N° D'ORDRE
237.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR

LE DOCTORAT ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

Par M. F. MASSIEU,
INGÉNIEUR DES MINES.

1re THÈSE. — Sur les intégrales algébriques des problèmes de mécanique.

2e THÈSE. — Sur le mode de propagation des ondes planes et la surface de l'onde élémentaire dans les cristaux biréfringents a deux axes.

Soutenues le 19 août 1861, devant la Commission d'Examen.

MM. LAMÉ, *Président.*
DELAUNAY, } *Examinateurs.*
PUISEUX, }

PARIS,
MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Augustins, 55.

1861.

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

DOYEN	MILNE EDWARDS, Professeur.	Zoologie, Anatomie, Physiologie.
PROFESSEURS HONORAIRES	BIOT.	
	PONCELET.	
PROFESSEURS	DUMAS	Chimie.
	DESPRETZ	Physique.
	DELAFOSSE	Minéralogie.
	BALARD	Chimie.
	LEFÉBURE DE FOURCY	Calcul différentiel et intégral.
	CHASLES	Géométrie supérieure.
	LE VERRIER	Astronomie.
	DUHAMEL	Algèbre supérieure.
	GEOFFROY-SAINT-HILAIRE	Anatomie, Physiologie comparée, Zoologie.
	LAMÉ	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	DELAUNAY	Mécanique physique.
	C. BERNARD	Physiologie générale.
	P. DESAINS	Physique.
	LIOUVILLE	Mécanique rationnelle.
	HÉBERT	Géologie.
	PUISEUX	Astronomie.
	DUCHARTRE	Botanique.
AGRÉGÉS	BERTRAND	Sciences mathématiques.
	J. VIEILLE	Sciences mathématiques.
	PELIGOT	Sciences physiques.
SECRÉTAIRE	E. PREZ-REYNIER.	

THÈSE DE MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

SUR LES INTÉGRALES ALGÉBRIQUES DES PROBLÈMES DE MÉCANIQUE.

Dans un grand nombre de problèmes de mécanique, les équations différentielles du mouvement admettent des intégrales entières et algébriques par rapport aux composantes des vitesses des différents points.

Deux de ces intégrales se rencontrent surtout fréquemment; ce sont celles qui sont fournies par les principes connus sous le nom de *principes des aires* et *des forces vives*.

L'intégrale des forces vives appartient à tous les problèmes où l'on considère différents points matériels soumis seulement à leurs actions mutuelles et à des forces émanant de centres extérieurs fixes. Une fois cette équation connue, le problème se trouve déterminé et l'on peut en écrire les équations différentielles.

L'intégrale des aires au contraire, loin de définir à elle seule la question, est commune à une infinité de problèmes satisfaisant tous à une même condition bien connue.

Cette propriété de l'intégrale des aires appartient, comme on le verra, à toutes les intégrales algébriques et entières qui sont du premier degré par rapport aux vitesses des différents points mobiles.

L'importance des intégrales des aires et des forces vives conduit à se demander si les cas dans lesquels il peut existér d'autres intégrales algébriques et entières sont fréquents, et quelles sont les propriétés caractéristiques de ces intégrales.

M. Bertrand a traité le premier cette question dans un Mémoire inséré au *Journal de M. Liouville* pour l'année 1857. Il s'est borné au cas du mouvement d'un point dans un plan.

En reprenant cette étude, je me suis attaché tout d'abord à rechercher les propriétés générales qui distinguent les intégrales algébriques, et j'ai pu établir plusieurs principes qui m'ont servi à simplifier beaucoup l'examen des cas particuliers. J'ai ainsi, sans calculs trop fastidieux, trouvé toutes les intégrales algébriques du premier et du second degré que peut admettre le problème du mouvement d'un point assujetti à rester sur une surface donnée.

Je supposerai toujours que le principe des forces vives s'applique, c'est-à-dire qu'il existe une fonction des forces ; et je ne m'occuperai que des intégrales qui ne contiennent pas le temps, attendu qu'elles seules peuvent servir à former avec l'intégrale des forces vives la fonction *principale* de laquelle dépend la solution complète du problème.

I.

Supposons qu'étant donné un problème de mécanique, on ait exprimé les coordonnées des différents points mobiles en fonction du plus petit nombre possible de variables, en se servant des équations de liaison qui doivent être données, et que nous supposerons toujours indépendantes du temps.

Soient $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ces variables, qui sont alors complétement indépendantes, et $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$ leurs dérivées par rapport au temps t; la fonction des forces U sera une fonction des variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$, et ne contiendra pas les dérivées de ces variables; la demi-force vive T sera une fonction homogène et du second degré par rapport à $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$, et contiendra d'une manière quelconque les variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Nous aurons alors, pour déterminer le mouvement, n équations différentielles du second ordre, que Lagrange a mises sous la forme suivante :

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathrm{T}}{dq'_i}\right) - \frac{d\mathrm{T}}{dq_i} = \frac{d\mathrm{U}}{dq_i},$$

i représentant l'un quelconque des indices $1, 2, \ldots, n$.

Si on considère $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$ comme des variables auxiliaires, les équations (1) deviendront du premier ordre par rapport aux variables q et q', et il faudra leur joindre les équations

$$(2) \qquad \frac{dq_1}{dt} = q'_1, \quad \frac{dq_2}{dt} = q'_2, \ldots, \quad \frac{dq_n}{dt} = q'_n.$$

C'est de l'intégration des $2n$ équations du premier ordre (1) et (2) que dépendra la solution du problème.

En posant, avec Poisson et Hamilton,

$$\frac{dT}{dq'_i} = p_i, \quad U - T = H,$$

et en substituant dans les équations (1) et (2) les valeurs des q'_i en fonction des nouvelles variables p_i, ces équations prennent la forme bien connue :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= \frac{dH}{dp_i}, \\ \frac{dq_i}{dt} &= -\frac{dH}{dq_i}. \end{aligned} \right.$$

Les variables p_i sont dites conjuguées des variables q_i.

Enfin, il résulte d'un théorème de Poisson, que si l'on a deux intégrales du système des équations (3), contenant chacune une constante arbitraire, et résolues par rapport à ces constantes, soit :

$$\alpha = \varphi(q_1, q_2, \ldots, q_n, \quad p_1, p_2, \ldots, p_n, t),$$

$$\beta = \psi(q_1, q_2, \ldots, q_n, \quad p_1, p_2, \ldots, p_n, t);$$

la quantité

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{d\alpha}{dp_i} \frac{d\beta}{dq_i} - \frac{d\alpha}{dq_i} \frac{d\beta}{dp_i} \right),$$

qu'on représente ordinairement par

$$(\alpha, \beta),$$

reste constante pendant toute la durée du mouvement.

Lorsque l'une des deux intégrales précédentes, β par exemple, est celle des forces vives, on a identiquement, si l'autre intégrale α ne contient pas t,

$$(\alpha, \mathrm{H}) = o.$$

Cette équation conduit au théorème suivant :

Si une intégrale α d'un problème de mécanique est algébrique et entière par rapport aux variables p_i, et si elle contient des termes de parité différente, elle se divise en deux intégrales du même problème, que l'on obtient en égalant séparément à des constantes la somme des termes de degré pair et celle des termes de degré impair.

Soit

$$\alpha = \varphi(p_1, p_2, \ldots, p_n, \quad q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

cette intégrale algébrique et entière, par rapport aux variables p, et de plus indépendante du temps; on doit avoir

$$(\alpha, \mathrm{H}) = o,$$

c'est-à-dire

$$o = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{d\alpha}{dp_i} \frac{d(\mathrm{U}-\mathrm{T})}{dq_i} - \frac{d\alpha}{dq_i} \frac{d(\mathrm{U}-\mathrm{T})}{dp_i} \right),$$

ou bien, en remarquant que U ne contient pas les variables p,

$$o = \sum \frac{d\alpha}{dp_i} \frac{d\mathrm{U}}{dq_i} - \sum \frac{d\alpha}{dp_i} \frac{d\mathrm{T}}{dq_i} + \sum \frac{d\alpha}{dq_i} \frac{d\mathrm{T}}{dp_i}.$$

Or un terme du degré m de notre intégrale α donnera, dans la première des sommes précédentes, un terme du degré $m - 1$, dans la deuxième un terme de degré $(m + 1)$, et dans la troisième un terme du degré $m + 1$; donc, si le degré du terme que nous avons considéré dans notre intégrale α est pair, ce terme ne donnera dans la fonction de Poisson que des termes de degré impair et inversement, c'est-à-dire que si on désigne par α_1 la somme des termes de degré pair dans l'intégrale α, et par α_2 celle des termes de degré impair, on aura séparément les équations

$$(\alpha_1, \mathrm{H}) = o, \quad (\alpha_2, \mathrm{H}) = o;$$

donc en égalant chacune des deux sommes α_1 et α_2 à une constante, on aura deux intégrales du problème.

Si la fonction des forces U est nulle, le terme de degré m pris dans l'intégrale α ne donnera plus que des termes du degré $m+1$ dans la fonction de Poisson. Dans ce cas, par conséquent, l'intégrale α se sépare en autant d'autres qu'elle contient de termes de degrés différents.

Il résulte encore de ce qui précède, que si le terme de degré le plus élevé dans α est du degré m, il donnera seul dans la fonction de Poisson des termes du degré $m+1$, et ces termes seront indépendants de U.

Nous appellerons problème dérivé d'un autre, celui où T aura la même expression, mais pour lequel la fonction des forces sera nulle. Il résulte de ce qui précède : 1° que toute intégrale algébrique d'un problème dérivé est homogène, ou se décompose en autant d'autres qu'elle contient de termes de degrés différents; 2° qu'étant donnée une intégrale algébrique d'un problème quelconque, en égalant à une constante la somme de ses termes de degré le plus élevé, on a une intégrale du problème dérivé.

Par conséquent, pour rechercher ces termes de degré le plus élevé dans une intégrale algébrique, on pourra supposer nulle la fonction des forces.

II.

Intégrales algébriques du premier degré.

Une intégrale algébrique et entière du premier degré, par rapport aux variables p, ne pouvant contenir de termes de parité différente, sera nécessairement de la forme

$$\alpha = A_1 p_1 + A_2 p_2 + \ldots + A_n p_n.$$

Puisqu'elle est homogène, elle est commune au problème donné et à son problème dérivé; par conséquent, on doit avoir

$$(1) \qquad (\alpha, T) = 0,$$

et la relation

$$(\alpha, H) = (\alpha, [U - T]) = 0$$

se réduit à

$$(2) \qquad (\alpha, \mathrm{U}) = 0.$$

L'équation (1) montre qu'un problème de mécanique ne peut admettre une intégrale algébrique et entière du premier degré que si les liaisons du système de la nature desquelles dépend la forme de T, remplissent certaines conditions; si ces conditions sont satisfaites, cette intégrale sera commune à tous les problèmes dont les fonctions des forces vérifieront l'équation (2), laquelle se réduit à

$$(3) \qquad \mathrm{A}_1 \frac{d\mathrm{U}}{dq_1} + \mathrm{A}_2 \frac{d\mathrm{U}}{dq_2} + \ldots + \mathrm{A}_n \frac{d\mathrm{U}}{dq_n} = 0.$$

L'équation (1), discutée dans chaque cas, indiquera les conditions que doit remplir l'expression de T, pour qu'il existe une intégrale du premier degré, et déterminera en outre les valeurs des coefficients $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ de cette intégrale, lesquels ne doivent contenir que les variables q. Ces coefficients une fois déterminés, on aura la forme la plus générale de U en intégrant l'équation (3) aux différentielles partielles du premier ordre.

Appliquons ces théories à quelques cas simples.

Mouvement d'un point assujetti à rester sur une surface donnée.

Désignons par ξ et η les paramètres de deux familles de courbes orthogonales tracées sur la surface; et supposons que le choix de ces familles de courbes ait été fait de manière qu'en désignant par ds la distance de deux points de la surface infiniment voisins, on ait

$$ds^2 = \lambda\,(d\xi^2 + d\eta^2).$$

M. Liouville a fait voir que ce résultat pouvait être obtenu d'une infinité de manières; en désignant par T la demi-force vive, et posant

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi', \quad \frac{d\eta}{dt} = \eta',$$

on aura

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\lambda\,(\xi'^2 + \eta'^2).$$

Il y a avantage, dans le genre de recherches qui nous occupe, à prendre pour variables indépendantes les deux imaginaires conjuguées

$$\xi + \eta\sqrt{-1} = x, \quad \xi - \eta\sqrt{-1} = y,$$

ce qui donne, en désignant par x', y' les dérivées de x et y par rapport au temps t,

$$T = \frac{1}{2}\lambda x' y',$$

λ étant supposé dans cette équation exprimé en x et y.

L'avantage de cette transformation consiste en ce que la forme de T ne changera pas, si on emploie de nouvelles variables x_1 et y_1 déterminées par les relations

$$x = \Pi(x_1),$$

$$y = \Pi_1(y_1);$$

Π étant une fonction quelconque, et Π_1 étant nécessairement ce que devient Π quand on y change le signe de $\sqrt{-1}$.

Cette transformation de coordonnées est la seule qui n'altère pas la forme de T, car si l'on avait

$$x = \varphi(x_1, y_1), \quad y = \psi(x_1, y_1),$$

on trouverait

$$x' = \frac{d\varphi}{dx_1}x'_1 + \frac{d\varphi}{dy_1}y'_1, \quad y' = \frac{d\psi}{dx_1}x'_1 + \frac{d\psi}{dy_1}y'_1,$$

et pour que T ne changeât pas de forme, on devrait avoir à la fois

$$\frac{d\varphi}{dx_1}\frac{d\psi}{dx_1} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dy_1}\frac{d\psi}{dy_1} = 0;$$

ce qui fait voir que l'une des variables x et y ne devrait être fonction que de x_1 et l'autre de y_1; mais tant que cette condition sera remplie, on sera assuré de ne pas altérer la forme précédente de T.

Posons maintenant

$$X = \frac{dT}{dx'} = \frac{1}{2}\lambda y',$$

$$Y = \frac{dT}{dy'} = \frac{1}{2}\lambda x',$$

d'où

$$T = \frac{2}{\lambda} XY.$$

Il est à peine nécessaire d'observer que les relations qui lient les dérivées ξ', η'; x', y' et X, Y étant linéaires, ces transformations n'altéreront pas le degré, par rapport à ces quantités, des expressions qu'on aura à considérer.

D'après les remarques faites au commencement de ce paragraphe, le problème du mouvement d'un point sur la surface donnée ne pourra admettre pour intégrale algébrique du premier degré, par rapport aux variables conjuguées X et Y, qu'une intégrale de la forme

$$\alpha = AX + BY,$$

et cette intégrale devra vérifier identiquement l'équation

$$(\alpha, T) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\alpha}{dX}\frac{dT}{dx} + \frac{d\alpha}{dY}\frac{dT}{dy} - \frac{d\alpha}{dx}\frac{dT}{dX} - \frac{d\alpha}{dy}\frac{dT}{dY} = 0$$

ou

$$\left(A\frac{d\frac{1}{\lambda}}{dx} + B\frac{d\frac{1}{\lambda}}{dy}\right)XY - \frac{1}{\lambda}Y\left(X\frac{dA}{dx} + Y\frac{dB}{dx}\right) - \frac{1}{\lambda}X\left(X\frac{dA}{dy} + Y\frac{dB}{dy}\right) = 0.$$

Égalant séparément à zéro les coefficients de X^2, Y^2, XY, il vient

$$\frac{dA}{dy} = 0, \quad \frac{dB}{dx} = 0,$$

$$\frac{1}{\lambda}\frac{dA}{dx} - A\frac{d\frac{1}{\lambda}}{dx} + \frac{1}{\lambda}\frac{dB}{dy} - B\frac{d\frac{1}{\lambda}}{dy} = 0;$$

les deux premières de ces équations montrent que A ne contient pas y, et que B ne contient pas x; la troisième équation divisée par $\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$ peut s'écrire

$$\frac{d\lambda A}{dx} + \frac{d\lambda B}{dy} = 0.$$

Il existe donc une fonction z de x et de y, telle que

$$\lambda A = -\frac{dz}{dy}, \quad \lambda B = \frac{dz}{dx}.$$

On tire de là

$$A\frac{dz}{dx} + B\frac{dz}{dy} = 0$$

et

$$z = -\varphi\left(\int \frac{dx}{A} - \int \frac{dy}{B}\right),$$

φ étant une fonction arbitraire.

Posons

$$M = \int \frac{dx}{A}, \qquad N = -\int \frac{dy}{B},$$

$$M' = \frac{dM}{dx} = \frac{1}{A}, \quad N' = \frac{dN}{dy} = -\frac{1}{B};$$

M ne contient pas y, et N ne contient pas x; on aura

$$z = -\varphi(M+N),$$

$$\lambda = \frac{1}{B}\frac{dz}{dx} = M'N'\varphi'(M+N),$$

$$T = \frac{1}{2}M'N'x'y'\varphi'(M+N) = \frac{1}{2}\frac{dM}{dt}\frac{dN}{dt}\varphi'(M+N)$$

ou

$$T = \frac{2XY}{M'N'\varphi'(M+N)}.$$

Ainsi quand λ ou T auront la forme précédente, M étant une fonction quelconque de x et N de y, et φ' une fonction quelconque, le problème admettra pour intégrale du premier degré,

$$\alpha = AX + BY = \frac{X}{M'} - \frac{Y}{N'}$$

ou

$$\alpha = \left(\frac{dM}{dt} - \frac{dN}{dt}\right)\varphi'(M + N);$$

quant à la fonction des forces, elle sera donnée par l'équation

$$(\alpha, U) = 0,$$

laquelle se réduit à

$$A\frac{dU}{dx} + B\frac{dU}{dy} = 0;$$

ψ désignant une fonction arbitraire, on aura donc

$$U = \psi\left(\int\frac{dx}{A} - \int\frac{dx}{B}\right) = \psi(M + N).$$

Il faut remarquer que T, U et notre intégrale α sont exprimés en fonction de M et N, et de leurs dérivées par rapport au temps; nous pouvons donc prendre M et N pour variables indépendantes. Seulement il ne faut pas oublier que si on change de variables en posant

$$x = \xi + \eta\sqrt{-1} = f(M) = f(u + v\sqrt{-1}),$$

on devra prendre

$$y = \xi - \eta\sqrt{-1} = f_1(u - v\sqrt{-1}):$$

f_1 étant ce que devient la fonction f_1, quand on y change le signe de $\sqrt{-1}$. Si donc on prend pour variables M et N, et qu'on pose

$$M = u + v\sqrt{-1},$$

la seconde variable indépendante devra être

$$N = u - v\sqrt{-1}.$$

Les formules précédentes se transforment alors dans les suivantes :

$$T = \frac{1}{2}\varphi(2u)(u'^2 + v'^2),$$

$$\alpha = \varphi(2u)(2v'\sqrt{-1}),$$

$$U = \psi(2u),$$

ou bien

$$T = \frac{1}{2}\varphi(u)(u'^2 + v'^2), \quad ds^2 = \varphi(u)(du^2 + dv^2),$$

$$\alpha = \varphi(u)v', \qquad U = \psi(u).$$

Toutes les fois que T ou ds^2 auront les formes qui viennent d'être indiquées, l'intégrale α conviendra au problème, pourvu que la fonction des forces ne contienne que la variable u.

Il ne faut pas perdre de vue que les changements de variables que nous avons faits reviennent à poser, en désignant par f une fonction quelconque,

$$\xi + \eta\sqrt{-1} = f(u + v\sqrt{-1});$$

et pour être sûr d'avoir toutes les intégrales du premier degré, il faudra avoir pris pour f la fonction la plus générale qui puisse donner à T et à ds^2 les formes précédentes.

La relation

$$U = \psi(u)$$

indique que si l'on passe d'un point à un autre infiniment voisin et situé sur la même courbe $u =$ constante, U ne variera pas. Or, en désignant par ξ, η, ζ les coordonnées rectangulaires d'un point, on a

$$dU = \frac{dU}{d\xi}d\xi + \frac{dU}{d\eta}d\eta + \frac{dU}{d\zeta}d\zeta.$$

dU étant nul quand le déplacement $(d\xi, d\eta, d\zeta)$ se fait sur la courbe $u =$ constante, l'équation précédente, dans laquelle $\frac{dU}{d\xi}, \frac{dU}{d\eta}, \frac{dU}{d\zeta}$, sont les composantes rectangulaires de la force que sollicite le pont mobile, montre que cette force est normale au déplacement supposé, c'est-à-dire aux courbes $u =$ constante.

Nous avons vu que le problème du mouvement d'un point sur une surface ne pouvait admettre d'intégrale algébrique du premier degré que si l'on pouvait avoir sur cette surface

$$ds^2 = \varphi(u)(du^2 + dv^2);$$

or une pareille surface est toujours développable sur une surface de révolution.

Pour le faire voir, nous écrirons la valeur de ds^2 sous la forme suivante :

$$ds^2 = [\varphi(u)]^2 (du^2 + dv^2),$$

ce qui est bien permis, puisque φ désigne une fonction quelconque. De plus, pour bien fixer les idées, nous supposerons que nos paramètres u et v sont des nombres, c'est-à-dire des quantités du degré zéro.

Considérons maintenant une surface de révolution ayant pour axe l'axe des ξ et pour méridienne une courbe placée dans le plan des $\zeta\,\xi$ et qui sera déterminée par une équation entre ξ et ζ. Désignons par v l'angle d'un méridien quelconque avec un méridien fixe, le plan des $\xi\,\zeta$ par exemple, on aura sur la surface de révolution

$$ds^2 = \zeta^2 dv^2 + d\xi^2 \left[1 + \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2\right],$$

ζ sera, comme on l'a dit, une fonction de ξ que nous déterminerons de telle sorte qu'on ait

$$\zeta = \varphi(u),$$

en posant

$$du = \frac{d\xi}{\zeta}\sqrt{1 + \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2};$$

l'élimination de u entre ces deux équations donnerait l'équation en ξ et ζ de la méridienne de notre surface de révolution sur laquelle on aura comme sur la surface où se meut le point mobile

$$ds^2 = [\varphi(u)]^2 (du^2 + dv^2).$$

Si nous imaginons à la fois sur les deux surfaces deux points infiniment voisins répondant aux mêmes valeurs de u et v, la distance ds de ces deux points sera la même sur les deux surfaces ; par conséquent, si on suppose les deux surfaces découpées en triangles infiniment petits dont les sommets répondent aux mêmes valeurs de u et v, on pourra appliquer les deux surfaces l'une sur l'autre, sans les plier ni les étirer, en faisant coïncider les sommets corespondants de tous les triangles infiniment petits. Dans cette application des deux surfaces l'une sur l'autre, les courbes qui admettent les mêmes valeurs de u ou de v viendront coïncider.

