N° D'ORDRE 190

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES,

PAR M. RENARD,

Professeur de Mathématiques au Lycée de Coutances (Manche).

THÈSE D'ANALYSE. — COURBURE DES SURFACES.

THÈSE D'ASTRONOMIE. — SUR LE MOUVEMENT DES PLANÈTES DANS LE CAS DES PERTURBATIONS.

Soutenues le 18 Août 1856 devant la Commission d'examen.

MM. LEFÉBURE DE FOURCY, *Président.*

LAMÉ, ~~DELAUNAY,~~ Cauchy } *Examinateurs.*

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Augustins, 55.

1856.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

DOYEN	MILNE EDWARDS, Professeur..	Zoologie, Anatomie, Physiologie.
PROFESSEURS HONORAIRES.	Le baron THENARD.	
	BIOT.	
	PONCELET.	
PROFESSEURS	CONSTANT PREVOST	Géologie.
	DUMAS	Chimie.
	DESPRETZ	Physique.
	N	Mécanique.
	DELAFOSSE	Minéralogie.
	BALARD	Chimie.
	LEFÉBURE DE FOURCY	Calcul différentiel et intégral.
	CHASLES	Géométrie supérieure.
	LE VERRIER	Astronomie physique.
	DUHAMEL	Algèbre supérieure.
	CAUCHY	Astronomie mathématique et Mécanique céleste.
	GEOFFROY-SAINT-HILAIRE.	Anatomie, Physiologie comparée, Zoologie.
	LAMÉ	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	DELAUNAY	Mécanique physique.
	PAYER	Botanique.
	C. BERNARD	Physiologie générale.
	P. DESAINS	Physique.
AGRÉGÉS	BERTRAND	Sciences mathématiques
	J. VIEILLE	Sciences mathématiques
	MASSON	Sciences physiques.
	PELIGOT	Sciences physiques.
	DUCHARTRE	Sciences naturelles.
SECRÉTAIRE	E. PREZ-REYNIER.	

A

MONSIEUR PUISEUX,

Maître de Conférences à l'École Normale.

Son Élève reconnaissant,

RENARD.

THÈSE D'ANALYSE.

COURBURE DES SURFACES.

PRÉLIMINAIRES

En 1760 parut pour la première fois, sur l'étude de la courbure des surfaces, un Mémoire intéressant et bien connu, où Euler ramène cette étude à celle de la courbure des différentes sections normales qui passent par le point considéré, mais il ne donne aucune définition.

En 1816, M^lle^ Sophie Germain proposa de mesurer la courbure d'une surface en un point par la somme $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ des courbures des sections principales; mais, dit M. Cournot, cette mesure n'est en réalité qu'une définition arbitraire.

En 1827, le célèbre Gauss donna une autre définition fondée sur les considérations suivantes : Que sur une courbe on prenne un arc très-petit Δs à partir du point considéré, qu'on mène les normales aux deux extrémités de cet arc, puis que dans un cercle de rayon 1, situé dans le plan de la courbe, on trace deux rayons parallèles aux deux normales, interceptant sur la circonférence un arc ε, la limite du rapport $\frac{\varepsilon}{\Delta s}$, quand Δs tend vers zéro, est la mesure de la courbure de la ligne. Cela posé, que sur la surface dont on veut mesurer la courbure en un point m on imagine une courbe quelconque fermée, comprenant le point m dans son enceinte; que par tous les points du contour on mène les normales à la surface, et par le centre d'une sphère de rayon 1 des rayons parallèles à ces normales : on formera une surface conique qui interceptera sur la sphère une aire θ correspondant à l'aire ω de la surface. La limite du rapport $\frac{\theta}{\omega}$, quand ω tend vers zéro, sans cesser de comprendre le point m, est ce que Gauss appelle la mesure de la courbure de la surface au point m. Le calcul de cette limite lui donne

$$\lim \frac{\theta}{\omega} = \frac{1}{R_1 R_2}.$$

Au premier abord, cette définition semble très-satisfaisante à cause de l'analogie qu'elle paraît avoir avec celle de la courbure des lignes. Examinée plus attentivement, elle offre de graves difficultés. Par exemple, que l'un des deux rayons de courbure principaux devienne infini, comme cela a lieu dans les surfaces cylindriques coniques, et en général dans les surfaces développables, la courbure sera nulle. Or, à priori, il ne viendrait certainement à l'esprit de personne de dire que la courbure de pareilles surfaces est nulle en chacun de leurs points. A quoi tiennent ces difficultés? A ce que la définition précédente repose plutôt sur une analogie de forme que sur une analogie de fond. Que s'est-on proposé, en effet, quand on a étudié la courbure d'une ligne pour la première fois? On a voulu évidemment en déterminer la forme, et pour cela on a mené différentes tangentes, telles que leurs points de contact fussent tous espacés d'une même quantité infiniment petite *ds* comptée sur la courbe. L'angle de contingence formé par deux tangentes consécutives n'est pas toujours le même, et c'est précisément la manière dont varie cet angle qui fait connaître la variation de forme de la courbe Mais, pour ne pas avoir à considérer des quantités infiniment petites, on a substitué à l'angle de contingence une quantité finie proportionnelle. Cette quantité a dû être $\frac{\varepsilon}{ds}$ (ε désignant l'arc qui mesure l'angle de contingence dans le cercle de rayon 1), puisque ce rapport, multiplié par l'arc infiniment petit *ds*, constant d'un point de contact au suivant, reproduit l'angle de contingence ε. C'est aussi par analogie que nous appellerons *angle de contingence*, dans le cas des surfaces, l'angle solide formé par le plan tangent et par la surface conique, lieu des tangentes aux différentes sections normales qui passent par le point de contact, ces tangentes étant menées à une distance infiniment petite *ds* du point de contact, la même pour toutes ces sections. Il est évident qu'on peut considérer toutes ces tangentes comme passant par le point de contact, puisque toutes rencontrent la normale à la surface à une distance infiniment petite du second ordre. En continuant l'analogie, nous proposons d'appeler *courbure d'une surface en un point* une quantité finie proportionnelle à cet angle, laquelle devra être la limite du rapport de l'aire qui mesure l'angle de contingence dans la sphère de rayon 1, et qui est un infiniment petit du premier ordre, à l'arc compris entre les points de contact.

Ce travail se compose de deux parties : la première donne l'expression de la courbure d'une surface dans différents systèmes de coordonnées, en partant de la définition précédente, et se termine par la démonstration de deux théorèmes connus, cités à l'appui de cette définition; la seconde renferme la détermination des *centres de moyenne courbure ou centres des sphères osculatrices de même courbure que la surface*, et des surfaces lieux de ces centres. Le lieu des centres de moyenne courbure donne une représentation graphique de la courbure d'une surface en chacun de ses points. Il est question en particulier des surfaces de courbure constante, ce qui donne lieu à quelques théorèmes nouveaux. Ces théorèmes sont vérifiés sur quelques exemples particuliers.

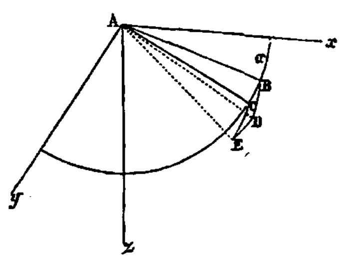
PREMIÈRE PARTIE.

EXPRESSION DE LA COURBURE D'UNE SURFACE.

---

1. Considérons deux sections normales infiniment voisines BAz, CAz.

Fig. 1.



Soient BAD, CAE les angles de contingence de ces sections, lesquels sont égaux entre eux, à moins d'une quantité infiniment petite du second ordre, et ont pour expresssion

$$\varepsilon = ds\left(\frac{1}{R_1}\cos^2\alpha + \frac{1}{R_2}\sin^2\alpha\right),$$

α désignant l'angle que fait la section BAz avec la section principale xAz. L'élément de surface sphérique BCDE qui mesure l'angle solide correspondant dont le sommet est en A a, par conséquent, pour valeur

$$d\alpha\, ds\left(\frac{1}{R_1}\cos^2\alpha + \frac{1}{R_2}\sin^2\alpha\right).$$

Par suite, l'expression de l'angle de contingence sera

$$\omega = ds \int_0^{2\pi} d\alpha \left(\frac{1}{R_1}\cos^2\alpha + \frac{1}{R_2}\sin^2\alpha\right) = \pi\, ds \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right);$$

d'où

$$\frac{\omega}{ds} = \pi\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Ce qui nous montre que la courbure d'une surface en chacun de ses points est proportionnelle à la somme des courbures des sections principales. C'est cette somme, par conséquent, qu'il convient de prendre pour sa mesure. Nous la représenterons, pour abréger, par une seule lettre K. S'il s'agit d'une sphère de rayon a, on obtient

$$\frac{\omega}{ds} = \frac{2\pi}{a},$$

c'est-à-dire que la *courbure d'une sphère est en raison inverse de son rayon*. C'est le même théorème que pour le cercle.

2. Si la surface proposée est rapportée à trois axes rectangulaires, l'équation qui donne les valeurs de R_1 et R_2 est, comme on sait,

$$(rt - s^2)R^2 - [(1+q^2)r + (1+p^2)t - 2pqs]R\sqrt{1+p^2+q^2} + (1+p^2+q^2)^2 = 0;$$

en sorte qu'on obtient

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{ou} \quad K = \frac{(1+q^2)r + (1+p^2)t - 2pqs}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}:$$

p, q, r, s, t ont des significations connues. Cette valeur de K peut aussi s'écrire sous la forme

$$K = \frac{d}{dx}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right),$$

ou

$$K = -\left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy}\right),$$

X et Y désignant les cosinus des angles que fait avec les axes des x et des y la partie de la normale dirigée vers les z positifs.

3. Soit

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface rapportée à trois axes rectangulaires. Différentions cette équation successivement par rapport à x et à y,

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz} p = 0,$$

$$\frac{df}{dy} + \frac{df}{dz} q = 0,$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{d^2f}{dx\,dz} p + \frac{d^2f}{dz^2} p^2 + \frac{df}{dz} r = 0,$$

$$\frac{d^2f}{dx\,dy} + \frac{d^2f}{dx\,dz} q + \frac{d^2f}{dy\,dz} p + \frac{d^2f}{dz^2} pq + \frac{df}{dz} s = 0,$$

$$\frac{d^2f}{dy^2} + 2\frac{d^2f}{dy\,dz} q + \frac{d^2f}{dz^2} q^2 + \frac{df}{dz} t = 0.$$

Les valeurs de p, q, r, s, t tirées de ces équations et portées dans l'expression de K donnent pour résultat

$$K = \frac{\left(\frac{d^2f}{dx^2}\frac{df^2}{dy^2} - 2\frac{d^2f}{dx\,dy}\frac{df}{dx}\frac{df}{dy} + \frac{d^2f}{dy^2}\frac{df^2}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2f}{dx^2}\frac{df^2}{dz^2} - 2\frac{d^2f}{dx\,dz}\frac{df}{dx}\frac{df}{dz} + \frac{d^2f}{dz^2}\frac{df^2}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2f}{dy^2}\frac{df^2}{dz^2} - 2\frac{d^2f}{dy\,dz}\frac{df}{dy}\frac{df}{dz} + \frac{d^2f}{dz^2}\frac{df^2}{dy^2}\right)}{\left(\frac{df^2}{dx^2} + \frac{df^2}{dy^2} + \frac{df^2}{dz^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

4. Il est souvent avantageux de rapporter une surface à d'autres coordonnées que les coordonnées rectangulaires; il ne sera pas inutile par conséquent d'indiquer la formule générale qui fait connaître la courbure d'une surface rapportée à des coordonnées quelconques. Or, quelles que soient les formules de transformation, nous pouvons toujours, en ayant égard à l'équation de la surface, regarder cette surface comme ne dépendant que de deux variables arbitraires. Soient u et v ces deux variables, et soit posé, pour abréger,

$$\frac{dx}{du} = a, \quad \frac{dx}{dv} = a',$$

$$\frac{dy}{du} = b, \quad \frac{dy}{dv} = b',$$

$$\frac{dz}{du} = c, \quad \frac{dz}{dv} = c',$$

$$\frac{d^2x}{du^2} = \alpha, \quad \frac{d^2x}{du\,dv} = \alpha', \quad \frac{d^2x}{dv^2} = \alpha'',$$

$$\frac{d^2y}{du^2} = \beta, \quad \frac{d^2y}{du\,dv} = \beta', \quad \frac{d^2y}{dv^2} = \beta'',$$

$$\frac{d^2z}{du^2} = \gamma, \quad \frac{d^2z}{du\,dv} = \gamma', \quad \frac{d^2z}{dv^2} = \gamma'',$$

$$bc' - cb' = A, \qquad ca' - ac' = B, \qquad ab' - ba' = C.$$

Nous aurons

$$\frac{dz}{dx} \text{ ou } p = c\frac{du}{dx} + c'\frac{dv}{dx},$$
$$q = c\frac{du}{dy} + c'\frac{dv}{dy};$$

les valeurs de $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$ étant déterminées par les équations

$$1 = a\frac{du}{dx} + a'\frac{dv}{dx},$$
$$0 = a\frac{du}{dy} + a'\frac{dv}{dy},$$
$$0 = b\frac{du}{dx} + b'\frac{dv}{dx},$$
$$1 = b\frac{du}{dy} + b'\frac{dv}{dy},$$

la substitution de ces valeurs donne pour p et q

$$p = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} = -\frac{A}{C}, \quad q = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} = -\frac{B}{C}.$$

