DE LA

RÉFRACTION A TRAVERS UN PRISME

SUIVANT UNE LOI QUELCONQUE,

PAR M. A. CORNU,

PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

1. Le présent travail a pour objet l'étude géométrique de la marche des rayons lumineux dans un prisme réfractant la lumière suivant une loi quelconque; le but qu'il atteint est le développement d'une méthode générale permettant de déterminer expérimentalement les éléments géométriques d'un rayon lumineux traversant un milieu réfringent donné, indépendamment de toute connaissance sur la nature de la surface d'onde de ce milieu. L'importance de ce problème n'échappera point aux physiciens ni aux géomètres qui connaissent les *desiderata* de l'Optique relativement à la détermination théorique de la forme de la surface de l'onde lumineuse et qui comprennent que la grande probabilité en faveur des résultats d'Huyghens et de Fresnel n'exclut nullement la nécessité d'un contrôle expérimental indépendant de toute hypothèse.

Cette méthode d'observation a été déduite de la discussion des équations de la théorie élémentaire du prisme : les théorèmes géométriques qui s'en dégagent permettent de traiter avec facilité les cas les plus usuels et les plus utiles au point de vue expérimental, par exemple le cas du minimum de déviation et celui d'une légère inclinaison des rayons par rapport à la section droite du prisme; l'étude de cette dernière question a conduit, avec une simplicité inattendue, à la solution du problème général.

BIBLIOTHEQUE INTERUNIVERSITAIRE
Section Physique Recherche
Tour 45 - rez-de-chaussée
4, Place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

L'étude de la réfraction faite indépendamment de la forme de la surface de l'onde a été, comme la remarque en avait été faite dans des *Recherches sur la réflexion cristalline* (¹), une source de simplifications considérables : l'introduction, dès le début, de la nature spéciale de cette surface eût compliqué inutilement les calculs et empêché d'apercevoir les théorèmes généraux indépendants de la forme de l'onde.

2. Ce Mémoire est divisé en trois Parties :

La première contient l'étude géométrique de la marche des rayons parallèles à la section droite d'un prisme, particulièrement dans le cas du minimum de déviation.

La seconde comprend la même étude dans le cas de rayons légèrement obliques sur la section, ainsi que la solution générale du problème optique.

La troisième, plus spécialement expérimentale, renferme l'application des théorèmes démontrés précédemment à l'étude de la surface d'onde du cristal qui se prête le mieux à ce genre de vérifications, le spath d'Islande.

Observations préliminaires.

3. *Définitions des éléments d'un rayon lumineux.* — Avant d'entrer dans l'étude optique du prisme, rappelons la définition de ce qu'on nomme les *éléments géométriques d'un rayon lumineux* dans le système des ondulations.

On ne considère pas, à proprement parler, comme type le plus simple un *seul* rayon lumineux, mais un faisceau de rayons parallèles dus à la propagation d'une *onde plane*. Cette onde plane, dans le cas d'un milieu quelconque homogène, se propage parallèlement à elle-même avec une vitesse uniforme, mais variable suivant l'orientation de son plan par rapport à certaines directions caractéristiques de la constitution optique du milieu. On obtient une image représentative de cette variation de vitesse en considérant la surface enveloppe des positions qu'occuperait, au bout de l'unité de temps, une onde partie

(¹) *Annales de Chimie et de Physique;* 1867.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'un point fixe et se propageant successivement dans toutes les directions.

4. Cette enveloppe, nommée *surface de l'onde*, n'est pas seulement une conception géométrique simplificative, elle représente, comme on le démontre aisément, la forme même de l'onde que produirait, dans certaines conditions, un ébranlement produit au centre considéré.

Cette enveloppe définit en outre une direction importante : l'onde plane étant donnée, si l'on considère l'une des surfaces d'onde à laquelle elle est tangente, la direction qui joint le point de contact au centre de la surface est ce qu'on nomme la *direction lumineuse efficace*. On démontre en effet que le mouvement vibratoire d'une onde plane limitée ne se transmet pas d'une position à la suivante, selon la perpendiculaire à la direction commune, mais suivant la direction oblique qu'on vient de définir : c'est là réellement l'axe du faisceau lumineux.

5. En résumé, un rayon lumineux produit par la propagation d'une onde plane dans un milieu quelconque homogène est en général oblique sur le plan de l'onde; pour le définir complétement au point de vue optique, indépendamment de la nature de sa surface d'onde, il suffira de connaître trois éléments :

1° La vitesse suivant la normale à l'onde plane (1);

2° L'angle de direction lumineuse efficace avec cette normale;

3° L'orientation du plan parallèle à cette normale et au rayon efficace.

Le problème à résoudre est la détermination expérimentale, mais exclusivement géométrique, de ces trois éléments d'un rayon, qui suit, comme on le voit, une loi de réfraction dite *extraordinaire*.

6. *Discussion des méthodes expérimentales utilisées pour la détermination des éléments géométriques des rayons lumineux.* — Il semble au premier abord que la méthode d'observation imaginée par Malus dans

(1) A proprement parler, il faudrait connaître la vitesse normale en grandeur et en direction, ce qui ferait trois éléments et non pas un seul; mais, suivant la construction d'Huyghens, le *raccordement* des ondes le long de la surface de séparation impose deux conditions, de sorte que, dans les problèmes de réfraction, la connaissance de la grandeur de la vitesse normale définit la direction de l'onde plane.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

son étude du spath d'Islande, et reproduite depuis sous bien des formes, soit la plus directe et la meilleure : elle donne en effet immédiatement la direction lumineuse efficace, c'est-à-dire la partie du rayon lumineux directement *accessible* à l'observation ; mais elle a le grand inconvénient de ne pas définir l'élément géométrique vraiment simple du problème, celui auquel s'applique la *loi des sinus*, à savoir le plan d'onde du rayon. Aussi cette méthode ne peut servir qu'à faire des *vérifications* et non pas des *déterminations* de surfaces d'onde; en effet, les données expérimentales qu'elle fournit pour chaque rayon sont au nombre de *deux* (le point d'incidence et le point d'émergence), tandis qu'il en faut trois pour la détermination complète du rayon. L'insuffisance de cette méthode s'aperçoit immédiatement en remarquant que la connaissance d'un rayon intérieur ne permet de calculer les rayons émergents correspondant à des faces d'incidence ou d'émergence données que si l'on connaît le troisième élément, la vitesse de l'onde plane correspondant au rayon, c'est-à-dire l'indice de réfraction de l'onde. On juge par là que, si la forme de l'ellipsoïde d'Huyghens représentant l'onde extraordinaire dans le spath d'Islande n'avait pas été connue d'avance, Malus n'aurait probablement rien tiré de ses observations.

7. On peut faire une autre objection toute pratique à cette méthode, c'est que sa précision est assez limitée; d'ailleurs fût-elle à la fois précise et complète, elle serait presque toujours en défaut, à cause de la dimension considérable de l'échantillon qu'elle exige : les cristaux naturels ou artificiels sur lesquels il est intéressant de faire ces études sont en général beaucoup trop petits pour se prêter utilement à de semblables mesures.

8. La méthode des déviations par un prisme taillé dans la substance à étudier offre les avantages pour ainsi dire complémentaires de la méthode de Malus; elle définit aisément l'onde plane et sa vitesse, mais elle ne paraît pas au premier abord susceptible de fournir les éléments du rayon lumineux efficace; en effet, on est réduit à n'observer les rayons qu'avant leur entrée ou après leur sortie du milieu réfringent, dans un milieu, l'atmosphère, où la normale à l'onde coïncide avec la direction efficace. On pourrait, il est vrai, suivre

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

chaque rayon lumineux dans l'intérieur du prisme, déterminer la position du point d'incidence et du point d'émergence, et en déduire les éléments du rayon réfracté; mais cette méthode mixte, déjà peu exacte, comme on vient de le dire, avec des épaisseurs considérables du milieu réfringent, serait tout à fait grossière appliquée à des prismes dont l'épaisseur maximum ne s'élève qu'à un petit nombre de millimètres.

9. L'étude des déviations angulaires par le prisme se prête, au contraire, à une grande exactitude de mesures, même avec des échantillons de dimensions si petites que la biréfringence y paraît au premier abord insensible. On va voir, par ce qui suit, qu'on peut réduire à des observations purement angulaires la détermination géométrique complète du rayon réfracté intérieur que la méthode de Malus résout d'une manière incomplète, même en apportant toutes les complications d'un véritable *levé trigonométrique*.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DE LA MARCHE DES RAYONS DANS UN PRISME RÉFRACTANT SUIVANT UNE LOI QUELCONQUE. RAYONS PARALLÈLES A LA SECTION DROITE DU PRISME.

Application de la construction d'Huyghens.

10. Des lois de la réfraction des ondes planes dans les milieux homogènes quelconques on déduit les résultats suivants :

1° *Une onde plane réfractée par une ou plusieurs surfaces planes reste toujours plane*, c'est-à-dire un faisceau de rayons parallèles reste toujours un faisceau de rayons parallèles après un nombre quelconque de réfractions à travers des surfaces planes. En particulier, à la sortie d'un prisme à faces rigoureusement planes, les rayons émergents sont parallèles s'ils l'étaient à l'entrée.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

2° *La direction d'une onde plane après un nombre quelconque de réfractions ne dépend que de la valeur des différentes vitesses normales que possédait cette onde dans son passage aux différents milieux.* Elle est absolument indépendante des deux autres éléments qui définissent la direction lumineuse efficace. En particulier, dans un prisme placé dans l'air, la direction du rayon émergent correspondant à un rayon incident donné ne dépend que de la valeur de la vitesse normale de l'onde réfractée; mais si le rayon est déterminé comme direction, il ne l'est pas comme position absolue dans l'espace, car la direction lumineuse efficace subit deux brisures que la loi précédente ne définit pas.

11. La construction d'Huyghens résume et complète ces résultats : elle détermine non-seulement les ondes, mais aussi les rayons lumineux correspondants. Rappelons brièvement le principe de cette construction : autour de chaque point d'incidence du rayon lumineux efficace sur un plan réfringent comme centre, on trace les surfaces d'onde des deux milieux en présence; à l'aide de ces deux surfaces on exprime géométriquement que l'onde plane se brise en pénétrant dans le milieu suivant, de manière que ses deux segments, tangents respectivement aux surfaces d'onde qui représentent leur vitesse actuelle, se raccordent suivant une droite commune sur le plan de séparation des milieux : le rayon réfracté est défini par la droite joignant le point d'incidence au point de contact de l'onde. On répète cette construction à chaque nouveau plan de séparation des milieux.

Cas des rayons parallèles à la section droite du prisme.

12. Considérons d'abord le cas de rayons incidents parallèles à la section droite du prisme. Le problème de la marche des rayons se ramène alors à la Géométrie plane : l'onde incidente étant parallèle à l'arête du prisme, l'onde réfractée et l'onde émergente le sont également et sont par conséquent entièrement définies par leurs traces sur le plan de la section droite.

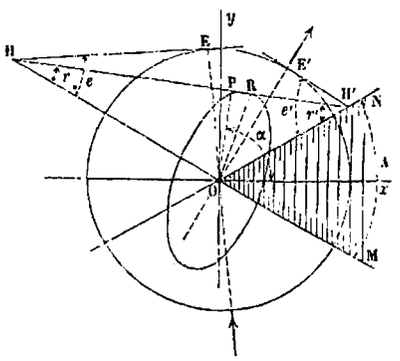
Quant à la surface d'onde, il n'est pas nécessaire de la définir complétement, il suffit de connaître l'enveloppe de toutes les ondes parallèles à l'arête du prisme, c'est-à-dire de connaître le *cylindre circonscrit*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

à la surface d'onde parallèlement à cette direction; on peut appeler *ligne d'onde* la base de ce cylindre dont la considération suffit pour ce qui va suivre.

On simplifiera notablement la construction d'Huyghens, qu'il faut appliquer successivement à chaque face du prisme, en considérant exclusivement celui des rayons qui passe par l'arête, ce qui n'apporte aucune restriction, tous les autres lui étant parallèles. Le même cercle de rayon 1 (vitesse des ondes dans le milieu extérieur) et la même *ligne d'onde* peuvent alors servir à la fois pour les trois rayons incident, réfracté et émergent. Le rayon incident OE (*fig.* 1) étant donné,

Fig. 1.



on construira l'onde incidente en menant, par le point E où le rayon prolongé au delà de l'arête O coupe le cercle, une tangente à ce cercle; puis l'onde réfractée HRH′ en menant, par l'intersection H de l'onde incidente et de la face d'entrée MO prolongée, une tangente à la ligne d'onde. Cette tangente, prolongée jusqu'à la trace de la face de sortie ON, fournit le point H′ par lequel doit passer la tangente au cercle qui représente l'onde émergente H′E′; le rayon émergent sera E′O.

Il faut bien remarquer ici que la droite OR, qui joint le centre O au point de contact de la ligne d'onde, n'est pas la direction du rayon réfracté proprement dit, elle n'en est que la projection. Le point de contact de l'onde plane réfractée avec la surface d'onde est généralement en dehors du plan de la section droite à une distance qu'il est inutile actuellement de se donner pour définir l'onde plane réfractée parallèle à l'arête du prisme. Quant à la perpendiculaire OP, qui repré-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

sente la vitesse normale de l'onde réfractée, il est superflu d'insister sur ce point qu'elle ne correspond à aucun rayon physique.

13. Traduite algébriquement, cette construction fournit les équations suivantes :

Soient :

A l'angle réfringent du prisme;
e l'angle que fait l'onde incidente avec la face d'entrée;
e' l'angle que fait l'onde émergente avec la face de sortie;
r, r' les angles que fait l'onde réfractée avec ces faces;
p la vitesse normale de l'onde réfractée.

On a évidemment

$$\frac{1}{\sin e} = \frac{p}{\sin r},$$

ou, posant $\frac{1}{p} = n$, n étant l'*indice de réfraction* de l'onde plane, l'inverse de la vitesse normale,

$$\sin e = n \sin r, \tag{1}$$

$$\sin e' = n \sin r', \tag{2}$$

$$r + r' = \mathrm{A}. \tag{3}$$

Désignant par D l'angle que font entre elles les ondes incidente et émergente (égal à celui du rayon incident prolongé et du rayon émergent), on a évidemment

$$\mathrm{D} = (e - r) + (e' - r') = e + e' - (r + r') = e + e' - \mathrm{A},$$

d'où

$$\mathrm{A} + \mathrm{D} = e + e'. \tag{4}$$

Calculons donc $e + e'$: des formules (1) et (2), on déduit évidemment

$$\sin e + \sin e' = n(\sin r + \sin r'),$$
$$\sin e - \sin e' = n(\sin r - \sin r'),$$

ou

$$\sin \frac{e + e'}{2} \cos \frac{e - e'}{2} = n \sin \frac{r + r'}{2} \cos \frac{r - r'}{2}, \tag{5}$$

$$\sin \frac{e - e'}{2} \cos \frac{e + e'}{2} = n \sin \frac{r - r'}{2} \cos \frac{r + r'}{2}, \tag{6}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'où

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{e+e'}{2}}{\operatorname{tang}\frac{e-e'}{2}}=\frac{\operatorname{tang}\frac{r+r'}{2}}{\operatorname{tang}\frac{r-r'}{2}}, \tag{7}$$

formule qui permet de déduire r et r' de la connaissance de e, e', A; car elle donne la différence $r-r'$ de deux angles dont on connaît la somme $r+r'=\mathrm{A}$; on peut dès lors calculer n par les formules (1) et (2), ou mieux par l'une des combinaisons (5), (6), qui ont l'avantage d'être plus symétriques pour l'ensemble du calcul par logarithmes. En utilisant l'une et l'autre, on a une vérification utile des calculs; on obtient encore une autre expression de n en multipliant membre à membre les équations (5) et (6) :

$$\frac{\sin(e+e')\sin(e-e')}{\sin(r+r')\sin(r-r')}=n^2. \tag{8}$$

14. *Détermination d'une ligne d'onde par une série de tangentes.* — Ces formules n'apportent aucune restriction à la nature de la surface de l'onde; elles s'appliquent aussi bien aux milieux monoréfringents qu'aux milieux quelconques et ne s'appuient que sur la loi dite de *Descartes*, à savoir qu'une *onde plane reste plane après réfraction, et que le changement de direction de ces ondes, passant d'un milieu à un autre, ne dépend que du rapport des vitesses dans les deux milieux.*

On pourra donc appliquer ces formules à des milieux quelconques; on déterminera les valeurs de r, r', n d'après celles de A, e, e', ce qui définit autant de droites HH' tangentes à la ligne d'onde de la section droite du prisme qu'on aura de couples d'observations; mais les points de contact de chacune de ces tangentes ne seront pas déterminés directement. Toutefois ces opérations pourraient, à la rigueur, servir à la détermination graphique de la ligne d'onde, et, par suite, de la direction des rayons lumineux correspondant à chaque onde plane réfractée, de sorte que le problème général qu'on s'est proposé serait résolu dans le cas où il se réduit à une construction plane. Il est inutile d'insister plus longtemps sur ce mode d'observations. On verra dans la seconde Partie comment on peut utiliser les rayons légèrement inclinés sur la

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

section droite pour déterminer le point de contact, et, par suite, obtenir une méthode notablement plus précise.

15. Revenons aux équations (5) et (6). Si l'on pose

$$\mu = \frac{\cos\frac{A+D}{2}}{\cos\frac{A}{2}}, \quad \nu = \frac{\sin\frac{A+D}{2}}{\sin\frac{A}{2}}, \tag{9}$$

elles prennent la forme

$$\begin{cases} n\cos\dfrac{r-r'}{2} = \nu\cos\dfrac{e-e'}{2}, \\ n\sin\dfrac{r-r'}{2} = \mu\sin\dfrac{e-e'}{2}. \end{cases} \tag{10}$$

Éliminant $\frac{r-r'}{2}$, on a évidemment

$$n^2 = \mu^2\sin^2\frac{e-e'}{2} + \nu^2\cos^2\frac{e-e'}{2}, \tag{11}$$

expression qui fournit n, l'indice de réfraction de l'onde plane en fonction des angles d'émergence et de l'angle du prisme, c'est-à-dire en fonction des données mêmes de l'observation. Cette formule n'est pas calculable par logarithmes, et si l'on essaye de la transformer pour la rendre calculable à l'aide d'un angle auxiliaire simple, on retombe sur les deux équations précédentes.

L'élimination de $\frac{e-e'}{2}$ conduit à une relation importante,

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{\mu^2}\sin^2\frac{r-r'}{2} + \frac{1}{\nu^2}\cos^2\frac{r-r'}{2} \tag{12}$$

de même forme que l'équation

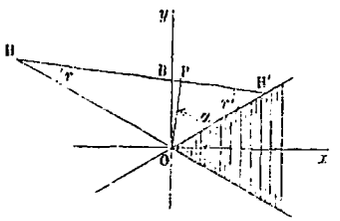
$$p^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha,$$

qui donne la distance p du centre d'une ellipse de demi-axes a, b à une tangente dont la normale fait l'angle α avec la direction de l'axe $2a$. Or $\frac{1}{n}$ représente la perpendiculaire abaissée de la trace de l'arête du

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

prisme sur la trace de l'onde plane réfractée : cette droite peut donc être considérée comme la tangente à une certaine ellipse que nous allons déterminer. La normale à l'onde plane réfractée étant OP (*fig.* 2),

Fig. 2.



calculons l'angle POx qu'elle fait avec l'axe des x sur lequel doit être compté l'axe $2a$: ce sera la valeur de α

$$\mathrm{PO}x = \mathrm{POH'} + \mathrm{H'O}x = \frac{\pi}{2} - r' + \frac{\mathrm{A}}{2} = \frac{\pi}{2} - r' + \frac{r+r'}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{r-r'}{2};$$

on aura donc

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{\mu^2}\cos^2\alpha + \frac{1}{\nu^2}\sin^2\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{r-r'}{2},$$

par suite

$$a = \frac{1}{\mu}, \quad b = \frac{1}{\nu}, \tag{13}$$

d'où l'on conclut cette propriété :

L'onde plane réfractée, tangente par définition à sa ligne d'onde, est également tangente à une ellipse dont les axes sont dirigés suivant les bissectrices de la section droite du prisme et dont les valeurs sont

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\cos\frac{\mathrm{A}}{2}}{\cos\frac{\mathrm{A}+\mathrm{D}}{2}}, \quad \textit{suivant la bissectrice intérieure,}$$

$$\frac{1}{\nu} = \frac{\sin\frac{\mathrm{A}}{2}}{\sin\frac{\mathrm{A}+\mathrm{D}}{2}}, \quad \textit{suivant la bissectrice extérieure.}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

16. Les paramètres de cette ellipse, qui joue absolument le rôle de *ligne d'onde*, ne dépendent que de l'angle du prisme A et de la déviation D des rayons émergents (¹) : l'ellipse est donc complétement définie quand on se donne A et D. Elle permet de résoudre très-simplement le problème suivant :

Étant donné un prisme qui dévie d'un angle D *des rayons parallèles à la section droite sans qu'on définisse ni le pouvoir réfringent du prisme, ni sous quelle incidence a lieu la réfraction, quelle est la série des indices possibles pour l'onde réfractée dans l'intérieur du prisme?*

Ces indices sont donnés par l'inverse des perpendiculaires abaissées des centres sur les tangentes à l'ellipse dont les axes viennent d'être définis.

17. La forme de cette ellipse ne dépend donc, pour un même prisme d'angle A, que d'un seul paramètre, la déviation D; en cher-

---

(¹) *L'ellipse* $\left(\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}\right)$ *peut-elle être ligne d'onde?* Évidemment oui, mais dans le cas très-particulier où certaines nappes de la surface d'onde d'un milieu cristallisé offrent la propriété de pouvoir être inscrites dans un cylindre à base elliptique. L'équation de la section droite étant

$$M^2 x^2 + N^2 y^2 = 1,$$

l'identification

$$M = \frac{\cos\frac{A+D}{2}}{\cos\frac{A}{2}}, \quad N = \frac{\sin\frac{A+D}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

permet de calculer l'angle du prisme et même la déviation qu'il produira. En effet, on aura

$$M^2\cos^2\frac{A}{2} + N^2\sin^2\frac{A}{2} = 1 \quad \text{ou} \quad (M^2-1)\cos^2\frac{A}{2} + (N^2-1)\sin^2\frac{A}{2} = 0,$$

d'où

$$\operatorname{tang}^2\frac{A}{2} = \frac{M^2-1}{1-N^2}.$$

On aurait de même

$$\operatorname{tang}^2\frac{A+D}{2} = \frac{\frac{1}{M^2}-1}{1-\frac{1}{N^2}} = \frac{N^2}{M^2}\operatorname{tang}^2\frac{A}{2}.$$

Numériquement ces valeurs seraient imaginaires si l'on essayait d'y substituer les valeurs M, N des indices des cristaux usuels, lesquelles sont toujours plus grandes que l'unité, parce qu'elles expriment les indices de réfraction rapportés à l'air ou au vide, qui est le milieu

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

chant son mode de déformation quand on fait varier ce paramètre, on arrive à cette conclusion simple :

L'ellipse $\left(\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}\right)$ *passe constamment par quatre points fixes donnés par l'intersection du cercle de rayon décrit autour de la trace de l'arête comme centre, avec les traces des faces du prisme.*

En effet, l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes $\frac{1}{\mu}$, $\frac{1}{\nu}$ est

$$\mu^2 x^2 + \nu^2 y^2 = 1, \tag{14}$$

ou bien

$$\frac{\cos^2\frac{A+D}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}x^2 + \frac{\sin^2\frac{A+D}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}}y^2 = 1,$$

---

extérieur ordinaire. Mais si l'on suppose que le milieu extérieur est un liquide dont l'indice soit k, les valeurs de M et de N deviendront $\frac{M}{k}$ et $\frac{N}{k}$, d'où

$$\operatorname{tang}^2\frac{A}{2} = \frac{M^2 - k^2}{k^2 - N^2};$$

or, comme on peut dans la plupart des cas trouver des liquides ou composer des mélanges d'indice donné k, en choisissant cet indice par la seule condition $M > k > N$, on aura une infinité de cas dans lesquels la ligne d'onde elliptique coïncide avec la ligne d'onde en question.

A chaque valeur de k comprise entre M et N correspond un angle du prisme variant depuis o jusqu'à 180, les déviations correspondantes, depuis o jusqu'à un maximum, revenant à o.

Le maximum de D se déduit par différentiation de la formule

$$\operatorname{tang}\frac{A+D}{2} = \frac{N}{M}\operatorname{tang}\frac{A}{2};$$

on trouve

$$\operatorname{tang}\frac{D}{2} = \frac{N-M}{2\sqrt{MN}} \left\{ \begin{array}{l} \text{correspondant à } \operatorname{tang}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{M}{N}}, \\ \text{c'est-à-dire à } k = \sqrt{MN}. \end{array} \right.$$

Ainsi *l'indice du liquide auxiliaire qui donne le maximum de la déviation constante est la moyenne géométrique des indices principaux.*

Il est à peine utile de remarquer que le prisme doit avoir son arête parallèle aux génératrices du cylindre elliptique et les plans bissecteurs de ses faces parallèles aux plans principaux de cette surface.

La propriété caractéristique de ce prisme est d'offrir une déviation des rayons complétement indépendante de l'incidence des rayons dans le plan de la section droite.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ou, en remplaçant l'unité par la somme des carrés du sinus et du cosinus de $\frac{A+D}{2}$,

$$\left(\frac{x^2}{\cos^2\frac{A}{2}}-1\right)\cos^2\frac{A+D}{2}+\left(\frac{y^2}{\sin^2\frac{A}{2}}-1\right)\sin^2\frac{A+D}{2}=0,$$

ou encore

$$\left(\frac{x^2}{\cos^2\frac{A}{2}}-1\right)+\left(\frac{y^2}{\sin^2\frac{A}{2}}-1\right)\operatorname{tang}^2\frac{A+D}{2}=0.$$

Le paramètre variable se trouve réduit à un seul coefficient $\operatorname{tang}^2\frac{A+D}{2}$; l'équation de l'ellipse est satisfaite identiquement par les systèmes de valeurs

$$x^2=\cos^2\frac{A}{2},\quad y^2=\sin^2\frac{A}{2}; \tag{15}$$

l'ellipse passe donc par les quatre points fixes, intersection du cercle $x^2+y^2=1$ avec les faces du prisme

$$\frac{y}{x}=\pm\operatorname{tang}\frac{A}{2}.$$

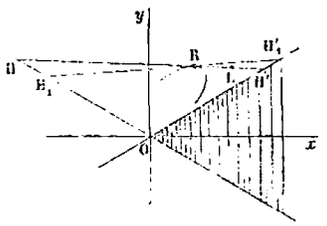
Minimum de déviation.

18. D'après la propriété précédente, il résulte que toute variation de la déviation D des rayons entraine une variation de forme de l'ellipse, et comme tout changement d'incidence produit un changement dans la déviation, on peut dire qu'en général à chaque incidence correspondra pour l'ellipse une forme différente. Mais il est un cas très-important où une variation très-petite d'incidence n'altère pas sensiblement la déviation : c'est celui du *minimum de déviation*. Alors $dD=0$ et l'ellipse peut être considérée comme fixe pour les incidences e et $e+de$. Il est facile de voir que ce cas ne peut se présenter que si l'ellipse est tangente à l'onde réfractée, au point même où celle-ci touche la ligne d'onde; en effet, deux positions infiniment

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

voisines de l'onde réfractée HH', $H_1H'_1$ (*fig.* 3) passent par le point de contact R de leur surface d'onde, suivant le langage de la Géométrie

Fig. 3.



infinitésimale; or, comme dans chacune de ses positions l'onde plane est assujettie à toucher l'ellipse, il faut qu'elle passe aussi par le point de contact de l'ellipse et que ces deux points de contact coïncident; les deux courbes sont donc tangentes entre elles et à l'onde plane. On arrive ainsi au théorème suivant :

L'ellipse $\left(\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}\right)$, *dans le cas du minimum de déviation des rayons d'un prisme, est tangente à la ligne d'onde d'Huyghens au même point que l'onde plane, de telle sorte que, dans ce cas, l'ellipse jouit de toutes les propriétés de la ligne d'onde, et définit à la fois la vitesse normale et la direction lumineuse efficace, réelle ou projetée sur la section droite du prisme.*

Dans tout autre cas, on voit aisément que le point de contact R de la ligne d'onde avec l'onde plane HH' est en deçà ou au delà du point de contact L de la ligne d'onde avec l'ellipse.

19. Ce théorème permet de simplifier considérablement la plupart des calculs relatifs au minimum de déviation, c'est-à-dire du cas qui, au point de vue expérimental, est peut-être le plus important; en effet, on ramène la ligne d'onde la plus complexe à la considération d'une ellipse orientée symétriquement par rapport aux faces du prisme, et dont les axes ont une relation très-simple avec l'angle du prisme et la déviation.

Les deux principaux problèmes qu'il est utile de résoudre sont les suivants :

Problème I. — *Étant donné un prisme dont la ligne d'onde suivant*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

la section droite est une ligne quelconque définie par son équation, calculer les angles d'incidence et d'émergence correspondant au minimum de déviation.

PROBLÈME II (question inverse). — *On connaît pour le minimum de déviation d'un prisme les angles d'incidence et d'émergence; calculer les éléments du rayon réfracté correspondant (c'est-à-dire déterminer le point correspondant de la ligne d'onde et la tangente en ce point).*

20. SOLUTION DU PREMIER PROBLÈME. — *Pour déterminer tous les éléments correspondant au minimum de déviation des rayons parallèles à la section droite d'un prisme d'angle* A, *on détermine le point de contact de l'ellipse*

$$\mu^2 x^2 + \nu^2 y^2 = 1,$$

dont les coefficients μ *et* ν *sont assujettis à la condition*

$$\mu^2 \cos^2 \frac{A}{2} + \nu^2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1, \tag{16}$$

avec la ligne d'onde du milieu relativement à la section droite. (Les équations précédentes supposent que les axes de coordonnées sont rectangulaires : l'axe des x coïncide avec la bissectrice intérieure et l'axe des y avec la bissectrice extérieure de la section droite.)

Lorsque les coefficients μ, ν, *ainsi que le point de contact* (x', y'), *sont déterminés, on obtient immédiatement l'équation de la tangente à l'ellipse en ce point,*

$$\mu^2 x x' + \nu^2 y y' = 1, \tag{17}$$

qui représente la trace de l'onde plane du rayon réfracté correspondant au minimum de déviation des rayons émergents.

Il en résulte que, pour obtenir l'angle de déviation D, il n'y a pas d'autre calcul à faire qu'à résoudre l'une ou l'autre des deux équations

$$\mu = \frac{\cos \frac{A+D}{2}}{\cos \frac{A}{2}}, \qquad \nu = \frac{\sin \frac{A+D}{2}}{\sin \frac{A}{2}}.$$

Pour obtenir les autres éléments n, r, r', e, e', il suffit d'employer les

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

formules (8) et (10) qui se prêtent immédiatement au calcul par logarithmes. On commence par calculer r et r'; on a déjà

$$r + r' = A,$$

de plus

$$\frac{\pi}{2} + \frac{r - r'}{2} = \alpha,$$

α étant l'angle que la normale à l'onde plane réfractée fait avec la bissectrice intérieure du prisme [équation (13)] considérée comme axe des x. Identifiant l'équation (17) de la tangente à l'ellipse avec la forme

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p = \sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha},$$

on trouve

$$\frac{\cos\alpha}{p} = \mu^2 x', \quad \frac{\sin\alpha}{p} = \nu^2 y', \tag{18}$$

d'où

$$\cot\alpha = -\operatorname{tang}\frac{r - r'}{2} = \frac{\mu^2}{\nu^2}\frac{x'}{y'}. \tag{19}$$

On connaît ainsi $\frac{r + r'}{2}$ et $\frac{r - r'}{2}$.

Le calcul de $e + e'$, $e - e'$ s'en déduit aisément, car $e + e' = A + D$, et l'on a

$$\cos\frac{e + e'}{2} = \mu\cos\frac{A}{2}, \quad \sin\frac{e + e'}{2} = \nu\sin\frac{A}{2}.$$

La valeur $\frac{e + e'}{2}$ s'obtient en divisant membre à membre les équations (10), ce qui donne

$$\operatorname{tang}\frac{e - e'}{2} = \frac{\nu}{\mu}\operatorname{tang}\frac{r - r'}{2}. \tag{20}$$

Enfin l'indice de réfraction n de l'onde plane, c'est-à-dire l'inverse de la vitesse normale (rapportée à la vitesse dans l'air ou mieux dans le vide), est fourni par l'équation (8)

$$\frac{\sin(e + e')}{\sin(r + r')}\frac{\sin(e - e')}{\sin(r - r')} = n^2.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

21. En résumé, le calcul d'un minimum de déviation est réduit à une extrême simplicité dès qu'on a déterminé le point de contact de l'ellipse avec la ligne d'onde. La difficulté de ce problème préliminaire dépend de la nature de cette ligne. Dans le cas très-important en Optique où la ligne d'onde est elle-même une ellipse, le calcul est simple et élégant : on retrouve ainsi les formules que de Sénarmont a obtenues par une voie beaucoup plus complexe. Ce cas particulier renferme tous les milieux à un axe optique et aussi les milieux à deux axes avec la restriction que leurs plans de symétrie coïncident avec ceux du prisme. Nous allons l'étudier rapidement.

Cas où la ligne d'onde est elliptique.

22. L'équation de la tangente à l'ellipse $\left(\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}\right)$ peut être prise sous la forme

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{\mu^2}\cos^2\alpha + \frac{1}{\nu^2}\sin^2\alpha} = p, \tag{21}$$

α désignant, comme précédemment, l'angle que fait la normale correspondant avec l'axe des x, dans le sens ordinaire, c'est-à-dire compté en tournant vers l'axe des y.

La ligne d'onde étant une ellipse d'axe $2a$, $2b$, telle que son axe $2a$ fasse l'angle σ avec l'axe des x compté dans le même sens, aura pour tangente parallèle à la précédente

$$x\cos(\alpha-\sigma) + y\sin(\alpha-\sigma) = \sqrt{a^2\cos^2(\alpha-\sigma) + b^2\sin^2(\alpha-\sigma)} = p'. \tag{22}$$

Il s'agit de déterminer les axes $\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}$ de la première ellipse, déjà assujettis à la relation (16)

$$\mu^2\cos^2\frac{A}{2} + \nu^2\sin^2\frac{A}{2} = 1,$$

par la condition que dans une certaine direction α les deux courbes ont la même tangente et le même point de contact : l'identité de la tangente correspond à $p = p'$; l'identité du point de contact revient, en considérant chacune des courbes comme l'enveloppe de sa tangente,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

à écrire que les deux tangentes, identiques pour la valeur α, le sont encore après un déplacement infiniment petit $\alpha + d\alpha$, d'où

$$p + \frac{dp}{d\alpha}\,d\alpha = p' + \frac{dp'}{d\alpha}\,d\alpha.$$

Les équations qui déterminent μ, ν, α sont donc, outre l'équation (16),

$$p = p', \quad \frac{dp}{d\alpha} = \frac{dp'}{d\alpha},$$

ou bien

$$p - p' = 0, \quad \frac{d}{d\alpha}(p - p') = 0. \tag{23}$$

Développant $p - p' = 0$, après avoir chassé les radicaux,

$$\frac{1}{\mu^2}\cos^2\alpha + \frac{1}{\nu^2}\sin^2\alpha - a^2(\cos\alpha\cos\sigma + \sin\alpha\sin\sigma)^2 + b^2(\sin\alpha\cos\sigma - \sin\sigma\cos\alpha)^2 = 0,$$

et ordonnant par rapport à α, il vient finalement

$$\left\{\begin{array}{l}\cot^2\alpha\left(\dfrac{1}{\mu^2} - a^2\cos^2\sigma - b^2\sin^2\sigma\right) - 2\cot\alpha(a^2 - b^2)\sin\sigma\cos\sigma \\ \qquad + \left(\dfrac{1}{\nu^2} - a^2\sin^2\sigma - b^2\cos^2\sigma\right) = 0,\end{array}\right. \tag{24}$$

équation de la forme

$$Pu^2 + 2Qu + R = 0; \tag{25}$$

en posant $u = \cot\alpha$,

$$\left\{\begin{array}{l} P = a^2\cos^2\sigma + b^2\sin^2\sigma - \dfrac{1}{\mu^2}, \\ Q = (a^2 - b^2)\sin\sigma\cos\sigma, \\ R = a^2\sin^2\sigma + b^2\cos^2\sigma - \dfrac{1}{\nu^2}. \end{array}\right. \tag{26}$$

La troisième équation est la dérivée de celle-ci par rapport à α; il est évident qu'en prenant $u = \cot\alpha$ comme variable, on simplifie le calcul; on obtient alors

$$Pu + Q = 0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'où

$$u = -\frac{Q}{P}. \tag{27}$$

Telles sont avec (16) les équations qui déterminent μ, ν et α.

Éliminant α, c'est-à-dire u par substitution dans l'équation (25), il vient

$$Q^2 = PR, \tag{28}$$

$$(a^2 - b^2)\sin^2\sigma\cos^2\sigma = \left(a^2\cos^2\sigma + b^2\sin^2\sigma - \frac{1}{\mu^2}\right)\left(a^2\sin^2\sigma + b^2\cos^2\sigma - \frac{1}{\nu^2}\right). \tag{29}$$

Cette équation, jointe à la relation (16),

$$\mu^2\cos^2\frac{A}{2} + \nu^2\sin^2\frac{A}{2} = 1,$$

permet de calculer les axes $\left(\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}\right)$ de l'ellipse tangente à la ligne d'onde.

La direction α de la normale à l'onde plane réfractée est donnée par l'équation (27) sous deux formes équivalentes d'après (28)

$$\begin{cases} \cot\alpha = -\dfrac{Q}{P} = -\dfrac{(a^2 - b^2)\sin\sigma\cos\sigma}{a^2\cos^2\sigma + b^2\sin^2\sigma - \dfrac{1}{\mu^2}} \\ \qquad = -\dfrac{R}{Q} = \dfrac{a^2\sin^2\sigma + b^2\cos^2\sigma - \dfrac{1}{\nu^2}}{(a^2 - b^2)\sin\sigma\cos\sigma}. \end{cases} \tag{30}$$

Quant aux coordonnées x', y' du point de contact commun, on les obtient en les considérant comme celles du point de contact de la droite (21) et de son enveloppe, c'est-à-dire comme les solutions de x et y communes à cette équation et à la dérivée par rapport à α

$$-x\sin\alpha + y\cos\alpha = \left(-\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\nu^2}\right)\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{p}; \tag{31}$$

ces valeurs sont

$$x' = \frac{\cos\alpha}{\mu^2 p}, \quad y' = \frac{\sin\alpha}{\nu^2 p},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'où

$$\frac{x'}{y'} = \frac{\nu^2}{\mu^2}\cot\alpha. \tag{32}$$

Le rapport $\frac{x'}{y'}$, qui seul entre dans les calculs du n° 20 (équation 19), est ainsi déterminé : l'identité des formules (32) et (19) est une vérification dans le cas d'une ligne d'onde elliptique du théorème général qui sert de base à cette étude du minimum de déviation.

23. *Solution du problème inverse.* — Il reste peu de chose à ajouter pour montrer comment, *de l'observation des angles d'incidence et d'émergence correspondant au minimum de déviation, on peut déduire la vitesse normale de l'onde réfractée et la direction du rayon lumineux efficace, réelle ou projetée sur le plan de la section droite du prisme.* Les calculs se font en sens inverse et sont beaucoup plus simples. On observe directement A, e, e', on a donc immédiatement $D = e + e'$, par suite μ et ν : on en déduit r et r' par la condition $A = r + r'$ et l'équation (20)

$$\operatorname{tang}\frac{r - r'}{2} = \frac{\mu}{\nu}\operatorname{tang}\frac{e - e'}{2},$$

l'indice n, inverse de la vitesse normale, par l'équation (8)

$$\frac{\sin(e + e')}{\sin(r + r')}\,\frac{\sin(e - e')}{\sin(r - r')} = x^2.$$

La normale à l'onde réfractée fait avec la bissectrice intérieure du prisme un angle α (compté positivement dans le sens allant de la face d'incidence à la face d'émergence) qui est égal à $\frac{\pi}{2} + \frac{r - r'}{2}$.

Le rayon lumineux projeté sur le plan de la section droite, qui passe par le point de contact x', y' de l'onde plane et de la ligne d'onde, est défini par l'équation (19)

$$\operatorname{tang}\frac{r - r'}{2} = -\frac{\mu^2}{\nu^2}\frac{x'}{y'}. \tag{33}$$

Posant $\operatorname{tang}\alpha' = \frac{y'}{x'}$, on aura, pour l'angle α' que fait le rayon lumi-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

neux avec la bissectrice intérieure du prisme,

$$\text{tang}\alpha' = \frac{\mu^2}{\nu^2}\,\text{tang}\alpha. \tag{34}$$

Remarque. — Il n'y a dans la solution de ce problème *aucune restriction* sur la nature de la surface d'onde du milieu réfringent; on verra plus loin comment on achève la détermination complète du rayon réfracté par le calcul de la troisième coordonnée z', du point de contact de l'onde plane avec la surface d'onde, en dehors de la section droite.

24. Dans les milieux monoréfringents, le minimum de déviation est caractérisé par l'égalité des angles d'incidence et d'émergence $e = e'$. Dans les milieux de constitution différente, cette condition n'est remplie qu'accidentellement; en effet, l'équation (20), mise sous la forme

$$\text{tang}\frac{e-e'}{2} = -\frac{\mu}{\nu}\cot\alpha,$$

montre que $e - e'$ ne peut être nul que dans le cas où $\alpha = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire comme on le verrait aisément quand l'onde plane réfractée correspondant au minimum de déviation est perpendiculaire à la bissectrice intérieure du prisme, ce qui exige que la section droite du prisme ait les mêmes axes de symétrie que la ligne d'onde.

L'expression $\frac{e-e'}{2}$ est elle-même susceptible d'une interprétation géométrique très-simple. Si l'on pose

$$\beta = \frac{\pi}{2} + \frac{e-e'}{2},$$

β est l'angle que fait la bissectrice des rayons incidents et émergents; en effet, si l'on se reporte à la construction d'Huyghens, les traces HE, H'E' des ondes incidente et réfringente sont tangentes au cercle de rayon égal à l'unité et se coupent en K; la ligne OK est évidemment la bissectrice des rayons OE, OE'.

On a

$$\widehat{E'Ox} = \frac{A}{2} + \frac{\pi}{2} - e', \quad KOE' = \frac{D}{2} = \frac{e+e'}{2} - \frac{A}{2},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'où

$$KOx = \frac{\pi}{2} + \frac{e - e'}{2} = \beta.$$

Si l'on rapproche alors l'équation (20), mise sous la forme

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\mu}{\nu}\operatorname{tang}\alpha,$$

de l'équation (34)

$$\operatorname{tang}\alpha' = \frac{\mu^2}{\nu^2}\operatorname{tang}\alpha,$$

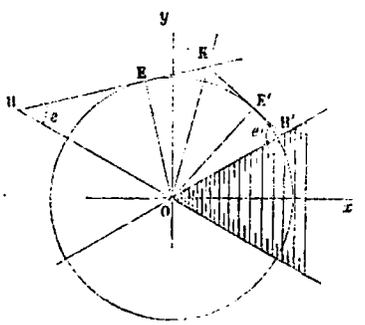
on en déduit, par élimination de μ et ν,

$$\operatorname{tang}^2\beta = \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha',$$

relation très-simple qu'on peut énoncer ainsi :

Au minimum de déviation, la bissectrice de l'angle du rayon incident prolongé et du rayon émergent est toujours comprise, comme direction, entre la normale à l'onde réfractée et la projection du rayon lumineux sur la section droite du prisme; la tangente trigonométrique de l'angle que fait cette bissectrice avec la bissectrice intérieure du prisme est la moyenne géométrique des tangentes des angles que font, avec la même droite, les deux autres directions.

Fig. 4.



25. *Remarque.* — Cette propriété permet de construire géométriquement l'ellipse $\left(\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}\right)$ dont on connaît toujours quatre points et une tangente (onde plane réfractée); en effet, il est facile, connaissant deux quelconques de ces directions, de construire la troisième sans avoir be-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

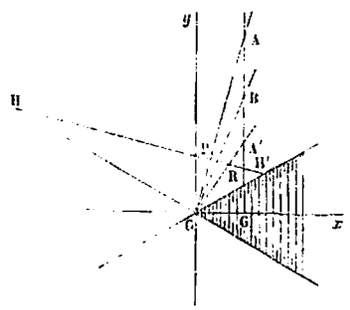
soin de tracer l'ellipse; il suffit de mener une parallèle quelconque GA à l'axe des y (*fig.* 5) et de considérer les trois segments GA, GB, GA'; ils sont évidemment liés par la relation

$$\overline{GB}^2 = GA.GA',$$

qui n'offre aucune difficulté de construction.

Il en résulte que, si l'on connaît l'onde plane réfractée HH', on connaît la direction OA, c'est-à-dire OP, qui lui est perpendiculaire; on connaît également la direction OB qui passe par l'intersection des ondes incidente et émergente, d'où l'on conclut OA', c'est-à-dire la projection du rayon lumineux OR sur la section droite.

Fig. 5.



Comme vérification, on peut, après avoir tracé l'ellipse et déterminé les axes $\frac{1}{\mu}$, $\frac{1}{\nu}$, se reporter à la construction bien connue de l'ellipse comme projection d'un cercle; on verra sans difficulté que la direction β est le rayon vecteur du point du cercle décrit sur l'un des axes comme diamètre, qui a pour projection le point où l'ellipse touche la tangente définie par l'angle α; l'angle α' correspond au point de contact.

Ces remarques suffisent pour résoudre graphiquement les problèmes traités ci-dessus : ces tracés graphiques ne sont point à dédaigner, ils peuvent servir à contrôler ou au moins à préparer les calculs.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

DEUXIÈME PARTIE.

RÉFRACTION DES RAYONS OBLIQUES SUR LA SECTION DROITE DU PRISME.

Théorèmes préliminaires.

26. Pour définir la position des ondes de direction quelconque, il suffit de se donner leurs traces sur la section droite et leur angle avec la normale à ce plan, qui n'est autre que l'arête du prisme.

Les traces de ces ondes jouissent de deux propriétés géométriques connues :

1° *L'onde émergente fait, avec l'arête du prisme, le même angle que l'onde incidente;*

2° *La loi des sinus s'applique aux traces des ondes sur la section droite, à la condition de prendre pour indice de réfraction* (*inverse de la vitesse normale*) *non pas la valeur véritable n, mais la valeur m définie par l'équation*

$$m = \sqrt{n^2 + (n^2 - 1)\tang^2\theta},$$

θ étant l'angle que fait l'onde incidente et l'onde émergente avec l'arête du prisme, compté positivement lorsque le rayon incident est au-dessus du plan de la section droite avant l'incidence.

27. La démonstration de la première proposition est en quelque sorte intuitive, si l'on a soin de simplifier la construction d'Huygens, comme précédemment, en considérant les rayons réfractés par l'arête même du prisme. Construisons, en un point de cette arête, comme centre, la sphère de rayon 1 (vitesse dans le milieu extérieur), l'onde incidente y sera tangente, et comme elle est supposée n'être pas parallèle à l'arête, mais faire avec elle un angle θ, elle coupera cette droite à une distance égale à $\frac{1}{\sin\theta}$. L'onde réfractée sera donnée par le plan passant par la trace de l'onde incidente sur la face d'entrée, et tangent à la surface d'onde concentrique à la sphère; l'onde émergente s'ob-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

tiendra en prolongeant le plan d'onde réfractée jusqu'à la face de sortie, et en menant par cette trace un plan tangent à la sphère de rayon 1. Ces trois ondes planes se coupent évidemment au même point de l'arête du prisme et, comme l'onde émergente et l'onde incidente sont tangentes à la même sphère, elles sont également inclinées sur l'arête du prisme, qui joint au centre un point commun à ces deux plans. La première propriété est donc démontrée.

Remarque I. — Si le rayon incident est au-dessus du plan de la section droite avant l'incidence, le rayon émergent sera au-dessous; dans ce qui suit, on considérera toujours l'un de ces deux rayons comme prolongé, soit du côté de l'incidence, soit du côté de l'émergence, de sorte qu'ils paraîtront toujours faire le même angle du même côté de la section droite.

Remarque II. — On verra aisément que la bissectrice de ces rayons dans leur position effective est toujours dans ce plan et coïncide avec celle de leurs projections.

28. La deuxième proposition se démontre en calculant le rapport des vitesses normales des traces des trois ondes, qui n'est autre que l'inverse du rapport des perpendiculaires abaissées du point origine sur ces droites.

Soit n l'indice de réfraction vrai de l'onde plane réfractée KHH' (*fig.* 6), mesuré par l'inverse de la distance OQ de ce plan au centre O de la surface d'onde, et prenons pour section droite le plan OHH' normal à l'arête Oz passant par ce point; d'après le théorème des trois perpendiculaires, il faudra, pour obtenir la distance OP du centre à la trace HH' d'un plan d'onde, abaisser une perpendiculaire OQ sur le plan, puis du pied Q de cette perpendiculaire en abaisser une autre QP sur la trace HH'; joignant P au centre O, la longueur OP = V' sera la distance cherchée.

Dans le triangle rectangle PQO des trois perpendiculaires, l'angle O est évidemment égal à l'angle QKO que fait le plan d'onde avec l'arête qu'on désignera par θ'. Soit

$$OQ = p = \frac{1}{n},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

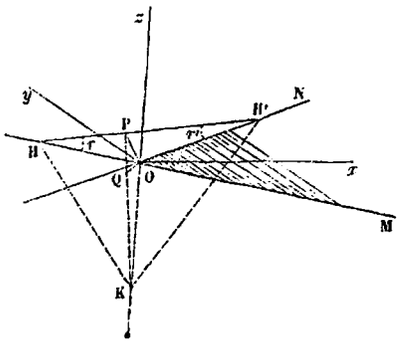
on aura

$$V' \cos\theta' = p.$$

Pour les ondes incidente et émergente, on aura de même

$$V \cos\theta = 1;$$

Fig. 6.



mais la condition que ces trois ondes se coupent à un même point de l'arête donne

$$z = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{p}{\sin\theta'},$$

d'où

$$\sin\theta' = \frac{1}{n}\sin\theta;$$

donc

$$m = \frac{V}{V'} = \frac{\cos\theta'}{p\cos\theta} = n\frac{\cos\theta'}{\cos\theta} = \frac{n}{\cos\theta}\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}\sin^2\theta},$$

et finalement

$$m = \sqrt{n^2 + (n^2 - 1)\tan^2\theta}. \qquad (35)$$

C. Q. F. D.

Calcul de la déformation des images vues à travers un prisme.

29. Imaginons une ligne lumineuse de forme quelconque (rectiligne, circulaire, elliptique) située à l'infini, mais sous-tendant un angle

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

très-petit, vue d'un point de l'arête du prisme (¹). On se propose de calculer l'image de cette ligne lumineuse, après la réfraction des rayons émanés d'elle, à travers un point de l'arête du prisme, c'est-à-dire le cône des rayons réfractés (²).

Ce cône des rayons réfractés, aussi bien que celui des rayons incidents, étant supposé d'ouverture très-petite, peut se rapporter à une ligne moyenne ayant pour sommet le point de l'arête où se fait la réfraction.

Soit e l'angle d'incidence de la projection de ce rayon moyen sur la section droite, et ϑ son inclinaison sur le plan (données évidemment corrélatives de celles des ondes correspondantes); après réfraction, ce rayon fera le même angle θ avec la section droite, et sa projection aura pour angle d'émergence e' défini par les équations

$$\begin{aligned} \sin e &= m \sin r, \\ \sin e' &= m \sin r', \\ r + r' &= \Lambda, \end{aligned}$$

dans lesquelles r, r' représentent les angles que fait la trace de l'onde réfractée moyenne avec les faces du prisme.

La direction de chaque génératrice du cône sera définie par l'incidence $e + \Delta e$ de la projection, et par son angle avec la section droite $\vartheta + \Delta\vartheta$. On sait qu'après réfraction ce dernier angle conserve la même valeur; il suffit donc de calculer l'angle d'émergence $e' + \Delta e'$ de la projection.

30. Cette relation entre Δe, $\Delta e'$ et $\Delta\vartheta$ s'obtiendra évidemment en différentiant les formules précédentes, après avoir éliminé r et r'.

(¹) On réalise très-aisément dans la pratique ces conditions, en plaçant au foyer principal d'un objectif un diaphragme percé d'une ouverture rectiligne ou curviligne, ou mieux, une lame de verre recouverte d'une couche mince d'argent, sur laquelle on trace à la pointe les lignes dont il est question; on éclaire en arrière à l'aide d'une large source de lumière. Ce système, composé d'une ligne lumineuse au foyer d'un objectif, se nomme *collimateur*.

(²) Si l'on reçoit un pareil cône de rayons sur un objectif, on obtient au foyer principal l'image réelle de la ligne lumineuse réfractée. L'instrument désigné sous le nom de *lunette astronomique* est le dispositif pratique destiné à de semblables observations; il est formé d'un objectif et d'un oculaire, c'est-à-dire d'une loupe composée destinée à grossir l'image focale en question.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Cette élimination s'obtient en substituant leurs valeurs dans l'équation évidente

$$\cos A = \cos(r + r').$$

Après avoir chassé les radicaux introduits par la substitution, il vient

$$m^2 \sin^2 A = \sin^2 e + \sin^2 e' + 2 \sin e \sin e' \cos A; \tag{36}$$

substituant la valeur de m,

$$[n^2 + (n^2 - 1)\tang^2 \theta] \sin^2 A = \sin^2 e + \sin^2 e' + 2 \sin e \sin e' \cos A. \tag{37}$$

Telle est l'équation qu'il faudrait différentier en considérant non-seulement e, e', θ, mais aussi n comme variable, car la vitesse $\frac{1}{n}$ de l'onde plane réfractée varie avec sa direction.

La variation de n paraît, au premier abord, nécessiter la connaissance de la surface de l'onde; mais, si l'on se borne à des variations infiniment petites de tous les éléments, il suffit de connaître le point de contact de l'onde moyenne avec cette surface : on sait en effet, d'après les principes de la Géométrie infinitésimale, que toute variation infiniment petite d'un plan équivaut à un pivotement autour du point de contact avec son enveloppe.

Donc, pour exprimer dn, il suffit de déterminer l'équation du plan de l'onde réfractée, de calculer la distance à l'origine, et de différentier cette valeur.

31. Les axes des x et des y seront, comme précédemment, les bissectrices intérieure et extérieure de la section droite: l'axe des z sera l'arête du prisme.

On connaît trois points de ce plan :

1° Le point de l'arête où se coupent les trois plans d'onde (le point K, *fig.* 5); ses coordonnées sont évidemment

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = -\frac{1}{\sin\theta},$$

si l'on veut compter θ positif, de manière que le rayon incident soit au-dessus de la section droite avant l'incidence;

2° Le point d'intersection de la trace de l'onde incidente avec la trace

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de la face d'entrée (construction d'Huygens); ce point (point H, *fig.* 5), distant de l'origine de $\frac{1}{\cos\theta \sin e}$, a pour coordonnées

$$(38)\qquad x' = -\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\theta \sin e},\quad y' = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\theta \sin e},\quad z' = 0;$$

3° Le point analogue pour l'onde émergente (point H', *fig.* 5)

$$(39)\qquad x'' = +\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\theta \sin e'},\quad y'' = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\theta \sin e'},\quad z'' = 0.$$

L'équation du plan défini par ces trois points est, tout calcul fait,

$$(40)\quad \sin\frac{A}{2}(\sin e - \sin e')x - \cos\frac{A}{2}(\sin e + \sin e')y + \tan\theta \sin A . z + \frac{\sin A}{\cos\theta} = 0.$$

Il faut exprimer que ce plan est assujetti, dans ses déplacements infiniment petits, à pivoter autour de son point de contact avec la surface de l'onde dont les coordonnées sont x_0, y_0, z_0.

Analytiquement, il suffit de différentier l'équation précédente en considérant $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ comme des constantes

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} &de\left(x_0 \sin\frac{A}{2} - y_0 \cos\frac{A}{2}\right)\cos e - de'\left(x_0 \sin\frac{A}{2} + y_0 \cos\frac{A}{2}\right)\cos e' \\ &\qquad + d\theta\,(z_0 - \sin\theta)\frac{\sin A}{\cos^2\theta} = 0. \end{aligned}\right.$$

Il est évident maintenant qu'on n'a pas besoin de faire d'autre calcul, et que c'est là l'équation cherchée, puisqu'elle définit une relation entre $d\theta$, de et de' (¹).

(¹) On peut vérifier que l'équation de l'onde réfractée a bien pour distance ρ à l'origine la valeur $\frac{1}{n}$: on a, en effet, d'après une formule bien connue,

$$\rho^2 = \frac{\frac{\sin^2 A}{\cos^2\theta}}{\sin^2\frac{A}{2}(\sin e - \sin e')^2 + \cos^2\frac{A}{2}(\sin e + \sin e')^2 + \sin^2 A \tan^2\theta}.$$

Réduisant, il vient

$$\left[\frac{1}{\rho^2} + \left(\frac{1}{\rho^2} - 1\right)\tan^2\theta\right]\sin^2 A = \sin^2 e + \sin^2 e' + 2 \sin e \sin e' \cos A,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Image d'une droite lumineuse très-petite.

32. Le cas le plus intéressant est celui où le milieu E de la droite E_1E_2 (supposée à l'infini) (*fig.* 6) est dans le plan de la section droite (ou des xy); l'inclinaison du plan OEE, qui la contient et qui passe par le point d'incidence O faisant avec l'arête du prisme un angle φ, compté dans un sens convenable (1), comme l'indique la figure. Il est aisé de

---

expression qui coïncide avec le résultat de l'élimination de r et r' (37), si l'on suppose $\frac{1}{p} = n$.

Cette vérification est en même temps une démonstration analytique du deuxième théorème sur les rayons obliques à la section droite.

Il reste encore à montrer que, malgré la différence de méthode, on retombe, en faisant $z = 0$ et $\theta = 0$, sur les équations étudiées dans la première Partie de ce Mémoire : par exemple, la valeur de n devient

$$n^2 \sin^2 A = \sin^2 e + \sin^2 e' + 2 \sin e \sin e' \cos A,$$

laquelle provenait de la réduction de l'équation

$$n^2 \sin^2 A = \sin^2 \frac{A}{2} (\sin e - \sin e')^2 + \cos^2 \frac{A}{2} (\sin e + \sin e');$$

changeant les sommes de sinus en produits,

$$n^2 \sin^2 A = 4 \sin^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{e + e'}{2} \sin^2 \frac{e - e'}{2} + \cos^2 \frac{A}{2} \cos \frac{e - e'}{2} \sin^2 \frac{e + e'}{2}.$$

Rappelant que $e + e' = A + D$, on retrouve la valeur

$$n^2 = \mu^2 \sin^2 \frac{e - e'}{2} + \nu^2 \cos^2 \frac{e - e'}{2}.$$

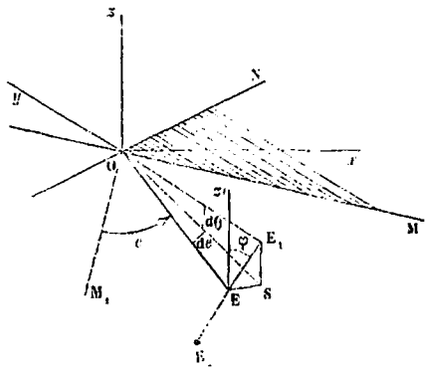
(1) Ce qu'il y a de plus commode, c'est de considérer un observateur dont l'œil serait placé au niveau de la section droite, en arrière de la lumière, et regardant dans le sens de la propagation du rayon incident. On comptera φ de manière qu'au-dessus du plan de la section droite (z positifs) cet angle croisse dans le sens positif (sens du mouvement des aiguilles d'une montre). Quant au rayon émergent, on garde la même convention : l'observateur regarde toujours dans le sens de la propagation de la lumière et définit ainsi le sens positif de θ'.

Si l'on trouvait plus commode de supposer que l'observateur reçoive les rayons, c'est-à-dire regarde en sens inverse de la propagation, il suffirait de changer le signe de θ. Mais ce qu'il est important de conserver pour éviter les erreurs, c'est la convention du sens de la propagation de la lumière pour les deux rayons.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

voir que $\operatorname{tang}\varphi = \frac{de}{d\theta}$; en effet, si l'on élève dans le plan de la section droite la perpendiculaire OM_1 à la face d'entrée zOM, l'angle $EOM_1 = e$ (le signe + correspond au sens de la flèche, c'est-à-dire de la normale OM_1 à la face OM), la projection S de l'extrémité E_1 de la ligne lumineuse définit l'angle $SOE = de$: quant à $d\theta$, il est égal à E_1OS.

Fig. 7.



L'image émergente sera définie de la même manière; il y aura une série de rayons réfractés qui, supposés prolongés en arrière, feront, avec la section droite et du même côté que les rayons correspondants, des angles égaux; on aura de même pour l'inclinaison φ'

$$\operatorname{tang}\varphi' = -\frac{de'}{d\theta}.$$

(Le signe — provient de ce que, pour le rayon émergent prolongé, la variation de e' est inverse de celle de e, tandis que celle de θ reste de même signe.)

Substituant les valeurs de ces dérivées dans l'équation différentiée (41), après y avoir fait $\theta = 0$,

$$(42)\quad \begin{cases} \cos e \left(x_0 \sin\frac{A}{2} - y_0 \cos\frac{A}{2} \right) \operatorname{tang}\varphi \\ + \cos e' \left(x_0 \sin\frac{A}{2} + y_0 \cos\frac{A}{2} \right) \operatorname{tang}\varphi' + z_0 \sin A = 0. \end{cases}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

33. Cette formule (¹) permet de prévoir que *l'image vue à travers un prisme de la ligne lumineuse d'un collimateur, réglée parallèlement à l'arête, apparaît inclinée lorsque l'onde réfractée intérieure touche sa surface d'onde en dehors du plan d'incidence.*

En effet, si l'on suppose $\varphi = 0$, la valeur correspondante φ'_0 sera

$$\text{tang}\varphi'_0 = -\frac{z_0}{x_0 \sin\frac{A}{2} + y_0 \cos\frac{A}{2}} \frac{\sin A}{\cos e'}. \tag{43}$$

Pour que l'image réfractée paraisse verticale, il faut lui donner l'inclinaison φ_0

$$\text{tang}\varphi_0 = -\frac{z_0}{x_0 \sin\frac{A}{2} - y_0 \cos\frac{A}{2}} \frac{\sin A}{\cos e}. \tag{44}$$

Comme on le voit, les valeurs $\text{tang}\varphi_0$ et $\text{tang}\varphi'_0$ sont proportionnelles à z_0, c'est-à-dire à la distance du point de contact de la surface d'onde avec le plan de la section droite qui est ici le plan d'incidence. Ces angles φ_0, φ'_0 sont donc les caractéristiques de la déviation du rayon par rapport à la section droite.

34. Ce phénomène optique est très-important, car il permet de déduire de l'observation de φ_0 et de φ'_0 deux nouvelles équations entre les trois coordonnées x_0, y_0, z_0 du point de contact de l'onde réfractée avec la surface d'onde.

Pour déterminer les valeurs de φ_0 et φ'_0, on se servira soit de l'observation directe (ce qui est très-facile pour φ'_0), soit de l'observation de certaines valeurs particulières, substituées dans l'équation (42), mise sous la forme

$$\text{tang}\varphi \cot\varphi_0 + \text{tang}\varphi' \cot\varphi'_0 = 1. \tag{45}$$

En particulier, les valeurs de $\varphi = \pm 45^0 = \pm\frac{\pi}{4}$ sont très-commodes (²):

(¹) *Voir* à la fin de la seconde Partie (Note du n° 32) une démonstration entièrement géométrique de cette formule.

(²) En pratique, on détermine aisément les trois valeurs φ'_0, φ'_{-1}, φ'_{+1}, en substituant à la fente du collimateur une lame de verre argentée, sur laquelle on a tracé à l'aide d'une ma-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

désignant par φ'_1, φ'_{-1} les valeurs correspondantes de φ', on a

$$(46)\qquad \cot\varphi_0 + \operatorname{tang}\varphi'_1 \cot\varphi'_0 = 1, \quad -\cot\varphi_0 + \operatorname{tang}\varphi'_{-1} \cot\varphi'_0 = 1,$$

d'où

$$(47)\qquad \operatorname{tang}\varphi_0 = -\frac{\operatorname{tang}\varphi'_1 + \operatorname{tang}\varphi'_{-1}}{\operatorname{tang}\varphi'_1 - \operatorname{tang}\varphi'_{-1}}, \quad \operatorname{tang}\varphi'_0 = \frac{\operatorname{tang}\varphi'_1 - \operatorname{tang}\varphi'_{-1}}{2}.$$

On pourrait aussi choisir pour φ des couples de valeurs rectangulaires, ou d'autres couples satisfaisant à d'autres relations; mais il est inutile d'insister sur ces déterminations qui n'offrent aucune difficulté (1).

Détermination complète d'un rayon réfracté.

35. La considération de l'image d'une ligne droite lumineuse très-petite, située à l'infini, et dont le point milieu est dans le plan de la

---

chine à diviser un quadrillage carré de 2 millimètres environ de côté : les côtés du carré permettent de mesurer φ'_0, les diagonales fictives φ_{-1} et φ_{+1}. On a ainsi une donnée de trop qui peut servir de vérification.

(1) L'équation (45), jointe à la condition déduite de la première proposition relative aux rayons obliques sur le plan de la section droite, réduit à une transformation de coordonnées des plus simples le calcul de l'image d'une ligne lumineuse. (On a surtout en vue le cas expérimental de la ligne lumineuse placée au plan focal d'un collimateur et observée à travers un prisme au plan focal d'une lunette.) En prenant dans ces deux plans des axes de coordonnées rectangulaires, la trace de la section droite comme abscisse et une parallèle à l'arête du prisme comme ordonnée, les points de la ligne (x, z) et de son image (x', z') se correspondent deux à deux. On a d'abord $z = z'$. De plus, les directions φ, φ', telles que $\operatorname{tang}\varphi = \frac{x}{z}$, $\operatorname{tang}\varphi' = \frac{x'}{z'}$, étant liées par la relation (45), on en déduit

$$x\cot\varphi_0 + x'\cot\varphi'_0 = z$$

comme seconde équation de transformation; d'où

$$x = (z' - x\cot\varphi'_0)\operatorname{tang}\varphi_0.$$

EXEMPLE. — *Quelle est l'image d'un cercle* $x^2 + y^2 = R^2$?