L'intégrale

$$\alpha = [\varphi(u)]^2 v'$$

conviendra donc à toutes les surfaces développables l'une sur l'autre et pour lesquelles on aura

$$ds^2 = [\varphi(u)]^2 (du^2 + dv^2),$$

pourvu qu'on ait

$$U = \psi(u),$$

Cette intégrale conviendra en particulier à la surface de révolution sur laquelle toutes les autres peuvent s'appliquer; mais pour qu'elle convienne, il faudra que la force qui sollicite le point mobile soit normale aux courbes $u =$ constante, lesquelles sont alors les parallèles. Ainsi la force devra rencontrer l'axe de la surface de révolution, et l'intégrale

$$\alpha = [\varphi(u)]^2 v' = \zeta^2 v'$$

deviendra, comme on devait s'y attendre, celle des aires en projection sur un plan perpendiculaire à l'axe de révolution.

La même intégrale s'appliquera au cas d'un point mobile sur toute surface développable sur la surface de révolution, elle sera représentée par la même relation analytique, mais elle n'aura pas nécessairement la même signification mécanique, comme le montrera l'exemple suivant.

Considérons l'hélicoïde gauche à plan directeur dont l'équation est

$$\frac{\eta}{\zeta} = \operatorname{tang} \frac{\xi}{k},$$

k étant une constante linéaire. Pour réduire nos variables indépendantes à deux, posons

$$\xi = k\theta, \quad \zeta = \rho \cos\theta, \quad \eta = \rho \sin\theta,$$

on aura

$$ds^2 = k^2 d\theta^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 = (\rho^2 + k^2)\left(\frac{d\rho^2}{\rho^2 + k^2} + d\theta^2\right).$$

Cette surface hélicoïdale est donc développable sur une surface de révolution dont nous allons chercher la méridienne; l'équation de cette méridienne s'obtiendra, d'après ce qui vient d'être dit, de la manière suivante : on posera

$$\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 + k^2}} = du,$$

d'où l'on tire

$$\rho = \frac{k}{2}\left(e^{u+c} - e^{-(u+c)}\right),$$

ou

$$\rho = \frac{k}{2}\left(e^{u} - e^{-u}\right),$$

car on peut supposer la constante c nulle, cela revient à prendre pour variable $u + c$.

On tire de là

$$\rho^2 + k^2 = \left(\frac{d\rho}{du}\right)^2 = \left[\frac{k}{2}\left(e^{u} + e^{-u}\right)\right]^2,$$

d'où

$$ds^2 = \left[\frac{k}{2}\left(e^{u} + e^{-u}\right)\right]^2 (du^2 + d\theta^2).$$

L'équation en ξ et ζ de la méridienne résultera de l'élimination de u entre les deux relations

$$\zeta = \frac{k}{2}\left(e^{u} + e^{-u}\right),$$

$$du = \frac{d\xi}{\zeta}\sqrt{1 + \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2};$$

on tire de là

$$\frac{k^2}{4}\left(e^{u} + e^{-u}\right)^2 \left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 = 1 + \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2 = 1 + \frac{k^2}{4}\left(e^{u} - e^{-u}\right)^2 \left(\frac{du}{d\xi}\right)^2,$$

d'où

$$k^2 \left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 = 1;$$

et

$$u = \pm \frac{\xi}{k} + c,$$

ou simplement

$$u = \frac{\xi}{k}.$$

En effet, supprimer la constante c revient à transporter l'axe des ζ parallèlement à lui-même, et supprimer le signe $\pm$ revient à compter les ξ positifs dans un sens ou dans l'autre.

En substituant la valeur de u dans celle de ζ, il vient pour équation de la méridienne

$$\zeta = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{\xi}{k}} + e^{-\frac{\xi}{k}}\right),$$

c'est donc une chaînette symétrique par rapport à l'axe des ζ, et engendrant par sa rotation autour de l'axe des ξ une surface à courbures opposées, comme on devait s'y attendre, puisque l'hélicoïde a lui-même ses courbures opposées.

L'équation

$$\theta = \text{const.}$$

représente les génératrices droites sur l'hélicoïde et les méridiens sur la surface de révolution.

L'équation

$$u = \text{const.}$$

représente les hélices concentriques à l'axe dans l'hélicoïde et les parallèles de la surface de révolution. Dans le cas particulier où u est nul, ρ et ξ sont aussi nuls, en sorte qu'on a l'axe de l'hélicoïde et l'équateur de la surface de révolution.

Ainsi dans le développement de la surface hélicoïdale sur la surface de révolution, les génératrices droites, les hélices concentriques et l'axe de la première surface s'appliquent respectivement sur les méridiens, les parallèles et l'équateur de la seconde.

L'intégrale du premier degré que peut admettre le mouvement d'un point mobile sur les deux surfaces peut s'exprimer par la même équation

$$\alpha = \zeta^2 \theta',$$

ou pour l'hélicoïde

$$\alpha = (\rho^2 + k^2)\theta'.$$

Cette intégrale n'est donc pas celle des aires pour l'hélicoïde. Pour avoir une droite qui décrivît en projection sur un plan perpendiculaire à l'axe une aire proportionnelle au temps, il faudrait supposer à cette droite une longueur égale à $\sqrt{\rho^2+k^2}$ et non plus au rayon vecteur ρ du point mobile, ou bien encore supposer ce rayon vecteur prolongé en arrière de l'axe d'une longueur constate k, et ce serait la somme des aires décrites par ces deux parties du rayon vecteur en projection sur un plan perpendiculaire à l'axe qui serait proportionnelle au temps.

Pour que l'intégrale précédente convienne, il faut qu'on ait

$$U = \psi(u) \quad \text{ou} \quad U = \psi(\rho),$$

c'est-à-dire que la force qui sollicite le point mobile soit normale aux hélices concentriques, par suite que sa projection sur le plan tangent à la surface rencontre l'axe.

Supposons maintenant que la surface sur laquelle le point mobile est assujetti à rester, soit plane. On a alors, en désignant par ξ et η les coordonnées rectangulaires de ce point et par x et y les imaginaires conjuguées $\xi+\eta\sqrt{-1}, \xi-\eta\sqrt{-1}$,

$$T = \frac{1}{2} x' y'.$$

Mais pour être sûr d'avoir l'intégrale du premier degré la plus générale, il faut, d'après ce qu'on a vu, mettre de la manière la plus générale possible T sous la forme

$$T = \frac{1}{2} \varphi(M+N) M' N' x' y',$$

M étant une fonction de x seulement et M′ sa dérivée par rapport à x, N étant une fonction de y seulement et N′ sa dérivée par rapport à y. Il faut donc résoudre l'équation

$$\varphi(M+N) M' N' = 1.$$

Différentions-la par rapport à x, puis à y, nous aurons

$$N'[\varphi'(M+N) M'^2 + \varphi(M+N) M''] = 0,$$

$$M'[\varphi'(M+N) N'^2 + \varphi(M+N) N''] = 0,$$

d'où

$$\frac{M''}{M'^2} = \frac{N''}{N'^2} = -a,$$

a étant une constante, puisque M′ et M″ ne contiennent que x et que N′ et N″ ne contiennent que y. Des relations précédentes on tire

$$\frac{1}{M'} = ax - b,$$

puis

$$a(M + c) = \log \text{hyp.}(ax - b),$$
$$ax - b = e^{a(M+c)};$$

on aurait de même

$$ay - b' = e^{a(N+c')}.$$

On peut supposer $a = 1$, cela revient à prendre pour variables aM et aN. Posons maintenant

$$M = u + v\sqrt{-1}, \quad b = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad c = \gamma + \delta\sqrt{-1};$$

il vient

$$x = \xi + \eta\sqrt{-1} = \alpha + \beta\sqrt{-1} + e^{u+\gamma+(v+\delta)\sqrt{-1}},$$

u, v, α, β, γ, δ étant supposés réels.

La valeur de y ou de $\xi - \eta\sqrt{-1}$ devant se déduire de celle de x, en changeant le signe de $\sqrt{-1}$, on voit qu'il faut prendre

$$b' = \alpha - \beta\sqrt{-1}, \quad N = u - v\sqrt{-1}, \quad c' = \gamma - \delta\sqrt{-1}.$$

En posant $e^{\gamma+u} = r$, on a

$$\xi + \eta\sqrt{-1} = r[\cos(v + \delta) + \sqrt{-1}\sin(v + \delta)] + \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

d'où

$$\xi = \alpha + r\cos(v + \delta),$$
$$\eta = \beta + r\sin(v + \delta).$$

Notre changement de variables revient donc à transporter l'origine en un point quelconque (α, β), à prendre ensuite de nouveaux axes faisant avec les premiers un angle quelconque δ, et enfin à substituer des coordonnées polaires aux coordonnées rectangulaires.

Dans le cas présent $U = \psi(M + N)$ devient une fonction de u ou de r seulement, c'est-à-dire que la force passe par un point fixe quelconque (α, β), et notre intégrale

$$\text{const.} = \varphi(M + N)\left(\frac{dM}{dt} - \frac{dN}{dt}\right)$$

devient

$$\text{const.} = r^2 v',$$

puisqu'on a

$$\frac{dM}{dt} - \frac{dN}{dt} = 2v'\sqrt{-1},$$

$$T = \frac{1}{2} e^{2(\gamma+u)}(u'^2 + v'^2),$$

et par suite

$$\varphi(M + N) = e^{2(\gamma+u)} = r^2.$$

L'intégrale que nous trouvons est donc celle des aires, elle peut s'écrire

$$\text{const.} = (\xi - \alpha)\eta' - (\eta - \beta)\xi',$$

le centre des aires étant le point (α, β).

Comme cas particuliers, si α devient infini, on a

$$\text{const.} = \eta',$$

et la fraction

$$U = \psi(r) = \psi[(\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2]$$

se réduit à

$$U = \psi(\xi);$$

si c'est β qui devient infini, on a

$$\text{const.} = \xi',$$

avec

$$U = \psi(\eta).$$

Enfin, si α et β deviennent tous deux infinis en conservant un certain rapport entre eux, on peut avoir l'intégrale suivante, en désignant par α' et β' des constantes,

$$\text{const.} = \alpha'\eta' - \beta'\xi'.$$

Dans ce cas la fonction U doit se réduire à une constante, ou, comme on le voit facilement, a une fonction de $\alpha'\xi + \beta'\eta$.

Le cas où le point se meut dans un plan peut d'ailleurs se traiter directement d'une manière très-simple. En effet, toute intégrale du premier degré appartient au problème dérivé. Or nous savons intégrer ce dernier problème, qui ne peut admettre évidemment plus de trois intégrales distinctes indépendantes du temps, et en formant par la combinaison de ces trois intégrales l'expression la plus générale du premier degré, nous aurons l'intégrale la plus générale du premier degré pouvant appartenir au problème du mouvement d'un point dans un plan.

Or le problème dérivé admet les trois intégrale distinctes

$$\text{const.} = \xi\eta' - \eta\xi', \quad \text{const.} = \xi', \quad \text{const.} = \eta';$$

l'intégrale cherchée est donc nécessairement, en désignant par A, B, C des coefficients constants,

$$\alpha = A(\xi\eta' - \eta\xi') + B\xi' + C\eta'.$$

La fonction des forces sera donnée par l'équation

$$(B - A\eta)\frac{dU}{d\xi} + (C + A\xi)\frac{dU}{d\eta} = 0.$$

Si A est nul, l'intégrale se réduit à

$$\alpha = B\xi' + C\eta',$$

et l'on a

$$B\frac{dU}{d\xi} + C\frac{dU}{d\eta} = 0,$$

d'où

$$U = \psi\left(\frac{\xi}{B} - \frac{\eta}{C}\right),$$

ou bien

$$U = \psi(B\eta - C\xi).$$

Si A n'est pas nul, on peut, en déplaçant l'origine, réduire l'intégrale à la forme

$$\alpha = (\xi\eta' - \eta\xi'),$$

c'est-à-dire à l'intégrale des aires prises autour du point où l'origine a été transportée, l'équation en U devient alors

$$\eta \frac{dU}{d\xi} - \xi \frac{dU}{d\eta} = 0,$$

d'où on tire

$$U = \psi(\xi^2 + \eta^2).$$

Cherchons enfin les intégrales du premier degré que peut admettre le problème du mouvement d'un point libre dans l'espace.

Pour trouver la forme de ces intégrales, il suffit de considérer le problème dérivé; or les quantités $\eta\zeta' - \zeta\eta'$, $\zeta\xi' - \xi\zeta'$, $\xi\eta' - \eta\xi'$, ξ', η', ζ' égalées à des constantes, donnent six intégrales du problème dérivé; l'une de ces intégrales rentre nécessairement dans les cinq autres, comme on le vérifie d'ailleurs facilement. Toute intégrale du premier degré devra donc être comprise dans la forme

$$\alpha = A(\eta\zeta' - \zeta\eta') + B(\zeta\xi' - \xi\zeta') + C(\xi\eta' - \eta\xi') + D\xi' + E\eta' + F\zeta'.$$

Il n'est pas possible, en changeant l'origine des coordonnées, de faire disparaître les trois derniers termes de cette équation, car on aurait pour déterminer les coordonnées de la nouvelle origine des équations incompatibles; mais la somme des trois premiers termes de notre intégrale α représente à un facteur constant près l'aire décrite par le point mobile en projection sur le plan dont les coefficients angulaires sont proportionnels à A, B, C, et si, en changeant de coordonnées, on prend ce plan pour plan des $\xi\eta$ par exemple, l'intégrale deviendra de la forme

$$\alpha = A(\xi\eta' - \eta\xi') + D\xi' + E\eta' + F\zeta'.$$

Si A n'est pas nul, en déplaçant ensuite l'origine dans le nouveau plan des $\xi\eta$, l'intégrale α pourra se ramener à la forme

$$\alpha = \xi\eta' - \eta\xi' + k\zeta'.$$

La fonction des forces qui peut convenir à une pareille intégrale sera donnée par l'équation

$$-\eta\frac{dU}{d\xi}+\xi\frac{dU}{d\eta}+k\frac{dU}{d\zeta}=0;$$

ce qui montre que le moment de la force qui sollicite le point mobile, par rapport à l'axe des ζ, doit être proportionnel à la composante de cette force parallèle au même axe.

Il faudra intégrer, pour avoir U, le système d'équations simultanées

$$-\frac{d\xi}{\eta}=\frac{d\eta}{\xi}=\frac{d\zeta}{k}=\frac{dU}{0},$$

on a immédiatement

$$U=\text{const},\quad \xi^2+\eta^2=\text{const},$$

puis

$$\frac{\xi\,d\eta-\eta\,d\xi}{\xi^2+\eta^2}=\frac{d\zeta}{k},$$

d'où

$$\zeta-k\operatorname{arc\,tang}\frac{\eta}{\xi}=\text{const}.$$

On aura donc pour U

$$U=\psi\left(\xi^2+\eta^2,\quad \zeta-k\operatorname{arc\,tang}\frac{\eta}{\xi}\right)\cdot$$

Si k était nul, l'intégrale se réduirait à celle des aires en projection sur le plan des $\xi\eta$; et on aurait

$$\xi\frac{dU}{d\eta}-\eta\frac{dU}{d\xi}=0,$$

et la force rencontrerait l'axe des ζ.

Il reste à examiner le cas particulier où l'intégrale α se réduirait à la forme

$$\alpha=D\xi'+E\eta'+F\zeta'.$$

En changeant la direction des axes et prenant pour nouvel axe des ξ la droite qui fait, avec les anciens axes, les angles dont les cosinus sont proportionnels à D, E, F, l'intégrale α se réduit à

$$\alpha = \xi'.$$

La fonction des forces U est donnée par l'équation

$$\frac{dU}{d\xi} = 0,$$

d'où

$$U = \psi(\eta, \quad \zeta).$$

Ce qui montre que la force est parallèle à un plan fixe, celui des $\eta\ \zeta$.

III.

Intégrales algébriques du second degré.

Soit toujours l'équation des forces vives

$$H = U - T;$$

toute autre intégrale algébrique du second degré sera nécessairement de même forme

$$\alpha = U_1 - T_1,$$

U_1 étant une fonction des variables indépendantes q, et T_1 une fonction des variables q et de leurs conjuguées p, homogène et du second degré par rapport à ces dernières.

Il ne saurait entrer dans α de termes du premier degré en $p_1, p_2, \ldots, p_n$, ou plutôt si ces termes existaient, en égalant séparément leur somme à une constante, on aurait une autre intégrale du problème; il n'y a donc pas lieu de s'en inquiéter.

T_1 étant la somme des termes de degré le plus élevé par rapport aux variables p dans l'intégrale α, on obtiendra, en l'égalant à une constante, une intégrale du problème dérivé; on a donc

$$(T, T_1) = 0; \tag{1}$$

on aura aussi

$$(\alpha, H) = 0. \tag{2}$$

En remarquant que U ne contient pas les variables conjuguées p, et qu'il en est de même de U_1, l'équation précédente devient

$$o = (\alpha, H) = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\frac{d(U_1 - T_1)}{dp_i} \frac{d(U - T)}{dq_i} - \frac{d(U_1 - T_1)}{dq_i} \frac{d(U - T)}{dp_i} \right],$$

$$= (T_1 T) - \sum \left[\frac{dT_1}{dp_i} \frac{dU}{dq_i} - \frac{dU_1}{dq_i} \frac{dT}{dp_i} \right],$$

d'où l'on conclut, en ayant égard aux relations (1) et (2),

$$(3) \qquad \sum \left[\frac{dT_1}{dp_i} \frac{dU}{dq_i} - \frac{dT}{dp_i} \frac{dU_1}{dq_i} \right] = o.$$

En intégrant l'équation (1) on déterminera T_1 quand T sera donné, et la discussion indiquera à quelles conditions T devra satisfaire pour qu'il y ait une solution pour T_1 qui est supposé homogène et du second degré par rapport aux variables p.

Quand T et T_1 seront ainsi déterminés, l'équation (3) discutée indiquera les conditions auxquelles U devra satisfaire, et la valeur de U_1 quand ces conditions seront remplies.

On peut résoudre l'équation (3) d'une manière générale en opérant comme il suit : on a, puisque T est homogène et du second degré par rapport aux variables p :

$$2T = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{dT}{dp_i} p_i,$$

$$\frac{dT}{dp_i} = \frac{d^2T}{dp_i\, dp_1} p_1 + \frac{d^2T}{dp_i\, dp_2} p_2 + \ldots + \frac{d^2T}{dp_i\, dp_n} p_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{d^2T}{dp_i\, dp_k} p_k.$$

On aura de même

$$2T_1 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{dT_1}{dp_i} p_i,$$

et

$$\frac{dT_1}{dp_i} = \frac{d^2T_1}{dp_i\, dp_1} p_1 + \ldots + \frac{d^2T_1}{dp_i\, dp_n} p_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{d^2T}{dp_i\, dp_k} p_k.$$

Les coefficients $\frac{dT}{dp_i\, dp_k}$ et $\frac{dT_1}{dp_i\, dp_k}$ sont indépendants des variables p; on substituera les valeurs précédentes de $\frac{dT}{dp_i}$ et $\frac{dT_1}{dp_i}$ dans l'équation (3), et comme cette équation doit être identique, on devra égaler séparément à zéro les coefficients des n variables p; le coefficient de p_k dans l'équation (3) donnera

$$o = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\frac{dU}{dq_i} \frac{d^2 T_1}{dp_i\, dp_k} - \frac{dU_1}{dq_i} \frac{d^2 T}{dp_i\, dp_k} \right];$$

on aura n équations de cette forme, lesquelles permettront d'exprimer les $\frac{dU_1}{dq_i}$ en fonction des $\frac{dU}{dq_i}$, ou inversement.

Posons

$$\frac{dT}{dp_i} = P_i, \quad \frac{dT_1}{dp_i} = \Pi_i;$$

l'équation précédente deviendra

$$o = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\frac{dU}{dq_i} \frac{d\Pi_k}{dp_i} - \frac{dU_1}{dq_i} \frac{dP_k}{dp_i} \right].$$

Si on remarque qu'on a en général

$$\frac{dP_i}{dp_k} = \frac{dP_k}{dp_i}, \quad \frac{d\Pi_i}{dp_k} = \frac{d\Pi_k}{dp_i},$$

on aura, pour déterminer les $\frac{dU_1}{dq_i}$ en fonction des $\frac{dU}{dq_i}$, les n équations suivantes :

$$\frac{dP_1}{dp_1}\frac{dU_1}{dq_1} + \frac{dP_2}{dp_1}\frac{dU_1}{dq_2} + \ldots + \frac{dP_n}{dp_1}\frac{dU_1}{dq_n} = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\frac{d\Pi_i}{dp_1}\frac{dU}{dq_i} \right],$$

$$\frac{dP_1}{dp_2}\frac{dU_1}{dq_1} + \frac{dP_2}{dp_2}\frac{dU_1}{dq_2} + \ldots + \frac{dP_n}{dp_2}\frac{dU_1}{dq_n} = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\frac{d\Pi_i}{dp_2}\frac{dU}{dq_i} \right],$$

. . . .