Différentions de nouveau ces équations par rapport à x et à y, afin d'obtenir les valeurs de r, s et t,

$$r = -\frac{C\left(\frac{dA}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dA}{dv}\frac{dv}{dx}\right) - A\left(\frac{dC}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dC}{dv}\frac{dv}{dx}\right)}{C^2},$$
$$s = -\frac{C\left(\frac{dA}{du}\frac{du}{dy} + \frac{dA}{dv}\frac{dv}{dy}\right) - A\left(\frac{dC}{du}\frac{du}{dy} + \frac{dC}{dv}\frac{dv}{dy}\right)}{C^2},$$
$$t = -\frac{C\left(\frac{dB}{du}\frac{du}{dy} + \frac{dB}{dv}\frac{dv}{dy}\right) - B\left(\frac{dC}{du}\frac{du}{dy} + \frac{dC}{dv}\frac{dv}{dy}\right)}{C^2}.$$

D'ailleurs

$$\frac{dA}{du} = c'\beta + b\gamma' - b'\gamma - c\beta',$$
$$\frac{dA}{dv} = c'\beta' + b\gamma'' - b'\gamma' - c\beta'',$$
$$\frac{dB}{du} = c\alpha' + a'\gamma - a\gamma' - c'\alpha,$$
$$\frac{dB}{dv} = c\alpha'' + a'\gamma' - a\gamma'' - c'\alpha',$$
$$\frac{dC}{du} = a\beta' + b'\alpha - b\alpha' - a'\beta,$$
$$\frac{dC}{dv} = a\beta'' + b'\alpha' - b\alpha'' - a'\beta'.$$

Substituons ces valeurs ainsi que celles de $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$ dans les expressions précédentes de r, s, t; nous obtiendrons, toutes réductions faites,

$$r = \frac{b'^2(A\alpha + B\beta + C\gamma) - 2bb'(A\alpha' + B\beta' + C\gamma') + b^2(A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'')}{C^3},$$

$$s = \frac{-a'b'(A\alpha + B\beta + C\gamma) + (ab' + ba')(A\alpha' + B\beta' + C\gamma') - ab(A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'')}{C^3},$$

$$t = \frac{a'^2(A\alpha + B\beta + C\gamma) - 2aa'(A\alpha' + B\beta' + C\gamma') + a^2(A\alpha'' + B\beta' + C\gamma'')}{C^3},$$

ou encore en posant, pour abréger,

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = D, \quad A\alpha' + B\beta' + C\gamma' = D', \quad A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'' = D'',$$

$$r = \frac{D b'^2 - 2D'bb' + D''b^2}{C^3},$$

$$s = \frac{-D a'b' + D'(ab' + ba') - D''ab}{C^3},$$

$$t = \frac{D a'^2 - 2D'aa' + D''a^2}{C^3}.$$

Par suite l'expression de K devient

$$K = \frac{D(a'^2 + b'^2 + c'^2) - 2D'(aa' + bb' + cc') + D''(a^2 + b^2 + c^2)}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ou enfin, en posant

(1) $$a^2 + b^2 + c^2 = E, \quad aa' + bb' + cc' = F, \quad a'^2 + b'^2 + c'^2 = G,$$

$$K = \frac{DG - 2D'F + D''E}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette formule est l'analogue de la suivante :

$$K = \frac{DD'' - D'^2}{(A^2 + C^2 + C^2)^2},$$

que Gauss a trouvée pour la valeur du produit $\frac{1}{R_1 R_2}$, qui, d'après sa définition, mesure la courbure d'une surface.

Les quantités E, F, G ont une signification remarquable : elles sont les coefficients qui entrent dans l'expression générale de l'élément linéaire tracé sur la surface.

En effet,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (a^2 + b^2 + c^2)\,du^2 \\ + 2(aa' + bb' + cc')\,du\,dv + (a'^2 + b'^2 + c'^2)\,dv^2,$$

ou

$$ds^2 = E du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Nous allons chercher à exprimer les autres D, D′, D″ et $A^2 + B^2 + C^2$ au moyen de celles-ci et de leurs dérivées par rapport à u et à v. D'abord

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2;$$

nous représenterons cette quantité par Δ^2. Posons de plus

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = m, \tag{2}$$
$$a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = m', \tag{3}$$
$$a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' = m'', \tag{4}$$
$$a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = n, \tag{5}$$
$$a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' = n' \tag{6}$$
$$a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' = n''. \tag{7}$$

Éliminons les deux quantités β et γ au moyen de l'équation

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = D$$

et des équations (2) et (5), en multipliant les deux membres de ces équations respectivement par

$$bc' - cb', \quad b'C - c'B, \quad cB - bC$$

et ajoutant, il viendra

$$\begin{aligned}&\alpha\left[A(bc' - cb') + a(b'C - c'B) + a'(cB - bC)\right]\\ &= D(bc' - cb') + m(b'C - c'B) + n(cB - bC),\end{aligned}$$

ou

$$\alpha\left[A^2 + B^2 + C^2\right] = AD + m(aG - a'F) + n(a'E - aF),$$

ou enfin

$$AD = \alpha\Delta^2 + a(nF - mG) + a'(mF - nE).$$

De même

$$\begin{aligned}BD &= \beta\Delta^2 + b(nF - mG) + b'(mF - nE),\\ CD &= \gamma\Delta^2 + c(nF - mG) + c'(mF - nE).\end{aligned}$$

Multiplions ces équations respectivement par α, β, γ, et ajoutons; nous aurons finalement

(8)

$$D^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\Delta^2 + m(nF - mG) + n(mF - nE),$$

nous obtiendrons de même

$$D'^2 = (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)\Delta^2 + m'(n'F - m'G) + n'(m'F - n'E),$$
$$D''^2 = (\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2)\Delta^2 + m''(n''F - m''G) + n''(m''F - n''E).$$

Il est d'ailleurs évident qu'on a

$$\frac{dE}{du} = 2m, \qquad \frac{dE}{dv} = 2m',$$
$$\frac{dF}{du} = m' + n, \qquad \frac{dF}{dv} = m'' + n',$$
$$\frac{dG}{du} = 2n', \qquad \frac{dG}{dv} = 2n'',$$

et par suite

$$m = \frac{1}{2}\frac{dE}{du}, \quad m' = \frac{1}{2}\frac{dE}{dv}, \qquad n = \frac{dF}{du} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dv},$$
$$n' = \frac{1}{2}\frac{dG}{du}, \quad m'' = \frac{dF}{dv} - \frac{1}{2}\frac{dG}{du}, \quad n'' = \frac{1}{2}\frac{dG}{dv}.$$

La substitution de ces valeurs donnerait celles de D, D′, D″ en fonction de E, F, G et de leurs dérivées par rapport à u et v. Il reste cependant les termes en

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \quad \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2, \quad \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2,$$

qu'on ne peut remplacer complétement de la même manière. Pour le faire autant que possible, remarquons que, quelles que soient les variables u et v, si nous imaginons que l'une d'elles, v par exemple, reste constante tandis que l'autre u prend différentes valeurs, nous obtiendrons une série de courbes toutes tracées sur la surface. Si, au contraire, nous faisons varier v en laissant u constante, nous aurons une autre série de courbes. Cela posé, soient ρ_1 et ρ_2 les rayons de courbure de deux des trajectoires appartenant l'une au premier système et l'autre au second, au point où ces lignes se rencontrent; on a, d'une manière générale,

$$\frac{ds^4}{\rho^2} = (d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2.$$

Différentions les équations

$$dx = a\,du + a'\,dv, \quad dy = b\,du + b'\,dv, \quad dz = c\,du + c'\,dv,$$
$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

et faisons $dv = 0$ dans le résultat. Nous obtiendrons

$$d^2x = \alpha\,du^2, \quad d^2y = \beta\,du^2, \quad d^2z = \gamma\,du^2, \quad d^2s = \frac{\frac{dE}{du}\,du^3}{2\,ds} = \frac{\frac{dE}{du}\,du^2}{2\sqrt{E}}:$$

par suite

$$\frac{ds^4}{\rho_1^2} = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\,du^4 - \frac{\left(\frac{dE}{du}\right)^2 du^4}{4E},$$

ou

$$\frac{E^2}{\rho_1^2} = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \frac{\left(\frac{dE}{du}\right)^2}{4E},$$

ou enfin

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{E^2}{\rho_1^2} + \frac{\left(\frac{dE}{du}\right)^2}{4E};$$

on aurait de même

$$\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = \frac{G^2}{\rho_2^2} + \frac{\left(\frac{dG}{dv}\right)^2}{4G}.$$

Quant à la valeur de D′, on verrait, par un calcul analogue aux précédents, que l'on a

$$\begin{aligned} DD'' - D'^2 = (\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \alpha'^2\beta'^2 - \gamma'^2)\Delta^2 + E(n'^2 - nn'') \\ + F(nm'' - 2m'n' + mn'') + G(m'^2 - mm''), \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} DD'' - D'^2 = \left(\frac{d^2F}{du\,dv} - \frac{1}{2}\frac{d^2E}{dv^2} - \frac{1}{2}\frac{d^2G}{du^2}\right)\Delta^2 + E(n'^2 - nn'') \\ + F(nm'' - 2m'n' + mn'') + G(m'^2 - mm''). \end{aligned}$$

Cette expression permettrait de calculer D′ au moyen des mêmes quantités que précédemment, c'est-à-dire ρ_1, ρ_2, E, F, G. De ce qu'il ne reste dans cette valeur de $DD'' - D'^2$, et par suite dans celle de $\frac{1}{R_1 R_2}$, aucune trace des quantités autres que E, F, G, Gauss a pu en conclure ce théorème bien connu : que quand on déforme d'une manière quelconque une surface supposée inextensible, l'expression $\frac{1}{R_1 R_2}$ ne change pas. Il n'en est pas de même de l'expression $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, qui dépend en même temps des rayons de courbure ρ_1 et ρ_2.