Substituant les formules de changement de variable,

$$(z' - x'\cot\varphi'_0)^2 + z'^2\cot^2\varphi_0 = R^2\cot^2\varphi'_0.$$

$$z'^2(1 + \cot^2\varphi_0) + x'^2\cot^2\varphi'_0 - 2x'z'\cot\varphi'_0 = R^2\cot^2\varphi_0,$$

équation d'une ellipse.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

section droite, permet de résoudre le problème de la détermination complète du rayon qui correspond à l'onde réfractée intérieurement au prisme et parallèle à l'arête.

En effet, il suffit de connaître :

1° La trace de ce plan d'onde sur la section droite du prisme, laquelle est définie par l'indice de réfraction de l'onde qu'on déduit de l'incidence et de l'émergence;

2° Les coordonnées x_0, y_0, z_0 du point de contact de cette onde avec son enveloppe ou surface d'onde.

L'équation (40) représente le plan de l'onde réfractée; en y faisant $\theta = 0$, elle devient

$$(48)\qquad \sin\frac{A}{2}(\sin e - \sin e')x - \cos\frac{A}{2}(\sin e + \sin e')y + \sin A = 0,$$

ou, par une transformation facile,

$$(49)\qquad \sin\frac{e-e'}{2}\frac{\cos\frac{e+e'}{2}}{\cos\frac{A}{2}}x - \cos\frac{e-e'}{2}\frac{\sin\frac{e+e'}{2}}{\sin\frac{A}{2}}y + 1 = 0;$$

substituant les valeurs de μ et ν,

$$(50)\qquad -x\mu\sin\frac{e-e'}{2} + y\nu\cos\frac{e-e'}{2} = 1.$$

La direction que la normale à l'onde fait avec l'axe des x est

$$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{\nu}{\mu}\cot\frac{e-e'}{2}.$$

L'indice de réfraction se déduirait de la distance de ce plan à l'origine; la formule à laquelle on arriverait ne serait pas calculable par logarithmes : si l'on cherchait à la rendre calculable, les variables auxiliaires les plus simples seraient r et r', et l'on retomberait sur les équations du n° 13

$$(51)\qquad n_1 = \frac{\sin(e+e')\sin(e-e')}{\sin(r+r')\sin(r-r')} = \mu\nu\frac{\sin(e-e')}{\sin(r-r')},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

avec

$$\operatorname{tang}\frac{r-r'}{2}=\frac{\mu}{\nu}\operatorname{tang}\frac{e-e'}{2},$$

car

$$\frac{\pi}{2}+\frac{r-r'}{2}=\alpha.$$

Les coordonnées x_0, y_0 du point de contact doivent satisfaire à l'équation (50); en y adjoignant les équations (43) et (44), on a le système

$$(52)\qquad\begin{cases} x_0\mu\sin\dfrac{e-e'}{2}-y_0\nu\cos\dfrac{e-e'}{2}=-1,\\ x_0\sin\dfrac{A}{2}+y_0\cos\dfrac{A}{2}=-z_0\dfrac{\sin A}{\cos e'}\cot\varphi'_0,\\ x_0\sin\dfrac{A}{2}-y_0\cos\dfrac{A}{2}=-z_0\dfrac{\sin A}{\cos e}\cot\varphi_0. \end{cases}$$

Les coordonnées x_0, y_0, z_0 du point de contact sont donc déterminées par trois équations linéaires à coefficients très-simples.

On pourra donc, étant donné un prisme, déterminer autant de points qu'on le voudra du cylindre circonscrit à la surface d'onde dont les génératrices sont parallèles à l'arête du prisme. Pour chaque incidence, on calculera les coordonnées x_0, y_0 d'un point de la ligne d'onde, base du cylindre et la tangente en ce point, et la hauteur z_0 du point de contact de la génératrice, $x=x_0$, $y=y_0$, avec la surface d'onde. En résumé, on définit par points la courbe de contact de ces deux surfaces.

36. Il est facile de montrer maintenant que le problème suivant est complétement résolu.

Étant donné un milieu transparent quelconque, on demande de déterminer les éléments géométriques du rayon lumineux correspondant à une onde plane se propageant dans ce milieu parallèlement à un plan donné; ce plan étant rapporté aux directions caractéristiques de la constitution du milieu.

Il suffira de tailler dans cette substance un prisme dont l'arête soit parallèle au plan de l'onde demandée, et d'observer la réfraction d'une série de rayons parallèles à la section droite du prisme, en utilisant, comme on l'a vu plus haut, les rayons légèrement inclinés sur cette

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

section; dans les circonstances ordinaires que présentent les milieux cristallisés naturels ou artificiels, on est assuré de rencontrer l'onde plane demandée parmi les ondes réfractées parallèles à l'arête, en prenant le plan de cette onde comme plan bissecteur intérieur des faces du prisme. A part le parallélisme de l'arête et de l'onde donnée qui doit être rigoureux, toutes les conditions de construction du prisme comportent beaucoup d'arbitraire; il n'est pas besoin d'insister sur la nécessité d'un examen préliminaire de la substance pour choisir les conditions les plus avantageuses à la précision des mesures.

Simplification dans le cas du minimum de déviation.

37. Il est évident que, si le rayon moyen du faisceau considéré supposé parallèle à la section droite est au minimum de déviation, les rayons infiniment voisins y seront aussi. Cette considération suppose $dD = 0$, $de + de' = 0$.

L'équation (50), dans laquelle on substitue $x = x_0$, $y = y_0$,

$$-x_0\mu \sin\frac{e-e'}{2} + y_0\nu \cos\frac{e-e'}{2} = 1,$$

donne, par différentiation (x_0, y_0, μ, ν étant constants),

$$\left(x_0\mu \cos\frac{e-e'}{2} + y_0\nu \sin\frac{e-e'}{2}\right)(de - de') = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{y_0}{x_0} = -\frac{\mu}{\nu}\cot\frac{e-e'}{2}. \tag{53}$$

Les coordonnées x_0, y_0 du point de contact de la trace de l'onde plane avec la ligne d'onde s'expriment alors très-simplement

$$x_0 = -\frac{1}{\mu}\sin\frac{e-e'}{2}, \quad y_0 = +\frac{1}{\nu}\cos\frac{e-e'}{2}. \tag{54}$$

La relation (42) en φ et φ' devient, par la substitution de x_0, y_0,

$$\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\varphi' - z_0\frac{\sin(e+e')}{\cos e \cos e'} = 0, \tag{55}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

expression extrêmement simple, qui permet de calculer directement, lors du minimum de déviation, la coordonnée z_0, c'est-à-dire la distance du point de contact de l'onde plane réfractée avec la section droite prise comme plan d'incidence.

Dans le cas où la ligne lumineuse est parallèle à l'arête $\varphi = 0$,

$$\operatorname{tang}\varphi'_0 = -z_0 \frac{\sin(e+e')}{\cos e \cos e'};$$

la valeur φ est évidemment égale et de signe contraire.

Rapprochant cette équation des deux valeurs (54) de x_0 et y_0, on voit combien la condition de minimum de déviation simplifie le calcul de la détermination complète d'un rayon réfracté.

Toutefois il est juste d'ajouter qu'au point de vue expérimental le minimum de déviation a l'inconvénient de définir avec moins de précision l'incidence; mais cet inconvénient, qui nécessite des mesures répétées et soignées, est loin de compenser les avantages de la simplicité du calcul.

APPENDICE.

GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME RELATIF A L'ELLIPSE SUBSTITUÉE A LA LIGNE D'ONDE; ELLIPSOÏDE SUBSTITUÉ A LA SURFACE D'ONDE.

37. On a vu, dans le cas de la réfraction des ondes planes parallèles à l'arête du prisme, que la trace de l'onde réfractée est tangente à une certaine ellipse dont les axes ne dépendent que de la déviation et de l'angle du prisme. Dans le cas général de l'onde plane réfractée quelconque, une généralisation se présente immédiatement à l'esprit; son énoncé, qu'on prévoit sans peine, est le suivant :

Toute onde plane réfractée par un prisme donné A *est tangente à un ellipsoïde à trois axes ayant pour sections circulaires les intersections de la sphère de rayon* $= 1$ *décrit d'un point de l'arête du prisme comme centre*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

avec les faces. Les axes extrêmes sont

$$\frac{1}{\mu}=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{A+D}{2}},\qquad \frac{1}{\nu}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{A+D}{2}},$$

et ne dépendent que de la déviation de la projection des rayons incident et émergent (1), *et de l'angle du prisme.*

La démonstration est la suivante :

L'équation du plan de l'onde réfractée est de la forme

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p=\frac{1}{n};$$

elle doit coïncider avec l'équation (40)

$$x\sin\frac{A}{2}\sin e-\sin e'-y\cos\frac{A}{2}(\sin e+\sin e')+z\tang\theta\sin A=-\frac{\sin A}{\cos\theta},$$

d'où l'on conclut, par identification,

$$n\cos\alpha=-\frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin A}(\sin e-\sin e')\cos\theta=-\mu\sin\frac{e-e'}{2}\cos\theta,$$

$$n\cos\beta=-\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin A}(\sin e+\sin e')\cos\theta=+\nu\cos\frac{e-e'}{2}\cos\theta,$$

$$n\cos\gamma=\sin\theta;$$

éliminant $e-e'$ et θ par addition, après avoir élevé au carré,

$$\frac{n^2}{\mu^2}\cos^2\alpha+\frac{n^2\cos^2\beta}{\nu^2}+n^2\cos^2\gamma=1$$

ou

$$\frac{1}{n^2}=\frac{\cos^2\alpha}{\mu^2}+\frac{\cos^2\beta}{\nu^2}+\frac{\cos^2\gamma}{1},$$

(1) Il est bon de ne pas oublier que les rayons incident et émergent *réels* font des angles égaux de part et d'autre du plan de la section droite, et que leur bissectrice coïncide avec la bissectrice de leur projection sur ce plan.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

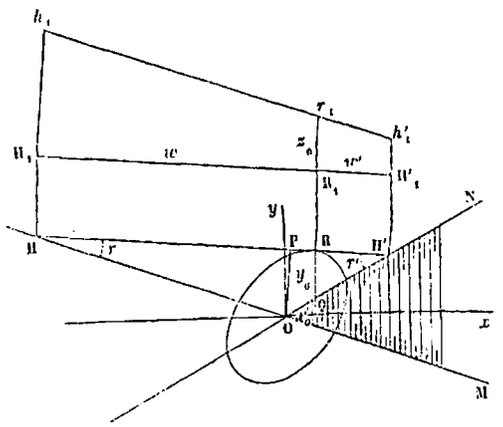
d'où il résulte que le plan donné est tangent à l'ellipsoïde ayant pour axes $\frac{1}{\mu}$, $\frac{1}{\nu}$ et 1.

NOTE DU N° 32.

On peut donner une démonstration géométrique assez simple de la relation entre les angles φ et φ' en procédant de la manière suivante :

Soit HH′ (*fig.* 8) la trace du plan de l'onde réfractée parallèle à l'arête du prisme; rabattons ce plan d'onde sur le plan de la section droite en le faisant

Fig. 8.

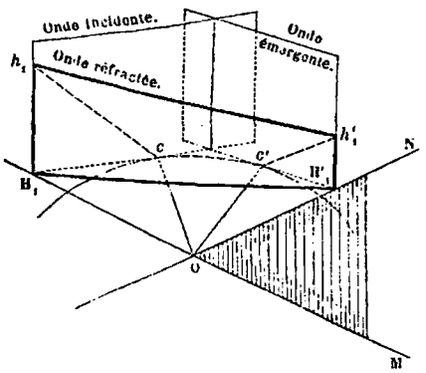


tourner autour de HH′ : les droites communes aux faces du prisme et aux ondes incidentes et immergentes seront représentées par des perpendiculaires h_1H_1, $h'_1H'_1$; le point de contact de l'onde réfractée avec sa surface d'onde sera en r_1, distant de la projection R_1 de la longueur z_0. Tout déplacement infiniment petit du plan d'onde réfractée correspondant à un pivotement autour du point de contact r_1 équivaudra à une rotation autour d'une droite quelconque $h_1r_1h'_1$: d'où il suit que les déplacements correspondants des ondes incidente et immergente équivaudront eux-mêmes à une rotation infiniment petite autour d'une droite facile à définir : ce seront (*fig.* 8) les droites CH_1, $C'H'_1$, joignant respectivement les points de contact CC′ de ces ondes planes avec la sphère du rayon 1 et le point h_1 ou h'_1; car, comme on l'a vu plus haut,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

tout déplacement infiniment petit d'un plan tangent à la sphère équivaut à un pivotement autour du point de contact C'.

Fig. 9.



L'expression des angles φ et φ' se détermine aisément en fonction des données de la figure.

En effet, les ondes étant parallèles à l'arête, le plan $CH_1OH'_1C'$ est évidemment une section droite du prisme (O étant le centre de la sphère $R = 1$).

Les droites GC, OC' font les rayons incident et émergent. Les plans infiniment peu inclinés sur les ondes correspondantes et tournant autour des droites Ch_1, $C'h'_1$ sont les ondes de rayons infiniment peu inclinés sur les rayons OC, OC', et situés respectivement dans un même plan dont les droites Ch_1, $C'h'_1$, sont les normales. Ce sont donc les plans qui contiennent les rayons incidents venant de ces droites infiniment petites situées à l'infini; il est évident alors que les angles φ et φ', définis plus haut comme l'inclinaison de ces plans avec l'arête du prisme, sont égaux en valeur absolue à h_1CH_1 et $h'_1C'H'_1$; mais si l'on rappelle les conventions relatives au signe de θ, on doit mettre le signe à $h'_1C'H_1$ et écrire

$$H_1h_1 = CH_1 \operatorname{tang}\varphi = \operatorname{cot} e \operatorname{tang}\varphi,$$
$$H'_1h'_1 = -C'H'_1 \operatorname{tang}\varphi' = -\operatorname{cot} e' \operatorname{tang}\varphi'.$$

Revenons à la *fig.* 8 et exprimons géométriquement que les trois points h_1, r_1, h'_1 sont en ligne droite : on obtient aisément deux triangles semblables qui donnent, en posant $H_1R_1 = \omega$, $H'_1R_1 = \omega'$, $R_1r_1 = z_0$,

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{z_0 - H'_1h'_1}{H_1h'_1 - z_0} = \frac{z_0 + \operatorname{cot} e' \operatorname{tang}\varphi'}{\operatorname{cot} e \operatorname{tang}\varphi - z_0}.$$

Il reste à exprimer ω et ω' en fonction des angles r, r' et des coordonnées $x_0 = OQ$, $y_0 = QR$ du point R rapporté aux axes Ox, Oy.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Projetant le contour OQRHO sur une perpendiculaire à OH, il vient en comptant ω en valeur absolue, sans avoir égard aux signes

$$\omega \sin r = y_0 \cos\frac{A}{2} + x_0 \sin\frac{A}{2};$$

de même le contour OQRH'O projeté sur une perpendiculaire à OH' donne

$$\omega' \sin r' = y_0 \cos\frac{A}{2} - x_0 \sin\frac{A}{2},$$

d'où l'on tire le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$. Après substitution de $\frac{\sin e}{\sin e'} = \frac{\sin r}{\sin r'}$,

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{z_0 + \cot e' \operatorname{tang}\varphi'}{\cot e \operatorname{tang}\varphi - z_0} \frac{\sin e}{\sin e'} \frac{y_0 \cos\frac{A}{2} - x_0 \sin\frac{A}{2}}{y_0 \cos\frac{A}{2} + x_0 \sin\frac{A}{2}},$$

d'où l'on tire

$$z_0\left[\sin e'\left(y_0\cos\frac{A}{2} + x_0\sin\frac{A}{2}\right) + \sin e\left(y_0\cos\frac{A}{2} - x_0\sin\frac{A}{2}\right)\right]$$
$$- \operatorname{tang}\varphi \cos e\left(y_0\cos\frac{A}{2} - x_0\sin\frac{A}{2}\right) + \operatorname{tang}\varphi' \cos e'\left(y_0\cos\frac{A}{2} + x_0\sin\frac{A}{2}\right) = 0.$$

Le coefficient de z_0 est évidemment égal à

$$\omega' \sin r' \sin e + \omega \sin r \sin e' = \frac{\sin e \sin e'}{n}(\omega + \omega');$$

mais, dans le triangle HH'O, la relation entre les côtés $\omega + \omega'$, $\frac{1}{\sin e}$, $\frac{1}{\sin e'}$ et le sinus des angles opposés $\pi - A$, r, r' donne

$$\frac{\omega + \omega'}{\sin A} = \frac{1}{\sin e \sin r} = \frac{1}{\sin e' \sin r'}, \quad \omega + \omega' = \frac{\sin A}{\sin e \sin r'} = \frac{n \sin A}{\sin e \sin e'}.$$

Le coefficient de z_0 se réduit donc à $\sin A$.

Après substitution, il vient

$$\operatorname{tang}\varphi \cos e\left(y_0\cos\frac{A}{2} - x_0\sin\frac{A}{2}\right)$$
$$- \operatorname{tang}\varphi' \cos e'\left(y_0\cos\frac{A}{2} + x_0\sin\frac{A}{2}\right) - z_0 \sin A = 0,$$

formule qui coïncide avec l'équation (42).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

DE LA

RÉFRACTION A TRAVERS UN PRISME

SUIVANT UNE LOI QUELCONQUE,

PAR M. A. CORNU,

PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TROISIÈME PARTIE [1].

ÉTUDES EXPÉRIMENTALES DESTINÉES A CONTRÔLER LES THÉORÈMES PRÉCÉDEMMENT ÉTABLIS.

38. Dans les deux premières Parties du présent Mémoire, un certain nombre de théorèmes géométriques assez simples, relatifs à la marche des rayons lumineux à travers un prisme, ont été établis indépendamment de toute connaissance sur la surface d'onde dans le milieu considéré. Dans ce qui va suivre, on va voir l'application de ces théorèmes à l'étude de la marche de la lumière à travers des prismes formés de diverses substances cristallisées qui se prêtent utilement à ce genre d'observations : les déterminations numériques qui s'y rencontrent justifient de tout point l'exactitude de ces propositions; en outre, elles

[1] *Voir* 2e Série, t. I, p. 231.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

apportent un certain nombre de vérifications très-précises relatives à la surface d'onde des milieux à un axe optique, découverte ou plutôt devinée par Huyghens.

39. Les expériences ont été faites, pour la plupart, avec des prismes de spath d'Islande, substance qui se recommande spécialement, pour ce genre d'études, par son homogénéité, sa transparence, la perfection géométrique de ses clivages et l'énergie de sa double réfraction; le seul reproche qu'on puisse adresser à ce cristal est son peu de dureté, qui rend très-difficile la taille de faces artificielles aussi planes que la précision des mesures l'exigerait. Toutes ces conditions sont nécessaires pour que les vérifications numériques aient une valeur effective. En général, les substances que la nature nous offre en beaux cristaux transparents, le spath d'Islande excepté, ont toujours quelque défaut grave qui les fait rejeter; par exemple, le quartz, la topaze, l'orthose, la baryte sulfatée sont trop peu biréfringentes pour qu'on puisse les employer utilement à de semblables observations. L'aragonite serait très-intéressante à étudier, à cause de sa biréfringence avec deux axes optiques; mais elle a deux défauts : le premier, de ne présenter aucun repère cristallographique précis pour l'orientation des sections, car les facettes planes et polies sont rares et les clivages peu marqués; le second, de différer trop peu d'un cristal à un seul axe optique; son emploi introduirait toutes les complications des cristaux à deux axes, sans apporter le bénéfice des contrôles théoriques relatifs à cette complexité de constitution. Parmi les cristaux artificiels, l'azotate de soude se recommande par une biréfringence énorme et une facilité de clivage rhomboédrique remarquable; mais il est encore plus mou que le spath d'Islande et de plus un peu déliquescent, de sorte que la taille de faces artificielles suffisamment planes est à peu près impossible; on peut néanmoins utiliser, comme on le verra plus loin, la réfraction du rayon extraordinaire à travers l'angle aigu de deux clivages, et en déduire une vérification intéressante. Le soufre cristallisé dans le sulfure de carbone devra aussi donner des résultats importants, car il est biaxe; mais la taille en est également très-difficile; aussi son étude a-t-elle dû être remise à une époque où l'on disposerait d'échantillons de transparence suffisante et convenablement taillés.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

40. Le spath d'Islande offre encore un avantage : c'est la constance de ses propriétés optiques; tous les échantillons limpides et à clivages bien réguliers présentent la double réfraction à un seul axe optique avec des indices de réfraction principaux si bien définis, que les déterminations faites par un grand nombre de physiciens sont presque identiques.

Cette *homogénéité optique* est précieuse dans les études présentes, non-seulement parce qu'elle est une condition nécessaire à l'application des principes adoptés, mais parce qu'elle permet un système de vérifications sur lesquelles on ne pourrait pas compter si la substance réfringente présentait une structure optiquement irrégulière. En effet, il ne s'agit pas seulement d'appliquer aux données numériques de l'observation des formules qui permettent d'affirmer que, dans l'intérieur du milieu, les ondes lumineuses se comportent de telle ou telle manière : il faut montrer qu'il en est réellement ainsi; il est donc nécessaire de se ménager un moyen de connaître la marche de ces ondes par une méthode tout à fait indépendante. C'est justement ce que permet la connaissance de la surface de l'onde lumineuse dans les cristaux à un axe optique. Ces études ont donc le double avantage de vérifier les propositions géométriques très-générales relatives à la propagation des ondes, et en même temps de contrôler l'exactitude de la surface d'onde des uniaxes.

41. Ces considérations font comprendre la marche suivie, dans cette troisième Partie, pour l'exposé des observations et des calculs qui en dérivent. Chaque série de mesures donne lieu à deux séries de calculs : la première est l'application des théorèmes généraux exposés précédemment, indépendants de la connaissance de la surface d'onde lumineuse; la seconde est, au contraire, la détermination théorique des mêmes éléments, en partant de l'ellipsoïde d'Huyghens défini par les indices mesurés par Rudberg.

Les vérifications numériques constitueront donc un contrôle de l'exactitude, non-seulement des formules nouvelles, mais encore de l'ellipsoïde d'Huyghens.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

PREMIÈRE SÉRIE D'OBSERVATIONS.

DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES D'UNE ONDE RÉFRACTÉE PAR UN PRISME CORRESPONDANT AU MINIMUM DE DÉVIATION.

42. *Choix du prisme.* — Pour la série d'expériences faites en vue de vérifier les théorèmes dans leur généralité, on a choisi un prisme de spath d'Islande à faces artificielles; l'orientation a été déterminée par les trois conditions suivantes :

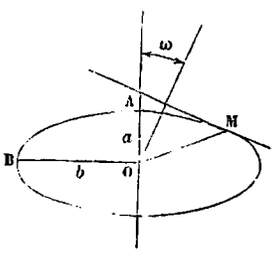
1° L'onde réfractée intérieure correspondant au minimum de déviation devra, comme onde suivant la loi *extraordinaire,* différer, autant qu'il sera possible, d'une onde suivant la loi ordinaire et avoir le moins possible d'éléments de symétrie communs avec les faces du prisme, afin d'accentuer la divergence entre les phénomènes que produisent ces deux espèces d'ondes.

2° L'orientation cristallographique de l'onde devra être facile à définir (1).

(1) On a profité de la connaissance de la surface de l'onde extraordinaire du spath d'Islande pour satisfaire à ces conditions. En effet, les ondes qui diffèrent le plus d'une onde suivant la loi ordinaire sont celles pour lesquelles la direction lumineuse efficace fait l'angle le plus grand avec la normale à l'onde. L'axe du rhomboèdre ou axe optique étant un axe de révolution, il suffit de rechercher, dans une section méridienne quelconque de l'ellipsoïde, la tangente à l'ellipse qui fait le plus grand angle avec le rayon vecteur du point de contact.

Soient (*fig.* 10) a le demi-axe de révolution de l'ellipsoïde; b l'axe équatorial; ω l'angle

Fig. 10.



que fait la perpendiculaire à la tangente avec l'axe optique.

L'équation de la tangente à l'ellipse sera

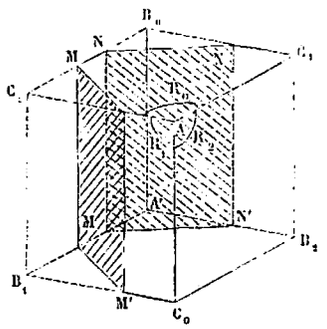
$$x\cos\omega + y\sin\omega = p = \sqrt{a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega};$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

3° Les faces seront inclinées à 60 degrés, cet angle étant commode pour la mesure de la déviation et des incidences.

Voici la figure représentant la coupe du prisme adopté, taillé dans un rhomboïde de spath d'Islande (*fig.* 11).

Fig. 11.



$AB_0C_1B_2C_0B_1C_2A'$ est le parallélépipède de clivage choisi; les faces artificielles MM′ et NN′ font respectivement des angles de 30 degrés avec

---

sa dérivée par rapport à ω donne l'équation d'une droite passant par le point de contact M

$$-x\sin\omega + y\cos\omega = -\frac{(a^2-b^2)\sin\omega\cos\omega}{p};$$

les valeurs de x et y, communes à ces deux équations, sont les coordonnées du point M. Posant

$$\operatorname{tang}\omega' = \frac{y}{x},$$

et divisant membre à membre les deux équations, il vient

$$\frac{+x\sin\omega - y\cos\omega}{x\cos\omega + y\sin\omega} = \frac{(a^2-b^2)\sin\omega\cos\omega}{a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega}$$

ou

$$\frac{\operatorname{tang}\omega - \operatorname{tang}\omega'}{1+\operatorname{tang}\omega\operatorname{tang}\omega'} = \operatorname{tang}(\omega-\omega') = \frac{(a^2-b^2)\operatorname{tang}\omega}{a^2+b^2\operatorname{tang}^2\omega};$$

on en déduirait aussi

$$\operatorname{tang}\omega' = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tang}\omega.$$

Le maximum de $\omega-\omega'$ s'obtiendra en égalant à zéro la dernière expression de $\operatorname{tang}(\omega-\omega')$ prise par rapport à $\operatorname{tang}\omega$

$$(a^2+b^2\operatorname{tang}^2\omega)(a^2-b^2) - (a^2-b^2)\operatorname{tang}\omega\, 2b^2\operatorname{tang}\omega = 0, \quad b^2\operatorname{tang}^2\omega = a^2,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

les faces $AC_2B_1C_0$, $A'B_0C_1B_2$, et sont toutes deux parallèles à l'arête AC_0 ou B_1C_2 ou B_0A'.

De cette manière l'axe du rhomboèdre est orienté d'une manière quelconque par rapport au prisme, de sorte qu'il n'y a aucun élément de symétrie commun entre le prisme et le cristal.

Pour éviter des confusions, on a donné un nom à chaque face du cristal.

Les trois faces rhomboédriques adjacentes au sommet obtus A sont R_0, R_1, R_2; les trois autres, qui leur sont respectivement parallèles, sont R'_0, R'_1, R'_2.

Les faces artificielles sont désignées par M et N.

---

d'où

$$\operatorname{tang}^2\omega = \frac{a^2}{b^2}, \quad \operatorname{tang}\omega = \pm\frac{a}{b}, \quad \operatorname{tang}\omega' = \mp\frac{b}{a}.$$

La valeur correspondante de $\omega - \omega'$

$$\operatorname{tang}(\omega - \omega') = \frac{(a^2 - b^2)\dfrac{a}{b}}{a^2 + a^2} = \frac{a^2 - b^2}{2ab}.$$

Rappelant que les indices de réfraction sont les inverses des demi-axes

$$\operatorname{tang}(\omega - \omega') = \frac{n_e^2 - n_o^2}{2n_e n_o},$$

n_e..... indice extraordinaire,
n_o..... indice ordinaire,

on voit ainsi que les ondes qui satisfont à la question correspondent aux deux diamètres conjugués égaux de l'ellipse méridienne. Substituant les valeurs de n_e, n_o de Rudberg correspondant à la raie D (*voir* plus loin, p. 29), il vient

$$\left.\begin{aligned}\omega &= 41°52'\ 3''\\ \omega' &= 48°\ 7'57''\end{aligned}\right\} \omega' - \omega = 6°15'54''.$$

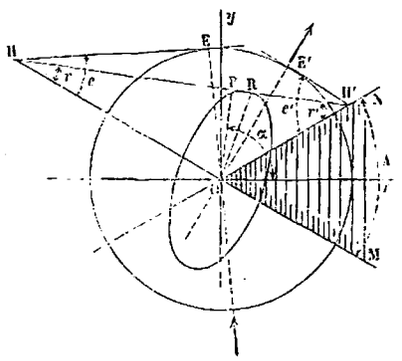
Ce calcul préliminaire montre que, dans le spath d'Islande, la normale à l'onde extraordinaire fait, avec la direction lumineuse efficace, un angle qui atteint presque 6°16', et, comme cet angle est un maximum, les ondes voisines ne s'écarteront donc pas beaucoup de ces conditions. Quant à la direction de ces ondes, leur normale fait un angle d'environ 42 degrés avec l'axe optique.

Pratiquement voici comment, en partant de ces données, on a construit le prisme : on a remarqué que les faces de clivage du rhomboèdre de spath faisaient avec son axe un angle de 44°37', très-voisin de la direction des ondes qu'on vient de définir; il en résulte qu'une onde qui se propagerait dans le cristal parallèlement à une face du rhomboèdre jouirait sensiblement de la propriété en question. On a donc pris pour plan bissecteur du prisme un plan de clivage; on était ainsi assuré que l'onde réfractée serait très-voisine de la direction voulue. Quant à l'arête du prisme, elle a été choisie parallèle à une des arêtes du rhomboèdre formant l'hexagone gauche autour de l'axe.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

D'après les conventions établies dans le premier Mémoire (p. 237), l'angle d'incidence sur la face M sera désigné par e, sur la face N par e'. La bissectrice intérieure de la section droite du prisme sera l'axe des x,..., comme il est indiqué (*fig.* 12).

Fig. 12.



Observations faites avec le prisme de spath d'Islande.

43. Ce prisme était placé sur la plate-forme d'un excellent goniomètre de Babinet, construit par MM. Brunner frères; il a servi à faire quatre séries d'observations; on déterminait

1° L'angle du prisme;

2° Les déviations minimum du rayon extraordinaire;

3° Les incidences correspondant à ce minimum, incidences qui ne sont pas égales, comme on l'a démontré précédemment, n° 24 (p. 252);

4° L'inclinaison de l'image de la fente verticale du collimateur après réfraction.

Dans toutes ces observations, on employait la lumière monochromatique très-intense, produite par la flamme d'un brûleur à gaz (ou d'un jet d'hydrogène pur) dans laquelle sont placés une spirale de platine et du sel marin fondu. Les deux premières déterminations s'effectuaient suivant la méthode ordinaire; on observait la réflexion des rayons du collimateur sur les deux faces du prisme fixé invariablement: la différence des lectures donnait le double de l'angle du prisme; de

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

même, la réfraction à droite, puis à gauche, fournissait le double de la déviation minimum.

La détermination de l'incidence, correspondant au minimum de déviation, est un peu moins facile à faire : la première méthode consiste à amener avec beaucoup de soin le prisme au minimum de déviation et à lire l'azimut du rayon réfracté et celui du rayon réfléchi sur la face d'incidence; l'incertitude que comporte nécessairement la position du prisme oblige à répéter l'observation un assez grand nombre de fois : la différence des lectures donne évidemment (*fig.* 13) un angle définitif H.

$$H = \pi - 2e + D.$$

Fig. 13.

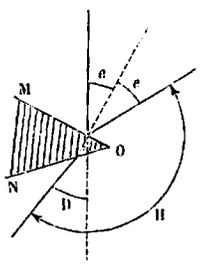
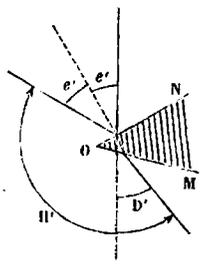


Fig. 14.



En recommençant la même série d'opérations sur l'autre face, on obtient un autre angle H' (*fig.* 14).

$$H' = \pi - 2e' + D.$$

Ces deux déterminations se contrôlent mutuellement et permettent, jusqu'à un certain point, d'assigner l'approximation du résultat final, qui est la valeur $e - e'$.

En effet, on a dans tous les cas

$$A + D = e + e';$$

substituant la valeur de D dans les valeurs de H et H', il vient

$$H + A = \pi + e' - e,$$
$$H' + A = \pi + e - e',$$

d'où

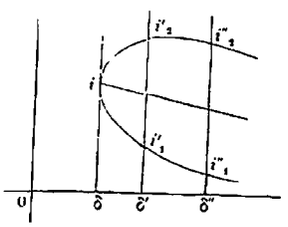
$$H + H' + 2A = 2\pi;$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de sorte que la somme de H + H′ et du double de l'angle du prisme doit être égale à 2π. Si cette condition n'est pas satisfaite, le demi-excès sur 2π mesure l'erreur à craindre, c'est-à-dire l'approximation qu'on peut espérer des mesures.

Une seconde marche plus laborieuse, mais aussi plus exacte, a été également employée; elle est calquée sur celle qu'a imaginée Despretz pour déterminer la température du maximum de densité de l'eau; elle consiste à observer le minimum de déviation et les doubles incidences qui correspondent à deux déviations très-voisines de ce minimum. Si l'on se représente graphiquement (*fig.* 15) les déviations δ, δ', δ'' en

Fig. 15.



abscisses et les incidences i, i'_1, i'_2, i''_1, i''_2 correspondantes en ordonnées, on construira la conique osculatrice de la courbe $i = \varphi(\delta)$, définie par ces quatre points et par une tangente; il est inutile de construire cette conique, mais on obtiendra le point de contact en joignant les milieux des deux cordes parallèles. Une simple proportion permet donc de calculer l'ordonnée du point cherché; ce point définit l'incidence i, correspondant au minimum de déviation (*voir* plus loin, n° 48).

44. L'observation de l'inclinaison de l'image de la fente a été faite de deux manières. Il eût été plus commode d'avoir un micromètre semblable à ceux que les astronomes emploient au foyer des lunettes équatoriales, c'est-à-dire portant un fil mobile entraîné par l'alidade d'un cercle divisé, normal à l'axe optique de l'instrument. Le goniomètre dont on faisait usage ne portant pas une semblable pièce, on a dû utiliser d'autres moyens de mesure : on a profité de ce que la lunette était mobile autour de deux colliers concentriques à son axe optique. Dans le premier mode opératoire, on amenait le fil vertical de la lunette à coïncider avec l'image de la fente, par une rotation conve-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

nable de la lunette autour de ses colliers; pour évaluer cette inclinaison, on en mesurait la tangente trigonométrique en ramenant la lunette dans l'alignement du collimateur; on mesurait alors la hauteur angulaire apparente de la fente verticale avec le fil devenu oblique; le quotient de cette lecture, par la valeur de la hauteur angulaire réelle de la fente, mesurée préalablement, donnait la tangente trigonométrique de l'angle cherché.

Ce procédé fort simple s'appliquerait à toutes les lunettes dont le tirage portant le réticule pourrait tourner autour de son axe de figure. L'autre mode opératoire a consisté à fixer sur la monture de la lunette un petit miroir permettant de mesurer la rotation autour des colliers, à l'aide d'une lunette auxiliaire et d'une échelle divisée; on faisait deux lectures : d'abord en fixant le zéro, c'est-à-dire l'azimut de la lunette, lorsque le fil vertical coïncidait avec l'image directe de la fente du collimateur; puis en ramenant dans cette même direction la lunette, après l'avoir tournée de l'angle convenable par la mise en coïncidence du fil avec l'image de la fente; les deux lectures de l'échelle divisée fournissaient les éléments de l'angle de rotation cherché (1).

L'exactitude de ces deux opérations est subordonnée tout entière à la netteté de l'image de la fente; on ne doit pas choisir une hauteur de fente trop considérable parce que l'image réfractée serait notablement arquée; il faut aussi qu'elle soit fine. C'est là que l'imperfection des surfaces, les phénomènes de diffraction dus à la petitesse, à la forme et à l'obliquité des faces du prisme jouent un rôle fâcheux; car ces causes tendent à élargir l'image optique, à en rendre les bords estompés et même à la déformer un peu. Pour éliminer cette influence,

(1) *Note sur le réglage de la fente.* — Il est nécessaire que la fente du collimateur soit bien verticale, c'est-à-dire exactement perpendiculaire au plan du limbe ou parallèle à l'axe de l'instrument. Pour obtenir cette condition, on dispose sur la plate-forme centrale une glace argentée, et on la règle à l'aide de la lunette (par réflexion normale et retournement), de manière que son plan soit parallèle à l'axe de l'instrument. Alors on observe la fente avec la lunette, en ayant soin de faire coïncider le fil vertical du réticule avec elle sur toute sa longueur; puis on observe l'image réfléchie sur la glace : si la fente est bien réglée, le réticule coïncide encore avec l'image, sinon l'angle des deux directions est le double de l'erreur de verticalité de la fente; on peut donc la corriger par les moyens de réglage dont on dispose

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

on a répété les mêmes mesures sur le rayon ordinaire et l'on a rapporté l'inclinaison de la fente, vue par réfraction extraordinaire, non pas à l'image directe, mais à l'image vue par réfraction ordinaire; c'est le résultat consigné dans le tableau suivant, dans la douzième série. Quoi qu'il en soit, dans le cas où quelque observateur voudrait effectuer des mesures analogues, on ne saurait trop lui conseiller de mettre un soin extrême à l'exécution des faces du prisme, tant au point de vue du poli que de la *planitude*, et, à cet effet, de choisir un prisme de spath ayant des dimensions aussi grandes que possible.

45. Nous allons déduire de ces données expérimentales les trois éléments géométriques de l'onde, réfractée dans l'intérieur du cristal, correspondant au minimum de déviation.

Ces trois éléments sont, ainsi qu'il a été dit au n° 5 (p. 233) :

1° La vitesse suivant la normale à l'onde plane;

2° L'angle que fait la direction lumineuse efficace avec cette normale;

3° L'orientation du plan parallèle à cette normale et au rayon efficace.

Il faut ajouter à ces trois éléments constitutifs de l'onde les éléments qui définissent sa position relativement au cristal. Dans les observations précédentes, l'onde plane réfractée étant, comme les ondes émergentes, parallèle à l'arête du prisme, sa position est déterminée par sa trace sur la section droite.

Soit α l'angle que forme la normale à cette onde plane réfractée avec la bissectrice intérieure de la section droite du prisme, suivant les conventions du n° 12 (*fig.* 12). On a (n° 20, p. 247)

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{r - r'}{2}, \quad r + r' = A.$$

Cet élément de *position* se calcule par la formule du n° 35,

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\nu}{\mu}\cot\frac{e - e'}{2},$$

dans laquelle

$$\mu = \frac{\cos\frac{A+D}{2}}{\cos\frac{A}{2}}, \quad \nu = \frac{\sin\frac{A+D}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Le premier élément géométrique défini plus haut, à savoir la vitesse normale de propagation, est l'inverse de l'indice de réfraction actuel n; il est fourni par l'une ou l'autre des deux formules (10) du n° 15, (p. 240) :

$$n = \nu \frac{\cos\frac{e-e'}{2}}{\cos\frac{r-r'}{2}} = \nu \frac{\cos\frac{e-e'}{2}}{\sin\alpha},$$

$$n = \mu \frac{\sin\frac{e-e'}{2}}{\sin\frac{r-r'}{2}} = -\mu \frac{\sin\frac{e-e'}{2}}{\cos\alpha},$$

lesquelles se servent mutuellement de contrôle pour le calcul numérique.

Les deux autres éléments qui se rapportent à la direction lumineuse efficace se déduisent très-simplement de la connaissance des coordonnées x_0, y_0, z_0 du point de contact de l'onde plane avec la surface d'onde. Les formules du n° 37 (p. 267), applicables au cas du minimum de déviation, donnent,

$$x_0 = -\frac{1}{\mu}\sin\frac{e-e'}{2}, \quad y_0 = +\frac{1}{\nu}\cos\frac{e-e'}{2}, \quad z_0 = -\frac{\cos e\cos e'}{\sin(A+D)}\operatorname{tang}\varphi'_0.$$

La projection du rayon lumineux efficace sur la section droite fait avec l'axe des x un angle α', tel que

$$\operatorname{tang}\alpha' = \frac{y_0}{x_0};$$

la comparaison avec la valeur de $\operatorname{tang}\alpha$ montre que

$$\operatorname{tang}\alpha' = \frac{\mu^2}{\nu^2}\operatorname{tang}\alpha.$$

Comme vérification, il est bon de rappeler la relation du n° 24 (p. 253)

$$\operatorname{tang}^2\beta = \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\alpha',$$

dans laquelle $\beta = \frac{\pi}{2} + \frac{e-e'}{2}$.

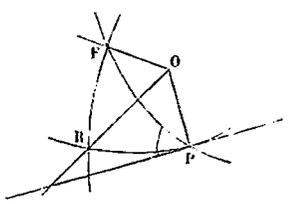
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Le rayon lumineux fait avec le plan de la section droite un angle $\varkappa$, défini par

$$\operatorname{tang}\varkappa = \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{z_0 \cos\alpha'}{x_0}.$$

On pourrait calculer aussi en fonction des x_0, y_0, z_0 l'angle ζ de la normale d'onde et du rayon efficace; mais les expressions ne seraient pas calculables par logarithmes : aussi est-il plus commode d'employer la trigonométrie sphérique. Les trois directions ci-dessus indiquées forment les trois sommets d'un triangle sphérique rectangle, à savoir (*fig.* 16) :

Fig. 16.



OP normale d'onde,
OF rayon lumineux efficace,
OR projection du rayon sur la section droite,
$PR = \alpha - \alpha'$, $\widehat{FPR} = \Omega$,
$FR = \varkappa$,
$FP = \zeta$.

On conclut facilement

$$\operatorname{tang}\varkappa = \frac{z_0}{\frac{1}{n}\cos(\alpha - \alpha')} = \frac{n z_0}{\cos(\alpha - \alpha')},$$

relation qui fournit une vérification pour $\varkappa$:

$$\cos\zeta = \cos\varkappa \cos(\alpha - \alpha'), \quad \text{et aussi} \quad \operatorname{tang}\Omega = \frac{\operatorname{tang}\varkappa}{\sin(\alpha - \alpha')}.$$

46. Voici le résumé des observations faites avec ce prisme : le tableau comprend quatre colonnes principales qui renferment les observations angulaires, à savoir : les mesures relatives à l'angle du prisme, à la déviation minimum du rayon extraordinaire et aux incidences correspondantes. Comme vérifications ultérieures, on y a joint les mêmes mesures relatives au rayon ordinaire : les nombres de la colonne θ représentent la température ambiante de l'observation mesurée par un thermomètre placé le long du collimateur; les deux autres colonnes comprennent, l'une le résultat du contrôle indiqué au n° 43 (p. 9), l'autre les observations de l'inclinaison de l'image de la fente du collimateur.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

SÉRIE.	DOUBLE de l'angle du prisme. 2A	0	RAYON EXTRAORDINAIRE. DOUBLE DÉVIATION 2D	0	DIFFÉRENCE des incidences $e'-e=H-H'$	0	RAYON ORDINAIRE. DOUBLE DÉVIATION 2D	0	DIFFÉRENCE des incidences $e'-e$	DIFFÉRENCE $(H+H'+2A-2\varpi)$	VALEUR de $\operatorname{tang}\varphi'_0$.
1	120°.50'.47"	15°,8	86°.52'.33"	15°,8	5°.36'.59"	16°,0	105°.22'.48"	15°,8		+ 36'.50"	— 0,011140
2	50.44	16,0	53.18	16,0	5.37.12	16,0	22.42	15,8		39. 2	
3	50.45	18,5									
4	50.39	12,1									
5	49.51	6,8					22.30	9,4			
6	50.38	20,6					23.41	21,0			
7	50.41	20,6									
8	50.11	15,8	53. 0	15,5			23.18	15,7			
9	50.54	17,3			5.35.20	17,0				4.50	
10	51. 8	12,7	52.21	12,5							
11	49.55	8,3	52.21	12,5							
12	50. 8	12,5	52.22	12,5							— 0,010888
13	50.33	13,9	52.33	14,4			23.23	14,2			
14	50.23	15,5	52.42	15,4			23.26,3				
15	50.27	15,4									
16	50.14	12,5	52. 3	12,5	5.34.28	12,5	23. 7	12,5		— 5.25	
17	50.21	12,5									
18	50.18	12,0	52.44	12,0							
19	50.20	12,2									
20	50.29	13,9	52.42	14,0							
21	50.27	14,6	52.42	14,5	5.38.22	14,5				— 2.20	
22	50.26	12,9	52.37	13,0							
23	50.32	13,4	52.35	13,5	5.37.51	13,5	23.26	12,4	—0°.0'.26"	+ 1.31	
24	50.10	12,2					23.24	12,5			
25	50.13	12,6					23.16	12,6			

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

47. La concordance de ces observations est très-satisfaisante; on pourrait prendre la moyenne de chaque colonne comme point de départ des calculs ultérieurs; mais, comme la variation des éléments avec la température n'est pas à négliger, il vaut mieux choisir une série qui ait été faite complétement dans les mêmes circonstances. La meilleure, sous ce rapport, et surtout relativement à la régularité des mesures, est celle qui porte le n° 23; en effet, c'est celle qui présente la vérification indiquée au n° 43 avec la plus grande approximation, ainsi que le montre la colonne intitulée *différence*, $H + H' + 2A - 2\pi$. De plus, la même série d'opérations appliquée au rayon ordinaire fournit un autre contrôle; on devrait avoir $e' - e = 0$; l'observation a donné $e' - e = -0°0'26''$: ce qui tendrait à prouver que l'erreur est négative et égale environ à 26″, valeur de même ordre que la moitié de la différence $H + H' + 2A - 2\pi = 1'31''$.

On adoptera donc, pour tous ces motifs, la série n° 23.

Détail des observations.

48. Le tableau précédent n'indique que le résumé des séries; celui qui va suivre donnera une idée complète des observations avec le détail des lectures du cercle et des verniers; c'est la série n° 23, elle fournit la valeur des incidences correspondant au minimum de déviation par la seconde méthode du n° 43.

Le cercle est divisé de 0 à 360 degrés dans le sens des aiguilles d'une montre : les divisions représentent 5 minutes; les deux verniers permettent de lire 3 secondes et d'estimer 1″,5. On n'a écrit que la moyenne des deux lectures des verniers, à 180 degrés de distance, ce qui donne parfois des quarts de seconde.

1° *Observation préliminaire.*

Direction des rayons incidents (zéro arbitraire) venant du collimateur..... 90°2'20″,25.

Cette lecture sert de vérification pour empêcher les erreurs d'inadvertance dans la mesure des doubles déviations.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

2° *Angle du prisme.*

Arête placée du côté du collimateur : les rayons incidents se réfléchissent simultanément à gauche et à droite, sur les faces M et N; $\theta = 12°,9$.

Lecture à gauche.....	155° 29′ 34″,5	d'où $2A = 120°5o'25'',5$
Lecture à droite.....	34° 39′ 9″,0	

3° *Déviation minimum.*

Opération comme à l'ordinaire; $\theta = 13°,0$:

Déviation à gauche (incidence sur la face M).....	133° 28′ 26″,25	$2D = 86°52'36'',75.$
Deviation à droite (incidence sur la face N).....	46° 35′ 49″,50	
Somme.....	180° 4′ 15″,75	

4° *Incidences voisines de celle qui correspond au minimum de déviation.*

Réflexion sur la face N.

La déviation minimum à droite correspondait à l'azimut 46°35′49″,50; on déplace la lunette jusqu'à 46°35′0″, alors la déviation correspond à deux positions du prisme; on règle soigneusement le prisme dans les deux positions qui amènent l'image lumineuse sur le réticule de la lunette, placée à 46°35′0″, et l'on déplace la lunette de façon à recevoir le rayon réfléchi ; on obtient les deux lectures suivantes :

158° 42′ 42″,75	Moyenne...	160° 32′ 0″,75.
162° 21′ 18″,75		

De la même manière, après avoir déplacé la lunette jusqu'à 46° 34′ 0″, on a obtenu

157° 53′ 27″,00	Moyenne...	160° 25′ 14″,63.
163° 7′ 2″,25		

5° *Déviation minimum.*

Pour contrôler la stabilité du cercle et l'invariabilité des déviations, on a répété la mesure de la déviation minimum, avant de passer à l'autre série; $\theta = 13°,5$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Déviation à droite (incidence sur N).	46°35′53″,25	$2D = 86°52'33'',75.$
Déviation à gauche (incidence sur M).	133°28′27″	
Somme.....	180° 4′20″,25	

Les azimuts ont varié l'un de 0″,75, l'autre de 3″,5, quantités excessivement petites et dues probablement à la variation de température.

6° *Incidences voisines de celle qui correspond au minimum de déviation.*

Réflexion sur la face M; $\theta = 13°,2$:

Lunette à 133°29′0″.....	6°48′35″ 9°41′48″	Moyenne...	8°15′12″,
Lunette à 133°30′0″.....	5°49′ 3″ 10°41′27″	Moyenne...	8°15′15″.

7° *Déviation minimum.*

Incidence sur M.....	133°28′36″,75	$2D = 86°52'45'',75.$
Incidence sur N.....	46°35′51 ,00	
Somme.....	180° 4′27″,75	

8° *Angle du prisme.*

La température est alors $\theta = 13°,4$.

156°24′21″,75	$2A = 120°50'31'',5.$
35°33′50″,25	

La température ayant été en croissant d'une manière régulière, on a éliminé son influence par le mode d'observations croisées qu'on a adopté : ainsi l'on prendra pour l'angle du prisme la moyenne des deux valeurs du commencement et de la fin de la série

$$2A = 120°50'28'',5.$$

La déviation sera la moyenne des deux valeurs correspondantes du commencement et de la fin :

$$2D = 86°52'40'',50.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Il reste à calculer les azimuts de réflexion pour en déduire les incidences.

1° *Réflexion sur* N.

Azimut de déviation minimum... { 46°35′49″,50 avant la série,
46°35′53″,25 après la série,

Moyenne..... 46°35′51″,38

Tel est l'azimut qu'on adoptera pour la déviation minimum, et l'on écrira

A 46°35′51″,38	51″,38	correspond l'azimut x'		
A 46°35′ 0″,00	60″,00		160°32′ 0″,75	1′46″,12
A 46°34′ 0″,00			160°30′14″,63	

d'où l'on conclut

$$\frac{x - 160°32'0'',75}{51'',38} = \frac{106'',12}{60''},$$

d'où

$x' = 160°33'31'',64$

Retranchant l'azimut de la déviation minimum. $46°35'51'',38$

Il vient..... $\pi + D - 2e' = H' = 113°57'40'',26$

2° *Réflexion sur* M.

Azimut de déviation minimum... { 133°28′27″,00 avant la série,
36″,75 après la série.

Moyenne..... 133°28′31″,88

d'où l'on conclut le tableau suivant :

A 133°28′31″,88	29″,12	correspond l'azimut x		
A 133°29′ 0″,00	60″,00		8°15′12″,00	3″,00
A 133°30′ 0″,00			8°15′15″,00	

donc

$$\frac{x - 8°15'12''}{29,12} = -\frac{3''}{60},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'où

$$x = 8°15'10'',54$$

Retranchant x de l'azimut de déviation minimum. $133°28'31'',88$

Il vient..... $\pi + D - 2e = H = 125°13'21'',34$

Les valeurs de H et H′ satisfont à la vérification $H + H' + 2A = 2\pi$:

$$\begin{aligned} H &= 125°13'21'',34 \\ H' &= 113°57'40'',26 \\ 2A &= 120°50'28'',50 \\ H + H' + 2A &= 360°\ 1'30'',10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H - H' &= 2(e' - e) = 11°15'41'',08 \\ e' - e &= 5°37'50'',54 \end{aligned}$$

L'excès est de $1'30'',10$; l'erreur à craindre sur $e' - e$ doit donc être de l'ordre de $\frac{1}{2}(1°30'',10) = 45'',05$.

Les valeurs de H et H′ jointes à celles de A et D fournissent une relation de trop, et comme la vérification précédente n'est pas rigoureusement satisfaite, il y a lieu de choisir la donnée à supprimer pour faire les calculs. Évidemment, les incertitudes sont surtout à craindre sur H et H′; si l'on n'utilise que leur différence $H = H' = 2(e' - e)$, ces données entreront d'une manière aussi symétrique que possible : on aura donc comme données définitives

$$2A,\ 2D = 2(e + e') - 2A \quad \text{et} \quad H - H' = 2(e' - e),$$

d'où l'on conclut

$$\begin{aligned} A &= 60°25'14'',25 \\ D &= 43°26'20'',25 \\ e &= 49°\ 6'51'',98 \text{ (réflexion sur M)} \\ e' &= 54°44'42'',52 \text{ (réflexion sur N)} \end{aligned}$$

C'est avec ces données expérimentales que le calcul des éléments de l'onde réfractée a été effectué; les résultats obtenus sont consignés dans la deuxième colonne du tableau ci-après; la troisième contient ceux qui sont obtenus par la méthode décrite dans les paragraphes qui suivent.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ÉLÉMENTS A DÉTERMINER	RÉSULTATS NUMÉRIQUES	
	d'après les théorèmes généraux et les observations précédentes.	d'après l'orientation cristallographique du prisme et les données de Rudberg.
$\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{r - r'}{2}$	$\alpha = 88°\,42'\,54'',79$ $\alpha' = 83°\,50'\,44'',04$	$88°\,42'\,17'',87$ $83°\,47'\,42'',68$
Indice de réfraction.....	$n = 1,563079$	$1,563093$
Angle du rayon projeté et de la normale d'onde.....	$\alpha - \alpha' = 4°\,52'\,15'',07$	$4°\,54'\,35'',19$
Distance du point de contact de la surface d'onde à la section droite du prisme.	$z_0 = +\,0,042280$	$+\,0,042692$
Angle du rayon avec la section droite.	$\varkappa = 3°\,47'\,47'',5$	$3°\,48'\,13'',75$
Angle de la normale d'onde et du rayon.	$\zeta = 6°\,10'\,7''$	$6°\,12'\,28'',90$
Angle du plan contenant le rayon et la normale d'onde avec le plan de la section droite.....	$\Omega = 38°\,0',5''$	$37°\,50'\,28'',37$
Indice du rayon ordinaire.....	$n_0 = 1,658347$	$n_0 = 1,65846$ raie D.

Calcul théorique des résultats précédents.

49. Le contrôle de ces résultats a été obtenu par leur comparaison avec ceux qu'on déduit de la connaissance de la surface d'onde du spath d'Islande. Le calcul ne laisse pas que d'être assez laborieux, surtout à cause des calculs préliminaires relatifs à l'orientation de l'axe optique par rapport aux faces artificielles du prisme; les résultats sont consignés dans la troisième colonne du tableau précédent. Voici la marche qui a été suivie.

La première opération a consisté à rapporter les deux faces artificielles du prisme MN aux faces du rhomboèdre. Le parallélépipède de spath, ayant été choisi parmi un grand nombre d'échantillons, présen-

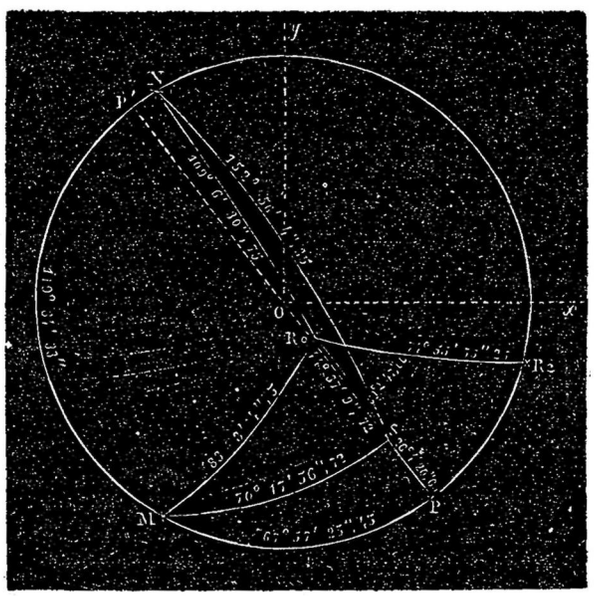
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

tait des clivages remarquables par leur poli et la perfection de leur plan : aussi les mesures angulaires dont le détail va suivre se sont-elles effectuées avec une grande exactitude.

Pour se rendre compte des calculs de trigonométrie à effectuer, il est nécessaire d'employer le mode de représentation graphique usité en cristallographie, à savoir la représentation sphérique des normales au polyèdre en projection stéréographique; à cet effet, on suppose que les directians des normales à toutes les faces du polyèdre passent par le centre d'une sphère et vont percer la sphère en des points qui définissent complétement les faces en direction. Ce sont ces traces qu'on projette stéréographiquement sur un plan convenablement choisi; ce mode de projection jouit, comme on sait, de la double propriété qu'un cercle tracé sur la surface de la sphère se projette suivant un cercle et que les angles se conservent en projection.

La *fig.* 17 représente stéréographiquement les normales aux faces MN

Fig. 17.



du prisme et aux trois faces du rhomboèdre R_0, R_1, R_2. Le plan de projection est le plan des deux normales MN ou plan de la section •

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

droite du prisme : on remarquera que la normale à R_2 est un peu au-dessous du plan de MN. Par l'observation au goniomètre, on a mesuré le double de chaque angle dièdre; voici les résultats obtenus ou plutôt le supplément de la moitié de ces lectures, c'est-à-dire l'angle des normales représentées sur la figure :

$$\widehat{MN} = 119°34'33'',00\ (^1),$$
$$\widehat{MR_0} = 83°\ 3'\ 4'',5,$$
$$\widehat{NR_1} = 109°\ 6'30'',75,$$
$$\widehat{MR_2} = 105°18'\ 6'',75,$$
$$\widehat{R_0R_2} = 74°55'55'',25.$$

Comme vérification on a mesuré un angle surabondant

$$\widehat{NR_2} = 135°6'48'',75;$$

on a, en effet,

$$\widehat{MN} + \widehat{MR_2} + \widehat{NR_2} = 359°59'28'',5 = 2\pi - 31'',5.$$

Les trois faces M, N, R_2 n'étant pas rigoureusement parallèles à une même droite, les trois normales ne sont pas dans un même plan, et, par suite, la somme des trois angles doit être un peu inférieure à 360 de-

---

(1) On remarquera une légère différence entre l'angle MN observé dans cette série

$$A = 60°25'27'',\quad \theta = 17°,2,$$

et la valeur obtenue dans la série n° 23, employée dans les calculs antérieurs,

$$A = 60°25'14'',25,\quad \theta = 13°,3;$$

mais cette différence (12'',75) s'explique très-bien par la différence de température; d'après la discussion de l'ensemble des séries, l'angle du prisme croîtrait d'environ 3 secondes pour un accroissement de la température de 1 degré. Malgré cette petite divergence, on n'a pas cru devoir modifier la seconde valeur de l'angle du prisme pour le calcul théorique des éléments de l'onde réfractée; la comparaison du nouveau calcul avec les résultats obtenus par la première méthode est donc entachée d'une petite erreur d'environ 12 à 15 secondes; mais cette erreur est négligeable vis-à-vis de l'incertitude qui pèse sur la détermination expérimentale de $e - e'$, laquelle peut s'élever de 1 à 2 minutes. D'ailleurs cette comparaison est destinée bien plutôt à montrer la validité et l'usage commode des théorèmes géométriques employés qu'à faire une confrontation rigoureuse du calcul et de l'observation.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

grés : le sens de la différence est donc une vérification qualitative des mesures.

Les calculs de trigonométrie sphérique qu'on a à effectuer ne présentent aucune difficulté; mais ils sont fort longs par eux-mêmes et par les vérifications qu'on est obligé de faire.

Pour définir l'orientation de l'axe optique S (*fig.* 17), relativement aux faces du prisme, on a choisi deux angles, à savoir :

1° L'azimut $x\mathrm{OP}'$ du plan projetant cet axe sur le plan de la section droite, compté à partir de l'axe des x ou bissectrice intérieure du prisme,

$$\sigma = 127^\circ 44' 41'',95;$$

2° L'angle $\widehat{\mathrm{SP}}$ que fait cet axe avec le plan de la section droite

$$\omega = 26^\circ 4' 20'',65.$$

Ces résultats ont été obtenus par la marche suivante :

1° On a adopté comme angle du rhomboèdre la valeur

$$\widehat{\mathrm{R_0R_2}} = 74^\circ 55' 55'',25;$$

on a calculé l'angle $\widehat{\mathrm{R_0S}}$ que fait l'axe S avec la face $\mathrm{R_0}$; on trouve

$$\mathrm{SR_0} = 44^\circ 37' 9'',72,$$

et pour l'angle

$$\mathrm{SR_0R_2} = 39^\circ 2' 47'',06;$$

2° On a calculé l'angle dièdre $\mathrm{MR_0R_2}$, d'après la connaissance de $\widehat{\mathrm{MR_0}}$, $\widehat{\mathrm{R_0R_2}}$, $\widehat{\mathrm{R_2M}}$,

$$\mathrm{MR_0R_2} = 107^\circ 56' 48'',80$$

(vérifié par le calcul direct des deux autres dièdres et de l'excès sphérique).

Par soustraction on a obtenu le dièdre $\mathrm{MR_0S}$,

$$\mathrm{MR_0S} = 68^\circ 54' 1'',74.$$

3° On a calculé l'angle dièdre $\widehat{\mathrm{MR_0N}}$,

$$\mathrm{MR_0N} = 118^\circ 56' 48'',70$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

(vérifié par le calcul direct des deux autres dièdres et de l'excès sphérique.

D'où l'on a conclu par addition avec l'angle précédent,

$$NR_0S = 172°9'9'',56.$$

La connaissance de ces deux angles a permis de calculer de deux manières différentes les angles σ et ω définis plus haut : il ne reste plus en effet qu'à résoudre un triangle rectangle, connaissant un côté et l'angle adjacent; les résultats des deux calculs ont été concordants à quelques centièmes de seconde; les dièdres qu'il fallait connaître étaient

$$R_0NM = 92°49'53'',26,$$
$$R_0MN = 108°\ 3'37'',70;$$

ils avaient déjà été calculés dans le triangle MNR_0.

50. La connaissance de la position de l'axe optique relativement aux faces du prisme permet d'appliquer les données de Rudberg au calcul théorique des éléments de l'onde réfractée. Les formules à employer sont celles du n° 22, p. 250, à savoir (29) et (30).

Calcul des éléments de l'onde réfractée au minimum de déviation. — L'équation (29) développée se met sous la forme

$$\frac{1}{\mu^2\nu^2} - \frac{1}{\mu^2}(a^2\sin^2\sigma + b^2\cos^2\sigma) - \frac{1}{\nu^2}(a^2\cos^2\sigma + b^2\sin^2\sigma) + a^2b^2 = 0,$$

dans laquelle a et b sont les axes de l'ellipse qui forme la ligne d'onde sur la section droite. Si l'on convient de réserver les lettres a et b pour désigner le demi-axe longitudinal et le demi-axe équatorial de l'ellipsoïde d'Huyghens, l'ellipse considérée aura aussi b comme demi-axe perpendiculaire à la projection de l'axe optique (parce que l'axe équatorial se projette en vraie grandeur) et pour axe perpendiculaire la valeur a', tel que

$$a'^2 = a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega,$$

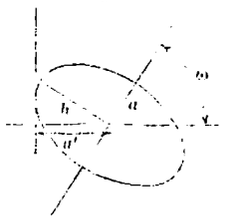
ω étant l'angle que fait l'axe de l'ellipsoïde de révolution avec le plan de la section droite (*fig.* 18).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La direction α de la normale à l'onde plane réfractée, qui correspond au minimum de déviation, est fournie par les formules (30)

$$(30)\qquad \cot\alpha = -\frac{(a^2-b^2)\sin\sigma\cos\sigma}{a^2\cos^2\sigma + b^2\sin^2\sigma - \frac{1}{\mu^2}} + \frac{a^2\sin^2\sigma + b^2\cos^2\sigma - \frac{1}{\nu^2}}{(a^2-b^2)\sin\sigma\cos\sigma}.$$

Fig. 18.



Dans ces formules a ou a', b et σ sont connus, mais μ et ν, qui renferment la valeur de la déviation, ne le sont pas; il faut éliminer ces deux inconnues entre l'équation de l'ellipse et la suivante, bien connue (16, p. 246),

$$(16)\qquad \mu^2\cos^2\frac{A}{2} + \nu^2\sin^2\frac{A}{2} = 1.$$

A cet effet, on tire μ^2 et ν^2 des deux équations (30), en fonction de $\cot\alpha$, et l'on substitue dans l'équation (16). On arrive, après quelques transformations faciles, à l'équation du second degré

$$NQ\tan g^2\alpha + (MN - P^2 + Q^2)\tan g\alpha + MQ = 0,$$

dans laquelle

$$M = a'^2\cos^2\sigma + b^2\sin^2\sigma - \cos^2\frac{A}{2},$$

$$N = a'^2\sin^2\sigma + b^2\cos^2\sigma - \sin^2\frac{A}{2},$$

$$P = \sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2},$$

$$Q = (a'^2 - b^2)\sin\sigma\cos\sigma,$$

$$a'^2 = a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega.$$

L'équation en $\tan g\alpha$ se résout sans difficulté : quant à la racine à adopter, elle se reconnaît aisément par la condition que l'onde réfractée

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

doit être à peu près parallèle à la bissectrice de la section droite du prisme, c'est-à-dire que α doit être voisin de 90 degrés.