Si on tire de ces équations les valeurs des $\frac{dU_1}{dq_i}$, le dénominateur commun de ces valeurs sera, en adoptant une notation connue pour le déterminant d'un système de fonctions,

$$\frac{d(P_1, P_2, \ldots, P_n)}{d(p_2, p_1, \ldots, p_n)}.$$

Pour avoir les numérateurs des mêmes valeurs, il faudra remplacer dans le dénominateur les coefficients de chaque variable par les seconds membres des équations ; on aura ainsi

$$\frac{dU_1}{dq_1} = \frac{\frac{dU}{dq_1}\frac{d(\Pi_1, P_2, \ldots, P_n)}{d(p_1, p_2, \ldots, p_n)} + \frac{dU}{dq_2}\frac{d(\Pi_2, P_2, \ldots, P_n)}{d(p_1, p_2, \ldots, p_n)} + \ldots}{\frac{d(P_1, P_2, \ldots, P_n)}{d(p_1, p_2, \ldots, p_n)}}.$$

Si on considère $P_1, P_2, \ldots, P_n$ comme variables, au lieu de $p_1, p_2, \ldots, p_n$, on aura, d'après un théorème démontré par M. Bertrand,

$$\frac{\frac{d(\Pi_1, P_2, \ldots, P_n)}{d(p_1, p_2, \ldots, p_n)}}{\frac{d(P_1, P_2, \ldots, P_n)}{d(p_1, p_2, \ldots, p_n)}} = \frac{d(\Pi_1, P_2, P_3, \ldots, P_n)}{d(P_1, P_2, \ldots, P_n)} = \frac{d\Pi_1}{dP_1}.$$

On trouve ainsi, pour déterminer les valeurs des $\frac{dU_1}{dq_i}$, les n équations suivantes :

$$\frac{dU_1}{dq_1} = \frac{d\Pi_1}{dP_1}\frac{dU}{dq_1} + \frac{d\Pi_2}{dP_1}\frac{dU}{dq_2} + \ldots + \frac{d\Pi_2}{dP_1}\frac{dU}{dq_n},$$

$$\frac{dU_1}{dq_2} = \frac{d\Pi_1}{dP_2}\frac{dU}{dq_1} + \frac{d\Pi_2}{dP_2}\frac{dU}{dq_2} + \ldots + \frac{d\Pi_n}{dP_2}\frac{dU}{dq_n}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dU_1}{dq_n} = \frac{d\Pi_1}{dP_n}\frac{dU}{dq_1} + \frac{d\Pi_2}{dP_n}\frac{dU}{dq_2} + \ldots + \frac{d\Pi_n}{dP_n}\frac{dU}{dq_n}.$$

Les variables $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ne sont autre chose que les dérivées par rapport au temps $q_1', q'_2, \ldots, q_n'$ des variables principales. On exprimera $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$, en $P_1, P_2, \ldots, P_n$ en remplaçant dans ces valeurs $p_1, p_2, \ldots, p_n$, par $\frac{dT}{dq'_1}, \ldots, \frac{dT}{dq'_n}$, et on formera ensuite facilement les valeurs de $\frac{d\Pi_1}{dq'_1}$, etc., ou $\frac{d\Pi_1}{dP_1}$, etc., lesquelles valeurs ne contiendront plus que les variables principales $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Pour savoir si le problème admet une solution, il faudra chercher si les valeurs des $\frac{dU_1}{dq_i}$ tirées des équations précédentes peuvent être les dérivées partielles d'une même fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Au lieu de résoudre nos équations par rapport aux $\frac{dU_1}{dq_i}$, on pourrait, s'il y avait avantage à le faire, les résoudre par rapport aux $\frac{dU}{dq_i}$; en observant que T et T_1 sont deux fonctions homogènes et du second degré par rapport aux variables conjuguées $p_1, p_2, \ldots, p_n$, et remarquant la forme de l'équation (3), il devient évident qu'on aurait

$$\frac{dU}{dq_1} = \frac{dP_1}{d\Pi_1}\frac{dU_1}{dq_1} + \frac{dP_2}{d\Pi_1}\frac{dU_1}{dq_2} + \ldots + \frac{dP_n}{d\Pi_1}\frac{dU_1}{dq_n},$$

$$\frac{dU}{dq_2} = \frac{dP_1}{d\Pi_2}\frac{dU_1}{dq_1} + \frac{dP_2}{d\Pi_2}\frac{dU_1}{dq_2} + \ldots + \frac{dP_n}{d\Pi_2}\frac{dU_1}{dq_n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dU}{dq_n} = \frac{dP_1}{d\Pi_n}\frac{dU_1}{dq_1} + \frac{dP_2}{d\Pi_n}\frac{dU_1}{dq_2} + \ldots + \frac{dP_n}{d\Pi_n}\frac{dU_1}{dq_n}.$$

Mouvement d'un point assujetti à rester sur une surface donnée.

Nous allons appliquer à ce cas les théories précédentes.

Soient toujours

$$H = U - T, \quad \alpha = U_1 - T_1,$$

l'équation des forces vives et l'intégrale cherchée.

Nous prendrons pour variables, comme par le passé, les paramètres ξ et η de deux familles de courbes orthogonales tracées sur la surface et choisies de telle sorte qu'on ait

$$ds^2 = \lambda(d\xi^2 + d\eta^2), \quad T = \frac{1}{2}\lambda(\xi'^2 + \eta'^2).$$

Posant ensuite

$$\xi + \eta\sqrt{-1} = x, \quad \xi - \eta\sqrt{-1} = y,$$

il viendra

$$ds^2 = \lambda\, dx\, dy, \quad T = \frac{1}{2}\lambda x' y';$$

posant encore, pour introduire les variables conjuguées de x et y,

$$X=\frac{dT}{dx'}=\frac{1}{2}\lambda y', \quad Y=\frac{dT}{dy'}=\frac{1}{2}\lambda x',$$

on aura

$$T=\frac{2}{\lambda}XY;$$

T_1 sera nécessairement de la forme

$$T_1=AX^2-2BXY+CY^2,$$

A, B, C étant des fonctions de x et y qu'il s'agit de déterminer par l'équation

$$(T_1, T)=0$$

ou

$$0=2(AX-BY)XY\frac{d\frac{1}{\lambda}}{dx}+2(-BX+CY)XY\frac{d\frac{1}{\lambda}}{dy}$$
$$-\frac{1}{\lambda}Y\left(\frac{dA}{dx}X^2-2\frac{dB}{dx}XY+\frac{dC}{dx}Y^2\right)-\frac{1}{\lambda}X\left(\frac{dA}{dy}X^2-2\frac{dB}{dy}XY+\frac{dC}{dy}Y^2\right).$$

Cette équation devant être identique, elle se décompose dans les quatre suivantes :

$$\frac{dA}{dy}=0, \quad \frac{dC}{dx}=0,$$

$$2A\frac{d\frac{1}{\lambda}}{dx}-\frac{1}{\lambda}\frac{dA}{dx}=2\left(B\frac{d\frac{1}{\lambda}}{dy}-\frac{1}{\lambda}\frac{dB}{dy}\right), \quad 2C\frac{d\frac{1}{\lambda}}{dy}-\frac{1}{\lambda}\frac{dC}{dy}=2\left(B\frac{d\frac{1}{\lambda}}{dx}-\frac{1}{\lambda}\frac{dB}{dx}\right).$$

Les deux premières de ces équations montrent que A ne contient pas x et que C ne contient pas y. Partant de là, les deux dernières peuvent s'écrire, en changeant les signes et divisant par $\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$,

$$\sqrt{A}\frac{d.\lambda\sqrt{A}}{dx}=\frac{d.\lambda B}{dy}, \quad \sqrt{C}\frac{d.\lambda\sqrt{C}}{dy}=\frac{d\lambda B}{dx}.$$

Posons maintenant

$$M=\int\frac{dx}{\sqrt{A}}, \quad N=\int\frac{dy}{\sqrt{C}};$$

les deux équations précédentes se transforment alors dans les suivantes :

$$\frac{d.\lambda\sqrt{A}}{dM}=\frac{d.\lambda B}{dy},\quad \frac{d\lambda\sqrt{C}}{dN}=\frac{d.\lambda B}{dx}.$$

La première permet de poser, en désignant par z une fonction de x et de y ou de M et de N,

$$\lambda\sqrt{A}=\frac{dz}{dy},\quad \lambda B=\frac{dz}{dM};$$

la seconde devient alors, en remarquant que $\lambda\sqrt{C}=\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}}\frac{dz}{dy}=\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{dz}{dN}$,

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{d^2z}{dN^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dM}\right),$$

ou

$$\frac{d^2z}{dN^2}=\frac{\frac{d.}{dx}}{\sqrt{A}}\left(\frac{dz}{dM}\right)=\frac{d^2z}{dM^2}.$$

On tire de là, en désignant par F et f deux fonctions arbitraires,

$$z=F(M+N)+f(M-N),$$

d'où

$$\lambda B=\frac{dz}{dM}=F'(M+N)+f'(M-N),$$

et, en désignant par M' la dérivée de M par rapport à x, par N' la dérivée de N par rapport à y,

$$\lambda\sqrt{A}=\frac{dz}{dy}=[F'(M+N)-f'(M-N)]N';$$

comme

$$\sqrt{A}=\frac{1}{M'},\quad \sqrt{C}=\frac{1}{N'},$$

on aura

$$\lambda = [F'(M+N) - f'(M-N)]M'N',$$

$$B = \frac{F'(M+N) + f'(M-N)}{M'N'[F'(M+N) - f'(M-N)]}.$$

Ainsi quand on aura (en supprimant les accents inutiles de F et f)

$$ds^2 = [F(M+N) - f(M-N]M'N'dx\,dy = [F(M+N) - f(M-N]\,dM\,dN,$$

M étant une fonction de x seulement et N une fonction de y seulement, ou bien

$$T = \frac{1}{2}[F(M+N) - f(M-N)]M'N'x'y' = \frac{1}{2}[F(M+N) - f(M-N)]\frac{dM}{dt}\frac{dN}{dt},$$

le problème pourra, si la fonction des forces a une forme convenable, admettre une intégrale algébrique du second degré autre que celle des forces vives et dans laquelle le terme T_1, homogène et du second degré par rapport aux variables conjuguées, aura pour expression

$$T_1 = \frac{X^2}{M'^2} - 2\left[\frac{F(M+N) + f(M-N)}{F(M+N) - f(M-N)}\right]\frac{XY}{M'N'} + \frac{Y^2}{N'^2}.$$

En remarquant que l'on a

$$\frac{X}{M'} = \frac{1}{2}[F(M+N) - f(M-N)]N'y', \quad \frac{Y}{N'} = \frac{1}{2}[F(M+N) - f(M-N)]M'x',$$

et que

$$M'x' = \frac{dM}{dt}, \quad N'y' = \frac{dN}{dt},$$

il vient

$$4T_1 = [F(M+N) - f(M-N)]\left\{[F(M+N) - f(M-N)]\left[\left(\frac{dM}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dN}{dt}\right)^2\right]\right.$$
$$\left. - 2[F(M+N) + f(M-N)]\frac{dM}{dt}\frac{dN}{dt}\right\}.$$

Pour avoir U et U_1, il faut résoudre l'équation (3) du présent paragraphe.

Elle devient, dans le cas que nous examinons,

$$o = \frac{dT_1}{dX}\frac{dU}{dx} + \frac{dT_1}{dY}\frac{dU}{dy} - \frac{dT}{dX}\frac{dU_1}{dx} - \frac{dT}{dY}\frac{dU_1}{dy},$$

c'est-à-dire

$$\frac{dU}{dx}(AX - BY) + \frac{dU}{dy}(-BX + CY) - \frac{1}{\lambda}Y\frac{dU_1}{dx} - \frac{1}{\lambda}X\frac{dU_1}{dy} = o.$$

Cette équation, qui doit être une identité, se décompose en deux :

$$\frac{dU_1}{dx} = \lambda\left(-B\frac{dU}{dx} + C\frac{dU}{dy}\right),$$

$$\frac{dU_1}{dy} = \lambda\left(A\frac{dU}{dx} - B\frac{dU}{dy}\right).$$

Pour abréger l'écriture, désignons simplement par F et f les fonctions $F(M+N)$ et $f(M-N)$ et par F' et f' leurs dérivées par rapport à $M+N$ ou $M-N$.

Les équations précédentes pourront s'écrire

$$\frac{dU_1}{dx} = -(F+f)\frac{dU}{dx} + (F-f)\frac{M'}{N'}\frac{dU}{dy},$$

$$\frac{dU_1}{dy} = (F-f)\frac{N'}{M'} - (F+f)\frac{dU}{dy},$$

ou bien, en divisant par $M'N'$ et remarquant que $dM = M'dx$, $dN = N'dy$,

$$\frac{dU_1}{dM} = -(F+f)\frac{dU}{dM} + (F-f)\frac{dU}{dN},$$

$$\frac{dU_1}{dN} = (F-f)\frac{dU}{dM} - (F+f)\frac{dU}{dN},$$

d'où

$$\frac{dU_1}{dM} + \frac{dU_1}{dN} = -2f\left(\frac{dU}{dM} + \frac{dU}{dN}\right),$$

$$\frac{dU_1}{dM} - \frac{dU_1}{dN} = -2F\left(\frac{dU}{dM} - \frac{dU}{dN}\right).$$

Si dans ces deux équations on fait passer tous les termes dans le premier membre, qu'on ajoute et qu'on retranche dans la première $2Uf'$, dans la deuxième $2\,\mathrm{UF}'$, elles pourront s'écrire

$$\frac{d(\mathrm{U}_1 + 2f\mathrm{U})}{d\mathrm{M}} + \frac{d(\mathrm{U}_1 + 2f\mathrm{U})}{d\mathrm{N}} = 0,$$

$$\frac{d(\mathrm{U}_1 + 2\mathrm{FU})}{d\mathrm{M}} - \frac{d(\mathrm{U}_1 + 2\mathrm{FU})}{d\mathrm{N}} = 0.$$

En désignant par φ et ψ deux fonctions arbitraires, on aura donc

$$\mathrm{U}_1 + 2f\mathrm{U} = \psi(\mathrm{M} - \mathrm{N}),$$

$$\mathrm{U}_1 + 2\,\mathrm{FU} = \varphi(\mathrm{M} + \mathrm{N}),$$

d'où

$$\mathrm{U} = \frac{1}{2}\,\frac{\varphi(\mathrm{M}+\mathrm{N}) - \psi(\mathrm{M}-\mathrm{N})}{\mathrm{F}(\mathrm{M}+\mathrm{N}) - f(\mathrm{M}-\mathrm{N})},$$

$$\mathrm{U}_1 = \frac{\psi(\mathrm{M}-\mathrm{N})\,\mathrm{F}(\mathrm{M}+\mathrm{N}) - \varphi(\mathrm{M}+\mathrm{N})\,f(\mathrm{M}-\mathrm{N})}{\mathrm{F}(\mathrm{M}+\mathrm{N}) - f(\mathrm{M}-\mathrm{N})}.$$

Au moyen de ces valeurs l'intégrale des forces vives $\mathrm{H} = \mathrm{U} - \mathrm{T}$ devient

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\varphi(\mathrm{M}+\mathrm{N}) - \psi(\mathrm{M}-\mathrm{N})}{\mathrm{F}(\mathrm{M}+\mathrm{N}) - f(\mathrm{M}-\mathrm{N})} - [\mathrm{F}(\mathrm{M}+\mathrm{N}) - f(\mathrm{M}-\mathrm{N})]\,\frac{d\mathrm{M}}{dt}\,\frac{d\mathrm{N}}{dt}\right\},$$

et l'autre intégrale du second degré $\alpha = \mathrm{U}_1 - \mathrm{T}_1$ devient

$$\alpha = \frac{\psi(\mathrm{M}-\mathrm{N})\,\mathrm{F}(\mathrm{M}+\mathrm{N}) - \varphi(\mathrm{M}+\mathrm{N})\,f(\mathrm{M}-\mathrm{N})}{\mathrm{F}(\mathrm{M}+\mathrm{N}) - f(\mathrm{M}-\mathrm{N})} - \frac{1}{4}[\mathrm{F}(\mathrm{M}+\mathrm{N}) - f(\mathrm{M}-\mathrm{N})]$$

$$\times\left\{[\mathrm{F}(\mathrm{M}+\mathrm{N}) - f(\mathrm{M}-\mathrm{N})]'\left[\left(\frac{d\mathrm{M}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{N}}{dt}\right)^2\right]\right.$$

$$\left. - 2\,[\mathrm{F}(\mathrm{M}+\mathrm{N}) + f(\mathrm{M}-\mathrm{N})]\,\frac{d\mathrm{M}}{dt}\,\frac{d\mathrm{N}}{dt}\right\}.$$

Ces deux formules sont exprimées en fonction seulement de M et de N et de leurs dérivées par rapport au temps. Nous pouvons donc considérer M et N comme des variables indépendantes. Posons

$$\mathrm{M} = u + v\sqrt{-1}, \quad \mathrm{N} = u - v\sqrt{-1}, \quad u' = \frac{du}{dt}, \quad v' = \frac{dv}{dt}.$$

Les formules précédentes pourront alors s'écrire sous forme réelle de la manière suivante :

$$H = \frac{1}{2}\left\{\frac{\varphi(u) - \psi(v)}{F(u) - f(v)} - [F(u) - f(v)](u'^2 + v'^2)\right\},$$

$$\alpha = \frac{\psi(v)F(u) - \varphi(u)f(v)}{F(u) - f(v)} + [F(u) - f(v)][f(v)\,u'^2 + F(u)\,v'^2].$$

Ainsi, pour que le problème du mouvement d'un point assujetti à rester sur une même surface donnée admette une intégrale algébrique du deuxième degré, autre que celle des forces vives, il faut que la distance de deux points infiniment voisins pris sur cette surface puisse s'exprimer sous la forme

$$ds^2 = [F(u) - f(v)](du^2 + dv^2),$$

F et f étant des fonctions quelconques.

La forme de l'intégrale α montre que cette intégrale ne peut appartenir à plusieurs problèmes, que quand une des fonctions F et f est nulle, et alors la surface est développable sur une surface de révolution; si f est nul par exemple, elle conviendra à tous les problèmes dont les fonctions des forces différeront par la fonction arbitraire φ.

Dans cette hypothèse, les formules précédentes se réduisent aux suivantes :

$$H = \frac{1}{2}\left[\frac{\varphi(u) - \psi(v)}{F(u)} - F(u)(u'^2 + v'^2)\right],$$

$$\alpha = \psi(v) + [F(u)]^2\,v'^2.$$

Il ne faut pas perdre de vue que nous avons pris pour variables indépendantes dans le cours de notre théorie M et N, qui sont des fonctions quelconques, l'une de x, l'autre de y, en sorte que, pour être sûr d'avoir l'intégrale α du second degré la plus générale, il faut avoir mis T sous la forme exigée de la manière la plus générale possible. Traitons comme exemple le cas où la surface est un plan. On a

$$T = \frac{1}{2}F(M + N) - f(M - N)]\,M'\,N'\,x'y' = \frac{1}{2}x'\,y'.$$

Il faudra donc trouver les fonctions les plus générales M et N qui satisfassent à l'équation

$$[F(M + N) - f(M - N)]\,M'\,N' = 1.$$

Différentions deux fois cette fonction par rapport à x et par rapport à y, il viendra

$$(F'-f')M'^2+(F-f)M''=0,$$

$$2M'M''(F'-f')+(F''-f'')M'^3+(F'-f')M'M''+(F-f)M'''=0,$$

ou

$$(F''-f'')M'^3+3(F'-f')M'M''+(F-f)M'''=0;$$

on aura de même

$$(F'+f')N'^2+(F-f)N''=0$$

et

$$(F''-f'')N'^3+3(F'+f')N'N''+(F-f)N'''=0.$$

En examinant ces équations, on voit que si l'on tire des deux premières la valeur de $\frac{F''-f''}{F-f}$, après l'élimination du rapport $\frac{F'-f'}{F-f}$, et des deux dernières la valeur de la même quantité $\frac{F''-f''}{F-f}$, après l'élimination de $\frac{F'+f'}{}$, on aura deux expressions composées de la même, l'une avec les dérivées de M, l'autre avec les dérivées de N. On obtient ainsi l'équation

$$-\frac{3M''^2}{M'^4}+\frac{M'''}{M'^3}=-\frac{3N''^2}{N'^4}+\frac{N'''}{N'^3}=-k^2,$$

k étant une constante (réelle ou imaginaire) puisque M ne contient que x et que N ne contient que y.

Or la quantité $-\frac{3M''^2}{M'^4}+\frac{M'''}{M'^3}$ est la dérivée par rapport à x de $\frac{M''}{M'^3}$; on a donc

$$\frac{M''}{M'^3}=-k^2x+k',$$

d'où

$$-\frac{1}{2M'^2}=-\frac{1}{2}k^2x^2+k'x+k'',$$

expression qu'on peut écrire en désignant par k, a, b trois constantes arbitraires,

$$kd\mathrm{M}=\frac{dx}{\sqrt{(x+a)^2-b^2}};$$

on peut supposer $k=1$, cela revient à prendre kM pour variable.

5.

On aura, en désignant par C une nouvelle constante,

$$\mathrm{M} + \mathrm{C} = \log \frac{x + a + \sqrt{(x + a)^2 - b^2}}{b},$$

d'où

$$x + a + \sqrt{(x + a)^2 - b^2} = b e^{\mathrm{M}+\mathrm{C}},$$

$$-b^2 = b^2 e^{2(\mathrm{M}+\mathrm{C})} - 2b(x + a)\, e^{(\mathrm{M}+\mathrm{C})},$$

$$x + a = \frac{1}{2} b \left[e^{\mathrm{M}+\mathrm{C}} + e^{-(\mathrm{M}+\mathrm{C})}\right].$$

Si la constante b est imaginaire, on peut la supposer égale à son module P, multiplié par une expression imaginaire dont je désignerai le logarithme par $\theta\sqrt{-1}$; on aura alors

$$x + a = \frac{1}{2} \mathrm{P} \left[e^{\mathrm{M}+\mathrm{C}} + e^{-(\mathrm{M}+\mathrm{C})}\right] e^{\theta\sqrt{-1}}.$$

Pour ne plus laisser que des quantités réelles dans cette formule, je pose

$$\mathrm{M} = u + v\sqrt{-1}, \quad \mathrm{C} = \gamma + \delta\sqrt{-1}, \quad -a = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{P}e^{\gamma} = \mathrm{A}, \quad \frac{1}{2}\mathrm{P}e^{-\gamma} = \mathrm{B};$$

nous aurons alors

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1} + e^{\theta\sqrt{-1}}\left[\mathrm{A}e^{u+(v+\delta)\sqrt{-1}} + \mathrm{B}e^{-[u+(v+\delta)\sqrt{-1}]}\right],$$

$$x = \xi + \eta\sqrt{-1} = \alpha + \beta\sqrt{-1} + e^{\theta\sqrt{-1}}\Big[(\mathrm{A}e^{u} + \mathrm{B}e^{-u})\cos(v + \delta)$$
$$+ (\mathrm{A}e^{u} - \mathrm{B}e^{-u})\sin(v + \delta)\sqrt{-1}\Big].$$

On pourrait exprimer de même y ou $\xi - \eta\sqrt{-1}$ en N en intégrant l'équation

$$-\frac{3\mathrm{N}''^2}{\mathrm{N}'^4} + \frac{\mathrm{N}'''}{\mathrm{N}'^3} = -k^2,$$

et on trouverait pour y une expression en N de même forme que celle de x en M, mais la valeur de y doit se déduire de celle de x en y changeant le signe de $\sqrt{-1}$; cela prouve en passant que si l'on a pris

$$M = u + v\sqrt{-1},$$

on doit prendre

$$N = u - v\sqrt{-1}.$$

Voyons la signification de la valeur générale de x ou de $\xi + \eta\sqrt{-1}$. La constante $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ indique qu'on peut transporter l'origine en un point quelconque (α, β). Le facteur $e^{\theta\sqrt{-1}}$ indique qu'on peut changer la direction des axes : après ces changements, on aurait simplement

$$x = \xi + \eta\sqrt{-1} = (Ae^u + Be^{-u})\cos(v+\delta) + \sqrt{-1}(Ae^u - Be^{-u})\sin(v+\delta).$$

Nous pouvons supprimer la constante δ après avoir remarqué que sa présence indique qu'il est permis de compter les angles v à partir d'une droite quelconque.