5. La valeur générale que nous venons d'obtenir pour K, quelles que soient les variables u et v, peut se simplifier, lorsqu'on choisit convenablement ces variables. Si nous les prenons telles, que les deux systèmes de courbes qu'elles fournissent sur la surface se coupent orthogonalement, la valeur de F devient nulle ; car le cosinus de l'angle ω, formé en un point quelconque par deux de ces courbes, appartenant à l'un et à l'autre système

et se coupant en ce point, a pour expression

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Par suite, la valeur de K devient

$$K = \frac{DG + D'' E}{\Delta^3}$$

et

$$\Delta^2 = EG, \quad D^2 = \frac{E^3 G}{\rho_1^2} - \frac{E}{4}\left(\frac{dE}{dv}\right)^2, \quad D''^2 = \frac{G^3 E}{\rho_2^2} - \frac{G}{4}\left(\frac{dG}{du}\right)^2.$$

La substitution de ces valeurs donne pour K

$$K = \sqrt{\frac{1}{\rho_1^2} - \left(\frac{\frac{dE}{dv}}{2E\sqrt{G}}\right)^2} + \sqrt{\frac{1}{\rho_2^2} - \left(\frac{\frac{dE}{du}}{2G\sqrt{E}}\right)^2}$$

Or, d'après l'expression générale de la courbure géodésique

$$\frac{1}{\rho} = \frac{di}{ds} + \frac{1}{2G\sqrt{E}}\frac{dG}{du}\sin i - \frac{1}{2E\sqrt{G}}\frac{dE}{dv}\cos i,$$

trouvée par M. Liouville, dans laquelle i désigne l'angle que fait la courbe au point que l'on considère avec la ligne $v =$ const., qui passe par ce point, il est clair que les quantités $\left(\frac{\frac{dE}{dv}}{2E\sqrt{G}}\right)^2$, $\left(\frac{\frac{dG}{du}}{2G\sqrt{E}}\right)^2$ ne sont autres que les carrés des courbures géodésiques des trajectoires dont ρ_1 et ρ_2 sont les rayons de courbure. Soient θ et θ' les angles que font les plans osculateurs de ces courbes avec le plan tangent au même point; on sait que ces courbures géodésiques sont aussi égales à $\frac{\cos\theta}{\rho_1}$, $\frac{\cos\theta'}{\rho_2}$; ce qui donne pour K

$$K = \sqrt{\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{\cos^2\theta}{\rho_1^2}} + \sqrt{\frac{1}{\rho_2^2} - \frac{\cos^2\theta'}{\rho_2^2}}$$

ou

$$K = \frac{\sin\theta}{\rho_1} + \frac{\sin\theta'}{\rho_2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'},$$

R et R′ designant les rayons de courbure des sections normales qui ont mêmes tangentes que les trajectoires orthogonales. Nous retrouvons ainsi ce théorème bien connu que : *La somme des courbures de deux sections normales perpendiculaires entre elles est constante et égale à la somme des courbures des sections principales, et que par conséquent cette somme mesure aussi la courbure d'une surface en un point.*

6. Si les variables u et v sont choisies de telle sorte que l'un des deux systèmes de trajectoires orthogonales forme une série de lignes géodésiques issues d'un même point ou normales à une même ligne, l'un des deux coefficients E ou G deviendra égal à l'unité. Soit $v =$ const. l'équation de ces lignes, et u la plus courte distance d'un point quelconque de ces lignes à l'origine. On aura $E = 1$, et la valeur de ds^2 deviendra

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2;$$

par suite

$$K = \frac{1}{\rho_1} + \sqrt{\frac{1}{\rho_2^2} - \left(\frac{\frac{dG}{du}}{2G}\right)^2},$$

ou

$$K = \frac{1}{\rho_1} + \sqrt{\frac{1}{\rho_2^2} - \left(\frac{d(l\sqrt{G})}{du}\right)^2}.$$

7. M. Liouville a démontré que pour une surface quelconque on peut toujours choisir les variables u et v de telle sorte que le coefficient F soit nul et que les deux autres coefficients soient égaux entre eux. Supposons ce choix fait, et soit

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

en écrivant α et β au lieu de u et v. La valeur de K deviendra

$$K = \sqrt{\frac{1}{\rho_1^2} - \left(\frac{d\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}{d\beta}\right)^2} + \sqrt{\frac{1}{\rho_2^2} - \left(\frac{d\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}{d\alpha}\right)^2}$$

Cette expression est l'analogue de celle-ci :

$$\frac{1}{R_1 R_2} = -\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{d^2 \log \lambda}{d\alpha^2} + \frac{d^2 \log \lambda}{d\beta^2}\right),$$

trouvée en vertu du choix des mêmes variables.

8. Après avoir donné la définition de la courbure d'une surface, et en avoir fait connaître différentes expressions, nous croyons ne pouvoir mieux terminer cette première partie que par la démonstration de deux théorèmes connus, cités à l'appui de cette définition.

La plus courte distance d'un point à un autre est la ligne droite, c'est-à-dire la ligne dont la courbure est nulle en chacun de ses points. Si nous nous proposons de déterminer la surface, dont la portion terminée à un contour donné ait une étendue minimum, nous aurons à égaler à zéro la variation de l'intégrale

$$\iint dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2},$$

ce qui nous donne

$$\frac{d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)}{dx}+\frac{d\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)}{dy}=0,$$

ou

$$(1+q^2)r+(1+p^2)t-2pqs=0.$$

C'est-à-dire que la surface d'étendue minimum, terminée à un contour donné, est celle dont la courbure est nulle en chacun de ses points : ce qui est le même théorème que pour les lignes.

9. Quand on cherche, parmi les courbes planes isopérimètres et limitées à deux points fixes, celles qui comprennent une aire maximum, on arrive à ce résultat que la courbe doit avoir en chacun de ses points une courbure constante, et, par suite, que cette courbe est un cercle. Le même résultat se présente, si nous cherchons, parmi les surfaces d'une étendue donnée, celle qui, limitée à un contour donné, renferme un volume maximum. Nous devrons égaler à zéro la variation de l'intégrale

$$\iint dx\,dy\left(z+\alpha\sqrt{1+p^2+q^2}\right),$$

dans laquelle α désigne une constante arbitraire ; ce qui nous donne

$$1-\frac{d\left(\frac{\alpha p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)}{dx}-\frac{d\left(\frac{\alpha q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)}{dy}=0,$$

ou

$$\frac{(1+q^2)r+(1+p^2)t-2pqs}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\alpha};$$

c'est-à-dire que parmi les surfaces d'une étendue donnée, et qui sont terminées à un contour donné, celle qui renferme un volume maximum est la surface dont la courbure est la même en chacun de ses points.

DEUXIÈME PARTIE.

CENTRE DE MOYENNE COURBURE.

---

10. Si nous appelons, avec M. Delaunay, *moyenne courbure*, l'expression $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$ qui mesure la courbure des sections moyennes, et si nous désignons sous le nom de *centre de moyenne courbure* un point de la normale situé à une distance a de la surface, telle que l'on ait

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right),$$

en cherchant le lieu de ces centres, nous aurons une représentation graphique de la manière dont la courbure d'une surface varie en chacun de ses points. Soient x, y, z les coordonnées de l'un de ces centres, x', y', z' celles du point où la surface est rencontrée par la normale. Les valeurs de x, y, z seront déterminées par les trois équations

$$\begin{gathered} x-x'+p(z-z')=0,\\ y-y'+q(z-z')=0,\\ (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=a^2, \end{gathered}$$

ou

$$z=z'+\frac{a}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad y=y'-\frac{aq}{\sqrt{1+p^2-q^2}},\quad x=x'-\frac{ap}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

a étant déterminé par l'équation

$$\frac{2}{a}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{(1+q^2)r+(1+p^2)t-2pqs}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

11. Soient α, β, γ les coordonnées du centre de la sphère osculatrice, qui a même courbure que la surface au point de contact, a son rayon, nous aurons, pour déterminer le centre de cette sphère, les quatre équations :

$$\begin{gathered} (x'-\alpha)+p(z'-\gamma)=0,\\ y'-\beta+q(z'-\gamma)=0,\\ (x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+(z'-\gamma)^2=a^2,\\ \frac{2\pi}{a}=\pi\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\quad \text{ou}\quad \frac{1}{a}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right). \end{gathered}$$

Donc *le centre de moyenne courbure d'une surface n'est autre chose que le centre de la sphère osculatrice qui a même courbure que la surface au point de contact*.

Les sections moyennes partagent, comme on sait, le contour du point considéré en quatre régions dont l'état est pareil, mais de signe opposé, quand on passe d'une partie quelconque à la partie contiguë. Il en résulte que *la sphère de même courbure que la surface, coupant cette surface suivant les sections moyennes, la partage en quatre quadrants égaux situés* *alternativement au dedans et au dehors* de la sphère. Les sphères, décrites des rayons de plus grande et de plus petite courbure, ne font que toucher la surface sans la couper.

12. Pour avoir le lieu des centres de moyenne courbure, il n'y a qu'à éliminer entre l'équation de la surface

$$f(x', y', z') = 0$$

et les trois équations

$$x = x' - p\nu, \quad y = y' - q\nu, \quad z = z' + \nu,$$

où ν désigne, pour abréger, la quantité

$$\frac{a}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \quad \text{ou} \quad \frac{2(1 + p^2 + q^2)}{(1 + q^2)r + (1 + p^2)t - 2pqs},$$

les coordonnées x', y', z' qui particularisent la position du centre.

Ces quatre équations renferment six variables dont deux, par conséquent, peuvent être considérées comme indépendantes. Soient x et y ces variables. Différentions par rapport à chacune d'elles et posons, pour abréger,

$$\frac{dz}{dx} = \mathrm{P}, \quad \frac{dz}{dy} = \mathrm{Q}, \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = \mathrm{R}, \quad \frac{d^2 z}{dx\, dy} = \mathrm{S}, \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = \mathrm{T}.$$

De plus, comme les expressions que nous obtiendrions pour P, Q, R, S, T seraient assez compliquées en laissant la position des axes quelconque, nous prendrons le point x', y', z' pour origine des coordonnées, le plan tangent pour plan des x', y', et la tangente à la première section principale pour axe des x'. De cette manière, les quantités p, q, s deviendront nulles dans les expressions que nous voulons calculer. En ayant égard à ces conditions, nous obtiendrons, par la différentiation de l'équation $z = z' + \nu$,

$$\mathrm{P} = \frac{d\nu}{dx'}\frac{dx'}{dx} + \frac{d\nu}{dy'}\frac{dy'}{dx}, \quad \mathrm{Q} = \frac{d\nu}{dx'}\frac{dx'}{dy} + \frac{d\nu}{dy'}\frac{dy'}{dy},$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{R} = {} & r\left(\frac{dx'}{dx}\right)^2 + t\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2 + \frac{d^2\nu}{dx'^2}\left(\frac{dx'}{dx}\right)^2 + \frac{d^2\nu}{dy'^2}\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2 \\
& + 2\frac{d^2\nu}{dx'dy'}\frac{dx'}{dx}\frac{dy'}{dx} + \frac{d\nu}{dx'}\frac{d^2x'}{dx^2} + \frac{d\nu}{dy'}\frac{d^2y'}{dx^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{S} = {} & r\frac{dx'}{dy}\frac{dx'}{dx} + t\frac{dy'}{dy}\frac{dy'}{dx} + \left(\frac{d^2\nu}{dx'^2}\frac{dx'}{dy} + \frac{d^2\nu}{dx'dy'}\frac{dy'}{dy}\right)\frac{dx'}{dx} \\
& + \frac{d\nu}{dx'}\frac{d^2x'}{dx\,dy} + \left(\frac{d^2\nu}{dx'dy'}\frac{dx'}{dy} + \frac{d^2\nu}{dy'^2}\frac{dy'}{dy}\right)\frac{dy'}{dx} + \frac{d\nu}{dy'}\frac{d^2y'}{dx\,dy},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{T} = {} & r\left(\frac{dx'}{dy}\right)^2 + t\left(\frac{dy'}{dy}\right)^2 + \frac{d^2\nu}{dx'^2}\left(\frac{dx'}{dy}\right)^2 + \frac{d^2\nu}{dy'^2}\left(\frac{dy'}{dy}\right)^2 \\
& + 2\frac{d^2\nu}{dx'dy'}\frac{dx'}{dy}\frac{dy'}{dy} + \frac{d\nu}{dx'}\frac{d^2x'}{dy^2} + \frac{d\nu}{dy'}\frac{d^2y'}{dy^2}.
\end{aligned}$$

3.