L'indice de réfraction de l'onde plane au minimum de déviation s'obtient en substituant la valeur de α dans l'équation (22) du n° 22, p. 248,

$$\frac{1}{n} = p' = \sqrt{a'^2 \cos^2(\alpha - \sigma) + b^2 \sin^2(\alpha - \sigma)}.$$

La connaissance de l'indice permet de calculer les angles d'émergence, car on a

$$\frac{r - r'}{2} = \alpha - \frac{\pi}{2}, \qquad \sin e = n \sin r,$$

$$\frac{r + r'}{2} = \frac{A}{2}, \qquad \sin e' = n \sin r'.$$

Comme vérification, on se sert de la formule

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{r - r'}{2}}{\operatorname{tang} \frac{r + r'}{2}} = \frac{\operatorname{tang} \frac{e - e'}{2}}{\operatorname{tang} \frac{e + e'}{2}}.$$

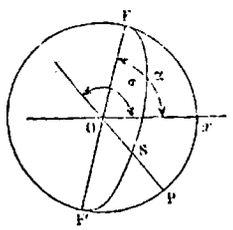
L'angle de la projection du rayon avec l'onde plane est donné par l'expression (34), n° 23, p. 252,

$$\operatorname{tang} \alpha' = \frac{\mu^2}{\nu^2} \operatorname{tang} \alpha = \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{A}{2}}{\operatorname{tang}^2 \frac{e + e'}{2}} \operatorname{tang} \alpha,$$

d'où l'on tire $\alpha - \alpha'$, angle cherché.

L'angle du rayon lumineux avec la normale à l'onde plane se déduit de la même propriété géométrique appliquée à l'ellipse méridienne. A cet effet, on commence par calculer (*fig.* 19) l'angle θ que

Fig. 19.



Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

fait la direction α (représenté par F sur la figure) avec l'axe optique S : le triangle sphérique rectilatère FOS donne sans difficulté

$$\cos\theta = \sin\widehat{OS}\cos FOS = -\sin\omega\cos(\sigma-\alpha),$$

appliquant le théorème

$$\operatorname{tang}\theta' = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tang}\theta,$$

d'où l'on conclut $\theta - \theta'$.

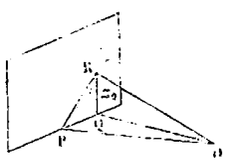
C'est l'angle appelé ζ au n° 45, p. 13.

L'angle du plan de l'axe optique et de la normale d'onde avec la section droite Ω se calcule aussi à l'aide du même triangle SOF : c'est le complément de F; ou mieux à l'aide du triangle rectangle SPF′ où il est représenté par F′,

$$\operatorname{tang}\omega = \operatorname{tang}\Omega\sin(\sigma-\alpha).$$

Enfin la coordonnée z_0, distance du point de contact de la surface d'onde à la section droite (*fig.* 20) (z_0 est positif comme étant au-dessus de ce plan).

Fig. 20.



Sur la figure, le plan PRQ représente le plan d'onde, OP la normale d'onde, O le centre de l'ellipsoïde, R le point de contact,

$$z_0 = RQ, \quad OP = \frac{1}{n}, \quad POR = \alpha - \alpha' \quad \text{et} \quad RPQ = \Omega, \quad ROQ = \varkappa.$$

Exprimant z_0 de trois manières, il vient

$$z_0 = \frac{1}{n}\operatorname{tang}(\theta-\theta')\sin\Omega = \frac{1}{n}\frac{\operatorname{tang}\varkappa}{\cos(\alpha-\alpha')} = \frac{1}{n}\operatorname{tang}(\alpha-\alpha')\operatorname{tang}\Omega,$$

où l'on retrouve les formules de la page 13, n° 45 : on peut donc calculer Ω, $\varkappa$ et z_0.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

51. Les nombres qui figurent dans la troisième colonne du tableau de la page 21, n° 48, ont été obtenus à l'aide de ces formules par la substitution des valeurs

$$\omega = 26^\circ\ 4'\ 20'',65,$$
$$\sigma = 127^\circ 44' 41'',95,$$
$$A = 60^\circ 25' 27'',00,$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{a} &= n_0 = 1,65846 \\ \frac{1}{b} &= n_e = 1,48635 \end{aligned}\right\} \text{pour la raie D (Rudberg).}$$

Les différences entre les résultats déduits des théorèmes généraux et ceux déduits de l'ellipsoïde d'Huyghens sont partout assez faibles. La plus grande concordance correspond aux valeurs de α et de n, où elle est véritablement remarquable; la plus grande discordance a lieu pour Ω : elle s'élève à $9\frac{1}{2}$ minutes; mais il y a lieu de remarquer que cet azimut est, par sa nature même, assez mal défini au point de vue expérimental, puisque la normale d'onde et le rayon efficace qui déterminent l'un des deux plans du dièdre font un angle très-petit ($6^\circ 10'$). Quant aux autres valeurs, elles s'accordent en général à 2 minutes près; c'est l'ordre d'approximation qu'impose la détermination de $e' - e$ et φ'_0.

En résumé, on peut conclure que les théorèmes généraux démontrés précédemment sont vérifiés par l'expérience; leur simplicité relative dans une question si complexe rend leur emploi très-commode. On peut affirmer, en outre, que dans un cas très-général l'ellipsoïde de Huyghens rend un compte aussi précis que possible des observations. Ces expériences et ces calculs confirment donc l'exactitude, la validité de la forme de la surface d'onde adoptée pour les cristaux uniaxes.

Remarque. Pour avoir un contrôle plus direct des nombres de Rudberg, on a observé dans la même série la déviation minimum du rayon ordinaire : en mesurant à nouveau l'angle du prisme, on a trouvé

$$\left.\begin{aligned} 2D_0 &= 105^\circ 23' 24'',00, \\ 2A &= 120^\circ 50' 11'',25, \end{aligned}\right\} \quad \theta = 12^\circ,4.$$

De ces données, on a déduit l'indice de réfraction ordinaire du spath d'Islande correspondant à la raie D

$$n_0 = 1,658389,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

qui ne diffère du nombre de Rudberg que d'une quantité presque insignifiante.

Vérification expérimentale du cas où le prisme produit une déviation constante et indépendante de l'incidence.

52. Les observations et les calculs précédents ont été effectués spécialement en vue de la vérification des théorèmes généraux qui définissent les éléments géométriques d'une onde réfractée, indépendamment de la connaissance de la surface de l'onde; l'introduction, dans le second calcul, de l'ellipsoïde de Huyghens fournit une vérification laborieuse, il est vrai, mais très-effective, de la nature de la surface d'onde des cristaux uniaxes.

Mais on pourrait objecter que les petites divergences, inévitables dans des observations aussi délicates, sont peut-être causées par l'inexactitude de la forme adoptée comme surface d'onde; heureusement on peut trouver, parmi les propriétés géométriques exposées dans la première partie de ce Mémoire, un phénomène qui permet de vérifier *synthétiquement* l'exactitude de la forme ellipsoïdale de la surface de l'onde du spath d'Islande : c'est le phénomène correspondant aux théorèmes qui font l'objet de la Note du n° **16**. On peut résumer ainsi les propositions démontrées dans cet article :

Si l'on considère un prisme dont la ligne d'onde correspondant à la section droite ait ses axes orientés parallèlement aux bissectrices de cette section

$$M^2 x^2 + N y^2 = 1,$$

ce prisme produira une déviation constante D, indépendante de l'incidence des rayons, lorsqu'il sera placé dans un milieu dont l'indice sera k, à la condition qu'on ait

$$\text{(K)} \qquad \operatorname{tang}^2 \frac{A}{2} = \frac{M^2 - k^2}{k^2 - N^2},$$

la déviation constante étant donnée par la formule

$$\text{(K')} \qquad \operatorname{tang} \frac{A + D}{2} = \frac{N}{M} \operatorname{tang} \frac{A}{2}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

53. Il est facile de démontrer la proposition réciproque, à savoir que, si un prisme produit une déviation constante et indépendante de l'incidence, la ligne d'onde correspondant à la section droite est nécessairement elliptique.

En effet, d'après l'équation (12) du n° 15, p. 240, on a, dans le cas général, pour l'indice de l'onde réfractée correspondant à un angle A et une déviation D qui définissent μ et ν,

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{\mu^2}\sin^2\frac{r-r'}{2} + \frac{1}{\nu^2}\cos^2\frac{r-r'}{2};$$

substituant $\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{r-r'}{2}$, α étant l'angle avec l'axe des x de la normale à l'onde plane réfractée,

$$p^2 = \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\mu^2}\cos^2\alpha + \frac{1}{\nu^2}\sin^2\alpha.$$

Si D est indépendant de e et e', c'est-à-dire de r et r' ou α, μ et ν sont des constantes, et l'on a, pour la loi qui lie la vitesse de propagation p de l'onde réfractée avec sa direction,

$$p^2 = \frac{1}{\mu^2}\cos^2\alpha + \frac{1}{\nu^2}\sin^2\alpha.$$

L'enveloppe de cette onde plane, sur la section droite ou ligne d'onde, est l'ellipse

$$\mu^2x^2 + \nu^2y^2 = 1.$$

Cette ellipse doit donc être identique à l'ellipse du milieu considéré

$$M^2x^2 + N^2y^2 = k^2,$$

k étant l'indice du milieu extérieur : l'identification conduit aux deux formules rapportées plus haut (K), (K').

54. Il était donc très-naturel de soumettre l'ellipsoïde à cette vérification : la difficulté pratique était de parvenir, pour le liquide, à l'indice convenable k : là une étude approfondie des données mêmes de la question a permis une grande simplification expérimentale.

Le prisme de spath d'Islande le plus facile à utiliser était évidemment l'angle aigu ou l'angle obtus d'un rhomboïde de clivage; or il se

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

rencontre une simplification inattendue lorsqu'on opère à la fois sur l'angle aigu et l'angle obtus : c'est que l'indice du liquide fournissant la déviation constante est le même dans les deux cas, et que de plus cette déviation constante reste la même en valeur absolue, mais se trouve de signe contraire.

En effet, lorsqu'on intervertit l'angle aigu et l'angle obtus, on intervertit les axes de l'ellipse dans la section droite : la première formule (K) devient donc

$$\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}\right)=\frac{N^2-k^2}{k^2-M^2}=\cot^2\frac{A}{2},$$

c'est-à-dire reste identique après la substitution; la seconde (K') devient

$$\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}+\frac{D}{2}\right)=\frac{M}{N}\cot^2\frac{A}{2}=\cot^2\left(\frac{A}{2}-\frac{D}{2}\right),$$

qui s'identifie avec la première forme en changeant le signe de D.

55. La méthode d'observation destinée à vérifier ces particularités curieuses de la réfraction extraordinaire, dans un cas très-général, devient très-facile à mettre en œuvre d'après les propositions qu'on vient de démontrer.

Le rhomboïde de spath d'Islande était soutenu par un support particulier, formé d'une petite plaque au-dessous de laquelle il était fixé; cette petite plaque était, par l'intermédiaire de trois vis de réglage, soudée à la partie inférieure d'une tige glissant à frottement dans un tube fixé lui-même à une potence; cette tige faisait fonction d'axe vertical et, à l'aide du réglage, on disposait quatre des arêtes du rhomboïde parallèlement à cet axe : le tout était disposé sur la plate-forme du goniomètre.

Une petite cuve de verre, à faces bien planes et parallèles, contenait le liquide; le rhomboïde y plongeait et pouvait y tourner librement dans tous les azimuts.

Quant au liquide, il était en grande partie formé d'essence de girofle ($n = 1{,}5345$, raie D), dont l'indice est très-voisin de l'indice convenable (théoriquement $1{,}537182$); pour augmenter l'indice, on ajoutait quelques gouttes d'essence de cannelle ($n = 1{,}610$); dans le cas où l'on dépassait la limite, on abaissait l'indice avec de l'essence de térébenthine ($n = 1{,}48$).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Il eût été très-incommode de composer le liquide en prenant comme base la valeur numérique de son indice; les déterminations eussent été fastidieuses, d'autant plus que l'évaporation inégale des essences était un obstacle presque insurmontable pour l'obtention d'un résultat précis. Heureusement le phénomène lui-même indiquait si l'indice était trop élevé ou trop faible; en effet, lorsque l'indice était voisin de la valeur limite, la déviation du rayon émergent était presque constante, mais elle n'avait pas atteint sa vraie valeur; pour l'angle aigu, elle était au-dessus, pour l'angle obtus au-dessous. Comme les rayons incidents traversaient à la fois les deux angles aigus ou les deux angles obtus, suivant l'azimut du cristal, on pouvait recevoir successivement, dans le champ de la lunette, la déviation à droite de l'angle aigu de gauche, par exemple, et la déviation à droite de l'angle obtus de droite; ces deux déviations, égales lorsque l'indice est arrivé à la limite, ne le sont pas dans le cas contraire. Pour savoir s'il fallait augmenter ou diminuer l'indice, on examinait laquelle des deux déviations était la plus grande; la règle était celle-ci : l'indice est *trop fort* si la déviation est *plus forte* que celle de l'angle aigu, et réciproquement; un moment d'attention la rend évidente.

56. En opérant ainsi, on arrivait à coup sûr à obtenir deux déviations aussi égales que possible, et l'on vérifiait que la déviation était constante et indépendante de l'incidence. Ce phénomène présente ainsi *deux vérifications*, l'une *qualitative*, à savoir l'existence d'un indice extérieur produisant une déviation indépendante de l'incidence; l'autre *quantitative*, l'égalité, au signe près, des deux déviations constantes pour des prismes supplémentaires dont les bissectrices intérieures sont cristallographiquement rectangulaires. Mais il présente une troisième vérification numérique très-importante, c'est l'accord de la déviation observée avec la valeur théorique de cette déviation, calculée d'après l'ellipsoïde d'Huyghens et les données de Rudberg; pour effectuer ce calcul, il suffit de connaître les axes de l'ellipse, projection orthogonale de l'ellipsoïde sur le plan de la section droite du prisme.

A cet effet, on commence par calculer l'angle v que fait l'arête du rhomboèdre avec l'axe; pour cela on a déterminé l'angle du rhomboïde de clivage sur lequel on a opéré, et l'on a trouvé sur les quatre

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

arêtes réfringentes (α, β, α', β', désignant les quatre faces)

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha\beta} &= 105^\circ 4' 15'', \quad \widehat{\alpha\beta'} = 74^\circ 56' 1'', \\ \widehat{\alpha'\beta'} &= 105^\circ 4' 5'', \quad \widehat{\alpha'\beta} = 74^\circ 56' 15'', \end{aligned} \qquad \theta = 17^\circ, 2.$$

La somme des quatre angles égale 360°0′36″; il y a donc une petite erreur de 36 secondes à répartir sur les quatre angles (due probablement à un défaut de réglage des arêtes à mesurer), ce qui conduit à la valeur définitive pour l'angle du rhomboèdre

$$\widehat{\alpha\beta} = 105^\circ 4' 1'',$$

valeur qui diffère si peu de celle qui fait partie de la série relative au prisme à faces artificielles (¹)

$$R = 105^\circ 4' 4'', 75, \quad \theta = 17^\circ, 4,$$

qu'on n'a pas cru devoir la substituer à ce dernier nombre admis comme une donnée fondamentale dans tous les calculs de ce Mémoire.

La formule à employer s'obtient en considérant un trièdre rectangle ayant pour arêtes, l'arête du rhomboèdre, l'axe et la trace sur l'une des faces du rhomboèdre du plan projetant cet axe,

$$\cos v = \cot 60^\circ \cot \frac{R}{2},$$

d'où

$$v = 63^\circ 44' 17'', 69.$$

L'ellipse, projection de l'ellipsoïde, aura pour axe perpendiculaire à la projection de l'axe optique la valeur même de l'axe équatorial $2b$, qui se projette en vraie grandeur; suivant l'axe optique, l'axe de l'ellipse sera $2a''$,

$$a''^2 = a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v;$$

(¹) Ces mesures montrent combien la structure du spath d'Islande est régulière, puisque deux échantillons, pris au hasard, donnent, pour l'angle de leurs clivages, des nombres identiques; toutefois il est bon d'ajouter que ces deux échantillons sont de la même provenance.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

numériquement, d'après les indices de Rudberg,

$$\frac{1}{a''} = 1{,}620061 = \mathrm{M}\ (^1),$$

$$\frac{1}{b} = 1{,}46835 = \mathrm{N}.$$

Appliquant les formules (K) et (K'), on trouve pour l'indice du liquide k et pour la déviation D

$$k = 1{,}537182,$$
$$\mathrm{D} = 4^\circ 48' 50'', 04.$$

Mais cette déviation est celle qui correspond à un milieu extérieur indéfini d'indice k. Comme le liquide est compris entre les deux plans parallèles de la cuve, il y a lieu de corriger l'effet de la réfraction dans l'air; les deux cas les plus simples qui peuvent se présenter sont les suivants :

1° La cuve est fixe; la face d'entrée est normale aux rayons incidents; la déviation apparente D' sera donnée par l'expression

$$\sin \mathrm{D}' = k \sin \mathrm{D},$$

d'où

$$\mathrm{D}' = 7^\circ 24' 42'', 4.$$

2° Les faces de la cuve sont parallèles au plan bissecteur du prisme et solidaires de son mouvement :

$$\sin \frac{\mathrm{D}''}{2} = k \sin \frac{\mathrm{D}}{2},$$

d'où

$$\mathrm{D}'' = 7^\circ 24' 10''.$$

C'est à cette dernière disposition qu'on s'est arrêté; l'observation a

---

(1) On a pu contrôler directement ce nombre par l'observation de la déviation minimum du rayon extraordinaire à travers l'angle aigu; l'image de la fente est inclinée : aussi faut-il incliner le réticule de la lunette sous le même angle et mesurer le double de la déviation; l'observation est difficile à cause du peu d'intensité de la lumière; on a trouvé

$$2\mathrm{A} = 149^\circ 52' 29'',$$
$$2\mathrm{D} = 170^\circ 53' 04'',$$

d'où

$$k = 1{,}61982. \quad \text{Différ.} = 0{,}00024.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

donné pour la déviation constante, dans sept séries bien concordantes,

$$\left.\begin{array}{rl} \Delta' = 7^\circ 22' 38'' & \\ 28'' & \\ 27'' & \end{array}\right\} \theta = 16^\circ,$$

$$\begin{array}{rll} 00'' & & \\ 15'' & \theta = 16^\circ,1, & \\ 47'' & \quad 17^\circ,7, & \\ 45'' & \quad 18^\circ,1. & \end{array}$$

Moyenne... $7^\circ 22' 28''$

La différence avec le nombre calculé est $1'42''$; elle est de l'ordre des erreurs que les phénomènes de diffraction causés par les stries des faces naturelles de clivage produisent dans l'image de la fente.

57. Il est nécessaire d'ajouter quelques indications sur la manière d'effectuer les mesures; en effet, on arrive assez aisément à amener l'égalité apparente des déviations par l'angle aigu et l'angle obtus du rhomboïde; mais, lorsqu'on exécute les mesures précises, on trouve que cette égalité n'est exacte qu'à quelques minutes près. S'il fallait modifier l'indice jusqu'à l'égalité absolue des déviations, l'opération serait interminable, surtout avec l'évaporation inégale des essences : il était donc nécessaire de déduire le résultat limite des observations obtenues dans le voisinage de l'indice limite. Rien n'est si simple : il suffit de prendre la moyenne des déviations par l'angle obtus et l'angle aigu; c'est ce que justifie, pour les *données spéciales adoptées*, le calcul suivant.

Considérons les déviations minimum par l'angle aigu et l'angle obtus; elles satisfont aux relations

$$\frac{\sin(\alpha+\delta)}{\sin\alpha} = \frac{n_1}{k}, \quad \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \delta'\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{n_2}{k},$$

dans lesquelles les lettres grecques remplacent les grandes lettres divisées par 2.

La condition pour que $\delta = -\delta' = \Delta$ donne

$$\frac{\sin(\alpha+\delta)}{\sin\alpha} = \frac{n_1}{k}, \quad \frac{\cos(\alpha+\delta)}{\cos\alpha} = \frac{n_2}{k},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ou, en éliminant k,

$$\operatorname{tang}(\alpha+\delta)=\frac{n_1}{n_2}\operatorname{tang}\alpha,$$

et k est donné par

$$N^2=k^2n_1\sin^2\alpha+n_2^2\cos^2\alpha$$

[laquelle est identique avec la relation (K)]. Si k n'a pas la valeur précédente N, δ et $-\delta'$ ne sont pas égaux à Δ, et l'on a

$$\frac{\sin(\alpha+\delta)}{n_1\sin\alpha}=\frac{\cos(\alpha-\delta')}{n_2\cos\alpha};$$

comparant avec l'équation (K'),

$$\frac{\sin(\alpha+\delta)}{\sin(\alpha+\Delta)}=\frac{\cos(\alpha-\delta')}{\cos(\alpha+\Delta)}.$$

L'observation donne δ et δ'. Posons

$$\delta=\Delta+\varepsilon,$$
$$\delta'=-\Delta-\varepsilon'$$

et calculons

$$\frac{\delta-\delta'}{2}=\Delta+\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2};$$

substituant les valeurs de δ, δ' et développant, il vient, en négligeant les carrés de $\varepsilon, \varepsilon'$,

$$\varepsilon\cot(\alpha+\Delta)=-\varepsilon'\operatorname{tang}(\alpha+\Delta),$$

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}=-\operatorname{tang}^2(\alpha+D).$$

Il se trouve que, *avec les données adoptées*, on a sensiblement

$$\operatorname{tang}(\alpha+\Delta)=1 \quad \text{et} \quad \varepsilon=-\varepsilon',$$

d'où

$$\varepsilon+\varepsilon'=0;$$

en effet,

$$\alpha=\frac{A}{2}=37^\circ28' \quad \text{(angle aigu)},$$
$$\Delta=\frac{D''}{2}=3^\circ42'$$
$$\alpha+\Delta=\overline{41^\circ10'} \quad =45^\circ-3^\circ50'.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Donc la demi-somme des *valeurs absolues* des déviations par l'angle aigu et l'angle obtus donne sensiblement la valeur limite (¹).

58. Outre ces trois genres de vérifications qui viennent d'être indiqués, le phénomène de la déviation constante du prisme en offre encore un autre sur lequel il est nécessaire d'insister : c'est une particularité assez singulière au premier abord, mais qui est une conséquence évidente des propositions démontrées dans la première partie de ce Mémoire. L'image rectiligne de la fente lumineuse, l'indice du liquide étant bien réglé, tourne autour de son milieu lorsque le prisme tourne autour de son arête; ce *pivotement* de l'image ne laisse pas que de surprendre, la première fois qu'on l'observe; mais, si l'on réfléchit que le milieu seul

---

(¹) Pour effectuer la correction, d'ailleurs très-petite, provenant de ce que la condition $\varepsilon : \varepsilon' = -\tan g^2 41^\circ 10' = -0{,}7646$ et non pas zéro, on remarquera qu'il suffit de calculer la valeur $-(\varepsilon + \varepsilon')$, car on a

$$2\Delta = \delta - \delta' - (\varepsilon + \varepsilon'),$$

or la somme algébrique $\delta + \delta'$ est égale à $\varepsilon - \varepsilon'$; on connaît donc la différence $\varepsilon - \varepsilon'$ et le rapport $\varepsilon : \varepsilon'$, d'où l'on conclut

$$\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon - \varepsilon'} = -\frac{1 - \tan g^2(\alpha + \Delta)}{1 + \tan g^2(\alpha + \Delta)} = -\cos 2(\alpha + \Delta) = -0{,}1334.$$

Le calcul a été appliqué aux quatre dernières séries dans lesquelles on a croisé les observations (pour éliminer l'influence de l'évaporation inégale des essences et l'effet de la température), de façon à obtenir séparément δ et δ'.

RÉFRACTION PAR L'ANGLE aigu $= 2\delta$.	RÉFRACTION PAR L'ANGLE obtus $= 2\delta'$.	$(\varepsilon - \varepsilon')$.	CORRECTION $-(\varepsilon + \varepsilon')$.	$2\Delta = D''$ corrigé.
$7^\circ.25'.26''$	$-7^\circ.18'.34''$	$+206''$	$+27''$	$7^\circ.22'.27''$
25.35	18.54	+ 201	+ 27	42
21.47	23.46	— 60	— 8	39
24.54	20.37	+ 139	+ 17	63
			Moyenne.....	7.22.43

Ce qui réduit à $1'27''$ la différence entre le calcul et l'observation.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de l'image correspond au plan de la section droite et que les autres points sont formés par des rayons obliques sur ce plan, on se reportera à l'étude, faite au n° 33, p. 263, de l'image d'une fente rectiligne, et l'on verra que l'image par réfraction doit être inclinée toutes les fois que le point de contact de l'onde plane avec la surface de l'onde est en dehors de la section droite. Dans le cas présent, l'onde, par une rotation continue du prisme autour de son arête, peut occuper toutes les positions du plan tangent du cylindre circonscrit à l'ellipsoïde; la ligne de contact est une ellipse dont le plan est oblique sur le plan de la section droite (plan diamétral conjugué de la direction de l'arête du prisme).

En deux points seulement la courbe de contact se trouve dans le plan de la section droite, suivant le diamètre équatorial : l'onde est alors parallèle à l'axe optique. Ce sont les deux seuls cas où l'image soit verticale; ils correspondent évidemment au cas où l'angle réfringent est l'angle obtus du rhomboèdre, car le plan bissecteur de l'angle obtus est parallèle à l'axe optique, et l'onde réfractée au minimum de déviation est parallèle à ce plan. Dans tous les autres cas, le point de contact de la surface de l'onde avec l'onde plane est en dehors de la section droite, et l'image est inclinée; cette inclinaison se calcule par la formule (43) du n° 33, p. 263,

$$\operatorname{tang}\varphi'_0 = -\frac{z_0}{x_0 \sin\frac{A}{2} + y_0 \cos\frac{A}{2}} \cdot \frac{\sin A}{\cos e'}.$$

On voit que $\operatorname{tang}\varphi'_0$ peut devenir infini, c'est-à-dire que l'image de la fente verticale peut devenir horizontale ; il suffit qu'on ait soit

$$x_0 \sin\frac{A}{2} + y_0 \cos\frac{A}{2} = 0,$$

soit

$$\cos e' = 0.$$

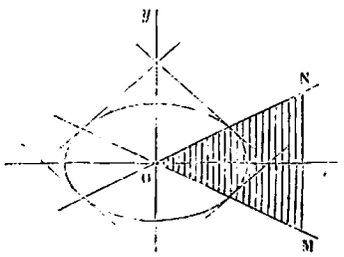
La première condition indique que le point de contact de l'onde doit avoir lieu sur la droite

$$\frac{y_0}{x_0} = -\operatorname{tang}\frac{A}{2},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

c'est-à-dire au point d'intersection de la ligne d'onde avec la trace de l'une des faces du prisme, M, celle sur laquelle on compte les incidences e (*fig.* 21).

Fig. 21.



Il est facile de voir que cette condition revient à $\cos e = 0$ ou $e = 90°$; en effet, l'onde émergente correspondant à l'onde réfractée dans cette position est normale à la face M du prisme, car le cercle, ligne d'onde du milieu extérieur, passe par l'intersection de l'ellipse et des deux droites, traces des faces; c'est l'interprétation géométrique de la condition que l'ellipse $\left(\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}\right)$ soit la ligne d'onde.

Soit, en effet, l'ellipse

$$M^2x^2 + N^2y^2 + 1, \quad \text{identifiée à} \quad \mu^2x^2 + \nu^2y^2 = 1;$$

soit le cercle

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{k^2},$$

l'équation de toute conique passant par l'intersection de ces deux courbes est

$$x^2(M^2 + \lambda) + y^2(N^2 + \lambda) = 1 + \frac{\lambda}{k^2}.$$

Cette conique devient un système de deux droites concentriques à l'origine; si $\lambda = -k^2$,

$$x^2(M^2 - k^2) + y^2(N^2 - k^2) = 0,$$

d'où

$$\frac{y^2}{x^2} = \operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2} = \frac{M^2 - k^2}{k^2 - N^2}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

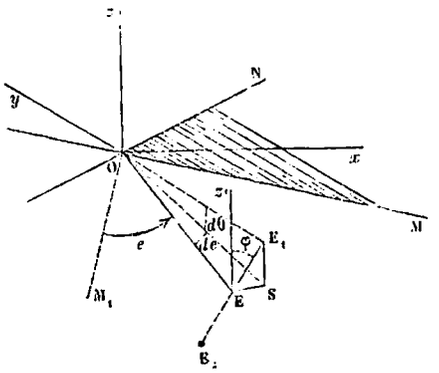
Cette condition est identique à l'équation (K), page 29 : il n'y a de changé que la notation φ substituée à A.

En résumé, l'image sera horizontale pour $e = 90°$, c'est-à-dire quand le rayon incident sera rasant.

La seconde condition $\cos e' = 0$ donne de même $e' = 90°$: elle correspond au rayon émergent rasant.

59. L'expérience donne une vérification qualitative immédiate de ces deux conditions; à mesure que l'image réfractée s'incline vers l'horizontale, son intensité décroit, si bien que, à la limite, lorsqu'elle devrait être tout à fait horizontale, elle est éteinte; c'est qu'en effet, sous l'incidence ou sous l'émergence rasante, la quantité de lumière qui traverse le prisme est nulle.

Fig. 22.



On n'entrera pas dans la discussion qui permet de suivre la rotation simultanée du prisme autour de son arête et de l'image de la fente autour de son centre; on appellera seulement l'attention sur la vérification que présente le sens de l'inclinaison de l'image; d'après la formule (43), p. 263, on voit que φ'_0 est de signe contraire à z_0 (au moment où l'angle aigu donnerait le minimum de déviation); remontant au n° 32, p. 261 et 262, sur le signe conventionnel de φ' (*fig.* 22),

$$\operatorname{tang}\varphi' = -\frac{de'}{d\theta};$$

par suite, tant que l'onde plane réfractée touchera l'ellipsoïde au-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

dessus du plan de la section droite, l'image paraîtra avoir tourné en sens inverse des aiguilles d'une montre et réciproquement. Cette remarque prouve que la déviation, à droite ou à gauche, présente l'image inclinée dans le même sens.

APPENDICE I.

CALCUL DE L'INDICE EXTRAORDINAIRE DU SPATH D'ISLANDE D'APRÈS LES FORMULES DE DE SENARMONT MODIFIÉES.

Les nombreuses séries d'observations effectuées sur le prisme MN, à diverses reprises, ont été discutées au point de vue de la température; l'influence est très-nette, et l'on a pu calculer une formule empirique de correction; la concordance des observations est assez grande pour qu'il ait paru intéressant de faire concourir le résultat moyen de ces observations au calcul de l'indice extraordinaire du spath d'Islande. C'était d'ailleurs une occasion d'appliquer les formules du n° 22 et de contrôler leur exactitude.

Ces formules sont, au fond, celles que de Senarmont a données dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XVI, p. 273; mais la forme sous laquelle elles se présentent est plus commode pour le calcul et la simplicité de la démonstration qui permet de les obtenir assure de leur exactitude.

La moyenne de toutes les mesures effectuées sur l'angle du prisme, la déviation minima ordinaire et la déviation minima extraordinaire, donne

$$2A = 120°50'26'',82, \quad \theta = 14°,01, \quad \text{variation } +6'',00 \text{ pour 1 degré;}$$
$$2D_o = 105°23'10'',83, \quad \theta = 14°,32, \quad \text{variation } +4'',13 \text{ pour 1 degré;}$$
$$2D_e = 86°52'16'',57, \quad \theta = 13°,82, \quad \text{variation } +6'',38 \text{ pour 1 degré.}$$

Un tracé graphique a même permis de déterminer approximativement la variation de chacun de ces angles pour 1 degré, de sorte qu'on

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

peut les ramener tous à la même température de 15 degrés vrais ($\theta = 15°, 50$, car le thermomètre employé était en avance de $0°, 50$) :

$$2A = 120°50'35'',76,$$
$$2D_o = 105°23'15'',70,$$
$$2D_e = 86°52'47'',03.$$

L'indice ordinaire se calcule par la formule bien connue des milieux isotropes ; on trouve

$$(\text{raie D}), \quad n_o = \frac{1}{a} = 1,658325; \quad \text{Rudberg : } 1,65850.$$

L'indice extraordinaire $n_e = \frac{1}{b}$ se calcule avec les formules qu'on va établir; l'équation (29) du n° 22, p. 260, peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{\mu^2\nu^2} - \frac{1}{\mu^2}(a'^2\sin^2\sigma + b'^2\cos^2\sigma) - \frac{1}{\nu^2}(a'^2\cos^2\sigma + b'^2\sin^2\sigma) + a'^2b'^2 = 0,$$

a' et b' étant les axes de l'ellipse ligne d'onde dans la section droite du prisme considéré. Dans le cas actuel, on a

$$a'^2 = a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega.$$

On se rappelle que σ est l'azimut de la projection de l'axe optique sur la section droite du prisme rapportée à l'axe des x (bissectrice aiguë) et que ω est l'angle aigu que forme cet axe avec le plan de la section droite (*voir* n° 49, p. 23).

$$\sigma = 127°44'41'',95,$$
$$\omega = 26°\ 4'20'',65.$$

Substituant la valeur de a' après avoir posé

$$M = \frac{\cos^2\sigma}{\mu^2} + \frac{\sin^2\sigma}{\nu^2},$$
$$N = \frac{\sin^2\sigma}{\mu^2} + \frac{\cos^2\sigma}{\nu^2},$$

il vient finalement, après réductions, l'équation qui donne b,

$$b^4\sin^2\omega - b^2\left[\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\nu^2} - (a^2 + N^2)\cos^2\omega\right] + \frac{1}{\mu^2\nu^2} - a^2N\cos^2\omega = 0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Les quantités μ, ν, N se calculent aisément; on connait d'ailleurs a et ω; l'inconnue b est donc fournie par une équation bicarrée facile à résoudre. En rejetant la racine inadmissible, on trouve

$$\text{(raie D)}, \quad n_e = \frac{1}{b} = 1{,}486397; \quad \text{Rudberg} : n_e = 1{,}48635.$$

La concordance est encore plus complète que dans le cas du rayon ordinaire.

APPENDICE II.

INDICES PRINCIPAUX DE L'AZOTATE DE SOUDE.

L'azotate de soude est un sel neutre, incolore, d'une transparence parfaite, cristallisé en rhomboèdres et aussi facilement clivable que le spath d'Islande. Sa biréfringence, mesurée par la différence des deux indices de réfraction, ordinaire et extraordinaire, est environ une fois et demie plus grande que celle du spath et négative comme elle; ce serait donc un cristal éminemment propre aux expériences de double réfraction, s'il n'était pas un peu hygrométrique, de sorte que les faces artificielles se ternissent en quelques minutes à l'air ordinaire; les faces de clivage, souvent très-planes, résistent beaucoup mieux à l'humidité atmosphérique.

Deux séries d'observations ont été faites avec des cristaux de cette substance, la première ayant pour objet la détermination des deux indices; la seconde, la vérification approchée de l'inclinaison de l'image verticale par réfraction extraordinaire.

Première série. — On a utilisé l'arête aiguë du rhomboèdre de clivage d'un très-bel échantillon d'azotate de soude ayant environ 4 centimètres cubes en volume, et d'une limpidité remarquable; le faible pouvoir réfringent du cristal permet aux deux rayons de passer, si bien qu'on peut observer les déviations minima ordinaire et extraordinaire.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

L'indice ordinaire se calcule d'après la déviation du rayon correspondant; l'indice extraordinaire se déduit aisément de la déviation minima de l'autre rayon de la manière suivante :

L'axe optique du rhomboèdre se projetant suivant une perpendiculaire à la bissectrice de la section droite, l'onde extraordinaire, au minimum de déviation, se trouve parallèle à cet axe; les formules de la réfraction ordinaire peuvent donc s'appliquer au calcul de l'indice de cette onde.

La connaissance de l'angle du rhomboèdre permet de calculer l'angle que fait cette onde ou plutôt sa normale avec l'axe optique; la formule bien connue

$$\frac{1}{n'^2} = a'^2 = a^2 \cos^2\omega + b^2 \sin^2\omega$$

permet de calculer b quand on connait a, a' et ω.

L'observation a donné, pour l'angle aigu A du rhomboèdre et pour les déviations D_o D_e,

	DÉVIATIONS MINIMA.	
	Ordinaire.	Extraordinaire.
$2A = 137°7'36''$,	$2D_o = 139°7'53''$,	$2D_e = 117°35'41''$;

d'où l'on déduit sans peine

$$\frac{1}{a} = n_o = 1{,}5852,$$

$$\frac{1}{a'} = n' = 1{,}52783.$$

L'angle obtus du rhomboèdre R est égal au supplément de la moitié de 2 A

$$R = 106°26'12'',$$

d'où l'on conclut, par un calcul cristallographique déjà indiqué (n° 49, p. 24), l'angle ν que fait l'axe du rhomboèdre avec l'arête du prisme

$$\cos\nu = \cot 60° \cot\frac{R}{2},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'où

$$v = \frac{\pi}{2} - \omega = 64°25'46''.$$

Substituant cette valeur dans la formule qui donne a', on en déduit la valeur de $b = \frac{1}{n_e}$; les résultats définitifs sont (¹) :

$$\left.\begin{aligned} &\text{Indice ordinaire.} \ldots\ldots \frac{1}{a} = n_o = 1,5852, \\ &\text{Indice extraordinaire.} \frac{1}{b} = n_e = 1,3348, \end{aligned}\right\} \text{raie D.}$$

Seconde série. — Elle se rapporte à la mesure de l'inclinaison de l'image extraordinaire de la fente verticale du collimateur. Le mode de mesure à l'aide duquel on l'a mesurée était assez grossier; mais c'était la première fois que l'auteur rencontrait ce phénomène d'une façon si nette, et il avait plutôt en vue une mesure approximative qu'une détermination soignée : cette observation est même l'origine du présent travail.

On a trouvé, pour cette inclinaison,

$$\operatorname{tang}\varphi'_0 = 0,427, \quad \varphi'_0 = 23°8'.$$

Théoriquement on peut calculer cette inclinaison par la formule

$$\operatorname{tang}\varphi'_0 = -z_0 \frac{\sin(A+D)}{\cos e \cos e'};$$

comme par symétrie $e = e' = \frac{A+D}{2}$, la formule devient

$$\operatorname{tang}\varphi'_0 = -2z_0 \operatorname{tang}\frac{A+D}{2}.$$

(¹) Une autre série, faite avec un prisme présentant une face de clivage et une face artificielle, a donné, sous l'incidence normale à la face naturelle,

$$A = 32°52'27'', \quad D_o = 26°26'0'', \quad D_e = 19°0'27'',$$

d'où l'on conclut

$$n_o = 1,5842,$$
$$n_e = 1,3355.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Quant à z_0, on le calcule d'après la connaissance de l'angle ω comme au n° 50 :

$$\operatorname{tang}\omega' = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tang}\omega, \qquad z_0 = \frac{1}{n'}\operatorname{tang}(\omega - \omega'),$$

d'où

$$\omega - \omega' = 8°26'28'',$$
$$\varphi'_0 = 23°45'00''.$$

La différence entre le calcul et l'observation n'est que de $0°37'$, approximation tout à fait en rapport avec le mode d'observation.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Extrait des *Annales de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. IX, 1880.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

SUR LE

SPECTRE NORMAL DU SOLEIL,

PARTIE ULTRA-VIOLETTE,

PAR M. A. CORNU,

MEMBRE DE L'INSTITUT, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER.

Quai des Augustins, 55.

—

1881

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

SUR LE

SPECTRE NORMAL DU SOLEIL,

PARTIE ULTRA-VIOLETTE

(DEUXIÈME PARTIE);

PAR M. A. CORNU,

MEMBRE DE L'INSTITUT, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Dans une première étude (1), j'ai donné la description des raies sombres du spectre solaire ultra-violet entre les raies *h* et O, les raies étant classées suivant l'échelle normale, c'est-à-dire l'échelle de leurs longueurs d'onde. Cette étude, destinée à continuer le beau travail d'Angström, ne s'étend guère qu'à la moitié du spectre susceptible d'être observé par les procédés ordinaires de la Photographie; la limite que j'avais atteinte dans ce premier travail est celle à laquelle on parvient avec les instruments d'Optique en usage dans les laboratoires, c'est-à-dire construits avec des lentilles de crown-glass ou de flint-glass, dont le pouvoir absorbant arrête les radiations plus réfrangibles que la raie O. Le présent travail, complétant l'étude précédente, contient la description de la fin du spectre ultra-violet; elle s'étend jusqu'à une limite qu'on n'avait pas encore atteinte jusqu'ici, et cette limite, indépendante des appareils d'observation, paraît due exclusivement au pouvoir absorbant de notre atmosphère (2).

(1) Voir *Annales de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. III, p. 421.

(2) La découverte de nouveaux procédés photographiques plus sensibles reculerait évidemment cette limite, mais la variation serait probablement très faible eu égard à la rapidité de la progression des coefficients d'absorption de l'atmosphère pour les radiations de réfrangibilité croissante (voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVIII, p. 1287).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La méthode d'observation ne diffère pas, en principe, de celle que j'ai employée dans la première Partie de ce travail; les modifications que j'ai été conduit à y introduire sont une conséquence des difficultés spéciales qu'on rencontre dans l'observation de ces radiations très réfrangibles, difficultés que je vais résumer brièvement.

DIFFICULTÉS QU'ON RENCONTRE DANS L'OBSERVATION DES RADIATIONS SOLAIRES TRÈS RÉFRANGIBLES.

1° Difficultés relatives aux appareils d'observation. — Il est évident d'abord qu'on doit, pour la construction de la partie optique des appareils, rejeter les substances absorbantes, telles que le verre; aussi, à l'exemple des physiciens qui ont étudié les premiers les radiations très réfrangibles du Soleil, ai-je adopté le quartz et le spath d'Islande pour former les objectifs et le prisme, cristaux dont la transparence est très parfaite dans l'étendue de réfrangibilité nécessaire aux observations (1).

Quant aux réseaux, généralement tracés sur verre, on ne peut les employer par transparence, puisqu'ils sont complètement opaques pour les radiations très réfrangibles; il faut utiliser les spectres diffractés par réflexion, c'est-à-dire les images accompagnant le faisceau réfléchi sur la face striée du réseau; les spectres ainsi diffractés ont une intensité assez faible, mais ils ne paraissent aucunement affectés par le pouvoir absorbant du milieu sur lequel les traits sont gravés.

La nature du miroir destiné à renvoyer la lumière du Soleil à l'appareil d'observation n'est pas indifférente. On est accoutumé à employer des miroirs de verre argenté qui réfléchissent une si grande proportion de rayons visibles. Ces miroirs sont très mauvais pour l'étude des radiations très réfrangibles, ainsi que l'a indiqué M. Stokes. En effet, vers une certaine réfrangibilité, la surface d'argent poli ne réfléchit qu'une proportion très faible de la radiation incidente, à peu près celle que réfléchirait une surface vitreuse, comme si l'argent per-

(1) J'ai été amené, dans le courant de ces recherches, à découvrir plusieurs autres substances dont la transparence ultra-violette est également très complète : le *spath fluor* incolore de Suisse, l'*alun potassique* et l'*alun ammoniacal*. Ces substances peuvent rendre de très grands services dans ce genre d'études, ainsi que je l'ai montré récemment (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVIII, p. 1289).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

dait son éclat métallique pour devenir transparent (1). On doit donc employer le verre platiné, le métal des miroirs et mieux encore un prisme à réflexion totale en quartz; une lame de quartz étamée par du mercure bien pur contenu dans une cuve convenable formerait également un excellent miroir.

2° DIFFICULTÉS PROPRES AUX RADIATIONS SOLAIRES. — La plus grande difficulté qu'on rencontre dans l'étude des radiations solaires très réfrangibles, c'est le défaut d'intensité. L'emploi des appareils de quartz et de spath d'Islande donne, il est vrai, une extension notable au spectre ultra-violet, et un éclat beaucoup plus considérable aux régions que les spectroscopes munis d'objectifs de verre ne laissent observer qu'avec difficulté; mais, dès qu'on parvient à l'extrémité la plus réfrangible du spectre, l'insuffisance d'éclat devient très gênante.

C'est ainsi que M. Mascart a été obligé, dans son étude sur le spectre solaire ultra-violet, d'élargir de plus en plus la fente de son spectroscope pour obtenir les images photographiques des raies les plus réfrangibles, au grand détriment de la netteté des images.

Si le défaut d'éclat est gênant pour l'observation spectrale à l'aide d'un prisme, il l'est, à plus forte raison, pour l'observation des spectres de diffraction, qui donnent encore moins d'intensité que les prismes, à cause de la multiplicité des spectres; aussi M. Mascart, dans l'étude précitée, n'a-t-il pas pu dépasser la raie R comme détermination des longueurs d'onde des raies du spectre solaire ultra-violet. Je discuterai plus loin le dispositif qu'il a employé et montrerai le perfectionnement qui m'a permis d'étendre les clichés photographiques obtenus avec le prisme et les réseaux jusqu'à l'extrême limite observable.

3° DIFFICULTÉ PROVENANT DE L'ATMOSPHÈRE TERRESTRE. — Une difficulté inattendue, mais dont j'ai reconnu la cause dès les premiers essais, est la variabilité de la position de la limite du spectre avec la hauteur du Soleil; c'est aux environs de midi que le spectre est le plus

(1) Par des expériences directes, dans lesquelles j'étudiais le pouvoir réfléchissant de divers métaux, j'ai constaté la réalité de cette manière de voir : une couche d'argent déposée par les procédés ordinaires sur une lame de quartz et présentant une épaisseur assez grande pour arrêter totalement la lumière du Soleil est assez transparente pour permettre d'observer par fluorescence des radiations voisines de $\lambda = 270$, obtenues avec l'étincelle d'induction (électrodes d'étain).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

étendu et à l'époque du solstice d'été. Je reviendrai plus loin sur cette particularité, qui est causée par l'absorption atmosphérique.

4° Difficultés provenant de l'aspect des groupes de raies. — La constitution même du spectre solaire ultra-violet apporte une difficulté spéciale lorsqu'on cherche à déterminer les longueurs d'onde des raies sombres : je veux parler de la disposition des groupes. Les groupes de raies sombres sont formés presque toujours de raies multiples très serrées, analogues au groupe G de la région visible du spectre; on ne trouve, pour ainsi dire, parmi les groupes principaux, aucune raie isolée, simple ou formée de composantes facilement résolubles, comme les raies C, D, *b*, F du spectre lumineux. La confusion augmente encore lorsqu'on observe avec les réseaux, dont le pouvoir dispersif, comparé à celui des prismes, décroît avec la réfrangibilité. En effet, la dispersion des réseaux croît proportionnellement à la longueur d'onde λ, tandis que celle des prismes varie proportionnellement à l'inverse du carré $\frac{1}{\lambda^2}$; il en résulte que pour les courtes longueurs d'onde le rapport des deux dispersions est λ^3, et décroît avec rapidité.

Marche suivie pour les déterminations numériques. — Cette difficulté, inhérente à la constitution même du spectre ultra-violet, rend un peu confus les clichés des spectres des réseaux, dont le *pouvoir de définition* est inférieur à celui des prismes (1); aussi ai-je été amené à modifier la manière de procéder adoptée dans la première Partie de ces recherches pour la détermination des longueurs d'onde de toutes les raies. Au lieu de prendre comme base des déterminations les clichés de diffraction et de construire la charpente du spectre avec un assez grand nombre de raies, dont les longueurs d'onde étaient mesurées directement (*voir* p. 432, *loc. cit.*), sauf à compléter les détails d'après les clichés d'un spectre prismatique, j'ai franchement adopté la marche inverse; j'ai pris comme base des déterminations numériques un dessin du spectre prismatique à grande échelle. Les raies étaient classées suivant leur déviation minimum à l'échelle de $0^m,010$ pour 1′ d'angle; puis j'ai déterminé avec beaucoup de soin les longueurs d'onde des raies sombres les mieux

(1) Ces lignes étaient écrites avant que j'eusse reçu de M. Rutherfurd, de New-York, un magnifique réseau sur verre dont le pouvoir définissant ne le cède en rien aux meilleurs prismes.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

définies à l'aide d'épreuves du spectre de diffraction. Ces raies, en petit nombre, ont suffi, à l'aide d'une formule d'interpolation convenablement choisie et discutée, pour définir les longueurs d'onde de toutes les raies du spectre prismatique.

On verra bientôt le détail de ces opérations et l'artifice employé pour pousser les déterminations jusqu'à l'extrême limite des raies observables.

DÉTAIL DES OPÉRATIONS.

Appareils employés. — Les observations photographiques des spectres prismatiques ont été faites pour la plupart avec un goniomètre de petites dimensions : il se compose d'un collimateur fixe et d'une lunette mobile sur un cercle divisé de $0^m,125$ de diamètre, donnant les 10″ et par estime les 5″; il est muni d'une plate-forme centrale mobile portant un cercle auxiliaire divisé en degrés. Cet instrument a été construit par MM. Brunner, spécialement en vue de mes expériences; je le désignerai dans la suite sous le nom de *petit goniomètre;* il porte des objectifs simples de quartz ou des objectifs achromatiques quartz-spath d'Islande, dont il sera question plus loin.

Le tube de tirage de la lunette et celui du collimateur sont divisés en millimètres, de sorte qu'on peut apprécier, à l'aide d'un index fixe, les variations de tirage à l'approximation de $\frac{1}{10}$ de millimètre; cette addition est nécessaire pour les réglages ultérieurs.

Le prisme employé est un prisme de spath d'Islande sorti des ateliers de M. Duboscq; il présente un angle réfringent de 60°; la bissectrice de la section droite est perpendiculaire à l'axe optique. Ce n'est pas la coupe à laquelle je donnerais la préférence (1); mais, ayant trouvé dans ce prisme une perfection très satisfaisante de la forme plane et du poli des faces, je n'ai pas hésité à l'adopter, en raison de sa perfection et de sa pureté; je n'ai d'ailleurs utilisé que le spectre ordinaire, c'est-à-dire celui qui présente la plus grande dispersion.

(1) La meilleure coupe est celle pour laquelle les faces et les arêtes sont parallèles à l'axe optique du cristal : l'avantage principal de cette coupe est de conserver aux arêtes réfringentes un angle constant indépendant de la température; le plan de la section droite du prisme étant, en effet, perpendiculaire à l'axe, la dilatation du cristal est la même dans toutes les directions de ce plan; il n'en serait pas de même pour toute autre direction.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Les observations photographiques des spectres de diffraction ont été faites, en général, avec le goniomètre Brunner employé dans mon premier travail et décrit dans un autre Mémoire (¹); il est de dimensions à peu près doubles (vernier donnant directement les 3″, estime 1″,5), ce qui a permis d'obtenir sensiblement la même approximation dans les mesures des spectres de diffraction et dans celles des spectres prismatiques. Cet instrument, que je désignerai sous le nom de *grand goniomètre*, a été utilisé également pour obtenir des portions de spectre prismatique donnant des détails plus délicats dans les cas douteux où les clichés du petit goniomètre paraissaient confus ou insuffisants.

Les réseaux employés pour les mesures définitives ont été au nombre de deux : l'un de MM. Brunner, au $\frac{1}{100}$ de millimètre; l'autre de Nobert (1801 traits), dont il a été question dans la première Partie de ce Mémoire (p. 428, *loc. cit.*).

Pour l'obtention des clichés des spectres de diffraction, la lunette et le collimateur étaient munis d'objectifs achromatiques quartz et spath d'Islande, de $0^{m},45$ de foyer environ, qui seront décrits plus loin.

Manipulation photographique. — Toutes les déterminations ont été faites par la Photographie, comme dans la première Partie de ce travail; les clichés ont été obtenus au collodion humide, à l'aide d'un petit porte-plaque mobile qu'on substitue à l'oculaire de la lunette (voir *loc. cit.*, p. 423). J'ai obtenu une constance plus satisfaisante qu'à cette époque en composant moi-même mon collodion :

Alcool	40^{cc}
Éther	60^{cc}
Coton-poudre	1^{gr}
Iodure de cadmium	1^{gr}
Bromure de cadmium	$0^{gr},25$

On mélange le tout sans précaution spéciale, et l'on agite pour faciliter la dissolution. Ce collodion peut servir immédiatement et se conserve plusieurs mois et même plusieurs années sans altération notable; il jaunit quelquefois légèrement, mais la sensibilité reste très approximativement la même.

(¹) *Annales de l'École Normale supérieure*, 2ᵉ série, t. III, p. 15.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Les clichés se font sur de petites glaces de $0^m,020$ sur $0^m,040$, nettoyées au tripoli avec un tampon de coton cardé imbibé d'une teinture alcoolique à 4 pour 100 d'iode; on sèche avec un autre tampon saupoudré de tripoli sec.

Le bain d'argent contient 7 à 8 pour 100 de nitrate d'argent.

Le révélateur se compose de :

Eau distillée	1000^{cc}
Sulfate de fer	40^{gr}
Alcool	30^{cc}
Acide acétique	30^{cc}

Pour renforcer l'épreuve, on ajoute quelques gouttes de bain d'argent à 2 pour 100, ou, plus simplement, on projette une goutte du bain à 7 pour 100 sur le cliché préalablement couvert de révélateur.

On fixe à l'hyposulfite de soude ou au cyanure de potassium. On vernit avec de l'eau gommée, aussitôt après le dernier lavage.

Le procédé au collodion humide a sur tous les autres procédés indiqués jusqu'ici l'avantage de la rapidité d'exécution; la préparation de la glace sensible exige à peine une minute, et le développement avec renforcement ne dépasse pas deux minutes. Or, il importe presque toujours de connaître rapidement le résultat d'une épreuve avant d'en commencer une autre.

PRÉCAUTIONS A PRENDRE POUR OBTENIR LE MAXIMUM D'ÉCLAT DES SPECTRES ET DE NETTETÉ DES RAIES.

Les principaux perfectionnements que j'ai introduits dans les dispositifs adoptés par les physiciens qui ont décrit le spectre ultra-violet sont les suivants.

Augmentation de l'intensité des radiations reçues au foyer du spectroscope.

1° Miroir de l'héliostat. — Ainsi qu'on l'a vu plus haut, j'ai substitué un prisme à réflexion totale en quartz au miroir argenté ou métallique de l'héliostat; on évite ainsi toute absorption élective des radiations solaires, que produisent certains métaux ou leurs oxydes. Ce

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

prisme de quartz peut être taillé de diverses manières pour ne donner, malgré la double réfraction du quartz, qu'un seul faisceau réfléchi : arêtes parallèles à l'axe optique, face réfléchissante perpendiculaire ou parallèle à l'axe.

Il serait théoriquement préférable de supprimer l'héliostat et de diriger par un mouvement parallactique le collimateur du spectroscope dans la direction du Soleil; mais il faudrait des dispositions spéciales pour l'appareil et le laboratoire, dispositions que je ne suis pas encore parvenu à rendre aussi pratiques que celles généralement en usage.

2° LENTILLE COLLECTRICE. — Une lentille collectrice de quartz projette l'image du Soleil sur la fente du collimateur; cette disposition est bien connue des physiciens, mais elle n'est pas toujours employée. On se contente souvent, ainsi que le fait M. Mascart dans son travail sur le spectre solaire ultra-violet (1), de diriger le faisceau de l'héliostat parallèlement à l'axe du collimateur, de façon que le milieu du faisceau tombe sur la fente. On obtient, en général, pour l'observation du spectre visible, un éclat plus que suffisant et une netteté parfaite des raies sombres. L'addition d'une lentille collectrice, conseillée par les uns, a été quelquefois critiquée par d'autres comme inutile ou nuisible. L'accusation d'inutilité n'a pas besoin d'être longuement réfutée; un calcul facile montre que la quantité de lumière introduite dans le collimateur avec ou sans lentille collectrice est, à hauteur et largeur égales de fente éclairée, sensiblement dans le rapport de l'ouverture angulaire utile de la lentille collectrice à l'ouverture angulaire du Soleil (2). Numériquement, le rapport peut atteindre 80 à 100; il n'y a donc aucune hésitation à garder sur l'utilité de ce dispositif au point de vue de l'intensité des images.

---

(1) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. Ier, 1re série.

(2) Considérons un petit élément plan de l'ouverture de la fente : cet élément reçoit du Soleil, supposé dégagé de tout obstacle, une quantité de radiation, proportionnelle à l'angle du cône sous-tendu par le Soleil; l'angle au sommet de ce cône est d'environ 0°,5. Dans le cas où cet élément reçoit ces radiations par l'intermédiaire d'une lentille, la quantité reçue est encore proportionnelle à l'angle solide sous-tendu par la partie utile de la lentille qui produit l'image appartenant à l'élément, car on sait que l'éclat intrinsèque d'un objet vu à travers une lentille est le même que celui de l'objet, abstraction faite du défaut de transparence. Or la partie utile de la lentille est la partie découpée par le cône prolongé qui va du point considéré de la fente aux diaphragmes intérieurs du collimateur. L'angle au sommet de ce cône peut

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

L'effet nuisible d'une lentille collectrice est souvent réel; on l'observe, avec certains spectroscopes, en étudiant par vision directe les régions sombres du spectre, comme l'extrême violet, ou bien l'ultra-violet, par les procédés photographiques; des images très nettes, obtenues sans lentille collectrice, deviennent immédiatement estompées lorsque l'on concentre la lumière solaire sur la fente. On peut, il est vrai, par un essai méthodique dans le changement du foyer, améliorer légèrement l'image spectrale, mais on est encore loin d'atteindre la netteté primitive.

L'explication de cette anomalie est facile : lorsque l'on éclaire la fente du collimateur par le faisceau direct de l'héliostat, il n'entre dans l'appareil qu'un faisceau extrêmement mince et ayant une ouverture angulaire au plus égale à celle du Soleil, c'est-à-dire $0^{o},5$; bien que la diffraction épanouisse plus ou moins le faisceau dans un plan normal à la fente, il est évident que l'on n'utilise en réalité qu'une très petite partie de la surface de l'objectif du collimateur, du prisme et de l'objectif de la lunette. Dans une aussi petite étendue, les surfaces réfringentes des lentilles et du prisme sont suffisamment aplanétiques pour donner de bonnes images de la fente, et par conséquent des raies bien définies (1).

Lorsque l'on emploie une lentille collectrice, la totalité ou au moins la majeure partie de la surface des objectifs est couverte de lumière, de sorte que tous les points des surfaces réfringentes concourent à la production de l'image focale. Pour que l'image conserve la même netteté que précédemment, il faut que ces surfaces soient très parfaites au point de vue de l'aplanétisme, condition qui n'est pas toujours remplie dans les instruments ordinaires des laboratoires. L'amélioration de

---

atteindre 4° à 5° environ (l'ouverture de $\frac{1}{10}$, qui est l'ouverture maximum, donne exactement 5°42'). Or la quantité de radiations reçue dans les deux cas est dans le rapport du carré des angles au sommet ou environ $\left(\frac{5}{\frac{1}{2}}\right)^2 = 10^2 = 100$. Si l'on tient compte des pertes par réflexion, par absorption, par les diaphragmes accidentels, on peut encore admettre que dans des cas très défavorables le rapport est au moins 50.

(1) L'aplanétisme des surfaces réfringentes destinées à former l'image d'une ligne dont les extrémités n'ont pas d'utilité spéciale n'a pas besoin d'être aussi rigoureux que pour la formation de l'image d'un point; un peu d'astigmatisme produit par les faces du prisme parallèlement aux arêtes n'aurait qu'un très petit inconvénient.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

l'image par une variation méthodique du changement de foyer provient de ce que l'on arrive au plan d'aberration minimum de l'ensemble du système optique.

En résumé, l'emploi d'une lentille collectrice accroît, dans des proportions considérables, l'intensité des radiations incidentes et permet de donner une grande finesse à la fente, mais ne conserve la netteté des images que si l'aplanétisme des surfaces réfringentes est suffisamment parfait.

L'analyse précédente conduit à un moyen pratique pour reconnaître si cette condition est remplie : il suffit d'observer l'image focale d'une raie brillante, telle que celle de la lumière de la soude, en couvrant la surface de l'objectif du collimateur d'un carton percé d'un trou circulaire de $0^m,004$ à $0^m,005$ de diamètre. L'image affaiblie qu'on observe ainsi doit conserver le même éclat, la même netteté, la même position focale par rapport au fil du réticule de la lunette, quelle que soit la position du trou circulaire à la surface de l'objectif. Ce mode d'exploration montre presque toujours des défauts de taille le long des arêtes des prismes; on couvre les parties défectueuses avec des bandes de papier noirci, et l'on obtient une amélioration notable des images focales.

3° Courbures des objectifs. — L'accroissement utile d'intensité étant lié à la perfection des images, il était nécessaire de rendre minimum l'aberration sphérique des objectifs, d'autant qu'on a intérêt à leur donner une ouverture angulaire aussi grande que possible ($\frac{1}{10}$ environ) pour augmenter l'intensité de l'image focale.

A cet effet, j'ai adopté des objectifs simples en quartz taillés perpendiculairement à l'axe; le quartz se recommande en premier lieu par sa transparence pour les radiations ultra-violettes et en second lieu par sa dureté, qui permet une perfection extrême dans la taille et le poli de ses faces. Par surcroît de précaution, pour éviter diverses aberrations secondaires, les deux lentilles de quartz ont été choisies l'une lévogyre, l'autre dextrogyre, et de même épaisseur.

Les formules qui donnent les rayons de courbure R, R′ d'une lentille infiniment mince, présentant l'aberration longitudinale minimum au foyer des rayons parallèles, sont les suivantes :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{F}\,\frac{n(2n+1)}{(n-1)(2n+4)}, \qquad \frac{1}{R'} = \frac{1}{F}\,\frac{2n^2-n-4}{(n-1)(2n+4)}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

J'ai calculé d'abord les deux rayons R et R′ des lentilles en substituant $n = 1,57$ (raie O), d'où l'on conclut $R = 0,626F$, $R' = -6,35F$.

Comme on le voit, le rayon de courbure de la face tournée du côté du foyer est dix fois plus grand que l'autre; les grands rayons de courbure étant peu employés par les opticiens, à cause de certaines difficultés pratiques, j'ai substitué à la face la moins courbe une face plane pour laquelle les opticiens sont mieux outillés et qu'ils réussissent très bien, de sorte que finalement j'ai employé des objectifs plan-convexes calculés d'après la formule $R = (n-1)F$.

Quant à l'aberration sphérique, elle n'est pas sensiblement modifiée par cette altération des courbures, parce qu'on est dans le voisinage d'un minimum; on peut même dire qu'il y a plus de chance de l'avoir amoindrie en prenant des surfaces faciles à tailler qu'en adoptant rigoureusement les courbures théoriques, qu'on risquerait de réaliser imparfaitement.

On pourrait croire que cette précaution dans le choix des courbures est inutile et qu'en prenant de simples lentilles biconvexes on obtiendrait à peu près la même perfection dans les images. Il n'en est rien, et l'on peut vérifier avec les lentilles plan-convexes, définies plus haut, que la disposition des courbures est loin d'être indifférente; à cet effet, après avoir observé avec la lunette l'image focale de la fente du collimateur éclairée par une lumière monochromatique, les objectifs étant dans leur position normale (la face plane en dedans), et constaté la perfection de l'image, si l'on vient à retourner les lentilles dans leur barillet, c'est-à-dire à tourner la face courbe vers l'intérieur, l'image de la fente devient baveuse, quelle que soit l'accommodation focale.

On a ainsi la mesure de l'aberration que donneraient deux lentilles biconvexes à courbures égales, qu'on pourrait considérer comme la réunion de deux lentilles plan-convexes. Grâce à la réduction de l'aberration sphérique, j'ai pu donner aux objectifs l'ouverture angulaire $\frac{1}{10}$, et par suite obtenir une intensité focale considérable (puisque l'éclat grandit comme le carré de l'ouverture) sans compromettre la netteté des images.

4° Faces du prisme. — On ne doit admettre que des prismes présentant des faces suffisamment parfaites, sous peine de n'obtenir aucune

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

netteté dans les images. L'examen optique des surfaces du prisme s'impose d'ailleurs de lui-même dans la détermination de son angle réfringent, lorsqu'on observe l'image de la fente réfléchie successivement par les deux faces et qu'on cherche à la mettre au point. Voici la série des opérations qu'on est amené à faire. Après avoir déterminé le tirage du collimateur et de la lunette correspondant aux rayons parallèles d'une source monochromatique (la méthode sera décrite plus loin, dans l'Appendice I), si l'on observe avec la lunette l'image de la fente du collimateur réfléchie sur chaque face du prisme et qu'on cherche à obtenir la plus grande netteté, on reconnaitra qu'il faut presque toujours allonger le tirage de la lunette lorsque le prisme est en spath d'Islande; les rayons réfléchis sont donc divergents au lieu d'être parallèles comme à l'incidence. Cela tient à ce que les surfaces de spath sont toujours légèrement convexes, défaut qui résulte du procédé employé par l'opticien pour le poli final (polissage au drap). Avec certains prismes on n'obtient pour aucun tirage une bonne image réfléchie de la fente : lorsqu'il en est ainsi, le prisme doit être rejeté ou du moins rendu à l'opticien pour être travaillé à nouveau.

La courbure régulière des faces, lorsqu'elle est faible (on la mesure précisément par le dépointement de l'image réfléchie), n'entraîne pas d'aberrations gênantes pour les images réfléchies ou réfractées de la fente; il en serait autrement si l'on devait produire par réflexion ou réfraction l'image d'un point. On peut donc se contenter d'un prisme présentant cette légère imperfection.

Lors donc qu'on a constaté que les images réfléchies de la fente sont bonnes et ne produisent qu'un faible dépointement de la lunette, on achève de régler le prisme et l'on observe l'image réfractée de la fente, toujours éclairée par une lumière monochromatique. Le dépointement est alors de sens inverse, ce qui signifie que les rayons réfractés sont légèrement convergents; cela provient de ce que les faces qui jouent le rôle de miroirs convexes par réflexion produisent par réfraction de véritables lentilles convexes qui rendent le faisceau convergent. Il ne faut donc pas s'étonner de voir une notable différence de tirage entre les images réfléchies et réfractées; c'est une conséquence de la forme des faces. On peut d'ailleurs vérifier, à l'aide des formules qui seront données dans l'Appendice I, que les dépointements satisfont à

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

une relation nécessaire, ce qui permet de se rendre un compte encore plus précis de la grandeur et de l'effet des courbures des faces du prisme.

J'ai eu l'occasion d'observer ainsi un grand nombre de prismes de spath d'Islande, de spath fluor, de verre et de quartz taillés par d'habiles opticiens : la grandeur de la convexité des faces, à dimensions égales, était presque toujours en rapport avec la dureté de la matière. C'est le quartz qui a donné les faces les plus voisines du plan parfait.