Il viendra donc

$$\xi = (Ae^u + Be^{-u})\cos v,$$

$$\eta = (Ae^u - Be^{-u})\sin v.$$

Posons

$$Ae^u + Be^{-u} = \mu, \quad 4AB = b^2 \quad \text{et} \quad \nu = b\cos v,$$

on aura

$$\xi = \frac{\mu\nu}{b}, \quad \eta = \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b}.$$

Ainsi les coordonnées les plus générales qui puissent donner à T la forme nécessaire pour qu'il y ait une intégrale algébrique du second degré, sont des coordonnées elliptiques, avec des axes quelconques et une distance focale quelconque.

On a dans ce système de coordonnées

$$ds^2 = (\mu^2 - \nu^2)\left(\frac{d\mu^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{d\nu^2}{b^2 - \nu^2}\right) = (\mu^2 - \nu^2)(du^2 + dv^2).$$

Appliquant alors nos formules générales en prenant

$$F(u) = \mu^2 - b^2, \quad f(v) = -(b^2 - \nu^2),$$

on a

$$H = \frac{1}{2}\left[\frac{\varphi(\mu) - \psi(\nu)}{\mu^2 - \nu^2} - (\mu^2 - \nu^2)\left(\frac{\mu'^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{\nu'^2}{b^2 - \nu^2}\right)\right],$$

$$\alpha = \frac{\psi(\nu)(\mu^2 - b^2) + \varphi(\mu)(b^2 - \nu^2)}{\mu^2 - \nu^2} + (\mu^2 - \nu^2)\left[\frac{(\mu^2 - b^2)\nu'^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{(b^2 - \nu^2)\mu'^2}{\mu^2 - b^2}\right].$$

Pour que cette intégrale soit commune, il est nécessaire que l'une des fonctions $\mu^2 - b^2$, $b^2 - \nu^2$ soit toujours nulle; cela ne peut avoir lieu que si l'on a $b = 0$, et, par suite, $\nu = 0$; dans ce cas, la variable qui remplace ν est $\frac{\nu}{b} = \cos\theta$, et comme on a

$$\frac{\nu'^2}{b^2 - \nu^2} = \frac{b^2 \sin^2\theta \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}{b^2 \sin^2\theta} = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

il vient

$$H = \frac{1}{2}\left\{\varphi(\mu) - \frac{\psi(\theta)}{\mu^2} - \left[\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + \mu^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\right\},$$

$$\alpha = \psi(\theta) + \left(\mu^2 \frac{d\theta}{dt}\right)^2;$$

μ devient dans notre hypothèse le rayon vecteur d'un système de coordonnées polaires; ces équations deviennent en coordonnées rectilignes

$$H = \frac{1}{2}\left[\varphi(x^2 + y^2) - \frac{\psi\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2 + y^2} - (x'^2 + y'^2)\right],$$

$$\alpha = \psi\left(\frac{y}{x}\right) + (xy' - yx')^2.$$

Telle est la forme sous laquelle elle a été indiquée par Jacobi.

Les coordonnées elliptiques renferment comme cas particulier les coordonnées rectangulaires. Pour appliquer nos formules dans ce cas, il faut y faire

$$F(u) = 1, \quad f(\nu) = 0, \quad u = \xi, \quad \nu = \eta,$$

et on a alors

$$H = \frac{1}{2}[\varphi(\xi) - \psi(\eta) - (\xi'^2 + \eta'^2)],$$

$$\alpha = \psi(\eta) + \eta'^2;$$

on aurait de même

$$\alpha = \varphi(\xi) - \xi'^2,$$

en faisant

$$F(u) = 0, \quad f(v) = 1$$

dans les formules générales.

Le cas où le point mobile se meut dans un plan peut se traiter directement en profitant de la solution connue du problème dérivé.

Les trois quantités ξ', η', $\xi\eta' - \eta\xi'$ égalées à des constantes étant les seules intégrales distinctes indépendantes du temps que puisse admettre le problème dérivé, T_1 ne peut être qu'une fonction de ces quantités, et comme T_1 doit être homogène et du second degré en ξ' et η', il faut que T_1 soit de la forme

$$T_1 = A(\xi\eta' - \eta\xi')^2 + (\xi\eta' - \eta\xi')(B\xi' + C\eta') + D\xi'^2 + E\eta'^2 + F\xi'\eta',$$

A, B, C, D, E, F étant des constantes. Nous supposerons A positif.

En transportant l'origine des coordonnées, on peut faire disparaître le terme $(\xi\eta' - \eta\xi')(B\xi' + C\eta')$, puis en changeant la direction des axes, on vérifie facilement qu'on peut faire disparaître le terme en $\xi'\eta'$. Enfin si l'on suppose, par exemple, $E < D$, $E = D - a^2$, qu'on retranche de l'intégrale cherchée

$$\alpha = U_1 - T_1$$

l'intégrale des forces vives $H = U - T$ multipliée par $2D$, le terme en ξ'^2 dans T_1 disparaîtra encore, et T_1 pourra se ramener à la forme

$$T_1 = \frac{1}{2}(\xi\eta' - \eta\xi')^2 - \frac{1}{2}a^2\eta'^2.$$

Quand a^2 est nul, on résout très-facilement le problème de la détermination de U et U_1 et l'on retrouve l'intégrale de Jacobi, indiquée tout à l'heure.

Laissons de côté les cas particuliers que nous avons déjà discutés et occupons-nous du cas général. L'intégration des équations qui donnent U et U_1 paraît impossible quand on conserve des coordonnées rectangulaires avec lesquelles on ne peut pas pousser plus loin la simplification de T_1; mais il est naturel de chercher à employer des coordonnées plus générales qui permettent de disposer d'une nouvelle indéterminée au moyen de laquelle on peut espérer lever la difficulté d'intégration que fait naître la présence du terme en η'^2. Les coordonnées elliptiques se présentent naturellement pour tenter cet essai, et c'est ainsi que j'ai été conduit à les employer et que j'ai résolu tout d'abord le cas qui nous occupe.

On a, en nommant μ et ν les deux coordonnées elliptiques d'un point

$$T = \frac{1}{2}(\mu^2 - \nu^2)\left(\frac{\mu'^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{\nu'^2}{b^2 - \nu^2}\right).$$

Soient m et n les variables conjuguées de μ et ν,

$$m = \frac{dT}{d\mu'} = \frac{(\mu^2 - \nu^2)}{\mu^2 - b^2}\mu', \qquad n = \frac{dT}{d\nu'} = \frac{\mu^2 - \nu^2}{b^2 - \nu^2}\nu';$$

de là on tire

$$T = \frac{m^2(\mu^2 - b^2) + n^2(b^2 - \nu^2)}{2(\mu^2 - \nu^2)}.$$

Des valeurs

$$\xi = \frac{\mu\nu}{b}, \qquad \eta = \frac{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}}{b},$$

on déduit

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi' = \frac{\mu\nu' + \nu\mu'}{b} = \frac{\mu n(b^2 - \nu^2) + \nu m(\mu^2 - b^2)}{b(\mu^2 - \nu^2)},$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \eta' = \frac{\mu\mu'(b^2 - \nu^2) - \nu\nu'(b^2 - \nu^2)}{b\sqrt{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}} = \frac{(\mu m - \nu n)\sqrt{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}}{b(\mu^2 - \nu^2)}.$$

On obtient ainsi

$$\xi\eta' - \eta\xi' = \frac{(m\nu - \mu n)}{\mu^2 - \nu^2}\sqrt{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}$$

et

$$T_1 = \frac{1}{2}\,\frac{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}{(\mu^2 - \nu^2)^2}\left[(m\nu - \mu n)^2 - \frac{a^2}{b^2}(\mu m - \nu n)^2\right].$$

Prenant maintenant $b^2 = a^2$, il vient

$$T_1 = -\frac{1}{2}\,\frac{(m^2 - n^2)(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}{\mu^2 - \nu^2}.$$

L'équation (3) qui donne U_1 et U devient

$$o = -\frac{dU}{d\mu} m \frac{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}{\mu^2 - \nu^2} + \frac{dU}{d\nu} n \frac{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}{\mu^2 - \nu^2}$$
$$- \frac{dU_1}{d\mu} m \frac{\mu^2 - b^2}{\mu^2 - \nu^2} - \frac{dU_1}{d\nu} n \frac{b^2 - \nu^2}{\mu^2 - \nu^2}.$$

Cette équation se dédouble dans les deux suivantes :

$$\frac{dU_1}{d\mu} = (\nu^2 - b^2)\frac{dU}{d\mu}, \qquad \frac{dU_1}{d\nu} = (\mu^2 - b^2)\frac{dU}{d\nu},$$

ou bien

$$\frac{d}{d\mu}[U_1 + (b^2 - \nu^2)U] = o, \qquad \frac{d}{d\nu}[U_1 + (b^2 - \mu^2)U] = o,$$

d'où l'on tire, en désignant par φ et ψ deux fonctions arbitraires,

$$U_1 + (b^2 - \nu^2)U = -\frac{1}{2}\psi(\nu),$$

$$U_1 + (b^2 - \mu^2)U = -\frac{1}{2}\varphi(\mu),$$

ou bien

$$U = \frac{\varphi(\mu) - \psi(\nu)}{2(\mu^2 - \nu^2)}, \qquad -U_1 = \frac{\psi(\nu)(\mu^2 - b^2) + \varphi(\mu)(b^2 - \nu^2)}{2(\mu^2 - \nu^2)},$$

d'où enfin les deux équations déjà trouvées

$$H = \frac{1}{2}\left[\frac{\varphi(\mu) - \psi(\nu)}{\mu^2 - \nu^2} - (\mu^2 - \nu^2)\left(\frac{\mu'^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{\nu'^2}{b^2 - \nu^2}\right)\right],$$

$$\alpha = \frac{\psi(\nu)(\mu^2 - b^2) + \varphi(\mu)(b^2 - \nu^2)}{\mu^2 - \nu^2} - \left[\left(\frac{b^2 - \nu^2}{\mu^2 - b^2}\right)\mu'^2 - \left(\frac{\mu^2 - b^2}{b^2 - \nu^2}\right)\nu'^2\right](\mu^2 - \nu^2).$$

Les cas où U a la forme précédente sont très-étendus; on peut prendre, par exemple,

$$U = \frac{g(\mu + \nu) + g'(\mu - \nu) + k[\mu^4 - \nu^4 - b^2(\mu^2 - \nu^2)] + h\left(\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\nu^2}\right) + h'\left(\frac{1}{\mu^2 - b^2} + \frac{1}{b^2 - \nu^2}\right)}{\mu^2 - \nu^2},$$

ou

$$U = \frac{g}{\mu - \nu} + \frac{g'}{\mu + \nu} + k(\mu^2 + \nu^2 - b^2) - \frac{h}{\mu^2 \nu^2} + \frac{h'}{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}.$$

Les deux premiers termes de cette valeur de U sont relatifs à deux forces émanant des foyers du système de coordonnées et inversement proportionnelles aux carrés de la distance; le troisième terme est relatif à une force émanant du centre et proportionnelle à la distance; le quatrième terme est relatif à une force parallèle à l'axe des x et proportionnelle à $\frac{1}{x^3}$; enfin le cinquième terme est relatif à une force parallèle à l'axe de y et proportionnelle à $\frac{1}{y^3}$.

Si le point se meut dans l'espace, mais que les forces qui agissent sur lui rencontrent toujours une droite fixe, en prenant cette droite pour axe des x, prenant ensuite un axe des y perpendiculaire au premier, et situé dans le plan mobile qui contient toujours le point mobile et l'axe des x, choisissant enfin pour troisième coordonnée l'angle θ de ce plan avec un plan fixe passant par l'axe des x, on aura, pour déterminer la variation de θ, l'équation des aires

$$y^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const.}$$

On pourra ensuite étudier le mouvement relatif du point dans le plan mobile des xy, en procédant comme si ce plan était fixe, mais ajoutant aux forces qui sollicitent le mobile une force apparente parallèle à l'axe des y, et inversement proportionnelle à y^3. Or nous venons de voir que l'addition d'une semblable force n'empêche pas le problème d'admettre une intégrale algébrique du second degré autre que celle des forces vives. Par conséquent les conditions nécessaires pour que le problème du mouvement d'un point admette une semblable intégrale, sont les mêmes dans le cas où le point se meut dans un plan et dans celui où il se meut dans l'espace en étant sollicité par des forces qui rencontrent toutes une droite fixe.

Appliquons spécialement nos formules au cas d'un point attiré vers deux autres fixes d'après la loi de la nature. Soit $2b$ la distance de ces deux points, nous prendrons la ligne que les joint pour axe des ξ et pour axe des η une perpendiculaire à l'axe des ξ au milieu de la distance $2b$. On a dans ce cas

$$U = \frac{g}{\mu + \nu} + \frac{g'}{\mu - \nu} = \frac{(g + g')\mu - (g - g')\nu}{\mu^2 - \nu^2},$$

par conséquent on fera

$$\varphi(\mu) = 2(g + g')\mu, \quad \psi(\nu) = 2(g - g')\nu.$$

L'intégrale α devient ainsi, en remettant des coordonnées rectangulaires,

$$\alpha = [(\xi\eta' - \eta\xi')^2 - b^2\eta'^2] + \frac{2[(g + g')\mu(b^2 - \nu^2) + (g - g')\nu(b^2 - \nu^2)]}{\mu^2 - \nu^2}$$

$$= [(\xi\eta' - \eta\xi')^2 - b^2\eta'^2] - \frac{2g'(\mu\nu - b^2)}{\mu - \nu} + \frac{2g(\mu\nu + b^2)}{\mu + \nu}.$$

Or on a

$$\xi - b = \frac{\mu\nu - b^2}{b}, \quad \xi + b = \frac{\mu\nu + b^2}{b},$$

d'où

$$\alpha = [(\xi\eta' - \eta\xi')^2 - b^2\eta'^2] - \frac{2g'b(\xi - b)}{\sqrt{(\xi - b)^2 + \eta^2}} + \frac{2gb(\xi + b)}{\sqrt{(\xi + b)^2 + \eta^2}}.$$

C'est l'intégrale d'Euler sous sa forme habituelle.

Quand on suppose que le point mobile est libre dans l'espace, on trouve facilement T_1, puisqu'on connaît la solution complète du problème dérivé; mais l'équation qui doit donner ensuite U et U_1 est tellement compliquée, qu'il m'a été impossible d'en tirer quelque chose.

Je terminerai ce Mémoire en montrant, par un exemple tiré des travaux de M. Liouville, combien sont fréquents les cas où il existe des intégrales algébriques et du second degré.

Supposons n points libres dans l'espace, et prenons pour variables, au lieu des coordonnées $x_1, y_1, z_1, \; x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n$ de ces points les $3n$ racines de l'équation suivante où ρ est l'inconnue :

$$\frac{x_1^2}{\rho - a_1} + \frac{y_1^2}{\rho - a_2} + \frac{z_1^2}{\rho - a_3} + \frac{x_2^2}{\rho - a_4} + \ldots + \frac{x_n^2}{\rho - a_{3n-2}} + \frac{y_n^2}{\rho - a_{3n-1}} + \frac{z_n^2}{\rho - a_{3n}} = 0,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_{3n}$ étant $3n$ constantes auxquelles on pourra assigner telles valeurs que l'on voudra. M. Liouville a fait voir que le problème peut être résolu quand la fonction des forces est représentée par une équation de la

6.

forme

$$U = \frac{f_1(\rho_1)}{\varphi'(\rho_1)} + \frac{f_2(\rho_2)}{\varphi'(\rho_2)} + \frac{f_3(\rho_3)}{\varphi'(\rho_3)} + \ldots + \frac{f_{3n}(\rho_{3n})}{\varphi'(\rho_{3n})},$$

$f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{3n}$ sont $3n$ fonctions quelconques et φ' est la dérivée par rapport à ρ de la fonction

$$\varphi(\rho) = (\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)\ldots(\rho - \rho_{3n}).$$

Si on désigne par $R_1, R_2, \ldots, R_{3n}$ les variables conjuguées de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{3n}$, et si on pose

$$\varphi(\rho) = 4(\rho - a_1)(\rho - a_2)\ldots(\rho - a_{3n}),$$

le problème admettra les $3n$ intégrales, dites intermédiaires, de la forme suivante :

$$\varphi(\rho_i)^2 R_i^2 = \alpha_1 + \alpha_2\rho_i + \alpha_3\rho_i^2 + \ldots + \alpha_{3n-1}\rho_i^{3n-2} - 2H\rho_i^{3n-1} + 2f_i(\rho_i),$$

i représente l'un quelconque des indices 1, 2, 3, ..., $3n$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{3n-1}$ sont 3_{n-1} constantes arbitraires, H est la constante des forces vives.

Si on résout les $3n$ équations précédentes par rapport aux $3n$ constantes qu'elles renferment, les seconds membres seront évidemment des fonctions algébriques et entières du second degré par rapport aux variables conjuguées R_i.

Donc, dans ce cas, qui peut être considéré comme le plus étendu de ceux qu'on sait résoudre d'une manière générale, si le problème admet $6n$ intégrales, il en existe $3n$ qui sont algébriques, entières et du second degré par rapport aux variables conjuguées; et ces $3n$ intégrales étant ce qu'on appelle les intégrales intermédiaires du problème peuvent servir à former, comme on sait, au moyen de simples quadratures, une certaine fonction sur laquelle on n'a plus qu'à opérer ensuite des différentiations pour avoir la solution complète du problème.

Vu et approuvé,

Le 19 juin 1861,

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer,

Le 19 juin 1861,

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

ARTAUD.

THÈSE DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

SUR LE MODE DE PROPAGATION DES ONDES PLANES ET LA SURFACE DE L'ONDE ÉLÉMENTAIRE DANS LES CRISTAUX BIRÉFRINGENTS A DEUX AXES.

Il n'existe guère de théorie qui ait plus, dans ces derniers temps, attiré l'attention des savants que celle de la double réfraction.

Fresnel le premier a donné une explication de ce phénomène, en admettant certains principes de mécanique sans les démontrer. Cauchy, à plusieurs reprises, a essayé de faire une théorie complète de la double réfraction, mais il a été obligé de recourir à des approximations nombreuses, et à des hypothèses contestables pour arriver à mettre ses résultats d'accord avec ceux de l'expérience. M. Lamé, prenant la question à un autre point de vue, a admis l'hypothèse de laquelle Fresnel était parti, et l'a soumise à une vérification minutieuse, au moyen des formules de ses théories sur l'élasticité.

Les travaux de Cauchy et de M. Lamé ont eu surtout pour but de traiter d'une façon plus satisfaisante que ne l'avait fait Fresnel, la partie de la question qui est du domaine de la physique mathématique, c'est-à-dire celle où l'on s'occupe d'établir l'équation aux vitesses des ondes planes.

Cette équation une fois connue, il reste à trouver celle de l'onde élémentaire, c'est-à-dire de la surface enveloppée par toutes les ondes planes qui seraient parties simultanément d'un même point dans toutes les directions.

Cette seconde partie de la question a été traitée par plusieurs savants, au moyen de méthodes analytiques et géométriques. De ces dernières méthodes la plus connue est celle que M. Plücker a donnée dans le t. XIX du *Journal de Crelle,* et qui est basée sur les propriétés des surfaces polaires réciproques.

Il en est une autre qu'on paraît avoir perdue de vue et que Mac-Cullagh a indiquée il y a longtemps dans le t. XVII des *Mémoires de Dublin;* cette méthode me paraît éminemment remarquable, parce que, bien que toute géométrique, elle a les caractères d'une méthode d'invention; non-seulement elle permet d'établir l'équation de la surface de l'onde d'une façon élégante, mais elle m'a conduit si naturellement aux propriétés des axes optiques et des axes de réfraction conique, qu'on peut dire que si Fresnel l'avait employée, les propriétés singulières de ces axes ne lui auraient point échappé.

Je me propose de développer cette méthode dans ce travail, qui a pour but principal une étude complète de la surface de l'onde; je ferai voir en même temps combien l'emploi des coordonnées elliptiques simplifie certaines parties de cette étude, et j'indiquerai la forme curieuse, et je crois inconnue jusqu'ici, que prend l'équation de la surface de l'onde lorsqu'on emploie ces coordonnées.

Il me paraît utile de faire tout d'abord un examen critique des diverses méthodes par lesquelles on a établi l'équation aux vitesses des ondes planes; j'indiquerai ensuite comment devrait être exposée, à mon sens, cette partie importante de la théorie de la double réfraction, en profitant des travaux faits jusqu'à ce jour sur ce sujet, et en simplifiant autant que possible les longs calculs que cette théorie entraîne.

La méthode de Fresnel, telle qu'elle a été développée par M. de Senarmont dans son *Commentaire*, suppose qu'une molécule se déplace seule dans le milieu élastique. On cherche alors quelle est la force qui tend à la ramener à sa position d'équilibre, et on trouve qu'il n'existe pour le déplacement que trois directions telles, que ce déplacement et la force qu'il fait naître soient parallèles : ces trois directions sont les axes d'élasticité; on fait voir ensuite que si l'on prend des longueurs inversement proportionnelles aux racines carrées des projections, sur chaque déplacement, de la force élastique qu'il développe, les extrémités de ces longueurs sont sur un même ellipsoïde qu'on appelle *ellipsoïde d'élasticité,* et dont les axes sont parallèles aux axes d'élasticité.