Les quantités

$$\frac{dx'}{dx},\quad \frac{dx'}{dy},\quad \frac{dy'}{dx},\quad \frac{dy'}{dy},\quad \frac{d^2x'}{dx^2},\quad \frac{d^2x'}{dx\,dy},\quad \frac{d^2x'}{dy^2},\quad \frac{d^2y'}{dx^2},\quad \frac{d^2y'}{dx\,dy},\quad \frac{d^2y'}{dy^2}$$

se déterminent par la différentiation des équations $x = x' - pv$, $y = y' - qv$, qui nous donnent

$$1 = (1 - vr)\frac{dx'}{dx}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{dx'}{dx} = \frac{1}{1 - vr},$$

$$0 = (1 - vr)\frac{dx'}{dy} \qquad\qquad \frac{dx'}{dy} = 0,$$

$$0 = (1 - vt)\frac{dy'}{dx}, \qquad\qquad \frac{dy'}{dx} = 0,$$

$$1 = (1 - vt)\frac{dy'}{dy}, \qquad\qquad \frac{dy'}{dy} = \frac{1}{1 - vt}.$$

La seconde et la troisième de ces équations seraient aussi vérifiées en posant $1 - vr = 0$, $1 - vt = 0$; mais on ne peut le faire en général, car on en déduit $\frac{1}{r} = \frac{1}{t}$, ou $R_1 = R_2$, ce qui veut dire que le point serait un ombilic. Différentions de nouveau, il viendra

$$\frac{d^2x'}{dx^2}(1 - vr) = \frac{2r\frac{dv}{dx'} + v\frac{dr}{dx'}}{(1 - vr)^2}, \qquad \frac{d^2x'}{dx\,dy}(1 - vr) = \frac{r\frac{dv}{dy'} + v\frac{dr}{dy'}}{(1 - vr)(1 - vt)},$$

$$\frac{d^2x'}{dy^2}(1 - vr) = \frac{v\frac{dt}{dx'}}{(1 - vt)^2}, \qquad \frac{d^2y'}{dx^2}(1 - vt) = \frac{v\frac{dr}{dy'}}{(1 - vr)^2},$$

$$\frac{d^2y'}{dx\,dy}(1 - vt) = \frac{t\frac{dv}{dx'} + v\frac{dt}{dx'}}{(1 + vr)(1 - vt)}, \qquad \frac{d^2y'}{dy^2}(1 - vt) = \frac{2t\frac{dv}{dy'} + v\frac{dt}{dy'}}{(1 - vt)^2}.$$

Par la substitution de ces valeurs dans celles de P, Q, R, S, T, celles-ci deviennent

$$P = \frac{\frac{dv}{dx'}}{1 - vr}, \quad Q = \frac{\frac{dv}{dy'}}{1 - vt},$$

$$R = \frac{r + \frac{d^2v}{dx'^2}}{(1 - vr)^2} + \frac{\frac{dv}{dx'}\left(2r\frac{dv}{dx'} + v\frac{dr}{dx'}\right)}{(1 - vr)^3} + \frac{v\frac{dv}{dy'}\frac{dr}{dy'}}{(1 - vr)^2(1 - vt)},$$

$$S = \frac{\frac{d^2v}{dx'\,dy'}}{(1 - vr)(1 - vt)} + \frac{\frac{dv}{dx'}\left(r\frac{dv}{dy'} + v\frac{dr}{dy'}\right)}{(1 - vr)^2(1 - vt)} + \frac{\frac{dv}{dy'}\left(t\frac{dv}{dx'} + v\frac{dt}{dx'}\right)}{(1 - vr)(1 - vt)^2},$$

$$T = \frac{t + \frac{d^2v}{dy'^2}}{(1 - vt)^2} + \frac{\frac{dv}{dy'}\left(2t\frac{dv}{dy'} + v\frac{dt}{dy'}\right)}{(1 - vt)^3} + \frac{v\frac{dv}{dx'}\frac{dt}{dx'}}{(1 - vr)(1 - vt)^2}.$$

Si nous nous reportons à la signification de v, dont la valeur est

$$\frac{a}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

nous en déduirons, en tenant toujours compte des conditions

$$p=0, \quad q=0, \quad s=0,$$

$$\frac{dv}{dx'}=\frac{da}{dx'}, \qquad \frac{dv}{dy'}=\frac{da}{dy'}, \quad \frac{d^2v}{dx'^2}=\frac{d^2a}{dx'^2}-ar^2,$$

$$\frac{d^2v}{dx'\,dy'}=\frac{d^2a}{dx'\,dy'}, \quad \frac{d^2v}{dy'^2}=\frac{d^2a}{dy'^2}-at^2.$$

La valeur de a est elle-même déterminée par l'équation $\frac{2}{a}=r+t$ qui donne la suivante : $1-at=-(1-ar)$. Par la substitution de ces valeurs, nous obtiendrons, pour celles de P, Q, R, S, T,

$$P=\frac{\frac{da}{dx'}}{1-ar}, \quad Q=-\frac{\frac{da}{dy'}}{1-ar},$$

$$R=\frac{r(1-ar)+\frac{d^2a}{dx'^2}}{(1-ar)^2}+\frac{\frac{da}{dx'}\left(2r\frac{da}{dx'}+a\frac{dr}{dx'}\right)}{(1-ar)^3}-\frac{a\frac{da}{dy'}\frac{dr}{dy'}}{(1-ar)^3},$$

$$S=-\frac{\frac{d^2a}{dx'\,dy'}}{(1-ar)^2}-\frac{\frac{da}{dx'}\left(r\frac{da}{dy'}+a\frac{dr}{dy'}\right)}{(1-ar)^3}+\frac{\frac{da}{dy'}\left(t\frac{da}{dx'}+a\frac{dt}{dx'}\right)}{(1-ar)^3},$$

$$T=\frac{t(1-at)+\frac{d^2a}{dy'^2}}{(1-ar)^2}-\frac{\frac{da}{dy'}\left(2t\frac{da}{dy'}+a\frac{dt}{dy'}\right)}{(1-ar)^3}+\frac{a\frac{da}{dx'}\frac{dt}{dx'}}{(1-ar)^3}.$$

La considération de ces valeurs va nous conduire à la démonstration de quelques théorèmes nouveaux.

13. Soit

$$Z-z=PX+QY$$

l'équation du plan tangent à la surface des centres de moyenne courbure au point $x=0$, $y=0$, $z=z$. Remplaçons P, Q par leurs valeurs obtenues précédemment; elle devient

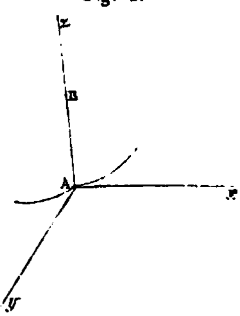
$$Z-z=\frac{1}{1-ar}\left(\frac{da}{dx'}X-\frac{da}{dy'}Y\right).$$

Si la surface proposée a une courbure constante, la valeur de a est aussi constante, et par conséquent $\frac{da}{dx'}=0$, $\frac{da}{dy'}=0$. Donc : *Pour toute surface de courbure constante, le plan tangent en un point quelconque du lieu des* *centres de moyenne courbure est parallèle au plan tangent à la surface au point correspondant.* En d'autres termes : *Toutes les normales à l'une des surfaces sont normales à l'autre.* Ce théorème ne souffre d'exception que pour le cas où a étant constant, on aurait en même temps $1 - ar = 0$, car alors les valeurs de P et de Q se présenteraient sous la forme $\frac{0}{0}$, et la direction du plan serait indéterminée. Or la condition $1 - ar = 0$ entraîne la suivante : $1 - at = 0$, et, par suite, $\frac{1}{r} = \frac{1}{t}$, ou $R_1 = R_2$. La surface serait donc telle, que tous ses points seraient des ombilics, et par conséquent serait une sphère. En effet, dans ce cas le lieu des centres de moyenne courbure se réduit à un point qui est le centre même de la sphère, et la position du plan tangent en ce point est indéterminée.

14. Si nous voulons trouver la direction des lignes de courbure au point B de la surface, nous n'avons qu'à remplacer P, Q, R, S, T par leurs valeurs dans l'équation

$$[(1 + Q^2)S - PQT]\frac{dY^2}{dX^2} + [(1 + Q^2)R - (1 + P^2)T]\frac{dY}{dX} \\ + PQR - (1 + P^2)S = 0.$$

Fig. 2.



Cette équation sera en général assez compliquée; mais dans le cas où la surface a une courbure constante, et où, par conséquent, la valeur de a est elle-même constante, elle donne pour $\frac{dY}{dX}$ les deux valeurs $\frac{dY}{dX} = 0$, $\frac{dY}{dX} = \infty$.

Donc : *Pour toute surface de courbure constante, les directions des lignes de courbure en un point quelconque du lieu des centres de moyenne courbure sont parallèles à celles des lignes de courbure de la surface au point correspondant.*

15. Enfin, si nous nous proposons de trouver la courbure de la surface au point B, nous n'aurons qu'à remplacer P, Q, R, S, T par leurs valeurs dans l'expression

$$\text{K}' \quad \text{ou} \quad \frac{2}{a'} = \frac{(1+Q^2)R + (1+P^2)T - 2PQS}{(1+P^2+Q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette expression, qui n'est pas très-simple dans le cas général, le devient beaucoup lorsque la courbure de la surface est constante. Car on a

$$\text{K}' \quad \text{ou} \quad \frac{2}{a'} = \frac{r}{1-ar} - \frac{t}{1-ar} = \frac{r-t}{1-ar}.$$

D'ailleurs

$$\text{K} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{a} = r+t; \quad \text{d'où} \quad 1-ar = -\frac{r-t}{r+t};$$

d'où enfin,

$$\frac{2}{a'} = -(r+t) = -\frac{2}{a} \quad \text{ou} \quad a' = -a.$$

Ainsi, *quand la courbure d'une surface est constante, celle du lieu des centres de moyenne courbure l'est aussi. De plus, la surface proposée est elle-même le lieu des centres de moyenne courbure de la seconde surface.* En d'autres termes, les deux surfaces sont réciproques l'une de l'autre. Inversement, *Si le lieu des centres de moyenne courbure d'une surface est une surface réciproque, la courbure de cette surface est constante.* Car, si nous considérons deux rayons de moyenne courbure dans deux positions infiniment voisines, comme ces rayons sont normaux, chacun aux deux surfaces, ils ne peuvent différer l'un de l'autre que d'une quantité infiniment petite du second ordre, la distance entre le plan tangent et la surface étant un infiniment petit de cet ordre. Nous aurons donc, en négligeant ces infiniment petits, $\frac{da}{ds} = 0$, ds désignant l'élément linéaire compté sur la surface. Par suite, $a =$ const. C. Q. F. D.

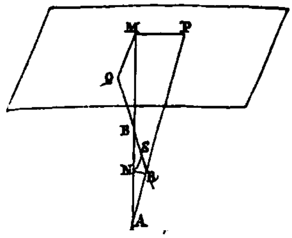
16. Les résultats que nous venons d'obtenir par l'analyse peuvent se démontrer très-simplement par des considérations géométriques.

Quand on prend sur toutes les normales d'une même surface une longueur constante, le lieu des extrémités est une surface parallèle à la première, c'est-à-dire que toute normale à l'une des surfaces est normale à l'autre. Or, quand la courbure d'une surface est constante, le lieu des centres de moyenne courbure est un cas particulier du précédent.

De plus, puisque toutes les normales au lieu des centres de moyenne courbure, sont les mêmes que celles de la surface proposée, ce seront les mêmes aussi qui se rencontreront deux à deux par chacune des deux surfaces. Donc les lignes de courbure aux points correspondants des surfaces seront parallèles.

Enfin, soient MP et MQ les deux lignes de courbure qui passent au point M de la surface proposée; MA ou R_1 le rayon de première courbure; MB ou R_2 le rayon de seconde courbure, et MN ou a le rayon de moyenne

Fig. 3.



courbure. La surface ayant une courbure constante, les lignes de courbure au point N seront parallèles à MP et MQ; soient NR et NS ces lignes. La courbure de la surface en N aura pour expression

$$K' \quad \text{ou} \quad \frac{2}{a'} = \frac{1}{NA} - \frac{1}{NB};$$

or

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad \text{d'où} \quad a = \frac{2R_1R_2}{R_1 + R_2};$$

par suite,

$$NA = R_1 - a = \frac{R_1(R_1 - R_2)}{R_1 + R_2},$$

$$NB = a - R_2 = \frac{R_2(R_1 - R_2)}{R_1 + R_2},$$

$$\frac{1}{NA} - \frac{1}{NB} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 - R_2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

ou

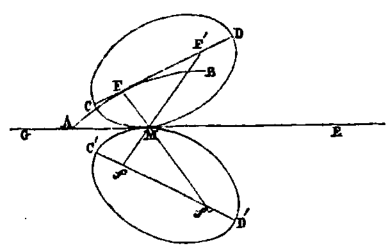
$$\frac{2}{a'} = -\frac{2}{a} \quad \text{ou enfin,} \quad a' = -a.$$

17. Nous allons vérifier ces théorèmes sur quelques exemples particuliers.

Si l'on cherche quelles sont, parmi les surfaces réglées, celles dont la courbure est constante, on trouve facilement qu'il n'y a que le cylindre à base circulaire qui jouisse de cette propriété, et que le rayon de cette base est égal à $\frac{1}{K}$. Pour avoir le lieu des centres de moyenne courbure de cette surface, nous devrons prendre sur la normale en chaque point, une longueur ρ déterminée par l'égalité $\frac{2}{\rho} = K$ ou $\rho = \frac{2}{K}$. Cette longueur étant double du rayon de cercle de base, nous voyons que le lieu des centres de moyenne courbure n'est autre chose que la surface elle-même.