Voici pour le prisme de spath d'Islande, dont j'ai fait usage, les valeurs des dépointements observés par réflexion ou réfraction; l'observation a été faite avec le *petit goniomètre* muni d'objectifs achromatiques crown et flint-glass de 24^c de distance focale principale; l'oculaire était remplacé par un microscope composé grossissant 15 fois environ pour obtenir plus de précision dans la mise au point :

Tirage de la lunette (origine arbitraire, division en centimètres).
Lumière jaune de la soude.

		^{c}
Rayons parallèles directs		1,46
»	réfléchis sur la face M sous l'incidence de 60°...	1,76
»	réfléchis sur la face N sous l'incidence de 60° ..	1,75
»	réfractés au minim. de déviation (rayon ord.)...	1,11
»	réfractés au minim. de déviation (rayon extraord.).	1,30

Ces données seront utilisées dans l'Appendice I pour la vérification des relations qu'elles présentent entre elles et le calcul de la courbure des faces.

CONSTRUCTION DU DESSIN DU SPECTRE PRISMATIQUE.

Opérations préliminaires.

1° RÉGLAGE DU GONIOMÈTRE ET DU PRISME. — Ces opérations seront décrites dans l'Appendice I, à la fin du Mémoire.

2° TABLE DES MISES AU POINT DU COLLIMATEUR ET DE LA LUNETTE. — Lorsqu'on emploie un goniomètre dont les objectifs sont achromatiques, les variations de mise au point de la lunette d'observation pour les radiations de différentes réfrangibilités sont très faibles; on les détermine par la méthode exposée dans la première Partie de ce Mémoire (p. 424).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Mais, lorsqu'on adopte des lentilles non achromatiques, les variations de tirage sont considérables et doivent être l'objet d'une étude spéciale que l'on peut ainsi résumer.

On détermine d'abord le tirage du collimateur qui donne des rayons parallèles d'une réfrangibilité donnée; il est commode de partir d'une radiation monochromatique visible, telle que la lumière de la soude. On fait de même pour la lunette, c'est-à-dire qu'on règle le réticule au foyer principal de cette radiation (*voir* l'Appendice I pour cette opération, qui fait partie du réglage général de l'appareil).

L'interposition du prisme, dont les faces sont presque toujours légèrement convexes, empêche que le foyer des rayons parallèles du collimateur donne, après réfraction, l'image focale de la fente au foyer principal de la lunette. Il y a un petit dépointement de $0^m,001$ à $0^m,002$; on le mesure exactement et on le répartit moitié sur le tirage du collimateur, moitié sur celui de la lunette. De cette manière, la marche des rayons est symétrique; les faisceaux sont parallèles à l'intérieur du prisme et légèrement convergents à l'extérieur.

Le dépointement varie un peu avec l'incidence; mais, comme on effectue toujours les mesures au minimum de déviation, le dépointement est bien défini et reste le même, quelle que soit la face d'incidence, c'est-à-dire lorsque la déviation des rayons s'effectue à droite ou à gauche, en vertu de la symétrie de la marche des rayons.

On observe ensuite une autre radiation au minimum de déviation du prisme, voisine comme réfrangibilité, et on lit le nouveau tirage de la lunette qui amène l'image du collimateur dans le plan du réticule; on partage encore la variation de tirage en deux parties égales, que l'on attribue moitié au collimateur, moitié à la lunette, et ainsi de suite de proche en proche pour les radiations visibles.

On a de la sorte une série de valeurs correspondantes :

1° Déviation du prisme, ou graduation du cercle qui la mesure;

2° Tirage du collimateur;

3° Tirage de la lunette.

On peut, avec ces données, construire graphiquement deux courbes ayant pour abscisses communes les lectures du cercle et pour ordonnées les tirages de la lunette et du collimateur.

Les points de ces deux courbes ainsi tracées ont l'inconvénient de

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

dépendre les uns des autres, puisqu'ils se déduisent de proche en proche des tirages précédents; on aurait donc avantage à éviter cette corrélation. On peut obtenir ce résultat d'une manière très simple et faire concourir toutes les observations à la détermination des éléments cherchés, à la condition d'opérer, non pas sur deux courbes, mais sur une seule, ayant pour ordonnée la *somme des tirages conjugués*. On va voir en effet que, dans les circonstances ordinaires des observations, où les objectifs de la lunette et du collimateur sont identiques, ce n'est pas la valeur absolue de chaque tirage qu'il importe de considérer, mais la somme des deux tirages correspondants. C'est ce qui résulte de la proposition suivante :

Lorsque les foyers conjugués du collimateur et de la lunette sont voisins des plans focaux principaux pour une radiation de réfrangibilité donnée, la somme des tirages conjugués correspondant à une même radiation est sensiblement constante et caractéristique de la réfrangibilité de cette radiation.

Soit F la distance focale principale du collimateur et de la lunette; on a, d'après la formule élémentaire des lentilles minces,

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{c'} = \frac{1}{F}, \quad \frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{1}{F},$$

c étant la distance de la fente à l'objectif du collimateur et l celle du plan focal conjugué de la fente à l'objectif de la lunette. Si l'on néglige la distance optique des deux objectifs devant c' et l', distances conjuguées de c et l (c' et l' sont extrêmement grands, puisque c et l sont voisins de F), on a sensiblement $c' = -l'$, d'où

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{l} = \frac{1}{F},$$

Une variation très petite dc dans le tirage du collimateur entraîne une variation correspondante dl dans le tirage de la lunette, liée à la première par la relation

$$\frac{dc}{c^2} + \frac{dl}{l^2} = 0.$$

Si l'on est dans le voisinage des foyers principaux, c et l sont très

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

voisins de F et de L, supposés sensiblement égaux (¹), d'où

$$dc + dl = 0.$$

Il en résulte que le rapprochement ou l'éloignement de la fente du collimateur entraine un déplacement égal et de sens inverse pour le foyer conjugué de la lunette; donc la somme des lectures des tirages de la lunette et du collimateur est constante pour une radiation donnée. Cette somme est en outre caractéristique de la réfrangibilité de cette radiation, car, si l'on considère les lectures qui correspondent aux foyers principaux, ces lectures sont caractéristiques de cette réfrangibilité; comme la somme algébrique des variations des tirages conjugués est nulle, la somme des lectures des tirages est précisément égale à la somme des lectures correspondant aux foyers principaux.

Voici donc comment on doit opérer. Lorsque, suivant la marche précédemment décrite, on observe une radiation, on fait la somme des lectures des tirages de la lunette et du collimateur : *c'est la somme des tirages conjugués*. Il n'est pas besoin, d'après la proposition précédente, que la fente du collimateur soit exactement au foyer principal de la radiation considérée pour avoir une détermination valable : il suffit qu'elle n'en soit pas trop éloignée, si bien qu'on peut la laisser fixe, au moins comme première approximation, sur une étendue notable de réfrangibilité. On répète la même opération de proche en proche, et l'on a une série de positions conjuguées correspondant à des réfrangibilités ou déviations mesurées.

Pour faire concourir toutes les observations à la construction d'une courbe ou d'un Tableau donnant d'une manière continue les tirages en fonction des déviations, il suffit de porter en ordonnées les *sommes* des tirages conjugués, en prenant comme abscisses les déviations minima correspondantes. On obtient ainsi une série de points à travers lesquels on fait passer un trait continu s'en écartant le moins possible. On mesure la différence des ordonnées de la courbe avec l'ordonnée correspon-

---

(¹) Si les deux distances focales principales F et L n'étaient pas égales, on aurait

$$\frac{dc}{F^2} + \frac{dl}{L^2} = 0;$$

la règle prendrait un énoncé moins simple, mais serait cependant encore facile à utiliser.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

dant à la raie D, prise comme point de départ du réglage; la moitié de cette différence donne la quantité dont il faut diminuer les tirages du collimateur et de la lunette, supposés réglés avec la lumière de la soude.

On construit ainsi un Tableau procédant, par exemple, par demi-degrés de déviation croissante, sur lequel on inscrit à côté de chaque déviation (ou mieux de la lecture correspondante du limbe du goniomètre) les deux nombres exprimant les *tirages conjugués symétriques du collimateur et de la lunette*.

On a supposé implicitement jusqu'ici qu'on opérait sur des radiations visibles; quant aux radiations invisibles de la partie ultra-violette, on peut les traiter comme les radiations visibles, grâce à l'oculaire fluorescent imaginé par M. Baille et amené à une grande perfection par M. Soret. L'oculaire perfectionné est simplement une lame de verre d'urane, d'environ $0^m,001$ d'épaisseur, qu'on regarde obliquement dans le plan des raies à observer avec un oculaire ordinaire (1). Deux traits en croix, tracés au diamant sur la surface exposée aux radiations ultra-violettes, servent de réticule et définissent le plan de visée de l'oculaire. Chacun peut adapter aisément un oculaire de cette sorte à la lunette de son goniomètre; la seule précaution à prendre est de protéger la lame de verre d'urane contre tous les reflets intérieurs à l'aide d'un diaphragme placé à $0^m,015$ ou $0^m,020$ en avant, diaphragme dont l'ouverture laisse seulement passer le faisceau convergent à observer.

Comme les rayons violets sont à la fois visibles à l'oculaire ordinaire et à l'oculaire fluorescent, on effectue aisément le *raccordement* de la portion visible du spectre et de la portion ultra-violette, en suivant la marche indiquée dans la première Partie de ce travail (p. 424). On détermine ainsi aisément la distance du réticule au plan de la lame fluorescente, c'est-à-dire l'épaisseur optique de l'oculaire fluorescent, comme l'épaisseur optique du porte-plaque dans le cas où l'on opère par les clichés photographiques.

On ne saurait trop recommander l'usage de l'oculaire fluorescent pour simplifier les essais méthodiques, qu'on effectue en quelque sorte *en aveugle* avec les procédés photographiques. La précision, il est vrai, n'est pas aussi grande qu'avec la Photographie; on n'obtient donc pas

1) *Voir* la description de cet oculaire (*Journal de Physique*, , t. III, p. 255).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

les déterminations définitives, mais on obtient tous les éléments dont on a besoin avec une exactitude suffisante pour ne donner lieu à aucun mécompte grave dans l'emploi des clichés photographiques. On achève d'ailleurs les déterminations précises par la Photographie.

Telles sont les opérations nécessaires à la détermination de la Table des tirages conjugués du spectroscope; elles paraîtront un peu minutieuses au lecteur non accoutumé à ces sortes de recherches, mais elles sont faciles et n'exigent qu'un peu de patience. Au commencement d'une série d'études de ce genre, il importe de les exécuter avec le plus grand soin, pour assurer la régularité des opérations ultérieures; si, pour abréger, on pensait devoir se dispenser de ces déterminations préliminaires, on ne tarderait pas à reconnaître, à la suite de mécomptes rebutants, que le plus court est encore de suivre la marche recommandée ici.

3° MESURE PRÉCISE DE LA DÉVIATION DES RAIES D'APRÈS LES CLICHÉS. MÉTHODE DES CLICHÉS DOUBLES. — La méthode a été déjà décrite sommairement dans la première Partie de ce travail (p. 426, *loc. cit.*); elle consiste à obtenir sur le même cliché, l'une au-dessus de l'autre, les images des spectres déviés à droite et à gauche. Mais il faut, pour qu'un semblable cliché puisse donner toute la précision dont il est susceptible, que deux conditions soient remplies :

1° Le prisme doit être au minimum de déviation dans les deux positions où il est utilisé;

2° La radiation qui est au minimum de déviation doit être sensiblement au milieu du champ.

Ces deux conditions sont relativement très faciles à remplir, grâce à l'adjonction que j'ai indiquée d'une graduation en degrés sur le pourtour de la plate-forme mobile qui porte le prisme; un index fixe permet d'ailleurs de mesurer l'angle de rotation du prisme. Voici comment on opère.

On commence par observer une raie visible, la raie D par exemple, et par une rotation convenable du prisme on l'amène au minimum de déviation dans le milieu du champ de la lunette; on lit la graduation du cercle de la plate-forme. On répète plusieurs fois l'opération et l'on adopte la moyenne des lectures, qui servira d'origine au calcul des positions du prisme pour toutes les autres raies.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

L'approximation du $\frac{1}{10}$ de degré suffit amplement, cette erreur correspondant à moins de 1″ d'angle dans la définition de la déviation minimum (*voir* l'Appendice II).

On lit également l'azimut de la lunette, qui mesure la déviation de la raie observée; l'approximation de 1′ est bien suffisante, car cette donnée ne sert qu'à définir approximativement la position de la lunette.

On répète la même série d'observations en plaçant le prisme dans la position qui donne la déviation minimum dans l'autre sens, et on lit successivement la position de la plate-forme du prisme et la position de la lunette.

Ces données suffisent pour placer, *a priori*, dans tous les cas, le prisme au minimum de déviation pour la radiation occupant le milieu du champ. Il suffit, en effet, de remarquer que la bissectrice de la section droite du prisme est également bissectrice de l'angle que font entre eux les rayons incident et émergent au minimum de déviation; la condition d'amener dans le milieu du champ un rayon au minimum de déviation se borne donc à faire tourner la plate-forme du prisme de la moitié de l'angle dont on déplace la lunette.

On calcule donc aisément une Table qui donne de degré en degré, pour la position de la lunette, la position correspondante du prisme; on la vérifie par quelques observations directes, soit dans la région visible, soit surtout dans la région ultra-violette avec l'oculaire fluorescent.

Cette Table est *indispensable* pour éviter des erreurs rebutantes que l'on ne manquerait pas de commettre dans les opérations précises, exigeant toute l'attention de l'observateur.

Cette opération préliminaire étant exécutée, si l'on veut effectuer une série de mesures de déviations absolues, on prépare un carnet d'expériences avec beaucoup de soin, afin d'y inscrire par avance :

1° La lecture du limbe qui amène la lunette à la déviation des raies que l'on veut observer (déviation à droite, par exemple);

2° Les tirages conjugués correspondants du collimateur et de la lunette;

3° La position correspondante du prisme;

Puis les mêmes éléments pour la déviation en sens inverse, car, à l'exception des tirages, tous les nombres sont différents.

Comme l'étendue angulaire du champ est de près de 1°, on procède

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

au moins par intervalles de $\frac{1}{2}$ degré, afin d'avoir des parties communes sur les clichés successifs et de se ménager des vérifications dans les mesures.

L'expérience étant ainsi préparée, on règle l'appareil d'après les données inscrites sur le carnet; la lunette étant mise en place, on couvre, à l'aide d'une petite lame de clinquant convenablement taillée, la moitié de la fente du collimateur; sur l'autre moitié, on concentre l'image solaire et l'on introduit le porte-plaque muni de sa glace sensibilisée à la place de l'oculaire. Pendant que la glace s'impressionne, on fait, avec toute la précision dont le cercle est susceptible, la lecture de l'azimut de la lunette, puis, interceptant la lumière du collimateur, on amène avec précaution la lunette ainsi que le prisme dans la position correspondant à la déviation inverse; on découvre l'autre moitié de la fente et l'on y concentre l'image solaire. La glace s'impressionne une seconde fois, et l'on fait de nouveau la lecture de l'azimut de la lunette.

Il est bon d'adopter une marche uniforme, c'est-à-dire de se servir toujours de la même partie de la fente pour les déviations de même sens.

La durée de pose varie, suivant la région du spectre que l'on étudie, depuis quelques secondes jusqu'à trois minutes, durée que l'on ne peut guère dépasser pour ces clichés doubles, sous peine de voir le collodion sécher et se recouvrir de taches pendant le développement de l'image.

On obtient ainsi un cliché présentant l'un au-dessus de l'autre deux spectres identiques, mais de sens inverses. Le milieu du champ est défini par la raie idéale dont les images seraient sur le prolongement l'une de l'autre. Ce cliché permet de déterminer avec une grande exactitude la déviation de toutes les raies qui se trouvent dans le voisinage du milieu du champ, c'est-à-dire 10′ à 12′ de chaque côté; au delà, le défaut de netteté rend les mesures moins certaines, quoique l'approximation soit toujours de l'ordre des 5″, qu'il est difficile de dépasser.

Dès que le cliché est développé, lavé et verni à la gomme, on le repère, c'est-à-dire on le marque d'un signe conventionnel correspondant au carnet d'expériences; ce signe est placé de manière à faire connaître le *haut* et le *bas* du cliché, ce qui distingue le spectre dévié à gauche de celui de droite; le bourrelet de collodion qui se forme généralement au bas du cliché empêche le plus souvent toute méprise.

Relevé micrométrique du cliché. — On porte le cliché sur le chariot

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'un micromètre à vis fixé à la platine d'un microscope grossissant environ 25 fois. La perfection des images permettrait même un grossissement supérieur. On relève les raies importantes et bien définies de l'un des spectres dans un sens déterminé, puis en sens inverse les mêmes raies dans l'autre spectre; il en résulte qu'en mettant en regard les lectures relatives à la même raie on obtient une vérification de l'exactitude des pointés, car la somme des lectures correspondant à la même raie est constante dans toute la série; cette somme représente évidemment le double de la lecture correspondant au *milieu* du cliché, par rapport auquel les deux images de la même raie sont symétriques. L'approximation est toujours d'environ $\frac{1}{200}$ de millimètre (1), ce qui donne une idée de la finesse et de la régularité des clichés.

On effectue alors pour chaque raie la différence des deux lectures, qui donne le double de la distance de cette raie au milieu du cliché; on a même le *signe* de cette distance si l'on a adopté la marche uniforme indiquée plus haut pour l'obtention et le repérage des clichés. Il suffit d'ailleurs d'avoir examiné préalablement le spectre, soit à l'oculaire fluorescent, soit sur une série convenable de clichés, pour ne pas hésiter sur le sens des déviations croissantes.

Réduction des valeurs linéaires en valeurs angulaires. — Le relevé micrométrique ne donne que des distances relatives en fonction d'une unité arbitraire dont il faut déterminer la valeur angulaire; cette valeur est d'ailleurs variable avec la longueur focale, c'est-à-dire avec le tirage de la lunette. Il importe donc de dresser une Table qui permette de faire la réduction d'une manière simple et rigoureuse. Voici comment on peut opérer.

On commence par déterminer la longueur exacte d'une distance focale correspondant à un tirage donné de la lunette, c'est-à-dire la distance comprise depuis le centre optique de la lentille (ou mieux du *point nodal* principal) jusqu'au plan de la glace dans le porte-plaque.

(1) Il est bon, pour atténuer l'erreur périodique de la vis micrométrique, de répéter les mesures en changeant l'origine d'un demi-tour de la vis; on y arrive aisément en effectuant les pointés avec un réticule sur verre formé de deux traits parallèles distants d'un intervalle correspondant à un demi-tour. Les traits sur verre valent mieux que des fils, parce qu'on peut les interrompre au milieu du champ; les pointés y gagnent en précision, parce qu'ils se font avec l'extrémité du trait qui laisse libre la raie à relever. Cette disposition des traits s'applique surtout aux clichés qui présentent des repères.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

L'approximation n'a pas besoin de dépasser $\frac{1}{10}$ et même $\frac{1}{5}$ de millimètre pour être en rapport avec les autres erreurs; on évalue donc cette distance en fonction du centimètre d'une bonne règle d'ivoire, et l'on mesure la valeur du centimètre moyen de la règle en fonction des divisions du micromètre.

Il résulte de ces évaluations qu'on connaît pour chaque tirage la valeur angulaire d'une division du micromètre, on en dresse la Table, ainsi qu'on peut le voir par l'exemple suivant :

Distance de la surface extérieure de la lentille au plan du porte-plaque, le tirage étant $0^d,00$	$23^c,73$
Distance du point nodal (1) à la surface extérieure	$-0,16$
	$23^c,57$

Le centimètre moyen de la règle d'ivoire vaut, en tours de vis du micromètre, $19^t,95$.

La valeur angulaire θ d'un tour de vis du micromètre correspondant au tirage y est évidemment donné par la formule

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{1}{19,95(23,57+y)}.$$

On donne à y les valeurs successives de dixième en dixième de centimètre pour toute l'étendue des tirages employés, et l'on construit la Table du facteur de réduction $\operatorname{tang}\theta$ et de ses multiples de 1 à 9.

Voici la disposition de cette Table :

Tour du micromètre.	Tirage de la lunette.			
	$2^d,0$	$2^d,10$	.....	$3^d,00$
1.....	$404''$	$403''$	....	$389''$
2.....	808	806	....	778
3.....	1212	1209	....	1167
.....	....	....	....	....

(1) La lentille étant plan-convexe, le centre optique est sur la surface convexe et le point nodal cherché en est l'image à travers la surface plane, d'où l'on conclut, pour la distance du point nodal à la surface extérieure,

$$\delta = e\frac{n-1}{n};$$

e, épaisseur de la lentille : $0^c,43$; n, indice moyen : $1,567$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Calcul des déviations. — Cette Table une fois construite, le calcul des déviations n'offre plus aucune difficulté. En effet, d'après le mode d'obtention des clichés, le déplacement de la lunette donne le double de la déviation de la raie idéale, située au milieu du champ. On a donc, en prenant la moitié de la différence des lectures azimutales de la lunette, la *déviation du milieu idéal du cliché* (milieu qui est rigoureusement défini par la demi-somme de tous les relevés micrométriques des raies). Comme, d'autre part, on a par la Table précédente l'*appoint* en secondes d'arc, positif ou négatif, correspondant aux raies de part et d'autre du milieu, on en conclut la déviation de chaque raie mesurée.

Un exemple achèvera de faire comprendre ce mode de calcul :

Cliché ρ_6. — 6 novembre 1877 ; soleil brumeux. — Pose, une minute et demie.

Tirages.	Collimateur	0,85
	Lunette	2,07

		Déviation à gauche. Position du prisme, 323°.8.
Lecture du cercle azimutal.	Premier vernier	33°.20′.15″
	Deuxième vernier	20.10
	Moyenne	33.20.13 + 180°

		Déviation à droite. Position du prisme, 87°.6.
Lecture du cercle azimutal.	Deuxième vernier	326°.45′.10″
	Premier vernier	45.25
	Moyenne	326.45.18

La différence des lectures azimutales $326°45'18'' - 213°20'13''$ donne le double $2M'' = 113°25'5''$ de la déviation du milieu idéal du cliché, d'où

$$M = 56°42'33''.$$

Ce cliché a été employé à relever trois raies, P, une raie intermédiaire λ et O, de la manière suivante (l'origine des lectures micrométriques est arbitraire) : un tour de vis vaut $\frac{1}{2}$ millimètre.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

	Raies.	1er pointé.	2e pointé.	Moyenne.		Somme (vérification).	Différence.	Demi-diff.
Spectre de gauche.	P....	43',45	44',04	43',75	44',19	87',94	+ 0',44	+ 0',22
	λ....	44,75	45,34	45,05	42,90	87,95	— 2,15	— 1,08
	O....	46,64	47,23	46,94	41,00	87,91	— 5,94	— 2,97
Spectre de droite.	O....	40,70	41,29	41,00				
	λ....	42,60	43,19	42,90				
	P....	43,90	44,18	44,19				

On voit que les vérifications sont très satisfaisantes.

Les demi-différences + 0',22, — 1',08, — 2',97 représentent l'appoint; l'ordre des raies montre (indépendamment de la marche méthodique) que la déviation va en décroissant de P à Q, par conséquent donne le signe de ces demi-différences. Pour réduire cet appoint en secondes d'arc, on cherche dans la Table précédemment indiquée les facteurs correspondant au tirage 2, 10 (le plus voisin de 2,07), et l'on calcule ainsi :

	Raie O. Demi-diff. : + 0,22.		Raie λ. Demi-diff. : — 1,08.		Raie P. Demi-diff. : — 2,97.	
Pour o',20.....		80",6	Pour 1'...	403",0	Pour 2'....	806",0
Pour o',02.....		8,1	Pour o',08.	32,2	Pour o',9..	362,5
					Pour o',07.	28,2
Appoint.....		88,7		435,2		1196,7
	= +	1' 29"	=	— 7' 15"	=	— 19' 57"
Déviation de la raie idéale du milieu. M =		56° 42' 33"		56° 42' 33"		56° 42' 33"
Déviation définitive.		56° 44' 2"		56° 35' 18"		56° 22' 36"

On voit d'après cet exemple que, si la méthode est un peu longue à exposer, elle est d'une application très facile. Les erreurs deviennent presque impossibles si l'on a pris la précaution recommandée plus haut d'avoir des parties communes sur les clichés successifs. On obtient ainsi, par des voies entièrement différentes, plusieurs valeurs de la déviation de la même raie; l'accord des résultats est une garantie presque absolue de leur exactitude; les valeurs trop divergentes sont calculées à nouveau et corrigées ou rejetées si la divergence est inad-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

missible. La divergence provient presque toujours d'une inadvertance dans la désignation de la raie.

C'est ainsi qu'on a obtenu le Tableau suivant, qui donne les déviations (1) des dix raies les plus apparentes, s'étendant depuis O jusqu'à S, déduites de l'étude de neuf clichés obtenus le 14 octobre 1877 et de trois clichés supplémentaires du 6 novembre 1877.

Les plus nets, ceux qui inspiraient le plus de confiance, ont été relevés deux fois; les deux résultats concordants figurent dans la moyenne comme des déterminations isolées, pour tenir, jusqu'à un certain point, compte de leur importance.

L'époque avancée de l'année n'a pas permis d'obtenir de bons clichés doubles dépassant notablement la raie S. On verra plus loin comment on a tourné cette difficulté en employant un spectre auxiliaire. J'ai adopté pour la désignation des raies O, P, Q, R, *r*, et S (2) celles de M. Mascart; les autres sont désignées par la longueur d'onde que leur assigne le dessin qui résume le présent Mémoire.

---

(1) Pour rendre ces observations comparables à celles des divers physiciens qui peuvent s'occuper de semblables mesures, j'ai mesuré le 14 octobre, après la série des clichés $r_1, \ldots, r_9$, les déviations des raies visibles D et F (température = 14°,6) :

	Raie D (*la plus réfrangible et la plus forte*); *tirage du collimateur*, 2,0.	*Raie* F; *tirage du collimateur*, 1,68.
Déviation à droite.....	$\pi + 38^{\circ}\ 4'\ 30''$	$37^{\circ}\ 6'\ 0''$
	15	5.55
Déviation à gauche.....	322. 11. 0	323. 9.50
	20	10. 0
d'où l'on conclut.....	$2\Delta = 104.\ 6.47$	$2\Delta = 106.\ 3.57$

On peut de ces données tirer l'angle du prisme qui doit servir à calculer les indices de réfraction d'après la connaissance de l'indice ordinaire du spath pour la raie D. On verra dans l'Appendice I que la mesure exacte de l'angle du prisme est toujours une opération délicate. On y trouvera également le résumé des déterminations relatives à l'angle de ce prisme $A = 60^{\circ}\ 1'\ 10''$.

(2) Je l'appellerai S_1 pour la distinguer du groupe triple S_2 un peu plus réfrangible et qui coïncide avec une raie triple du spectre du fer.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

TABLEAU I.

Déviations des raies principales du spectre solaire, de O *à* S, *par un prisme de spath d'Islande de* 60° 1′ 10 (*rayon ordinaire*).

DÉSIGNATION des clichés.	O.	P.	λ = 330,40.	Q.	λ = 324,59.	λ = 320,16.	R.	*r*.	λ = 312,50.	S_1.
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″			
r_1	»	»	»	»	»	»	»	57°53′35″	58° 0′31″	58° 9′27″
	»	»	»	»	»	»	»	57.53.39	58. 0.29	58. 9.27
r_2	»	»	»	»	57.18. 0	57.32.48	57.40.48	57.53.26	»	»
r_3	»	»	»	»	»	»	57.40.37	57.53.17	58. 0.18	»
r_4	»	»	»	»	»	57.32.54	57.40.49	57.53 22	58. 0.31	»
	»	»	»	»	»	»	»	57.53.21	58. 0.23	58. 9.14
r_5	»	»	»	»	57.18. 3	57.32.51	»	»	»	»
	»	»	56.59.57	57. 5.46	57.18. 3	»	»	»	»	»
r_6	»	»	56.59.53	57. 5.46	57.18.17	»	»	»	»	»
r	56.23.12	56.44.12	»	»	»	»	»	»	»	»
r_8	56.22.36	56.43.57	»	»	»	»	»	»	»	»
r_9	56.22.31	»	»	»	»	»	»	»	»	»
ρ_1	»	»	»	»	»	»	»	57.53.17	58. 0.17	58. 9.14
ρ_5	56.22.52	56.43.53	»	»	»	»	»	»	»	»
ρ_6	56.22.36	56.44. 2	»	»	»	»	»	»	»	»
Moyenne adoptée.	56.22.45	56.44. 1	56.59.57	57. 5.46	57.18. 6	57.32.51	57.40.45	57.53.27	58. 0.26	58. 9.26

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Emploi d'un spectre de comparaison pour prolonger la série de mesures. — Le Tableau ci-dessus contient les déviations de toutes les raies qui ont pu être obtenues par doubles clichés à une époque avancée de l'année; aux environs du solstice d'été et vers midi, on aurait pu aller plus loin, mais il aurait toujours été difficile d'atteindre l'extrême limite, à cause du défaut d'intensité des radiations. Pour éviter tous ces inconvénients, j'ai utilisé une propriété très remarquable du spectre solaire (1), celle de présenter une coïncidence parfaite entre ses principales raies sombres et les raies brillantes du spectre du fer. Cette propriété est d'autant plus précieuse dans le cas présent, que l'extrémité du spectre du Soleil est presque exclusivement formée par les raies du fer; il en résulte que le spectre de ce métal donne non seulement les raies les plus fortes du spectre solaire, mais jusqu'à un certain point le canevas et la physionomie propre de cette région.

Cette coïncidence, établie d'abord par la comparaison à la chambre claire d'excellents clichés du spectre solaire obtenus au mois de juin 1877 avec des clichés du spectre du fer (2), puis par un très grand nombre de comparaisons directes, peut être considérée comme aussi précise que les coïncidences constatées journellement dans les régions du spectre où les observations sont faciles.

J'ai donc adopté le spectre du fer comme *spectre de comparaison*, et j'ai effectué, suivant la même marche que précédemment, une série de mesures qui m'ont fourni les déviations des raies principales de l'extrémité du spectre solaire et même permis de prolonger les déterminations un peu au delà de la limite connue, jusqu'à des raies dont l'existence est très probable, mais n'a pas encore été constatée.

(1) Voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVI, p. 315.

(2) Ces comparaisons ont été effectuées en dessinant à la chambre claire (dite d'Oberhaüser) les raies du spectre du fer d'après un bon cliché, puis en substituant à ce cliché celui du spectre solaire dans la même région, fait avec le même appareil, dans les mêmes conditions de réglage : l'identité évidente de forme de certains groupes (raie T en particulier) permet d'établir une première coïncidence et d'apercevoir les autres moins apparentes.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

TABLEAU II.

Déviations des raies principales du spectre du fer (région S à U).

DÉSIGNATION des clichés.	$\lambda = 311{,}65$.	S_2.	$\lambda = 304{,}18$.	$\lambda = 302{,}98$.	$\lambda = 302{,}48$.	T.	$\lambda = 298{,}42$.	U.	$\lambda = 293{,}73$.	$\lambda = 292{,}86$.
φ_1.....	58° 3'.52"	58° 10'. 8"	° ' "	° ' "	° ' "	° ' "	° ' "	° ' "	° ' "	° ' "
φ_2.....	»	58.10.19	58.33.46	58.38.32	58.40.36	58.42.47	58.58.42	»	»	»
φ_3.....	»	»	»	»	»	»	58.58.38	59.16. 0	59.21.17	59.26.18
Moyenne diminuée de 15".	58. 3.37	58.10. 0	58.33.31	58.38.17	58.40.21	58.42.32	58.58.25	59.15.45	59.21. 2	59.26. 3

La désignation des raies par des lettres ou les valeurs des longueurs d'onde se rapportent à la deuxième Planche qui résume le présent Mémoire.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Le Tableau ci-dessus donne les résultats déduits de trois clichés obtenus le 22 décembre 1877, avec le même *petit goniomètre* et le même prisme de spath d'Islande que les clichés précédents; la source de lumière était une étincelle d'induction jaillissant entre deux électrodes de fer (deux pointes de Paris; bobine d'induction modèle moyen, une bouteille de Leyde de 2^{lit} de capacité).

La raie S_2 n'est pas la raie S_1 du Tableau précédent; c'est une raie très forte du fer qui paraît unique avec une faible dispersion, mais qui est en réalité formée de trois composantes égales en éclat et équidistantes. La raie désignée par S est la raie simple S_1 sur le dessin de M. Mascart, mais elle est en réalité double, coïncidant avec deux raies du nickel (*voir* la *Pl. II* du présent Mémoire).

Pour effectuer le raccordement de cette série de mesures avec la série précédente, j'ai relevé sur le cliché r_1 (effectué avec le tirage 1,65) la distance angulaire du milieu de S_1 et du milieu de S_2 :

Spectre de droite	S_1...	$60^t,29$	Spectre de gauche	S_1...	$60^t,08$
	S_2...	$60,37$		S_2...	$60,00$
Différence.....		$0,08$			$0,08$

Cette distance linéaire correspond à 33″, d'après la Table indiquée p. 22.

D'où l'on conclut pour la déviation de S, d'après la seconde série, 58° 10′ 15″ — 33″ = 58° 9′ 42″. La mesure directe avait donné (Tableau I) 58° 9′ 26″; la différence de 16″ s'explique par quelques petites différences dans le réglage et dans la température du prisme dans les deux séries de mesures.

Le relevé graphique donne pour la même région une différence un peu plus faible (12″ et 14″). J'ai opéré le raccordement des deux séries en retranchant 15″ à toutes les mesures de la seconde; c'est ce qui explique la correction des moyennes du Tableau II.

Exécution du dessin. — Avec ces données, le dessin du spectre solaire ne présente plus de difficultés. Une graduation en centimètres a été tracée sur une feuille à dessin tendue sur une planchette, et avec une règle divisée j'ai tracé, à l'échelle de $0^m,01$ pour 1′ d'angle, les raies déterminées par leur déviation d'après les Tableaux I et II. Les raies intermédiaires ont été intercalées, d'après les clichés, à l'aide d'un mi-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

croscope muni d'une chambre claire. Par un choix convenable de l'objectif et du tirage du corps du microscope, on arrive aisément à faire coïncider l'image des raies du cliché avec les deux raies correspondantes du dessin. Les raies intermédiaires se trouvent immédiatement dans leur position réelle; il n'y a plus qu'à les tracer au crayon. Grâce à ce que les clichés et les dessins présentent la même loi de dispersion des raies, la proportionnalité est toujours presque parfaite, et la petite variation continue de (1) leur rapport, étant extrêmement lente, ne peut produire aucune erreur appréciable. Ce procédé très simple me paraît aussi exact que celui du relevé au micromètre, lorsqu'il s'agit de construire un dessin à grande échelle, dont l'un des plus grands mérites doit être de représenter l'*effet* des groupes de raies. J'ai, du reste, déjà insisté sur ce point dans mon précédent Mémoire (*voir* t. VIII, p. 433).

On obtient ainsi rapidement un spectre prismatique très complet; on le perfectionne dans ses détails en comparant le dessin avec les meilleurs clichés, obtenus en dehors de ceux qui ont servi aux déterminations numériques. Ainsi, outre les quinze clichés qui ont concouru aux mesures des Tableaux I et II, j'ai employé environ cinquante clichés du spectre solaire seul et plus de cent cinquante clichés de comparaison du spectre du fer ou du soleil avec les spectres des métaux principaux, nickel, aluminium, calcium, magnésium, cobalt, titane, etc. Ces comparaisons ont permis non seulement d'établir les coïncidences entre les raies du spectre solaire et celles des métaux, mais encore de discuter les apparences souvent incertaines des groupes de raies solaires. Dans les cas douteux, de nouvelles épreuves ont été exécutées avec le *grand goniomètre,* dont les clichés supportent un plus fort grossissement.

J'ai obtenu de cette manière un dessin s'étendant depuis les raies précédant la raie O jusqu'à la raie U; il comprend un intervalle angulaire de 3°5′, qui, à l'échelle de $0^m,01$ par mètre, représente un développement de $1^m,85$; le nombre de raies qui s'y rencontrent s'élève à plus de 800.

(1) Elle est causée par la variation de tirage de la lunette nécessitée par la mise au point relative à chaque réfrangibilité.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

DÉTERMINATION DIRECTE DES LONGUEURS D'ONDE DES RAIES PRINCIPALES.

Le défaut d'intensité des radiations solaires ultra-violettes rend les observations photographiques des spectres de diffraction particulièrement difficiles. J'ai répété avec beaucoup de soin les diverses tentatives faites avec les réseaux sur verre, et au début j'ai rencontré les mêmes difficultés que mes devanciers. Comme M. Mascart, je n'ai guère pu dépasser la raie R en employant le réseau de Nobert (1801 traits) par transmission, à cause du pouvoir absorbant de la glace sur laquelle il était tracé. Un réseau au $\frac{1}{50}$ de millimètre, que j'avais construit en 1871 sur noir de fumée, remarquable par sa surface ($0^m,025$ sur $0^m,027$) et l'éclat des premiers spectres, ne m'a pas permis d'aller plus loin que la raie S; mais la dispersion était insuffisante pour obtenir la précision que j'avais en vue.

J'aurais dû, à ce moment, essayer les spectres obtenus par réflexion sur la face striée du réseau; j'en ai été détourné tout d'abord par les essais infructueux de M. Mascart.

J'ai alors perdu beaucoup de temps à tracer sur quartz (1) des réseaux au $\frac{1}{50}$ et au $\frac{1}{60}$ de millimètre, à l'aide d'une petite machine que j'ai construite et qui fonctionne automatiquement. Ces réseaux, dont quelques-uns sont assez parfaits, ont servi à l'observation photographique du spectre ultra-violet par la méthode des *clichés doubles*. Tous les clichés obtenus ainsi ont été relevés et réduits; bien que les mesures angulaires fussent très concordantes (2), l'erreur relative des résultats m'a paru dépasser la limite que m'imposait la précision du spectre prismatique. J'ai donc rejeté toutes ces observations.

J'en revins alors à étudier les spectres de diffraction par réflexion sur un réseau très lumineux au $\frac{1}{100}$ de millimètre, construit par

(1) Les uns sont tracés au diamant, d'autres à la pointe sur une couche d'arsenic métallique déposé par l'appareil de Marsh, d'autres enfin sur noir de fumée convenablement lavé de l'alcool ou avec de la benzine contenant 1 pour 100 de cire vierge.

(2) Je me bornerai à citer, plutôt comme exemple de la sûreté de la méthode de réduction des clichés doubles et de l'exactitude des pointés qu'on peut obtenir avec de petits instruments, les observations faites sur la raie *r*. C'est une raie assez bien isolée et se prêtant

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

MM. Brunner. Les résultats furent plus satisfaisants; la dispersion, presque double, permettait une précision plus que double, en atténuant l'effet des aberrations des objectifs achromatiques que j'employais. Mais le manque d'éclat (vu surtout l'époque avancée de l'année) empêchait toujours de dépasser notablement la raie S. Je pus alors me convaincre qu'il en serait probablement toujours ainsi, même en attendant une saison plus favorable, et qu'il serait presque impossible d'atteindre les raies solaires les plus réfrangibles avec les réseaux dont je disposais; j'ai donc été ramené à l'emploi du spectre auxiliaire de comparaison, ainsi qu'on va le voir bientôt.

Mode d'obtention des clichés du spectre de diffraction. — La méthode des *clichés doubles*, employée pour la mesure des déviations prismatiques, s'applique très bien avec les prismes, parce qu'on est assuré que les images d'une même raie, déviées à droite et à gauche, se font exactement à la même distance focale.

Avec les réseaux, qui donnent également des images symétriques, on rencontre des difficultés spéciales. Dans la plupart des cas, les spectres symétriques exigent une mise au point différente (1); or,

---

à des mesures précises, malgré la faiblesse de la dispersion. Elle a été mesurée sur douze clichés différents dans le spectre du second ordre.

Réseau sur quartz au $\frac{1}{60}$ de millimètre. — Méthode des clichés doubles.

Déviation de la raie r.	
2.8.58	2.8.42
2.9. 2	2.8.38
2.8.49	2.8.56
2.8.58	2.8.55
2.8.59	2.9. 2
2.8.58	2.8.57

Moyenne..... 2°8'55"

d'où

$$\lambda = 314{,}25.$$

Les mesures ultérieures ont donné 314,51.

La constante du réseau a été trouvée égale à $0^{mm},016764$, d'après l'observation des raies C, D et b_1.

(1) Ce défaut des réseaux s'explique aisément par l'existence d'une variation systématique dans la distance des traits; j'ai donné la théorie complète de ce phénomène (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXX, p. 645).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

comme on ne doit pas toucher à la lunette pendant l'obtention des deux parties du cliché double, il en résulte que les deux images spectrales n'ont pas la même netteté; de plus, les deux spectres ont rarement la même intensité : on perd donc en grande partie le bénéfice de la méthode des clichés doubles, qui suppose la symétrie complète des deux spectres et par-dessus tout leur netteté.

Lorsqu'on opère, non plus par transmission, mais par réflexion, les spectres de diffraction ne sont plus symétriques par rapport à aucune direction [excepté lorsque le plan du réseau est perpendiculaire au rayon incident, cas simple qui présente beaucoup d'inconvénients (1)] et, comme ils risquent de présenter une différence de netteté et une différence d'éclat, on ne peut qu'exceptionnellement employer la méthode des clichés doubles.

On est donc forcé de revenir à la méthode des repères décrite et employée dans la première Partie de ce travail (voir *loc. cit.*, p. 425). Elle consiste à fixer la lunette sur le limbe à un azimut A tel que la raie principale à observer soit sensiblement dans le milieu du champ; puis, quand l'épreuve est terminée, on ramène la lunette dans le voisinage de l'azimut A_0, azimut de l'image centrale du réseau (image de la fente, non diffractée), de manière à produire deux impressions linéaires de la fente correspondant à deux azimuts $A_0 \pm a$. Il en résulte que le cliché présente alors la série des raies et, de chaque côté, deux repères qui forment deux raies idéales, dont la déviation est connue avec toute la précision des lectures du cercle. L'une fait avec l'image de la fente un angle $A - A_0 - a$, l'autre un angle $A - A_0 + a$. La distance des repères donne en même temps l'échelle angulaire du cliché, et permet de calculer la déviation de toutes les raies intermédiaires.

La netteté des repères est ici la condition indispensable de la méthode; or, comme l'impression de l'image directe de la fente est produite par les radiations de toute réfrangibilité qui pénètrent dans le collimateur, il faut que les objectifs du goniomètre soient *achromatiques* (2), sans

(1) Ainsi, on ne peut pas observer les premiers spectres de chaque côté, parce que la lunette vient buter sur le collimateur.

(2) A la rigueur, on pourrait se dispenser de cette condition; mais il faudrait pour cela imaginer un dispositif permettant de n'employer pour la production des repères que la partie des radiations de même réfrangibilité que celles que l'on étudie. On a déjà construit

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

quoi, l'image de la fente est estompée. J'ai donc été amené à l'emploi d'objectifs achromatiques, formés par deux substances transparentes pour les radiations ultra-violettes. Le quartz et le spath d'Islande (rayon ordinaire) étaient naturellement désignés; la différence qu'ils présentent dans leur dispersion permet d'obtenir un achromatisme satisfaisant, en prenant une lentille convergente de quartz et une lentille divergente de spath d'Islande, taillées toutes deux perpendiculairement à l'axe optique.

On trouvera plus loin (Appendice III) les détails relatifs à la construction de ces objectifs; il suffira de dire ici que, malgré les difficultés de taille que présente le spath d'Islande, ces objectifs ont été construits d'une manière très satisfaisante par M. J. Duboscq; ils n'ont pas la finesse de définition des objectifs de verre, mais ils sont cependant assez parfaits pour dédoubler facilement la raie D avec un prisme de spath d'Islande de 60°.

On règle la lunette et le collimateur avec la lumière de la soude suivant la méthode générale (Appendice I), puis sur la région des raies G, H, qui donne à la fois des impressions sur l'œil et sur la plaque sensible; finalement, quelques essais méthodiques permettent d'obtenir le tirage qui donne, grâce à l'achromatisme très approché, une épreuve de tout le spectre ultra-violet avec une netteté satisfaisante.

Les épreuves des spectres de diffraction obtenus avec le réseau Brunner au $\frac{1}{100}$ de millimètre ont été faites, comme on l'a dit plus haut, par réflexion sur la face striée, en choisissant le deuxième spectre le plus lumineux; il se recommande par une plus grande dispersion que le premier, sans empiéter sur les autres d'une manière gênante comme les spectres d'ordre supérieur. L'inclinaison du réseau sur le rayon incident a été choisie de manière à pouvoir observer la raie D, dans les spectres des trois premiers ordres, de part et d'autre de l'image centrale. Cette observation de la raie D sert à la détermination de la constante du réseau.

Lorsque la normale au réseau, au lieu d'être parallèle au faisceau

---

des appareils donnant des radiations d'une réfrangibilité déterminée, mais ils sont compliqués et coûteux. L'emploi d'objectifs achromatiques me paraît être la solution la plus simple et la plus générale de ce problème.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

incident, fait avec cette direction un angle i, la formule que l'on établit aisément par la construction géométrique bien connue est la suivante :

$$a(\sin i + \sin \delta_n) = n\lambda,$$

que l'on met sous la forme

$$\frac{1}{n} \sin \frac{i + \delta_n}{2} \cos \frac{i - \delta_n}{2} = \frac{\lambda}{2a}$$

pour la rendre facilement calculable par logarithmes.

n est positif pour les déviations des rayons diffractés situés du même côté du rayon réfléchi que la normale et négatif de l'autre côté; δ_n est la déviation comptée à partir de la normale et positivement dans le sens qui va au rayon incident.

On détermine i en pointant directement la lunette sur la fente du collimateur, le réseau étant ôté; on lit l'azimut P_0 correspondant. Le réseau étant réglé, et placé dans la position définitive, on amène la lunette de façon à pointer sur l'image réfléchie de la fente; on lit le nouvel azimut P_1; $P_1 - P_0$ est égal évidemment à $\pi - 2i$. Quant à la déviation, elle est donnée par les repères, ainsi qu'il a été dit plus haut.

La déviation δ_n n'est pas observée directement, parce que l'on rapporte plus volontiers les spectres au rayon réfléchi; il en résulte que l'on observe $\delta_{\pm n} + i$ ou $i - \delta_{-n}$ suivant que l'on observe les spectres de part ou d'autre de ce rayon.

Voici un exemple d'observation photographique :

Cliché B_{13}. — 2 novembre 1877, $0^h\,15^m$; pose quatre minutes.

Deuxième spectre..... $n = 2$

Tirage. { Lunette (tirage fixe, réglé une fois pour toutes par le porte-plaque).
Collimateur.. 1,05

Azimut de l'épreuve..... { $320^\circ.40'.15''$; 10 } Repères. { $324^\circ.20'.25''$; 15 ; $325.50.10$; 05 }

Ces données ne suffiraient pas; il faut connaître la constante du réseau

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et l'incidence. Les observations suivantes les ont fournies à la fin de la série :

RÉSEAU BRUNNER ($\frac{1}{100}$ de millimètre). — *Observation de la raie* D_2 (la plus réfrangible, $\lambda = 588,89$, d'après Angström).

	n.	Azimut.	$\log \frac{\lambda}{2a}$.
Troisième spectre de droite...	+ 3	314. 3.30 314. 3.15	$\bar{2},46991$
Deuxième » ...	+ 2	317.37.25 317.37.10	75
Premier » ...	+ 1	321.16. 5 321.15.55	67
Image réfléchie de la fente....		325. 1. 0 325. 0.50	
Premier spectre de gauche...	− 1	328.54. 0 328.53.40	75
Deuxième » ...	− 2	332.57. 5 332.56.55	89
Troisième » ...	− 3	337.13. 0 327.12.45	81
Image directe de la fente :			Moyenne :
Le réseau étant ôté.....		$2\pi + 89.59.55$ $2\pi + 89.59.50$	$\log \frac{\lambda}{2a} = \bar{2},46980$

d'où

$$a = 0^{mm},009983$$

On conclut de ces observations

$$\pi - 2i = 2\pi + 89°59'58'' - 325°0'55'', \quad \text{d'où} \quad i = 27°30'31'',$$

nombre qui sert pour toute la série.

On voit combien les observations de la raie D sont concordantes, d'après les six valeurs de $\log \frac{\lambda}{2a}$ qu'on en déduit.

Revenant aux données de l'épreuve photographique B_{13}, on en conclut que les repères tracés par l'image réfléchie de la fente font avec le rayon réfléchi les angles

$$x' = 324°20'20'' - 320°40'13'' = 3°40'\ 7'' = i + \delta'_2,$$
$$x'' = 325°50'\ 8'' - 320°40'13'' = 5°\ 9'55'' = i + \delta''_2.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Comme on connaît $i = 27°30'31''$, on calcule $i - \delta'_2$ et $i - \delta''_2$; substituant dans la formule, on trouve

$$\lambda' = 288{,}00, \quad \lambda'' = 407{,}91$$

pour les longueurs d'onde des raies idéales formées par les repères.

Le cliché B_{13}, comme on le voit, contient la totalité du spectre solaire ultra-violet dans l'intervalle angulaire de

$$(5°9'55'' - 3°40'7'') = 1°29'48'' = 5388''$$

que comprennent les deux repères. La netteté étant satisfaisante, on relève au micromètre, comme précédemment, les raies principales. Les deux repères donnent l'échelle de réduction et permettent de calculer l'angle $x = i + \delta$ que fait chaque raie avec le rayon réfléchi; la substitution des deux valeurs $i + \delta$ et $i - \delta$ dans la formule permet de calculer sa longueur d'onde.

On peut également opérer par interpolation, d'après la connaissance des longueurs d'onde correspondant aux repères; l'opération numérique est même très courte et susceptible de vérifications très simples, lorsque l'on peut admettre que la variation des longueurs d'onde est proportionnelle à la distance aux repères : c'est ce qui avait lieu dans mon premier travail (*voir* p. 426), où les longueurs d'onde étaient proportionnelles aux déviations et où la distance des repères n'était que de 40'. Mais ici la proportionnalité n'est pas absolue, parce que la loi qui donne la longueur d'onde en fonction de la déviation de la raie est plus complexe que dans le cas précédent. L'erreur maximum qui affecte les raies situées au milieu des repères s'élève ici à $+0{,}17$, ainsi que le montre le calcul direct. Mais cette erreur, une fois connue, sert à corriger les valeurs intermédiaires par une formule d'interpolation très simple (*voir* l'Appendice IV). Ce mode de calcul, si différent du calcul direct, sert de contrôle numérique. Dans la réduction des valeurs du Tableau III, j'ai suivi l'ordre inverse, réservant le calcul direct comme vérification : c'est ce qui explique la colonne de correction dans ce Tableau.

Parmi les clichés de la série du 2 novembre 1877, cinq (désignés par B_9, B_{12}, B_{13}, B_{14}, B_{15}) ont présenté une netteté assez satisfaisante pour mériter d'être réduits; les repères sont situés dans des régions

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

voisines, mais non identiques. Le Tableau suivant donne les résultats relatifs à toutes les raies observées :

TABLEAU III.

Détermination des longueurs d'onde des raies principales, obtenue avec le réseau Brunner au $\frac{1}{100}$ de millimètre.

DÉSIGNATION des raies.	B_9.	B_{12}.	B_{13}.	B_{14}.	B_{15}.	MOYENNE.	CORRECTION.	VALEUR définitive.
G' (1).....	»	433,70	434,10	433,95	433,94	433,92	+ 0,16	434,08
h..... ..	409,77	410,08	410,03	410,13	410,21	410,04	0,01	410,05
H.....	396,53	396,95	396,99	396,89	396,97	396,87	— 0,06	396,81
K.....	393,25	393,16	393,39	393,40	393,38	393,40	— 0,07	393,33
L.....	»	»	382,15	381,96	382,14	382,08	— 0,12	381,96
M.....	372,71	372,91	372,71	372,75	372,72	372,76	— 0,14	372,62
N.....	357,99	358,50	358,10	358,45	358,42	358,35	— 0,17	358,18
O.....	343,91	344,31	344,19	344,18	344,44	344,27	— 0,17	344,10
P.....	335,86	336,01	336,26	336,22	336,39	336,15	— 0,15	336,00
Q.....	328,56	328,71	328,96	328,81	328,76	328,76	— 0,13	328,63
R.....	»	318,05	318,11	318,00	318,27	318,11	— 0,12	317,98
r.....	314,37	314,53	314,67	314,62	314,78	314,59	— 0,12	314,47
S_1S_2 (2).....	310,24	310,53	310,48	310,48	310,33	310,41	— 0,10	310,31
Trace.....	»	306,82	307,08	307,20	307,05	307,04	— 0,09	306,95

(1) G' et *h*, raies du spectre solaire coïncidant avec des raies de l'hydrogène.
(2) Milieu de S_1 et S_2 (*voir* plus haut, p. 29).

Ainsi, malgré la faible dispersion du réseau, la concordance des mesures entre elles est assez grande; la concordance avec les résultats antérieurement obtenus par M. Mascart et par moi (voir *loc. cit.*, p. 431) jusqu'à R ou jusqu'à O n'est pas moins satisfaisante.

Emploi du spectre du fer comme spectre auxiliaire de comparaison. — Je n'ai pas cru toutefois devoir me contenter de cette série, d'abord parce qu'elle est incomplète et ne dépasse pas la raie S, mais surtout à cause de la faible dispersion du réseau, qui ne donnait pas, pour certains groupes, assez de finesse dans les détails.

Le réseau de Nobert (1801 traits), dont je m'étais servi dans mon

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

précédent travail et qui fournit des spectres trois fois plus dispersés, donnant beaucoup moins d'éclat que le réseau Brunner, ne pouvait pas donner de meilleurs résultats avec la lumière du Soleil.

J'ai heureusement pu l'utiliser en profitant de la propriété déjà signalée du spectre de la vapeur de fer. Dans l'arc électrique, les radiations de la vapeur de fer incandescent atteignent à égale réfrangibilité un éclat beaucoup plus vif que celles du Soleil, obscurcies par l'absorption de l'atmosphère terrestre. J'ai donc pris comme source lumineuse l'arc électrique fourni par une pile de cinquante-cinq éléments Bunsen jaillissant entre deux tiges de fer (¹); ces raies lumineuses étant pour la plupart en coïncidence avec les raies du spectre solaire, j'ai retrouvé sans peine les raies correspondant aux raies L, M, N, O, Q, S_2, T, U.

Le mode d'observation suivi dans ces mesures a été exactement le même que dans le cas précédent. L'observation photographique a porté sur le premier spectre de droite, dont l'éclat observé à l'oculaire fluorescent était notablement plus grand que celui des autres spectres; la seule différence a consisté à employer le grand goniomètre, dont les lunettes sont doubles, et le réseau de Nobert, dont la dispersion est triple; la précision était donc environ trois fois plus grande, puisque l'on observait le premier spectre au lieu du second. Les objectifs étaient également achromatiques et formés de lentilles de quartz et spath d'Islande, de $0^m,46$ de longueur focale. Je suis revenu dans cette série aux repères distants de 40′, à cause des diaphragmes intérieurs à la lunette, qui ne permettaient pas un plus grand écartement.

Une série de clichés a été obtenue ainsi, parmi lesquels quatre, désignés par Y_1, Y_2, Y'_3, Y'''_4, se sont distingués par la netteté des images; ils ont été réduits et ont fourni les longueurs d'onde de vingt raies principales, consignées dans le Tableau IV.

La constante du réseau a et l'angle d'incidence ont été déterminés à la fin de la série; la raie D_2 de la soude ($\lambda = 588,89$), qui est toujours très brillante dans l'arc électrique, a pu être observée dans trois spectres. Voici le détail des mesures de ces éléments :

(¹) Ou mieux entre une tige de fer et un petit bloc de fer maintenu en fusion par la chaleur de l'arc sur un gros charbon.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Réseau de Nobert (1801 traits). — *Observation de la raie* D_2 (la plus réfrangible).

	Azimut.	$\log\frac{\lambda}{2a}$.
Deuxième spectre de droite.....	306° 0′.50″	$\bar{2},89391$
Premier spectre de droite.....	315.14.27	$\bar{2},89395$
Image réfléchie de la fente.....	324.58.18	
Deuxième spectre de gauche.....	348.14.57	$\bar{2},89374$
Le réseau étant ôté :		Moyenne :
Image directe de la fente.....	$2\pi + 90.\ 4.42$	$\log\frac{\lambda}{2a} = \bar{2},89383$

d'où

$$a = 0^{mm},037599$$

Ces trois déterminations de a sont très concordantes entre elles et conduisent à un résultat presque identique à celui que j'avais déduit, dans mon premier Mémoire (p. 428), de la mesure directe,

$$a = 0,003762,$$

ou de la mesure par l'observation des raies C, D, b_1, F, ..., par transmission,

$$a = 2 \times 0,0018805 = 0,003761o.$$

C'est donc une preuve en faveur de l'exactitude de la méthode, exactitude qu'il était bon de contrôler, puisque l'emploi du réseau se fait dans des conditions plus complexes, obliquité et réflexion au lieu de normalité et transmission.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Tableau IV.

Détermination des longueurs d'onde des raies de la vapeur de fer en coïncidence avec des raies désignées du spectre solaire, obtenue avec le réseau Nobert (1801).

DÉSIGNATION des raies.	Y_1.	Y_2.	Y_3.	Y'''_1.	MOYENNE.	VALEURS du Tableau III.	DÉTERMINATIONS antérieures.	
							CORNU.	MASCART.
»	407,04	»	»	»	407,04	»	407,11	»
H (1)...	396,85	»	»	»	396,85	396,81	396,76	396,72
L.....	382,15	382,01	»	»	382,08	381,96	381,96	381,90
M.....	372,91	372,80	»	»	372,85	372,62	372,68	372,88
N.....	358,33	358,25	»	»	358,29	358,18	358,05	358,02
O.....	»	344,27	343,95	»	344,11	344,10	343,97	344,01
P.....	»	»	»	»	»	336,00	335,98	336,02
»	»	330,89	330,57	»	330,73	»	»	»
Q.....	»	328,90	328,62	»	328,76	328,63	»	328,56
R.....	»	»	»	»	»	317,98	»	317,75
»	»	»	319,58	319,67	319,62	»	»	»
S_2.....	»	»	309,93	310,06	310,00	S_1S_2 310,31	»	»
»	»	»	»	304,21	304,21	»	»	»
»	»	»	302,45	302,60	302,52	»	»	»
T.....	»	»	301,91	302,10	302,00	»	»	»
» (2).	»	»	298,21 ?	298,41	298,41	»	»	»
»	»	»	»	295,43	295,43	»	»	»
U.....	»	»	»	294,84	294,84	»	»	»
»	»	»	»	293,73	293,73	»	»	»
»	»	»	»	292,86	292,86	»	»	»
»	»	»	»	275,39	275,39	»	»	»
»	»	»	»	274,78	274,78	»	»	»

(1) Raie du calcium, mais qui est presque toujours très visible dans le spectre du fer, grâce aussi à une raie du fer très voisine.

(2) Cette raie est relativement beaucoup plus brillante dans le spectre de l'étincelle d'induction que dans celui de l'arc électrique; si l'on n'était pas prévenu de cette particularité, on pourrait s'exposer à des erreurs dans la comparaison avec les raies du spectre solaire, dont l'analogie avec celui de l'arc électrique est bien plus parfaite.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Dans les dernières colonnes se trouvent les valeurs correspondantes du Tableau III, qui sont en général un peu plus faibles; on y voit aussi les résultats que j'avais obtenus dans mon premier Mémoire (p. 431) et ceux de M. Mascart (1).

La concordance de toutes ces déterminations est aussi satisfaisante que possible, eu égard aux difficultés de ce genre de mesures.

CONSTRUCTION DU SPECTRE DÉFINITIF AVEC L'ÉCHELLE DES LONGUEURS D'ONDE.

Les déterminations numériques qui précèdent suffisent évidemment, au point de vue théorique, pour calculer les valeurs des longueurs d'onde de toutes les raies relevées sur le dessin du spectre prismatique.

S'il existait une relation simple entre la vitesse de propagation des ondes dans les milieux et la longueur d'ondulation, c'est cette formule qu'il faudrait employer comme formule d'interpolation. Malheureusement, les relations très diverses proposées par divers géomètres ou physiciens pour lier la longueur d'onde à l'indice de réfraction représentent en général d'une façon assez imparfaite les observations, à moins d'employer celles qui comprennent un grand nombre de coefficients indéterminés; mais alors les calculs numériques deviennent fastidieux. Aussi ai-je rejeté l'emploi de formules théoriques qui ne présentaient aucun avantage dans le cas actuel, pour chercher une formule purement empirique d'interpolation. Après quelques essais, j'ai été assez heureux pour trouver une expression qui représente d'une manière très fidèle les résultats de l'observation : c'est la relation dite *homographique*

$$(x-a)(y-b)=c^2,$$

qui jouit de la propriété bien connue qu'à une valeur de la variable ne correspond qu'une valeur de la fonction et réciproquement. Comme elle est symétrique, elle permet de faire, avec une égale facilité, l'interpolation de la variable ou celle de la fonction.

J'ai choisi comme variable la *déviation angulaire* produite par le

(1) *Annales de l'École Normale supérieure*, 1re série, t. I.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

prisme employé dans mes expériences et comme fonction la *longueur d'onde*.

On détermine les trois constantes a_0, b_0, c^2 à l'aide de trois couples de valeurs empruntées à l'expérience.

J'ai commencé par m'assurer que cette relation représente bien les observations; parmi les essais numériques que j'ai faits dans cette voie, je citerai l'application de cette formule aux déterminations de M. Mascart. Ces déterminations sont, dans toute leur étendue, représentées très convenablement par la formule empirique

$$(\lambda - 161,56)(\delta - 48°33',24) = 85724.$$

Les trois constantes ont été calculées d'après les longueurs d'onde des raies L, O, R données dans le Mémoire déjà cité, et les déviations correspondantes du prisme de spath, empruntées au même Mémoire. Les valeurs des longueurs d'onde des raies intermédiaires M, N, P, Q ont été calculées, et le résultat s'accorde assez bien avec les observations.

	Raies.			
	M.	N.	P.	Q.
λ calculé.....	372,81	357,95	336,19	328,63
λ observé.....	372,88	358,02	336,02	328,56
Différence.....	−0,07	−0,07	+0,17	+0,07

J'ai même ultérieurement employé la formule à calculer, par *extrapolation*, la longueur d'onde de la raie S, qui n'avait pas été mesurée par l'auteur. Le résultat a donné $\lambda = 310,07$, c'est-à-dire très sensiblement la valeur que j'avais déduite de mes observations.

Cet essai montre bien la validité de cette relation comme formule d'interpolation; il montre également, par le signe alternatif des différences, que l'intervalle auquel je l'ai appliqué est un peu trop étendu. En réduisant cet intervalle à moitié et même au tiers, on a chance de réduire les erreurs au quart et même au neuvième de la valeur qu'elles présentent dans ce calcul (*voir* l'Appendice IV).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

APPLICATION RÉITÉRÉE DE LA FORMULE D'INTERPOLATION AUX DÉTERMINATIONS PRÉCÉDENTES.

Aussi ai-je partagé en deux parties à peu près égales l'intervalle de O à U pour appliquer deux fois la formule avec des coefficients différents.

Premier intervalle entre les raies O *et r.* — J'ai employé pour cet intervalle les déterminations des Tableaux I et III (1). Les raies O, Q et *r*, étant les mieux définies de cette région et à peu près également espacées, ont été choisies pour déterminer les trois constantes de la formule d'interpolation.

Raies.	λ.	Δ.
O	344,10	56°.22',75
Q	328,63	57.5,76
r	314,51	57.53,45

Pour faciliter ce calcul numérique, on retranche 300 aux longueurs d'onde et 56° aux déviations (on réduit l'appoint en minutes et fractions de minute), ce qui revient à poser

$$y = \lambda - 300, \quad x = \Delta - 56^\circ,$$

et les données deviennent

$$\begin{aligned} y_1 &= 44,10, & x_1 &= 22',75, \\ y_2 &= 28,63, & x_2 &= 65,76, \\ y_3 &= 14,51, & x_3 &= 113,45. \end{aligned}$$

La formule $(x-a)(y-b) = c^2$ pouvant se mettre sous la forme

$$xy = ay + bx + k^2,$$

en posant $c^2 - ab = k^2$, on détermine les trois coefficients a, b, k^2 par trois équations linéaires obtenues en substituant x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3 dans l'expression précédente.

(1) A l'époque où j'ai fait ce calcul, les déterminations du Tableau IV n'étaient pas encore effectuées, sans quoi j'aurais adopté la moyenne composée de deux séries. Le résultat, du reste, aurait été presque absolument le même; c'est ce qui m'a détourné de recommencer le calcul.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Le coefficient k^2 s'élimine immédiatement par simple soustraction, de sorte qu'en réalité on n'a à résoudre que deux équations du premier degré.

Effectuant le calcul numérique, on trouve

$$a = -399',46, \quad b = -123,22, \quad k^2 = 21422,2, \quad \text{d'où} \quad c^2 = 70643,66,$$

ce qui donne

$$(x + 399',46)(y + 123,22) = 70643,66,$$

et finalement

$$(\Delta - 49°20'54)(\lambda - 176,78) = 70643,66.$$

Cette formule, appliquée aux raies intermédiaires P et R et au groupe extrême $S_1 S_2$, donne les résultats suivants :

Raies.	Déviations observées.	Longueurs d'onde. calculées.	Longueurs d'onde. observées.	Diff. calc. — observ.
P.....	56.44,03	336,07	335,99	+ 0,08
R.....	57.40,75	318,01	317,98	+ 0,03
$S_1 S_2$.....	58.09,71	310,28	310,31	— 0,03

Si l'on construit la courbe des différences entre le calcul et l'observation, on reconnaît qu'en diminuant la valeur de la longueur d'onde de Q de 0,05, celle de O de 0,04, on évite ces deux erreurs de même signe sur P et R, et l'on annule celles sur $S_1 S_2$.