D'après l'hypothèse fondamentale de Fresnel, les phénomènes lumineux n'étant dus qu'à des vibrations normales à la direction de leur propagation, on cherche la force élastique que font naître des vibrations contenues dans un ~~même~~ plan, on décompose cette force en deux, l'une normale au plan dont on ne tient pas compte, et l'autre située dans ce plan : on trouve que cette dernière n'est parallèle aux déplacements moléculaires que lorsque ces déplacements sont parallèles aux axes de l'ellipse qu'on obtient en coupant l'ellipsoïde d'élasticité par le plan contenant les vibrations, c'est-à-dire par le plan de l'onde ; mais chaque vibration pourra se décomposer aux deux autres parallèles aux axes de notre ellipse, et ces deux vibrations composantes se propageront avec des vitesses différentes, parce que Fresnel admet que ces vitesses sont proportionnelles aux racines carrées des forces élastiques développées par chaque vibration, et par suite inversement proportionnelles aux grandeurs des demi-axes de notre ellipse. Il ne reste plus qu'à traduire analytiquement cette loi des vitesses de propagation pour avoir l'équation aux vitesses des ondes planes.

On voit tout de suite combien cette théorie est défectueuse au point de vue mécanique. On déduit l'expression des forces élastiques développées en supposant que la molécule vibrante se déplace seule ; on néglige l'influence des composantes de ces forces, normales aux vibrations, sans démontrer que cela puisse être permis ; enfin on ne justifie nullement la loi qu'on adopte pour les vitesses de propagation ; quelque ingénieuse qu'elle soit, cette théorie contient trop de lacunes pour être admissible, et elle devait naturellement attirer les efforts des analystes.

Cauchy, qui a le plus écrit sur cette matière, a cherché l'action exercée sur une molécule par les autres molécules du milieu et les variations que subit cette action quand les molécules sont très-peu déplacées ; il suppose que l'action de deux molécules l'une sur l'autre varie suivant une loi quelconque avec la distance, mais il admet qu'elle est dirigée suivant la ligne qui joint les deux molécules : c'était déjà faire une hypothèse que certains faits observés dans la formation des cristaux permettent de contester.

Les composantes de la force élastique qui agit sur la molécule vibrante étant connues, Cauchy obtient immédiatement les équations différentielles des mouvements vibratoires ; ces équations, réduites aux termes du premier ordre de grandeur, contiennent seulement quinze coefficients qui doivent être constants en tous les points du milieu s'il est homogène ; Cauchy établit ensuite que les vibrations qui peuvent se propager dans une direction quelconque sont au nombre de trois et qu'elles sont rectangulaires entre elles ; il obtient en même temps l'équation du troisième degré qui donne les vitesses de propagation de ces trois vibrations ; mais il est obligé, pour simplifier cette équation, de supposer le milieu très-peu éloigné d'être monoréfringent, c'est-à-dire d'égale élasticité dans tous les sens, et d'admettre en outre certaines relations entre les quinze coefficients des équations différentielles, afin que l'équation aux vitesses donne toujours une valeur constante pour une des vibrations, quand la direction de propagation est normale à l'un des axes d'élasticité.

Enfin Cauchy admet à priori que le milieu est doué de trois axes rectangulaires de polarisation tels, que les molécules du milieu soient disposées symétriquement deux à deux par rapport aux trois plans rectangulaires que contiennent deux à deux les axes de polarisation. Si cette dernière hypothèse est admissible pour certains systèmes cristallins, je ne vois rien qui puisse la justifier pour d'autres et principalement pour les systèmes des prismes rhomboïdaux obliques, symétrique et dissymétrique. Elle me paraît d'ailleurs inutile, car dans la théorie telle que nous l'exposerons, l'existence des trois axes de polarisation ou d'élasticité est une pure conséquence analytique des calculs, comme l'existence des trois axes d'inertie d'un corps quelconque.

Dans le cas où le milieu est monoréfringent, on trouve que l'une des vibrations est rectiligne et normale au plan de l'onde; les autres sont situées dans ce plan et quelconques, quant à la forme de la trajectoire de la molécule vibrante; par suite, quand le milieu est peu éloigné d'être monoréfringent, l'une des trois vibrations qu'il peut propager doit avoir une direction voisine de la normale au plan de l'onde, et les deux autres doivent être à peu près contenues dans ce plan. Seulement Cauchy trouve que les deux dernières auxquelles on doit attribuer les phénomènes lumineux sont normales à la direction que Fresnel leur avait assignée. L'équation trouvée par Cauchy, pour donner les vitesses de propagation des deux vibrations lumineuses, est d'ailleurs de même forme que celle de Fresnel.

Dans un autre travail, Cauchy a admis à priori la direction que Fresnel avait indiquée pour les vibrations : il est parvenu à la même équation aux vitesses, mais en supposant toujours que le milieu est peu éloigné d'être monoréfringent, qu'il possède trois axes de polarisation, et en admettant encore, par une induction des plus hardies, que certains coefficients, que l'expérience montre devoir être nuls pour les cristaux biréfringents à un axe, le sont aussi pour les cristaux biréfringents à deux axes.

Quand on voit combien sont encore imparfaites ces théories dues à un des plus illustres géomètres de notre époque, il faut admettre avec M. Lamé qu'il n'est pas possible, dans l'état actuel de la science, de créer une théorie complète de la double réfraction.

M. Lamé admet, comme point de départ, les hypothèses de Fresnel ; il suppose que les vibrations sont rectilignes et que le déplacement de la molécule vibrante est représenté par le cosinus d'un angle qui est une fonction linéaire du temps et de la distance de la molécule à un plan fixe parallèle au plan de l'onde. Les valeurs des projections, sur les axes rectangulaires, du déplacement d'une molécule étant portées dans les équations générales des mouvements très-petits, M. Lamé cherche quelles relations doivent exister entre les coefficients de ces équations, pour qu'il puisse y avoir deux vibrations dans le plan de l'onde, et il est conduit ensuite à une équation aux vitesses des ondes planes de même forme que celle de Fresnel, mais il trouve pour les vibrations des directions perpendiculaires à celles indiquées par ce savant.

Il me paraît possible, tout en restant dans l'esprit de la théorie de M. Lamé, de diminuer le nombre des hypothèses de départ. En prenant les équations différentielles qu'il a données pour les mouvements très-petits, on peut, dans le cas où tous les déplacements initiaux sont contenus dans un même plan et les mêmes en tous les points du plan, intégrer complétement les équations différentielles par l'emploi de méthodes analogues à celles dont Cauchy avait fait usage.

On démontre ainsi que les vibrations sont rectilignes et qu'elles sont au nombre de trois. Faisant alors une hypothèse, mais une seule, on exprime que deux de ces vibrations sont dans le plan de l'onde, et on arrive ensuite sans suppositions nouvelles et sans approximations à l'équation aux vitesses des ondes planes.

L'hypothèse que nous faisons est d'ailleurs très-naturelle, et on pourrait la considérer comme suffisamment vérifiée pour les milieux monoréfringents par le fait de la non-interférence des rayons polarisés à angle droit, mais pareille vérification n'a pas été faite pour les milieux biréfringents. C'est donc bien d'une hypothèse que nous partons, mais d'une seule.

Dans beaucoup de points notre théorie ne différera pas de celle de M. Lamé, et nous passerons sous silence, pour abréger, les détails des calculs qui ne seraient qu'une reproduction de ceux de ce savant.

I

De la propagation des ondes planes.

Désignons par

$$\begin{matrix} N_1, & T_3, & T_2, \\ T_3, & N_2, & T_1, \\ T_2, & T_1, & N_3, \end{matrix}$$

les composantes parallèles aux axes des x, des y et des z de la pression exercée sur un élément plan pris dans le milieu élastique et supposé perpendiculaire successivement aux axes des x, des y et des z, cette pression étant rapportée à l'unité de surface; en supposant la densité du milieu égale à l'unité, les équations différentielles des mouvements très-petits du milieu élastique seront

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz},$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz},$$

$$\frac{d^2w}{dt^2} = \frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz};$$

u, v, w sont les projections sur les trois axes du déplacement de la molécule qui a pour coordonnées x, y, z quand le milieu n'est pas déformé.

Ces équations ont été déduites par M. Lamé de la considération de l'équilibre réel ou fictif d'un prisme élémentaire pris dans le milieu élastique, et elles sont vraies, que ce milieu soit solide ou non. Les valeurs des N_i et des T_i données par M. Lamé et réduits aux termes du premier ordre de grandeur seront de la forme

$$N_i = A_i\frac{du}{dx} + B_i\frac{dv}{dy} + C_i\frac{dw}{dz} + D_i\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) + E_i\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right) + F_i\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right),$$

$$T_i = \mathcal{A}_i\frac{du}{dx} + \mathcal{B}_i\frac{dv}{dy} + \mathcal{C}_i\frac{dw}{dz} + \mathcal{D}_i\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) + \mathcal{E}_i\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right) + \mathcal{F}_i\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right).$$

Ces valeurs ne reposent sur aucune hypothèse; elles contiennent en tout trente-six coefficients qui doivent être constants en tous les points du milieu, puisque nous le supposons homogène.

Imaginons maintenant qu'à l'origine du mouvement toutes les molécules situées dans un même plan parallèle au plan

$$(1)\qquad mx + ny + pz = 0$$

aient des déplacements et des vitesses identiques. Il est évident qu'à une époque quelconque du mouvement tous les points d'un même plan parallèle au plan (1) auront encore des déplacements et des vitesses identiques; par conséquent, les projections u, v et w de ces déplacements ne peuvent dépendre que du temps et de la distance ρ de la molécule vibrante au plan (1), et comme on peut supposer $m^2 + n^2 + p^2 = 1$, on aura

$$\rho = mx + ny + pz;$$

u, v, w n'étant fonctions que de ρ et t, on aura

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{d\rho}\frac{d\rho}{dx} = m\frac{du}{d\rho}, \quad \frac{du}{dy} = n\frac{du}{d\rho}, \quad \frac{du}{dy} = p\frac{du}{d\rho},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = m^2\frac{d^2u}{d\rho^2}, \quad \frac{d^2u}{dxdy} = mn\frac{d^2u}{d\rho^2}, \ldots,$$

et des expressions analogues pour les diverses dérivées de v et w. Les équations différentielles du mouvement peuvent alors s'écrire

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{d^2u}{dt^2} &= \mathrm{L}\frac{d^2u}{d\rho^2} + \mathrm{R}'\frac{d^2v}{d\rho^2} + \mathrm{Q}\frac{d^2w}{d\rho^2},\\
\frac{d^2v}{dt^2} &= \mathrm{R}\frac{d^2u}{d\rho^2} + \mathrm{M}\frac{d^2v}{d\rho^2} + \mathrm{P}'\frac{d^2w}{d\rho^2},\\
\frac{dw^2}{dt^2} &= \mathrm{Q}'\frac{d^2u}{d\rho^2} + \mathrm{P}\frac{d^2v}{d\rho^2} + \mathrm{N}\frac{d^2w}{d\rho^2},
\end{aligned}\right.$$

équations dans lesquelles on a

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathbf{L} &= m(\mathbf{A}_1 m + \mathbf{F}_1 n + \mathbf{E}_1 p) + n(\mathcal{A}_3 m + \mathcal{F}_3 n + \mathcal{E}_3 p) + p(\mathcal{A}_2 m + \mathcal{F}_2 n + \mathcal{E}_2 p),\\
\mathbf{M} &= m(\mathcal{F}_3 m + \mathcal{B}_3 n + \mathcal{D}_3 p) + n(\mathbf{F}_2 m + \mathbf{B}_2 n + \mathbf{D}_2 p) + p(\mathcal{F}_1 m + \mathcal{B}_1 n + \mathcal{D}_1 p),\\
\mathbf{N} &= m(\mathcal{E}_2 m + \mathcal{D}_2 n + \mathcal{C}_2 p) + n(\mathcal{E}_1 m + \mathcal{D}_1 n + \mathcal{C}_1 p) + p(\mathbf{E}_3 m + \mathbf{D}_3 n + \mathbf{C}_3 p),\\
\mathbf{P} &= m(\mathcal{F}_2 m + \mathcal{B}_2 n + \mathcal{D}_2 p) + n(\mathcal{F}_1 m + \mathcal{B}_1 n + \mathcal{D}_1 p) + p(\mathbf{F}_3 m + \mathbf{B}_3 n + \mathbf{D}_3 p),\\
\mathbf{P}' &= m(\mathcal{E}_3 m + \mathcal{D}_3 n + \mathcal{C}_3 p) + n(\mathbf{E}_2 m + \mathbf{D}_2 n + \mathbf{C}_2 p) + p(\mathcal{E}_1 m + \mathcal{D}_1 n + \mathcal{C}_1 p),\\
\mathbf{Q} &= m(\mathbf{E}_1 m + \mathbf{D}_1 n + \mathbf{C}_1 p) + n(\mathcal{E}_3 m + \mathcal{D}_3 n + \mathcal{C}_3 p) + p(\mathcal{E}_2 m + \mathcal{D}_2 n + \mathcal{C}_2 p),\\
\mathbf{Q}' &= m(\mathcal{A}_2 m + \mathcal{F}_2 n + \mathcal{E}_2 p) + n(\mathcal{A}_1 m + \mathcal{F}_1 n + \mathcal{E}_1 p) + p(\mathbf{A}_3 m + \mathbf{F}_3 n + \mathbf{E}_3 p),\\
\mathbf{R} &= m(\mathcal{A}_3 m + \mathcal{F}_3 n + \mathcal{E}_3 p) + n(\mathbf{A}_2 m + \mathbf{F}_2 n + \mathbf{E}_2 p) + p(\mathcal{A}_1 m + \mathcal{F}_1 n + \mathcal{E}_1 p),\\
\mathbf{R}' &= m(\mathbf{F}_1 m + \mathbf{B}_1 n + \mathbf{D}_1 p) + n(\mathcal{F}_3 m + \mathcal{B}_3 n + \mathcal{D}_3 p) + p(\mathcal{F}_2 m + \mathcal{B}_2 n + \mathcal{D}_2 p).
\end{aligned}\right.$$

Soient λ, μ, ν trois constantes satisfaisant aux trois équations

$$(4)\qquad \begin{cases} L\lambda + R\mu + Q'\nu = s^2\lambda, \\ R'\lambda + M\mu + P\nu = s^2\mu, \\ Q\lambda + P'\mu + N\nu = s^2\nu, \end{cases}$$

s^2 étant une quatrième constante qui sera déterminée, comme les rapports $\frac{\lambda}{\nu}, \frac{\mu}{\nu}$ par les équations (4). Posons enfin

$$(5)\qquad \theta = \lambda u + \mu v + \nu w.$$

Ajoutons les trois équations (2) respectivement multipliées par λ, μ, ν, on aura, en ayant égard aux équations (4) et (5),

$$(6)\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = s^2 \frac{d^2\theta}{d\rho^2}.$$

L'intégrale genérale de cette équation sera, en désignant par f et F deux fonctions arbitraires,

$$\theta = f(\rho - st) + F(\rho + st).$$

Or, en éliminant λ, μ, ν des équations (4), on aura une équation du troisième degré en s^2, laquelle donnera pour s^2 trois valeurs s_1^2, s_2^2, s_3^2. On aura aussi trois systèmes de valeurs pour λ, μ, ν et pour θ. On obtient ainsi

$$(7)\qquad \begin{cases} \theta_1 = \lambda_1 u + \mu_1 v + \nu_1 w = f_1(\rho - s_1 t) + F_1(\rho + s_1 t), \\ \theta_2 = \lambda_2 u + \mu_2 v + \nu_2 w = f_2(\rho - st) \;\; + F_2(\rho + st), \\ \theta_3 = \lambda_3 u + \mu_3 v + \nu_3 w = f_3(\rho - st) \;\; + F_3(\rho + st), \end{cases}$$

f_1, F_1, f_2, F_2, f_3, F_3 étant six fonctions arbitraires.

Résolvons les équations (7) par rapport à u, v, w, nous aurons pour les valeurs de ces quantités des expressions de la forme

$$(8)\qquad \begin{cases} u = \alpha_1\theta_1 + \alpha_2\theta_2 + \alpha_3\theta_3, \\ v = \beta_1\theta_1 + \beta_2\theta_2 + \beta_3\theta_3, \\ w = \gamma_1\theta_1 + \gamma_2\theta_2 + \gamma_3\theta_3. \end{cases}$$

Eu désignant par Δ le dénominateur commun des valeurs de u, v, w, on a

$$(9)\qquad \alpha_1 = \frac{\mu_2\nu_3 - \nu_2\mu_3}{\Delta},\quad \beta_1 = \frac{\nu_2\lambda_3 - \lambda_2\nu_3}{\Delta},\quad \gamma_1 = \frac{\lambda_2\mu_3 - \mu_2\lambda_3}{\Delta},\ldots$$

Si l'on ajoute ces équations multipliées respectivement par λ_2, μ_2, ν_2 ou par λ_3, μ_3, ν_3, on obtient les deux relations

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_1\lambda_2 + \beta_1\mu_2 + \gamma_1\nu_2 = 0, \\ \alpha_1\lambda_3 + \beta_1\mu_3 + \gamma_1\nu_2 = 0. \end{array}\right.$$

On aurait de même

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_2\lambda_1 + \beta_2\mu_1 + \gamma_2\nu_1 = 0, \\ \alpha_2\lambda_3 + \beta_2\mu_3 + \gamma_2\nu_3 = 0, \\ \alpha_3\lambda_1 + \beta_3\mu_1 + \gamma_3\nu_1 = 0, \\ \alpha_3\lambda_2 + \beta_3\mu_2 + \gamma_3\nu_2 = 0. \end{array}\right.$$

Si l'on désigne par K_1, K_2, K_3 les directions qui font avec les axes les angles dont les cosinus sont proportionnels à λ_1, μ_1, ν_1, λ_2, μ_2, ν_2, λ_3, μ_3, ν_3, et par H_1, H_2, H_3 les directions qui font avec les mêmes axes les angles dont les cosinus sont proportionnels à α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3; les équations (10) montrent que l'une quelconque de ces directions appartenant à la série K ou à la série H est perpendiculaire aux deux directions de l'autre série qui n'ont pas le même indice.

Les trois directions K_1, K_2, K_3 étant données par les équations (4), il est facile de voir que les directions H_1, H_2, H_3 sont déterminées par les équations

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{l} L\alpha + R'\beta + Q\gamma = s'^2\alpha, \\ R\alpha + M\beta + P'\gamma = s'^2\beta, \\ Q'\alpha + P\beta + N\gamma = s'^2\gamma, \end{array}\right.$$

s'^2 étant une constante qui admet les mêmes valeurs que s^2, car les équations du troisième degré que donneront s^2 et s'^2 sont identiques.

Or ajoutons ces équations multipliées respectivement par λ, μ, ν, en ayant égard aux équations (4), il viendra

$$(s^2 - s'^2)(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu) = 0;$$

et si s^2 et s'^2 ne sont pas la même racine de l'équation qui détermine ces constantes, c'est-à-dire si les quantités $a, \beta, \gamma; \lambda, \mu, \nu$ n'ont pas le même indice, il faudra qu'on ait

$$\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0.$$

Cette équation comprend les six équations (10) et fait voir que les coefficients α, β, γ peuvent être considérés comme aussi bien déterminés par les équations (11) que par les relations (10).

On peut supposer $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, cela revient dans les équations (8) à diviser α, β, γ par $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ et à multiplier θ par la même quantité. Cela posé on reconnaît, à la simple inspection des équations (8), que le déplacement d'une molécule quelconque du milieu élastique est le même que s'il se propageait dans la direction de la normale au plan

$$mx + ny + pz = 0,$$

six ondes planes avec les vitesses s_1 et s_1, s_2 et $-s_2$, s_3 et $-s_3$, car si dans la fonction $f_1(\rho - s_1 t)$ par exemple on augmente t de 1 et ρ de s_1 la fonction conserve la même valeur. Les vibrations qui se propagent avec les vitesses s_1 ou $-s_1$, s_2 ou $-s_2$, s_3 ou $-s_3$ sont parallèles respectivement aux directions H_1, H_2, H_3.

De ces six ondes planes trois sont rétrogrades et trois directes; et tout ce qu'on pourra dire de ces dernières s'appliquera aux autres, nous les considérerons seules dans la discussion.

Les trois directions H_1, H_2, H_3 ne sont pas en général rectangulaires; car, d'après ce qu'on a vu, elles se confondraient avec les directions K_1, K_2, K_3 et il faudrait pour cela que l'on eût

$$P = P', \quad Q = Q', \quad R = R';$$

ces relations existent dans la théorie de Cauchy où les valeurs des N_i et des T_i ne contiennent que quinze coefficients différents au lieu de trente-six.

Cherchons maintenant les relations qui doivent exister entre les trente-six coefficients des N_i et des T_i pour que deux des vibrations soient dans le plan de l'onde. L'une quelconque des directions K étant normale à deux des directions H qui sont celles des vibrations, il suffira d'exprimer que l'une des directions K est normale au plan de l'onde, c'est-à-dire que les équations (4) sont satisfaites pour $\lambda = m$, $\mu = n$, $\nu = p$ quels que soient m, n, p (*).