Si la surface de courbure constante doit être de révolution, M. Delaunay (Journal de M. Liouville, tome VI, page 307) a montré que pour obtenir la courbe méridienne, il suffit de faire rouler sur l'axe une ellipse ou une hyperbole dont le grand axe ou l'axe transverse soit égal à $\bar{a}$ $\left[a\right.$ étant déterminé par la relation $\left.\frac{1}{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right]$; le foyer décrira la courbe cherchée. D'après cela, nous voyons que pour trouver le lieu des centres de moyenne courbure, on devra porter sur chaque normale une longueur égale à l'axe $\bar{a}$ de l'ellipse ou de l'hyperbole génératrice. Soit AB la courbe méridienne; FM la normale à la surface au point F; CMD l'ellipse génératrice. Imaginons une seconde ellipse C′MD′ égale à la première et placée symé-

Fig. 4.



triquement par rapport à l'axe GE. Soient f et f' ses deux foyers. Le point f' sera, sur le prolongement de FM, car angle f'ME = angle fMG = angle FMG. De plus, Mf' + MF = MF′ + MF = CD. Le foyer f' est donc le point du lieu des centres de moyenne courbure, correspondant au point F de la surface; ce qui vient d'être dit pour le point F se répéterait pour tout autre point de la courbe AB; donc, pendant que le foyer F de l'ellipse CMD engendre cette courbe, le foyer f' de l'ellipse C′MD′ engendre la courbe méridienne du lieu des centres de moyenne courbure. Ces deux courbes étant égales, les surfaces le seront aussi.

Vu et approuvé,

Le 3 juillet 1856.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer,

Le 3 juillet 1856,

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

CAYX.

THÈSE D'ASTRONOMIE.

SUR LE MOUVEMENT DES PLANÈTES DANS LE CAS DES PERTURBATIONS.

Les équations qui déterminent le mouvement relatif d'une planète autour du Soleil, sont, comme on sait (*Mécanique céleste*),

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} + \left(\frac{dR}{dx}\right),\\ 0 &= \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} + \left(\frac{dR}{dy}\right),\\ 0 &= \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} + \left(\frac{dR}{dz}\right),\end{aligned}\right.$$

μ et R ayant des significations connues. Quel que soit le nombre des planètes considérées, on sait toujours former sept intégrales premières. Mais ces intégrales étant les seules qu'on ait obtenues jusqu'à présent, on est forcé, en général, de recourir à des méthodes d'approximation. Le système solaire offre cet avantage, que les masses des planètes perturbatrices sont très-petites par rapport à celle du Soleil, de sorte que la fonction R, qui est de l'ordre des masses, est très-petite par rapport au terme $\frac{\mu}{r^2}$ qui produit le mouvement elliptique. Toutes les méthodes d'approximation reposent sur cette considération. En supposant la fonction R nulle d'abord, on obtient les formules connues du mouvement elliptique; puis on part de ces formules pour établir celles du mouvement troublé. Une première méthode consiste à déterminer les corrections que doivent subir ces premières valeurs des coordonnées pour avoir celles du mouvement réel. C'est à elle que Laplace a presque constamment recours dans la *Mécanique céleste*. Une autre méthode, dont cet illustre mathématicien a senti les avantages, consiste à regarder les formules du mouvement elliptique comme exactes, sauf à y considérer les paramètres comme variables avec le temps. Lagrange, Poisson, Laplace lui-même, et depuis MM. Hamilton, Jacobi, Liouville, etc., l'ont beaucoup perfectionnée. Réunir les travaux épars de ces divers géomètres de manière à en former une théorie simple et continue, m'avait paru un travail digne d'intérêt. Ce travail a été présenté tout récemment d'une manière remarquable, comme sujet de thèse de doctorat, par M. Houel, qui y a ajouté ses propres recherches. Je le supposerai donc connu, et je me bornerai à signaler seulement quelques différences entre ce travail et le mien.

1. Par l'intégration des équations (1) dans lesquelles la fonction R est supposée nulle d'abord, on obtient les suivantes :

$$\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}=2\left(\frac{\mu}{r}+h\right),$$
$$\frac{xdy-ydx}{dt}=l,$$
$$\frac{ydz-zdy}{dt}=l',$$
$$\frac{zdx-xdz}{dt}=l'',$$

ou ces autres qui leur sont équivalentes,

$$\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}=2\left(\frac{\mu}{r}+h\right),$$
$$\frac{xdy-ydx}{dt}=l,$$
$$\left(\frac{xdy-ydx}{dt}\right)^2+\left(\frac{ydz-zdy}{dt}\right)^2+\left(\frac{zdx-xdz}{dt}\right)^2=k^2,$$
$$lz+l'x+l''y=0,$$

ou enfin, en remarquant que la trajectoire est plane, et remplaçant les coordonnées rectilignes par les coordonnées polaires,

$$\frac{dr^2+r^2dv^2}{dt^2}=2\left(\frac{\mu}{r}+h\right),$$
$$\cos\varphi=\frac{l}{k},$$
$$\frac{r^2dv}{dt}=k,$$
$$\operatorname{tang}\theta=-\frac{l''}{l'},$$

φ désignant l'inclinaison du plan de l'orbite sur le plan des xy, et θ la longitude du nœud ascendant. Enfin l'intégration de la première et de la troisième de ces dernières équations, conduit aux équations définitives du mouvement,

$$v - \varpi = \int \frac{k\,dr}{r^2\sqrt{2\left(\frac{\mu}{r}+h\right)-\frac{k^2}{r^2}}}, \quad \text{ou} \quad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\varpi)};$$

en posant $h = -\frac{\mu}{2a}$, $k^2 = \mu\,a\,(1-e^2)$

et

$$t - \tau = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{2\left(\frac{\mu}{r}+h\right)-\frac{k^2}{r^2}}},$$

qu'on écrit ordinairement sous la forme

$$n(t-\tau) = u - e\sin u \quad \text{avec} \quad r = a(1-e\cos u),$$

n et u ayant des significations connues.

Au lieu d'intégrer directement en suivant la marche ordinaire que nous venons de rappeler très-brièvement, cherchons à obtenir une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 = 2\left(\frac{\mu}{r}+h\right),$$

ou plutôt, afin d'avoir des équations comparables aux précédentes, de l'équation

$$(2) \qquad \frac{dV^2}{dr^2} + \frac{dV^2}{dL^2}\frac{1}{r^2\cos^2\lambda} + \frac{dV^2}{d\lambda^2}\frac{1}{r^2} = 2\left(\frac{\mu}{r}+h\right),$$

que l'on obtient en remplaçant les coordonnées x, y, z par les coordonnées L, λ, r liées aux précédentes par les équations

$$x = r\cos\lambda\cos L, \quad y = r\cos\lambda\sin L, \quad z = r\sin\lambda,$$

λ étant la latitude et L la longitude de la planète. Si V est une intégrale complète de cette équation, contenant deux constantes arbitraires α_1, α_2 outre la constante h, les intégrales demandées seront, d'après un théorème connu,

$$\frac{dV}{d\alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{dV}{d\alpha_2} = \beta_2, \quad \frac{dV}{dh} = t - \tau,$$

β_1, β_2, τ désignant trois nouvelles constantes arbitraires. La question est donc de trouver cette intégrale. Considérons, à cet effet, d'après la règle d'intégration des équations aux différentielles partielles du premier ordre.

le système d'équations simultanées

$$\frac{dr}{p_1} = \frac{dL}{\frac{p_2}{r^2\cos^2\lambda}} = \frac{d\lambda}{\frac{p_3}{r^2}} = \frac{dp_1}{\frac{1}{r}\left[2\left(\frac{\mu}{r}+h\right)-p_1^2\right]-\frac{\mu}{r^2}}$$

$$= -\frac{dp_2^2}{0} = -\frac{dp_3}{\frac{p_2^2}{r^2}\frac{\sin\lambda\cos\lambda}{\cos^4\lambda}} = \frac{dV}{2\left(\frac{\mu}{r}+h\right)},$$

dans lesquelles p_1, p_2, p_3 représentent $\frac{dV}{dr}$, $\frac{dV}{dL}$, $\frac{dV}{d\lambda}$. Nous en concluons d'abord

$$p_2 = \text{const.}, \quad \text{ou} \quad \frac{dV}{dL} = l.$$

Puis de l'équation

$$\frac{dr}{p_1} = \frac{dp_1}{\frac{1}{r}\left[2\left(\frac{\mu}{r}+h\right)-p_1^2\right]-\frac{\mu}{r^2}},$$

nous déduisons

$$p_1^2 \quad \text{ou} \quad \frac{dV^2}{dr^2} = 2\left(\frac{\mu}{r}+h\right) - \frac{k^2}{r^2}.$$

Enfin la substitution de ces valeurs de $\frac{dV}{dL}$, $\frac{dV}{dr}$, dans l'équation (2), nous donne

$$\frac{dV^2}{d\lambda^2} = k^2 - \frac{l^2}{\cos^2\lambda}.$$

En remarquant que ces dérivées partielles $\frac{dV}{dL}$, $\frac{dV}{dr}$, $\frac{dV}{d\lambda}$ ne contiennent que leurs variables respectives, nous apercevons tout de suite, sans poursuivre l'application de la méthode, que

$$V = \int l\,dL + \int d\lambda\sqrt{k^2 - \frac{l^2}{\cos^2\lambda}} + \int dr\sqrt{2\left(\frac{\mu}{r}+h\right)-\frac{k^2}{r^2}},$$

est une intégrale complète de l'équation (2). Par suite, les intégrales du mouvement non troublé seront

$$\frac{dV}{dl} = \theta \quad \text{ou} \quad L - \theta = l\int\frac{d\lambda}{\cos\lambda\sqrt{k^2\cos^2\lambda - l^2}},$$

$$\frac{dV}{dk} = \varpi \quad \text{ou arc sin}\left(\frac{k\sin\lambda}{\sqrt{k^2-l^2}}\right) - \varpi = \int\frac{k\,dr}{r^2\sqrt{2\left(\frac{\mu}{r}+h\right)-\frac{k^2}{r^2}}},$$

$$\frac{dV}{dh} = t - \tau \quad \text{ou} \quad t - \tau = \int\frac{dr}{\sqrt{2\left(\frac{\mu}{r}+h\right)-\frac{k^2}{r^2}}}.$$

La comparaison de ces équations aux précédentes montre que, dans les unes et dans les autres, les constantes h, k, l, θ, ϖ, τ ont la même signification : h représente l'axe inverse ; k la racine carrée du demi-paramètre ; l la racine carrée du demi-paramètre multipliée par le cosinus de l'inclinaison ; τ le temps du passage au périhélie ; ϖ la longitude du périhélie et θ la longitude du nœud ascendant.

2. Du cas particulier que nous venons d'examiner, passons au cas général. Jacobi a énoncé, sans démonstration, que, V étant une intégrale complète de l'équation

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 = 2(U + h),$$

de telle sorte que les équations $\frac{dV}{dl} = \theta$, $\frac{dV}{dk} = \varpi$, $\frac{dV}{dh} = t - \tau$ soient les intégrales des équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dU}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dU}{dy}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dU}{dz},$$

les six constantes l, θ, k, ϖ, h, τ sont telles, que, si la fonction U s'accroît d'une autre fonction $-$ R, on aura

$$(3) \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dl}{dt} = -\frac{dR}{d\theta}, \quad \frac{dk}{dt} = -\frac{dR}{d\varpi}, \quad \frac{dh}{dt} = \frac{dR}{d\tau}, \\ &\frac{d\theta}{dt} = \frac{dR}{dl}, \quad \frac{d\varpi}{dt} = \frac{dR}{dk}, \quad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{dR}{dh}. \end{aligned}\right.$$

Plusieurs démonstrations de ce théorème ont été données depuis. Les équations précédentes déterminent la variation des constantes.

Si, à la constante l, nous substituons la constante φ qui indique l'inclinaison du plan de l'orbite, et qui dépend de la première par la relation $l = k\cos\varphi$, nous obtiendrons par des transformations connues les nouvelles équations

$$(4) \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\cos\varphi}{k\sin\varphi}\cdot\frac{dR}{d\varpi} + \frac{1}{k\sin\varphi}\cdot\frac{dR}{d\theta}, \quad \frac{dk}{dt} = -\frac{dR}{d\varpi}, \quad \frac{dh}{dt} = \frac{dR}{d\tau}, \\ &\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{k\sin\varphi}\cdot\frac{dR}{d\varphi}, \quad \frac{d\varpi}{dt} = \frac{dR}{dk} + \frac{\cos\varphi}{k\sin\varphi}\cdot\frac{dR}{d\varphi}, \quad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{dR}{dh}. \end{aligned}\right.$$

Ce sont celles auxquelles Poisson est arrivé directement par une méthode différente (*Journal de l'École Polytechnique*, 15^e cahier).