J'ai donc en conséquence modifié légèrement les données sur O et Q pour obtenir une formule représentant les expériences d'une façon plus satisfaisante.

Raies.	
O.....	$\lambda = 344,06$
Q.....	$\lambda = 328,58$

Le calcul numérique, refait à nouveau, a donné

$$(\Delta - 49°30',34)(\lambda - 180,15) = 67598.$$

Les erreurs sur

O, P, Q, R, r, $S_1 S_2$,

sont respectivement

$$-0,04, \quad +0,03, \quad -0,05, \quad +0,01, \quad 0,00, \quad -0,01;$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

elles sont alternativement positives et négatives et d'une grandeur négligeable.

Mais il y a encore une condition à remplir, celle de *raccorder* ces mesures avec les mesures de mon premier Mémoire, en vue de construire une Planche faisant suite à celle qui le résume. La dernière raie est O. Les mesures directes avaient donné (voir *loc. cit.*, p. 431) $\lambda = 344,07$; ici je trouve 344,06, c'est-à-dire sensiblement la même chose.

Toutefois, d'après la discussion de la page 430, j'avais été conduit à retrancher 0,10 comme différence systématique entre les observations optiques et les observations photographiques, ce qui avait porté à $\lambda = 343,97$ la longueur d'onde définitive de la raie O. Les circonstances étant les mêmes, il est donc nécessaire, par raison de *continuité*, d'effectuer cette correction, ce qui retranche 0,09 à toutes les longueurs d'onde de la série de O à $S_1 S_2$.

La formule d'interpolation définitive devient donc

$$(\Delta - 49^{\circ}30',34)(\lambda - 180,06) = 67598.$$

A l'aide cette formule, j'ai calculé les valeurs des déviations correspondant aux nombres entiers 350, 349, 348, ..., jusqu'à 315; j'ai dressé une Table dont on trouvera quelques lignes comme exemple un peu plus loin.

En reportant ces nombres sur le dessin du spectre prismatique gradué suivant les déviations Δ des raies qui y sont représentées, j'ai obtenu la graduation du spectre suivant l'échelle des longueurs d'onde, dans toute la région que comprend la Table.

Second intervalle entre les raies r et U. — La marche suivie a été exactement la même, en prenant pour bases les déterminations relatives aux raies du fer des Tableaux II et IV. Les constantes de la formule d'interpolation ont été calculées à l'aide des trois raies

S_2	$\lambda = 310,00$	$\Delta = 58^{\circ}.10',00$
»	$\lambda = 302,52$	$\Delta = 58.40,35$
U.....	$\lambda = 293,73$	$\Delta = 59.21,02$

La formule d'interpolation qu'on en déduit,

$$(\Delta - 49^{\circ}43',88)(\lambda - 177,78) = 66919.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

représente bien les valeurs intermédiaires, ainsi qu'on le vérifie aisément.

Comme plus haut, il s'agit de *raccorder* les mesures avec les précédentes. A cet effet, j'ai calculé par extrapolation la valeur de la longueur d'onde de la raie *r* d'après celle de la déviation $\Delta = 57°53',45$ (Tableau I); on trouve $\lambda = 314,47$. La formule de la précédente série donne 314,42. Si donc on retranche 0,05 à toutes les longueurs d'onde de cette série, il y aura continuité complète dans les résultats. La seconde formule définitive devient ainsi

$$(\Delta - 49°43',88)(\lambda - 177,73) = 66919.$$

La Table, calculée jusqu'à $\lambda = 316$, a donc pu être continuée jusqu'à $\lambda = 291$, ce qui a permis d'achever la graduation en longueurs d'onde du dessin du spectre prismatique. Voici les premières et les dernières lignes de cette Table, qui donnent une idée de la variation de l'échelle des longueurs d'onde relativement à celle des déviations :

λ.	Δ.	Diff.
350	56°. 8'.12	
		2,35
349	56.10.47	
		2,38
348	56.12.85	
.....	.....	....
315	57.51.38	
		3,58
314	57.54.96	
		3,68
313	57.58.59	
.....	.....	....
293	59.24.42	
		5,07
292	59.29.49	
		5,18
291	59.34.67	

Dessin définitif. — La graduation en longueurs d'onde étant reportée avec soin sur le dessin du spectre prismatique, chaque intervalle a été subdivisé au compas en dix parties égales, l'interpolation proportionnelle conduisant dans cet intervalle à des erreurs négligeables. Il ne restait plus alors qu'à *anamorphoser* le dessin du spectre prismatique pour l'amener à l'échelle normale. A cet effet, une graduation en millimètres a été tracée sur une feuille de carton bristol, tendu sur une petite planchette, à l'aide d'une machine à diviser, dont le tracelet

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

était remplacé par un tire-ligne; l'intervalle entre chaque millimètre correspondait sur le dessin à l'une de ces subdivisions en dix parties. Comme il est difficile dans ces sortes de dessins graphiques de dépasser la précision de $\frac{1}{10}$ de millimètre, le report des raies a été fait *à vue*, d'après leur position relativement aux deux traits de la graduation entre lesquels elles étaient placées. Ces traits, distants de 1^{mm} sur le dessin définitif, étaient distants de $2^{mm},3$ sur le dessin prismatique dans le voisinage de la raie O, de $3^{mm},6$ vers la raie *r* et de 5^{mm} vers la raie U. On voit que la précision du dessin était assurée, puisque le rapport de réduction a varié entre $\frac{1}{2,3}$ et $\frac{1}{5}$. Aussi le grand spectre prismatique de $1^{m},85$ de longueur (*voir* plus haut, p. 50) s'est-il réduit à un développement de $0^{m},50$. C'est la *Pl. II* de ce Mémoire.

Comme le travail complet de la représentation des raies solaires et de leur comparaison avec les raies du spectre métallique avait été exécuté sur le dessin à l'échelle des déviations, la réduction à l'échelle des longueurs d'onde a été une opération purement graphique pour le report géométrique de la position des raies. Mais il y a eu encore un long travail de *mise à l'effet* des groupes pour leur donner leur aspect et leur éclat relatif; j'y suis parvenu en traçant les raies au tire-ligne avec de l'encre de Chine plus ou moins diluée et en complétant l'effet par des teintes appliquées au pinceau (1).

PLANCHES.

Les deux Planches que le lecteur trouvera à la fin du Mémoire comprennent d'abord la Planche de mon travail précédent, revisée et corrigée de quelques fautes de gravure (2); les corrections ont porté plus spécialement sur quelques raies entre N et O, que le défaut d'intensité dans mes premiers appareils avait rendu confuses. Enfin j'ai ajouté la comparaison des raies solaires avec celles des spectres métalliques les

(1) M. Legros, graveur, chargé de reproduire mes dessins, s'est acquitté de cette tâche avec une exactitude et une habileté qui lui font honneur.

(2) La plus grave, et qui malheureusement a été reproduite dans l'Atlas du *Soleil*, du P. Secchi, est l'indication comme appartenant au manganèse des deux raies bien connues appartenant à l'aluminium, situées entre H et K; il y a eu confusion dans la *lettre*, confusion qui, je l'espère, aura été remarquée et corrigée par les spectroscopistes.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

plus importants. On voit que le fer joue le rôle prédominant; il présente des coïncidences avec toutes les raies principales figurées sur la Planche. Puis viennent le nickel, le calcium, le cobalt, etc., dont l'importance est moindre.

La seconde Planche résume le Mémoire actuel; elle fait suite à la précédente. Elle ne dépasse pas les radiations dont la longueur d'onde est 294,8, limite que le pouvoir absorbant de l'atmosphère ne m'a pas permis de dépasser. J'ai toutefois laissé place jusqu'à $\lambda = 284,5$, dans l'espoir que les perfectionnements des méthodes d'observation ou l'amélioration des circonstances me permettront de pousser plus loin l'étude des radiations solaires.

On remarquera, comme dans la Planche précédente, la coïncidence des raies du fer avec la plupart des raies principales du spectre, surtout de S à U, et le rôle important du calcium (raie R), du nickel, de l'aluminium, du magnésium et du titane. Malgré tous mes efforts, je ne suis pas parvenu à établir la coïncidence de certaines raies importantes avec les raies des spectres métalliques; je citerai, en particulier, la raie *r*, dont l'intensité n'est nullement en rapport avec une faible raie double du fer avec laquelle la coïncidence est vraisemblablement fortuite; de même la raie P fait partie d'un groupe sombre qu'on ne saurait attribuer au nickel, malgré une coïncidence partielle de raies faibles. Près de R, vers $\lambda = 319,2$, on trouve le même aspect estompé dans un groupe de raies qui rappelle le groupe P, mais à une échelle réduite; ces raies n'ont pu être rapportées à aucun des éléments auxquels je les ai comparées (1).

En dehors de ces exceptions, toutes les raies importantes correspondent à des éléments composant les *météorites;* cette remarque m'a conduit à diverses conclusions qu'on trouvera résumées dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (t. LXXXVI, p. 530).

(1) Les métaux dont j'ai comparé les spectres au spectre solaire par voie de clichés photographiques sont les suivants : potassium, sodium, lithium, baryum, strontium, calcium, aluminium, magnésium, glucinium, fer, nickel, cobalt, manganèse, zinc, cadmium, plomb, titane, silicium, étain, tellure, antimoine, bismuth, argent, cuivre, or, platine, iridium.

Les étincelles d'induction dans l'hydrogène ne m'ont donné aucun spectre appréciable; dans l'air, les raies brillantes obtenues sont très estompées, mais je n'ai vu aucune coïncidence remarquable.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Comme particularité intéressante, je citerai encore des *plages* ou *raies brillantes*, qui apparaissent surtout nettement parmi les raies sombres lorsqu'au déclin du Soleil l'absorption atmosphérique limite de plus en plus le spectre; les raies les plus remarquables sous ce rapport sont dans le voisinage de R. On peut citer en particulier un groupe très brillant, $\lambda = 319{,}0$, et plusieurs lignes remarquables de $\lambda = 316$ à $\lambda = 317$.

ÉVALUATION DE LA PRÉCISION DES RÉSULTATS.

Il est difficile de fixer une mesure de la précision des résultats. Je la crois un peu moindre dans cette dernière Partie de ce travail que dans la première, à raison des difficultés rencontrées; j'estime toutefois que l'erreur maximum dans la position des raies ne dépasse pas 0,25 (en admettant avec Angström que la raie D la plus réfrangible a pour longueur d'onde $\lambda = 588{,}89$, puisque c'est cette raie qui m'a servi le plus souvent à déterminer la constante des réseaux). Pour expliquer ce chiffre, je suppose que l'erreur fortuite de la moyenne des mesures avec les réseaux dans les circonstances où je me suis placé ne dépasse guère $\pm 0{,}15$, et j'admets, d'après ce qui a été dit plus haut, que l'erreur systématique est d'environ 0,10. Dans le cas où les deux erreurs seraient de même signe, on aurait pour leur somme 0,25 (1); mais j'ai lieu d'espérer que l'erreur ordinaire est inférieure à cette limite.

(1) Je me propose, maintenant que, grâce à l'obligeance de M. Rutherfurd, je suis en possession d'un excellent réseau, de vérifier la valeur des longueurs d'onde de quelques-unes des raies principales. Je verrai s'il y a lieu de construire une Table de correction pour les cas où une plus grande précision serait utile.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

APPENDICE I.

SUR LE RÉGLAGE DU GONIOMÈTRE, DU PRISME ET DU RÉSEAU POUR LA MESURE PRÉCISE DES INDICES DE RÉFRACTION ET DES LONGUEURS D'ONDE. CORRECTION OU ÉLIMINATION DE CERTAINES ERREURS.

Lorsqu'on cherche à obtenir toute la précision que peut donner un goniomètre pour la mesure des indices de réfraction et des longueurs d'onde, il est nécessaire de rectifier avec le plus grand soin les diverses parties de l'instrument. En général, on se contente des réglages approximatifs que présente l'appareil au sortir des mains du constructeur; en agissant ainsi, on risque d'opérer en aveugle et d'introduire des erreurs d'une grandeur indéterminée.

Les Traités de Physique ne mentionnent pas ces réglages, ou du moins les réduisent le plus souvent à l'opération théorique, qui, dans les circonstances expérimentales, est peu applicable. Par exemple, on dit souvent que, pour régler une lunette sur l'infini, il suffit de viser une étoile et d'amener son image sur le fil du réticule : avec un instrument astronomique, l'opération est facile; mais avec un goniomètre à lunettes horizontales fixées aux alidades, lorsque l'instrument est lourd et fragile, l'opération est sinon impossible, du moins peu à conseiller; en tout cas, le réglage ne s'appliquerait qu'à des objectifs achromatiques et ne conviendrait pas pour une lumière simple donnée.

1° *Réglage du foyer principal de la lunette.* — On commence par déterminer le foyer principal de l'objectif de la lunette, c'est-à-dire par déterminer le tirage du tube portant le réticule et l'oculaire positif qui amène le plan du réticule de la lunette dans le plan focal principal de rayons monochromatiques convenablement choisis (en général les rayons jaunes de la lumière de la soude). A cet effet, on choisit une glace travaillée dont on argente une des faces. A l'aide d'une petite lame de verre sans tain fixée à l'extérieur de l'oculaire à 45° de l'axe de la lunette, on envoie à travers l'oculaire et suivant l'axe un faisceau de lumière blanche (1). On règle la glace argentée de façon que la lumière émise se réfléchisse normalement et vienne former une

(1) Ce dispositif n'est autre, comme on le voit, que l'*oculaire nadiral* des astronomes, permettant d'observer sur le bain de mercure l'image réfléchie des fils du réticule. On le réalise simplement en collant avec un peu de cire la lame de verre sur l'oculaire positif de la lunette. On aperçoit des lueurs fixes provenant de la réflexion de la lumière sur les surfaces des lentilles de l'oculaire : on en fait abstraction et l'on n'a égard qu'aux images mobiles avec la lame argentée.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

image du réticule dans le plan même du réticule. Si la lumière employée est celle d'une lampe ou des nuées, le défaut d'achromatisme de l'objectif (dans le cas où c'est une lentille simple) n'empêche pas d'avoir une image tolérable pour régler approximativement le tirage. On achève le réglage en prenant la lumière d'une flamme d'alcool salé ou mieux celle d'un brûleur chargée de vapeur de soude.

Le réglage est parfait lorsque l'image réfléchie du réticule vient se peindre exactement sur le réticule lui-même. On note la graduation du tirage correspondant à cette position; c'est un point de départ pour les réglages ultérieurs.

La rigueur de ce réglage dépend de la perfection de la surface de la glace argentée plane. Si l'on a pris soin au préalable de vérifier le parallélisme approché des faces en interposant la lame devant l'objectif pointé sur des objets éloignés et en constatant que la mise au point n'est pas altérée, on peut très simplement éliminer la petite courbure des faces (1). Il suffit, dans le réglage précédent, de tourner la glace argentée de 180°, de façon à réfléchir la lumière sur l'autre face de l'argenture; la mise au point de l'image du réticule est légèrement changée : le foyer principal est compris évidemment dans l'intervalle des deux tirages ainsi obtenus.

2° *Réglage du foyer principal du collimateur.* — Le collimateur se règle au moyen de la lunette. A cet effet, on vise la fente du collimateur dont on règle le tirage de manière que son image se fasse exactement sur la croisée des fils; on note le tirage marqué sur le tube : on est assuré que la fente est au foyer principal de l'objectif du collimateur.

3° *Réglage de l'axe optique de la lunette.* — Les axes optiques du collimateur et de la lunette doivent être parallèles au plan du limbe ; le constructeur la règle en général d'une manière très approchée, mais il faut toujours un contrôle précis. La lame argentée sert à vérifier si cette condition est remplie, où à rectifier les appareils si elle ne l'est pas. L'opération s'exécute en même temps que le réglage du foyer.

En effet, lorsqu'on observe par réflexion normale l'image du réticule, on peut, par une inclinaison convenable de la lame réfléchissante, amener le

(1) Cette petite courbure ou mieux la petite irrégularité de forme de la surface réfléchissante se trahit souvent par un effet d'*astigmatisme;* le foyer de lumière du fil vertical n'est pas le même que celui du fil horizontal : si l'on note les deux tirages particuliers à ces deux cas, et qu'on opère suivant la règle ci-dessus, on reconnaîtra que l'une ou l'autre des deux opérations donne le même résultat définitif. Lorsque la glace employée donne de trop fortes différences, il faut la rejeter.

Pour choisir ces glaces, il est bon de les étudier d'abord par réflexion sous une incidence oblique : le rayon de courbure du plan d'incidence est, d'après la théorie élémentaire des caustiques, multiplié par le sinus carré de l'angle d'incidence. C'est le moyen d'exploration employé par Foucault pour l'étude des surfaces planes.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

fil horizontal à coïncider avec son image. On tourne alors de 180° l'alidade qui porte la lunette autour de l'axe du cercle, et l'on répète l'observation.

La réflexion se fait sur l'autre face de la lame argentée. On aperçoit dans le champ le fil horizontal du réticule et son image, en général non superposés : cela prouve que l'axe optique de la lunette n'est pas normal à l'axe de rotation, et la distance du fil et de son image donne évidemment le double de l'erreur d'inclinaison. On corrige moitié par un petit mouvement angulaire de la lame, moitié par le déplacement du réticule, et l'on recommence l'opération. Cette fois, l'erreur qu'on observe doit être très petite; on la corrige de la même manière jusqu'à ce qu'elle disparaisse.

4° *Réglage de l'axe optique du collimateur.* — Le collimateur n'a pas, par construction, d'axe optique défini. Le plan de la fente ne suffit pas, il faut un repère dans le sens horizontal. On l'obtient en collant à la cire un petit fil qu'on règle à volonté en hauteur d'après son image dans la lunette. Le réglage sera parfait lorsque l'image de ce fil tombera sur le fil horizontal de la lunette préalablement réglée.

Si la hauteur de la fente est très petite (ce qui est un inconvénient dans beaucoup de cas), le fil est inutile, et l'on considère à vue le milieu de la fente comme définissant l'axe optique. Dans ce cas, il est nécessaire d'ajouter des rectifications convenables au support du collimateur, ce qui est toujours une complication : l'artifice précédent les évite.

5° *Réglage de la position du prisme.* — Le prisme posé sur la plate-forme centrale doit être réglé de manière que son arête soit perpendiculaire au plan du limbe ou au plan des axes optiques de la lunette et du collimateur.

On supposera d'abord que la plate-forme centrale est soigneusement construite, c'est-à-dire que son axe de rotation est bien perpendiculaire au plan du limbe; on s'en assure à l'aide de la glace réfléchissante fixée sur cette plate-forme de manière que l'image réfléchie du milieu de la fente tombe sur le centre du réticule; la coïncidence doit être conservée, lorsqu'on tourne la glace autour de l'axe mobile et qu'on suit l'image réfléchie avec la lunette.

Cette rigueur de construction étant constatée, le réglage des axes optiques permet de régler successivement chaque face en réfléchissant sur chacune d'elles l'image de la fente du collimateur, de manière à en amener le milieu ou le repère sur le fil horizontal de la lunette.

Mais lorsqu'une des faces est réglée, il faut régler la seconde sans altérer le réglage de la première. On y parvient aisément par la disposition des vis calantes de la plaque additionnelle qui supporte le prisme; il suffit que chacune des faces du prisme soit perpendiculaire à la ligne qui joint deux vis. Pour les prismes de 60°, les trois vis calantes forment un trépied équilatéral.

Grâce à cette disposition, le réglage de la seconde face s'effectue en manœuvrant la vis qui fait tourner la première autour d'une perpendiculaire à son plan, ce qui n'en altère pas le réglage.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Les deux faces étant toutes deux perpendiculaires au plan du limbe, l'arête est normale à ce plan, ce qui est la condition théorique.

Comme vérification, l'image réfractée de la fente, c'est-à-dire le spectre visible, doit être coupée par une ligne noire transversale (ombre du fil métallique) en coïncidence avec le fil horizontal de la lunette.

Le prisme porte en lui-même les éléments de son réglage indépendamment du réglage du collimateur et de la lunette. En effet, les rayons incidents parallèles à la section droite du prisme sont les seuls qui se réfractent parallèlement à cette section; donc, si la vérification précédente n'a pas lieu, c'est que les axes optiques du collimateur et de la lunette, considérés comme parallèles au plan du limbe, ne le sont pas rigoureusement. Pour reconnaître dans quel sens il faut modifier leur inclinaison, il suffit d'observer l'erreur que présente le rayon réfracté : la loi de réfraction dans une section oblique montre que l'erreur d'inclinaison est inverse de l'effet apparent.

La plate-forme centrale du goniomètre qui porte le prisme doit être munie d'une graduation en degrés et d'un index fixe pour définir *a priori* la position du prisme dans l'observation des radiations invisibles qu'on veut amener au minimum de déviation.

Lorsque l'axe de la plate-forme n'est pas parallèle à l'axe du limbe, on peut néanmoins régler le prisme, mais le réglage doit être rectifié à chaque observation. Le prisme étant mis approximativement en place, on rectifie la face d'incidence par réflexion de la fente et la face d'émergence par l'observation de l'image réfractée qui servait tout à l'heure de vérification.

6° *Réglage de la position du réseau.* — Le réseau est placé sur la plate-forme centrale; les trois vis calantes étant équidistantes, on dispose son plan perpendiculairement à la droite qui joint deux d'entre elles. On observe alors l'image *réfléchie* de la fente, et, en manœuvrant l'une de ces deux vis, on amène le milieu de la fente sur la croisée des fils. Le plan du réseau est alors perpendiculaire au plan du limbe, mais les traits ne sont pas nécessairement perpendiculaires à ce plan : on vérifie cette condition en observant les images diffractées, c'est-à-dire les spectres d'ordre de plus en plus élevé. Si leur milieu coïncide toujours avec la croisée des fils, le réglage est parfait; sinon, on remplit cette condition en manœuvrant la troisième vis qui incline le réseau dans son plan sans changer l'orientation de ce plan.

De même que le prisme, le réseau porte en lui les éléments de ce réglage, indépendamment du réglage de la lunette et du collimateur. Si l'axe optique de la lunette n'était pas parallèle au plan du limbe, le réglage précédent ne pourrait pas être rigoureusement effectué; le plan des images diffractées deviendrait un cône, ce qui avertirait l'observateur de l'inclinaison des axes optiques.

7° *Réglage de l'horizontalité et de la verticalité des fils du réticule et de la verticalité de la fente.* — Pour effectuer les mesures précises, on n'a besoin

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

que de la croisée des fils du réticule; il importe donc peu que la direction des fils du réticule et celle de la fente soient rigoureusement réglées.

Néanmoins, si l'on avait intérêt à effectuer ces réglages avec plus de précision, voici comment on pourrait opérer. L'horizontalité du fil se réglerait par la condition de suivre un point donné, de la fente, par exemple le bord du fil métallique ou un grain de poussière, lorsqu'on déplace la lunette. La verticalité du second fil serait assurée par la construction du réticule et servirait à fixer la direction de la fente.

Si l'on préfère un réglage indépendant pour la fente et le fil vertical, on peut recourir à la glace argentée qu'on règle normalement au plan du limbe: l'image directe de la fente et l'image réfléchie sur la glace doivent être parallèles entre elles. On les compare en mettant le fil vertical du réticule en coïncidence avec l'une d'elles; l'angle que fait ce fil avec l'autre donne le double de l'erreur: on corrige moitié par l'inclinaison du fil, moitié par l'inclinaison de la fente, et l'on vérifie par une nouvelle opération.

Mesure des indices de réfraction. — L'appareil étant réglé comme il vient d'être dit, la mesure de l'indice de réfraction d'un rayon suivant la loi ordinaire ne présente aucune difficulté: il suffit de mesurer l'angle du prisme et le double de la déviation minimum par l'observation des rayons réfractés à droite et à gauche. L'angle du prisme se mesure en tournant l'arête vers le collimateur, de façon que le faisceau incident se partage en deux faisceaux réfléchis sur les deux faces. L'angle de ces deux faisceaux est égal au double de l'angle A du prisme. On peut recommencer l'opération autant de fois qu'on veut en faisant varier de quelques minutes la position du prisme.

La mesure du double de la déviation 2Δ n'offre aucune difficulté; la formule de Newton

$$n = \frac{\sin\frac{A+\Delta}{2}}{\sin\frac{A}{2}},$$

donne l'indice de la radiation monochromatique sur laquelle on a opéré.

On pourrait également utiliser une position quelconque, à la condition de mesurer l'angle d'incidence e, lié à l'angle d'émergence e' par la condition

$$e + e' = D + A,$$

D étant la déviation supposée quelconque, et l'indice par la formule bien connue

$$n^2 \sin^2 A = \sin^2 e + \sin^2 e' + 2 \sin e \sin e' \cos A.$$

Pour mesurer e, il suffit de pointer sur le collimateur, puis sur l'image

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

réfléchie par la face d'incidence : on a, pour le déplacement α de la lunette,

$$\alpha = \pi - 2e.$$

On pointe de la même manière sur le rayon réfracté : le déplacement angulaire de la lunette est précisément D. On a donc tous les éléments nécessaires au calcul de l'indice.

Mesure des longueurs d'onde. — Il n'y a aucune difficulté spéciale. Comme avec les prismes, on a à redouter les effets de changement des foyers dus soit à la courbure de la surface striée, soit à une variation systématique dans la distance des traits. On atténue beaucoup l'effet perturbateur en plaçant le réseau dans le milieu de la face striée sur l'axe de l'instrument; la marche des rayons est alors symétrique, condition qu'on ne peut pas obtenir aussi aisément avec les prismes.

Perturbations causées par les défauts de planéité des faces du prisme réfringent.

Lorsqu'on doit mesurer l'angle de deux faisceaux qui ont subi des modifications diverses ou produites par des faces différentes, on rencontre souvent, au point de vue pratique, des difficultés qui rendent illusoire la précision des instruments et des réglages. Ainsi, dans le cas ci-dessus résumé de la mesure de l'indice de réfraction sous une incidence quelconque du prisme, on est amené à pointer sur un faisceau direct, qu'on peut supposer formé de rayons parallèles, sur un faisceau réfléchi par une face et sur un troisième réfracté par les deux faces du prisme. Excepté dans le cas d'une perfection complète de ce prisme, on constatera que les trois faisceaux, qui théoriquement devraient être formés de rayons parallèles, exigent une mise au point différente.

Il en résulte que la précision des pointés devient illusoire : en effet, la forme de l'image estompée, qui se forme alors dans le plan du réticule, dépend de la forme de la section droite du faisceau, car c'est seulement au foyer que les images en sont indépendantes. La mesure des angles α et D n'a donc plus aucune signification précise. La méthode de l'incidence quelconque ne peut donc pas s'appliquer dans le cas où les faces du prisme sont un peu courbes.

La méthode plus simple du minimum de déviation est également en défaut (si l'on veut obtenir toute l'exactitude que comportent le limbe et la finesse des pointés). En effet, bien que la mise au point des rayons réfractés à droite ou à gauche soit exactement la même, la déviation qu'on mesure dépend de la position du prisme sur la plate-forme, ainsi qu'on le verra plus loin.

La mesure de l'angle du prisme est également entachée d'une erreur de même ordre, quand même les deux faces auraient la même courbure, ce qui donnerait la même mise au point pour les images réfléchies sur les deux faces.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Évaluation de l'erreur commise sur l'indice de réfraction par l'emploi d'un prisme à surfaces légèrement courbes.

Considérons la section droite du prisme, dont les faces sont supposées légèrement cylindriques. L'angle du prisme n'a plus de signification précise, puisque deux éléments correspondants des deux faces forment un prisme réfringent; il y a donc en réalité une infinité de prismes. Mais il y a cela de particulier que, si les courbures sont faibles, tous les rayons émanés d'un point lumineux très éloigné se réfractent suivant un pinceau convergent réel ou virtuel. Ce pinceau, reçu dans une lunette, donne un foyer bien défini qui se prête à des pointés précis. Il en est de même pour les rayons réfléchis sur les faces légèrement courbes.

Il en résulte que, sauf une légère variation de la mise au point de la lunette d'observation, tout se passe en apparence, dans les mesures effectuées avec un prisme à faces courbes (mais également courbes), comme si les faces étaient parfaitement planes; seulement, les lectures des rayons réfléchis et des rayons réfractés sont entachées d'erreurs proportionnelles à la courbure des faces, de sorte que la substitution de l'angle apparent du prisme et de la déviation apparente dans la formule de Newton produit une erreur sur la valeur de l'indice calculé.

Pour évaluer les erreurs commises dans ces diverses mesures, remarquons d'abord que, lorsqu'une lunette est mise au point, le faisceau lumineux qui forme l'image focale peut être, au point de vue de sa direction, réduit à l'axe principal de l'objectif, c'est-à-dire à la droite qui joint le réticule au centre optique, car, en vertu de la propriété des lentilles, l'image focale reste la même quelle que soit la partie de l'objectif couverte par le faisceau.

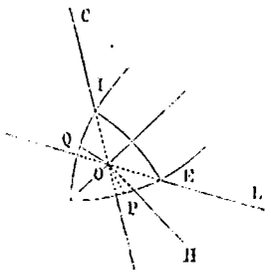
Il en résulte que, lorsqu'on mesure l'angle que forment deux faisceaux légèrement convergents ou divergents par le déplacement angulaire d'une lunette dirigée successivement sur chacun de ces deux faisceaux, l'angle obtenu est celui que font les deux rayons en coïncidence successivement avec l'axe principal de la lunette.

Appliquons ce résultat à la mesure de l'angle du rayon réfracté au minimum de déviation. Soient CI (*fig.* 1) la direction du faisceau incident, défini par l'axe principal du collimateur, et EL la direction du faisceau réfracté, défini par l'axe principal de la lunette: nous savons qu'il n'est pas besoin de considérer les autres rayons, parce qu'ils viennent tous converger au même point. Il en résulte que la déviation des rayons est celle qui correspond à un prisme dont l'angle est celui des éléments I et E. Soit O le point de concours des axes optiques, qu'on peut confondre, lorsque le goniomètre est bien réglé, avec la trace de l'axe de l'instrument. On le supposera, de plus, sur la bissectrice de la section droite du prisme. On prendra comme éléments de repère les élé-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ments P et Q, pieds des perpendiculaires abaissées du point O, et l'on désignera par A_0 leur angle. L'angle des éléments I et E est égal à A_0, augmenté algébriquement des deux angles de contingence de Q à I et de P à E.

Fig. 1.



Si ρ désigne le rayon de courbure commun aux deux faces, on a

$$\rho\varepsilon = QI = PE$$

par symétrie. Or, dans le triangle mixtiligne OPE, on a

$$PE = OP \operatorname{tang} EOP.$$

Si l'on élève en O une perpendiculaire OH à la bissectrice intérieure du prisme, il vient

$$EOP = EOH + HOP = \frac{\Delta}{2} + \frac{A}{2},$$

d'où, en posant $PE = p$,

$$\rho\varepsilon = p \operatorname{tang} \frac{A + \Delta}{2},$$

A et Δ étant les valeurs vraies ou approchées de l'angle du prisme et de la déviation, peu importe, puisqu'on ne calcule qu'un terme de correction. Donc la déviation D' observée correspond à l'angle réfringent $A_0 + 2\varepsilon$ ou au demi-angle

$$\frac{A_0}{2} + \frac{p}{\rho} \operatorname{tang} \frac{A + \Delta}{2}.$$

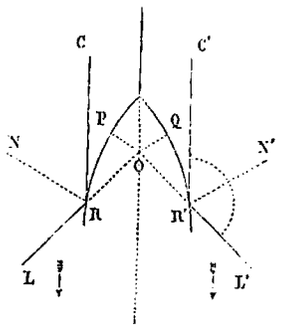
D'autre part, lorsqu'on mesure l'angle du prisme par réflexion *d'un même faisceau parallèle* sur les deux faces du prisme, les deux positions de l'axe principal de la lunette ORL et OR'L' (*fig.* 2) correspondent à la réflexion sur les deux éléments R et R'; ces deux éléments ne forment pas le même angle que dans le cas précédent.

Comme le prisme est fixé à la plate-forme centrale, dont l'axe coïncide sensiblement avec l'axe général du cercle, le point O et les pieds des perpendi-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

culaires OP, OQ sont les mêmes que précédemment ; l'angle POR ou son égal QOR' (si le prisme est symétriquement placé par rapport aux rayons incidents)

Fig. 2.



est égal au complément du demi-angle approché du prisme. L'angle de contingence γ de l'arc PR ou QR' est donc donné par la relation approximative

$$\rho\gamma = p \cot\frac{A}{2}.$$

Par suite, le demi-angle du prisme que l'on mesure ainsi est égal à

$$\frac{A_0}{2} = \frac{p}{\rho}\cot\frac{A}{2}.$$

Ce n'est pas, comme on le voit, l'angle réfringent dont on observe la déviation minimum; par conséquent, les deux angles ne sont pas ceux qu'il faut substituer dans la formule de Newton

$$n = \sin\frac{A+\Delta}{2} : \sin\frac{A}{2}.$$

Il faut faire subir à l'un ou à l'autre une modification. Supposons que ce soit sur l'angle du prisme que l'on reporte la correction.

Si dans la formule de Newton

$$n = \frac{\sin(\alpha+\delta)}{\sin\alpha},$$

dans laquelle $\alpha = \frac{A}{2}$, $\delta = \frac{\Delta}{2}$, on donne à α la variation très petite $d\alpha$, on a pour n la variation dn, qui se réduit à

$$dn = -\frac{\sin\delta}{\sin^2\alpha}\,d\alpha;$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

si la variation $d\alpha$ représente l'erreur commise sur le demi-angle du prisme, dn représentera l'erreur cherchée. Le demi-angle réfringent qui correspond à la déviation observée Δ est, comme on l'a vu plus haut,

$$\frac{A_0}{2} + \frac{p}{\rho}\operatorname{tang}\frac{A+\Delta}{2} = \alpha;$$

c'est l'angle vrai α. Celui qu'on observe est l'angle erroné $\alpha + d\alpha$; il est égal à

$$\frac{A_0}{2} + \frac{p}{\rho}\cot\frac{A}{2} = \alpha + d\alpha,$$

d'où

$$d\alpha = \frac{p}{\rho}\left(\cot\frac{A}{2} - \operatorname{tang}\frac{A+\Delta}{2}\right),$$

d'où l'on conclut la valeur de l'erreur commise sur l'indice. Si on la prend en signe contraire, on aura la *correction* à ajouter algébriquement à la valeur calculée de l'indice de réfraction obtenu en substituant les valeurs *apparentes* de A et de Δ,

$$dn = +\frac{p}{\rho}\frac{\sin\frac{\Delta}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}}\left(\cot\frac{A}{2} - \operatorname{tang}\frac{A+\Delta}{2}\right),$$

qu'on rend calculable par logarithmes en transformant la parenthèse :

$$dn = \frac{p}{\rho}\frac{\sin\frac{\Delta}{2}\cos\left(A+\frac{\Delta}{2}\right)}{\sin^2\frac{A}{2}\cos\frac{A+\Delta}{2}}.$$

L'application numérique exige que l'on connaisse la distance p de l'axe du goniomètre aux faces du prisme, distance facile à mesurer, et le rayon de courbure ρ commun aux deux faces.

Détermination du rayon de courbure des faces du prisme. — Le dépointement de l'image réfléchie sur les faces du prisme permet de calculer le rayon de courbure cherché. Les faces étant presque toujours convexes, la distance focale des rayons réfléchis s'allonge. La différence x des tirages entre l'image directe des rayons parallèles du collimateur et l'image réfléchie donne la mesure de ce rayon, si l'on connaît la distance focale principale de l'objectif et l'angle d'incidence; on se sert d'abord pour cela de la formule des caustiques

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

par réflexion (1) des rayons parallèles,

$$F = -\frac{\rho}{2}\cos i;$$

$-\rho$ est le rayon de courbure avec son signe; F est la distance du point de convergence des rayons réfléchis.

Substituant cette valeur dans la formule des lentilles,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{f} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p'}, \quad \text{avec} \quad p' = F,$$

on en conclut la valeur de p ou mieux de $p - f$, qui est très petite, puisque le dépointement $x = p - f$ est faible :

$$\frac{p-f}{pf} = -\frac{2}{\rho\cos i} \quad \text{ou approximativement} \quad \frac{x}{f^2} = -\frac{2}{\rho\cos i},$$

d'où l'on conclut ρ. Comme on observe sous l'incidence $i = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$ lorsqu'on mesure l'angle du prisme, $\cos i = \sin\frac{A}{2}$, ce qui constitue une petite simplification.

On peut encore déduire ρ de la mesure du dépointement de la lunette dans l'observation du minimum de déviation.

Nous partirons de la formule générale des caustiques par réfraction citée plus haut,

$$\frac{\cos^2 e}{D} - \frac{n\cos^2 r}{F} = \frac{\cos e - n\cos r}{R},$$

formule qui exprime la relation entre le rayon de courbure R de la face d'entrée, la distance D du point lumineux, la distance F du point correspondant de la caustique, l'indice n et l'angle d'incidence; les longueurs D, F, R sont comptées positivement dans le même sens.

Pour la face d'émergence, on aura une expression analogue :

$$\frac{\cos e'}{D'} - \frac{n'\cos^2 r'}{F'} = \frac{\cos e' - n'\cos r'}{R'}.$$

---

(1) Qu'on déduit de la formule générale des caustiques par réfraction

$$\frac{\cos^2 i}{D} - \frac{n\cos^2 r}{F} = \frac{\cos i - n\cos r}{R},$$

i et r, angles d'incidence et de réfraction; n, indice; D, distance du point lumineux donnant le pinceau incident; F, distance du point correspondant de la caustique; R, distance du centre de courbure de la ligne dirimante, toutes ces distances étant comptées positivement du même côté de la courbe.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Si l'on considère la marche des rayons dans le prisme au minimum de déviation, on aura les relations suivantes, en négligeant l'épaisseur moyenne du prisme devant F, qui est très grand (voisin de l'infini),

$$n' = \frac{1}{n}, \quad D' = F,$$
$$e' = r,$$
$$r' = e,$$

d'où

$$\frac{n\cos^2 r'}{F} - \frac{\cos^2 e'}{F'} = \frac{n\cos r - \cos e}{R'}.$$

On élimine F par simple addition membre à membre.

$$\cos^2 e\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{F'}\right) = \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)(\cos e - n\cos r).$$

De plus, dans le cas du minimum de déviation $e = \frac{A+\Delta}{2}$, $r = \frac{A}{2}$; substituant ces valeurs dans la formule, il vient, tout calcul fait,

$$\frac{1}{D} - \frac{1}{F'} = +\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)\frac{\sin\frac{\Delta}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{A+\Delta}{2}}.$$

On voit que le prisme agit comme une véritable lentille dont la distance focale principale serait égale à l'inverse du second membre.

Puisqu'on règle le collimateur de façon à donner des rayons parallèles, $D = \infty$. Quant à la distance du point de convergence F, on l'observe avec la lunette, c'est-à-dire à travers un objectif de distance focale f:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = f, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{F'} = \frac{1}{f},$$

d'où

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{p} = \frac{1}{F'} \quad \text{ou approximativement} \quad \frac{p-f}{f^2} = \frac{1}{F'}.$$

On en conclut, pour le dépointement $y = p - f$ de la lunette,

$$y = f - p = f^2\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right)\frac{\sin\frac{\Delta}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A+\Delta}{2}}.$$

Pour suivre les conventions de signe de la formule générale, R′ et R sont de

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

signes contraires, mais R′ est positif; donc $R' = -R = \rho$:

$$y = \frac{2f^2}{\rho} \frac{\sin\frac{\Delta}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{A+\Delta}{2}},$$

équation qui donne le dépointement y en fonction de la valeur du rayon de courbure.

Relation entre les déplacements du foyer des rayons réfléchis et réfractés.

Remarque. — Il résulte de la comparaison de cette formule avec la précédente,

$$x = -\frac{2f^2}{\rho\cos i},$$

que les dépointements sont de signes contraires, comme l'expérience le prouve (p. 12); en outre, il existe une relation assez simple entre eux, à laquelle on a fait allusion (p. 13), surtout si l'on observe le dépointement par réflexion lors de la mesure de l'angle du prisme, alors que $i = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$, d'où $\cos i = \sin\frac{A}{2}$.

L'élimination de ρ conduit à l'expression

$$y = -x \frac{\sin\frac{\Delta}{2}}{\cos^2\frac{A+\Delta}{2}},$$

qui lie le dépointement y des rayons réfractés au minimum de déviation au dépointement des rayons réfléchis sous l'incidence correspondant à la mesure de l'angle du prisme.

Telle est la relation à laquelle il a été fait allusion plus haut (p. 13).

Application numérique. Vérification de la relation précédente. — J'ai donné, au début du Mémoire (p. 33), les valeurs du tirage de la lunette du *petit goniomètre* dans l'observation des images de la fente réfléchies et réfractées par le prisme de spath d'Islande qui m'a servi dans ces expériences :

		Diff.
Image réfléchie	1,76	$x = -0,30$
Image directe (rayons parallèles)	1,46	$y = +0,35$
Image ordinaire	1,11	
Image extraordinaire	1,30	$y' = 0,16$

J'ai en même temps mesuré les déviations minimum correspondantes des

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

deux rayons $\Delta = 52^\circ 4'$ (rayon ordinaire), $\Delta' = 36^\circ 32'$ (rayon extraordinaire). L'angle du prisme étant sensiblement égal à 60°, on trouve

$$y = -1,406x, \quad y' = -0,70x.$$

Si l'on substitue $x = -0,30$, on calcule $y = 0,42$, $y' = 0,21$. L'erreur s'élève à $0^c,07$ pour y et $0^c,06$ pour la seconde, c'est-à-dire un peu plus de $\frac{2}{3}$ de millimètre et de $\frac{1}{2}$ millimètre, quantités de l'ordre de l'incertitude des mesures.

Calcul du rayon de courbure des faces. — 1° D'après le dépointement du rayon réfléchi :

$$\rho = -\frac{2f^2}{x\cos i}, \quad x = +0,30, \quad f = 24^c,0, \quad i = \frac{\pi}{2} - 30^\circ = 60^\circ,$$

d'où

$$\rho = 7680^c \quad \text{ou} \quad 76^m,80.$$

2° D'après le dépointement des rayons réfractés :

$$\rho = \frac{2f^2}{y} \frac{\sin\frac{\Delta}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{A+\Delta}{2}}, \quad y = 0,35, \quad y' = 0,16, \quad \Delta = 52^\circ 4', \quad \Delta' = 36^\circ 32',$$

d'où

$$\rho = 92^m,55, \quad \rho = 100^m,02.$$

On voit que la courbure est relativement très faible, ce qui explique la divergence (1) des deux modes de mesure par l'observation des rayons réfléchis ou réfractés; les deux évaluations par les rayons réfractés sont, au contraire, aussi concordantes qu'il est permis de l'espérer.

---

(1) Je pense que cette divergence est due à l'action de la partie plus courbée de la surface du prisme le long de l'arête réfringente. J'ai refait la même série de mesures en couvrant cette arête d'une bande de papier noir; les divergences sont alors plus faibles et de signes contraires :

Image réfléchie	1,72	$x = -0,25$
» directe	1,47	$y = 0,38$
» réfractée ordinaire	1,09	$y' = 0,19$
» réfractée extraordinaire	1,28	

D'après $x = -0,25$, on calcule $y = 0,35$, $y' = 0,17$.

La vérification expérimentale des formules est donc aussi satisfaisante que possible.

On en déduit les trois valeurs suivantes du rayon de courbure en partant des trois dépointements x, y, y',

$$93,23, \quad 85,25, \quad 81,77,$$

qui s'accordent entre elles mieux que dans l'exemple ci-dessus.

Au moment de mettre sous presse, je trouve sur mes cahiers d'expériences deux autres

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Difficultés spéciales relatives à la mesure de l'angle du prisme dans le cas où les faces sont courbes.

Si l'on se reporte à l'analyse qui a permis d'évaluer l'erreur commise sur l'indice de réfraction et a donné un moyen simple de l'éliminer par le choix d'un angle réfringent convenable, on reconnaîtra que la méthode d'observation suppose que les rayons incidents sont parallèles entre eux.

Le parallélisme du faisceau incident peut s'obtenir d'après le réglage indiqué plus haut. Mais quelle serait l'influence d'une petite erreur dans le réglage du collimateur sur la mesure de l'angle du prisme?

Les deux rayons incidents HR et H'R' (*fig.* 2), au lieu d'être parallèles et par conséquent de faire un angle nul, feraient entre eux un petit angle θ dont la tangente trigonométrique serait sensiblement égale au quotient de la distance HH' des points d'incidence, par la distance du point de concours de HR et H'R'. Soit F cette distance. On trouve aisément que $RR' = 4p \cos\frac{A}{2}$, d'où

$$\tang\theta = \frac{4p}{F}\cos\frac{A}{2} \quad \text{ou approximativement} \quad \theta = \frac{4p}{F}\cos\frac{A}{2}.$$

---

séries, faites le 5 novembre 1877, après la série des clichés ρ (*voir* p. 26) :

Collimateur.....	2,00		2,19	(foyer principal)	
Image réfléchie.....	2,10		1,91		
» directe.....	1,82	$x = -0,28$	1,63	$x = -0,28$	
» réfractée ordinaire.....	1,45	$y = 0,37$	1,23	$y = 0,40$	

Ces deux séries ont été faites à titre de renseignement avant de mesurer l'angle du prisme : après avoir effectué la première série de mesures, je m'étais aperçu que le réglage du collimateur était un peu défectueux et je recommençai les opérations : on voit que les résultats s'accordent entièrement avec ceux des séries faites spécialement en vue de l'étude des dépointements.

Voici les résultats obtenus dans les deux cas pour la mesure de l'angle A du prisme; ils seront utilisés plus loin.

Avec le réglage défectueux :	Avec le réglage plus parfait :
$2A = 119°59'40''$	$2A = 120°2'30''$
20	
40	
40	
Moyenne..... 119.59.35	

La différence entre les deux valeurs de 2A est 2'55"; elle correspond à une différence de tirage de $0^{c},19$ du collimateur; les objectifs employés sont, il est vrai, en quartz, mais la distance focale est à quelques millimètres près la même pour la raie D que celle des objectifs achromatiques crown-flint employés ci-dessus.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Or la distance F est la distance conjuguée de la position de la fente du collimateur :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f},$$

avec $p' = F$, d'où

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{F};$$

d'où l'on conclut, en posant $p = f - z$ (1) et remarquant que p est très voisin de f,

$$\frac{1}{F} = \frac{z}{f^2}, \quad \text{d'où} \quad \theta = -\frac{(n-1)z}{f^2}\cos\frac{A}{2}.$$

L'angle θ est donc proportionnel au dépointement du collimateur par rapport au tirage correspondant au foyer principal, θ étant positif; lorsque le point de convergence est situé du côté de la fente, z est aussi positif.

Il en résulte que l'angle des deux rayons réfléchis sur les deux faces se trouve diminué de l'angle θ. Or l'angle que l'on mesure alors est égal à

$$4\left(\frac{A_0}{2} + \frac{p}{\rho}\cot\frac{A}{2}\right);$$

il en résulte que l'on a alors, pour l'angle à substituer dans la formule de Newton,

$$\frac{A_0}{2} + p\left(\rho\sin\frac{A}{2} + \frac{z}{f^2}\right)\cos\frac{A}{2}.$$

Telle est la valeur de l'erreur commise sur l'angle du prisme par un défaut de réglage du collimateur : on voit avec quel soin il faut opérer ce réglage, si l'on cherche à obtenir des résultats précis.

Remarque. — On peut profiter de la loi qui représente cette erreur pour éliminer l'effet de la courbure sur la valeur de l'angle du prisme et obtenir A_0 directement; on a vu que A_0 est précisément l'angle qu'on obtiendrait par réflexion normale sur les faces.

En effet, à la place de $\frac{1}{\rho\sin\frac{A}{2}}$ mettons sa valeur en fonction du dépointe-

(1) On donne à z le signe — parce que les valeurs positives de z donnent un angle inverse de celui de la figure sur laquelle on raisonne; on arriverait au même résultat en donnant le même sens positif à p et p'.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ment x produit par la réflexion des rayons parallèles sous l'incidence $i = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$; on a

$$x = -\frac{2f^2}{\rho \sin\frac{A}{2}},$$

d'où l'on conclut, pour la valeur du demi-angle,

$$\frac{A_0}{2} = \frac{p\cos\frac{A}{2}}{f^2}\left(\frac{x}{2} - z\right).$$

On annulera le terme qui exprime l'erreur en dépointant le collimateur de la moitié du dépointement de la lunette, ce qui revient à répartir le dépointement par moitié sur la lunette et sur le collimateur.

Cette opération a l'avantage de fournir une vérification de la valeur de A_0, indépendamment de p et de f, valeur qu'on peut observer directement par réflexion normale.

Vérification numérique. — Les vérifications portent sur de très petits angles, différences d'angles considérables, relevés sur des images qui ne sont pas absolument parfaites; on ne doit donc pas s'attendre à des coïncidences très rigoureuses.

Pour vérifier la valeur de l'angle θ, j'ai observé avec le *petit goniomètre* le double de l'angle du prisme de spath, le tirage du collimateur variant de millimètre en millimètre dans le voisinage du foyer principal:

Tirage.		Diff.
2,30	$2A = 120^\circ.4'.57''$	$1'.17''$
2,20	3.40	1.20
2,10	2.20	1.20
2,00	1.00	

Le sens de la variation est bien celui qui a été prévu. En diminuant le tirage on diminue l'angle observé. Les différences sont sensiblement égales: la différence moyenne est de $1'19''$. Le calcul de $\tang\theta$ donne, en substituant,

$$z = 0,1, \quad p = 5^{mm}, \quad \frac{A}{2} = 30^\circ, \quad f = 24^{cm}, \quad \theta = 1'2''.$$

La différence entre le calcul et l'observation est un peu forte ($17''$), mais la valeur de p est probablement un peu forte aussi [1].

---

[1] Dans les expériences citées précédemment en note, une différence de $0^c,19$ de tirage donnait, avec le signe convenable, $2'55''$: le calcul donnerait $1'58''$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Le foyer principal du collimateur, réglé suivant la marche indiquée plus haut, est compris entre 2,14 et 2,10, suivant deux opérations faites à plusieurs jours de distance; si l'on adopte la moyenne 2,12, l'angle du prisme mesuré avec un faisceau parallèle est donné par

$$2A = 120^\circ 2' 20'' + 0{,}2 \times 1' 20'' = 120^\circ 2' 36'',$$

d'où

$$A = 60^\circ 1' 18''.$$

On a vu que le dépointement x, produit par réflexion des rayons incidents sur les faces du prisme, a été trouvé de 0,30 et 0,25; adoptant 0,28 comme moyenne,

$$\frac{x}{2} = 0{,}14.$$

D'après ce qui a été dit précédemment, si l'on mesure l'angle du prisme avec un dépointement $z = \frac{x}{2}$, on doit retomber sur l'angle A_0. Si donc on ajoute $\frac{x}{2} = 0{,}14$ au tirage correspondant au foyer principal 2,12, on obtient 2,26. L'angle correspondant à ce tirage se déduit par interpolation des valeurs précédentes :

$$2A_0 = 120^\circ 3' 40'' + 0{,}6 \times 1' 17'' = 120^\circ 4' 26'',$$

$$A_0 = 60^\circ 2' 13''.$$

Or A_0, angle des faces du prisme sous l'incidence normale, a été mesurée directement avant et après la série précédente :

$$A_0 = \begin{matrix} 60^\circ 2' 10'', \\ 60^\circ 1' 58'', \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{Moyenne.} \\ 60^\circ 2' 4''. \end{matrix}$$

La différence 9″ est de l'ordre de l'incertitude des pointes et de la détermination du tirage correspondant au foyer principal.

Calcul numérique de l'erreur sur l'indice de réfraction de la raie D (rayon ordinaire).

Nous avons maintenant tous les éléments pour effectuer le calcul numérique de l'erreur causée sur l'indice de réfraction par la courbure des faces. La correction calculée précédemment (p. 60) est

$$dn = \frac{p}{\rho} \frac{\sin\frac{\Delta}{2}\cos\left(A + \frac{\Delta}{2}\right)}{\sin^3\frac{A}{2}\cos\left(\frac{A+\Delta}{2}\right)}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Appliquons cette formule au cas du rayon ordinaire du prisme de spath qui m'a servi dans mes expériences :

$$p = 0^{m},005, \quad \rho = -95^{m} \text{ environ}, \quad A = 60^{\circ}2', \quad \Delta = 52''.$$

ρ doit être ici considéré comme négatif, car, d'après l'analyse géométrique du phénomène (p. 58), l'angle $\frac{A_0}{2}$ est augmenté de $+\frac{p}{\rho}\cot\frac{A}{2}$. Or, si la face est convexe, cet angle est moindre que $\frac{A_0}{2}$; donc ρ est négatif.

On trouve, pour la valeur de la correction,

$$dn = -0,000023.$$

Cette erreur sur l'indice est évidemment très petite, parce que la courbure des faces du prisme est très faible; toutefois, elle n'est pas négligeable, ainsi qu'on en peut juger par le cas présent choisi comme exemple, lorsqu'on veut profiter de toute l'exactitude que comportent les mesures. En effet, l'angle $d\alpha$,

$$d\alpha = \frac{p}{\rho}\left(\cot\frac{A}{2} - \operatorname{tang}\frac{A+\Delta}{2}\right),$$

qui exprime l'erreur relative aux angles réfringents qu'on met sous la forme, calculable par logarithmes,

$$d\alpha = \frac{p}{\rho}\,\frac{\cos\left(A+\frac{\Delta}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A+\Delta}{2}},$$

est ici numériquement égal à $9''$ environ; mais cela tient à ce que l'angle du prisme est, pour le rayon ordinaire, très voisin de la valeur qui annulerait $d\alpha$ (*voir* plus loin, p. 71).

Pour s'en convaincre, il suffit de répéter les mêmes calculs avec le rayon extraordinaire. On a

$$dn = -0,000039 \quad \text{et} \quad d\alpha = 7''.$$

Ainsi la correction dn est presque double et altère notablement les décimales sur lesquelles on compte d'ordinaire dans ce genre de calcul, quoique l'erreur $d\alpha$ soit plus petite.

On voit par ce qui précède que, si la courbure des faces ou la grandeur de p était trois ou quatre fois plus forte (ce qui n'aurait rien d'exagéré), l'erreur commise sur l'indice, même dans le cas très favorable où l'on opère, serait tout à fait inadmissible pour des expériences de précision.

Cette application numérique a encore un autre but : c'est celui de montrer que, malgré ses imperfections, la méthode de mesure de l'angle du prisme

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

par réflexion oblique est supérieure à la méthode de mesure par réflexion normale, qui, à un point de vue absolu, paraît plus correcte. En effet, la réflexion normale aux faces donne directement l'angle A_0, tandis que la réflexion oblique donne $A_0 + \frac{2p}{\rho}\cot\frac{A}{2}$. Mais ce dernier angle est très voisin de l'angle réfringent observé $A_0 + \frac{2p}{e}\operatorname{tang}\frac{A+\Delta}{2}$; il en résulte que l'angle réfringent est entaché de l'erreur $\frac{2p}{\rho}\operatorname{tang}\frac{A+\Delta}{2}$, qui fausse l'indice.

Dans le cas présent, si l'on adoptait l'angle $A_0 = 60°2'4''$ au lieu de l'angle $A_0 + \frac{2p}{\rho}\operatorname{tang}\frac{A+\Delta}{2} = 60°1'18''$ (1), on commettrait une erreur de $42''$, c'est-à-dire bien supérieure aux erreurs de pointés, et puisque $9''$ d'erreur donnent une erreur de 0,000023 sur l'indice, on commettrait ici une erreur encore cinq fois plus grande, $= 0{,}000115$.

Avec un prisme dont les faces seraient moins bien réussies que le prisme de spath dont j'ai fait usage, on voit à quels écarts on serait conduit, malgré la précision apparente des pointés.

Élimination de l'erreur provenant de la courbure des faces du prisme.

Les considérations précédentes montrent combien l'analyse et la correction des erreurs dues à la courbure des faces du prisme sont minutieuses; il était donc fort intéressant de rechercher les circonstances dans lesquelles ces erreurs s'éliminent d'elles-mêmes. J'ai été assez heureux pour parvenir à un résultat très simple dans le cas le plus ordinaire où l'on mesure l'angle du prisme par réflexion oblique sur ses faces; en voici l'énoncé :

THÉORÈME. — *Le choix de l'angle réfringent du prisme permet d'éliminer*

---

(1) En résumé, voici les diverses déterminations de l'angle du prisme de spath qui m'a servi dans mes expériences par réflexion oblique avec des rayons parallèles :

3 novembre 1877...	A = 60°.1'.15"	objectifs achromatiques quartz-spath..	$\theta = 12°,3$
	60.1. 3		
4 novembre 1877..	60.1.10	» simples quartz	$\theta = 12,8$
	0		
28 octobre 1879.....	60.1.18	» achromatiques crown-flint...	$\theta = 10,0$
	1.18		
Moyenne.....	60.1.10		

On a compté deux fois la dernière mesure, parce qu'elle provient de la discussion de trois déterminations.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

l'erreur sur l'indice de réfraction causée par les courbures des faces, à la condition que ces courbures soient faibles et à peu près égales: la cotangente du demi-angle du prisme doit être égale à l'indice de réfraction.

Reprenons l'expression de l'erreur commise sur l'indice de réfraction dans le cas du mode de mesure le plus généralement adopté :

$$dn = \frac{p}{\rho}\frac{\sin\frac{\Delta}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}}\left(\cot\frac{A}{2} - \operatorname{tang}\frac{A+\Delta}{2}\right).$$

On peut l'annuler de plusieurs manières :

1° Si $\rho = \infty$, c'est-à-dire si les faces sont planes.

2° Si $p = 0$, c'est-à-dire si l'arête du prisme coïncide avec l'axe de l'instrument. Il semble que cette condition, si facile à remplir, soit efficace : il n'en est rien. En effet, on n'utiliserait d'abord que la moitié du faisceau incident, ce qui réduirait l'éclat des images à la moitié de l'intensité qu'elles peuvent avoir par une position mieux choisie du prisme; ensuite on perdrait en netteté, par suite en précision dans les pointés, parce que les irrégularités de taille des faces sont toujours plus grandes le long de l'arête. En conséquence, on perdrait tout le bénéfice théorique de cette condition. Néanmoins, il était bon de la signaler, afin de montrer que p (distance de l'axe de l'instrument aux faces du prisme) doit être choisi aussi petit que possible.

3° Si l'on pose

$$\cot\frac{A}{2} - \operatorname{tang}\frac{A+\Delta}{2} = 0.$$

Dans le cas où cette condition est remplie, les mesures correspondent au même angle réfringent, ainsi qu'on peut s'en assurer d'après les expressions données plus haut (p. 60), et la substitution des valeurs de A et de Φ, observées dans la formule de Newton, donne un résultat exact pour l'indice.

La condition précédente est indépendante de la valeur absolue de la courbure des faces ρ, pourvu qu'elle soit petite et la même pour les deux faces, ainsi que de la distance p; on peut la mettre sous une forme plus élégante en transformant les tangentes en sinus,

$$\cos\frac{A}{2} = \pm\sin\frac{A+\Delta}{2},$$

et, comme la formule du minimum de déviation est

$$n\sin\frac{A}{2} = \sin\frac{A+\Delta}{2},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

il vient, pour la condition définitive,

$$\cot\frac{A}{2} = n.$$

La cotangente du demi-angle du prisme doit être égale à l'indice de réfraction.

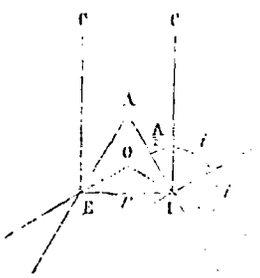
On voit qu'on doit régler l'angle du prisme suivant la réfrangibilité des radiations qu'on veut observer pour éliminer l'erreur due aux courbures des faces : plus l'indice est grand, plus l'angle est petit; inversement, plus l'indice est faible, plus l'angle est grand. Comme l'indice ne descend pas au-dessous de l'unité (gaz), l'angle maximum $\frac{A}{2} = 45°$, le prisme d'angle réfringent maximum est *rectangle*.

Si l'on rapproche cette condition de la loi de Brewster sur l'incidence de polarisation complète I,

$$\operatorname{tang} I = n,$$

on voit que $I + \frac{A}{2} = 90°$ est susceptible de deux énoncés. Le premier, c'est que le demi-angle du prisme $\frac{A}{2} = 90° - I$ est le complément de l'angle de polarisation complète (*fig.* 3). Cet énoncé donne immédiatement la valeur approchée de l'angle du prisme à employer par la seule observation de l'incidence principale.

Fig. 3.



Par exemple, Malus, qui a découvert la polarisation par réflexion, donnait comme angle de polarisation totale sur le verre qu'il employait 35° 25′ avec la surface, c'est-à-dire précisément $90° - I$; donc $\frac{A}{2} = 35° 25'$. Un prisme du même verre devrait donc avoir l'angle de 70° 50′.

L'angle de 60°, qui est généralement employé, correspondrait à un indice $n = \cot 30°$; $\log n = 0{,}23856$, d'où $n = 1{,}732$, c'est-à-dire pour les rayons très réfrangibles des substances très réfringentes. L'indice $n = \frac{3}{2}$ donne $A = 67° 23'$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Voici, du reste, une Table qui donne pour chaque valeur de l'indice croissant par dixièmes depuis $n = 1$ jusqu'à $n = 2{,}5$ les valeurs correspondantes de l'angle qui satisfait à la relation $\cot\frac{A}{2} = n$. On calculera ainsi facilement, par interpolation, pour chaque indice, la valeur de l'angle qu'il faut donner au prisme pour éliminer l'erreur produite par la courbure des faces.

n.	A	n.	A.
	° ′		° ′
1.0	90. 0	1.8	58. 7
1,1	84.34	1.9	55.31
1,2	79.37	2,0	53. 8
1.3	75. 8	2,1	50.56
1,4	71. 4	2.2	48.53
1.5	67.23	2,3	47. 0
1,6	64. 1	2,4	45.14
1,7	60.56	2,5	43.36

Le second énoncé, $I + \frac{A}{2} = 90°$, est une véritable démonstration du calcul qui a servi à établir la condition en question. En effet, l'angle de réfraction intérieure du prisme r, au minimum de déviation, est précisément égal à $\frac{A}{2}$: on en conclut donc $I + r = 90°$. D'autre part, dans la mesure de l'angle du prisme, l'angle d'incidence *idéal* est égal au complément du demi-angle du prisme (placé symétriquement par rapport aux rayons incidents), d'où il résulte, d'après la *fig.* 3, que les points d'incidence et d'émergence I et E_1 qui correspondent à la réfraction des rayons suivant les axes principaux du collimateur et de la lunette OI et OE (déviation à droite ou à gauche), sont les mêmes que les points d'incidence et d'émergence I et E qui correspondent à la réflexion des faisceaux parallèles sortant du collimateur. C'est bien là la condition requise pour éliminer l'effet de la courbure.

Un troisième énoncé se déduit de la formule primitive

$$\frac{\pi}{2} = \frac{A}{2} + \frac{A}{2} + \frac{\Delta}{2},$$

d'où

$$\pi = 2A + \Delta.$$

La déviation doit être égale au supplément du double de l'angle du prisme.

Cet énoncé s'interprète aisément sur la figure et forme une nouvelle démonstration du théorème; il signifie que l'angle des deux rayons réfléchis sur les deux faces du prisme est éga à l'angle du rayon incident et du rayon émergent au minimum de déviation.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Remarque. — Cette propriété de l'angle du prisme pour éliminer l'erreur due à la courbure des faces suppose essentiellement l'emploi de la réflexion simultanée sur les deux faces du prisme pour la mesure de l'angle; dans le cas où l'on emploierait une autre méthode de mesure, par exemple la réflexion normale sur les faces, l'élimination de l'erreur ne s'effectuerait pas.

Calcul des indices de réfraction.

Abréviation du calcul lorsque l'angle du prisme est voisin de 60°. — Lorsqu'on observe la déviation minimum des radiations comme nous l'avons supposé, l'indice de réfraction est donné par la formule

$$n = \frac{\sin\frac{A+\Delta}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.$$

Bien que l'usage des Tables de logarithmes rende le calcul numérique excessivement simple, il n'en est pas moins utile de se ménager une vérification des résultats obtenus; on peut, dans ce but, calculer avec les sinus naturels et effectuer la division, par exemple à l'aide d'un arithmomètre : la concordance des résultats par deux voies si différentes est un gage de l'exactitude du calcul.

Dans le cas où l'angle du prisme est voisin de 60°, ce calcul par les sinus naturels peut se simplifier d'une manière considérable et se réduire à deux petites opérations de parties proportionnelles. En effet, posons $\frac{A}{2} = 60° + \delta A$, on a, d'après une formule établie précédemment (p. 59),

$$\delta n = -\frac{\sin\frac{\Delta}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}}\,\delta\left(\frac{A}{2}\right).$$

On aura d'ailleurs $n = n_0 + \delta n$, n_0 étant l'indice calculé en prenant 60° au lieu de A; mais, comme $\sin\frac{A}{2}$ est alors égal à sin 30° ou $\frac{1}{2}$, il vient

$$n_0 = 2\sin\left(30° + \frac{\Delta}{2}\right),$$

par suite,

$$n = 2\sin\left(30° + \frac{\Delta}{2}\right) - 4\sin\frac{\Delta}{2}\,\delta\left(\frac{A}{2}\right).$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On trouvera ci-après une Table qui donne les valeurs de n_0 pour des demi-déviations $\frac{\Delta}{2}$ variant de 10′ en 10′. Les valeurs de n_0 ont été obtenues en doublant la valeur des sinus naturels de $\left(\frac{\Delta}{2} + 30^\circ\right)$ qu'on trouve dans la Table de Wlacq (édition publiée à Paris chez C. Jombert en 1720); les valeurs intermédiaires s'obtiennent par un calcul facile lorsqu'on réduit les secondes d'arc en fractions de minute à l'aide d'une petite Table auxiliaire, qu'on trouvera également plus loin; la colonne intitulée ∂n pour $\partial\left(\frac{\Delta}{2}\right) = 1'$ donne le facteur par lequel il faut multiplier le nombre de minutes et de fractions de minute pour obtenir l'appoint de n_0.

