan $m'O'G$, et touchant la surface cylindrique qui projette le circuit, suivant les droites $a_1 b_1$, $a_2 b_2$; ces plans rencontrent $m'O'G$ suivant $O'b_1$, $O'b_2$ qui sont les tangentes menées par le point O' à la projection du circuit ; ces tangentes forment, avec l'élément $M'm'$, des angles qui sont les limites de ψ , que nous désignerons par ψ_1 , ψ_2 . L'action totale du circuit fermé s'obtiendra en faisant la somme des actions des élémens $m_1 M_1$, $m_2 M_2$, compris dans un même angle $d\psi$, après avoir intégré depuis ψ_1 jusqu'à ψ_2 .

Soient p_1, p_2 les limites de p ,

$$\int \frac{p^2 d\psi}{r^3} \text{ sera remplacé par } \int \left(\frac{p_2^2}{r_2^3} - \frac{p_1^2}{r_1^3} \right) d\psi.$$

Cette action totale sera toujours une différence entre les actions des deux élémens $m_1 M_1, m_2 M_2$ dont les courans vont en sens contraires, par rapport à celui de $M'm'$, comme le montre la figure. Faisons passer par le circuit fermé une surface courbe quelconque terminée de toutes parts à ce circuit, elle rencontrera les plans $M_2 O' N_2, m_2 O' N_2$ suivant les courbes $M_1 V_2 M_2, m_1 v_2 m_2$. La quantité $\frac{p_2^2}{r_2^3} - \frac{p_1^2}{r_1^3}$ étant l'intégrale de $d\left(\frac{p^2}{r^3}\right)$, p et r se rapportant à un point M pris sur la courbe $M_1 V_2 M_2$, il nous reste à trouver la valeur de $d\left(\frac{p^2}{r^3}\right)$.

A cet effet, abaissons la perpendiculaire $MP = q$ (fig. 21) sur le plan $m'O'G$, et soit $O'P = p$; menons $MP' = p$ parallèle à $O'P$, et $MT = t$ perpendiculaire au plan $O'MP$; soit pris sur la courbe $M_1 M M_2$ un point a infiniment voisin de M ; en posant $M_1 M = m$, nous aurons $Ma = dm$. Concevons le point M transporté en un point N infiniment voisin sur une normale MN à la surface courbe, et désignons par la caractéristique δ les différentielles; nous avons $MN = \delta m$. Conduisons, par le point M , la tangente MR à la courbe $M_1 M_2$, les cosinus des angles que cette tangente fait avec les trois droites rectangulaires p, q, t , sont

$$\frac{dp}{dm}, \quad \frac{dq}{dm}, \quad 0,$$

en passant du point M au point a .

Les cosinus des angles formés par la normale MN avec les mêmes droites, sont

$$\frac{\partial p}{\partial m}, \quad \frac{\partial q}{\partial m}, \quad \frac{\partial t}{\partial m},$$

en passant du point M au point N.

L'angle formé par la normale et la tangente en M étant droit,

$$\frac{dp}{dm} \frac{\partial p}{\partial m} + \frac{dq}{dm} \frac{\partial q}{\partial m} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial p}{\partial q} = - \frac{dq}{dp}.$$

Le triangle O'MP, dans lequel O'M = r , fournit la relation

$$r^2 = p^2 + q^2,$$

qui, étant différenciée successivement, par rapport à d et à ∂ , devient

$$\frac{dr}{dp} = \frac{p}{r} + \frac{q}{r} \frac{dq}{dp}, \quad \frac{\partial r}{\partial q} = \frac{q}{r} + \frac{p}{r} \frac{\partial p}{\partial q}.$$

Substituant, dans cette dernière équation, la valeur de $\frac{\partial p}{\partial q}$,

$$\frac{\partial r}{\partial q} = \frac{q}{r} - \frac{p}{r} \frac{dq}{dp};$$

multipliant $\frac{dr}{dp}$ par p , $\frac{\partial r}{\partial q}$ par q , et ajoutant ces produits