Si, dans ces dernières équations, nous remplaçons les constantes h, k, τ

par les constantes a, e, c, liées aux précédentes par les relations $h = -\frac{\mu}{2a}$, $k = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$, $-n\tau = c$, $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$, nous les transformerons dans les suivantes qui sont dues à Lagrange :

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{\cos\varphi}{a^2 n\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\cdot\frac{dR}{d\varpi} + \frac{1}{a^2 n\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\cdot\frac{dR}{d\theta},\\
\frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2 ne}\frac{dR}{d\varpi} - \frac{1-e^2}{a^2 ne}\cdot\frac{dR}{dc},\\
\frac{da}{dt} &= -\frac{2}{an}\frac{dR}{dc},\\
\frac{d\theta}{dt} &= -\frac{1}{a^2 n\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\cdot\frac{dR}{d\varphi},\\
\frac{d\varpi}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2 ne}\frac{dR}{de} + \frac{\cos\varphi}{a^2 n\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{dR}{d\varphi},\\
\frac{dc}{dt} &= \frac{2}{an}\frac{dR}{da} + \frac{1-e^2}{a^2 ne}\frac{dR}{de}.
\end{aligned}
\right.
$$

Enfin substituons dans celles-ci à la constante c une autre constante ε telle que l'on ait $c = \varepsilon - \varpi$, nous obtiendrons ces autres dont on fait usage ordinairement :

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{a^2 n\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{dR}{d\theta} - \frac{\cos\varphi}{a^2 n\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\left(\frac{dR}{d\varepsilon} + \frac{dR}{d\varpi}\right),\\
\frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2 ne}\frac{dR}{d\varpi} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2 ne}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\frac{dR}{d\varepsilon},\\
\frac{da}{dt} &= -\frac{2}{an}\frac{dR}{d\varepsilon},\\
\frac{d\theta}{dt} &= -\frac{1}{a^2 n\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{dR}{d\varphi},\\
\frac{d\varpi}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2 ne}\frac{dR}{de} + \frac{\cos\varphi}{a^2 n\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{dR}{d\varphi},\\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{2}{an}\frac{dR}{da} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2 ne}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\frac{dR}{de} + \frac{\cos\varphi}{a^2 n\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{dR}{d\varphi}.
\end{aligned}
\right.
$$

a désigne le demi grand axe de l'orbite, e l'excentricité, ε un angle tel, que l'on ait $n\tau + \varepsilon - \varpi = 0$.

3. Pour obtenir la dérivée $\frac{dR}{da}$ que contiennent les équations précédentes, les dernières par exemple, on est conduit à faire varier tout ce qui dépend de a, et par conséquent le coefficient n qui multiplie t. Cette manière d'opérer a l'inconvénient de faire sortir le temps t hors des signes sinus et cosinus, même dans le cas où les quantités que l'on considère doivent rester périodiques. On peut éviter cet inconvénient en remplaçant nt par $\int ndt$ dans l'expression de l'anomalie moyenne $nt + \varepsilon - \varpi$, et en convenant de ne pas faire varier $\int ndt$ quand on différentie R par rapport à a; la valeur de l'anomalie moyenne ne changera pas. Car, de ce que

$$\int ndt = nt - \int tdn,$$

on voit qu'à l'expression $\int ndt + \varepsilon - \varpi$, il faudra ajouter le terme $\int tdn$, pour qu'elle soit identique à la première $nt + \varepsilon - \varpi$, ou, ce qui revient au même, il faudra augmenter la valeur de $d\varepsilon$ du terme tdn. Mais, d'un autre côté, la dérivée partielle $\frac{dR}{da}$ se trouvant diminuée du terme $\frac{dR}{dn} \cdot \frac{dn}{da}$, puisque n ne varie pas, la valeur de $d\varepsilon$ donnée par les équations (6) le sera aussi du terme

$$\frac{2}{an} \frac{dR}{dn} \frac{dn}{da} dt = \frac{2}{an} t \frac{dR}{d\varepsilon} \frac{dn}{da} dt = - t \frac{da}{dt} \frac{dn}{da} dt = - t\, dn\,;$$

ou autrement la valeur de $d\varepsilon$ sera augmentée du terme tdn. Donc l'anomalie moyenne ne change pas, et par suite le rayon vecteur et la longitude de la planète seront dans le même cas.

L'intégrale $\zeta = \int ndt$ est ce que l'on appelle le moyen mouvement de la planète troublée, parce qu'il correspond au moyen mouvement nt dans les formules du mouvement elliptique. En remarquant que par définition on a

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}},$$

et par suite

$$dn = - \frac{3}{2} \frac{n}{a} da = \frac{3\, an^2}{\mu} \frac{dR}{d\varepsilon} dt,$$

nous en conclurons pour la valeur de ζ,

(7) $$\zeta = \frac{3}{\mu} \int\!\!\int an^2 \frac{dR}{d\varepsilon} dt^2.$$

C'est la formule qui sert à la déterminer.

4. La fonction R contient, outre les coordonnées du point m, celles des autres points m', m''... Si ces coordonnées étaient connues en fonction du temps, la substitution de leurs valeurs dans R rendrait cette quantité fonc-

5

tion des coordonnées de m seulement et du temps t. Les équations (6), par leur intégration, détermineraient à chaque instant les valeurs des éléments $a, e, \varepsilon, \varpi, \theta, \varphi$, et la substitution de ces valeurs dans les équations du mouvement du point, savoir :

$$(8)\left\{\begin{array}{l}
r = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\varpi)} \\
\text{ou} \\
r = a(1-e\cos u),\quad \tang\frac{1}{2}(v-\varpi) = \sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\tang\frac{1}{2}u, \\
\qquad\qquad u - e\sin u = \zeta + \varepsilon - \varpi, \\
\text{ou simplement, dans le cas des planètes :} \\
\dfrac{r}{a} = 1 - e\cos(\zeta+\varepsilon-\varpi) - \dfrac{e^2}{2}[\cos 2(\zeta+\varepsilon-\varpi) - 1] \\
\qquad - \dfrac{e^3}{2^3}[3\cos 3(\zeta+\varepsilon-\varpi) - 3\cos(\zeta+\varepsilon-\varpi)] - \ldots, \\
v = \zeta + \varepsilon + 2e\sin(\zeta+\varepsilon-\varpi) + \dfrac{5}{4}e^2\sin 2(\zeta+\varepsilon-\varpi) \\
\qquad + \dfrac{e^3}{2^3.3}\cdot[13\sin 3(\zeta+\varepsilon-\varpi) - 3\sin(\zeta+\varepsilon-\varpi)] + \ldots,
\end{array}\right.$$

ferait connaître à chaque instant la position exacte de ce point. Malheureusement le cas que nous venons de supposer n'existe pas, car la détermination des coordonnées des autres points $m', m'', \ldots$, dépend du même problème que la détermination des coordonnées précédentes. Cependant on peut remplacer ces coordonnées par des valeurs de plus en plus approchées, de manière à obtenir pour celles du point m des valeurs de plus en plus exactes, et suffisantes pour les besoins de l'Astronomie.

PREMIÈRE APPROXIMATION DES MOUVEMENTS CÉLESTES, EN AYANT ÉGARD AUX PREMIÈRES PUISSANCES DES MASSES PERTURBATRICES.

5. En remplaçant dans la fonction R les coordonnées des différents points par leurs valeurs elliptiques, ce qui revient à négliger les carrés et les produits des masses perturbatrices, on obtiendra par l'intégration des équations (6) de premières valeurs approchées des variations des éléments, variations qu'il y a lieu de distinguer en variations séculaires et variations périodiques. Notre but n'est pas de nous arrêter à ce calcul, mais seulement à celui des coordonnées de la planète, c'est-à-dire de la longitude et du rayon vecteur.

D'après les formules (8), nous voyons que la longitude v ne dépend que du moyen mouvement ζ et des paramètres ε, ϖ, e, qui varient à chaque instant. Comme nous ne tenons compte d'abord que des premières puissances des masses perturbatrices, il suffira de supposer les quantités $\zeta, \varepsilon, \varpi, e$, augmentées d'un terme du premier ordre par rapport aux masses, et de développer v suivant les puissances de ces accroissements, en ne conservant que les termes du premier ordre. Or cela revient évidemment à différentier la valeur elliptique de v par rapport à ζ, ε, ϖ, e, et à remplacer les différentielles de ces paramètres par leurs valeurs précédées du signe $\int$. Nous obtiendrons de cette manière, en désignant d'abord les accroissements des paramètres par $\delta\zeta$, $\delta\varepsilon$, $\delta\varpi$, δe,

$$\delta v = \frac{dv}{d\zeta}\delta\zeta + \frac{dv}{d\varepsilon}\delta\varepsilon + \frac{dv}{d\varpi}\delta\varpi + \frac{dv}{de}\delta e;$$

or

$$\frac{dv}{d\varepsilon} = \frac{dv}{n\,dt} = \frac{[1 + e\cos(v - \varpi)]^2}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{dv}{d\varpi} = 1 - \frac{dv}{d\varepsilon} = 1 - \frac{[1 + e\cos(v - \varpi)]^2}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour avoir $\frac{dv}{de}$, rappelons-nous les équations du mouvement elliptique :

$$1 + e\cos(v - \varpi) = \frac{1 - e^2}{1 - e\cos u}, \quad \zeta + \varepsilon - \varpi = u - e\sin u.$$

Nous déduirons de la première :

$$\cos u = \frac{e + \cos(v - \varpi)}{1 + e\cos(v - \varpi)}, \quad \sin u = \frac{\sqrt{1 - e^2}\sin(v - \varpi)}{1 + e\cos(v - \varpi)}:$$

d'où

$$-\sin u\frac{du}{de} = \frac{\sin^2(v - \varpi)}{[1 + e\cos(v - \varpi)]^2} - \frac{(1 - e^2)\sin(v - \varpi)}{[1 + e\cos(v - \varpi)]^2}\frac{dv}{de}.$$

La seconde donne également

$$(1 - e\cos u)\frac{du}{de} = \sin u$$

et par conséquent

$$\sin u\frac{du}{de} = \frac{\sin^2 u}{1 - e\cos u} = \frac{\sin^2(v - \varpi)}{1 + e\cos(v - \varpi)};$$

donc

$$\frac{dv}{de} = \frac{[2 + e\cos(v - \varpi)]\sin(v - \varpi)}{1 - e^2}.$$

Remplaçons $\frac{dv}{d\varepsilon}$, $\frac{dv}{d\varpi}$, $\frac{dv}{de}$ par ces valeurs, et $\delta\varepsilon$, $\delta\varpi$, δe par celles qui nous

5.

sont données par les équations (6) ; l'expression de δv deviendra

$$(9)\quad \delta v = \left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{d\zeta}\delta\zeta + \frac{2}{an}\frac{[1+e\cos(v-\varpi)]^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\int\frac{dR}{da}dt + \frac{\cos\varphi}{a^2 n\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\int\frac{dR}{d\varphi}dt \\ + \frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2ne}\left\{\frac{[1+\cos(v-\varpi)]^2}{1-e^2} - 1\right\}\int\frac{dR}{de}dt \\ + \frac{[2+e\cos(v-\varpi)]\sin(v-\varpi)}{a^2 ne\sqrt{1-e^2}}\int\frac{dR}{d\varpi}dt \\ + (1-\sqrt{1-e^2})\frac{[2+e\cos(v-\varpi)]\sin(v-\varpi)}{a^2 ne\sqrt{1-e^2}}\int\frac{dR}{d\varepsilon}dt. \end{array} \right.$$

En intégrant les valeurs de $d\varepsilon$, $d\varpi$, de, nous avons regardé a, e, n comme des quantités constantes dans les coefficients de $\frac{dR}{da}, \frac{dR}{de}, \frac{dR}{d\varepsilon}\cdots$; ce qui doit être, puisque la fonction R est déjà du premier ordre par rapport aux masses et que nous négligeons les termes du second ordre.