Enfin la dernière colonne, ∂n pour $\partial\left(\frac{\Delta}{2}\right) = 1'$, contient les valeurs du facteur (1) $4 \sin\frac{\Delta}{2} \sin 1'$, par lequel on multiplie l'écart du demi-angle du prisme avec 60° pour obtenir le terme de correction.

Un exemple numérique achèvera de faire comprendre les opérations.

L'angle du prisme de spath d'Islande qui m'a servi dans les expériences dont il a été question dans le Mémoire était (*voir* p. 25 et 70)

$$A = 60^\circ 1' 10'', \quad \text{d'où} \quad \frac{A}{2} = 30^\circ + 35'' \text{ ou } 30^\circ + 0',58,$$

en convertissant, d'après la Table auxiliaire, les 35″ en fractions décimales de minute.

La déviation de la raie O a été trouvée (*voir* Tableau I, p. 26)

$$\Delta = 56^\circ 22' 45'', \quad \frac{\Delta}{2} = 28^\circ 11' 23'' \text{ ou } 28^\circ 10' + 1',38.$$

n_0, correspondant à	$\frac{\Delta}{2} = 28^\circ 10'$	.....	1,699173
∂n_0 »	$\partial\frac{\Delta}{2} = 1',38$ ou $1',38 \times 30,6$	.....	413
∂n »	$\frac{A}{2} = 0',58$ ou $0',58 \times -54,9$	.....	− 313
			$n = 1,699277$

Le calcul par la Table de logarithmes à sept décimales donne $n = 1,699276$.

(1) Il a suffi de le calculer par logarithmes de degré en degré; comme ce facteur croît presque proportionnellement à $\frac{\Delta}{2}$, l'interpolation est très facile.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On ne conserve que cinq chiffres décimaux, c'est-à-dire six figures.

Remarque. — Pour être plus certain de l'approximation du dernier chiffre conservé, la Table indique si le nombre n_0 est approché par défaut ou par excès (¹) : dans le premier cas, on ajoute 0,25 ou simplement 0,3 (ainsi qu'on l'a fait dans l'exemple choisi); dans le second cas, on retranche 0,3. De cette manière, l'erreur probable est inférieure à une demi-unité du dernier chiffre conservé.

L'usage de cette Table est si facile (les parties proportionnelles pouvant s'obtenir à vue à l'aide d'une règle à calcul), qu'on doit la recommander pour le calcul rapide des indices de réfraction et, dans tous les cas, pour la vérification des calculs de précision.

Table auxiliaire pour la conversion des secondes d'arc en fractions décimales de minute d'arc.

1″.....	0′,02	21″.....	0′,35	41″.....	0′,68
2.....	0,03	22.....	0,37	42.....	0,70
3.....	0,05	23.....	0,38	43.....	0,72
4.....	0,07	24.....	0,40	44.....	0,73
5.....	0,08	25.....	0,42	45.....	0,75
6.....	0,10	26.....	0,43	46.....	0,77
7.....	0,12	27.....	0,45	47.....	0,78
8.....	0,13	28.....	0,47	48.....	0,80
9.....	0,15	29.....	0,48	49.....	0,82
10.....	0,17	30.....	0,50	50.....	0,83
11.....	0,18	31.....	0,52	51.....	0,85
12.....	0,20	32.....	0,53	52.....	0,87
13.....	0,22	33.....	0,55	53.....	0,88
14.....	0,23	34.....	0,57	54.....	0,90
15.....	0,25	35.....	0,58	55.....	0,92
16.....	0,27	36.....	0,60	56.....	0,93
17.....	0,28	37.....	0,62	57.....	0,95
18.....	0,30	38.....	0,63	58.....	0,97
19.....	0,32	39.....	0,65	59.....	0,98
20.....	0,33	40.....	0,67	60.....	1,00

(¹) Lorsque le dernier chiffre est forcé, le nombre n_0 est marqué d'un point en haut et à droite.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Table pour le calcul abrégé des indices de réfraction lorsque l'angle du prisme est voisin de 60°.

$\frac{\Delta}{2}$.	n_0.	δn pour $\delta\left(\frac{\Delta}{2}\right)=1'$.	δn pour $\delta\left(\frac{\Delta}{2}\right)=1'$.	$\frac{\Delta}{2}$.	n_0.	δn pour $\delta\left(\frac{\Delta}{2}\right)=1'$.	δn pour $\delta\left(\frac{\Delta}{2}\right)=1'$.	$\frac{\Delta}{2}$.	n_0.	δn pour $\delta\left(\frac{\Delta}{2}\right)=1'$.	δn pour $\delta\left(\frac{\Delta}{2}\right)=1'$.
10. 0	1,28557	44,6	—20,2	18. 0	1,48629	38,9	—36,0	26. 0	1,65808	32,4	—51,0
10	1,29003	44,4	—20,5	10	1,49018	38,7	—36,3	10	1,66132	32,3	—51,3
20	1,29447	44,3	—20,8	20	1,49405	38,6	—36,6	20	1,66455	32,2	—51,6
30	1,29890	44,1	—21,2	30	1,49791	38,5	—37,0	30	1,66777	32,1	—51,9
40	1,30331	44,1	—21,5	40	1,50176	38,4	—37,3	40	1,67098	31,9	—52,2
50	1,30772	44,0	—21,8	50	1,50560	38,2	—37,6	50	1,67417	31,7	—52,5
11. 0	1,31212	43,8	—22,2	19. 0	1,50942	38,1	—37,9	27. 0	1,67734	31,6	—52,8
10	1,31650	43,8	—22,5	10	1,51323	38,0	—38,2	10	1,68050	31,5	—53,1
20	1,32088	43,6	—22,8	20	1,51703	37,8	—38,5	20	1,68365	31,3	—53,4
30	1,32524	43,5	—23,2	30	1,52081	37,7	—38,9	30	1,68678	31,2	—53,7
40	1,32959	43,4	—23,5	40	1,52458	37,6	—39,2	40	1,68990	31,1	—54,0
50	1,33393	43,3	—23,8	50	1,52834	37,5	—39,5	50	1,69301	30,9	—54,3
12. 0	1,33826	43,2	—24,2	20. 0	1,53209	37,3	—39,8	28. 0	1,69610	30,7	—54,6
10	1,34258	43,1	—24,5	10	1,53582	37,2	—40,1	10	1,69917	30,6	—54,9
20	1,34689	42,9	—24,8	20	1,53954	37,1	—40,4	20	1,70223	30,5	—55,2
30	1,35118	42,8	—25,2	30	1,54325	36,9	—40,8	30	1,70528	30,3	—55,5
40	1,35546	42,8	—25,5	40	1,54694	36,8	—41,1	40	1,70831	30,2	—55,8
50	1,35974	42,6	—25,8	50	1,55062	36,7	—41,4	50	1,71133	30,0	—56,1
13. 0	1,36400	42,5	—26,2	21. 0	1,55429	36,6	—41,7	29. 0	1,71433	29,9	—56,4
10	1,36825	42,3	—26,5	10	1,55795	36,4	—42,0	10	1,71732	29,8	—56,7
20	1,37248	42,3	—26,8	20	1,56159	36,3	—42,3	20	1,72030	29,6	—57,0
30	1,37671	42,1	—27,2	30	1,56522	36,1	—42,7	30	1,72326	29,4	—57,3
40	1,38092	42,1	—27,5	40	1,56883	36,0	—43,0	40	1,72620	29,3	—57,6
50	1,38513	41,9	—27,8	50	1,57243		—43,3	50	1,72913	29,2	—57,9
14. 0	1,38932	41,8	—28,2	22. 0	1,57602	35,8	—43,6	30. 0	1,73205	29,0	—58,2
10	1,39350	41,6	—28,5	10	1,57960	35,6	—43,9	10	1,73495	28,9	—58,5
20	1,39766	41,6	—28,8	20	1,58316	35,4	—44,2	20	1,73784	28,7	—58,8
30	1,40182	41,4	—29,2	30	1,58671	35,3	—44,5	30	1,74071	28,6	—59,1
40	1,40596	41,3	—29,5	40	1,59024	35,2	—44,8	40	1,74357	28,4	—59,4
50	1,41009	41,3	—29,8	50	1,59376	35,1	—45,2	50	1074641	28,3	—59,6
15. 0	1,41422	41,0	—30,1	23. 0	1,59727	35,0	—45,5	31. 0	1,74924	28,1	—59,9
10	1,41832	41,0	—30,4	10	1,60077	34,8	—45,8	10	1,75205	28,0	—60,2
20	1,42242	40,8	—30,7	20	1,60425	34,6	—46,1	20	1,75485	27,8	—60,5
30	1,42650	40,7	—31,1	30	1,60771	34,6	—46,4	30	1,75763	27,7	—60,8
40	1,43057	40,6	—31,4	40	1,60117	34,4	—46,7	40	1,76040	27,6	—61,1
50	1,43463	40,5	—31,7	50	1,61461	34,2	—47,0	50	1,76316	27,4	—61,4
16. 0	1,43868	40,3	—32,0	24. 0	1,61803	34,2	—47,3	32. 0	1,76590	27,2	—61,7
10	1,44271	40,3	—32,3	10	1,62145	34,0	—47,6	10	1,76862	27,1	—62,0
20	1,44674	40,1	—32,6	20	1,62485	33,8	—47,9	20	1,77133	26,9	—62,3
30	1,45075	40,0	—33,0	30	1,62823	33,7	—48,2	30	1,77402	26,8	—62,6
40	1,45475	39,8	—33,3	40	1,63160	33,6	—48,5	40	1,77670	26,6	—62,9
50	1,45873	39,8	—33,6	50	1,63496	33,4	—48,8	50	1,77936	26,5	—63,1
17. 0	1,46271	39,6	—34,0	25. 0	1,63830	33,3	—49,2	33. 0	1,78201	26,4	—63,4
10	1,46667	39,5	—34,3	10	1,64163	33,2	—49,5	10	1,78465	26,2	—63,7
20	1,47062	39,4	—34,6	20	1,64495	33,0	—49,8	20	1,78727	26,0	—64,0
30	1,47456	39,2	—35,0	30	1,64825	32,9	—50,1	30	1,78987	25,9	—64,3
40	1,47848	39,1	—35,3	40	1,65154	32,7	—50,4	40	1,79246	25,7	—64,6
50	1,48239	39,0	—35,6	50	1,65481	32,7	—50,7	50	1,79503		—64,8

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Indices de réfraction des raies dont les déviations minimum ont été mesurées.

Les Tableaux I et II (*voir* p. 26 et 28) donnent les déviations minimum du rayon ordinaire observées avec le prisme de spath dont l'angle a été trouvé égal sensiblement à $A = 60^\circ\,1'\,10''$. On a déduit de ces observations les indices de réfraction correspondant aux diverses raies; on les a calculés par logarithmes avec sept figures et vérifiés à l'aide des Tables précédentes :

Désignation des raies.	Indices de réfraction d'après les observations précédentes.		Indices de réfraction d'après M. Mascart.	Diff.
D_2	1,65833	D_1, D_2.	1,65846	13
F	1,66779		1,66793	14
.....	.....		.....	
O	1,69928		1,69955	27
$\lambda = 330,40$	1,70495		»	
Q	1,70583		1,70613	30
P	1,70251		1,70276	23
$\lambda = 324,59$	1,70770		»	
$\lambda = 320,16$	1,70993		»	
R	1,71112		1,71155	43
r	1,71303		»	
$\lambda = 312,50$	1,71407		»	
S	1,71542		1,71580	38
S_2	1,71550		»	
$\lambda = 304,65$	1,71901		1,71939	38
$\lambda = 303,00$	1,71971			
T	1,72034			
$\lambda = 298,14$	1,72269			
U	1,72525			
$\lambda = 293,73$	1,72602			
$\lambda = 292,86$	1,72676			

(Les valeurs de λ définissent les raies d'après la *Pl. II*, à la fin du Mémoire.)

On a donné, comme comparaison, les indices mesurés par M. Mascart (*loc. cit.*, p. 237); les différences, assez faibles pour les raies visibles D et F, vont en augmentant avec la réfrangibilité. On a vu précédemment quelles difficultés on rencontre dans les mesures angulaires effectuées avec un prisme dont les faces sont légèrement courbes; or, les prismes de spath sont très généralement

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

dans ce cas : les divergences sont de l'ordre de celles que ce genre de perturbations peut apporter. Du reste, la méthode de l'ombre du réticule sur les clichés, employée par M. Mascart, n'est pas rigoureuse pour la mesure des déviations, lorsqu'elle n'est pas contrôlée par les mesures dans les deux sens; on ne doit donc pas s'attendre à une plus grande concordance (1).

Dans un autre Mémoire (2), j'ai été conduit à mesurer l'indice de réfraction ordinaire du spath d'Islande avec la lumière de la soude : pour les raies D_1, D_2, $n = 1,658325$, valeur qui coïncide avec celle que je trouve ici. Rudberg avait donné le nombre 1,65850, un peu plus fort que celui de M. Mascart. Il est fort probable que les faces de son prisme de spath étaient aussi plus convexes; si l'on se reporte au signe négatif de la correction (p. 69), on reconnaîtra que ces divergences s'atténueraient si l'on avait les éléments nécessaires pour le calcul de cette correction.

APPENDICE II.

INFLUENCE D'UNE PETITE ERREUR DANS LA POSITION DU PRISME, AU VOISINAGE DU MINIMUM DE DÉVIATION, SUR LA MESURE DE CETTE DÉVIATION.

Le problème qu'on se propose est le suivant : *Étant donnée une radiation de réfrangibilité donnée dans le voisinage du minimum de déviation, calculer la correction à effectuer sur la déviation observée d'après la position du prisme.*

On partira de la formule

$$\operatorname{tang}^2 \frac{e - e'}{2} = \frac{\nu^2 - n^2}{n^2 - \mu^2},$$

(1) En effet, cette méthode suppose que le réticule est rigoureusement dans l'axe de figure du tube de tirage de la lunette, et de plus que le déplacement de ce tube dans le sens de son axe s'effectue sans ballottement, deux conditions qui ne peuvent être qu'approximativement remplies.

Les divergences de 30 unités du cinquième ordre sur la raie Q, par exemple ($n = 1,702$), correspondraient, d'après la Table précédente, à une erreur de $1' \times \frac{30}{30,5}$, c'est-à-dire 1′ sensiblement sur la demi-déviation minimum, ou de $1' \times \frac{30}{55,5}$, c'est-à-dire 33″ sur le demi-angle du prisme, quantités de l'ordre des erreurs que la courbure des faces peut introduire.

(2) *Sur la réfraction à travers un prisme suivant une loi quelconque* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. III, p. 42).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

qui est une transformation évidente de l'équation (11) de mon Mémoire *Sur la réfraction à travers un prisme*, etc. (*Annales de l'École Normale*, 2e série, t. III, p. 240), où e et e' représentent les angles d'incidence et d'émergence sur les faces du prisme,

$$\nu = \frac{\sin\frac{A+D}{2}}{\sin\frac{A}{2}}, \quad \mu = \frac{\cos\frac{A+D}{2}}{\cos\frac{A}{2}};$$

A représente l'angle du prisme, D la déviation du rayon réfracté. Si le prisme était dans la position du minimum de déviation $D = \Delta$ (rayon suivant les lois ordinaires), on aurait $e = e'$ et

$$n = \frac{\sin\frac{A+\Delta}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.$$

Substituant les valeurs de n, ν et μ, il vient

$$\tang^2\frac{e-e'}{2} = \cot^2\frac{A}{2}\,\frac{\sin^2\frac{A+D}{2} - \sin^2\frac{A+\Delta}{2}}{\sin^2\frac{A+\Delta}{2}\cot^2\frac{A}{2} - \cos^2\frac{A+D}{2}}.$$

On remarquera que, si le numérateur s'annule pour $\Delta = D$, le dénominateur se réduit à $n^2 - 1$, quantité très différente de zéro.

Pour des valeurs de D très voisines de Δ, on peut donc substituer au dénominateur sa valeur limite et écrire

$$(n^2-1)\tang^2\left(\frac{e-e'}{2}\right)\tang^2\frac{A}{2} = \sin^2\frac{A+D}{2} - \sin^2\frac{A+\Delta}{2},$$

ou, très approximativement,

$$= \sin(A+\Delta)\sin\frac{D-\Delta}{2},$$

et, comme $D - \Delta$ est très petit,

$$D - \Delta = \frac{2(n^2-1)\tang^2\frac{A}{2}}{\sin(A+\Delta)}\tang^2\frac{e-e'}{2},$$

formule qui donne l'excès de la déviation sur sa valeur minimum lorsque $e \gtrless e'$. Or l'angle $\frac{e-e'}{2}$ représente l'angle que fait la bissectrice de la section droite du prisme avec la bissectrice des rayons incident et émergent (*loc.*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

cit., p. 252) (1) : c'est donc précisément l'erreur de position du prisme par rapport au minimum de déviation. On reconnaît en effet que D est toujours plus grand que Δ, car tous les facteurs sont positifs.

Il résulte de cette formule que l'excès de la déviation minimum est proportionnel sensiblement au carré de l'angle de déplacement du prisme relativement à la position qui donne le minimum de déviation.

La valeur numérique du facteur de proportionnalité dans le cas usuel de $n = \frac{3}{2}$, $A = 60^\circ$, est égal à $\frac{5}{6}$. Si l'on se borne à la recherche d'une limite supérieure, on peut *a fortiori* considérer ce facteur comme égal à l'unité.

Pour $\frac{e - e'}{2} = 1^\circ = \frac{1}{60}$ environ,

$$\left(\frac{e - e'}{2}\right)^2 = \frac{1}{60} \times \frac{1}{60},$$

d'où l'on conclut aisément les résultats suivants.

Si le prisme est en erreur de α sur sa position de déviation minimum, l'erreur de la déviation est moindre que α^2.

Pour 1°, l'erreur est.....	$< 1'$
Pour $\frac{1}{2}$ degré.....	$< 15''$
Pour $\frac{1}{10}$ de degré.....	$< 0'',6$

APPENDICE III.

SUR LA CONSTRUCTION DES OBJECTIFS ACHROMATIQUES EN QUARTZ ET SPATH D'ISLANDE.

La dispersion relative du quartz et du spath d'Islande est très convenablement appropriée à l'achromatisme d'une région très étendue du spectre solaire. Le quartz, grâce à sa dureté, prend un poli remarquable; malheureusement le spath d'Islande est difficile à tailler, à cause de son peu de dureté, de sa friabilité et de ses clivages : les opticiens déclarent eux-mêmes qu'ils sont loin de pouvoir donner aux surfaces de spath la même perfection qu'aux

(1) Le lecteur rectifiera, d'après cet énoncé exact, la faute d'impression qui s'y trouve : *réfringent* au lieu de *émergent*.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

surfaces de verre ou de quartz. Il est donc impossible d'éviter les aberrations irrégulières dans les lentilles de spath. Dans ces circonstances, il était évidemment superflu de chercher à déterminer avec précision les rayons de courbure donnant le minimum d'aberration sphérique, tout étant subordonné à des conditions pratiques. Voici comment j'ai traité la question.

On a vu plus haut que la condition de minimum d'aberration impose une forme sensiblement plan-convexe pour une lentille simple, dont l'indice est voisin de 1,6, la face convexe étant à l'extérieur; donc l'ensemble des deux lentilles doit se rapprocher de cette forme.

La difficulté de taille du spath d'Islande impose l'emploi de courbures notables ou d'une face plane pour laquelle les opticiens sont bien outillés.

Les deux courbures intérieures doivent être égales, afin que, par un liquide approprié (eau, alcool, glycérine), on puisse, au besoin, annuler l'effet des imperfections de la surface du spath si elle était par trop défectueuse.

Il ne reste donc plus que deux éléments arbitraires, à savoir les deux courbures du quartz; on les détermine par la condition de longueur focale et par celle de l'achromatisme.

Les formules théoriques des lentilles minces (1) donnent

$$R_0 = F\frac{(n'-1)\alpha-(n-1)\beta}{\alpha-\beta}, \quad R_1 = F\frac{(n'-1)\alpha-(n-1)\beta}{\alpha};$$

R_0 étant la courbure extérieure de la lentille convergente, R_1 la courbure

---

(1) On les déduit des équations bien connues

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_0}\right), \quad \frac{1}{p'}-\frac{1}{q'}=(n'-1)\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right),$$

la première représentant la lentille convergente, la seconde la lentille divergente, pp' la distance du point lumineux au centre de la lentille; qq' la distance conjuguée; R_1 le rayon de courbure commun; R_0, R_1 les rayons extrêmes, toutes ces longueurs étant comptées positivement dans le même sens. Le foyer principal F du système s'obtient en faisant

$$q=p', \quad p=\infty \quad \text{et} \quad q'=F,$$

$$-\frac{1}{F}-(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_0}\right)+(n'-1)\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right).$$

La condition d'achromatisme donne

$$-\frac{1}{F}=(\nu-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_0}\right)+(\nu-1)\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)$$

ou

$$\alpha\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_0}\right)+\beta\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)=0.$$

Il suffit alors de faire $R_2=\infty$ et de tirer de ces deux équations R_0 et R_1.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

commune à la lentille plan-concave, n, n' les indices de la lentille convergente et de la lentille divergente pour l'un des rayons $\alpha = \nu - n$ et $\beta = \nu' - n'$, ν et ν' étant les indices des deux substances pour le deuxième rayon à achromatiser.

Comme on le voit, α et β n'entrent que par leur rapport. Voici la valeur de ce rapport, d'après les déterminations de M. Mascart :

1° *Rayons visibles.*

Quartz (rayon ordinaire).	Raie D... $n = 1,5442$	$\alpha = 0,0054$	$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{4}{7}$ approximat.
	Raie F... $\nu = 1,5496$		
Spath d'Islande (rayon ordinaire).	Raie D... $n' = 1,6584$	$\beta = 0,095$	
	Raie F... $\nu' = 1,6679$		

On en conclut

$$R_0 = 0,3933\,F,$$
$$R_1 = 0,2990\,F.$$

2° *Rayons ultra-violets.*

Quartz (rayon ordinaire).	Raie L... $n = 1,5601$	$\alpha = 0,0083$	$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{8}{15}$ approximat.
	Raie P... $\nu = 1,5684$		
Spath d'Islande. (rayon ordinaire).	Raie L... $n' = 1,6870$	$\beta = 0,0157$	
	Raie P... $\nu' = 1,7027$		

On en conclut

$$R_0 = 0,4151\,F,$$
$$R_1 = 0,3631\,F.$$

On voit par ces deux exemples que la condition d'achromatisme pour les rayons ultra-violets diffère peu de la condition analogue pour les rayons visibles; on peut donc obtenir des objectifs presque rigoureusement achromatiques sur toute l'étendue du spectre, en choisissant des rapports intermédiaires entre les groupes précédemment calculés.

On est d'ailleurs forcé de s'écarter un peu des rapports théoriques pour utiliser les bassins des opticiens, qui procèdent généralement par *demi-pouce*.

Ainsi, pour le *grand goniomètre*, j'ai adopté

$$R_0 = 7^p = 189^{mm},5,$$
$$R_1 = 6^p = 162^{mm},4,$$

que donne $F = 0^m,45$ environ. Les objectifs sont très satisfaisants.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Pour le *petit goniomètre*, j'ai adopté

$$R_0 = 0^m,10,$$
$$R_1 = 0^m,08,$$

d'où

$$F = 0^m,25,$$

dont les rayons de courbure se trouvaient dans la série des bassins de l'opticien.

Les objectifs ont été assez satisfaisants, mais on les a rendus tout à fait convenables en orientant convenablement les lentilles de spath dans leurs barillets pour atténuer une petite aberration dissymétrique.

APPENDICE IV.

SUR UNE FORMULE D'INTERPOLATION DANS LE CAS OU LA FONCTION CROÎT PRESQUE PROPORTIONNELLEMENT A LA VARIABLE.

Il arrive souvent dans les calculs numériques que, après avoir admis qu'une fonction varie proportionnellement à la variable dans un certain intervalle, on reconnaisse que la proportionnalité n'est pas rigoureuse. On peut, sans avoir besoin de recommencer les calculs d'après une autre formule d'interpolation, effectuer la petite correction en employant une formule qu'on peut établir par les considérations suivantes.

Lorsqu'on remplace un arc de courbe très peu étendu par la corde, la différence des ordonnées est, comme première approximation, une fonction du second degré de l'abscisse; cette fonction s'annule pour les deux extrémités de l'arc et devient maximum pour le milieu de l'arc. Il en résulte que la différence u est représentée par la fonction

$$u = A(x-a)(x-b),$$

a et b étant les abscisses des extrémités de l'arc. Le maximum de u correspond à la valeur de x qui annule la dernière :

$$x-a+x-b=0, \quad \text{d'où} \quad x=\frac{a+b}{2},$$

ce qui est conforme à l'énoncé précédent.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Si l'on désigne par U la valeur du maximum, on a

$$U = A\left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - b\right) = A\,\frac{b-a}{2}\,\frac{a-b}{2} = -A\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

d'où l'on conclut

$$A = -\frac{4U}{(a-b)^2};$$

substituant, il vient

$$u = -\frac{4U}{(a-b)^2}(x-a)(x-b).$$

Cette formule sert à corriger un petit défaut de proportionnalité dans le cas où l'on connaît l'erreur U commise au milieu de l'intervalle $(a-b)$.

Voici un exemple numérique emprunté précisément au cliché B_{13}, dont il a été question plus haut. Le relevé micrométrique donne en unités arbitraires :

	Relevés micrométriques.	Longueurs d'onde.	Déviations observées.	Correction.
Premier repère....	37',41	407,91	5°. 9'.55"	»
Raie H.....	38,41	396,99	»	— 0,06
» K.....	38,78	393,39	»	— 0,07
» L.....	39,84	382,15	»	— 0,12
» M.....	40,73	372,71	»	— 0,11
» N.....	42,08	358,40	»	— 0,17
» O.....	43,42	344,19	»	— 0,17
» P.....	44,18	336,13	»	— 0,15
» Q.....	44,85	329,03	»	— 0,13
» R.....	45,88	318,11	»	— 0,12
» R.....	46,21	314,61	»	— 0,12
» S.....	46,60	310,48	»	— 0,10
Deuxième repère..	48,72	288,00	3.40.7	»

La deuxième colonne est calculée en supposant que la variation de la valeur de la longueur d'onde est proportionnelle à la distance du repère; ainsi, pour la raie O, on écrit la proportion

$$\frac{x-288,00}{407,91-287,00} = \frac{43,42-48,72}{37,41-48,72}, \quad \text{d'où} \quad x = 344,19.$$

Mais le calcul rigoureux montre que x est un peu différent; en effet, si la longueur d'onde ne varie pas proportionnellement à la distance du repère, on peut admettre que, dans un intervalle de 1°,5, les *angles* sous-tendus par les

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

raies du cliché varient proportionnellement à cette distance; par suite, on écrira

$$\frac{\gamma - 3^\circ 40' 7''}{5^\circ 9' 55'' - 3^\circ 40' 7''} = \frac{43,42 - 48,72}{37,41 - 48,72}, \quad \text{d'où} \quad \gamma = i + \delta = 4^\circ 22' 11'',9.$$

Substituant cette valeur dans la formule qui permet de calculer la longueur d'onde, on trouve pour valeur rigoureuse

$$\lambda = 343,99$$

au lieu de 344,19; différence, 0,20. Mais on doit réduire de 0,03 cette différence, parce qu'en faisant le calcul rigoureux des repères (sans forcer les chiffres des fractions de seconde) on trouve

$$287,96 \quad \text{et} \quad 407,88$$

au lieu de

$$288,00 \quad \text{et} \quad 407,91.$$

Il reste donc 0,17 comme erreur entre la formule vraie et le calcul de proportionnalité.

Comme la raie O est très sensiblement au milieu de l'intervalle des repères, on peut adopter 0,17 comme représentant le maximum U et, par suite, calculer la correction d'après les données du relevé micrométrique, d'après la formule

$$u = -0,68 \frac{(x - 37,41)(x - 48,72)}{(48,72 - 37,41)^2}.$$

C'est ainsi qu'a été calculée la colonne *Correction* du Tableau III et du Tableau précédent.

Remarque. — Nous avons supposé que l'erreur à corriger était la différence entre un arc de courbe et une droite; mais la loi serait la même (au même ordre d'approximation près), s'il s'agissait de la différence entre deux courbes.

Cette remarque est importante, parce qu'elle donne le moyen de répartir de petites erreurs causées par l'emploi de formules d'interpolation imparfaites, ou mieux, parce qu'elle permet d'employer des formules d'interpolation imparfaites, mais plus simples, sauf à corriger les petites différences par un calcul facile.

Au point de vue géométrique, c'est la subdivision de la courbe à représenter en petits arcs de paraboles, mais de paraboles particulièrement faciles à calculer.

(Extrait des *Annales de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. IX, 1880.)

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

TABLE DES MATIÈRES.

Pages

INTRODUCTION 1

Difficultés que l'on rencontre dans l'observation des radiations très réfrangibles 2

Détail des opérations. — Appareils. — Manipulations photographiques 5

Précautions à prendre pour obtenir le maximum d'éclat des spectres et de netteté des raies 7

Héliostat. — Lentille collectrice 7

Courbure des objectifs. — Faces du prisme 10

Construction du dessin du spectre prismatique 13

Mise au point du collimateur et de la lunette. — Tirages conjugués 13

Méthode des clichés doubles. — Relevé des clichés 18

Réduction des valeurs linéaires en valeurs angulaires 21

Calcul des déviations 23

TABLEAU I. — Déviation des raies principales de O à S 26

TABLEAU II. — Spectre de comparaison de S à U 28

Détermination directe des longueurs d'onde des raies principales 31

Clichés des spectres de diffraction. — Méthode des repères 32

TABLEAU III. — Longueur d'onde des raies solaires principales 38

TABLEAU IV. — Longueur d'onde des raies du fer 41

Construction du spectre définitif 42

Formule d'interpolation 44

Explication des planches 48

Évaluation de la précision des résultats 50

APPENDICE I.

Réglage du goniomètre, du prisme et du réseau 51

Erreur provenant de la courbure des faces du prisme 56

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Pages

Relation entre les déplacements des foyers des rayons réfléchis et réfractés..... 63
Angle d'un prisme à faces courbes..... 66
Élimination de l'influence de ces erreurs sur la valeur de l'indice de réfraction par un choix convenable de l'angle du prisme..... 70
Abréviation du calcul des indices de réfraction lorsque l'angle du prisme est voisin de 60°. — Tables..... 74
Indices de réfraction du spath d'Islande..... 78

APPENDICE II.

Influence d'une petite erreur dans la position du prisme sur la mesure de la déviation.. 79

APPENDICE III.

Sur la construction des objectifs achromatiques en quartz et spath d'Islande..... 81

APPENDICE IV.

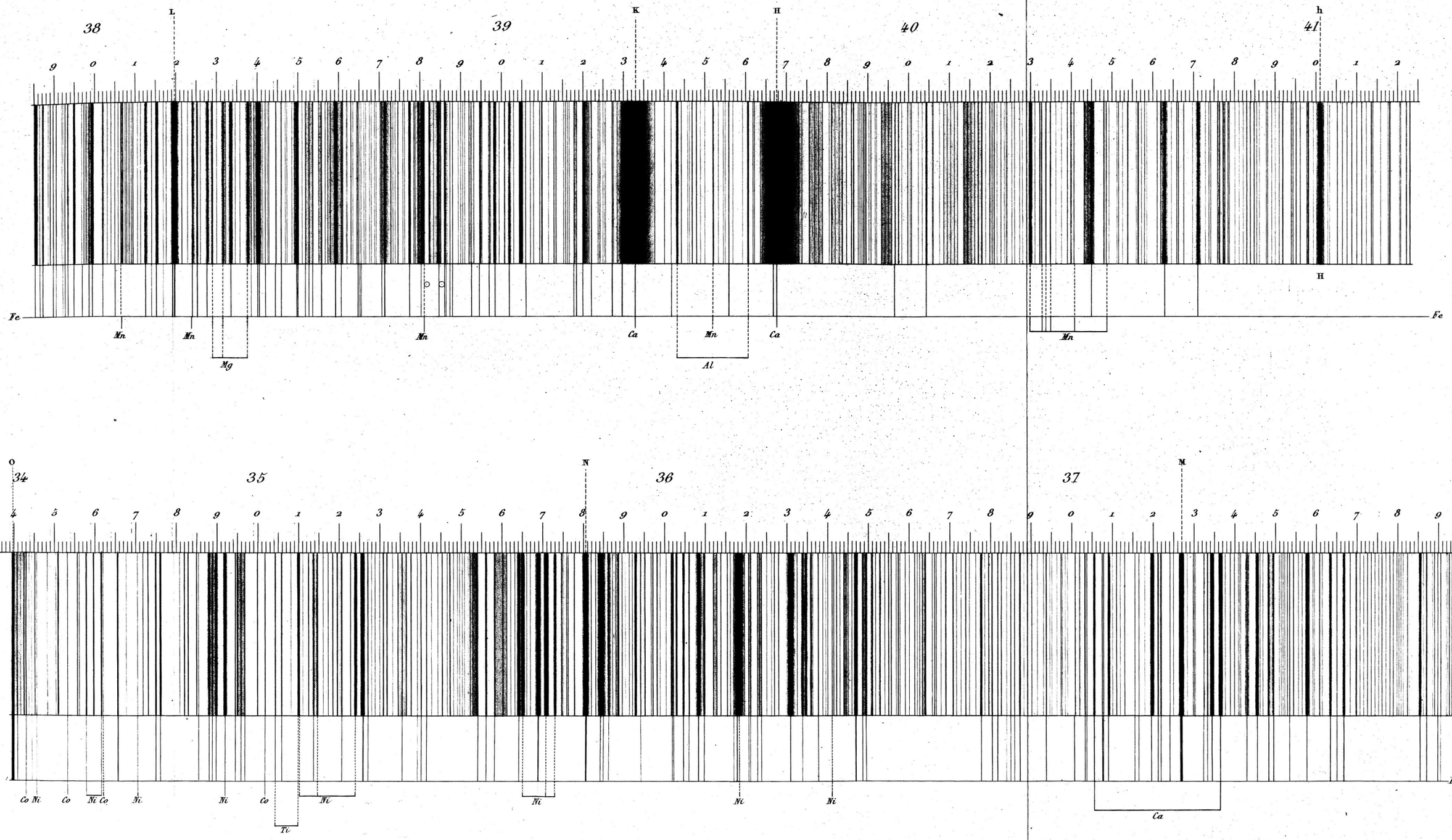
Sur une formule d'interpolation dans le cas où la fonction croît presque proportionnellement à la variable..... 84
Applications aux observations faites avec un réseau..... 85

PLANCHES.

6507 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Spectre normal du Soleil / Portion ultra-violette / Par M. A. Cornu.



A. Cornu del.

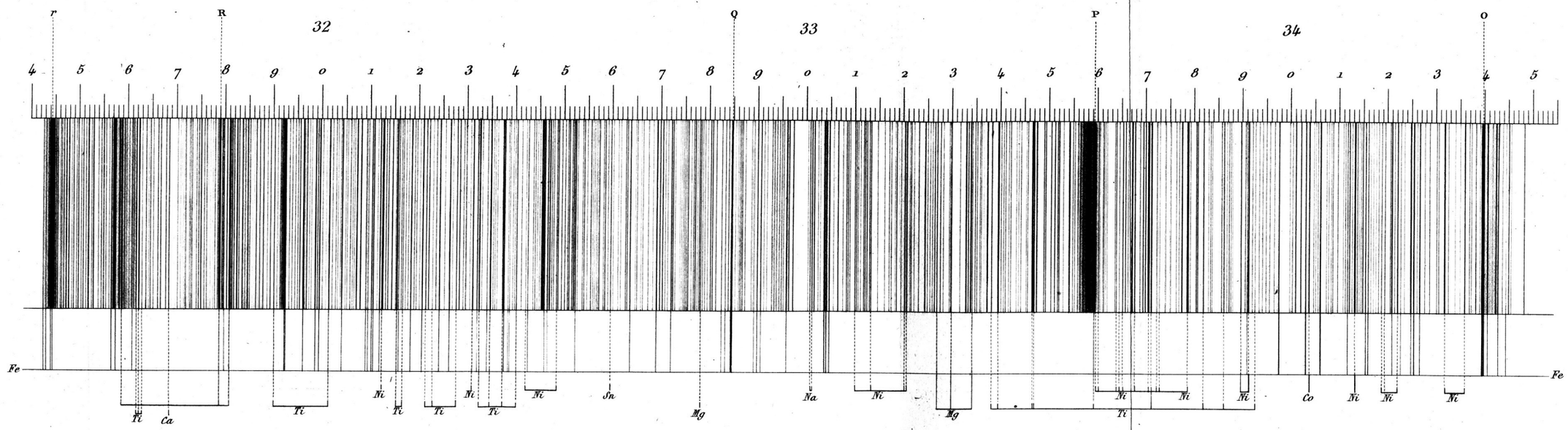
Legros et Dalas, sc

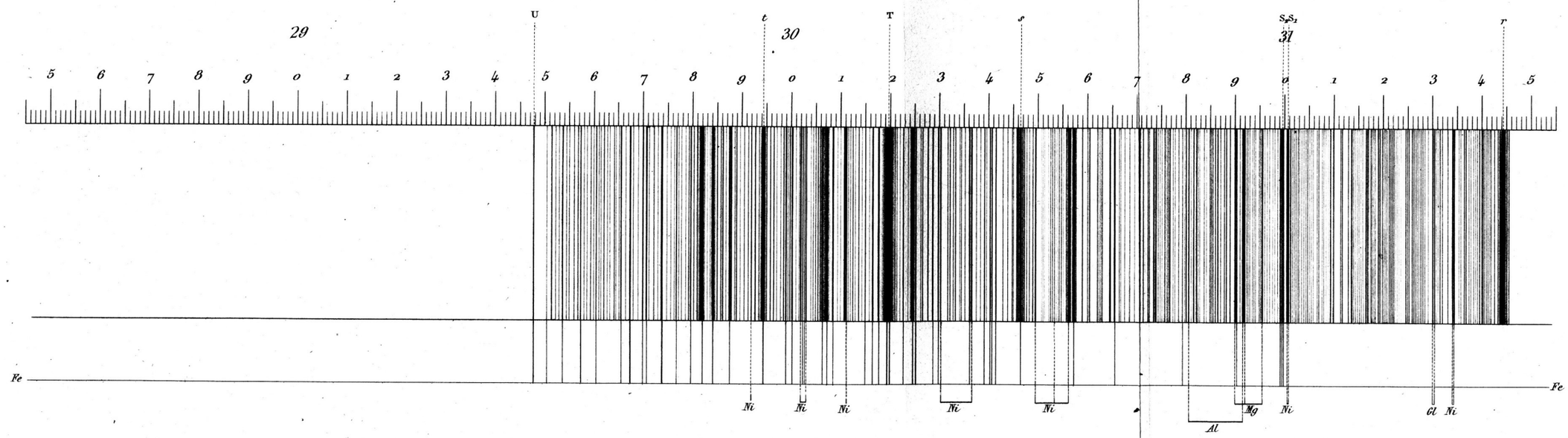
Gauthier-Villars, Libraire Editeur, à Paris.

Imp. Eudes, Paris.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Spectre normal du Soleil (Portion ultra violette) Par M. A. Cornu





A. Cornu del

Legros sc.

Gauthier-Villars, Libraire Editeur, à Paris.

Imp. Eudes, Paris

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE,

PAR

UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAITRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME — ANNÉE 187

EXTRAIT DU N°

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

—

187

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

SUR LE

SPECTRE NORMAL DU SOLEIL,

PARTIE ULTRA-VIOLETTE,

PAR M. A. CORNU,

PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Tous les physiciens connaissent la belle description des raies sombres du spectre solaire de M. Angström et les planches remarquables qui résument ce travail; outre leurs qualités de précision et de netteté, ces belles planches ont un autre mérite, celui de conduire les physiciens et les astronomes à adopter l'échelle des longueurs d'onde, pour la définition des raies et des radiations, au lieu des échelles arbitraires introduites par les premiers spectroscopistes.

Le Mémoire de M. Angström ne s'étend qu'au spectre visible. Je me suis proposé de compléter ce travail par l'étude du spectre dans la partie ultra-violette, jusqu'à la limite à laquelle on parvient avec les instruments d'optique en usage dans les laboratoires, et de composer une planche faisant suite à celle de M. Angström, c'est-à-dire classant suivant l'échelle des longueurs d'onde les raies sombres du spectre ultra-violet.

J'ai eu pour me guider dans ce travail, entrepris d'ailleurs en vue de recherches de Physique solaire (1), outre les Mémoires de M. Ed. Becquerel, la thèse de M. Mascart. Ce travail, le plus complet jusqu'à ce jour, renferme une description détaillée du spectre ultra-violet, obtenu par la photographie; les raies sont classées d'après leurs déviations produites par le prisme employé et représentées par une planche qui résume toutes les mesures; mais cette planche, outre l'inconvénient de l'emploi d'une échelle arbitraire, a le défaut de rendre imparfaitement

(1) *Voir* les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXIII, p. 332; juillet 1871.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

l'*effet* des groupes de raies, de sorte qu'il est très-difficile d'établir la concordance des raies avec les épreuves photographiques (1).

Dans le travail que je présente aujourd'hui (2), j'ai cherché, indépendamment de la classification plus rationnelle des raies, à représenter le plus fidèlement qu'il m'a été possible de le faire l'aspect général des groupes, afin de faciliter aux physiciens l'établissement de cette concordance, capitale dans les études spectroscopiques.

Je n'ai pas poussé l'étude du spectre ultra-violet aussi loin que M. Mascart, parce que j'ai tenu à conserver les appareils ordinaires des laboratoires, dont les objectifs en crown et flint-glass absorbent les radiations très-réfrangibles, mais qui sont, ainsi qu'on va le voir, d'un maniement plus facile que les appareils en quartz. Toutefois, j'ai pu constater que dans cette étude du spectre ultra-violet on pouvait, avec ces appareils, aller notablement plus loin qu'on ne le croyait généralement. En effet, l'absorption due aux objectifs n'empêche pas de photographier les raies ultra-violettes jusqu'à P et même jusqu'à Q (notations de M. Ed. Becquerel et de M. Mascart) dans un spectre de diffraction : avec un prisme de spath d'Islande, on atteint la raie P; avec un prisme de flint ordinaire, la raie O.

L'emploi des objectifs achromatiques des goniomètres ou des spectroscopes présente un avantage considérable sur celui des objectifs de quartz; la variation de foyer des divers rayons est très-petite, et le champ angulaire dans lequel la netteté reste suffisante est relativement très-grande.

Il en résulte que, dans des recherches courantes sur les radiations chimiques où l'on n'aurait pas besoin d'aller jusqu'à la limite des raies observables, on a tout avantage à employer les objectifs achromatiques ordinaires : ainsi, avec un bon goniomètre dont les lunettes ont 30 à

---

(1) Il ne faudrait pas croire que le *renversement*, c'est-à-dire l'apparence négative des clichés, soit gênant; après quelques minutes d'observation, on compare très-bien une épreuve négative à un dessin positif : on se guide sur la forme et l'intensité relative des groupes de lignes et non pas sur leur éclat absolu.

(2) La minute de la planche qui accompagne ce Mémoire a été présentée à l'Association française pour l'avancement des Sciences, en septembre 1872, au Congrès de Bordeaux (*voir* le volume des *Comptes rendus* de la session de Bordeaux, p. 300) : le retard dans la publication de ce Mémoire et surtout de la gravure de la planche provient de causes indépendantes de ma volonté.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

40 centimètres de distance focale, un prisme de spath d'Islande bien travaillé, il suffit de trois clichés photographiques ayant chacun une étendue angulaire de 40 minutes pour obtenir toute la partie du spectre chimique comprenant les raies *h*, H, K, L, M, N, O.

La finesse des détails dépend entièrement de la perfection du prisme: avec un bon prisme elle atteint un degré étonnant : les clichés peuvent supporter un grossissement de 50 fois, c'est-à-dire 5 à 6 fois celui de l'oculaire de la lunette.

Au point de vue expérimental, j'ai adopté la marche indiquée par M. Mascart, à savoir l'emploi de la plaque photographique au foyer de la lunette d'un spectroscope formé par un seul prisme; toutefois, j'ai changé le dispositif : au lieu d'introduire une très-petite glace collodionnée jusque dans le plan du réticule, j'ai trouvé plus commode d'employer un porte-plaque extérieur qu'on introduit aussi à la place de l'oculaire. Cette disposition dispense de tailler des verres circulaires, dont la dimension est si petite que la manipulation photographique devient difficile; de plus, elle permet de placer la petite glace collodionnée sur un châssis glissant à coulisse et d'obtenir ainsi plusieurs épreuves sur la même glace. Il est vrai aussi qu'on n'utilise plus le réticule; mais, en général, on n'en a pas besoin, et si le besoin s'en fait sentir, on verra plus loin comment on obtient des repères équivalents.

J'ai exécuté trois séries de clichés photographiques de spectres produits :

1° Par un réseau de Nobert;

2° Avec un prisme de flint;

3° Avec un prisme de spath d'Islande (rayon ordinaire).

La série obtenue avec les réseaux a permis de déterminer directement la longueur d'onde de 36 raies principales; les deux autres ont fourni des spectres plus dispersés ou plus étendus, lesquels, par la finesse de leurs détails, ont servi à compléter les observations précédentes.

Voici le détail d'une opération :

I. *Manipulation photographique.* — Le procédé photographique a été simplifié autant que possible : le collodion employé était celui du commerce; il faut le commander un peu plus épais ou attendre qu'il le devienne; on perd, il est vrai, en sensibilité, mais on gagne en

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

vigueur pour les clichés. Le bain d'argent contient $7\frac{1}{2}$ pour 100 de nitrate d'argent; le révélateur est formé de 1000 grammes d'eau, 30 centimètres cubes d'alcool, 30 centimètres cubes d'acide acétique cristallisable, et 60 centimètres cubes d'une solution saturée de sulfate de fer. On renforce avec quelques gouttes d'un vieux bain à 5 pour 100 et avec le révélateur; on fixe au cyanure, avec lequel on risque peu de tacher les épreuves, quand on opère à la hâte.

Les clichés sont séchés et vernis (vernis Sœhnée).

II. *Mise au point.* — La difficulté principale qu'on rencontre dans ces expériences, c'est la mise au point. Voici le procédé très-simple que j'ai suivi. Le tirage de la lunette étant gradué en millimètres, on construit la courbe empirique dont les ordonnées représentent la graduation du tirage de la lunette pour chaque raie principale du spectre visible, mise au point sur le réticule, et dont les abscisses sont la déviation minima de la raie. La lunette étant achromatique pour les rayons visibles, cette courbe empirique a la forme d'une parabole dont le sommet correspondrait au milieu du spectre : les rayons dont la distance focale est minima sont les rayons verts voisins de *b*. Les rayons chimiques présentent dès lors des distances focales croissant avec leur réfrangibilité, mais très-lentement au début ; grâce à leur visibilité, on peut donc les suivre optiquement jusqu'à la raie H et prévoir par *extrapolation graphique* les tirages qu'il faudra donner à la lunette pour amener dans le plan du réticule le foyer d'une radiation plus réfrangible, correspondant à une déviation donnée. Comme la plaque sensible n'est pas placée dans le plan du réticule, mais en arrière, de toute l'épaisseur du porte-plaque, on diminue le tirage, c'est-à-dire les ordonnées de la courbe de cette quantité, et la courbe empirique peut servir à la mise au point photographique.

Pour faire cette correction d'une manière simple et rigoureuse, on enlève l'oculaire et on le remplace par le porte-plaque muni d'une glace sur la surface de laquelle sont tracés quelques traits au diamant, sur la face même où devrait être la couche sensible. A l'aide d'une loupe très-forte, on vise par transparence un groupe de raies très-fines, par exemple le groupe G, et l'on règle le tirage de manière à amener les traits exactement dans le plan focal de ces rayons. On recommence

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

la même opération en rétablissant l'oculaire et en visant sur le fil du réticule : la différence des deux lectures du tirage dans ces deux cas donne exactement l'épaisseur optique du porte-plaque, c'est-à-dire la correction à faire subir aux ordonnées de la courbe empirique. On vérifie photographiquement cette opération en remplaçant la plaque striée par une glace collodionnée et l'on rectifie, s'il y a lieu, en faisant des essais à $\frac{2}{10}$ de millimètre en avant ou en arrière du tirage calculé.

La courbe une fois construite pour la partie visible du spectre chimique permet d'obtenir sans tâtonnements les clichés de cette partie du spectre. Pour les rayons invisibles ultra-violets, on prolonge *à vue* l'élément de courbe graphique jusqu'à l'abscisse choisie, c'est-à-dire jusqu'à la déviation des rayons qui doivent occuper le milieu du champ, et on lit l'ordonnée ou graduation correspondant au tirage. On fait une épreuve et l'on examine si la netteté la plus grande est bien au milieu du champ; s'il en est ainsi, le réglage est bon, sinon on détermine à l'inspection de l'épreuve la déviation de la région la plus nette et l'on rectifie le prolongement de la courbe des tirages : une seconde épreuve donne alors à coup sûr un résultat complétement satisfaisant.

On procède ainsi de proche en proche, en s'arrangeant de manière que deux clichés successifs présentent une partie commune, afin qu'on puisse les raccorder avec certitude.

III. *Signes de repère sur les clichés.* — Ayant été conduit, par le dispositif adopté, à rejeter l'emploi du réticule, j'ai dû chercher des moyens de tracer des repères sur les épreuves; voici les deux qui m'ont paru à la fois les plus commodes et les plus précis :

1° On fixe la lunette en un point du cercle dont on note l'azimut A tel que la raie principale à observer soit sensiblement dans le milieu du champ; puis, quand l'épreuve est terminée, on ramène la lunette dans la déviation du collimateur, de manière à recevoir l'image directe de la fente. Pour éviter de troubler le milieu du champ par la formation de l'image de cette fente et pour se ménager une échelle de proportion angulaire, on cale la lunette dans deux positions symétriques, distantes de 20 minutes du rayon central, dont l'azimut approché est A_0, et dans chacune des deux positions on impressionne la glace sensible. Le cliché présente alors la série des raies et de chaque côté deux lignes

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

noires, images directes de la fente, qui sont les deux repères; il est facile de voir que la raie idéale qui se trouverait au milieu exact des deux repères correspondrait rigoureusement à la déviation mesurée par

$$A - \left(\frac{A_0 + 20' + A_0 - 20'}{2} \right) = A - A_0.$$

La distance des deux repères donne en même temps l'échelle de proportion du cliché, ou valeur linéaire correspondant à l'intervalle angulaire de 40 minutes.

Cette méthode s'applique parfaitement aux épreuves des spectres obtenus avec des réseaux ou avec des prismes, mais à la condition que ces pièces soient bien construites; si les réseaux offrent des erreurs systématiques dans leurs traits, si les faces du prisme ne sont pas optiquement planes, le foyer des rayons diffractés ou réfractés ne se forme plus dans le même plan que celui des rayons directs, et alors les repères n'ont plus la finesse qui fait leur précision : toutefois, un dépointement dans le foyer de 2 à 3 millimètres fournit encore des résultats satisfaisants. Si la différence de foyer dépasse cette limite, il faut employer la méthode suivante, plus précise encore, mais d'un usage un peu moins commode.

2° On utilise les images déviées à droite et celles déviées à gauche; on fait sur chaque cliché une double épreuve : à cet effet, on couvre la moitié supérieure de la fente et l'on fait une épreuve en photographiant les rayons déviés d'un côté en plaçant la lunette à l'azimut A_1; on répète la même opération en plaçant la lunette à l'azimut A_{-1} symétrique par rapport au rayon central, de manière à photographier les mêmes rayons, mais déviés de l'autre côté, et en découvrant l'autre moitié de la fente. On obtient ainsi un cliché où le même spectre se trouve disposé suivant deux positions inverses.

Le milieu des deux images de chaque raie est le même pour toutes : ce milieu correspond à la déviation $\frac{A_1 - A_{-1}}{2}$. Ce mode opératoire a le double avantage d'offrir une seconde épreuve qui sert de contrôle, et de présenter une vérification pour les deux mesures micrométriques d'une même raie.

L'échelle de proportion ne se trouve pas sur l'image comme dans la méthode précédente; il faut faire une seconde épreuve avec une déviation différente pour l'obtenir.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Dans le cas où l'on veut employer le minimum de déviation du réseau ou du prisme, il est nécessaire de disposer sur la plate-forme centrale ou sur l'alidade mobile un petit cercle auxiliaire qui permet de déplacer la pièce de la moitié de l'angle dont tourne la lunette.

IV. *Examen et amplification des clichés.* — Les épreuves développées et fixées sont ensuite examinées avec un microscope grossissant de 25 à 100 fois, dont la plate-forme porte un chariot à vis micrométrique permettant de relever la position relative des raies. Dans d'autres cas, on adapte au microscope une chambre claire dite *d'Oberhauser*, projetant sur une feuille de papier blanc l'image du cliché : en suivant avec la pointe d'un crayon les traits de l'épreuve, on peut obtenir une image amplifiée des raies spectrales et les relever graphiquement avec un compas; je dirai plus loin dans quel cas je me suis servi de l'une ou de l'autre de ces deux méthodes d'examen et d'amplification.

Enfin, comme auxiliaires fort commodes, j'ai exécuté des épreuves amplifiées de ces petits clichés avec un grossissement variant de 12 à 25 diamètres. A cet effet le microscope était renversé horizontalement, l'oculaire enlevé et le cliché fixé au porte-objet était éclairé par la concentration de rayons solaires; l'image du cliché venait se peindre dans l'intérieur d'une chambre noire à portraits dont l'objectif était enlevé : on recevait cette image, rendue moins intense et plus monochromatique par l'interposition d'un verre bleu en avant de la lentille de concentration, sur une glace collodionnée.

De cette manière, on se procure des clichés positifs, visibles sans loupe, où l'on peut étudier et dessiner sans fatigue l'*effet* des groupes de raies des épreuves; des épreuves sur papier, obtenues avec ces clichés, sont très-utiles dans les carnets d'observation lors des mesures micrométriques, pour définir les raies qu'on relève et éviter les confusions.

Relevé des observations.

Le but à atteindre était la détermination des longueurs d'onde de toutes les raies ultra-violettes observables, et l'opération fondamentale a consisté dans le relevé micrométrique des clichés obtenus avec les réseaux. Il eût été très-désirable de relever toutes les raies sur ces clichés; mais le faible pouvoir optique et les défauts inévitables des réseaux

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

introduisent une certaine confusion dans les images des raies. Cette imperfection des images n'empêche pas la précision du pointé des raies bien isolées, malgré le léger estompement des bords, mais elle efface les détails des groupes de raies un peu fines; en un mot, le spectre des réseaux est notablement inférieur à celui des prismes; de plus, la dispersion des réseaux étant proportionnelle à la longueur d'onde est pour les radiations très-réfrangibles beaucoup moins avantageuse que celle des prismes, qui est sensiblement proportionnelle à l'inverse du carré de la longueur d'onde.

Il a donc fallu se contenter de mesurer les longueurs d'onde des raies principales, sauf à demander aux clichés des spectres prismatiques les détails intermédiaires et même le contrôle de la simplicité des raies fondamentales.

Le réseau de Nobert dont je me suis servi appartient au Cabinet de l'École Polytechnique; il est formé de 1801 traits tracés au diamant; la distance du premier au dernier égale $6^{mm},762$, d'après quatre mesures concordantes effectuées avec la vis d'une machine à diviser de Bianchi et rapportées à un mètre de Lenoir. L'incertitude causée par les difficultés de subdivision d'une grande unité, de comparaison aux types, des effets de la dilation, etc., fait que je ne pourrais pas répondre de 2 à 3 unités sur le quatrième chiffre; on en déduit, pour l'intervalle de deux traits,

$$a = 0^{mm},003762.$$

Comme je n'avais pas en vue une détermination absolue des longueurs d'onde, mais plutôt la continuation du travail d'Angström, je n'ai considéré cette mesure que comme une vérification des opérations ultérieures, et j'ai déduit la constante de mon réseau de la comparaison de déviations de six raies principales avec les longueurs d'onde données par le savant suédois.

Le plan du réseau se règle normalement aux rayons incidents, en se servant de la réflexion normale à l'axe optique de la lunette pointée exactement sur le collimateur; à cet effet, on emploie un oculaire nadiral, semblable à ceux qu'emploient les astronomes pour viser sur le bain de mercure, ou simplement une lame de glace inclinée à 45 degrés, qu'on place devant le réticule après avoir ôté l'oculaire : on peut alors, en projetant de la lumière suivant l'axe, mettre en coïncidence le réti-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

cule avec son image réfléchie sur la face du réseau qui porte les traits; cette coïncidence s'observe avec une grande précision à l'aide d'une loupe qui permet d'examiner le réticule à travers la glace sans tain.

Je mesurais la double déviation δ du spectre du second ordre, qui était très-brillant et très-pur, laquelle satisfait à la formule

$$\frac{a}{2}\sin\delta = \lambda.$$

Voici le résumé des observations :

	2δ	λ (Angström).	$\log\left(\frac{\lambda}{\sin\delta} = \frac{a}{2}\right)$.
Raie C.....	40°.50'.48"	656,20	3,27428
Raie D (plus réfrangible).	36.30. 3	588,89	3,27425
Raie b_1 (isolée).....	31.59.54	519,30	3,27426
Raie F.....	29.57.30	486,06	3,27430
Raie du fer.....	26.57.12	438,26	3,27426
Raie du fer.....	25.58.24	422,63	3,27431
		Moyenne.....	3,27428

$$\log\frac{a}{2} = 3,27428.$$

$$\frac{a}{2} = 1880,5 \text{ millionièmes de millimètre.}$$

La mesure directe m'avait donné 0,001881.

La moyenne du logarithme de $\frac{a}{2}$ est le facteur qui a servi ultérieurement à tous les calculs pour déduire les longueurs d'onde des déviations observées optiquement ou chimiquement.

Il reste à dire quelques mots du mode de calcul employé pour la réduction des clichés. Chacun de ces clichés porte un numéro particulier, qui correspond sur le carnet d'expériences aux déviations des deux repères tracés photographiquement, suivant la méthode décrite plus haut.

Voici, par exemple, le calcul de la longueur d'onde de la raie G ($\lambda = 430,72$ Angström), d'après le cliché X_0.

	Azimut des repères.	Azimut de la déviation.
Cliché X_0.....	$\begin{cases} 90° + 20' \\ 90° - 20' \end{cases}$	75° 45';

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'où l'on conclut que les repères correspondent aux déviations $\begin{cases} 13^{\circ}35' \\ 12^{\circ}55' \end{cases}$ (la confusion entre les deux n'est pas possible, car on sait, d'après la position du cliché sur le goniomètre le sens des déviations croissantes). Les longueurs d'onde qui correspondent à ces repères sont 441,66 et 420,36, en appliquant la formule $\frac{a}{2}\sin\delta = \lambda$.

Le cliché a été placé sur le chariot du microscope et avec la vis micrométrique on a amené successivement les raies les plus importantes ainsi que les deux repères : la mesure a été répétée en tournant la vis en sens inverse. La moyenne des deux pointés a donné :

Premier repère....	37,622		$\lambda = 420,36$
		Diff. 4,921	
Raie G.....	42,543		x
		Diff. 5,106	
Deuxième repère..	47,649		441,66
Diff. des repères.		10,027	Diff. 21,30

Le cliché correspondant à 13 degrés de déviation moyenne et ayant une étendue de 40 minutes, on peut admettre que dans ce petit intervalle les longueurs d'onde varient proportionnellement aux distances des repères : d'où l'on conclut la proportion qui donne la longueur d'onde par la raie G,

$$\frac{x - 420,36}{21,30} = \frac{4,921}{10,027}, \quad x = 430,81.$$

Il y a toutefois une petite correction à faire si l'on veut rapporter ces nombres à ceux qu'on obtient optiquement; en effet, dans ce mode opératoire, on n'observe la déviation que d'un seul côté et d'une manière dissymétrique : on peut donc craindre une petite erreur constante provenant à la fois de cette cause et de la différence des modes d'observation. C'est ce que j'ai aperçu en déterminant successivement la longueur d'onde des mêmes raies par le procédé optique et le procédé photographique : la région violette autour de la raie G se prête très-bien à ces mesures. La correction est d'ailleurs très-faible et sensiblement constante; sa valeur moyenne est de $-0,10$ ou $\frac{1}{4000}$ en valeur absolue. Les valeurs corrigées sont données dans le tableau suivant, sous le nom de *valeurs définitives*.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Tableau des déterminations optiques et photographiques des longueurs d'onde du spectre solaire.

VISION DIRECTE.	RELEVE DES CLICHÉS X_0, X_1, X_2, X_3, X'_1, X'_2.					D'APRÈS ANGSTRÖM.		VALEURS DÉFINITIVES.
C 656,20						C 656,20		
D_1 588,92						D_1 588,89		
b_4 518,32						b_3 518,30		
F 486,05	X_0					F 486,06		
» 438,26	438,37					438,26		
G »	430,81	X_1				G 430,72		
» 422,60	422,73	422,71				» 422,63		
		414,38	X_2					
		»	411,91					411,81
		h 410,04	410,20			*h* 410,12		*h* 410,10
			407,21			407,10		407,11
			406,39			406,29		406,29
			404,61			404,50		404,51
			403,09			402,93		402,99
			400,54			400,46		400,44
			398,71			398,80		398,61
		H, ou H 396,86		X_3		H_1 396,82		H 396,76
			395,31	395,33		395,15		395,20
		H_2 ou K 393,39		»		H_2 393,30		K 393,29
			392,31	392,35				392,21
			390,58	»				390,48
			389,57	389,60				389,47
				387,87				387,71
				386,06				389,93
				b', 383,88 (*)				383,75
				L 382,09				L 381,96
				380,77				380,64
				378,66		X'_1		378,53
				376,46		376,47		376,33
				374,65		374,64		374,52
				M 372,81		372,82		M 372,68
						370,67		370,54
						368,84		368,71
						366,75		369,62
						364,83		364,70
						363,21		363,08
						361,93		361,80
						360,95	X'_2	360,80
						N 358,18	358,15	N 358,05
							355,73	355,63
							352,67	352,57
							349,78	349,68
							O 344,07	O 343,97
							P 337,08	P 336,98

D'APRÈS MASCART.
H 396,79
»
»
»
»
»
»
»
»
L 381,90
»
»
»
»
M 372,88
»
»
»
»
»
»
»
N 358,02
»
»
»
O 344,01
P 336,02

(*) Raie du magnésium correspondant à b_2 du spectre visible.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Ce tableau renferme les résultats déduits directement de chacun des clichés X_0, X_1, X_2, X_3, X'_4, X'_5 (1). Les clichés successifs offrant toujours deux à deux une partie commune, le *raccordement* s'effectue sans aucune confusion : on remarquera à ce propos la concordance remarquable des déterminations communes.

On a rapporté la série des raies observées optiquement : deux d'entre elles sont communes au cliché X_0 et donnent la valeur approchée de la correction; cette correction est donnée d'une manière plus complète par la comparaison des nombres d'Angström (qui s'accordent complétement avec les résultats optiques, d'après ce qui a été dit plus haut) avec ceux déduits des clichés jusqu'à la raie K (ou H_2 de la planche d'Angström).

Telles sont les observations fondamentales qui m'ont permis de déterminer les longueurs d'onde de toutes les autres raies, au nombre d'environ 650.

On remarquera pour la partie ultra-violette l'accord qui existe entre mes déterminations et celles que M. Mascart a faites des raies H, K, L, M, N, O, P. J'ai adopté d'ailleurs les mêmes notations pour les raies.

Tracé de la Planche.

Pour réunir sur un dessin toutes les raies observées, j'ai commencé par tracer à la machine à diviser une échelle millimétrique sur une feuille de carton de Bristol; un premier canevas de raies a été tracé avec les 36 raies du tableau précédent, dont les longueurs d'onde ont été déterminées directement. L'échelle adoptée est la même que celle d'Angström, à savoir 1 centimètre pour un millionième de millimètre; les raies intermédiaires ont été obtenues par interpolation, d'après les clichés des spectres prismatiques, dont la finesse est supérieure à celle des spectres de réseaux.

J'avais commencé à relever au micromètre les raies des clichés de ces spectres fournis par les prismes, mais j'y ai bien vite renoncé pour

(1) Ces clichés ont été obtenus à Paris le 5 mai 1871, à l'exception du dernier, qui l'a été le 7 : il est bon de fixer la date de ces épreuves, depuis que les physiciens et les astronomes soupçonnent quelque variation lente dans la constitution solaire.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

deux motifs : le premier, c'est que le nombre des raies est si grand qu'on ne sait plus sur le carnet d'expérience comment les désigner sans les confondre et sans faire d'erreurs de pointés; le second, c'est que tout ce travail ne servirait qu'à donner une exactitude illusoire, puisqu'on peut à peine compter sur une approximation de 0,05 dans la mesure absolue des longueurs d'onde, c'est-à-dire un demi-millimètre sur le tracé graphique.

J'ai pensé qu'il valait bien mieux porter tout le soin vers la reproduction de l'*aspect* ou *effet* de chaque groupe de raies plutôt que sur la position absolue de chacune d'elles : en un mot qu'une erreur dans les intervalles relatifs d'un groupe était beaucoup plus préjudiciable qu'un déplacement égal du groupe tout entier. J'ai donc choisi un moyen de relevé qui permit d'avoir toujours une vue d'ensemble sur les groupes : c'est ce que donne l'emploi de la chambre claire décrite plus haut.

Les clichés obtenus avec un prisme de flint assez dispersif ont été amplifiés environ 75 fois et les dessins raccordés très-exactement sur la même épure, dont le développement atteignait 3 mètres depuis la raie *h* jusqu'à O. Sur cet énorme spectre (1), où les raies les plus fines et les plus serrées ont été reproduites, j'ai commencé par un premier travail de mise à l'*effet* des groupes, soit en forçant la couleur de l'encre, soit en employant le lavis pour représenter les raies estompées ou les régions à fond plus sombre : pour me guider, les positifs amplifiés étaient d'un grand secours.