$$p \frac{dr}{dp} + q \frac{\partial r}{\partial q} = \frac{q^2 + p^2}{r} = r;$$

mais

$$d \cdot \frac{p^2}{r} = \frac{2pdp}{r^3} - \frac{3p^2dr}{r^4}.$$

Remplaçant pdr par sa valeur tirée de l'équation pré-

cédente ,

$$\begin{aligned} d\frac{p^2}{r^3} &= -pdp \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3q \frac{\partial r}{\partial q}}{r^4} \right) = -pdp \frac{\frac{\partial q}{r^3} - \frac{3q \partial r}{r^4}}{\frac{\partial q}{\partial q}} \\ &= -pdp \frac{\delta \left(\frac{q}{r^3} \right)}{\frac{\partial q}{\partial q}}, \text{ d'où } \frac{p^2}{r^3} = - \int pdp \frac{\delta \left(\frac{q}{r^3} \right)}{\partial q}; \end{aligned}$$

par suite

$$ds' fVds = \frac{1}{2} ii' \sin bds' \iint d\downarrow pdp \frac{\delta \left(\frac{q}{r^3} \right)}{\partial q}.$$

Soit $NMK = \rho$ l'angle formé par la direction de la normale MN avec le prolongement de PM ;

$$\delta q = \delta m \cos \rho,$$

$$ds' fVds = \frac{1}{2} ii' \sin bds' \iint \frac{d\downarrow pdp}{\cos \rho} \frac{\delta \left(\frac{q}{r^3} \right)}{\delta m}.$$

Désignons par $d^2\sigma$, la petite aire *Mabc* que nous projetons sur le plan M'O'G ; soit *Pa'b'c'* cette projection, dont la valeur est

$$d^2\sigma \cos \rho = d\downarrow pdp, \text{ d'où } \frac{d\downarrow pdp}{\cos \rho} = d^2\sigma.$$

Mettant le second membre à la place du premier, dans l'expression précédente, elle prend la forme

$$ds' fVds = \frac{1}{2} ii' ds' \sin b \iint \frac{\delta \left(\frac{q}{r^3} \right)}{\delta m} d^2\sigma.$$

Telle est l'action mutuelle d'un élément et d'un fil conducteur formant un circuit fermé, ou d'un assemblage de circuits fermés.

et plan

Si le circuit est infiniment petit $\int \frac{\delta \left(\frac{q}{r^3} \right)}{\delta m}$ est sensible-

ment constant, la formule se réduit à

$$ds' \int V ds = \frac{1}{2} i i' ds' \sin b \frac{\delta \left(\frac{q}{r'} \right)}{\delta m} \sigma.$$

Or, σ étant l'aire du petit circuit, il en résulte que si l'on a en un même point et dans le même plan deux circuits infiniment petits, de même intensité, les actions qu'ils exerceront seront comme leurs aires, qu'en outre ces actions deviendront égales lorsque les intensités des deux circuits seront en raison inverse de leurs aires.

Des Solénoïdes électro-dynamiques.

Définition du solénoïde. Concevons dans l'espace une ligne quelconque entourée par des courans électriques formant de très petits circuits fermés, ayant des aires égales dont les plans sont perpendiculaires à cette ligne, infiniment rapprochés, à la même distance les uns des autres, et dont les centres de gravité sont situés sur la ligne quelconque : nous avons un assemblage qui a reçu le nom de *solénoïde électro-dynamique*.

Nous pouvons conclure de la valeur que nous venons d'obtenir pour l'action d'un circuit fermé infiniment petit sur un élément ,

1° Que l'action d'un solénoïde défini sur un élément de fil conducteur se compose de deux forces perpendiculaires, chacune au plan passant par l'élément et une des extrémités du solénoïde, qui sont en raison directe du sinus de l'angle formé par l'élément et la

droite joignant son milieu à l'extrémité du solénoïde ,
et en raison inverse du carré de cette droite.

2° Que l'action de deux solénoïdes définis se compose de quatre forces, deux attractives et deux répulsives, dirigées suivant les droites joignant les extrémités de ces solénoïdes deux à deux, et qui sont en raison inverse des carrés de ces droites.

Ces résultats s'accordent avec ceux qu'on obtient par expérience pour l'action des aimans, lorsqu'on remplace ces derniers par des solénoïdes ayant leurs extrémités aux pôles de ces aimans.

FIN.

Vu par nous , doyen de la Faculté des Sciences ,

Baron THÉNARD.

Permis d'imprimer.

*L'Inspecteur général des études , chargé de
l'administration de l'Académie de Paris.*

ROUSSEL.

Action mutuelle des fils conducteurs de courants Electriques.