Passons sous silence les détails de ces calculs assez longs et très-faciles; on trouve entre les trente-six coefficients des N_i et des T_i vingt-quatre relations, ce qui réduit le nombre des coefficients indépendants à douze que nous désignerons par A, B, C, D, E, F, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, et en posant

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{F}n^2 + \mathcal{E}p^2 - 2\,\mathrm{D}np, \\ \mathcal{M} &= \mathcal{D}p^2 + \mathcal{F}m^2 - 2\,\mathrm{E}pm, \\ \mathcal{N} &= \mathcal{E}m^2 + \mathcal{D}n^2 - 2\,\mathrm{F}mn, \\ \mathcal{P} &= -\mathcal{D}np - \mathrm{D}m^2 + \mathrm{E}mn + \mathrm{F}mp, \\ \mathcal{Q} &= -\mathcal{E}pm - \mathrm{E}n^2 + \mathrm{F}np + \mathrm{D}nm, \\ \mathcal{R} &= -\mathcal{F}mn - \mathrm{F}p^2 + \mathrm{D}pm + \mathrm{E}pn. \end{aligned} \right.$$

Les équations (11) qui déterminent les directions des trois vibrations deviennent

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} &(\alpha m + \beta n + \gamma p)(\mathrm{A}m + \mathcal{C}n + \mathcal{B}p) + \mathcal{L}\alpha + \mathcal{R}\beta + \mathcal{Q}\gamma = s^2\alpha, \\ &(\alpha m + \beta n + \gamma p)(\mathcal{C}m + \mathrm{B}n + \mathcal{A}p) + \mathcal{R}\alpha + \mathcal{M}\beta + \mathcal{P}\gamma = s^2\beta, \\ &(\alpha m + \beta n + \gamma p)(\mathcal{B}m + \mathcal{A}n + \mathrm{C}p) + \mathcal{Q}\alpha + \mathcal{P}\beta + \mathcal{N}\gamma = s^2\gamma. \end{aligned} \right.$$

Pour les deux vibrations transversales qui sont dans le plan de l'onde et

---

(*) On peut se demander si au lieu de supposer que deux des vibrations sont dans le plan de l'onde, il ne serait pas plus naturel de supposer, en se rapprochant à cet égard des idées de Fresnel, que les vibrations ne sont pas parallèles à l'onde, mais que les composantes parallèles à l'onde de ces vibrations contribuent seules à produire les phénomènes lumineux. Il résulterait de là que, les trois directions trouvées pour les vibrations n'ayant à priori rien qui les distingue l'une de l'autre, on devrait avoir une triple réfraction, c'est-à-dire trois rayons lumineux. Si l'on n'en a jamais observé que deux, cela peut bien tenir en effet à ce que les cristaux sur lesquels les expériences ont été faites, et qui sont principalement l'arragonite et la topaze, sont peu éloignés d'être monoréfringents, en sorte que l'une des vibrations qu'ils peuvent propager, étant presque parallèle à la normale au plan de l'onde, ne peut donner parallèlement à ce plan qu'une composante très-petite dont les effets auront échappé à l'observation. On voit quel intérêt on aurait à connaître un cristal d'élasticité notablement différente dans les diverses directions.

auxquelles on rapporte les phénomènes lumineux, on a

$$\alpha m + \beta n + \gamma p = 0,$$

et les équations (13) se réduisent aux suivantes :

$$(14) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{L}\alpha + \mathfrak{R}\beta + \mathfrak{Q}\gamma = s^2\alpha \\ \mathfrak{R}\alpha + \mathfrak{M}\beta + \mathfrak{P}\gamma = s^2\beta \\ \mathfrak{Q}\alpha + \mathfrak{P}\beta + \mathfrak{N}\gamma = s^2\gamma. \end{array} \right.$$

On sait et il résulte d'ailleurs de remarques faites précédemment que les trois directions déterminées par les équations (14) sont rectangulaires, et puisque deux d'entre elles doivent être dans le plan de l'onde, la troisième doit être normale à ce plan. Si donc on fait dans les équations (14) $\alpha = m$, $\beta = n$, $\gamma = p$, elles doivent être satisfaites avec une valeur convenable de s^2. Cette valeur est nulle, car l'hypothèse précédente annule les premiers membres des équations (14), comme on le vérifie facilement en ayant égard aux équations (12).

Il résulte de là que l'équation du troisième degré en s^2 qu'on déduirait de l'élimination de α, β, γ, entre les équations (13), et celle qu'on déduirait de la même manière des équations (14), auront deux racines communes, celles qui sont relatives aux vibrations transversales. La troisième racine de la seconde équation étant nulle, on aura la troisième racine σ^2 de la première en retranchant de la somme des racines de la première la somme des racines de la seconde, on a ainsi :

$$(15) \qquad \sigma^2 = \mathrm{A}m^2 + \mathrm{B}n^2 + \mathrm{C}p^2 + 2\,\mathfrak{A}np + 2\,\mathfrak{B}pm + 2\,\mathfrak{C}mn.$$

Cette troisième vibration n'est pas en général normale au plan de l'onde, car il faudrait pour cela que les équations (13) admissent pour solution $\alpha = m$, $\beta = n$, $\gamma = p$. Dans cette hypothèse elles se réduiraient à

$$\mathrm{A}m + \mathfrak{C}n + \mathfrak{A}p = s^2 m,$$

$$\mathfrak{C}m + \mathrm{B}n + \mathfrak{A}p = s^2 n,$$

$$\mathfrak{B}m + \mathfrak{A}n + \mathrm{C}p = s^2 p,$$

et pour que ces équations pussent être satisfaites, quels que fussent m, n, p, il faudrait qu'on eût

$$A = B = C,$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C} = 0,$$

ce qui réduirait la valeur de σ^2 à une constante A.

Un fait digne de remarque dans notre théorie, c'est que les coefficients, dont dépend la valeur de σ^2 ou du carré de la vitesse de propagation de la vibration non transversale, ne sont pas les mêmes que ceux dont dépendent les valeurs des vitesses de propagation des deux vibrations transversales.

Dans la théorie de Cauchy, ces coefficients ne sont pas indépendants, parce que les valeurs adoptées pour les N_i et les T_i par ce savant sont moins générales que les nôtres et sont telles d'ailleurs que, si on voulait exprimer que deux vibrations sont exactement dans le plan de l'onde, on trouverait que cela ne peut arriver que pour des milieux monoréfringents.

Il ne faut pas oublier que dans notre théorie les vitesses de propagation des mouvements moléculaires sont indépendantes de la nature de ces mouvements, puisque leurs projections sur les trois axes sont représentées par des fonctions tout à fait arbitraires, et qu'il en est de même des directions suivant lesquelles il faudra décomposer les mouvements pour séparer en quelque sorte les composantes de ces mouvements qui se propagent avec des vitesses différentes.

Ces résultats ne sont vrais que dans les limites d'une première approximation, et l'insuffisance des développements adoptés pour les N_i et les T_i ne nous a pas permis d'apercevoir les particularités qui peuvent appartenir à chaque nature de mouvement, comme la dispersion qui est due à une inégalité dans les vitesses de propagation des ondes de couleurs différentes.

Les trois directions déterminées par les équations (14) sont rectangulaires entre elles; donc les deux qui sont les directions des vibrations lumineuses, et qui sont dans le plan de l'onde, doivent être perpendiculaires l'une à l'autre.

Pour achever de déterminer ces directions, posons avec M. Lamé

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} U &= \mathcal{D}(\gamma n - \beta p) + F(\alpha p - \gamma m) + E(\beta m - \alpha n), \\ V &= F(\gamma n - \beta p) + \mathcal{E}(\alpha p - \gamma m) + D(\beta m - \alpha n), \\ W &= E(\gamma n - \beta p) + D(\alpha p - \gamma m) + \mathcal{F}(\beta m - \alpha n). \end{aligned}\right.$$

Remarquons en outre que la première des équations (14) peut s'écrire, en remplaçant $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{Q}$, par leurs valeurs,

$$\mathfrak{F}n(\alpha n-\beta m)+\mathcal{E}p(\alpha p-\gamma m)+\mathrm{D}n(\gamma m-\alpha p)+\mathrm{D}p(\beta m-\alpha n)$$
$$+\mathrm{E}n(\beta p-\gamma n)+\mathrm{F}p(\gamma n-\beta p)=s^2\alpha.$$

Cette équation revient à la première des trois suivantes; les deux autres s'obtiendraient de la même manière :

$$(17)\qquad\left\{\begin{aligned}\mathrm{V}p-\mathrm{W}n&=s^2\alpha,\\ \mathrm{W}m-\mathrm{U}p&=s^2\beta,\\ \mathrm{U}n-\mathrm{V}m&=s^2\gamma.\end{aligned}\right.$$

On pourrait faire voir, comme l'indique M. Lamé, qu'en substituant aux axes tout à fait quelconques dont nous avons fait usage jusqu'ici, des axes convenablement choisis, les coefficients D, E, F seraient nuls. Je préfère, à cette transformation assez longue de coordonnées, l'artifice suivant qui donne directement la loi d'après laquelle on peut déterminer les directions des vibrations et construire géométriquement les vitesses avec lesquelles elles se propagent.

Désignons par H_1, H_2, N les directions des deux vibrations transversales et de la normale au plan de l'onde, ces trois directions sont rectangulaires. Désignons toujours par α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; m, n, p leurs coefficients angulaires et par s_1 et s_2 les vitesses de propagation des deux vibrations.

On aura, à un facteur constant près, qu'on peut supposer égal à 1 :

$$(18)\qquad\left\{\begin{aligned}&\alpha_2=\gamma_1 n-\beta_1 p,\quad \beta_2=\alpha_1 p-\gamma_1 m,\quad \gamma_2=\beta_1 m-\alpha_1 n,\\ &\alpha_1=\gamma_2 n-\beta_2 p,\quad \beta_1=\alpha_2 p-\gamma_2 m,\quad \gamma_1=\beta_2 m-\alpha_2 n.\end{aligned}\right.$$

Les fonctions U, V, W auront deux systèmes de valeurs correspondant aux deux vibrations. Posons, pour préciser, en tenant compte des valeurs (18),

$$(19)\qquad\left\{\begin{aligned}&\mathrm{U}_2=\mathfrak{D}\alpha_2+\mathrm{F}\beta_2+\mathrm{E}\gamma_2,\qquad \mathrm{U}_1=\mathfrak{D}\alpha_1+\mathrm{F}\beta_1+\mathrm{E}\gamma_1,\\ &\mathrm{V}_2=\mathrm{F}\alpha_2+\mathcal{E}\beta_2+\mathrm{D}\gamma_2,\qquad \mathrm{V}_1=\mathrm{F}\alpha_1+\mathcal{E}\beta_1+\mathrm{D}\gamma_1,\\ &\mathrm{W}_2=\mathrm{E}\alpha_2+\mathrm{D}\beta_2+\mathfrak{F}\gamma_2,\qquad \mathrm{W}_1=\mathrm{E}\alpha_1+\mathrm{D}\beta_1+\mathfrak{F}\gamma_1.\end{aligned}\right.$$

Les équations (17) donneront alors les deux groupes suivants :

$$(20)\qquad \begin{cases} V_2 p - W_2 n = s_1^2 \alpha_1, & V_1 p - W_1 n = s_2^2 \alpha_2, \\ W_2 m - U_2 p = s_1^2 \beta_1, & W_1 m - U_1 p = s_2^2 \beta_2, \\ U_2 n - V_2 m = s_1^2 \gamma_1, & U_1 n - V_1 m = s_2^2 \gamma_2. \end{cases}$$

Désignons par α', β', γ' les cosinus des angles que fait avec les axes une direction quelconque, et par r un rayon vecteur pris sur cette direction : considérons en outre la surface du second ordre ayant pour équation :

$$(21)\qquad \frac{1}{r^2} = \mathcal{D}\alpha'^2 + \mathcal{E}\beta'^2 + \mathcal{F}\gamma'^2 + 2D\beta'\gamma' + 2E\gamma'\alpha' + 2F\alpha'\beta';$$

coupons cette surface par le plan parallèle à l'onde,

$$mx + ny + pz = 0,$$

et cherchons les axes de la section. Les valeurs de α', β', γ' qui déterminent les directions de ces axes, satisferont aux relations suivantes dont les trois dernières expriment que r est maximum ou minimum :

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 0, \qquad m\alpha' + n\beta' + p\gamma' = 0,$$

$$\alpha' d\alpha' + \beta' d\beta' + \gamma' d\gamma' = 0, \qquad m d\alpha' + n d\beta' + p d\gamma' = 0,$$

$$(\mathcal{D}\alpha' + F\beta' + E\gamma')d\alpha' + (F\alpha' + \mathcal{E}\beta' + D\gamma')d\beta' + (E\alpha' + D\beta' + \mathcal{F}\gamma')d\gamma' = 0.$$

Éliminant $d\alpha'$, $d\beta'$, $d\gamma'$, il vient

$$(22)\qquad \begin{cases} (\mathcal{D}\alpha' + F\beta' + E\gamma')(\gamma' n - \beta' p) + (F\alpha' + \mathcal{E}\beta' + D\gamma')(\alpha' p - \gamma' m) \\ \qquad + (E\alpha' + D\beta' + \mathcal{F}\gamma')(\beta' m - \alpha' n) = 0. \end{cases}$$

Désignons par α'_1, β'_1, γ'_1; α'_2, β'_2, γ'_2 les deux systèmes de valeurs de α', β', γ', lesquelles répondent aux deux axes de la section plane faite dans la surface (21), et posons

$$(23)\qquad \begin{cases} U'_2 = \mathcal{D}\alpha'_2 + F\beta'_2 + E\gamma'_2, & U'_1 = \mathcal{D}\alpha'_1 + F\beta'_1 + E\gamma'_1, \\ V'_2 = F\alpha'_2 + \mathcal{E}\beta'_2 + D\gamma'_2, & V'_1 = F\alpha'_1 + \mathcal{E}\beta'_1 + D\gamma'_1, \\ W'_2 = E\alpha'_2 + D\beta'_2 + \mathcal{F}\gamma'_2, & W'_1 = E\alpha'_1 + D\beta'_1 + \mathcal{F}\gamma'_1; \end{cases}$$

alors l'équation (22) permet d'écrire les suivantes :

$$(24)\quad \alpha'_1(V'_1 p - W'_1 n) + \beta'_1(W'_1 m - U'_1 p) + \gamma'_1(U'_1 n - V'_1 m) = 0,$$

avec

$$m\alpha'_1 + n\beta'_1 + p\gamma'_1 = 0,$$

$$(25)\quad \alpha'_2(V'_2 p - W'_2 n) + \beta'_2(W'_2 m - U'_2 p) + \gamma'_2(U'_2 n - V'_2 m) = 0,$$

avec

$$m\alpha'_2 + n\beta'_2 + p\gamma'_2 = 0.$$

Si nous considérons par exemple la droite dont les coefficients angulaires sont proportionnels à

$$V'_2 p - W'_2 n,\quad W'_2 m - U'_2 p,\quad U'_2 n - V'_2 m,$$

l'équation (25) exprime que cette droite est perpendiculaire à l'axe de la section plane $(\alpha'_2, \beta'_2, \gamma'_2)$. On vérifie sans peine qu'elle est aussi perpendiculaire à la normale (m, n, p), au plan de l'onde; cette droite est donc l'autre axe de la section plane. Partant de là, on obtient évidemment le premier groupe des équations suivantes, le deuxième groupe se déduirait de même des équations (24),

$$(26)\quad \begin{cases} V'_2 p - W'_2 n = s'^2_1 \alpha'_1, & V'_1 p - W'_1 n = s'^2_2 \alpha'_2, \\ W'_2 m - U'_2 p = s'^2_1 \beta'_1, & W'_1 m - U'_1 p = s'^2_2 \beta'_2, \\ U'_2 n - V'_2 m = s'^2_1 \gamma'_1, & U'_1 n - V'_1 m = s'^2_2 \gamma'_2, \end{cases}$$

s'^2_1 et s'^2_2 étant deux constantes.

On voit que les groupes (20) qui déterminent $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, s_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, s_2$, et les groupes (26) qui déterminent $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, s'_1,, \alpha'_2, \beta'_2, \gamma'_2, s'_2$, sont identiques. On en conclut d'abord que les directions des vibrations sont celles des axes de la section plane faite par le plan de l'onde dans la surface (21), et ensuite que l'on a

$$s^2_1 = s'^2_1,\quad s^2_2 = s'^2_2;$$

s_1 ou s'_1 est la vitesse de propagation de la vibration $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ et s_2 ou s'_2 celle de la vibration $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$.

Maintenant considérons, par exemple, les équations du second groupe (26), et ajoutons-les, après les avoir multipliées respectivement par $\alpha'_2, \beta'_2, \gamma'_2$, il viendra, en ayant égard aux relations (18),

$$s_2^2 = s'^2_2 = \alpha'_1 U'_1 + \beta'_1 V'_1 + \gamma'_1 W'_1,$$

ou

$$s_2^2 = \alpha'_1 (\mathfrak{D}\alpha'_1 + F\beta'_1 + E\gamma'_1) + \beta'_1 (F\alpha'_1 + \mathcal{E}\beta'_1 + D\gamma'_1) \\ + \gamma'_1 (E\alpha'_1 + D\beta'_1 + \mathfrak{F}\gamma'_1) = \frac{1}{r_1^2}.$$

On aurait de même

$$s_1^2 = s'_1{}^2 = \frac{1}{r_2^2}.$$

Ce qui montre que la vitesse de propagation de chaque vibration est l'inverse de la grandeur du demi-axe auquel elle est perpendiculaire dans la section de la surface du second ordre (21) par le plan de l'onde. Comme la vitesse de propagation ne saurait être nulle dans aucune direction, il faut admettre que cette surface est un ellipsoïde.

Les directions que nous venons de trouver pour les vibrations sont perpendiculaires à celles que Fresnel avait admises à priori, et les mêmes que celles trouvées par Cauchy, dans le Mémoire où il a cherché à déterminer ces directions; nous pensons donc qu'il y a lieu de substituer dans cette partie de la théorie les résultats auxquels nous sommes parvenus à l'hypothèse que Fresnel avait admise.

Avant de chercher l'équation aux vitesses des ondes planes et celle de l'onde élémentaire, nous allons établir quelques théorèmes de géométrie qui nous sont nécessaires.

II.

Théorèmes préliminaires.

THÉORÈME I.

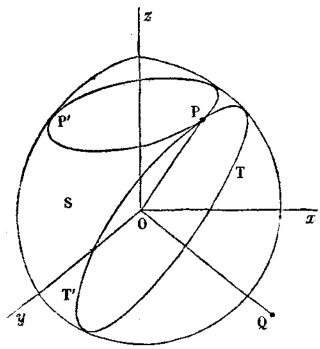
Soit une surface quelconque S et O un point fixe par lequel on fait dans la surface des sections TT′, ayant toutes les directions possibles. Dans chacune de ces sections TT′, on abaisse OP normal à son contour et on porte sur la normale au plan TT′, OQ = OP. J'appellerai le lieu des points Q la surface dérivée de la surface S.

Soit

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

l'équation de la surface S rapportée à trois axes rectangulaires passant par

Fig. 1.



le point O. Coupons cette surface par une série de sphères ayant leurs centres en O et des rayons Δ variables. Soit PP′ l'intersection de la surface par l'une de ces sphères, et considérons un plan tangent quelconque TT′, au cône qui a O pour sommet et la courbe PP′ pour directrice.

OP la génératrice de contact sera normale à PP′; en prenant donc OQ = OP sur la perpendiculaire au plan TT′, Q sera un point de la surface dérivée; nous désignerons ses coordonnées par ξ, η, ζ.

OQ étant normal à OP et à la génératrice du cône infiniment voisine, on aura les deux relations

$$\xi x + \eta y + \zeta z = 0, \tag{2}$$

$$\xi\, dx + \eta\, dy + \zeta\, dz = 0, \tag{3}$$

auxquelles il faut joindre les suivantes

$$x dx + y dy + z dz = 0, \tag{4}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 + \eta + \zeta^2, \tag{5}$$

qui expriment que les génératrices du cône passent par la courbe PP′ et que OQ est égal à OP.

Enfin l'équation (1) de la surface S donne

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0. \tag{6}$$

Éliminant dx, dy, dz, des trois relations (3), (4), (6), il vient

$$\xi\left(y\frac{df}{dz} - z\frac{df}{dy}\right) + \eta\left(z\frac{df}{dx} - x\frac{df}{dz}\right) + \zeta\left(x\frac{df}{dy} - y\frac{df}{dx}\right) = 0 \tag{7}$$

On obtiendrait l'équation de la surface dérivée, lieu des points Q, en éliminant x, y, z entre les quatre équations (1), (2), (5), (7).

Cherchons la direction du plan tangent en Q (ξ, η, ζ) à la surface dérivée; quand le point P (x, y, z) se déplace infiniment peu sur la surface S dans une direction quelconque, le point Q a un déplacement correspondant sur la surface dérivée; et pour tous ces déplacements on a, en vertu des relations (2), (5), (6),

$$\left\{\begin{aligned} \xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz &= -(x\,d\xi + y\,d\eta + z\,d\zeta),\\ x\,dx + y\,dy + z\,dz &= \xi\,d\xi + \eta\,d\eta + \zeta\,d\zeta,\\ \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz &= 0. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Si on tirait de ces équations dx, dy, dz, le dénominateur commun des valeurs de ces différentielles serait nul en vertu de l'équation (7). Les équations (8) ne sont donc pas distinctes, et en les ajoutant, après avoir multiplié la deuxième par λ et la troisième par μ, on devra avoir une équation identiquement nulle par un choix convenable des indéterminées λ et μ. Or le second membre de la dernière équation étant nul, on doit avoir les relations suivantes, qui ne sont plus des identités :

$$(\lambda\xi - x)\,d\xi + (\lambda\eta - y)\,d\eta + (\lambda\zeta - z)\,d\zeta = 0, \tag{9}$$

$$(\lambda x + \xi)\,dx + (\lambda y + \eta)\,dy + (\lambda z + \zeta)\,dz = 0. \tag{10}$$

Ces relations ayant lieu quels que soient les déplacements élémentaires (dx, dy, dz) $(d\xi, d\eta, d\zeta)$, on en conclut que les coefficients angulaires des plans tangents en P à la surface S et en Q à la surface dérivée sont respectivement proportionnels à

$$\lambda x + \xi, \quad \lambda y + \eta, \quad \lambda z + \zeta,$$

$$\lambda \xi - x, \quad \lambda \eta - y, \quad \lambda \zeta - z.$$

En ayant égard aux relations (2), (5), on vérifie facilement que ces deux plans sont perpendiculaires entre eux et perpendiculaires tous deux au plan POQ, dont les coefficients angulaires sont proportionnels à

$$\eta z - \zeta y, \quad \zeta x - \xi z, \quad \xi y - \eta x.$$

Quant à la valeur du coefficient λ, on l'obtient en remarquant que les coefficients angulaires du plan tangent en P étant proportionnels à $\lambda x + \xi$, $\lambda y + \eta$, $\lambda z + \xi$, ou bien à $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{dz}$, on a

$$(11) \quad \frac{\lambda x + \xi}{\frac{df}{dx}} = \frac{\lambda y + \eta}{\frac{df}{dy}} = \frac{\lambda z + \zeta}{\frac{df}{dz}} = \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{\xi \frac{df}{dx} + \eta \frac{df}{dy} + \zeta \frac{df}{dz}} = \frac{\lambda (x^2 + y^2 + z^2)}{x \frac{df}{dx} + y \frac{df}{dy} + z \frac{df}{dz}}.$$

Les deux dernières relations s'obtiennent en ajoutant terme à terme les trois premières, après avoir multiplié les deux termes de chacune d'elles respectivement par ξ, η, ζ, puis par x, y, z, et en ayant égard à l'équation (2); on a donc à cause de la relation (5)

$$(12) \qquad \lambda = \frac{x \frac{df}{dx} + y \frac{df}{dy} + z \frac{df}{dz}}{\xi \frac{df}{dx} + \eta \frac{df}{dy} + \zeta \frac{df}{dz}}.$$

Supposons pour exemple que la surface S soit la surface du second ordre,

$$(13) \qquad A x^2 + B y^2 + C z^2 = D,$$

on a alors

$$x \frac{df}{dx} + y \frac{df}{dy} + z \frac{df}{dz} = 2D,$$

et les équations (11) donneront, en les divisant par λ et remarquant que

$\Delta^2 = x^2 + y^2 + z^2$,

$$x + \frac{\xi}{\lambda} = \frac{\Delta^2 \frac{df}{dx}}{2D}, \quad y + \frac{\eta}{\lambda} = \frac{\Delta^2 \frac{df}{dy}}{2D}, \quad z + \frac{\zeta}{\lambda} = \frac{\Delta^2 \frac{df}{dz}}{2D},$$

ou bien

$$\frac{\xi}{\lambda} = \frac{x(A\Delta^2 - D)}{D}, \quad \frac{\eta}{\lambda} = y\frac{(B\Delta^2 - D)}{D}, \quad \frac{\zeta}{\lambda} = z\frac{(C\Delta^2 - D)}{D};$$

ou bien enfin

$$\frac{\xi}{A\Delta^2 - D} = \frac{\lambda x}{D}; \quad \frac{\eta}{B\Delta^2 - D} = \frac{\lambda y}{D}, \quad \frac{\zeta}{C\Delta^2 - D} = \frac{\lambda z}{D}.$$

Ajoutons ces équations respectivement multipliées par ξ, η, ζ, il viendra en égard à la relation (2)

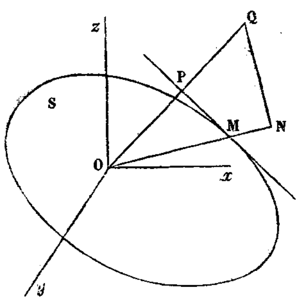
$$(14) \qquad \frac{\xi^2}{A\Delta^2 - D} + \frac{\eta^2}{B\Delta^2 - D} + \frac{\zeta^2}{C\Delta^2 - D} = 0,$$

et si dans cette équation on remplace Δ^2 par sa valeur $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, on aura l'équation de la surface dérivée de la surface du second ordre (13).