Nous aurons de même la variation de r. D'après l'équation

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\varpi)},$$

nous voyons que le rayon vecteur est une fonction de a, e, v, ϖ. Donc

$$\delta r = \frac{dr}{da}\delta a + \frac{dr}{de}\delta e + \frac{dr}{dv}\delta v + \frac{dr}{d\varpi}\delta\varpi;$$

or

$$\frac{dr}{da} = \frac{1-e^2}{1+e\cos(v-\varpi)}, \qquad \frac{dr}{de} = -a\frac{2e+(1+e^2)\cos(v-\varpi)}{[1+e\cos(v-\varpi)]^2},$$

$$\frac{dr}{dv} = -\frac{dr}{d\varpi} = \frac{a(1-e^2)e\sin(v-\varpi)}{[1+e\cos(v-\varpi)]^2}.$$

Par la substitution de ces valeurs, ainsi que des valeurs de δa, δe, $\delta\varpi$, δv, tirées des équations précédentes, nous obtiendrons, touteréduction faite,

$$(10)\quad \delta r = \left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{dv}\frac{dv}{d\zeta}\delta\zeta + \frac{2ae\sin(v-\varpi)}{an\sqrt{1-e^2}}\int\frac{dR}{da}dt + \frac{\sqrt{1-e^2}\sin(v-\varpi)}{an}\int\frac{dR}{de}dt \\ - \frac{\sqrt{1-e^2}\cos(v-\varpi)}{ane}\int\frac{dR}{d\varpi}dt \\ - \frac{\sqrt{1-e^2}}{ane}\left[\frac{2e\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos(v-\varpi)} + (1-\sqrt{1-e^2})\cos(v-\varpi)\right]\int\frac{dR}{d\varepsilon}dt. \end{array} \right.$$

6. Dans ces formules, nous avons négligé les puissances des masses perturbatrices supérieures à la première, mais les puissances des excentricités et des inclinaisons sont quelconques. Dans la théorie des planètes, on peut aussi le plus souvent négliger les carrés et les produits des excentricités et des inclinaisons des orbites. Dans ce qui suit, nous les négligerons même complétement, n'ayant d'autre but ici que de montrer comment on peut arriver aux résultats de la *Mécanique céleste* par la méthode de la variation des constantes. A ce degré d'approximation, l'angle $v - \varpi$ pourra être remplacé par $\zeta + \varepsilon - \varpi$ dans les formules précédentes. De plus, en ne conservant que les premières puissances des excentricités et des inclinaisons, on a (*Mécanique céleste*, liv. II, § 50) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{R} = {} & \frac{m'}{2}\sum \mathrm{A}^{(i)} \cos i(\zeta' - \zeta + \varepsilon' - \varepsilon) \\
& - \frac{m'}{2}\sum \left[a\left(\frac{d\mathrm{A}^{(i)}}{da}\right) + 2i\mathrm{A}^{(i)}\right] e\cos[i(\zeta' - \zeta + \varepsilon' - \varepsilon) + \zeta + \varepsilon - \varpi] \\
& - \frac{m'}{2}\sum \left[a'\left(\frac{d\mathrm{A}^{(i-1)}}{da'}\right) - 2(i-1)\mathrm{A}^{(i-1)}\right] e'.\cos[i(\zeta' - \zeta + \varepsilon' - \varepsilon) + \zeta + \varepsilon - \varpi'],
\end{aligned}$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières positives et négatives de i, y compris la valeur $i = 0$. De là on tire :

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon} &= \frac{m'}{2}\sum (i\mathrm{A}^{(i)}) \sin i(\zeta' - \zeta + \varepsilon' - \varepsilon) - \ldots, \\
\frac{d\mathrm{R}}{de} &= -\frac{m'}{2}\sum \left[a\frac{d\mathrm{A}^{(i)}}{da} + 2i\mathrm{A}^{(i)}\right] \cos[i(\zeta' - \zeta + \varepsilon' - \varepsilon) + \zeta + \varepsilon - \varpi], \\
\frac{d\mathrm{R}}{d\varpi} &= -\frac{m'}{2}\sum \left[a\frac{d\mathrm{A}^{(i)}}{da} + 2i\mathrm{A}^{(i)}\right] e.\sin[i(\zeta' - \zeta + \varepsilon' - \varepsilon) + \zeta + \varepsilon - \varpi], \\
\frac{d\mathrm{R}}{da} &= \frac{m'}{2}\sum \left(\frac{d\mathrm{A}^{(i)}}{da}\right) \cos i(\zeta' - \zeta + \varepsilon' - \varepsilon) + \ldots\ldots
\end{aligned}$$

Pour effectuer les intégrales $\int \frac{d\mathrm{R}}{dr}dt$, $\int \frac{d\mathrm{R}}{de}dt \ldots$, nous devrons regarder les éléments a, e, ε,..., comme constants et remplacer ζ par nt, ζ' par $n't$, puisque nous négligeons les puissances des masses supérieures à la première. De cette manière, il viendra :

$$\begin{aligned}
\int \frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}dt &= \frac{m'}{2}\sum \left[\frac{\mathrm{A}^{(i)}}{n' - n}\right] \cos i(\zeta' - \zeta + \varepsilon' - \varepsilon) + \ldots, \\
\int \frac{d\mathrm{R}}{de}dt &= -\frac{m'}{2}\sum \left[\frac{a\frac{d\mathrm{A}^{(i)}}{da} + 2i\mathrm{A}^{(i)}}{i(n' - n) + n}\right] \sin[i(\zeta' - \zeta + \varepsilon' - \varepsilon) + \zeta + \varepsilon - \varpi], \\
\int \frac{d\mathrm{R}}{d\varpi}dt &= \frac{m'}{2}\sum \left[\frac{a\frac{d\mathrm{A}^{(i)}}{da} + 2i\mathrm{A}^{(i)}}{i(n' - n) + n}\right] e.\cos[i(\zeta' - \zeta + \varepsilon' - \varepsilon) + \zeta + \varepsilon - \varpi], \\
\int \frac{d\mathrm{R}}{da}dt &= \frac{m'}{2}\sum \left[\frac{\frac{d\mathrm{A}^{(i)}}{da}}{i(n' - n)}\right] \sin i(\zeta' - \zeta + \varepsilon' - \varepsilon) + \ldots\ldots
\end{aligned}$$

Puis la formule (7) nous donnera

$$\delta\zeta = -\frac{m'}{2}\frac{3an^2}{\mu}\sum\left[\frac{A^{(i)}}{i(n'-n^2)}\right]\sin i\,(\zeta'-\zeta+\varepsilon'-\varepsilon).$$

Par la substitution de ces valeurs dans les expressions (10) et (9), nous obtiendrons pour δr et δv, en négligeant tous les termes qui renferment e en facteur,

$$\frac{\delta r}{a} = m'g + \frac{m'}{2a^2n}\sum\left[\frac{a\frac{dA^{(i)}}{da} + \frac{2n}{n-n'}A^{(i)}}{i(n-n')-n}\right]\cos i\,(\zeta'-\zeta+\varepsilon'-\varepsilon),$$

$$\delta v = m'g' + \frac{m'}{2a^2n}\sum\left\{\begin{array}{c}\left(\frac{n}{i(n-n')^2}+\frac{4}{n-n'}\right)A^{(i)} \\ +\,2n.\frac{a\frac{dA^{(i)}}{da}+\frac{2n}{n-n'}A^{(i)}}{i(n-n')[i(n-n')-n]}\end{array}\right\}\sin i(\zeta'-\zeta+\varepsilon'-\varepsilon),$$

ou, en supposant $\mu = 1$ ou $n^2a^3 = 1$, ce qui permet de remplacer $\frac{1}{a^2n}$ par an,

$$(11)\left\{\begin{aligned}&\frac{\delta r}{a} = m'g + \frac{m'n}{2}\sum\left[\frac{a^2\frac{dA^{(i)}}{da} + \frac{2n}{n-n'}aA^{(i)}}{i(n-n')-n}\right]\cos i\,(\zeta-\zeta'+\varepsilon-\varepsilon'),\\ &\delta v = m'g' - \frac{m'n}{2}\sum\left\{\begin{array}{c}\left[\frac{n}{i(n-n')^2}+\frac{4}{n-n'}\right]aA^{(i)} \\ +\,2n.\frac{a^2\frac{dA^{(i)}}{da}+\frac{2n}{n-n'}aA^{(i)}}{i(n-n')[i(n-n')-n]}\end{array}\right\}\sin i(\zeta-\zeta'+\varepsilon-\varepsilon'),\end{aligned}\right.$$

g et g' sont des constantes arbitraires.

DEUXIÈME APPROXIMATION DES MOUVEMENTS CÉLESTES, EN AYANT ÉGARD AUX CARRÉS ET AUX PRODUITS DES MASSES PERTURBATRICES.

7. Sans plus vouloir effectuer dans le cas actuel que dans le cas précédent le calcul des variations des éléments et des coordonnées des planètes, nous le ferons, comme application des formules précédentes, pour le moyen mouvement des trois premiers satellites de Jupiter. L'expérience a montré que le moyen mouvement du premier satellite est, à très-peu près, double de celui du second, et que celui du second est à fort peu près double de celui du troisième; de sorte qu'en désignant par nt, $n't$, $n''t$ ces moyens mouvements, on a sensiblement :

$$n - 2n' = 0, \quad n' - 2n'' = 0, \quad \text{et par suite,} \quad n - 3n' + 2n'' = 0.$$

Cette dernière relation a été reconnue plus approchée encore que les deux autres. Ainsi les termes qui renfermeront les précédents et surtout le dernier en dénominateur, seront très-grands par rapport aux autres termes, et produiront par conséquent les inégalités les plus sensibles. Nous ne considérerons dans la variation du moyen mouvement que ceux qui dépendront de l'angle $\zeta - 3\zeta' + 2\zeta'' + \varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon''$ et qui auront pour diviseur $(n - 3n' + 2n'')^2$ après l'intégration.

Les fonctions R, R', R'' ne renferment point d'angles dépendants de $\zeta - 3\zeta' + 2\zeta'' + \varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon''$; mais si, dans leur développement, nous remplaçons δr, δv, $\delta r'$, $\delta v'$, ..., par leurs valeurs, il pourra en résulter des termes de l'ordre du carré des masses, dépendants de cet angle. Or, d'après les expressions de $\frac{\delta r}{a}$, et de δv fournies par les équations (11), nous voyons que les principales inégalités de r et v, dues aux forces perturbatrices, dépendent de l'angle $2\zeta - 2\zeta'$, car le terme correspondant a pour diviseur $n - 2n'$; de sorte que, en nous bornant à ce seul terme, et en posant, pour abréger,

$$E = a^2 \frac{dA^{(2)}}{da} + \frac{2n}{n-n'} a A^{(2)},$$

nous pourrons écrire

$$\frac{\delta r}{a} = \frac{m'}{2} \cdot \frac{nE}{n - 2n'} \cos 2(\zeta - \zeta' + \varepsilon - \varepsilon'),$$

$$\delta v = - m' \cdot \frac{nE}{n - 2n'} \sin 2(\zeta - \zeta' + \varepsilon - \varepsilon').$$

La considération des mêmes expressions nous fait voir que l'action de m sur m' produit dans la variation de r' et v' une inégalité fort sensible provenant des termes où l'on fait $i = -1$, et que l'action de m'' sur m' produit dans les mêmes quantités une variation considérable dépendante de l'argument $2(\zeta' - \zeta'' + \varepsilon' - \varepsilon'')$.

En nous bornant à ces seuls termes, et en posant

$$E' = a'^2 \frac{dA_{,}^{(-1)}}{da'} - \frac{2n'}{n-n'} a' A_{,}^{(-1)} = a'^2 \frac{dA_{,}^{(1)}}{da'} - \frac{2n'}{n-n'} a' A_{,}^{(1)},$$

$$F' = a'^2 \frac{dA'^{(2)}}{da'} + \frac{2n'}{n'-n''} a' A'^{(2)},$$

$A_{,}^{(i)}$ désignant, relativement au second et au premier satellite, et $A'^{(i)}$ relativement au second et au troisième, ce que nous avons désigné par $A^{(i)}$ relativement au premier et au second, nous obtiendrons

$$\frac{\delta r'}{a'} = \frac{m}{2}\frac{n'\mathrm{E}'}{n-2n'}\cos(\zeta-\zeta'+\varepsilon-\varepsilon')+\frac{m''}{2}\frac{n'\mathrm{F}'}{n'-2n''}\cos 2(\zeta'-\zeta''+\varepsilon'-\varepsilon'),$$

$$\delta v' = -m\frac{n'\mathrm{E}'}{n-2n'}\sin(\zeta-\zeta'+\varepsilon-\varepsilon')-m''\frac{n'\mathrm{F}'}{n'-2n''}\sin 2(\zeta'-\zeta''+\varepsilon'-\varepsilon'').$$

Enfin, l'action de m' sur m'' produit dans r'' et v'' une égalité considérable provenant des termes où l'on fait $i=-1$, de sorte que, en posant

$$a''^2\frac{d\mathrm{A}'^{(1)}_{,}}{da''}-\frac{2n''}{n'-n''}a''\mathrm{A}'^{(1)}_{,}=\mathrm{E}'',$$

nous pourrons écrire

$$\frac{\delta r''}{a''}=\frac{m'}{2}\frac{n''\mathrm{E}''}{n'-2n''}\cos(\zeta'-\zeta''+\varepsilon'-\varepsilon''),$$

$$\delta v''=-m'\frac{n''\mathrm{E}''}{n'-2n''}\sin(\zeta'-\zeta''+\varepsilon'-\varepsilon'').$$

Il faut maintenant remplacer dans R les quantités r, v, r', v', r'', v'', par leurs valeurs $a+\delta r$, $\zeta+\varepsilon+\delta v$, $a'+\delta r'$, $\zeta'+\varepsilon+\delta v'$, ..., et ne conserver que les termes qui dépendront de l'argument $\zeta-3\zeta'+2\zeta''+\varepsilon-3\varepsilon'+2\varepsilon''$. Or on sait (*Mécanique céleste*, t. I$^{\text{er}}$, liv. II, § 48) que l'expression de R pourra alors se développer de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\mathrm{R}=&\frac{m'}{2}\sum\mathrm{A}^{(i)}\cos i(\zeta-\zeta'+\varepsilon-\varepsilon')+\frac{m'}{2}\frac{\delta r}{a}\sum\left(a\frac{d\mathrm{A}^{(i)}}{da}\right)\cos i(\zeta-\zeta'+\varepsilon-\varepsilon')\\&+\frac{m'\delta r'}{2a'}\sum\left(a'\frac{d\mathrm{A}^{(i)}}{da'}\right)\cos i(\zeta-\zeta'+\varepsilon-\varepsilon')\\&+\frac{m'}{2}(\delta v'-\delta v)\sum i\,\mathrm{A}^{(i)}\sin i'(\zeta-\zeta'+\varepsilon-\varepsilon')\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

si l'on n'a égard qu'à l'action de m' sur m. L'action de m'' produirait des termes analogues.