A l'aide de ce premier dessin, sur lequel les raies étaient rangées suivant la dispersion prismatique, j'ai pu, avec un simple compas de proportion, exécuter une véritable interpolation graphique entre les 36 raies fondamentales. L'échelle de proportion variait progressivement d'un intervalle à l'autre; mais la distance des raies fondamentales avait été choisie de manière que dans aucun cas l'erreur due à l'emploi du compas ne s'élevât à $\frac{2}{10}$ de millimètre. Une courbe empirique avait d'ailleurs été construite pour bien se rendre compte de cette variation et une échelle particulière tracée sur le compas de proportion facilitait beaucoup cette opération graphique.

La partie la plus réfrangible du spectre entre N et O a été relevée

(1) La distance des deux raies H (nommées H et K) était d'environ 12 centimètres.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

surtout à l'aide de clichés obtenus avec le réseau et le prisme de spath d'Islande; l'absorption du prisme de flint était trop considérable pour que les détails fussent suffisamment nets (1).

En somme, la Planche qui résume ce travail peut être considérée comme formant suite aux Planches du Mémoire d'Angström : j'ai adopté les mêmes conventions et déduit de ses nombres la constante de mon réseau. La finesse des détails me paraît être au moins du même ordre dans l'ensemble du spectre : elle est même beaucoup plus grande pour les environs des raies *h*, H; mais cela n'a rien qui doive étonner, car l'œil arrive à la limite de sensibilité dans cette région, tandis que le collodion iodobromé est, au contraire, extrêmement sensible pour ces radiations.

Enfin, comme erreur probable dans la position des raies par rapport aux repères, je ne crois pas que le dessin atteigne 0,03, c'est-à-dire un tiers de millimètre ; en valeur absolue, ces repères ou raies fondamentales ne doivent pas s'écarter de 0,10 de leur vraie valeur.

---

(1) L'aspect des groupes a été copié sur des clichés obtenus avec un prisme de flint, en mai et juin 1871 pour la plus grande partie du spectre : la partie la plus réfrangible a été revue sur des clichés obtenus avec un prisme de spath d'Islande (rayon ordinaire), en mai 1872. Je crois utile de fixer ces dates, afin de permettre plus tard de reconnaître les *changements d'aspect* des groupes, suivant les phases de l'activité solaire. Ces changements sont déjà visibles lorsque l'on compare les Planches de Kirchhoff avec celles d'Angström et avec l'apparence actuelle du spectre solaire. Comme exemple de ces changements, je citerai l'existence de deux *raies ou plages brillantes*, figurées sur la Planche par deux petits cercles ($\lambda = 388{,}15$, $\lambda' = 388{,}55$) très-visibles sur les clichés de 1871, qui sont beaucoup moins apparentes sur les clichés de 1872.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

SUR

LA TEMPÉRATURE DU SOLEIL.

(Extrait d'une Lettre de M. J.-L. Soret à M. H. Sainte-Claire Deville.)

« Genève, 14 octobre 1874.

» J'ai lu avec un très-grand intérêt les Notes sur la température du Soleil, que vous avez communiquées à l'Académie au nom de M. Violle, savant distingué, qui, à côté de ses travaux originaux, s'est acquis un titre à la reconnaissance de tous les physiciens par la part importante qu'il a prise à la publication des *Œuvres* de Verdet. Vous vous rappelez peut-être que je m'occupe depuis plusieurs années de recherches présentant, quant aux moyens d'observation, une grande analogie avec celles de M. Violle. J'en ai déjà fait connaître quelques résultats (1) et j'espère pouvoir en faire prochainement l'objet d'une publication plus complète, que j'ai dû ajourner parce qu'il me restait à déterminer une correction assez difficile à obtenir.

» Ces mesures de l'intensité calorifique de la radiation solaire ont, je le crois, un assez grand intérêt à divers points de vue; mais je doute que, dans l'état actuel de la science, elles puissent conduire à la détermination de la température du Soleil.

» Le principe de l'appareil, ou actinomètre, successivement employé pour ces observations, d'abord par Pouillet, qui a bientôt adopté une méthode différente, puis par M. Waterston, le R. P. Secchi, M. Ericson, M. Violle et moi-même, consiste à placer un thermomètre à boule noircie dans une enceinte dont la température θ est connue. Un trou percé dans cette enceinte laisse pénétrer un faisceau de rayons

(1) Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1867, t. LXV, p. 526, et 1868, t. LXVI, p. 810. — *Comptes rendus de l'Association française pour l'avancement des Sciences*, 1re session, 1872, p. 282.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

solaires tombant sur le réservoir du thermomètre qui prend une température t.

» Pour pouvoir déduire de cette observation la température du Soleil, il faudrait avant tout connaître la loi du rayonnement de la chaleur à des températures très-élevées. On a tantôt admis la loi de Newton, tantôt celle de Dulong et Petit; or ni l'une ni l'autre ne sont exactes pour les hautes températures : c'est ce qui me paraît résulter très-nettement d'une série d'expériences que j'ai fait connaître il y a deux ans (¹). Permettez-moi de vous en rappeler les résultats en renvoyant, pour les détails, aux Notes que j'ai publiées.

» Avec l'actinomètre que j'ai employé, la radiation solaire à Genève produit un excès de température $t - \theta$ qui dépasse 14°,5. Si, au lieu d'exposer l'actinomètre au Soleil, je dispose un disque de zircone ou de magnésie, chauffé à la lampe oxyhydrique (gaz d'éclairage et oxygène), en le plaçant à une distance telle que son diamètre apparent, relativement au réservoir du thermomètre, soit le même que celui du Soleil, j'obtiens un excès de température $t - \theta$ de 0°,5 seulement. La température du disque est au moins égale, et dépasse probablement celle de la fusion du platine : on peut donc l'évaluer à 1900 ou 2000 degrés.

» Le R. P. Secchi a communiqué, il y a quelques mois, à l'Académie une expérience analogue faite avec la lumière électrique, dont il évalue la température à 3000 degrés, et il a obtenu une intensité de radiation 44 à 36 fois plus petite que celle du Soleil. Je suis tout disposé à admettre l'exactitude de cette expérience; mais on pourrait peut-être objecter qu'il y a assez d'incertitude sur la température de la lampe électrique et qu'il n'est pas certain que toute l'étendue du charbon, visible pour le thermomètre, soit également échauffée. Je m'arrête donc seulement à mon expérience, contre laquelle les mêmes objections ne peuvent être élevées avec la même force.

» Si la loi de Newton était exacte, pour calculer la température T du disque chauffé à la lampe oxyhydrique, on aurait la formule

$$t - \theta = \alpha T,$$

(¹) *Archives des Sciences physiques et naturelles* (Bibliothèque universelle), 1872, t. XLIV, p. 220, et t. XLV, p. 252.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

α étant égal à $\frac{1}{183960}$. Or

$$t - \theta = 0^\circ,5, \quad \text{d'où} \quad T = 91980^\circ,$$

résultat absolument inadmissible, car il est certain que la température du disque est voisine de 2000 degrés et ne dépasse pas, en tout cas, 2800 degrés : la loi de Newton ne se vérifie donc pas.

» Le R. P. Secchi, en discutant, soit quelques-unes de mes expériences, soit la sienne, conclut à une température du Soleil de plus de 100000 degrés. Son raisonnement se résume à dire que, puisque l'intensité de la radiation solaire est 44 fois plus forte que celle de la lumière électrique, la température du Soleil doit aussi être 44 fois plus élevée que celle de la lampe. Cette conclusion ne me paraît point admissible, car elle revient à supposer que la loi de Newton est exacte à partir de 2000 ou 3000 degrés, tandis que l'expérience prouve manifestement qu'elle est inexacte entre zéro et 2000 degrés.

» Passons à la loi de Dulong et Petit. M. Vicaire a déduit de cette loi, pour le cas qui nous occupe, la formule

$$a^t - a^\theta = \alpha a^T,$$

où $\alpha = \frac{1}{183960}$ comme précédemment, et $a = 1,0077$. On tire de là

$$T = \frac{\log(a^t - a^\theta) + \log\frac{1}{\alpha}}{\log a}.$$

Or si l'on applique cette formule à mon expérience où $t = 15^\circ,45$ et $\theta = 14^\circ,95$, on trouve $T = 870^\circ$, chiffre évidemment trop bas, comme l'a déjà fait remarquer le R. P. Secchi. Et si l'on fait le calcul inverse en cherchant la valeur de t pour une température $T = 2000^\circ$, on trouve que l'excès $t - \theta$, au lieu d'être de $\frac{1}{2}$ degré, conformément à l'observation, devrait être de plusieurs *centaines* de degrés. Donc la loi de Dulong et Petit, si exacte pour les températures de zéro à 300 degrés, cesse de l'être lorsqu'on dépasse ces limites.

» Si, faisant un raisonnement analogue à celui que nous venons de critiquer à l'instant, on conservait la formule

$$a^t - a^\theta = \alpha a^T,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

en modifiant seulement la valeur du coefficient a que l'on déduirait de mon expérience, on trouverait pour cette valeur 1,0028 au lieu de 1,0077. Appliquant ensuite la formule à l'excès $t - \theta$, que j'ai obtenu au sommet du Mont Blanc, on arriverait au chiffre de 3330 degrés pour la température du Soleil. Mais ce raisonnement n'est pas légitime : la loi de Dulong et Petit étant inexacte de 300 à 2000 degrés, on ne peut admettre qu'elle soit applicable au-dessus de 2000 degrés. Et puisque le coefficient a, qui devrait être constant d'après la loi, diminue de 1,0077 à 1,0028, quand on passe de 300 à 2000 degrés, il est probable qu'il prendrait une valeur encore plus petite à des températures dépassant 2000 degrés, ce qui conduirait, pour la température du Soleil, à un chiffre supérieur à 3330 degrés.

» Mais ce n'est là qu'une probabilité, nullement une certitude, et je me borne, en résumé, à dire que je ne pense pas que l'on puisse actuellement arriver par cette voie à mesurer avec quelque approximation la température du Soleil. Mon impression est qu'elle est notablement supérieure aux températures les plus élevées que l'on atteigne par des combustions et que l'on évalue à 3000 degrés environ; mais les dépasse-t-elle de quelques centaines de degrés, ou de quelques milliers de degrés? C'est là une question à laquelle je ne voudrais pas me hasarder de répondre.

A ce propos, permettez-moi de vous parler encore de quelques essais, dont une partie ont été faits dans votre laboratoire de l'École Normale, et qui, tout imparfaits qu'ils soient, montrent une fois de plus la grande intensité comparative de la radiation solaire.

» Si l'on regarde une source de lumière, un bec à gaz, par exemple, à travers une ou plusieurs lames de verre bleu de cobalt, on observe que, pour une épaisseur convenable de verre, la flamme paraît d'une teinte pourpre, résultant de ce que le cobalt laisse passer les rayons rouges extrêmes ainsi que les rayons bleus et violets en interceptant les radiations de réfrangibilité moyenne. Si l'on observe, au travers de la même épaisseur de verre, une source de lumière à température plus élevée et par conséquent plus riche en rayons très-réfrangibles, elle ne paraît plus pourpre, mais bleue; il faut augmenter l'épaisseur de verre de cobalt pour obtenir de nouveau cette teinte pourpre; en effet, on ne modifie pas beaucoup par là la proportion de rayons rouges transmis, tan-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

dis que les rayons bleus sont sensiblement affaiblis. Il y a donc une relation entre l'épaisseur du verre de cobalt qui produit la teinte pourpre et la température de la source, du moins s'il s'agit d'une lumière blanche émanant d'un corps solide ou liquide incandescent. Avec quelques perfectionnements, on pourrait baser sur ce principe la construction d'une sorte de pyromètre qui serait peut-être utile dans certains cas.

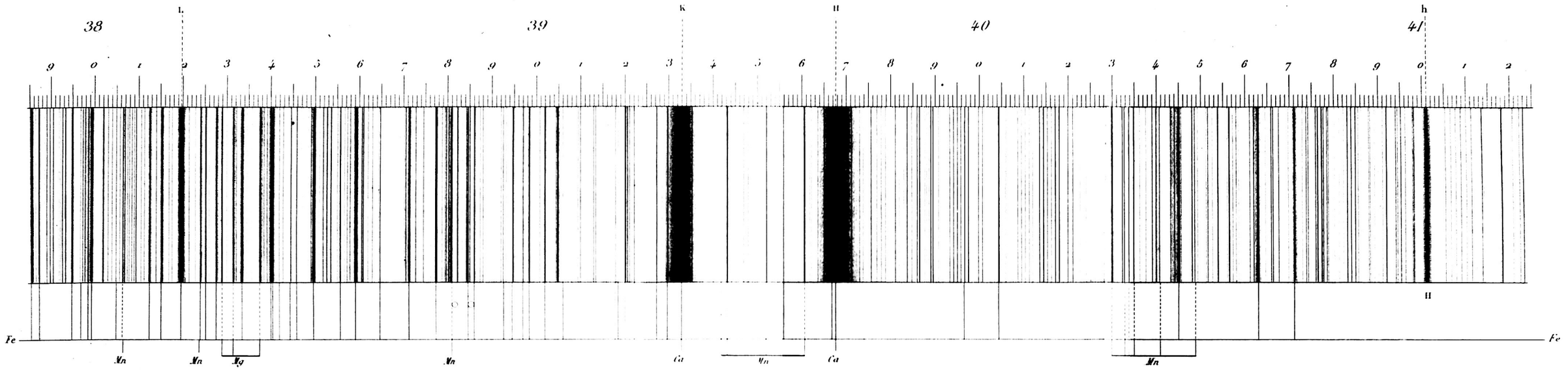
LABORATOIRE DE PHYSIQUE SORBONNE

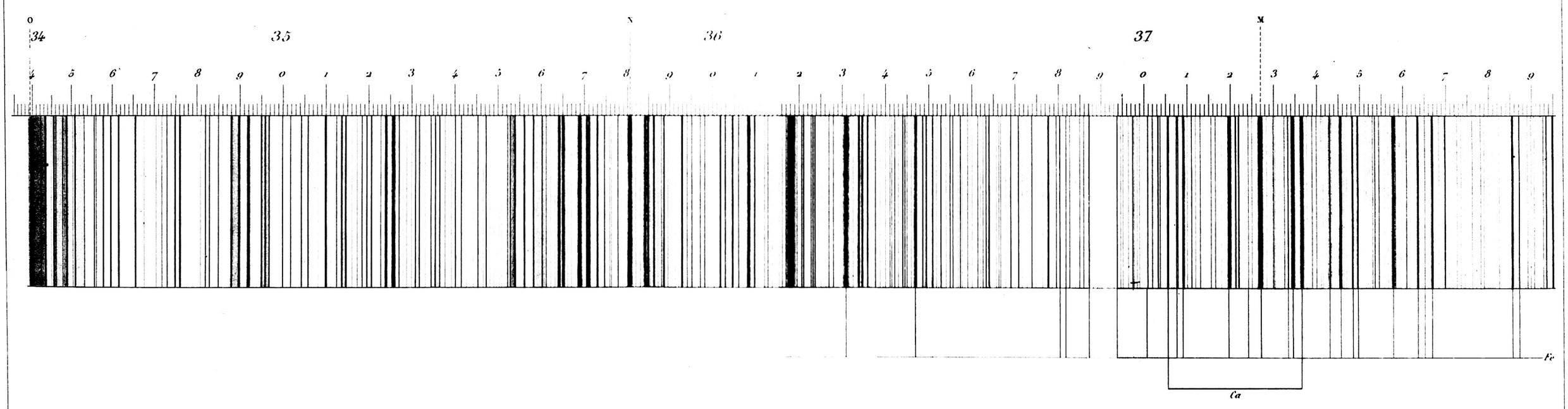
» Voici quelques résultats que j'ai obtenus en opérant avec des lames découpées dans un même verre de cobalt. A la température de la fusion du platine, deux de ces lames superposées suffisaient pour donner sensiblement la teinte pourpre; c'est ce que j'ai pu observer à loisir au Conservatoire des Arts et Métiers, lors de la fusion du lingot destiné à la fabrication des mètres internationaux, opération à laquelle j'ai eu la bonne fortune d'être présent. Peu après, grâce à votre obligeance, j'ai pu assister dans votre laboratoire à l'expérience de la fusion de l'iridium : au moment du maximum de température, cette source de lumière observée avec les deux mêmes lames de verre paraissait complétement bleue; mais avec trois lames on avait une teinte pourpre d'une nuance assez exactement semblable à celle que donne un bec à gaz vu au travers de deux lames. Or, si l'on observe le Soleil lorsqu'il est haut sur l'horizon et par un temps pur, on n'obtient la teinte pourpre ni avec trois, ni avec quatre, ni même avec six lames superposées. Il faut une grande épaisseur de verre de cobalt pour arriver à cette nuance sur les bords du Soleil, et une partie de l'effet doit, sans aucun doute, être attribuée aux défauts d'homogénéité des verres que j'ai employés. La lumière de la Lune donne le même résultat, ce qui montre que l'intensité n'a pas d'influence..... »

FIN DU TOME TROISIÈME.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Spectre normal du Soleil. Portion ultra-violette. Par M. A. Cornu.





Eudes, Imp. rue de l'Hôtel Colbert 12, Paris.

Gauthier-Villars, Libraire Editeur, à Paris.

Legros et Dulos, sc.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

SUR

LES RAIES TELLURIQUES

QU'ON OBSERVE

DANS LE SPECTRE SOLAIRE AU VOISINAGE DES RAIES D;

PAR M. A. CORNU,

Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique

INTRODUCTION.

L'étude du pouvoir absorbant des différents éléments qui entrent dans la composition de l'atmosphère terrestre offre un grand intérêt, aussi bien au point de vue des phénomènes physiques ou météorologiques qu en découlent qu'au point de vue de la vie végétative : en effet, les radiations du Soleil, source de l'énergie répartie à la surface de la Terre, ne parviennent jusqu'à nous qu'après avoir été, en quelque sorte, tamisées par l'atmosphère qui retient les unes et laisse passer les autres. Mes recherches sur l'absorption des radiations ultra-violettes (1) m'ont conduit naturellement à examiner la corrélation qui peut exister entre ce phénomène et l'absorption des radiations visibles.

Malheureusement, aux méthodes photographiques dont les indications ont une sorte de valeur absolue ne correspond aucune méthode photométrique pour la mesure absolue de l'intensité des radiations visibles : on ne peut procéder que par comparaison avec une source lumineuse parfaite-

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVIII, p. 1101 et 1285; t. LXXXIX, p. 808, et t. XC, p. 940.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ment fixe comme éclat, suffisamment riche en radiations réfrangibles et dont l'obtention est difficile à réaliser.

Aussi m'a-t-il paru plus simple de chercher des points de comparaison dans les diverses régions d'un même spectre solaire et d'utiliser le phénomène des *bandes* qui se produit en même temps que l'affaiblissement général des radiations. Ces *bandes* variables avec la hauteur du Soleil, découvertes par Brewster, ont été reconnues par M. Janssen comme produites par l'absorption atmosphérique qui est effectivement variable avec la grandeur du chemin parcouru à travers l'atmosphère par les radiations qui nous arrivent du Soleil.

Observées avec un spectroscope à faible dispersion, ces bandes forment des teintes sombres sur diverses régions assez limitées du spectre, en particulier sur l'orangé, entre les raies C et D de Fraunhofer : j'avais cherché d'abord à mesurer l'intensité comparative de deux régions voisines inégalement assombries par ces bandes ; mais les essais dans cette voie n'ont pas été satisfaisants : la différence de coloration des parties comparées, l'influence de la variation de la largeur de la fente du spectroscope rendent difficile toute détermination précise. Si, d'autre part, on augmente la dispersion pour pouvoir comparer les régions plus voisines comme coloration et pour atténuer l'influence de la fente, alors les bandes se résolvent en raies fines (*raies telluriques* suivant la dénomination proposée par M. Janssen) qui font disparaître l'uniformité des teintes à comparer.

La possibilité des mesures photométriques échappe donc encore de ce côté ; j'ai finalement été réduit à rechercher simplement des repères destinés à distinguer dans l'absorption atmosphérique des degrés bien définis, d'après l'intensité relative des raies telluriques. Réduit à ces termes, le problème est beaucoup plus simple : il consiste à comparer des raies telluriques dont l'intensité est variable suivant l'épaisseur atmosphérique traversée par le faisceau observé, avec les raies fixes (raies de Fraunhofer) des éléments métalliques qui sillonnent également le fond continu du spectre solaire.

Cette méthode s'applique évidemment à toutes les bandes telluriques résolubles, quelle que soit la nature des substances qui les produisent : j'ai

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

choisi de préférence l'un des groupes de bandes que les observations de M. Janssen, d'Angström et d'autres physiciens ou météorologistes rapportent à l'action absorbante de la vapeur d'eau, le groupe voisin de la raie D de Fraunhofer : ce groupe présente le double avantage d'offrir des variations considérables d'intensité et de se détacher sur une région extrêmement lumineuse, ce qui permet l'emploi d'un appareil assez dispersif pour résoudre les bandes en raies très fines.

La vapeur d'eau joue un rôle si considérable dans tous les phénomènes atmosphériques et se présente en quantité si variable suivant les circonstances météorologiques, que l'étude de son influence s'impose avant celle de tous les autres éléments analogues.

Les Cartes publiées par Brewster (1) et par M. Janssen (2) donnent la position des bandes ou des raies telluriques dans leur ensemble; mais la dispersion des spectroscopes employés pour les obtenir étant trop faible, les Cartes ne présentent pas, à beaucoup près, la finesse de détails nécessaire à l'emploi de la méthode indiquée ci-dessus (3).

Mon premier soin a donc été de dresser la Carte détaillée des raies telluriques et métalliques de la région choisie pour mes études : la description des appareils et des mesures ayant servi à obtenir cette Carte fera l'objet de la première Partie du présent Mémoire; dans la seconde, j'indiquerai brièvement les observations effectuées avec l'appareil et le parti qu'on peut tirer de la Carte qui résume l'ensemble de ce travail.

---

(1) *Philosophical Transactions*. Édimbourg, 1833.

(2) *Annales de Chimie et de Physique*, 4e série, t. XXIII, p. 374. Dans ce Mémoire se reproduit la Carte de MM. Brewster et Gladstone, publiée en 1860 dans les *Philosophical Transactions* de Londres.

(3) Une publication récente de M. C. Piazzi Smith, *Madeira spectroscopic*, 1882, contient une série de dessins à grande échelle, reproduisant les plus importants des groupes de bandes atmosphériques donnés par divers observateurs et des observations originales de l'auteur faites à l'île de Madère.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

PREMIÈRE PARTIE.

DESCRIPTION DES APPAREILS ET DES MESURES AYANT SERVI A LA CONSTRUCTION DU SPECTRE DES RAIES TELLURIQUES VOISINES DES RAIES D_1, D_2.

1. — Appareil.

L'appareil d'observation se compose :

1° D'un petit goniomètre de Babinet, construit par MM. Brunner, muni d'un vernier donnant les 10″ et permettant d'estimer les 5″ : la distance focale des objectifs de la lunette et du collimateur est de $0^m,25$;

2° D'un très beau réseau sur verre, d'un pouce carré de surface striée, que je dois à l'obligeance de M. Rutherfurd, de New-York. La surface striée au diamant est argentée : aussi observait-on les spectres par réflexion sur la surface intérieure (1);

3° Une lentille collectrice qui n'a pas besoin d'être achromatique, servant à projeter dans l'axe et sur la fente du collimateur l'image du Soleil réfléchie par le miroir d'un héliostat.

Le réseau est placé sur la plate-forme centrale du goniomètre, réglé avec les précautions que j'ai décrites ailleurs (2) et orienté de manière qu'on reçoive dans la lunette l'un des spectres de diffraction.

Ce réseau est assez parfait pour qu'on puisse observer jusqu'au spectre du huitième ordre; mais c'est le quatrième et le cinquième ordre qui donnent la plus grande netteté.

(1) Il n'est peut-être pas inutile de rappeler que des réseaux tracés sur verre au diamant donnant des spectres très faibles par transmission produisent par réflexion des spectres d'un éclat considérable lorsqu'on argente la surface striée. L'opération est si facile à exécuter qu'on ne saurait trop la recommander pour l'étude des radiations non absorbées par le verre. Il suffit de laver avec précaution le réseau successivement avec de l'alcool, de l'eau, de l'acide nitrique, de la potasse, puis de l'alcool, en frottant légèrement si cela est nécessaire dans le sens des traits; on plonge ensuite le réseau dans les bains connus. On enlève l'argenture avec l'acide azotique faible.

(2) *Annales de l'École Normale*, 2e série, t. IX, p. 71.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La définition des raies est si bonne que l'on a avantage à remplacer l'oculaire ordinaire de la lunette par un microscope composé, grossissant environ 25 fois (¹).

On se débarrasse des stries transversales formées par les irrégularités de la fente du collimateur en remplaçant cette fente, comme le faisaient MM. Fizeau et Foucault, par l'image réelle d'une fente plus large placée à quelques décimètres de distance, produite par une lentille à court foyer ($0^m,01$ à $0^m,02$). La lentille collectrice doit avoir alors une distance focale, telle qu'elle projette à travers l'ouverture de la fente large une image du Soleil sur la lentille à court foyer.

La fente du collimateur était assez bien travaillée pour rendre inutile ce dispositif un peu complexe, mais qu'on ne saurait trop recommander lorsqu'on veut improviser un spectroscope.

La dispersion de l'appareil ainsi disposé est au moins égale à celle que présente le spectroscope construit récemment, pour le cabinet de Physique de l'École Polytechnique, par M. Laurent sur le modèle de M. Thollon.

J'ai été conduit à accroître peu à peu la dispersion de l'appareil d'observation jusqu'à ce que les bandes se résolvent en raies, mais je n'ai pas cru devoir aller plus loin dans cette voie; car, à mesure qu'on augmente la dispersion, l'éclat du spectre diminue et les détails s'effacent; la limite à laquelle je me suis arrêté donne une intensité encore suffisante lorsque le Soleil est à l'horizon : avec une dispersion plus grande, le manque de lumière rendrait les comparaisons difficiles ou même impossibles.

II. — Mode d'observation.

J'ai d'abord cherché, par tâtonnement, l'incidence donnant le spectre le plus détaillé et le plus brillant : j'ai commencé par reconnaître quelques petites dissymétries dans l'éclat ou dans la position des spectres de même ordre : ainsi il n'est pas indifférent de retourner le réseau de 180° autour

(¹) Cette évaluation a été obtenue en observant avec l'œil droit l'image d'une règle divisée en millimètres placée au foyer du microscope et avec l'œil gauche les divisions visibles sur le prolongement de la même règle : la distance de l'œil à la règle étant de $0^m,15$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de sa normale, ce qui paraît assez étrange, au premier abord, mais qui s'explique évidemment par la forme particulière du sillon qui constitue chaque trait : c'est naturellement la meilleure position qui a été adoptée.

Quant à l'ordre du spectre, c'est le quatrième qui a paru donner, à la fois, l'éclat et la netteté. Finalement je me suis arrêté à une position du réseau donnant le spectre du quatrième ordre avec un angle d'incidence d'environ 50°.

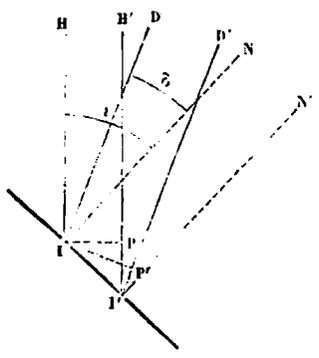
En discutant la formule de réduction des observations, j'ai reconnu que ces essais m'avaient conduit à remplir, à fort peu près, une condition analogue à celle du minimum de déviation qu'on recherche le plus souvent dans l'emploi des prismes ou des réseaux.

Voici les considérations fort simples qui permettent d'établir cette condition théorique très favorable aux observations en même temps qu'à la réduction des mesures.

Discussion de la formule élémentaire des réseaux.

Si l'on désigne (*fig.* 2) par a la constante du réseau, c'est-à-dire l'intervalle de deux traits consécutifs; par i l'angle d'incidence du faisceau incident HI, H'I' avec la normale IN; par δ l'angle du faisceau diffracté ID,

Fig. 2.



I'D' avec la même direction (compté positivement dans le même sens que l'angle i), on a, pour la différence de marche des deux ondes diffractées par deux traits consécutifs II',

$$\mathrm{I'P} + \mathrm{I'P'} = a \sin i + a \sin \delta,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

différence qui doit être égale, comme on sait, d'après la théorie élémentaire des réseaux, à un nombre entier n de longueurs d'onde λ

$$a(\sin i + \sin\delta) = n\lambda.$$

Cette formule établie dans le cas où les faisceaux diffractés émergent du même côté que le faisceau incident, c'est-à-dire lorsque le réseau est utilisé *par réflexion,* s'applique évidemment, en changeant le signe de δ, au cas où le réseau est utilisé *par transmission*.

Le réseau étant dans une position fixe ($i = \text{const.}$), si l'on observe les raies diversement déviées d'un même spectre avec un micromètre à fil mobile, on aura, en appelant $d\delta$ la variation très petite de la déviation correspondant à une variation $d\lambda$ de la longueur d'onde,

$$a\cos\delta\, d\delta = n\, d\lambda.$$

Il semble qu'on ait intérêt, pour avoir le plus de détails possible, à rendre $d\delta$ maximum pour une valeur $d\lambda$ donnée, ce qui reviendrait à chercher les conditions de maximum du quotient

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{n}{a\cos\delta},$$

d'où l'on conclurait qu'on doit prendre n aussi grand et $\cos\delta$ aussi petit que possible. Mais on reconnaît bientôt que ce n'est pas l'élargissement indéfini du spectre qui augmente la finesse des détails; la définition des raies dépend de la perfection du réseau; or, comme cette définition est théoriquement limitée par les éléments mêmes du réseau (nombre des traits, dimension de la surface striée, etc.), on ne peut pas la considérer comme susceptible d'une amplification indéfinie, comme le suppose la condition de maximum écrite ci-dessus.

On reconnaît d'ailleurs que cette condition conduit à une absurdité expérimentale : en effet, le maximum de $\frac{d\delta}{d\lambda}$ correspondrait à $\cos\delta = 0$ ou $\delta = 90°$. Le faisceau diffracté émergerait donc sous l'incidence rasante, par conséquent aurait une intensité nulle, puisque l'intensité est, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelle à l'angle sous lequel on voit la surface striée.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Cet angle sous lequel on voit la surface striée définit non seulement la quantité de lumière reçue, mais encore le *pouvoir optique* de la lunette qui sert à viser chaque raie : on a donc intérêt à le rendre aussi grand que possible pour accroître la netteté des images; c'est donc, au contraire, vers la condition inverse $\cos\delta = 1$ que l'analyse physique du phénomène conduit naturellement. Le plan du réseau est alors normal à l'axe optique de la lunette d'observation. On est ainsi dans les conditions du minimum de dispersion, mais du maximum de pouvoir optique.

Cette condition $\cos\delta = 1$ ou $\delta = 0$ présente un autre avantage, car la formule se réduit à

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{n'}{a} \quad \text{ou} \quad d\lambda = \frac{a'}{n} d\delta,$$

expression extrêmement simple pour la réduction des observations et qui est valable dans un intervalle de valeurs de δ très étendu de part et d'autre de $\delta = 0$.

En effet, si l'on s'impose la limite de $\frac{1}{1000}$ pour l'erreur relative provenant de l'emploi de cette formule approchée, on en tire

$$\cos\delta = 1 - \frac{1}{1000} = 0{,}999, \quad \text{d'où} \quad \delta = \pm 2^\circ 52';$$

on dispose donc d'un intervalle de 5° dans lequel le calcul des longueurs d'onde des raies observées se réduit à une simple proportion. On en conclut le théorème suivant, qui ne me paraît pas avoir été signalé parmi les propriétés des réseaux plans :

Si l'on observe l'un des spectres de diffraction dans le voisinage de la normale au plan d'un réseau fixe, l'incidence étant constante, les variations de la longueur d'onde des raies observées sont sensiblement proportionnelles aux variations de leurs distances angulaires relatives.

Le rapport de proportionnalité est égal au quotient de la distance constante des traits du réseau par l'ordre du spectre observé.

On voit que, si la lunette du goniomètre d'observation est munie d'un micromètre à fil mobile, il suffit de déterminer la valeur angulaire du tour de vis du micromètre pour calculer immédiatement la longueur d'onde

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de toutes les raies pointées dans le champ de la lunette, si l'on connaît celle de l'une d'elles, en valeur absolue.

Ces considérations m'ont déterminé à adopter ce mode de réglage pour les déterminations définitives, d'autant qu'il différait peu de celui auquel des essais préliminaires, effectués sans idée préconçue, m'avaient conduit.

Déterminations numériques.

La région où se trouve l'amas de raies telluriques à relever a été partagée en plusieurs régions par le choix de raies faciles à reconnaître, adoptées comme repères : la longueur d'onde de ces raies a été déterminée avec précision avec le réseau lui-même dans des circonstances très voisines de celles de l'observation des raies intermédiaires.

La longueur d'onde de l'une de ces raies, D_2 (la plus réfrangible des deux raies du sodium), a été adoptée, d'après Angström, comme égale à 588,89, ce qui a permis de déterminer la constante a du réseau nécessaire pour calculer la longueur d'onde des autres raies.

Voici les données relatives à ces déterminations. Les chiffres sont les moyennes des lectures des verniers opposés de l'alidade portant la lunette d'observation : les verniers donnent directement les 10″ et les 5″ à l'estime.

Première série. — L'incidence adoptée a été choisie avant d'avoir obtenu le théorème précédemment indiqué, en cherchant par tâtonnement les conditions donnant les meilleures images.

TABLEAU I. — *Observations dans le spectre du quatrième ordre.*

(Série du 9 octobre 1879.)

	Azimut.	λ calculé.	Remarques.
Image directe de la fente....	89°.58′.27″		
Raie repère n° 1.....	320. 2.20	586,11	Raie du fer.
» n° 2.....	319.52.15	588,28	Raie du fer.
» n° 3.....	319.49.20	588,89* adopté.	Raie D_2 du sodium.
» n° 4.....	319.46.40	589,18	Raie D_1 du sodium.
» n° 5.....	319.35.50	591,78	Raie tellurique au milieu d'un groupe de trois raies équidistantes.
» n° 6.....	319. 3.50	598,61	Raie du fer.
Image réfléchie de la fente...	12.18.50		
Image directe.....	89.58.33		

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On conclut de ces observations que la valeur de l'angle d'incidence i est donnée par

$$180^\circ - 2i = 360^\circ + 89^\circ 58' 30'' - (360^\circ + 12^\circ 18' 50'') = 77^\circ 39' 40'',$$

d'où

$$i = 51^\circ 10' 10''.$$

On calcule $i + \delta$ en retranchant l'azimut d'une raie de l'azimut (augmenté de 360°) de l'image réfléchie de la fente. On calcule aussi $i - \delta$, car la formule adoptée

$$\sin i + \sin \delta = \frac{n\lambda}{a}$$

se met sous la forme calculable par logarithmes

$$2 \sin \frac{i+\delta}{2} \cos \frac{i-\delta}{2} = \frac{n\lambda}{a}.$$

On commence par déterminer a en introduisant dans la formule les valeurs de i et δ qui correspondent a la raie D_2 pour laquelle on adopte $\lambda = 588{,}89$. On trouve pour $n = 4$

$$a = 2936{,}9 \text{ millionièmes de millimètre } (^1).$$

Cette valeur sert à calculer $\frac{2a}{n} = \frac{a}{2} = 1468{,}45$ et les longueurs d'onde des autres raies par la formule

$$\lambda = 1468{,}45 \times \sin \frac{i+\delta}{2} \cos \frac{i-\delta}{2}.$$

Ce sont les valeurs données dans la colonne λ calculé

---

(1) Ce même réseau utilisé par réflexion sur la surface striée désargentée dans la série de mesures des longueurs d'onde ultra-violettes du magnésium, cadmium, zinc et aluminium, avait donné $a = 2935{,}8$ (voir *Archives de Genève*, 1879, et *Journal de Physique*, t. X, p. 425).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Intercalation des raies intermédiaires.

La lunette d'observation étant munie d'un micromètre à fil mobile, il a suffi de pointer les raies comprises entre deux raies de repère, ainsi que ces repères, et de lire sur le tambour et le peigne intérieur le nombre de tours et de fractions de tour correspondant à chaque raie.

Les déplacements angulaires du fil mobile étant très petits (puisque l'intervalle entre les repères extrêmes n'atteint pas 1°), on peut dans toutes les hypothèses supposer la proportionnalité des variations des longueurs d'onde aux déplacements du fil. Il en résulte qu'en portant bout à bout tous les relevés micrométriques effectués entre chaque repère, on obtient les éléments du dessin cherché, les raies étant rangées exactement suivant leurs longueurs d'onde, mais avec une échelle et une origine arbitraires.

C'est en opérant ainsi qu'a été construit d'abord un premier croquis à grande échelle sur lequel j'ai fait les premières études destinées surtout à bien distinguer les raies telluriques et les raies métalliques.

La connaissance des longueurs d'onde des six repères a permis de déterminer l'échelle normale et l'origine réelle, par un calcul facile. En effet, les intervalles entre les repères exprimés en longueurs d'onde étaient

$$2{,}17,\ 0{,}61,\ 0{,}59,\ 2{,}30,\ 6{,}83,$$

et les évaluations correspondantes en divisions du micromètre

$$69{,}7,\ 137{,}1,\ 399{,}8,\ 1172{,}8,$$

ce qui donne, comme quotients,

$$114{,}26,\ 114{,}24,\ 114{,}22,\ 113{,}97,$$

dont la moyenne 114,0 indique les valeurs d'une unité de λ exprimée en divisions du micromètre.

Comme le dessin était fait à l'échelle de 1^{mm} pour une division du micromètre, on voit que l'unité des longueurs d'onde (le millionième de milli-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

mètre) était représentée en moyenne par 114^{mm}. C'est d'après cette minute qu'a été exécuté le premier dessin de la Planche qui résume ce Mémoire, après réduction de 114^{mm} à 40^{mm}, la grandeur représentant l'unité des longueurs d'onde.

On voit que cette échelle, conservée dans le dessin définitif et dans la Planche qui accompagne le présent travail, est quatre fois plus grande que celle du spectre normal d'Angström. C'est la dimension qui m'a paru la plus favorable à la représentation des résultats. A une échelle plus petite, les moindres imperfections dans la position des lignes altèrent notablement l'aspect des groupes. Le millionième de millimètre est donc représenté par 40^{mm}.

Ces dessins, *mis à l'effet* d'après toutes les observations exécutées dans l'automne de 1879, ont été vérifiés et retouchés de temps en temps en 1880, 1881 et 1882. Quelques incertitudes s'étant révélées dans certains groupes d'aspect variable avec la hauteur du Soleil, je pris le parti de recommencer complètement tout ce travail, simplifié beaucoup d'ailleurs par la connaissance pour ainsi dire individuelle de chaque raie de la région étudiée.

En outre, ayant reconnu le théorème dont il a été question ci-dessus, je considérai comme utile de reprendre les mesures en adoptant les conditions géométriques auxquelles il est si facile de satisfaire.

Deuxième série. — Le milieu de la région à observer correspondant à $\lambda = 59\frac{1}{4}$ et l'ordre du spectre le plus lumineux et le plus net étant $n = 4$, on a pour déterminer l'incidence i la condition $\delta = 0$, d'où

$$\sin i = \frac{n}{a}\lambda,$$

d'où l'on conclut

$$i = 53^{\circ}59'25'',$$

soit

$$i = 54^{\circ}.$$

On a donc calé la lunette à 54° de la direction du faisceau incident, et réglé le réseau de façon à présenter le groupe $\lambda = 59\frac{1}{4}$ du spectre du

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

quatrième ordre dans le milieu du champ. On a vérifié ces calculs en réglant par *réflexion normale* la surface du réseau; le groupe $\lambda = 594$ s'est trouvé exactement au milieu du champ sous l'incidence choisie.

Le nombre des repères a été porté de six à huit.

TABLEAU II. — *Observations dans le spectre du quatrième ordre au voisinage de la normale au réseau.*

(Série du 7 octobre 1882.)

	Azimut.	λ Calculé. Série actuelle.	λ Calculé. Série précédente.	Remarque.
Image directe de la fente....	89°.55'.35"	»	»	
Raie repère n° I.....	324.32.10	586,11	586,11	Raie du fer.
» n° II.....	324.19.15	588,89*	588,89*	Raie D_2 du sodium.
» n° III.....	324.16.30	589,16	589,18	Raie D_1 du sodium.
» n° IV.....	324. 5.15	591,77	591,78	Raie tellurique.
» n° V.....	323.55. 5	594,03	»	Id.
» n° VI.....	323.47.15	595,70	»	Id.
» n° VII.....	323.33.15	598,59	598,61	Raie du fer.
» n° VIII.....	323.18.15	601,93	»	Id.
Image réfléchie de la fente...	17.57.10			

La constante du réseau déduite de la raie D_2 a été trouvée égale à $a = 2935,2$, très voisine du chiffre 2935,8 trouvé dans les observations citées plus haut (note de la page 184).

La propriété caractéristique du mode de réglage adopté est de présenter la proportionnalité quasi rigoureuse entre les variations $d\lambda$ et les variations $d\delta$, avec la valeur prévue du rapport

$$\frac{d\delta'}{d\lambda} = \frac{n}{a}.$$

Il était donc utile de vérifier directement cette propriété : on se trouve bien dans les conditions de grandeur de l'angle δ, car l'intervalle entre les repères extrêmes n'est que de 1°14'.

Le relevé micrométrique des distances des repères, exprimées en parties du tambour de la vis du micromètre, a donné :

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

TABLEAU III.

Raies repères.	Distance micrométrique Δm.	Différence de longueur d'onde $\Delta\lambda$.	Quotient $\frac{\Delta m}{\Delta\lambda}$.
	d		
I-II	314,1	2,78	112,99
II-III	67,5	0,57	120,53
III-IV	262,1	2,31	112,97
IV-V	257,5	2,26	113,94
V-VI	189,6	1,67	113,53
VI-VII	326,1	2,89	112,91
VII-VIII	375,0	3,33	112,61
Somme	1792,2	15,81	

Quotient moyen $\frac{1792,2}{15,81} = 113,36.$

Les divergences partielles proviennent de l'insuffisance de la grandeur de certains $\Delta\lambda$ relativement à l'approximation que ces quantités comportent : on reconnaît que la proportionnalité est très satisfaisante.

Quant à la valeur théorique du coefficient, il suffit pour la calculer de déterminer la valeur angulaire σ d'une division du micromètre (1). Deux séries de mesures ont donné pour un tour de vis ou 100 divisions : $4'10''$ et $4'6''$. Moyenne : $4'8'' = 248''$, d'où

$$1^d = 2'',48 \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{2'',48}{\text{arc } 1''} = \sin 2'',48.$$

Comme on a $\Delta\delta = \sigma\Delta m$, on en conclut

$$\frac{\Delta m}{\Delta\lambda} = \frac{1}{\sigma}\frac{\Delta\delta}{\Delta\lambda} = \frac{n}{\sigma a}.$$

Substituant les valeurs numériques $n = 4$ et $a = 2935,2$, on trouve

$$\frac{\Delta m'}{\Delta\lambda} = 113,35,$$

valeur qui reproduit le quotient moyen 113,36 des nombres observés,

(1) Pour conserver la même valeur angulaire d'une division du micromètre et, par suite, le même coefficient de réduction, il suffit de conserver le même tirage de la lunette d'observation : une graduation, gravée sur le tube de tirage, permet de remplir cette condition. Les petites variations de foyer nécessaires à la mise au point exacte de toutes les raies se produisent par le tirage du collimateur.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

avec une précision qu'on doit considérer comme une coïncidence, car la valeur des tours de vis n'est guère connue qu'à $\frac{1}{250}$ près.

Ainsi le mode d'observation correspond bien aux conditions théoriques : on peut donc appliquer sans réserve la loi de proportionnalité au calcul des longueurs d'onde des raies intermédiaires.

Tracé du dessin définitif.

Toutes les séries de pointés (au nombre de trente environ) ont été calculées numériquement en adoptant le coefficient de réduction obtenu ci-dessus, lorsque la série ne comprenait qu'un repère, ou en calculant directement le coefficient de proportionnalité lorsque la série en contenait deux.

Chaque raie a été, en moyenne, observée quatre fois et les divergences dépassent rarement 2 ou 3 unités du dernier chiffre conservé. Le chiffre adopté est généralement la moyenne de tous les résultats ou celui qui s'accorde le mieux avec l'ensemble de la série.

Le Tableau IV donne le résumé des mesures, c'est-à-dire la liste des longueurs d'ondes adoptées d'après l'ensemble de toutes les déterminations : il a fourni les positions de chacune des raies, au nombre de 200 environ, du dessin définitif.

Ces raies, une fois tracées, ont été *mises à l'effet* : je me suis servi, pour cela, des deux dessins antérieurs, construits par la méthode graphique, sur lesquels l'aspect général des divers groupes avait été reproduit par des traits au tire-ligne ou par des teintes lavées au pinceau. Ces deux dessins retouchés, à chaque observation nouvelle, ont fini par représenter une sorte d'*effet moyen* suffisant pour donner à chaque groupe sa physionomie propre et permettre de le reconnaître. La difficulté a été pour certains groupes beaucoup plus grande qu'on ne peut se l'imaginer à cause du mélange des raies métalliques fixes comme intensité et des raies telluriques variables avec les conditions météorologiques et astronomiques. La similitude d'aspect de ces deux espèces de raies, lorsque l'absorption atmosphérique est faible, est si complète qu'il est impossible de les distinguer les unes

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

des autres. Il m'est arrivé bien des fois, après avoir dessiné soigneusement certains groupes de raies et reproduit aussi fidèlement que possible leurs intensités respectives, d'être dans l'impossibilité, quelques heures après, de retrouver la concordance du dessin et du spectre observé : certaines raies faibles en devenant plus fortes avaient complètement altéré le caractère du groupe; il fallait pour s'y reconnaître faire une série de mesures micrométriques à partir d'un groupe bien reconnaissable. Parmi les régions les plus difficiles à débrouiller, je citerai les groupes 590,9, 592,8, 594,8.

Lorsque le Soleil n'est plus qu'à quelques degrés de l'horizon, les raies d'absorption deviennent si nombreuses et si intenses que même les raies du sodium, D_2 et surtout D_1, ne sont plus reconnaissables, à première vue, au milieu des raies telluriques qui les entourent : avec l'habitude et la précaution répétée de suivre la progression croissante ou décroissante de l'absorption dans le spectre, on parvient à ne plus commettre ces erreurs d'identification, qu'il est impossible d'éviter au début de ce genre d'études.

Ces explications étaient nécessaires pour bien faire comprendre que la Planche gravée qui résume le présent Mémoire est *purement figurative :* elle n'a aucunement la prétention de représenter à une époque quelconque l'aspect du spectre solaire autrement que d'une manière *moyenne;* elle est destinée à permettre aux observateurs de distinguer :

1° Les raies *métalliques,* c'est-à-dire celles qui subsistent l'hiver dans nos contrées, par les plus grands froids, lorsque le Soleil est au méridien;

2° Les raies dites *telluriques,* dont l'éclat varie avec la hauteur du Soleil et certaines conditions météorologiques.

Les premières sont représentées par les longues lignes du dessin : elles sont prolongées jusqu'à une ligne horizontale désignée par Fe lorsqu'elles coïncident avec les raies brillantes du spectre de la vapeur de fer, comme c'est le cas pour la plupart d'entre elles; les autres sont prolongées en pointillé jusqu'au symbole chimique (Na, Ni, Ti, Mn) du métal avec les raies duquel on a pu établir la coïncidence; enfin un certain nombre de raies, généralement très faibles, n'ont pas pu être identifiées avec certitude avec

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

celles d'aucun élément usuel; on a laissé en blanc la place du symbole chimique auquel on doit les rapporter.

Les raies telluriques sont représentées par les lignes qui n'occupent que la moitié de la hauteur du spectre : elles sont figurées avec l'intensité relative (1) qu'elles présentent dans les conditions moyennes, mais sous les réserves indiquées ci-dessus : elles affectent alors la même netteté que les raies métalliques, sauf dans le cas des groupes les plus intenses, comme le groupe 594, où les raies sont larges et un peu estompées dès qu'elles deviennent bien visibles.

On a cherché à reproduire (2) ces différents genres d'aspect; mais le but de ce dessin est bien moins de représenter l'aspect relatif des groupes telluriques et des raies métalliques que de permettre aux observateurs de les reconnaître aisément et d'établir la concordance entre le spectre fourni par leurs appareils et celui sur lequel j'ai opéré.

TABLEAU IV. — *Longueurs d'onde des raies sombres observées dans le spectre solaire au voisinage des raies* D_1, D_2.

(Observations faites de 1879 à 1883.)

L'ordre d'intensité décroissante est défini par un chiffre allant de 1 à 10 : il est en chiffres arabes pour les raies métalliques fixes, en chiffres romains pour les raies telluriques variables.

Longueur d'onde des raies.	Ordre d'intensité.	Remarques.	Longueur d'onde des raies.	Ordre d'intensité.	Remarque.
587,46.....	X		587,97.....	X	
51.....	X		588,08.....	IX	
54.....	X		17.....	X	
65.....	X		19.....	X	
68.....	X		28.....	5	Fer
86.....	IX		31.....	X	
95.....	X		44.....	X	

(1) J'ai préféré ce mode de représentation à celui qu'Angström a adopté dans son bel atlas du *spectre normal* du Soleil, parce que la comparaison avec les observations directes est beaucoup plus facile : ce mode de figuration, d'ailleurs très ingénieux, adopté par le savant suédois, permettait de bien distinguer les raies telluriques des raies métalliques, mais elle ne reproduit pas le caractère des groupes mixtes, parce qu'elle substitue une représentation conventionnelle à une imitation approchée de la réalité.

(2) Je tiens à remercier M. Legros de l'habileté avec laquelle il est parvenu à rendre par la gravure le dessin qui lui avait été confié.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Longueur d'onde des raies.	Ordre d'intensité.	Remarque.
588,48.....	VII	
52.....	IX	
55.....	X	
62.....	VII	
67.....	VI	
76.....	VIII	
86.....	X	
89.....	1	D_2 sodium
588,96.....	X	
589,02.....	10	Métallique
06.....	V	
14.....	VI	
19.....	8	Nickel
20.....	VII	
24.....	VIII	
33.....	IX	
39.....	X	
40.....	X	
48.....	2	D_1 sodium
53.....	VIII	
57.....	VIII	
63.....	X	
68.....	X	
71.....	V	
77.....	VIII	
80.....	10	Titane
88.....	III	
94.....	X	
589,98.....	X	
590,04.....	IV	
09.....	VIII	
12.....	X	
24.....	X	
27.....	X	
41.....	X	
45.....	VIII	Fer
52.....	X	
60.....	X	
62.....	IX	
66.....	VIII	
70.....	VIII	
78.....	VI	
83.....	X	
87.....	9	Métallique
89.....	IX	
590,95.....	VII	
591,03.....	X	
07.....	X	
15.....	IX	

Longueur d'onde des raies.	Ordre d'intensité.	Remarque.
591,18.....	VIII	
30.....	4	Fer
38.....	IX	
42.....	X	
43.....	X	
50.....	9	Fer
54.....	X	
62.....	X	
69.....	X	
72.....	III	*Grand triplet*
78.....	III	
84.....	III	
89.....	X	
94.....	IX	
591,99.....	X	
592,06.....	IX	
13.....	V	
19.....	X	
25.....	VI	
27.....	VI	
30.....	V	
37.....	VI	
54.....	X	
66.....	8	Métallique
71.....	VI	
76.....	X	
81.....	X	
85.....	10	Métallique
90.....	6	Fer
93.....	X	
592,97.....	X	
593,09.....	IV	
16.....	VI	
25.....	X	
30.....	X	
35.....	7	Fer
40.....	X	
46.....	IX	
53.....	X	
62.....	X	
69.....	IX	
73.....	X	
88.....	X	
93.....	VIII	
593,98.....	II	
594,01.....	IV	
13.....	I	
21.....	X	
24.....	X	

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Longueur d'onde des raies.	Ordre d'intensité.	Remarque.
594,32.....	VII	
35.....	VII	
41.....	VIII	
45.....	VIII	
49	IV	
57.....	X	
60.....	V	
70.....	X	
74.....	7	Fer?
80.....	10	Métallique
81.....	10	»
85.....	VII	
91.....	VIII	
594,98.....	IX	
595,04.....	VIII	
17.....	7	Fer?
21.....	9	Métallique
24.....	IX	
28.....	X	*Sensiblement équidistantes*
32.....	X	
35.....	X	
39.....	VII	
43.....	IX	
47.....	X	
53.....	IX	
57.....	7	Fer
68.....	VI	*Petit triplet*
72.....	V	
76.....	V	
86.....	X	
595,90.....	IX	
596,04.....	IX	
08.....	X	
14.....	IX	
36.....	X	
47.....	10	Titane
52.....	IX	
56.....	VIII	
68.....	V	
73.....	VI	
79.....	IX	
90.....	VIII	
596,96.....	X	
597,03.....	VII	
30.....	X	
41.....	VII	
42.....	7	Fer

Longueur d'onde des raies.	Ordre d'intensité.	Remarque.
597,47.....	X	
52.....	X	
56.....	7	Fer
58.....	VII	
63.....	X	
67.....	VIII	
74.....	10	Titane
597,89.....	X	
598,01.....	X	
26.....	5	Fer
31.....	X	
37.....	5	Fer
41.....	VIII	
60.....	5	Fer
69.....	X	
75.....	IX	
83.....	VIII	
95.....	X	
598,97.....	VIII	
599,03.....	10	Métallique
09.....	7	Métallique
21.....	X	
28.....	X	
36.....	VIII	
57.....	7	Nickel
63.....	VIII	
68.....	8	Nickel
86.....	IX	
599,90.....	X	
600,20.....	5	Fer
25.....	IX	
36.....	X	
45.....	10	Métallique
63.....	9	Nickel
70.....	7	Fer
76.....	5	Fer
600,85.....	X	
601,12.....	10	Nickel
25.....	5	Manganèse
47.....	X	
57.....	5	Manganèse
75.....	X	
82.....	X	
601,92.....	3	Fer
602,09.....	5	Manganèse
32.....	4	Fer
61.....	6	Fer

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Résumé des observations faites pour établir la coïncidence des raies métalliques avec les raies du spectre solaire.

Toutes les coïncidences des raies fixes du spectre solaire avec les raies des vapeurs métalliques indiquées dans le Tableau ci-dessus ont été vérifiées directement. Il n'est pas inutile d'entrer dans quelques détails à ce sujet.

I. — Sodium.

La comparaison est pour ainsi dire intuitive : il suffit d'interposer la flamme d'une lampe à alcool dans le faisceau solaire pour voir immédiatement le renforcement des raies D_1 et D_2; la mèche et le liquide contiennent presque toujours assez de soude pour montrer le phénomène : en tout cas, il suffit d'introduire dans la flamme une spirale de fil de platine renfermant un fragment d'un sel de soude pour voir apparaître le renforcement des raies D ou les raies brillantes elles-mêmes si l'on intercepte le faisceau solaire. Les raies brillantes de la soude se retrouvent d'ailleurs dans tous les spectres qu'on observe et fournissent des repères très utiles pour les mesures absolues.

II. — Fer.

L'étincelle d'induction même renforcée par l'action d'un condensateur jaillissant entre deux électrodes de fer ne donne dans le voisinage des raies D_1 et D_2 aucune des raies caractéristiques du fer, mais seulement les raies de l'air. On n'obtient pas davantage ces raies en mouillant les électrodes avec une solution saturée de perchlorure de fer ou en faisant jaillir l'étincelle entre la surface de la solution et une pointe de fer ou de platine.

On obtient, au contraire, les raies du fer avec une grande intensité en plaçant un morceau de métal dans l'arc électrique produit par une pile ou une machine dynamo-électrique : le charbon inférieur est taillé en creuset; on y dépose le morceau de fer (quelques pointes de Paris).

En approchant le charbon supérieur d'abord presque en contact, le

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

métal fond et se volatilise : on peut alors relever le charbon de plusieurs millimètres sans que l'arc cesse de se produire. C'est cet arc qu'on projette avec une lentille sur la fente du collimateur pour observer les raies du fer. Elles présentent en éclat lumineux l'importance relative que les raies correspondantes du spectre solaire présentent en *sombre*.

La coïncidence de ces raies brillantes avec les raies sombres peut s'effectuer par observation simultanée à l'aide d'un prisme auxiliaire amenant sur l'une des moitiés de la fente l'image de l'arc électrique, tandis que l'image du Soleil est projetée directement sur l'autre moitié.

Le grossissement par l'oculaire qui élargit dans des proportions notables l'ombre projetée par le bord du prisme gêne la comparaison; aussi est-il plus commode de placer l'arc électrique sur le trajet même du faisceau solaire : la lentille collectrice permet alors d'obtenir à volonté soit l'image du Soleil, soit l'image de l'arc, et d'observer successivement les raies sombres et les raies brillantes qu'on rapporte alors au fil vertical du réticule ou à un grain de poussière du fil horizontal. Avec un peu d'adresse on parvient, en plaçant l'arc électrique à une distance convenable, à manœuvrer la lentille collectrice de manière à obtenir simultanément les deux sortes de raies dans la proportion d'intensité relative qui permet d'établir leur coïncidence.

Résultats. — Si l'on observe le spectre de la vapeur de fer dans l'arc électrique sans comparaison avec la lumière solaire, en n'ayant pour se guider que les inévitables raies D_1 et D_2 de la soude, on reconnaît immédiatement le canevas du spectre solaire, c'est-à-dire le réseau de raies qui subsistent dans les circonstances où les raies telluriques s'effacent.

Il est donc bon de recommander ici, comme pour la région ultra-violette, l'étude du spectre du fer dans l'arc électrique comme introduction ou complément à celle du spectre solaire (1).

En dehors des comparaisons purement qualitatives, il est bon de donner les résultats de déterminations faites indépendamment de toute compa-

(1) Voir *Comptes rendus*, t. LXXXVI, p. 315.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

raison avec le spectre solaire : la concordance donnera une idée de l'approximation obtenue et montrera quel parti on peut tirer des observations des raies métalliques en l'absence de la lumière solaire pour des études spectrales.

La méthode de calcul est celle qui a été indiquée plus haut. Les chiffres marqués d'un * sont ceux qui ont servi de repère. Les accolades réunissent les raies formant des groupes bien apparents de raies à peu près égales. Les chiffres entre parenthèses indiquent les raies des métaux étrangers qui se sont trouvés accidentellement mêlés au métal principal.

TABLEAU V. — *Coïncidence des raies du spectre solaire avec les raies de la vapeur de fer.*

					Moyenne.	Chiffres adoptés sur la Planche.
»	»	»	(588,89 Na)	»	»	»
»	»	»	(590,15 Na)	»	»	»
»	»	»	591,30*	»	591,30	591,30
»	»	»	591,53	»	591,53	591,50
592,88	»	»	592,91	592,90*	592,90	562,90
593,34	»	»	593,38	593,36	593,36	593,35
594,82	»	»	»	»	594,82	594,74 80
595,14	»	»	»	595,19	595,17	595,17 21
595,53	»	»	»	595,58	595,56	595,57
597,40 597,56*	597,42* 597,57	»	»	597,57 597,59	597,43 597,57	597,42 597,56
»	598,26	598,26*	»	»	598,26	598,26
»	598,36	598,37	»	»	598,37	598,37
»	598,59	»	»	»	598,59	598,60
»	(599,57 Ni)	»	»	»	»	»
»	(599,65 Ni)	»	»	»	»	»
»	600,20	600,19	»	»	600,20	600,20
»	(600,62 Ni)	»	»	»	»	»
»	600,76*	600,76	»	»	600,76	600,76
»	»	601,92	»	»	601,92	601,92 (1)
»	»	602,31	»	»	602,31	602,32
»	»	602,61*	»	»	602,61	602,61

(1) M. Fievez, dans son atlas du spectre solaire, donne cette raie comme double : elle est, en effet, plus large proportionnellement dans le spectre solaire que dans le spectre du fer, mais je n'ai pu la dédoubler avec certitude avec mon appareil.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

III. — Nickel.

Les raies du nickel s'obtiennent comme les raies du fer en plaçant un fragment de métal dans l'arc électrique et s'observent de la même manière.

Les nombres qui suivent sont les résultats de déterminations faites indépendamment de toute comparaison avec les raies solaires : l'observation directe des coïncidences a d'ailleurs été effectuée plusieurs fois.

Tableau VI. — *Coïncidence des raies du spectre solaire avec les raies de la vapeur de nickel.*

						Moyenne.	Chiffres adoptés sur la Planche.
»	588,37	588,37	»	»	»	588,37	588,37
(588,89* Na)	(588,89*)	(588,89*)	»	»	»	»	»
589,19	589,19	589,19	589,17	»	»	589,18	589,19
(589,49 Na)	(589,49)	(589,49)	(589,48*)	»	»	»	»
»	590,00	590,00	589,99	»	»	590,00	589,98 (?)
»	590,55	»	590,53	»	»	590,54	»
»	592,29	»	»	»	»	592,29	»
599,57	599,55	»	599,57*	599,56	599,57*	599,57	599,57
599,65	599,65	»	599,65	599,64	599,65	599,65	599,68
600,62	600,63	»	600,63	600,63	600,63	600,63	600,63
»	»	»	»	(600,76* Fe)	»	»	»
»	601,11	»	»	601,11	601,13	601,12	601,12
»	»	»	»	»	(601,60)	»	»
»	»	»	605,28	»	»	605,28	»

IV. — Manganèse.

Quelques cristaux de chlorure de manganèse placés sur les charbons encore incandescents d'une lampe électrique se déshydratent : lorsque l'arc jaillit, il se produit une sorte de flamme dans le spectre de laquelle on reconnaît les trois raies intenses

601,25, 601,57, 602,09,

dont la coïncidence avec les raies sombres du spectre solaire est facile à observer.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

V. — Titane.

Les raies du titane s'obtiennent en faisant jaillir une étincelle d'induction condensée entre deux bâtons de charbon de cornue à gaz préalablement chauffés au rouge, qu'on imbibe de perchlorure de titane. L'expérience est incommode à cause des fumées irritantes qui se développent, mais l'intensité des raies est assez vive si l'on prend soin de renouveler le liquide en versant de temps à autre une goutte de liquide avec une pipette. On projette l'étincelle sur la fente du collimateur pour éviter le dépôt des fumées sur cette fente.

Voici quelques déterminations directes analogues aux précédentes :

Tableau VII. — *Coïncidence des raies des spectres solaires avec les raies de la vapeur de titane.*

		Moyenne.	Chiffres adoptés sur la Planche.
(588,89* Na)	(588,89*)	»	»
(589,48 Na)	(589,48*)	»	»
589,82	589,80	589,81	589,80
592,82 faible.	»	591,82	»
592,07 id.	»	592,07	592,06 ?
591,03 id.	»	591,03	»
595,15 assez intense.	»	595,15	595,17 ?
596,41 id.	»	596,41	586,46
597,69 id.	»	597,69	597,71
599,80 faible.	»	599,80	»

Ces observations un peu pénibles ont été obtenues avec l'oculaire ordinaire de l'appareil et avec un seul repère; l'approximation et la concordance, surtout pour les raies les moins réfrangibles, sont donc nécessairement moins satisfaisantes.

VI. — Essais avec d'autres métaux usuels.

Parmi ces essais qui n'ont fourni aucune coïncidence, je citerai le chlorure de calcium vaporisé dans l'arc électrique qui produit avec énergie la raie brillante et souvent renversée $\lambda = 585{,}66$, mais qui ne donne aucune raie d'intensité appréciable dans l'intervalle figuré sur la Planche.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

En résumé, les raies fixes dont la coïncidence avec les raies métalliques brillantes n'a pu être établie sont en très petit nombre et ne présentent qu'une intensité très faible.

Position de la raie brillante de la chromosphère attribuée à l'élément qu'on a nommé HÉLIUM.

J'ai adapté l'appareil d'observation à l'extrémité d'une lunette de 2^m de distance focale et de $0^m,070$ d'ouverture, de manière à recevoir l'image directe du Soleil sur la fente du collimateur. La raie brillante de la chromosphère s'est montrée plusieurs fois avec netteté presque en coïncidence avec la première des raies telluriques figurées sur la Planche : elle a donc pour longueur d'onde une valeur très voisine de $\lambda = 587,46$.

SECONDE PARTIE.

OBSERVATIONS RELATIVES A LA VARIATION DIURNE D'INTENSITÉ DES RAIES TELLURIQUES DANS LE SPECTRE SOLAIRE AU VOISINAGE DES RAIES D.

La construction de cette Carte des raies telluriques aux environs des raies D_1, D_2 est destinée à fournir les éléments, sinon d'une méthode de mesure, du moins d'une méthode d'appréciation de l'absorption atmosphérique (1).

(1) Les observations d'Angström, de MM. Janssen, Piazzi Smith et celles qui suivent tendent à prouver que l'ensemble des raies telluriques étudiées ici sont dues à la vapeur d'eau contenue dans l'atmosphère : mais on ne doit pas considérer cette corrélation comme rigoureusement démontrée avant qu'on ait observé directement le spectre de la vapeur d'eau avec un pouvoir dispersif suffisant pour distinguer toutes les raies figurées sur la Planche ci-jointe. Je l'admettrai, néanmoins, en faisant toutes les réserves nécessaires : mais je ne serais point étonné que quelques-unes d'entre elles correspondissent à d'autres substances en relation météorologique avec la vapeur d'eau.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

C'est l'étude des radiations ultra-violettes qui m'a conduit à rechercher s'il n'y avait pas une corrélation à établir entre les variations, en apparence accidentelles, de la limite ultra-violette du spectre solaire avec le degré d'humidité de l'atmosphère.

J'ai cru souvent apercevoir une concordance assez étroite entre ces deux phénomènes; mais souvent aussi le parallélisme des deux phénomènes a été en défaut. Comme exemple d'accord, on peut citer la transparence de l'atmosphère pendant l'hiver pour les radiations ultra-violettes et l'opacité relative (à hauteur égale du Soleil) pendant l'été; il était très naturel de penser que l'accroissement d'absorption pendant l'été était la conséquence de l'accroissement de l'humidité de l'air; mais des observations exécutées dans les Alpes (1), à des altitudes où l'atmosphère est extrêmement sèche, m'ont prouvé, après discussion numérique, que l'absorption ultra-violette doit être attribuée, d'une manière générale, à l'action d'une autre substance que la vapeur d'eau.