THÉORÈME II.

Soit S une surface quelconque et O un point fixe; si l'on abaisse sur le

Fig. 2.



plant tangent à la surface en un point quelconque M une perpendiculaire rencontrant ce plan en P, et qu'on prenne $OQ = \frac{k^2}{OP}$, k étant une constante, la surface lieu des points Q est dite réciproque de la surface R par rapport à la sphère de rayon k.

Prenons trois axes rectangulaires passant par le point O et désignons par x, y, z; ξ, η, ζ, les coordonnées des points M et Q, on aura

$$pq = k^2,$$

en posant $OP = p$, $CQ = q$; OQ étant normal au plan tangent en M (x, y, z), on a

$$(15) \qquad \xi\, dx + \eta\, dy + \zeta\, dx = 0;$$

OP ou p étant la projection de OM sur OQ, on aura

$$p = x\frac{\zeta}{q} + y\frac{\eta}{q} + z\frac{\zeta}{q},$$

ou

$$(16) \qquad pq = k^2 = \xi x + \eta y + \zeta z.$$

Différentions cette équation en ayant égard à l'équation (15), il viendra

$$x d\xi + y d\eta + z d\zeta = 0,$$

et comme le déplacement $(d\xi, d\eta, d\zeta)$ est quelconque sur la surface réciproque (Q), on en conclut que le plan tangent en Q à cette surface est normal à OM et rencontre cette droite en un point N, que détermine la relation

$$OM \times ON = pq,$$

tirée de la similitude des triangles rectangles POM et QON. On en conclut que la surface S est la réciproque de sa réciproque.

Si la surface donnée S a pour équation

$$f(x, y, z) = 0,$$

et qu'on pose

$$\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2 = R^2,$$

on aura

$$\xi = q\,\frac{\frac{df}{dx}}{R}, \quad \eta = q\,\frac{\frac{df}{dy}}{R}, \quad \zeta = q\,\frac{\frac{df}{dz}}{R}.$$

Si on élimine x, y, z entre ces trois équations et celle de la surface, on aura l'équation de la surface réciproque.

Supposons, par exemple, que le surface donnée S ait pour équation

$$(17) \qquad A x^2 + B y^2 + C z^2 = D,$$

on aura

$$R^2 = 4(A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2),$$

$$\xi = 2q\frac{Ax}{R}, \quad \eta = 2q\frac{By}{R}, \quad \zeta = 2q\frac{Cz}{R},$$

d'où

$$\frac{\xi^2}{A} + \frac{\eta^2}{B} + \frac{\zeta^2}{C} = \frac{2q}{R}(\xi x + \eta y + \zeta z) = \frac{2pq^2}{R} = \frac{2k^4}{pR} = \frac{k^4}{D},$$

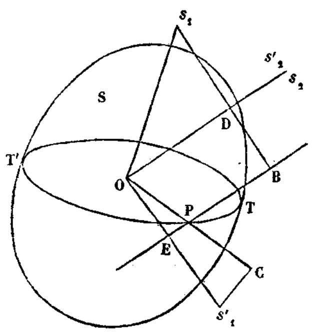
ou

$$(18) \qquad \frac{\xi^2}{A} + \frac{\eta^2}{B} + \frac{\zeta^2}{C} = \frac{k^4}{D} \text{ (*)}.$$

THÉORÈME III.

Soit S une surface quelconque, S_1 la surface dérivée de S et S_2 la surface

Fig. 3.



réciproque de S_1; soit encore S'_1 la surface réciproque de S, et S'_2 la surface dérivée de S'_1. Je dis que les deux surfaces S_2 et S'_2 sont identiques.

Soit TT' une section plane faite dans la surface donnée S et passant par un point fixe O, cherchons la surface S_1 dérivée de S; OP étant une normale au contour de la section TT', en prenant $Os_1 = OP$ sur la normale

(*) Les deux théorèmes que nous venons d'indiquer peuvent être établis par des considérations géométriques, mais les démonstrations analytiques que nous avons données nous paraissent plus concluantes.

à son plan, s_1 sera un point de la surface dérivée S_1. D'après le théorème I, le plan tangent en P à la surface S et le plan tangent en s_1 à la surface S_1, sont perpendiculaires entre eux et perpendiculaires au plan POs_1; soient PB et s_1B leurs traces sur ce dernier plan. La normale OD au plan tangent en s_1 sera aussi dans le plan POs_1 et en prenant sur cette normale $Os_2 = \frac{k^2}{OD}$, s_2 sera un point de la surface S_2 réciproque de S_1.

Pour avoir la surface S'_1 réciproque de la surface donnée S, on remarquera que la normale OE au plan tangent en P sera dans le plan POs_1, et en prenant $Os'_1 = \frac{k^2}{OE}$, s'_1 sera un point de S'_1. Mais l'égalité évidente des deux triangles DOs_1 et POE donne OE = OD, d'où l'on conclut $os_2 = os'_1$; or le plan tangent en s'_1 à la surface S'_1 est normal à OP et par suite au plan POs_1, donc os'_1 est normal au contour de la section que ferait dans la surface S'_1 le plan normal au plan POs_1 et passant par Os'_1 ; OD par suite sera la normale au plan de cette section, et en portant sur cette normale une longueur égale à Os'_1, ou à Os_2, on aura un point de la surface S'_2 dérivée de S'_1. On voit donc qu'au même point P de la surface donnée correspond le même point s_2 ou s'_2 des surfaces S_2 et S'_2. Le théorème est donc démontré.

III.

De la surface de l'onde élémentaire.

Quand une onde plane vient frapper la surface d'un milieu diaphane, on admet que les molécules d'éther situées à sa surface deviennent les centres d'ondes élémentaires qui se propagent dans l'intérieur du milieu. Toutes ces ondes élémentaires seront semblables et semblablement placées si le milieu est homogène, et on fait voir sans difficulté qu'elles sont toutes enveloppées par un plan qui est le plan de l'onde réfractée et sur lequel se concentrent les mouvements vibratoires.

L'onde élémentaire qui aurait pris naissance en un point de la surface de séparation des deux milieux depuis un temps égal à l'unité par exemple, devra, d'après ce qui précède, être touchée par toutes les ondes planes qui peuvent se réfracter dans le milieu et qui seraient passées au centre de l'onde élémentaire au moment où celle-ci prenait naissance. La surface de l'onde élémentaire doit donc être l'enveloppe de toutes les ondes planes qui seraient parties d'un même point dans toutes les directions depuis un temps égal à l'unité en se propageant chacune avec sa vitesse propre.

Il faut remarquer de plus que l'onde plane réfractée ne sera active que dans la partie où elle enveloppe réellement les ondes élémentaires qui ont pris naissance aux points de la surface de séparation ébranlés par l'onde incidente. Si la portion ébranlée de cette surface est très-petite, c'est-à-dire si elle est frappée par un simple *rayon incident*, l'onde plane réfractée ne sera active que sur une très-petite étendue; en joignant le point où la surface de séparation est rencontrée par le rayon incident au point où l'onde élémentaire qui y a pris naissance est touchée par l'onde plane réfractée, on aura la direction du *rayon réfracté*, c'est-à-dire la ligne sur laquelle les molécules d'éther sont successivement mises en vibration.

Nous avons vu au § Ier que si l'on considère une onde plane parallèle au plan

$$(1) \qquad mx + ny + pz = 0,$$

et si on coupe par ce plan l'ellipsoïde

$$\mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = 1,$$

les vibrations transversales que l'onde plane peut propager sont parallèles aux axes de section elliptique, et la vitesse de propagation de chacune d'elles est l'inverse du demi-axe de cette section auquel elle est perpendiculaire.

En rapportant l'ellipsoïde à ses axes, on peut mettre son équation sous la forme

$$(2) \qquad a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = k^4.$$

La constante k peut être supposée égale à l'unité; mais pour l'homogénité nous laisserons l'équation de l'ellipsoïde sous la forme (2), et nous supposons pour fixer le idées $a < b < c$.

Soit donc TT′ une section plane de l'ellipsoïde (2), OP et OP′ ses axes. Prenons sur la normale au plan de la section

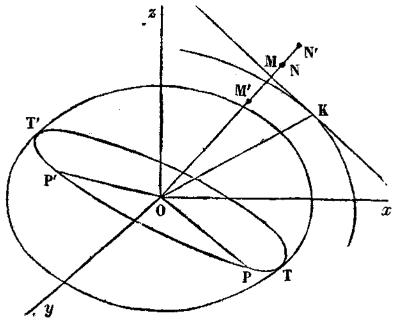
$$ON = OP, \quad ON' = OP',$$

puis

$$OM = \frac{k^2}{ON}, \quad OM' = \frac{k^2}{ON'}.$$

Si par les points M et M′ nous menons deux plans perpendiculaires à ON,

Fig. 4.



ces plans devront être tangents à la surface de l'onde élémentaire. Considérons l'un de ces plans et soit K son point de tangence. Puisque ON est perpendiculaire au plan tangent en K à la surface de l'onde et que $OM \times ON = k^2$, la surface lieu des points N est la réciproque de la surface de l'onde et inversement; mais la surface (N) est la dérivée de l'ellipsoïde (2). Il en résulte, à cause du théorème III du paragraphe précédent, qu'on obtiendra la surface de l'onde en prenant : 1° la surface réciproque de l'ellipsoïde (2), ce qui donne, d'après l'équation (18) du théorème II, l'autre ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \tag{3}$$

2° la surface dérivée de l'ellipsoïde (3); d'après la relation (14) du théorème I, cette surface dérivée qui sera la surface de l'onde, aura pour équation

$$\frac{x^2}{\frac{\Delta^2}{a^2} - 1} + \frac{y^2}{\frac{\Delta^2}{b^2} - 1} + \frac{z^2}{\frac{\Delta^2}{c^2} - 1} = 0,$$

ou bien

$$\frac{a^2x^2}{\Delta^2 - a^2} + \frac{b^2y^2}{\Delta^2 - b^2} + \frac{c^2y^2}{\Delta^2 - c^2} = 0. \tag{4}$$

Dans cette équation Δ^2 représente la quantité $x^2 + y^2 + z^2$; en ajoutant à l'équation (4) divisée par Δ^2, l'équation identique

$$\frac{x^2}{\Delta^2} + \frac{y^2}{\Delta^2} + \frac{z^2}{\Delta^2} = 1,$$

on obtient

$$(5)\qquad \frac{x^2}{\Delta^2 - a^2} + \frac{y^2}{\Delta^2 - b^2} + \frac{z^2}{\Delta^2 - c^2} = 1;$$

c'est cette forme de l'équation de la surface de l'onde qui nous servira dans la discussion (*).

Il faut observer que dans la figure précédente OK représente la direction du rayon lumineux correspondant à la grandeur OM de la vitesse de propagation normale et par suite à la vibration OP', puisque l'on a pris

$$\mathrm{OM} = \frac{k^2}{\mathrm{ON}} = \frac{k^2}{\mathrm{OP}}.$$

Il résulte de là que dans notre théorie chaque vibration est perpendiculaire à la direction de propagation normale et au rayon lumineux qui lui correspondent; car OK est dans le plan NOP, puisque OK est normal au plan tangent en N à la surface dérivée de l'ellipsoïde, et que ce plan tangent est perpendiculaire au plan NOP.

Si maintenant on imagine que l'on coupe la surface de l'onde par une série de sphères, les courbes d'intersection seront sur des cônes du second degré, comme le montre l'équation (4). Ces courbes sphériques étant partout normales aux rayons vecteurs de la surface de l'onde, il résulte des observations faites tout à l'heure, que c'est tangentiellement à ces courbes que doivent s'effectuer les vibrations; nous reviendrons plus tard sur les propriétés dont jouissent ces courbes sphériques.

Imaginons trois surfaces homofocales du second ordre ayant pour équa-

---

(*) On peut se demander quelle serait l'onde élémentaire correspondant à la vibration non transversale dont la vitesse de propagation est donnée par l'équation

$$\sigma^2 = \mathrm{A}m^2 + \mathrm{B}n^2 + \mathrm{C}p^2 + 2\mathcal{A}np + 2\mathcal{B}pm + 2\mathcal{C}mn.$$

La discussion qui précède, appliquée à cette équation, ferait voir que l'onde relative à la vibration non transversale est l'ellipsoïde réciproque du suivant

$$\frac{k^4}{r^2} = \mathrm{A}m^2 + \mathrm{B}n^2 + \mathrm{C}p^2 + 2\mathcal{A}np + 2\mathcal{B}pm + 2\mathcal{C}mn;$$

mais, au point de vue géométrique, cet ellipsoïde n'a aucun rapport avec la surface que représente l'équation (5) et dépend, comme on l'a vu, de coefficients tout différents.

tions

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\rho^2-a^2}+\dfrac{y^2}{\rho^2-b^2}+\dfrac{z^2}{\rho^2-c^2}=1, \\ \dfrac{x^2}{\mu^2-a^2}+\dfrac{y^2}{\mu^2-b^2}+\dfrac{z^2}{\mu^2-c^2}=1, \\ \dfrac{x^2}{\nu^2-a^2}+\dfrac{y^2}{\nu^2-b^2}+\dfrac{z^2}{\nu^2-c^2}=1. \end{cases}$$

En faisant varier les paramètres ρ, μ, ν de ces équations, on a trois familles de surfaces, et ces paramètres seront les coordonnées elliptiques du point dont x, y, z sont les coordonnées rectangulaires.

Les trois équations (6) sont comprises dans la suivante :

$$(7)\qquad \frac{x^2}{\lambda^2-a^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-b^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-c^2}=1.$$

En sorte qu'en supposant x, y, z données, ρ^2, μ^2, ν^2 sont les trois racines de l'équation (7) du troisième degré en λ^2; ces racines sont comprises, la première ν^2 entre a^2 et b^2, la deuxième μ^2 entre b^2 et c^2, la troisième ρ^2 entre c^2 et l'infini, en sorte que les équations (6) représentent trois familles d'ellipsoïdes, d'hyperboloïdes à une nappe et d'hyperboloïdes à deux nappes; ces trois familles de surfaces conjuguées ont pour distances focales

$$b' = \sqrt{b^2-a^2}, \quad c' = \sqrt{c^2-a^2}.$$

Si dans l'équation (7) on chasse les dénominateurs pour ordonner par rapport à λ^2, le coefficient de λ^4 sera $-(a^2+b^2+c^2+x^2+y^2+z^2)$. On aura donc

$$(8)\qquad x^2+y^2+z^2+a^2+b^2+c^2=\rho^2+\mu^2+\nu^2.$$

Si dans l'équation (5) on considère Δ^2 comme une inconnue, qu'on chasse les dénominateurs et qu'on ordonne par rapport à Δ^2, les coefficients de l'équation auront évidemment en $a^2, b^2, c^2, x^2, y^2, z^2$ la même composition que ceux de l'équation (7) ordonnée par rapport à λ^2. Donc si dans l'équation en Δ^2, on remplacait x^2, y^2, z^2 par les valeurs exprimées en ρ^2, μ^2, ν^2, elle devrait se réduire à

$$(\Delta^2-\rho^2)(\Delta^2-\mu^2)(\Delta^2-\nu^2)=0.$$

Telle est l'équation de la surface de l'onde en coordonnées elliptiques; elle se décompose en trois

(9) $\quad \Delta^2 = \nu^2$, ou bien, à cause de l'équation (8), $\rho^2 + \mu^2 = a^2 + b^2 + c^2$,

(10) $\quad \Delta^2 = \mu^2$, » $\rho^2 + \nu^2 = a^2 + b^2 + c^2$,

$\quad \Delta^2 = \rho^2$, » $\mu^2 + \nu^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

La dernière relation doit être rejetée, car elle est impossible dans le cas qui nous occupe, puisque l'on a $\nu^2 < b^2$, $\mu^2 < c^2$ et que l'on suppose a^2, b^2, c^2 positifs.

La surface de l'onde pouvant être obtenue en portant normalement au plan de chaque section faite dans l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

des longueurs égales aux demi-axes de cette section, comme l'un de ces demi-axes est toujours $< b$ et l'autre $> b$, comme aussi on a toujours $\nu < b$ et $\mu > b$, il en résulte que l'équation (9) représente la nappe interne et l'équation (10) la nappe externe. Les équations de ces deux nappes sont donc tout à fait distinctes (*).

(*) On a donné dans la théorie de la lumière le nom de *surface d'élasticité* à la surface représentée par l'équation aux vitesses des ondes planes. D'après ce qu'on a vu, cette surface s'obtient en cherchant la surface dérivée de l'ellipsoïde d'élasticité (2), mettant l'équation de cette surface dérivée en coordonnées polaires et y remplaçant ensuite le rayon vecteur r par $\frac{k^2}{r}$. On obtient ainsi sans difficulté pour l'équation de la surface d'élasticité

$$\frac{x^2}{\Delta^2 - a^2} + \frac{y^2}{\Delta^2 - b^2} + \frac{z^2}{\Delta^2 - c^2} = 0.$$

Si l'on prend pour variables les paramètres des trois familles de surfaces représentées par les équations

$$(\varepsilon) \qquad \left\{ \begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 = \Delta^2, \\ & \frac{x^2}{\mu^2 - a^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} = 0, \\ & \frac{x^2}{\nu^2 - a^2} + \frac{y^2}{\nu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\nu^2 - c^2} = 0, \end{aligned} \right.$$

on arrive très-facilement, en procédant comme pour la surface de l'onde, à mettre l'équation

On sait et il est d'ailleurs facile de vérifier que nos trois familles de surfaces homofocales se coupent partout à angle droit et par conséquent suivant leurs lignes de courbure, les paramètres ρ, μ, ν, doivent donc vérifier les équations

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\rho}{dx}\frac{d\mu}{dx}+\frac{d\rho}{dy}\frac{d\mu}{dy}+\frac{d\rho}{dz}\frac{d\mu}{dz}=0,\\ &\frac{d\rho}{dx}\frac{d\nu}{dx}+\frac{d\rho}{dy}\frac{d\nu}{dy}+\frac{d\rho}{dz}\frac{d\nu}{dz}=0,\\ &\frac{d\mu}{dx}\frac{d\nu}{dx}+\frac{d\mu}{dy}\frac{d\nu}{dy}+\frac{d\mu}{dz}\frac{d\nu}{dz}=0.\end{aligned}\right.$$

Considérons spécialement l'une des nappes de la surface de l'onde, la nappe interne par exemple, dont l'équation est

$$\Delta^2=\nu^2,\quad \text{ou}\quad \rho^2+\mu^2=a^2+b^2+c^2.$$

L'hyperboloïde de $\nu=$ const. coupera cette nappe suivant une courbe sphérique et lui sera normal tout le long de la courbe d'intersection, comme on le vérifie facilement au moyen des deux dernières équations (11).

L'hyperboloïde $\mu=$ const. coupe la même nappe suivant une courbe ellipsoïdale, laquelle, par conséquent, est ligne de courbure de l'hyperboloïde et de l'ellipsoïde sur lesquels elle se trouve.

---

de la surface d'élasticité sous la forme

$$(\Delta^2-\mu^2)(\Delta^2-\nu^2)=0;$$

on aura donc encore pour équations séparées des deux nappes

$$\Delta^2=\mu^2,$$

$$\Delta^2=\nu^2.$$

Les deux dernières des équations (ε) représentent des familles de cônes homofocaux du second degré qui sont asymptotes aux hyperboloïdes représentés par les deux dernières des équations (6).

Les équations des deux nappes de la surface de l'onde sont de même forme que celles des deux nappes de la surface d'élasticité. Il en résulte que si nous considérons la nappe interne, par exemple, l'hyperboloïde $\nu^2=$ const. coupera cette nappe suivant une courbe sphérique, et le cône asymptote de cet hyperboloïde au même paramètre ν^2 coupera la surface d'élasticité suivant une courbe sphérique située sur la même sphère. Pareille propriété a lieu pour les nappes externes des deux surfaces.