Il est bien évident que cette expression de R, et celles de R′, R″, ne renfermeront que des termes dépendants des angles $\zeta-\zeta'$, $\zeta-\zeta''$, $\zeta'-\zeta''$ et de leurs multiples, sans en renfermer aucun qui dépende de l'angle $\zeta-3\zeta'+2\zeta''$. La substitution des valeurs précédentes de $\frac{\delta r}{a}$, δv, $\frac{\delta r''}{a''}$, $\delta v''$ ne pourra non plus en faire naître, car ces valeurs dépendent des arguments $2\zeta-2\zeta'$, $\zeta'-\zeta''$. Or ces arguments, en se combinant avec les angles $\zeta-\zeta'$, $\zeta-\zeta''$, $\zeta'-\zeta''$ et leurs multiples, ne pourront jamais donner l'angle $\zeta - 3\zeta' + 2\zeta''$. Il suffit donc de considérer les inégalités de la planète m'. Celle qui est relative à l'angle $2\zeta' - 2\zeta''$, en se combinant par voie de soustraction avec l'angle $\zeta - \zeta'$, et celle qui est relative à l'angle $\zeta - \zeta'$, en se combinant avec l'angle $2\zeta' - 2\zeta''$, produiront des termes de la nature que nous cherchons. La partie de $\frac{\delta r'}{a'}$ et de $\delta v'$, qui dépend de l'angle $2\zeta' - 2\zeta''$, donnera dans R le terme suivant :

$$\frac{m' m'' . n' F'}{8a'(n' - 2n'')} \cdot \left(a'^2 \frac{dA^{(1)}}{da'} - 2a' A^{(1)}\right) \cos(\zeta - 3\zeta' + 2\zeta'' + \varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon''),$$

lequel doit être doublé, car pour $i = -1$, on obtient le même résultat que pour $i = 1$.

L'action de m'' sur m ne peut produire dans le développement de R que des termes dépendants de l'angle $\zeta - \zeta''$ et de ses multiples. Donc elle ne peut donner naissance à aucun terme de la forme précédente, et d'après la formule (7), dans laquelle nous supposerons $\mu = 1$, nous pourrons écrire :

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\frac{3an^2 m' m'' n' F'}{4a'} \cdot \frac{a'^2 \frac{dA^{(1)}}{da'} - 2a' A^{(1)}}{n' - 2n''} \cdot \sin(\zeta - 3\zeta' + 2\zeta'' + \varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon'')$$

ou très-sensiblement, en remplaçant n' par $\frac{n}{2}$ et $n' - 2n'' = 2n' - 2n'' - n'$ par $n - n' - n' = n - 2n'$,

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\frac{3m'm''\frac{a}{a'} n^3 F' \left(a'^2 \frac{dA^{(1)}}{da'} - 2a' A^{(1)}\right)}{8(n - 2n')} \cdot \sin(\zeta - 3\zeta' + 2\zeta'' + \varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon'').$$

Considérons le moyen mouvement de la seconde planète m'. La partie de R' qui provient de l'action de m sur m', renfermera les termes suivants :

$$\frac{m}{2}\frac{\delta r'}{a'} a' \frac{dA_{,}^{(1)}}{du'} \cos(\zeta - \zeta' + \varepsilon - \varepsilon') + \frac{m}{2} \delta v' A_{,}^{(1)} \sin(\zeta - \zeta' + \varepsilon - \varepsilon'),$$

et, par suite,

$$\frac{mm''}{8} \frac{n' F'}{n' - 2n''} \left(a' \frac{dA_{,}^{(1)}}{da'} - 2A_{,}^{(1)}\right) \cos(\zeta - 3\zeta' + 2\zeta'' + \varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon''),$$

et par suite enfin, en doublant ce terme pour la même raison que précédemment, et remarquant que $a' \frac{dA_{,}^{(1)}}{da'} - 2A_{,}^{(1)}$ est très-sensiblement égal à $\frac{E'}{a'}$,

$$\frac{mm'' \frac{n'}{a'} E' F'}{4(n - 2n')} \cdot \cos(\zeta - 3\zeta' + 2\zeta'' + \varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon'').$$

L'action de m'' sur m' produira de même dans R' les termes :

$$\frac{m''}{2}\frac{\delta r'}{a'}a'\frac{dA'^{(2)}}{da'}\cos 2(\zeta'-\zeta''+\varepsilon'-\varepsilon'')-\frac{m''}{2}\delta v'\, 2A'^{(2)}\sin 2(\zeta'-\zeta''+\varepsilon'-\varepsilon''),$$

ou cet autre, qui s'en déduit,

$$\frac{mm''}{8}\frac{n'E'}{n-2n'}\left(a'\frac{dA'^{(2)}}{da'}+4A'^{(2)}\right)\cos(\zeta-3\zeta'+2\zeta''+\varepsilon-3\varepsilon'+2\varepsilon''),$$

ou enfin, en le doublant et remarquant que $a'^2\frac{dA'^{(2)}}{da'}+4a'A'^{(2)}$ est très-siblement égal à F',

$$\frac{mm''}{4}\frac{\frac{n'}{a'}E'F'}{n-2n'}\cos(\zeta-3\zeta'+2\zeta''+\varepsilon-3\varepsilon'+2\varepsilon''),$$

Par la réunion de ce terme au précédent, nous conclurons pour la variation du moyen mouvement de la planète m',

$$\frac{d^2\zeta'}{dt^2}=\frac{9mm''.n^3E'F'}{16(n-2n')}\sin(\zeta-3\zeta'+2\zeta''+\varepsilon-3\varepsilon'+2\varepsilon'').$$

Enfin, relativement au moyen mouvement de la troisième planète, il est clair que l'action de m' sur m'' produira dans le développement de R'', les termes suivants :

$$\frac{m'}{2}\frac{\delta r'}{a'}a'\frac{dA'^{(2)}_{,}}{da'}\cos 2(\zeta'-\zeta''+\varepsilon'-\varepsilon'')-\frac{m'}{2}\delta v'\, 2A'^{(2)}_{,}\sin 2(\zeta'-\zeta''+\varepsilon'-\varepsilon''),$$

et, par suite,

$$\frac{mm'}{8}\frac{n'E'}{n-2n'}\left(a'\frac{dA'^{(2)}_{,}}{da'}+4A'^{(2)}_{,}\right)\cos(\zeta-3\zeta'+2\zeta''+\varepsilon-3\varepsilon'+2\varepsilon''):$$

donc

$$\frac{d^2\zeta''}{dt^2}=-\frac{3mm'\frac{a''}{a'}n^3E'}{64(n-2n')}\left(a'^2\frac{dA'^{(2)}_{,}}{da'}+4a'A'^{(2)}_{,}\right)\sin(\zeta-3\zeta'+2\zeta''+\varepsilon-3\varepsilon'+2\varepsilon'').$$

Observons qu'il existe entre $A^{(1)}$ et $A^{(1)}_{,}$ la relation

$$A^{(1)}=A^{(1)}_{,}-\frac{a'}{a^2}+\frac{a}{a'^2}:$$

d'où

$$a'^2\frac{dA^{(1)}}{da'}-2a'A^{(1)}=a'^2\frac{dA^{(1)}_{,}}{da'}-2a'A^{(1)}_{,}+\frac{a'^3}{a^2}-\frac{4a}{a'}.$$

Or

$$\frac{a'^3}{a^2}=\frac{a'^3}{a^3}\cdot\frac{a}{a'}=\frac{n^2}{n'^2}\cdot\frac{a}{a'},$$

ou très-sensiblement

$$\frac{a'^2}{a^2} = \frac{4a}{a'}.$$

Donc

$$a'^2 \frac{d\,A^{(1)}}{da'} - 2\,a'\,A^{(1)} = a'^2 \frac{d\,A_{,}^{(1)}}{da'} - 2\,a'\,A_{,}^{(1)} = E'.$$

De plus, l'expression $a'^2 \frac{d\,A_{,}'^{(2)}}{da'} + 4\,a'\,A_{,}'^{(2)}$ peut elle-même être remplacée par $a'^2 \frac{d\,A'^{(2)}}{da'} + 4\,a'\,A'^{(2)}$ ou F'. Nous pourrons donc écrire :

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\frac{3\,m'\,m''\,n^2\,E'\,F'}{8(n-2n')}\,\frac{a}{a'}\sin(\zeta - 3\zeta' + 2\zeta'' + \varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon''),$$

$$\frac{d^2\zeta'}{dt^2} = \frac{9\,mm''\,n^2\,E'\,F'}{16(n-2n')}\sin(\zeta - 3\zeta' + 2\zeta'' + \varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon''),$$

$$\frac{d^2\zeta''}{dt^2} = -\frac{3\,mm'\,n^2\,E'\,F'}{64(n-2n')}\,\frac{a''}{a'}\sin(\zeta - 3\zeta' + 2\zeta'' + \varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon'').$$

8. En posant, pour abréger,

$$\zeta - 3\zeta' + 2\zeta'' + \varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon'' = V,$$

$$-\frac{3n\,E'\,F'}{8(n-2n')}\left(\frac{a}{a'}m'm'' + \frac{9}{2}mm'' + \frac{a''}{4a'}mm'\right) = K.$$

et réunissant les valeurs de $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$, $-3\frac{d^2\zeta'}{dt^2}$, $2\frac{d^2\zeta''}{dt^2}$, nous formerons l'équation différentielle

$$\frac{d^2V}{dt^2} = K\,n^2 \sin V,$$

dans laquelle k et n^2, variant de quantités très-petites, peuvent être considérés comme des constantes. En intégrant, nous aurons

$$dt = \frac{\pm\, dV}{\sqrt{c - 2kn^2\cos V}}.$$

La constante c, dont la valeur est arbitraire, peut donner lieu aux trois cas suivants :

1°. $c > 2kn^2$ en valeur absolue. Il faut alors que c soit positif, pour que la valeur de V soit réelle, et, dans ce cas, elle croîtra indéfiniment.

2°. $c < 2kn^2$ en valeur absolue, avec $k > 0$. L'angle V ne pourra qu'osciller autour de la demi-circonférence.

3°. $c < 2kn^2$ en valeur absolue, avec $k < 0$. L'angle V ne pourra osciller qu'autour de zéro, et sa valeur moyenne sera nulle.

Le cas de $c = 2kn^2$ est très-peu probable, et rentre d'ailleurs dans les précédents.

Le second cas est celui de la nature; car jusqu'à présent l'observation a donné pour l'angle V des valeurs alternativement plus grandes et plus petites que deux angles droits. Donc, de l'analyse précédente il résulte que, en vertu de la loi d'attraction, la valeur moyenne de l'angle

$$nt - 3n't + 2n''t + \varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon''$$

sera, pour toute la suite des siècles, rigoureusement et constamment égale à deux angles droits. Or ceci ne peut avoir lieu que si l'on a à la fois

$$n - 3n' + 2n'' = 0, \qquad \varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon'' = 2\pi.$$

Donc, en vertu de la loi d'attraction, le moyen mouvement du premier satellite, moins trois fois celui du second, plus deux fois celui du troisième, sera toujours exactement égal à zéro. Et la longitude moyenne du premier satellite, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième, sera toujours exactement égale à deux angles droits.

Vu et approuvé,
Le 3 juillet 1856,
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer,
Le 3 juillet 1856,
LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
CAYX.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.