On verrait de même que la nappe externe est coupée normalement suivant des courbes sphériques par les hyperboloïdes $\mu =$ const., et par les hyperboloïdes $\nu =$ const. suivant des lignes ellipsoïdales que sont des lignes de courbure des ellipsoïdes et des hyperboloïdes sur lesquels elles se trouvent.

Sur chacune des deux nappes les hyperboloïdes qui déterminent les courbes sphériques étant normaux à la surface, et les hyperboloïdes de l'autre famille qui déterminent sur la surface les courbes ellipsoïdales coupant les premiers à angle droit, il en résulte que les courbes ellipsoïdes sont partout normales aux courbes sphériques.

Les courbes ellipsoïdales sont des lignes de courbure des ellipsoïdes sur lesquelles elles sont placées, les cônes qui auraient leur sommet à l'origine et ces courbes pour directrices seraient du second ordre, comme ceux qui ayant aussi leur sommet à l'origine s'appuient sur les courbes sphériques. Les cônes de ces deux familles sont partout orthogonaux, puisque leurs directrices sont rectangulaires entre elles et que celles des directrices qui sont sphériques sont perpendiculaires aux arêtes d'intersection des cônes.

Le moyen de se faire, à mon avis, l'idée la plus claire de la forme de la surface de l'onde, est de considérer chacune de ses nappes comme engendrée par ses courbes ellipsoïdales.

Prenons la nappe interne par exemple, son équation est

$$\rho^2 + \mu^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Les hyperboloïdes $\mu =$ const déterminent sur cette nappe des courbes ellipsoïdales qui sont des lignes de courbure communes aux ellipsoïdes et aux hyperboloïdes homofocaux dont elles sont les intersections ; si ces courbes étaient sur un même ellipsoïde et sur des hyperboloïdes variables, on pourrait considérer cet ellipsoïde comme engendré par ces courbes qui seraient ses lignes de courbure d'un système. Dans l'équation précédente de la nappe intérieure de la surface de l'onde, quand μ diminue, c'est-à-dire quand les hyperboloïdes conjugués à une nappe se rétrécissent autour de l'axe des z, ρ augmente; on se représentera par suite la nappe considérée de la surface de l'onde en imaginant, sur la série des hyperboloïdes $\mu =$ constante, des lignes de courbure de ces surfaces, lignes qui, d'abord placées sur le même ellipsoïde, seraient ensuite relevées de manière à se trouver sur des ellipsoïdes d'autant plus grands que les hyperboloïdes qui les contiennent sont plus resserrés autour de l'axe des z.

On se ferait même une idée nette de la seconde nappe de la surface de l'onde en considérant ses courbes ellipsoïdales déterminées par les équations $\nu =$ constante.

Revenons à la nappe interne. Les courbes ellipsoïdales par lesquelles elle est engendrée sont situées sur des hyperboloïdes conjugués à une nappe et entourent l'axe des z; chaque hyperboloïde donne deux de ces courbes, l'une au-dessus, l'autre au-dessous du plan des xy. Or ces courbes n'offrent en général aucune singularité, et dans la génération de la surface de l'onde leur déplacement avec déformation s'opère d'une façon régulière; par conséquent il ne peut naître sur la surface engendrée aucun point singulier, sauf quand la courbe génératrice vient à se replier sur elle-même pour ne plus former qu'un arc de courbe brusquement arrêté à ses deux extrémités; cela arrive en effet quand l'hyperboloïde $\mu =$ constante s'aplatit et vient à la limite pour $\mu^2 = b^2$ se confondre avec le plan des zx dans sa portion comprise entre les deux branches KH, K'H' de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{b^2 - a^2} - \frac{z^2}{c^2 - b^2} = 1,$$

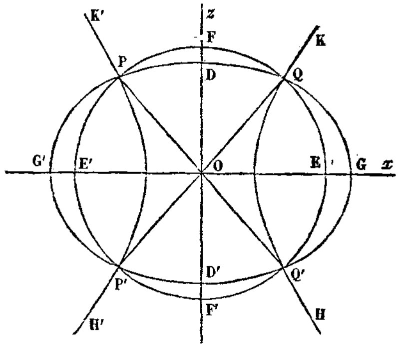
laquelle est la limite des intersections par le plan des zx des hyperboloïdes $\mu =$ constante.

Entre les deux branches de cette hyperbole, la courbe génératrice pour $\mu^2 = b^2$ se transforme dans les deux arcs PDQ, P'D'Q' de l'ellipse qu'on obtient en coupant par le plan des zx l'ellipsoïde

$$\rho^2 = a^2 + c^2.$$

Pour avoir l'intersection de la même nappe de la surface de l'onde par la

Fig. 5.



portion du plan des xz extérieure aux deux branches de l'hyperbole KH, K′H′, il faut se rappeler que cette portion du plan est représentée par l'équation $\nu^2 = b^2$, car lorsque le paramètre ν des hyperboloïdes conjugués à deux nappes approche de cette limite, ces hyperboloïdes s'aplatissent dans le sens de l'axe des y et finissent à la limite par se confondre avec les portions de ce plan qui sont situées en dehors des branches de l'hyperbole KH, K′H′.

Or quand on fait $\nu^2 = b^2$ dans l'équation de la nappe intérieure de la surface de l'onde, on trouve $\Delta^2 = b^2$, ce qui donne pour l'intersection cherchée les deux arcs de cercle QEQ′, PE′P′ de rayon b.

Une discussion analogue ferait voir que l'intersection de la nappe externe par le plan des zx se compose : 1° entre les deux branches de l'hyperbole KH, K′H′ des deux arcs de cercle PFQ, P′F′Q′ de rayon b; 2° en dehors des branches de la même hyperbole, des deux arcs QGQ′, PG′P′ appartenant à la même ellipse que les arcs PDQ, P′D′Q′.

Les quatre points P, P′, Q, Q′, sont les seuls communs aux deux nappes de la surface de l'onde, car ces deux nappes ayant respectivement pour équations $\Delta^2 = \mu^2$ et $\Delta^2 = \nu^2$ ne peuvent se toucher qu'aux points où l'on a $\mu^2 = \nu^2$ et par suite

$$\mu^2 = \nu^2 = b^2$$

Ces points ne peuvent se trouver que sur l'hyperbole KH, K′H′, ce sont les quatre points P, P′, Q, Q′; on les appelle les *ombilics* de la surface.

Quant aux intersections de la surface de l'onde par les deux plans des xy et des zy, il est facile de les obtenir.

1° La nappe interne ayant pour équation

$$\Delta^2 = \nu^2 \quad \text{ou} \quad \rho^2 + \mu^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

pour avoir son intersection par le plan des zy il faut faire $\nu^2 = a^2$. Cette intersection est donc un cercle de rayon a.

D'un autre côté le plan des xy est représenté par l'équation $\mu^2 = c^2$ dans sa partie extérieure à l'ellipse focale

$$\frac{x^2}{c^2 - a^2} + \frac{y^2}{c^2 - b^2} = 1$$

et par l'équation $\rho^2 = c^2$ dans la partie intérieure à cette ellipse. Par suite, pour avoir l'intersection de la nappe interne par le plan des xy, on fera $\rho^2 = c^2$ ou $\mu^2 = c^2$ suivant que l'on aura $a^2 + b^2 \lessgtr c^2$; dans ces deux cas du reste, l'intersection cherchée sera toujours l'ellipse

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

2° La nappe externe a pour équation

$$\Delta^2=\mu^2 \quad \text{ou} \quad \rho^2+\nu^2=a^2+b^2+c^2.$$

Pour avoir son intersection par le plan des zy on fera $\nu^2=a^2$, ce qui donne $\rho^2=b^2+c^2$; cette intersection est donc une ellipse ayant pour équation

$$\frac{y^2}{c^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.$$

D'ailleurs, comme on ne saurait faire $\rho^2=c^2$ dans l'équation de cette nappe puisqu'on ne peut avoir $\nu^2>b^2$, on aura son intersection par le plan des xy en faisant $\mu^2=c^2$, d'où $\Delta^2=c^2$; cette intersection est donc un cercle du rayon c.

Les quatre ombilics P, P', Q, Q', sont des points très-remarquables sur la surface de l'onde; en ces points la nappe interne porte des pointes saillantes auxquelles font suite des pointes rentrantes sur la nappe externe; de plus les courbes sphériques et ellipsoïdales occupent par rapport aux ombilics des positions particulières que nous allons indiquer.

Prenons, par exemple, la nappe interne; sur cette nappe les courbes ellipsoïdales sont déterminées par les hyperboloïdes $\mu=$ constante. Or les intersections de ces hyperboloïdes par le plan des zx sont des hyperboles dont les branches sont toujours extérieures à celles de l'hyperbole limite KHK'H'; il en résulte que nos courbes ellipsoïdales placées sur ces hyperboloïdes entourent toujours les deux ombilics P et Q ou les deux ombilics P' et Q'.

Les courbes sphériques étant déterminées sur la même nappe par les hyperboloïdes $\nu=$ constante, et les intersections de ces hyperboloïdes par le plan des zx étant des hyperboles dont les branches sont comprises entre celles de l'hyperbole limite KHK'H', il en résulte que nos courbes sphériques entourent l'axe des x et renferment à la fois soit les deux ombilics P, P' soit les deux autres Q, Q'.

On verrait de même que sur la nappe externe les courbes sphériques entourent l'axe des z et renferment les deux ombilics P et Q ou P' et Q', et que les courbes ellipsoïdales entourent l'axe des x et renferment les deux ombilics P et P′ ou Q et Q′.

Il résulte de ce qui précède que sur les deux nappes de la surface de l'onde, les deux systèmes de courbes sphériques et ellipsoïdales occupent, par rapport aux ombilics, des positions analogues à celles des lignes de courbure d'un ellipsoïde par rapport à ses ombilics.

Poursuivant cette analogie, on est conduit à se demander si ces deux systèmes de courbes qui sont partout rectangulaires ne sont pas les lignes de courbure de la surface de l'onde; mais il n'en est rien. En effet, les courbes sphériques sont déterminées sur la surface de l'onde par des hyperboloïdes qui la coupent partout à angle droit; or si ces courbes sphériques étaient des lignes de courbure de la surface de l'onde, en circonscrivant à cette surface, le long du contour de l'une d'elles, une surface développable, la ligne sphérique serait une ligne de courbure de la surface développable; par suite, ses génératrices rectilignes seraient normales à la courbe sphérique et par conséquent à l'hyperboloïde; il en résulterait que cette courbe sphérique serait une ligne de courbure de l'hyperboloïde, ce qui n'a pas lieu (*).

Les quatre ombilics de la surface de l'onde sont placés symétriquement deux à deux par rapport au centre de la surface; on nomme *axes optiques* les lignes qui joignent deux ombilics symétriques.

Or nous avons vu que la surface de l'onde est la surface dérivée de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Les directions des axes optiques d'après la définition précédente devront être normales aux sections circulaires de l'ellipsoïde.

On obtient la trace de ces sections sur le plan des zx auquel elles sont

(*) Si les lignes de courbure jouaient un rôle dans l'explication des phénomènes physiques, comme dans les cristaux connus, les quantités a, b, c diffèrent peu l'une de l'autre, on pourrait admettre que les lignes de courbure coïncident approximativement avec les courbes sphériques et ellipsoïdales. En effet, dans l'hypothèse précédente, si l'on prend pour coordonnées d'un point sur la surface les variables μ et ν et qu'on cherche l'équation différentielle des lignes de courbure, on trouve que dans cette équation les coefficients $d\mu^2$ et $d\nu^2$ sont très-petits par rapport à celui de $d\mu d\nu$, en sorte qu'on peut prendre pour équations approchées des deux systèmes de lignes de courbure $d\mu = 0$ et $d\nu = 0$, ce qui donne les courbes sphériques et ellipsoïdales.

perpendiculaires en cherchant les intersections de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

avec le cercle

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

On tire de ces deux équations

$$\frac{z}{x} = \pm \frac{c}{a}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - b^2}};$$

par conséquent, en désignant par ω l'angle des axes optiques avec l'axe des x, on aura

$$\operatorname{tang}\omega = \pm \frac{a}{c}\sqrt{\frac{c^2 - b^2}{b^2 - a^2}}.$$

Il existe deux autres directions remarquables qu'il ne faut pas confondre avec les précédentes : ce sont celles suivant lesquelles les deux vitesses de propagation normale sont égales; ces deux directions sont par suite normales aux sections circulaires de l'ellipsoïde

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = k^4.$$

Leurs traces sur le plan des zx joignent les intersections des deux courbes

$$a^2 x^2 + c^2 z^2 = k^4,$$

$$b^2 x^2 + b^2 z^2 = k^4.$$

On tire de ces deux équations

$$\frac{z}{x} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - b^2}};$$

en nommant ω' l'angle des directions cherchées avec l'axe des x, on aura donc

$$\operatorname{tang}\omega' = \pm \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{b^2 - a^2}}.$$

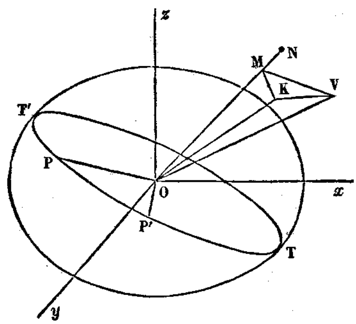
Ces directions sont celles des axes de réfraction conique; on verra plus loin quelles sont leurs propriétés.

Comme on a supposé $a < b < c$, on a, pour les valeurs positives de $\tang\omega$ et $\tang\omega'$, $\omega < \omega'$.

Pour compléter l'étude de la surface des ondes, il nous reste à rechercher quelles sont les relations qui lient une direction de propagation normale à celles des deux rayons lumineux correspondants, ou la direction d'un rayon lumineux aux deux directions correspondantes de propagation normale.

Soit d'abord une direction ON de propagation normale; considérons la

Fig. 6.



section TT' faite par un plan perpendiculaire à cette direction dans l'ellipsoïde d'élasticité

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = k^4.$$

Une onde plane parallèle au plan TT' peut propager deux séries de vibrations parallèles aux axes OP et OP' de l'ellipse TT'; considérons, par exemple, les vibrations parallèles à OP, on obtiendra leur vitesse de propagation normale en prenant $\mathrm{ON} = \mathrm{OP}'$, puis $\mathrm{OM} = \frac{k^2}{\mathrm{ON}}$; si maintenant on mène par le point M un plan perpendiculaire à OM, il sera tangent en un certain point K à la surface de l'onde, et OK la direction du rayon lumineux qui correspond aux vibrations OP sera, d'après ce qu'on a vu, dans le plan NOP' perpendiculaire à OP.

Rappelons-nous d'ailleurs que la surface de l'onde (K) est la réciproque de la surface lieu des points N, laquelle est la dérivée de l'ellipsoïde d'élasticité; par conséquent OK est perpendiculaire au plan tangent en N, et ce dernier étant normal au plan tangent en P' à l'ellipsoïde, il en résulte que

OK est parallèle à ce plan tangent en P′, lequel, transporté parallèlement à lui-même au centre O, passera par OK, par OP et enfin par le diamètre OV conjugué au plan TT′ dans l'ellipsoïde. Donc :

Etant donnée une direction ON *de propagation normale, chacun des deux rayons lumineux* OK *qui lui correspondent est l'intersection du plan contenant la vibration* OP *qu'il propage et le diamètre conjugué* OV *au plan de l'onde, et du plan qui contient l'autre vibration* OP′ *et la direction de propagation normale.*

Il existe un cas particulier remarquable : c'est celui où la section TT′ est une des sections circulaires de l'ellipsoïde d'élasticité; alors la direction ON de propagation normale est un des axes de réfraction conique.

Dans ce cas l'onde plane TT′ peut propager avec la même vitesse OM des vibrations orientées d'une façon quelconque dans son plan ; à chaque vibration OP correspondra un rayon lumineux tel que OK, et le lieu de ces rayons sera un cône ayant son sommet à l'origine et dont nous allons chercher la forme. Pour cela, imaginons le plan perpendiculaire à OM par le point M, soit V le point où il rencontre le diamètre OV conjugué à la section circulaire TT′ et K le point où il rencontre le rayon lumineux OK correspondant à la vibration OP.

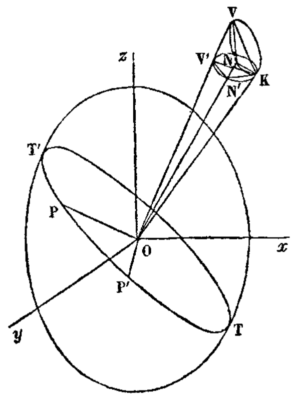
Considérons le triangle MKV, MK est parallèle à OP′ perpendiculaire à OP dans le plan TT′, car MK et OP′ sont les intersections du plan MOP′ par deux plans parallèles, KV et OP sont aussi parallèles pour la même raison ; donc l'angle MKV est droit comme l'angle POP′; donc enfin la section du cône de rayons lumineux par le plan MKV parallèle à l'onde est un cercle dont MV est un diamètre, et c'est suivant ce cercle MKV que la surface de l'onde est touchée par le plan parallèle à la section TT′ et passant par le point M ; ce cercle de contact est entièrement situé sur la nappe extérieure de la surface de l'onde, puisque OK est plus grand que OM et que OM est égal à b.

Il résulte de ce qui précède que lorsqu'une onde plane se réfracte dans l'intérieur d'un cristal normalement aux axes de réfraction conique, elle donne lieu à un cône de rayons lumineux, et ces rayons, à leur sortie du cristal redevenant normaux à l'onde unique émergente, forment alors un cylindre qui est du second degré comme le cône des rayons intérieurs.

Supposons maintenant qu'on donne la direction d'un rayon lumineux dans l'intérieur d'un cristal, cherchons les directions de propagation normale qui lui correspondent

Un rayon vecteur issu de l'origine rencontre de chaque côté la surface de

Fig. 7.



l'onde en deux points, en sorte qu'à la direction de ce rayon vecteur correspondent deux rayons lumineux. Soit donc K l'un des points où la droite OK rencontre la surface de l'onde, et TT′ la section faite par un plan perpendiculaire à OK dans l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

dont la surface de l'onde est la surface dérivée.

Si OP et OP′ sont les demi-axes de l'ellipse TT′, OK est égal à l'un de ces demi-axes, à OP par exemple ; le plan tangent en K à la surface de l'onde sera, d'après ce qu'on a vu, perpendiculaire au plan tangent en P à l'ellipsoïde ainsi qu'au plan KOP ; donc ON, direction de propagation normale correspondant à OK, sera dans le plan KOP et parallèle au plan tangent en P à l'ellipsoïde ; si on transportait parallèlement à lui-même jusqu'au centre ce plan tangent en P, il passerait par ON, par OP′ et par OV conjugué au plan TT′ dans l'ellipsoïde.

Quant à la direction de la vibration qui propagera le rayon OK, comme elle doit être normale à la fois à OK et à ON, elle se confond avec l'autre axe OP′ de la section elliptique.

On conclut de là :

1° *Etant donnée la direction* OK *d'un rayon lumineux, les deux vibrations* *qu'il peut propager sont parallèles aux axes* OP *et* OP′ *de la section elliptique* TT′.

2° *Chacune des deux directions* ON *de propagation normale correspondant à une même direction* OK *du rayon lumineux est l'intersection du plan qui contient la vibration propagée* OP′ *et le diamètre* OV *conjugué au plan de la section* TT′, *et du plan qui contient le rayon lumineux et l'autre vibration* OP.

Dans le cas où la section TT′ est circulaire, OK est un des axes optiques, alors $OP = OP' = OK = b$; tous les rayons OP du cercle TT′ étant normaux à son contour, à chacun d'eux devra correspondre en K un plan tangent à la surface de l'onde, lequel sera perpendiculaire au plan KOP et au plan tangent en P à l'ellipsoïde.

Comme il y aura en K une infinité de plans tangents, il y aura une infinité de directions ON de propagation normale qui correspondront au rayon lumineux OK; toutes ces directions formeront un cône ayant son sommet à l'origine.

Considérons la section faite dans ce cône par un plan parallèle à la section circulaire TT′ et passant par le point K; soit V le point où ce plan rencontre le diamètre OV conjugué au plan de la section TT′; OV sera dans le plan des zx. Soit enfin ON l'une des directions de propagation normale, propageant des vibrations parallèles à OP′ et OP perpendiculaire à OP′.

Les droites VN et OP′ sont parallèles comme intersections d'un même plan P′OV par deux plans parallèles. Il en est de même des droites KN et OP. On en conclut que l'angle KNV est droit comme l'angle POP′ et que la section KNV du cône des directions de propagation normale est un cercle.

Par le point K on peut mener dans ce cône une autre section circulaire KN′V′, elle sera aussi perpendiculaire au plan des zx et normale au diamètre OV ; or OV étant perpendiculaire au plan KN′V′ et KN′ étant perpendiculaire à VN′, il en résulte que KN′ est perpendiculaire à ON′. Donc N′ est un point de la surface d'élasticité, donc cette surface est coupée par notre cône suivant un cercle.

Ce qui précède montre que si l'on fait tomber sur un cristal un faisceau conique de rayons lumineux, de manière que les différentes ondes réfractées soient normales aux génératrices de notre cône, l'un des rayons de chaque onde suivra la direction de l'axe optique, et il en résultera un rayon multiple qui se divisera à la sortie du cristal, parce que chaque rayon composant redeviendra normal à l'onde à laquelle il appartient ; il sortira donc du cristal un faisceau conique lumineux.

Les plans tangents aux ombilics de la surface de l'onde sont normaux aux génératrices du cône des directions de propagation normale qui donnent un rayon lumineux parallèle à l'axe optique ; si on imagine deux de ces plans tangents consécutifs, ils seront perpendiculaires à deux génératrices voisines du cône, et leur intersection sera perpendiculaire au plan de ces deux génératrices, c'est-à-dire au plan tangent au cône. Donc le cône enveloppe de tous les plans tangents à un ombilic est un cône normal à celui que forment toutes les directions de propagation normale dont un des rayons suit l'axe optique, et ce cône qui enveloppe ainsi les pointes de la surface de l'onde sera, comme celui auquel il est normal, du second degré.

Vu et approuvé,

Le 19 juin 1861.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer,

Le 19 juin 1861,

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

ARTAUD.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER, RUE DE SEINE-SAINT-GERMAIN, 10, PRÈS L'INSTITUT.