Quoi qu'il en soit, l'étude de l'absorption des radiations visibles par la vapeur d'eau n'en demeure pas moins fort importante et la description minutieuse de la région voisine des raies D_1, D_2 permet, comme on va le voir, d'aller plus avant qu'on ne l'a fait jusqu'ici vers la mesure précise de cette absorption.

Il se présente, en effet, avec le pouvoir dispersif adopté dans mon spectroscope une particularité intéressante, c'est l'analogie d'aspect de la plupart des raies telluriques avec les raies sombres qui correspondent à l'absorption produite par les vapeurs métalliques à la surface du Soleil. Il en résulte la possibilité de comparer deux raies, l'une tellurique, l'autre métallique, et d'assigner l'époque de la journée, c'est-à-dire l'épaisseur atmosphérique pour laquelle le degré de noirceur est exactement le même.

Or, comme on peut admettre que la constitution moyenne du Soleil ne subit que des variations à longue période, on est conduit à supposer fixe (sous réserve de la possibilité d'une modification *séculaire*) l'intensité ou plutôt le degré de noirceur des raies métalliques, ce qui fournit un moyen

(1) Voir *Comptes rendus*, t. LXXXIX, p. 808, et t. XC, p. 940.

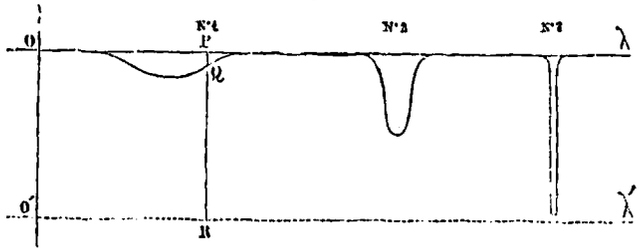
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de préciser un degré bien défini de l'absorption de la radiation correspondant à la raie tellurique comparée.

Les couples de comparaison qu'on peut employer pour les mesures précises sont moins nombreux qu'on ne pourrait le croire au premier abord, eu égard au nombre considérable de raies métalliques entremêlées aux raies telluriques dans le voisinage des raies D_1, D_2. La cause en est dans la différence d'aspect de ces raies d'absorption dont l'identité avec celle des raies métalliques n'est pas toujours parfaite. Bien qu'il soit difficile d'étudier avec précision la loi de variation de l'intensité dans l'intérieur de ces raies d'absorption, l'habitude acquise dans ce genre d'observations permet de démêler une certaine variété, qu'on peut représenter par des courbes graphiques.

L'ordonnée PQ de la courbe (*fig.* 2) mesure le *degré de noirceur*, c'est-

Fig. 2.



à-dire d'absorption que l'œil apprécie comme il apprécie le degré d'éclat; l'abscisse OP correspond à la longueur d'onde de la radiation absorbée.

Le sens négatif donné aux ordonnées permet d'établir approximativement la relation qui doit exister entre l'appréciation du degré de noirceur et celle du degré d'intensité : en effet, en considérant l'axe Oλ des valeurs nulles du degré de noirceur comme l'ordonnée O'O de l'intensité constante du champ, les valeurs RQ des intensités seront complémentaires des degrés de noirceur PQ. L'absorption infinie ou le noir absolu sera évidemment donné par l'ordonnée nulle de l'intensité.

On voit, dans les trois types de courbes donnés ci-dessus, la représentation de trois types de bandes d'absorption : le premier (n° 1), très large mais peu sombre, comme est celle qui couvre le jaune orangé du spectre lorsqu'on interpose, sur le faisceau solaire, un verre bleu cobalt : les raies

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

H et K du calcium, quoique métalliques, présentent d'ailleurs le même aspect, mais ce sont les seules de tout le spectre visible ou chimique; le second (n° 2) représenterait assez bien les bandes d'absorption les plus étroites des solutions des sels d'urane : enfin, le troisième (n° 3) est la figuration d'une raie tellurique très fine et très sombre avec un léger estompement sur les bords, comme le sont la plupart de celles qui sont représentées sur la Planche qui termine ce Mémoire.

Un certain nombre de raies sombres métalliques offrent exactement l'aspect du type n° 3 lorsqu'on les observe avec une forte dispersion, ainsi on peut citer les trois raies du magnésium qui forment le groupe *b*, la raie 422,74 du calcium, les raies C et F, *h* de l'hydrogène, etc...

Presque toutes les raies telluriques finissent par atteindre la largeur d'estompement du deuxième type lorsque le chemin parcouru dans l'atmosphère approche du maximum, c'est-à-dire lorsque le Soleil atteint l'horizon : quelques raies telluriques, voisines de D, telles que le groupe (594,13, 593,98), présentent même pour les faibles épaisseurs atmosphériques une largeur notable qui empêche de les considérer comme de véritables raies.

Ces remarques (1) montrent nettement quelles conditions doivent remplir les raies telluriques pour servir avec quelque précision à l'estimation de l'absorption atmosphérique : elles montrent en même temps que, malgré la diversité d'origine, les raies telluriques et les raies métalliques sont, au point de vue optique, de même nature et que toute distinction absolument tranchée entre les unes et les autres serait illusoire.

Il est donc très naturel de comparer les unes aux autres, en choisissant de préférence les couples qui, au moment de l'égalité, présentent autant que possible le même aspect.

(1) J'espère avoir bientôt l'occasion de préciser par une analyse plus approfondie toutes les distinctions dont la description sommaire vient d'être donnée.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Indication de quelques groupes de comparaison dans l'ordre d'absorption croissante.

L'épaisseur atmosphérique croît avec une extrême rapidité lorsqu'on vise un astre qui s'approche de l'horizon : inversement cette épaisseur devient sensiblement constante lorsque l'astre s'approche du méridien : on a donc, pour l'observation des raies telluriques du spectre solaire, deux types de circonstances utilisables, suivant le but qu'on se propose.

Si l'on veut obtenir une multiplication de l'absorption atmosphérique, on choisira de préférence le matin et le soir : ces époques ont l'avantage d'offrir des raies telluriques très intenses et rapidement variables, mais elles ont l'inconvénient de mettre en jeu des couches atmosphériques fort éloignées du lieu d'observation (') et, par conséquent, en dehors des conditions météorologiques locales, qui sont la plupart du temps seules accessibles.

L'observation des raies telluriques, lorsque le Soleil est à sa plus grande hauteur, présente des avantages et des inconvénients inverses : elle permet de mieux établir les corrélations météorologiques, mais, en revanche, la couche atmosphérique traversée étant minimum, les raies telluriques sont faibles et plus difficiles à repérer avec précision.

Il en résulte que l'étude spectrale des raies telluriques nécessite des repères de grandeur très différentes si l'on veut utiliser toute la durée de la journée.

Voici l'indication succincte des groupes de comparaison dont on peut recommander l'observation pour caractériser une absorption croissante.

1° Pendant les grands froids de l'hiver, lorsque le Soleil est au méridien, la plupart des raies telluriques disparaissent : toutefois la disparition n'est pas tellement absolue qu'on ne puisse retrouver la trace des groupes ordinairement visibles, lorsqu'on a l'habitude de les observer journellement.

(') Les erreurs qui peuvent provenir de ce chef sont analogues à celles qu'on rencontre dans la mesure des réfractions astronomiques. La corrélation des deux problèmes est évidente.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Le groupe des raies ($\lambda = 593{,}98$, $594{,}13$) et le *grand triplet* (¹)

$$(\lambda = 591{,}72,\ 591{,}78,\ 591{,}84)$$

sont à peu près les seules raies telluriques qui subsistent. Le premier groupe est formé des raies un peu trop larges pour pouvoir former des groupes utiles de comparaison avec les raies fines métalliques de la région environnante ; mais le grand triplet peut être comparé à une raie métallique très fine $\lambda = 590{,}87$, qu'on doit s'exercer à retrouver lorsque toutes les raies telluriques s'évanouissent. Elle est malheureusement un peu éloignée, ce qui rend la comparaison difficile.

2° L'absorption atmosphérique devenant appréciable, la plupart des groupes telluriques deviennent reconnaissables malgré leur faiblesse : le grand triplet devient comparable à la raie du fer $\lambda = 591{,}50$; les trois raies telluriques légèrement inégales

$$\text{(III) } 589{,}88, \qquad \text{(IV) } 590{,}04, \qquad \text{(V) } 589{,}71\ (^2),$$

à la raie du fer 590,45.

3° Un degré plus considérable dans l'absorption atmosphérique se manifeste par la tendance à l'égalité de la raie tellurique 593,09 avec l'une des trois raies métalliques 592,66, puis 593,35, enfin 592,90 Fe : cette raie 593,09 serait peut-être la plus précieuse de tout le spectre, si elle ne devenait pas un peu large en noircissant.

Le *petit triplet* (595,68, 595,72, 595,76) formé de trois raies telluriques équidistantes sensiblement égales, mais plus resserrées que celles du grand triplet, se compare aisément aussi à la raie du fer 595,57.

Toutefois les trois raies ne sont pas absolument identiques, la raie 595,68, la plus rapprochée de la raie du fer, croît un peu plus vite que les autres : c'est donc celle-là qu'on peut choisir sans s'occuper des autres : on

(¹) C'est ainsi que je propose de désigner, pour abréger, le groupe de trois raies égales et équidistantes définies ci-dessus par leur longueur d'onde : c'est l'un des groupes telluriques les plus faciles à reconnaître. La désignation de *petit triplet* sera donnée plus loin à un autre groupe de trois raies équidistantes plus fines et plus resserrées.

(²) Dans les très faibles absorptions, la raie 589,71 diminue moins que les deux autres; ce qui tendrait à faire croire qu'elle est doublée d'une très faible raie métallique.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

peut encore utiliser la raie isolée 595,39 qui suit de très près la variation d'intensité du petit triplet.

4° Lorsque l'absorption atteint une grandeur notable, le grand triplet devient égal à la raie du fer 591,30 : l'identité d'aspect devient si complet qu'on ne saurait demander une meilleure démonstration de l'identité probable du mécanisme optique produisant ces deux genres de raies sombres.

En raison même de l'assombrissement complet qu'atteignent alors les raies du grand triplet (au delà, elles ne font plus guère que s'élargir) l'époque précise de l'égalité est un peu incertaine : on obtient un repère mieux défini avec la raie tellurique 590,41, extrêmement voisine de la raie du fer 590,45; cette raie, tout à fait invisible dans les faibles absorptions, croît rapidement lorsque le grand triplet atteint la grandeur de la raie 591,30.

5° Lorsque le Soleil s'approche de l'horizon, les raies telluriques deviennent noires et estompées de sorte que leur variation d'intensité est difficile à apercevoir : les plus faibles prennent une intensité considérable qui rend méconnaissables les groupes un peu complexes formés avec des raies métalliques faibles; les erreurs sont donc à craindre si l'on ne choisit pas des raies telluriques très isolées : on peut adopter, par exemple, la raie 598,41 dans le milieu du groupe de trois belles raies du fer et voisine de celle du milieu 598,37.

La raie tellurique 589,06, quand on sait bien la reconnaître, donne encore un bon repère lorsqu'on la compare avec la raie du fer 588,27, un peu éloignée, toutefois.

6° Enfin, lorsque le Soleil atteint l'horizon, la plupart des raies telluriques voisines des raies D deviennent égales ou supérieures à D_1; la raie D_2 n'est reconnaissable qu'à la large plage sombre qui la couvre; pour distinguer les autres, il faut se servir du micromètre, à moins d'avoir acquis l'habitude de les reconnaître ou d'avoir suivi graduellement les modifications du spectre jusqu'au coucher du Soleil.

Les appréciations d'égalité deviennent alors très difficiles, non seulement par suite de l'élargissement des raies, mais à cause de l'affaiblissement de la lumière : du reste, ces mesures n'auraient qu'un intérêt

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

médiocre à cause des perturbations que présente la réfraction atmosphérique et l'impossibilité de préciser avec certitude la longueur relative du chemin parcouru par le faisceau solaire. Il est nécessaire d'ajouter que dans nos climats il est assez rare que les circonstances météorologiques permettent ces dernières observations : on ne peut donc fonder aucun système d'observations régulières sur les premiers ou les derniers rayons du Soleil à l'horizon.

Conséquences de l'existence de repères précis pour l'absorption atmosphérique.

Si l'on admet la fixité des raies métalliques qui servent de termes de comparaison (en réservant la possibilité d'une variation *séculaire*), on peut en déduire une méthode pour l'évaluation numérique de la quantité de la substance absorbante qui produit les raies telluriques observées. En effet, l'expérience et le raisonnement s'accordent à prouver que la quantité de radiation absorbée est indépendante de la répartition de la substance absorbante sur le chemin parcouru par cette radiation, mais de la quantité totale qui s'y rencontre. Il en résulte que, lorsqu'une raie tellurique aura acquis le degré d'intensité qui la rend identique à une raie métallique déterminée, la quantité de matière absorbante rencontrée par le faisceau observé sera la même (1).

I. — Mesure relative.

Pour préciser, tout en simplifiant autant que possible le calcul, imaginons que l'atmosphère terrestre soit formée de couches horizontales parallèles, chaque couche étant homogène, mais pouvant présenter une composition spéciale : le minimum d'effet absorbant sera évidemment produit par le faisceau qui traversera normalement ces couches.

Tout faisceau oblique faisant un angle ζ avec la direction normale par-

(1) Il y aurait une réserve à faire sur l'influence de la température.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

courra dans chaque couche un chemin plus grand dans le rapport de $\cos\zeta$ à 1.

Or, d'après la loi de Bouguer, si l'on désigne par a la proportion de la radiation I_0 transmise par une épaisseur égale à l'unité contenant l'unité de poids de la substance absorbante par unité de volmue, on aura, pour a proportion transmise par l'unité d'épaisseur contenant une quantité q,

$$a^q;$$

pour une couche additionnelle contenant q',

$$a^q . a^{q'} = a^{q+q'};$$

et en général pour une série de couches contenant la somme totale Q de substance absorbante, la proportion transmise sera

$$a^Q.$$

Si le chemin dans les couches traversées, au lieu d'être égal à l'unité, est égal à $\frac{1}{\cos\zeta}$, comme dans la transmission oblique, la proportion de radiation transmise sera

$$a^{\frac{Q}{\cos\zeta}}.$$

Il en résulte que, si une même raie tellurique, dans deux circonstances météorologiques données, présente la même intensité qu'une raie métallique fixe, on en conclura que l'absorption a été la même dans les deux cas : d'où la relation

$$a^{\frac{Q}{\cos\zeta}} = a^{\frac{Q'}{\cos\zeta'}};$$

par suite,

$$\frac{Q}{\cos\zeta} = \frac{Q'}{\cos\zeta'}.$$

Par suite, *lorsqu'une raie tellurique revient à la même intensité relative, la quantité totale de matière absorbante, répandue dans l'atmosphère, est proportionnelle au cosinus de la distance zénithale du Soleil au moment de l'observation.*

Il suffit donc, pour obtenir des couples de mesures relatives, d'observer

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

la distance zénithale du Soleil au moment de l'identité d'aspect du groupe de comparaison, ou simplement de noter l'heure à une montre réglée sur le temps vrai.

II. — Possibilité d'arriver a des mesures absolues.

A mesure qu'on approfondit une question, on y rencontre le plus souvent des ressources nouvelles qui accroissent d'une manière inattendue la portée de l'idée servant de point de départ. C'est ce qui arrive dans le problème actuel.

Les travaux des météorologistes sur la répartition de la vapeur d'eau dans l'atmosphère (1) tendent à prouver que la loi qui lie la quantité moyenne q de vapeur d'eau par unité de volume à l'altitude z est représentée par une fonction exponentielle

$$q = \mathrm{P} e^{-\frac{z}{h}},$$

P et h étant deux constantes numériques qu'on détermine par la condition de connaître deux valeurs de q à deux altitudes différentes, par exemple :

$$z = 0 \quad \text{où} \quad q = \mathrm{P}, \quad \text{et} \quad z = z_1 \quad \text{où} \quad q_1 = \mathrm{P} e^{-\frac{z_1}{h}}.$$

On voit que P représente la quantité de vapeur d'eau contenue dans l'unité de volume au lieu inférieur d'observation, origine des altitudes.

La somme totale Q de vapeur d'eau contenue dans une colonne verticale ayant l'unité de section sera donc représentée par

$$\mathrm{Q} = \int_0^\infty q\, dz = \mathrm{P} \int_0^\infty e^{-\frac{z}{h}} dz = \mathrm{P} h,$$

d'où il résulte que *la quantité totale de vapeur d'eau répandue dans l'atmosphère est proportionnelle à la quantité qui se trouve au lieu d'observation.*

(1) Il ne peut être ici question que d'un état moyen, dans des journées calmes non influencées par des perturbations météorologiques accidentelles.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La méthode devra donc comprendre, pour donner rapidement des résultats utiles, l'observation simultanée des raies telluriques au spectroscope et de la quantité de vapeur d'eau à l'hygromètre, en deux stations différant notablement par l'altitude. De cette manière, on aura non seulement la valeur de la constante P, mais aussi celle de la constante h qui sera toujours la plus difficile à déterminer.

La connaissance de ces constantes permettra de définir chaque repère spectral de la manière suivante :

Lorsque la raie tellurique x offre la même intensité que la raie métallique m, la quantité de vapeur d'eau contenue dans une colonne verticale d'atmosphère ayant l'unité de section est égale à Q (1).

C'est donc réellement une mesure absolue.

---

(1) *Exemple numérique.* — Depuis la rédaction de ce Mémoire, j'ai pu effectuer quelques observations permettant de donner une idée du résultat numérique correspondant à un des groupes telluriques les plus faciles à observer. Je ne disposais, bien entendu, que d'une seule station; mais, en admettant le coefficient h donné par M. Radau (*Actinométrie*, p. 15) comme valeur approximative, on peut compenser l'absence d'observations simultanées.

La loi exponentielle formulée en logarithmes vulgaires est

$$z = 6700^{m}(\log f_0 - \log f)$$

(f et f_0 étant les forces élastiques de la vapeur d'eau) ou en logarithmes népériens, en multipliant et divisant par $M = 0{,}43429 \times 100$, ce qui donnera le centimètre pour unité,

$$z = 291000(\log \text{nép}\, f_0 - \log \text{nép}\, f) \quad \text{ou} \quad f = f_0 e^{-\frac{z}{291000}}.$$

Pour obtenir la quantité de vapeur d'eau en grammes-masse, en fonction de la force élastique, il suffit de multiplier f et f_0 (supposées exprimées en centimètres de mercure) par le facteur

$$\frac{a.0{,}622}{76},$$

a étant le poids d'un centimètre cube d'air $= 0^{gr},00129$3 et 0,622 la densité de la vapeur d'eau : d'où l'on conclut

$$q = af_0 \frac{0{,}622}{76} e^{-\frac{z}{291000}}.$$

On a donc

$$h = 291000 \text{ centimètres}$$

et

$$P = 0{,}00001058\, f \text{ gramme par centimètre cube } (f \text{ en centimètres}).$$

Voici les données des observations [faites à Courtenay (Loiret). Latitude $L = 48°2'20''$] correspondant à l'égalité entre chacune des raies du grand triplet et la raie du fer $\lambda = 591{,}50$:

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

III. — Possibilité d'un controle de la fixité des repères ou d'une mesure de leur variation séculaire.

On pourrait objecter à la méthode qu'elle repose sur l'hypothèse non démontrée de la fixité de l'intensité des raies métalliques de comparaison. L'objection est parfaitement juste au point de vue absolu, mais, comme dans l'observation de tous les phénomènes naturels, l'objection d'un argument rigoureux ne doit pas faire rejeter *a priori* la méthode : on remarquera, en effet, que la même objection s'appliquerait à bien des phénomènes susceptibles de mesures précises; ainsi la position des planètes est rapportée aux étoiles dont les mouvements propres sont pourtant parfaitement établis. C'est, en effet, l'ensemble d'observations nombreuses qui permet de reconnaître et d'éliminer la variation continue des repères.

Il est permis d'espérer dans le cas actuel que le même mode d'approxi-

---

Numéro de l'observation.	Dates.	Heure de l'observation. Temps vrai.	Température du point de rosée.	Déclinaison du Soleil.
		h	°	° ′
I.....	16 juin 1883.....	4.11	5,5	23.21
II.....	18 »	3.57	4,4	23.25
III.....	21 »	1.58	7,5	23.17

On calcule ζ par les formules

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang} L \operatorname{séc} 15\, \text{Æ} \ldots, \quad \cos\zeta = \sin L \cos(\varphi - D) \operatorname{cosec}\varphi,$$

L latitude; D déclinaison du Soleil; Æ angle horaire du Soleil mesuré par le temps vrai.

On en conclut :

	f.	P.	Ph.	ζ.	$\frac{Ph}{\cos\zeta}$.
	c		gr	° ′	gr
I.....	0,68	$7,196 \times 10^{-6}$	2,143	54.30	3,636
II.....	0,63	$6,667 \times 10^{-6}$	1,940	52.28	3,185
III.....	0,77	$8,148 \times 10^{-6}$	2,371	33.55	2,857
				Moyenne.....	Q = 3,226

Donc, d'après ces trois observations, l'égalité d'aspect des raies du grand triplet et de la raie du fer (591,50) correspond dans l'atmosphère à une quantité de vapeur d'eau représentée par $Q = 3^{gr},226$ dans une colonne verticale ayant 1^{cq} de section.

Ce chiffre, je le répète, n'a pas d'autres prétentions que de fournir un exemple de calcul numérique.

Si l'on voulait reproduire artificiellement l'absorption par la même quantité de vapeur d'eau à 100° et à la pression de $0^{m},76$, il faudrait opérer avec une colonne de $54^{m},84$ de longueur.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

mation pourra réussir. Si l'on détermine par des séries successives d'observations, suffisamment prolongées pour éliminer les erreurs accidentelles, la valeur d'un repère exprimée par la quantité totale de matière absorbante qu'il a servi à préciser, on aura les éléments nécessaires pour juger de la constance de ce repère, et, en cas de non-fixité, pour mesurer la variation *séculaire* du coefficient qui le représente.

De là un moyen assez inattendu d'étudier la variation de l'absorption exercée à la surface du Soleil lui-même par les vapeurs métalliques qui produisent les raies de Fraunhofer.

Ce moyen est, à la vérité, détourné, mais il est le seul, à ma connaissance, qui permette d'attaquer les problèmes dépendant de la composition chimique quantitative de la surface solaire, particulièrement ceux qui se rapportent aux phénomènes d'absorption ou d'émission toujours visibles au voisinage des taches, des facules, etc.

Ces considérations montrent que les mesures de comparaison des raies telluriques avec les raies métalliques doivent être effectuées sur un faisceau représentant la composition moyenne des radiations émises par le disque du Soleil, afin d'éviter l'influence des absorptions locales : il suffit, pour cela, d'adopter une lentille collectrice à court foyer ($0^m,15$ à $0^m,20$); si l'image solaire projetée sur la fente du collimateur n'a que 2^{mm} ou 3^{mm} de diamètre, les radiations particulières aux taches, à la chromosphère, aux facules, ne produisent aucun effet appréciable sur le spectre observé.

Cette petitesse de l'image n'empêche pas de reconnaître l'influence de la rotation du Soleil autour de son axe, laquelle se traduit par une variation sensible de la longueur d'onde apparente des raies métalliques : ainsi, en projetant successivement sur la fente les deux bords opposés de l'équateur solaire, j'ai souvent répété avec le groupe 597,5 l'expérience indiquée par M. Thollon (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XCI, p. 369) : on a donc intérêt à bien centrer l'image pour éviter les petits déplacements relatifs des deux sortes de raies.

Si l'on projetait une large image du disque solaire, telle que celle des grands instruments astronomiques, on observerait tous les détails que la méthode proposée englobe dans un effet moyen.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Ce serait ici le lieu de développer la marche à suivre pour l'étude de ces absorptions locales à la surface solaire et de montrer la possibilité d'appliquer la méthode d'une manière inverse, en comparant l'intensité des raies métalliques variables d'un point à l'autre du disque à celle des diverses raies telluriques qu'on peut supposer fixes pendant la durée d'une observation. Les raies à comparer ne seraient pas toujours aussi favorablement placées que dans les études qui font l'objet du présent Mémoire; mais on peut, à défaut d'autre moyen, employer un artifice assez simple, qui consiste à superposer par un moyen quelconque (double fente, prisme biréfringent, spectroscope à double image, etc.) les deux régions du spectre comprenant les raies à comparer.

L'emploi d'un prisme biréfringent disposé comme dans la lunette de Rochon, avec addition d'un analyseur, apporterait même des ressources précieuses pour la facilité des mesures.

N'ayant pas eu à ma disposition d'appareils suffisamment puissants pour expérimenter la méthode, je me borne à en signaler le principe.

En résumé, le présent Mémoire met aux mains des physiciens et des météorologistes les éléments et les principes d'une méthode d'observation permettant d'approfondir un certain nombre de phénomènes importants relatifs à l'absorption produite par diverses substances, soit dans l'atmosphère terrestre, soit même dans l'atmosphère du Soleil. Les observations que j'ai rapportées font espérer qu'une étude assidue de ces phénomènes ajoutera des résultats importants à nos connaissances dans le domaine de la Physique terrestre et solaire.

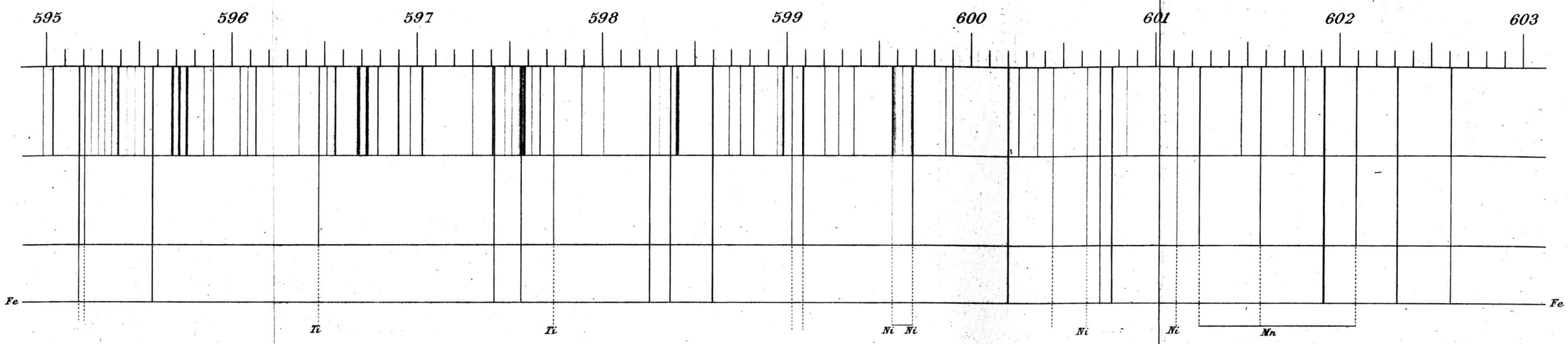
Erratum. — Page 193, *au lieu de* 595,68 VI, *lisez :* 595,68 IV.

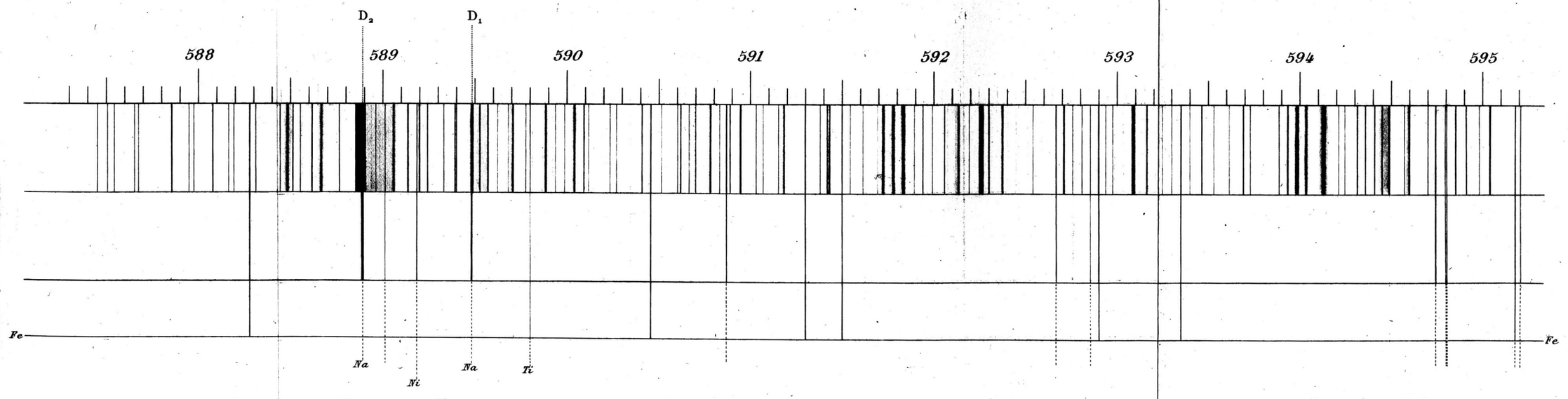
(Extrait du *Journal de l'École Polytechnique*, LIIIe Cahier; 1883.)

9145 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Raies Telluriques voisines des Raies $D_1 D_2$ Par, M. A. Cornu.





A. Cornu del.

C. Legros sc.

Gauthier-Villars, Libraire Editeur, à Paris.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

DÉTERMINATION NOUVELLE

DE

LA VITESSE DE LA LUMIÈRE,

PAR M. A. CORNU,

Ingénieur des Mines, Professeur à l'École Polytechnique.

1. La détermination précise de la vitesse de la lumière intéresse à la fois la Physique, l'Astronomie et la Mécanique. C'est à des observations astronomiques que la Physique est redevable de la première détermination qui ait été faite, il y a deux siècles environ : aujourd'hui l'Astronomie, renversant les rôles, demande aux progrès de l'Optique la valeur de cette constante, en vue de contrôler les données qui ont servi à ces premières déterminations, en particulier les dimensions absolues du système solaire. En Physique, la connaissance exacte de la vitesse de la lumière acquiert chaque jour plus d'importance : c'est en effet l'une des constantes fondamentales de la théorie des ondulations ; elle donne la mesure absolue de la vitesse de propagation des ondes dans le vide, et, par suite, dans tous les milieux ; comparée aux valeurs des longueurs d'ondulation, elle fournit la durée des vibrations lumineuses et apporte ainsi bien des notions précieuses sur la constitution du milieu hypothétique, siége des mouvements lumineux, l'*éther*.

Cette constante optique, d'après de récents travaux, conduirait encore à un lien curieux et inattendu entre l'électricité et la lumière; en effet, le rapport des évaluations numériques d'une même quantité d'électricité exprimée en mesures électrostatiques et électrodynamiques absolues (quotient d'une longueur par un temps, c'est-à-dire une vitesse) serait égal à la vitesse de la lumière : ce résultat tendrait donc à faire penser que le siége

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

du mouvement qu'on nomme *électricité* serait le même que celui de la lumière.

Enfin, en Mécanique, l'occasion s'est plusieurs fois présentée de discuter le mécanisme des actions à distance, spécialement dans le cas des corps célestes : la nécessité d'un intermédiaire a naturellement ramené à l'hypothèse optique de l'*éther*, et, par suite, à la durée appréciable de la transmission de l'effet des forces ; il est évident que, dans cet ordre d'idées, la vitesse de la lumière est l'unité à laquelle on devra rapporter cette vitesse de transmission.

Tels sont, en résumé, les motifs qui donnent à la détermination exacte de la vitesse de la lumière un intérêt actuel considérable, et qui lui réservent, dans l'avenir, une importance croissante, lorsque, entre tous ces grands phénomènes de la nature, les liens que nous commençons à peine à apercevoir se seront resserrés et étendus.

VALEUR DE LA VITESSE DE LA LUMIÈRE D'APRÈS LES OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES.

2. 1° *Méthode de Rœmer d'après les éclipses des satellites de Jupiter.* — La propagation de la lumière était considérée anciennement comme instantanée : c'est Rœmer, astronome danois, amené par Picard à l'Observatoire de Paris, qui le premier conclut, de certains retards observés dans des éclipses des satellites de Jupiter, que la lumière se propageait avec une vitesse appréciable, et qu'elle mettait environ huit minutes un quart à parcourir le rayon de l'orbite terrestre. Il donnait ainsi une méthode propre à déterminer la vitesse de la lumière, mais basée sur la connaissance, en valeur absolue, de la distance moyenne du Soleil à la Terre. Soient en effet θ le temps que la lumière emploie pour parcourir le rayon moyen ou demi-grand axe R de l'orbite terrestre, et V la vitesse de la lumière : on a

$$V\theta = R. \tag{1}$$

D'après les observations anciennes discutées par Delambre (1), θ serait

(1) *Tables éclipliques des satellites de Jupiter*, p. vij.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

égal à $8^m 13^s$ de temps moyen; quant à R, l'incertitude qui a régné sur sa valeur jusqu'à ces dernières années est assez grande; on la déduit d'une donnée astronomique, la *parallaxe du Soleil* ε, sur laquelle les astronomes n'étaient pas entièrement d'accord.

La parallaxe du Soleil ε, qui n'est autre que l'angle sous lequel un observateur placé au centre du Soleil verrait le rayon équatorial ρ de la Terre, se trouve ainsi liée au demi-grand axe de l'orbite terrestre par la relation

$$R \operatorname{tang} \varepsilon = \rho. \tag{2}$$

La Géodésie a fourni avec une grande exactitude le rayon équatorial de la Terre $\rho = 6378233$ mètres; mais la parallaxe solaire varie de 4 pour 100 environ, suivant qu'on admet la valeur déduite, par les meilleurs observateurs de la fin du siècle dernier, des passages de Vénus sur le disque du Soleil, $8''{,}90$, ou la valeur révisée par Encke, $8''{,}57$ (1822), qui passa longtemps pour la plus exacte.

La comparaison des équations (1) et (2) donne la valeur de la vitesse de la lumière en fonction de la constante θ des éclipses de satellites de Jupiter et de la parallaxe du Soleil

$$V = \frac{\rho}{\theta \operatorname{tang} \varepsilon}. \tag{3}$$

On obtient ainsi les deux valeurs suivantes de N :

$$V = 299839 \text{ kilomètres à la seconde} \quad (\varepsilon = 8''{,}90),$$
$$V = 311385 \quad » \quad (\varepsilon = 8''{,}57).$$

L'erreur probable de la valeur de la vitesse de la lumière dépend donc presque entièrement de celle de la parallaxe solaire.

On verra bientôt que des observations astronomiques et des calculs plus récents ramènent à une valeur très-voisine $8''{,}9$.

3. 2° *D'après le phénomène de l'aberration.* — Le phénomène découvert par Bradley, et désigné sous le nom d'*aberration annuelle* des étoiles, conduit à une autre relation très-simple entre la vitesse de la lumière et le rayon de l'orbite terrestre. Soient, en effet, α l'angle d'aberration annuelle,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

c'est-à-dire la demi-élongation maximum d'une étoile idéale située au pôle de l'écliptique, u la vitesse moyenne de la Terre dans son orbite, T le temps de l'année sidérale. On a, d'après la composition de la vitesse moyenne de la Terre et de celle de la lumière,

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{u}{V} = \frac{2\pi R}{TV},$$

d'où

$$V = \frac{2\pi R}{T \operatorname{tang}\alpha}, \tag{4}$$

ou, en introduisant la parallaxe solaire,

$$V = \frac{2\pi\rho}{T \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\varepsilon}. \tag{5}$$

Cette méthode a l'avantage de substituer au retard θ, observé dans les éclipses des satellites de Jupiter (retard un peu incertain à cause des différences d'éclat que présentent ces satellites aux distances variables où ils se trouvent de la Terre), une constante qu'on peut déterminer avec une très-grande précision et sur la valeur de laquelle les astronomes sont généralement d'accord.

Mais elle a l'inconvénient de dépendre aussi de la parallaxe solaire, et par conséquent de laisser subsister les mêmes incertitudes.

Il est bon toutefois de remarquer que ces deux méthodes donnent à très-peu près le même résultat, parce que la valeur de θ s'accorde assez bien avec celle de α, indépendamment des valeurs de ε et V. En divisant membre à membre les équations (3) et (4), il vient

$$\frac{T \operatorname{tang}\alpha}{2\pi} = \theta \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang}\alpha = \frac{2\pi\theta}{T}; \tag{6}$$

substituant,

$$\theta = 8^m 13^s = 193 \text{ secondes de temps moyen},$$

$$T = 365{,}26 \times 86400 \text{ secondes de temps moyen};$$

on trouve

$$\alpha = 20'',246\ (^1).$$

(1) C'est justement la valeur déduite par Bradley de ses observations.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Or les observations de W. Struve, qui passent pour les meilleures, donnent

$$\alpha = 20'',445;$$

la valeur de θ n'est donc que de 1 pour 100 en erreur par défaut, ce qui correspond à une différence de 4 secondes sur la valeur $8^m\,13^s$ calculée par Delambre.

La formule (5), mise en nombres, donne

$$V = 296200 \quad \text{correspondant à} \quad \varepsilon = 8'',90$$
$$V = 307700 \quad \text{»} \quad \varepsilon = 8'',57$$

4. 3° *Introduction des résultats les plus récents sur la valeur de la parallaxe solaire.* — Ainsi, soit qu'on prenne comme point de départ le retard des éclipses des satellites de Jupiter ou la constante de l'aberration, l'approximation de la vitesse de la lumière dépend surtout de celle de la parallaxe solaire. Or cette dernière constante paraît, d'après de récents travaux, converger vers une valeur très-voisine de 8″,85. La discussion des observations de Mars et de Vénus, en particulier celle qui a été faite par M. Le Verrier, conduit à 8″,86 ; des calculs moins directs, en partant d'autres perturbations planétaires, fournissent également des valeurs très-concordantes avec celles qu'on vient de citer. Nous admettrons donc $\varepsilon = 8'',86$; substituant dans l'équation (5), on trouve

$$V = 297\,600, \quad \varepsilon = 8'',86.$$

Telle est la valeur de la vitesse de la lumière déduite des données astronomiques les plus probables, à savoir de la constante de l'aberration observée par Struve et de la parallaxe solaire calculée par M. Le Verrier.

D'après ce résumé succinct des méthodes astronomiques qui permettent de calculer la vitesse de la lumière, on voit de quel intérêt est, pour l'Astronomie, la détermination précise de cette constante optique, indépendamment des phénomènes astronomiques; cette détermination directe, faite avec une approximation bien connue, permettrait, comme on le voit,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de calculer la valeur de la parallaxe du Soleil, constante dont l'importance est capitale, puisqu'elle définit les dimensions absolues du système solaire.

DÉTERMINATIONS DIRECTES DE LA VITESSE DE LA LUMIÈRE.

5. La détermination directe de la vitesse de la lumière à la surface de la Terre a paru longtemps inabordable, à cause de l'énorme valeur de cette vitesse ; mais le problème est maintenant résolu, et c'est M. Fizeau qui a eu l'honneur d'en donner la première et la plus simple des solutions (1849).

La Note courte et modeste des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. XXIX, p. 90, par laquelle l'éminent physicien a fait connaître sa méthode, est loin d'être en rapport avec l'importance du résultat acquis et la grandeur des difficultés vaincues ; néanmoins cette découverte fit grande sensation dans le monde scientifique : l'Académie des Sciences, sur la proposition d'Arago, ordonna immédiatement la construction d'appareils perfectionnés pour reprendre les expériences dans des conditions de distance et de précision que M. Fizeau n'avait pas eues à sa disposition. Malheureusement la mort d'Arago et plus tard celle de Froment, l'habile et savant constructeur qui avait été chargé de l'exécution des appareils, empêchèrent de mener à bonne fin cette belle entreprise scientifique.

Les expériences faites par M. Fizeau (315000 kilomètres) n'étaient considérées par lui que comme un essai destiné à démontrer la possibilité d'une solution du problème plutôt qu'à en fournir le résultat définitif : aussi donna-t-il avec beaucoup de réserve la moyenne de ses déterminations, sans chercher à les discuter ni même à en estimer l'approximation.

6. La seconde détermination directe a été faite par L. Foucault, en 1862, sur la demande de M. Le Verrier, en vue de contrôler la valeur de nouveaux calculs astronomiques rectifiant la valeur de la parallaxe du Soleil. Les expériences furent faites à l'Observatoire de Paris par une méthode différente de la précédente, Foucault se servit à cet effet du miroir tournant de Wheatstone et d'Arago avec une disposition analogue à celle employée

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

par lui d'une part, et par MM. Fizeau et Bréguet de l'autre, pour la réalisation de la mémorable expérience qui trancha définitivement entre la théorie de l'émission et celle des ondulations. Ces expériences paraissent avoir été conduites avec beaucoup de soin; mais la description des appareils et le détail des mesures n'ont jamais été publiés.

Toutefois le nombre de Foucault (V = 298 000 kilomètres par seconde), malgré la faveur qu'il rencontra auprès des astronomes, ne fut accepté par plusieurs physiciens qu'avec une certaine réserve; la cause en est dans les objections soulevées par la méthode expérimentale plutôt que dans la différence notable (4 pour 100) qu'il offre avec la valeur primitivement déduite des phénomènes astronomiques (V = 312000). En effet, la base d'opération est si petite dans cette méthode, la rapidité du miroir si grande (de 700 à 1000 tours par seconde), que l'on ne peut s'empêcher de songer aux difficultés théoriques et pratiques inhérentes à l'expérience; et, il faut le dire, dans le peu de lignes que l'auteur a publiées sur ce sujet, il n'a pas suffisamment insisté sur les arguments ni sur les expériences directes qui assurent la validité de la méthode.

7. Après un assez grand nombre d'essais comparatifs de ces deux méthodes, je me suis arrêté à celle de M. Fizeau, comme étant à l'abri de toute critique, me proposant de faire une détermination de la vitesse de la lumière aussi précise que possible. Je ne chercherai pas à dissimuler que le nombre trouvé par Foucault me paraissait suspect : je désirais le contrôler en vue d'obtenir une solution des grandes questions de Physique et d'Astronomie qui s'y rattachent. Ces expériences ont un véritable intérêt d'actualité, puisqu'elles permettent de déterminer avec exactitude la valeur de la parallaxe solaire, que les astronomes de tous les pays vont demander au prochain passage de Vénus sur le Soleil au prix de voyages coûteux, pénibles et chanceux.

Je vais donner d'abord une description détaillée des appareils que j'ai employés (1) et je passerai ensuite à la réduction et à la discussion des

(1) Je n'aurais pas pu mener à bonne fin des expériences aussi délicates si je n'avais pas rencontré l'appui sympathique de toutes les personnes à qui je me suis adressé; je tiens à remercier

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

mesures obtenues. On verra que le résultat auquel je suis arrivé diffère à peine de celui de Foucault. Cette coïncidence, à laquelle j'étais loin de m'attendre, je dois l'avouer, dissipe en grande partie les doutes que j'avais conçus sur la validité de la méthode du miroir tournant, et donne, je crois, une grande probabilité d'exactitude à un résultat obtenu par deux méthodes si différentes.

Principe de la méthode d'observation.

8. La méthode que j'ai adoptée ne diffère pas, au point de vue optique, de celle de M. Fizeau : on lance un rayon de lumière entre les dents d'une roue dentée, et on le fait réfléchir à une très-grande distance, de manière à le ramener exactement au point de départ; si le mouvement de rotation imprimé à la roue est *convenablement* rapide, la lumière au retour rencontre une dent au lieu d'un vide et se trouve arrêtée; pour une vitesse double, la lumière rencontre le vide suivant et passe de nouveau, et ainsi de suite, alternativement, pour des vitesses progressivement croissantes.

Au point de vue mécanique et au point de vue du mode d'observation, la méthode que j'ai suivie diffère essentiellement de celle de M. Fizeau. Une grande difficulté se présentait en effet dans l'application de cette méthode, ainsi qu'on va le voir : la précision de la détermination numérique repose tout entière sur la mesure de la vitesse absolue de la roue dentée au moment des apparitions ou des disparitions nécessaires de la lumière de retour. M. Fizeau avait cherché à maintenir constante, pendant une minute environ, la vitesse de son mécanisme à la valeur même qui convenait

---

en particulier M. le général Riffault, commandant l'École Polytechnique; M. Henry, inspecteur des travaux de l'École, qui m'apporte journellement le concours le plus empressé pour l'installation de mes expériences; M. Pierret, directeur de l'Administration des lignes télégraphiques, qui a bien voulu m'accorder toutes les communications télégraphiques directes que je lui ai demandées; M. Laussedat, lieutenant-colonel du Génie, qui m'a mis en relation avec les autorités militaires et m'a fait prêter l'objectif de 6 pouces appartenant au Dépôt des Fortifications; M. Lochner, commandant de place, et M. Baccharach, capitaine du Génie au Mont-Valérien; enfin mon ami et collaborateur M. Mercadier, qui m'a souvent aidé dans les opérations délicates des réglages à grande distance.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

au maximum ou au minimum de lumière; mais la difficulté de remplir cette condition est extrême, car cette difficulté est pour ainsi dire double. Il faut en effet, non-seulement maintenir une vitesse constante, ce qui est déjà difficile en soi, mais encore maintenir cette vitesse à la grandeur qui correspond au maximum ou au minimum d'intensité du rayon de retour (1).

9. Il était donc nécessaire de modifier complétement le principe de l'appareil employé primitivement à la détermination de la vitesse de la roue dentée; voici comment j'ai résolu la difficulté : on donne à la roue dentée une vitesse croissante ou décroissante suivant une loi régulière, mais d'ailleurs quelconque, et l'on enregistre, par une transmission électrique convenable, la loi de ce mouvement; l'observateur aperçoit alors la succession des périodes dans l'arrivée de la lumière, et, à l'aide d'une autre transmission électrique, il enregistre le moment précis de la disparition ou de la réapparition du point lumineux. D'après le tracé graphique qui donne la loi complète du mouvement de la roue, on conclut la vitesse qu'elle possédait au moment où les signaux de l'observateur ont été transmis. On détermine ainsi non plus un maximum ou un minimum, mais des couples de valeurs également distantes de part et d'autre de la vitesse cherchée. Dans le courant des expériences, j'ai simplifié encore ce mode d'observation en limitant les alternatives de vitesse entre les valeurs qui conviennent à une disparition et une réapparition consécutives.

La difficulté de l'uniformité de la vitesse n'est pas reportée sur le mouvement de l'enregistreur ; on peut opérer avec un enregistreur quelconque, à la condition d'ajouter le tracé d'un chronographe précis, tel que le battement d'une horloge électrique battant la seconde.

Les deux stations ont été installées, l'une à l'École Polytechnique, l'autre

(1) M. Fizeau avait adapté un compteur sur l'axe de la roue dentée : il embrayait au moment où la vitesse de la roue, maintenue constante à l'aide d'un frein, correspondait à un maximum ou un minimum de lumière, puis débrayait soixante secondes après. En discutant ce mode opératoire, il est facile de voir que l'erreur à craindre est une accélération de la vitesse du mécanisme, à cause de l'usure progressive des surfaces du frein; il en résulte que la détermination obtenue dans ces circonstances (315000) doit être un peu forte, ce que les résultats ultérieurs vérifient.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

au Mont-Valérien, à une distance de 10310 mètres. C'est environ une fois et quart la distance des deux stations choisies par M. Fizeau dans la mémorable expérience qu'il fit entre Suresnes et Montmartre (8633 mètres).

Description des appareils.

Première station.

10. Les appareils sont disposés dans une mansarde du pavillon de l'École Polytechnique; ils comprennent :

1° *Lunette d'émission.* — Elle est formée par un objectif achromatique sortant des ateliers de M. Sautter, de 160 millimètres d'ouverture (6 pouces) et $2^m,25$ de foyer; le corps de cette lunette est une boîte carrée en bois blanc ayant 2 mètres de longueur et 25 centimètres sur les deux autres dimensions. Deux couples de madriers scellés dans le plafond et dans le plancher supportent des traverses horizontales, à $1^m,50$ de hauteur, qui forment les appuis de la lunette; à l'avant une forte vis fixe le fond du tube carré sur la traverse et joue le rôle de cheville ouvrière; à l'arrière, c'est-à-dire près du système oculaire, deux vis calantes soutiennent la lunette sur la deuxième traverse, de façon à permettre leur réglage en hauteur : deux grosses vis plantées dans les madriers permettent le réglage en azimut.

2° *Pièce oculaire à éclairement latéral.* — Elle ne diffère guère que par la forme de la pièce analogue de l'appareil primitif de M. Fizeau.

Le lecteur en trouvera la description complète dans la légende explicative de la *Pl. I* à la fin du Mémoire.

11. 3° *Moteur de la roue dentée.* — J'ai employé quatre appareils différents : le premier est un mécanisme à engrenages hélicoïdaux construit autrefois par Froment pour le cabinet de l'École Polytechnique, sur le modèle de l'appareil original de M. Fizeau. La roue dentée est un disque de laiton de 12 centimètres de diamètre, qui porte 500 dents : elle est montée sur l'axe du cinquième mobile; une came électrique placée sur l'axe du deuxième mobile permet d'enregistrer la vitesse du disque; chaque signal correspond à 100 tours de la roue dentée, c'est-à-dire à 50000 dents;

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

une poulie P est fixée au premier axe ; un poids de 10 à 25 kilogrammes sert de moteur. La transmission s'effectue par un système de cordons et de poulies, indiqués sur la *fig.* 8, *Pl. I*, de manière à obtenir une rotation dans un sens ou dans l'autre. Un frein monté sur un levier coudé permet de régler la vitesse en frottant sur l'axe du dernier mobile.

Ce mécanisme ayant été construit en vue du maintien d'une vitesse constante convenait peu au mode opératoire que j'avais adopté : aussi l'ai-je peu employé dans les expériences définitives, à cause de sa grande masse, c'est-à-dire de sa grande inertie et des poids considérables qu'il fallait employer pour le mettre en mouvement. Deux disques, l'un en laiton, à 500 dents, l'autre en aluminium, de 360 dents, peuvent se monter sur le dernier mobile.

12. La deuxième forme de mécanisme employée n'a guère fonctionné qu'à titre d'essai, à cause de son imperfection ; en démontant par hasard une *montre-réveil*, j'avais été frappé de la vitesse que prenait la roue d'échappement lorsque le balancier et l'échappement étaient enlevés ; elle arrivait à effectuer 350 tours par seconde. J'utilisai immédiatement ce mécanisme à l'expérience ; le petit nombre de dents (49) de la roue d'échappement ne permettait d'obtenir que la première extinction et la première réapparition, mais l'essai réussit complétement. Je fus ainsi conduit à essayer des mécanismes d'horlogerie d'une dimension un peu plus grande, et à prendre pour roue dentée une roue d'horlogerie très-petite et très-légère. J'ai employé avec ce mécanisme la roue de 49 dents et une autre de 104.

13. La forme à laquelle je me suis arrêté est un mouvement de pendule battant la demi-seconde (qu'on trouve dans le commerce sous le nom de *roulant-carré*), de 12 centimètres de côté environ. Le balancier, l'ancre et la minuterie ont été enlevés et la roue d'échappement, de 30 dents, remplacée par une série de roues très-légères, de 25 à 30 millimètres de diamètre, ayant 104, 116 et 140 dents de formes diverses. Un excentrique servant de came électrique fut placé sur l'axe des minutes ; chaque signal correspondait ainsi à 120 tours de la roue dentée.

Un frein a été ajouté pour régler à volonté la vitesse : c'est un simple levier

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

en métal (*fig.* 4) dont un des bras *b* appuie sur la jante de la roue de l'avant-dernier mobile; un ressort convenablement disposé exerce une pression suffisante pour arrêter le mouvement; une vis antagoniste, placée sous la main de l'observateur, modère plus ou moins cette action. On peut donc aussi graduer la vitesse sans craindre de fausser le mécanisme en manœuvrant le frein sans précaution, la pression maximum étant celle du ressort.

La position du frein n'est pas indifférente; il faut, en effet, avoir une action rapide, mais sans dureté; en exerçant le frottement sur l'avant-dernier mobile, l'inertie du dernier mobile est alors suffisante pour amortir le brusque changement qu'une variation de pression amène inévitablement.

14. En augmentant la force du ressort moteur, j'ai obtenu jusqu'à 750 tours par seconde de la roue dentée; on pourrait aisément, je crois, parvenir à une vitesse beaucoup plus grande, sans augmenter beaucoup la force du ressort, si l'on confiait la construction d'un semblable moteur à un artiste habile, et si l'on usait de tous les moyens dont l'horlogerie dispose pour atténuer les résistances passives.

Un nouveau perfectionnement, qui m'a conduit à la forme définitive (*fig.* 3), a consisté dans l'addition d'un deuxième barillet permettant d'obtenir des vitesses de sens inverse, en vue d'éliminer de petites erreurs systématiques qui pourraient provenir du mécanisme lui-même.

15. 4° *Appareil enregistreur des vitesses.* — Il se compose (*fig.* 5) d'un cylindre couvert de papier enfumé, mis en mouvement par un petit moteur Foucault; un chariot portant trois électro-aimants glisse sur deux rails parallèlement à l'axe du cylindre; chacun des contacts de ces trois électro-aimants est porté par un ressort qui le maintient à une petite distance des bobines. A l'autre extrémité, ils présentent un tracelet en clinquant : l'aimantation attire les contacts et fait produire au tracelet un trait parallèle à la génératrice du cylindre sur le papier noirci; l'ensemble des tracés forme trois hélices plus ou moins dentelées, qu'on interprète aisément.

Le tracelet du milieu enregistre les secondes par le moyen d'un courant distribué par le balancier d'une bonne horloge : l'un des deux autres enre-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

gistre le signal produit lors de la fermeture du courant par la came électrique du mécanisme de la roue dentée ; le troisième tracelet enregistre les signaux conventionnels transmis par l'observateur à l'aide d'une clef électrique identique au manipulateur du télégraphe Morse; on verra plus loin à quelle phase du phénomène observé doivent correspondre ces signaux.

Deuxième station.

16. La station opposée ne comprend qu'un seul appareil, le collimateur à réflexion, installé à demeure dans une chambre du premier étage d'une des casernes du Mont-Valérien (caserne C), faisant face à Paris. Ce collimateur est formé par un objectif de 110 millimètres d'ouverture (4 pouces), construit par M. Duboscq, et de $1^{m},20$ de foyer. Le corps du collimateur est une boîte rectangulaire en bois, munie d'un tube métallique destiné à porter l'oculaire et le miroir focal. Cet objectif étudié sur le ciel m'a paru très-bon, vu surtout sa grande ouverture angulaire ($\frac{1}{11}$) : aussi son plan focal est-il défini à $\frac{1}{10}$ de millimètre près. Cet appareil fonctionne à la fois, ainsi qu'on va le voir, comme lunette et comme collimateur à réflexion; il est fixé solidement sur une lourde table de chêne par l'intermédiaire de quelques madriers.

Mise en station des appareils.

17. *Réglage réciproque des appareils des deux stations.* — Il est indifférent de commencer par l'une ou par l'autre des deux stations, car le mode de réglage est entièrement symétrique : il suffit d'amener au milieu du champ de chacune des lunettes l'image de la fenêtre de la station opposée; il n'est pas même nécessaire d'apercevoir l'objectif de l'appareil qui s'y trouve installé. Quand cette double opération est faite, on est certain que les axes optiques des deux lunettes sont exactement en ligne droite, du moins avec toute l'approximation nécessaire à l'expérience; il ne reste plus qu'à régler le miroir du collimateur.

Lorsqu'on veut régler de nuit les appareils ou par des jours un peu brumeux, voici comment on opère : dans ce cas l'opération a lieu simultané-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ment aux deux stations, ce qui exige deux observateurs; les deux lunettes étant réglées d'une manière approximative (de façon seulement que l'image de la station opposée soit dans le champ), on dispose une lampe ordinaire en arrière de l'oculaire de chacune d'elles; la surface des objectifs s'éclaire alors d'une lumière très-vive, et devient visible, même en plein jour, si le temps n'est pas trop brumeux. En opérant alternativement, à des heures données, suivant des conventions préalables, chacun des deux observateurs peut amener le point lumineux qu'il aperçoit à être au milieu du champ, et les appareils sont complétement réglés en direction.

18. *Réglage du miroir focal du collimateur.* — Le miroir du collimateur doit être placé très-exactement au foyer ; c'est une condition assez difficile à remplir, peut-être même la plus délicate de toute l'expérience. Voici comment j'ai résolu cette difficulté : le miroir est un petit disque de glace, à faces parallèles, dont l'une des faces a été argentée; toutefois elle fonctionne comme si elle était étamée, c'est-à-dire qu'on utilise la surface intérieure, dont le brillant se conserve plus longtemps. Ce disque est fixé sur le diaphragme focal (*fig.* 7) ; mais, avant de l'y fixer, on enlève avec le tracelet d'une machine à diviser l'argenture de la glace. On prend pour tracelet une pointe de fer doux, de façon à enlever la couche argentée sans risquer de rayer la glace, mais on laisse à dessein quelques filets adhérents qui vont jouer dans le réglage le rôle de réticules placés rigoureusement dans le plan réfléchissant.

On place ensuite l'oculaire dans sa position normale définie par la condition de voir nettement les filets d'argenture laissés par le tracelet; puis on règle le tirage de façon à apercevoir avec netteté la fenêtre de la première station dans la moitié libre du champ. Il est évident, si l'oculaire est puissant, qu'on peut amener avec une extrême précision l'image focale à coïncider avec le plan des filets d'argenture, c'est-à-dire avec le plan de la surface réfléchissante; il suffit alors d'un très-petit déplacement angulaire latéral pour faire tomber sur la partie argentée le foyer de la fenêtre de la première station; à cet effet, deux vis horizontales, destinées au réglage en azimut, permettent ce petit déplacement.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

19. Il est facile de se rendre compte de la nécessité de l'exactitude de ce réglage ; lorsque le faisceau de lumière envoyé par la première station est reçu sur l'objectif du collimateur, le cône des rayons convergents doit former son sommet exactement sur la surface réfléchissante pour que le cône des rayons réfléchis coïncide avec le cône des rayons incidents; si cette condition n'est pas exactement remplie, les rayons réfléchis émaneront de l'image réfléchie du sommet du cône et, par suite, suivront un chemin différent au retour.

Ce même mode de raisonnement montre que, si la condition précédente est bien remplie, une petite erreur de perpendicularité du miroir sur l'axe du cône n'a aucune influence sur la direction du faisceau de retour et n'occasionne qu'une perte insignifiante de lumière. En effet, dans le cas de cette petite inclinaison, le cône des rayons réfléchis ne coïncide plus exactement avec le cône des rayons incidents, tout en ayant leur sommet commun, de sorte qu'une petite partie des rayons réfléchis par le miroir se trouve rejetée en dehors de l'objectif; mais les rayons rejetés ne forment qu'une très-petite fraction de la lumière totale : elle est mesurée par le segment en forme de croissant, différence entre la surface de l'objectif, base du cône des rayons incidents, et d'un cercle de même diamètre, base du cône des rayons réfléchis. Quant au parallélisme des rayons émergents et des rayons incidents, il est évident qu'il sera rigoureux, puisque les deux cônes sont supposés avoir leur sommet au même point, c'est-à-dire situé sur la surface réfléchissante.

Analyse des conditions de visibilité de la lumière de retour.

20. Une erreur assez généralement répandue dans les ouvrages où se trouve exposée l'expérience de M. Fizeau tendrait à faire croire que la lumière émise par la station de départ est un faisceau parallèle qui ne subit aucune diminution d'intensité autre que celle occasionnée par l'absorption atmosphérique. Il n'en est rien : la lumière reçue par le collimateur est formée par des faisceaux élémentaires divergents (à cause du diamètre sensible de la source lumineuse), de sorte que l'affaiblissement de l'image de retour croît comme le carré de la distance des deux stations.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Ce résultat devient évident si l'on considère que la partie utile des rayons envoyés à la seconde est celle qui, partant de la première station, tombe sur l'objectif du collimateur; il en résulte que cette partie utile de la source est celle qui recouvre l'image de la surface de cet objectif vue dans la lunette; cette image joue un rôle analogue à celui de l'anneau oculaire dans les instruments d'optique, comme limite des rayons utilisables. On voit dès lors que la quantité de lumière Q réellement envoyée à la seconde station est proportionnelle :

1° A l'éclat intrinsèque E de la source;

2° A l'aire σ de l'image de l'objectif du collimateur, qui se forme au foyer de la lunette; or $\sigma = s' \frac{f^2}{r^2}$, s' étant la surface de cet objectif, et r la distance des deux stations;

3° A l'*ouverture conique* de la lunette de départ, mesurée par la surface de son objectif s et divisée par le carré de sa distance focale f; d'où

$$Q = h E \frac{ss'}{f^2} \frac{f^2}{r^2} = h E \frac{ss'}{r^2},$$

h étant un coefficient constant dépendant des unités adoptées. On voit ainsi que *la quantité de lumière utilisée dans l'expérience est proportionnelle à l'éclat de la source, au produit de la surface des objectifs des deux stations et en raison inverse du carré de leur distance.*

On remarquera qu'elle est indépendante des foyers des objectifs supposés géométriquement parfaits.

21. La lumière de retour est également diminuée par l'absorption atmosphérique : soient q_0 la quantité de lumière au départ; q la quantité à l'arrivée. La formule bien connue

$$q = q_0 e^{-\alpha l}$$

donne la mesure de l'absorption, e étant la base des logarithmes népériens, α le coefficient d'absorption, l la distance parcourue par le faisceau. Or l'épaisseur d'atmosphère traversée est le double de la distance des deux stations $l = 2r$; donc on aura

$$q = q_0 e^{-2\alpha r} = q_0 (e^{-\alpha r})^2.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Substituant dans la formule primitive, en posant $q_0 = Q$,

$$q = hE\frac{ss'}{(rc^{+ar})^2}.$$

On voit combien est grand l'affaiblissement par la distance, surtout dans le cas d'une atmosphère brumeuse ou enfumée; mais on peut compenser cet affaiblissement soit par l'éclat de la source lumineuse, soit par la grandeur du diamètre des objectifs, puisque la *visibilité* de l'image de retour est sensiblement proportionnelle à la quantité de lumière qui la constitue.

22. Une seconde cause d'affaiblissement de la lumière, dont il est difficile d'apprécier exactement l'effet, c'est l'épanouissement latéral des ondes lumineuses par diffraction, épanouissement inhérent au mouvement vibratoire de la lumière, qui se présente toujours lorsqu'elles sont limitées brusquement, comme elles le sont effectivement, par le contour de l'objectif du collimateur.

Une troisième cause d'affaiblissement est due aux aberrations des objectifs, c'est-à-dire à leur défaut d'aplanétisme; malgré la perfection à laquelle on est actuellement parvenu dans la construction des instruments d'Optique, il faut toujours estimer une perte notable produite par les aberrations qui diffusent la lumière latéralement et la rejettent hors des directions utiles.

23. Il reste encore à définir un élément important au point de vue de la visibilité de la lumière de retour, c'est le pouvoir réflecteur de la lame transparente à 45 degrés, qui fait partie de l'oculaire éclaireur. Cette lame remplit un double rôle : elle réfléchit la lumière dans le sens de l'axe optique de l'appareil, et, sous ce rapport, elle doit en réfléchir le maximum possible; d'un autre côté, par sa transparence, elle permet à la lumière de retour d'être visible dans la direction même où elle a été émise: sa transparence doit donc être aussi grande que possible. Ces deux conditions sont contradictoires; il y a donc lieu de rechercher quel pouvoir réfléchissant il faut donner à cette lame pour obtenir le maximum d'effet utile.

L'effet utile est ici la quantité de lumière de retour; il est facile de voir que la proportion de lumière réfléchie doit être égale à $\frac{1}{2}$. En effet, soient p

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

cette proportion, et Q la quantité de lumière incidente ; Qp sera la quantité réfléchie, le reste $Q(1-p)$ aura traversé la lame et sera perdu. Au retour, l'intensité étant affaiblie, on aura pour quantité reçue kQp, k étant le coefficient de réduction analysé plus haut : la proportion de lumière qui traversera la lame sera donc $kQp(1-p)$. Le maximum de $p(1-p)$ correspond évidemment à $p=\frac{1}{2}$; or, à 45 degrés, sur une lame de verre dont l'indice est voisin de 1,500, la proportion de lumière réfléchie est d'environ 12 pour 100. Si la lame est très-mince, de façon à utiliser les deux surfaces sans modifier sensiblement la marche des rayons éclaireurs, la proportion réfléchie sera double environ, ce qui ne fera que le quart de la lumière incidente. M. Fizeau m'a conseillé dès le début d'employer, comme il l'avait fait, deux lames minces de verre pour microscope de $\frac{1}{10}$ de millimètre d'épaisseur, serrées l'une contre l'autre : il avait reconnu par expérience que ce dispositif augmentait notablement l'éclat de la lumière de retour. J'ai adopté le même dispositif et j'ai reconnu ensuite par le calcul qu'il réalisait, en effet, d'une manière pratique le pouvoir réflecteur donnant le maximum d'intensité de la lumière de retour.

24. *Réglage de la lumière à la première station.* — Il est important de n'introduire dans l'appareil que la quantité de lumière strictement nécessaire pour produire le phénomène : en effet, un excès de lumière se réfléchit dans l'intérieur de la lunette d'émission, et spécialement sur l'objectif qui renvoie, sous forme de *points brillants*, une quantité de lumière proportionnelle à celle qu'il reçoit; le champ de la lunette s'éclaire donc, et diminue d'autant l'éclat du point lumineux de retour. A cet effet, j'ai adopté le dispositif de M. Fizeau, qui consiste à réduire beaucoup le diamètre de la source de lumière; on y parvient en projetant sur l'image même de la fenêtre de la station opposée, à l'aide de la glace inclinée et de la lentille éclairante, l'image conjuguée d'une très-petite ouverture (1 millimètre carré environ), éclairée vivement par une lentille antérieure. Théoriquement, il suffirait que cette image fût égale en surface à l'image focale de l'objectif de la station opposée, à la condition, toutefois, que le cône moyen des

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

rayons éclaireurs couvrît tout l'objectif de la lunette d'émission, c'est-à-dire coïncidât avec le cône des rayons formant l'image de l'autre station.

On obtient aisément, de jour, cette coïncidence, en amenant l'image de la fenêtre de la station entre deux dents de la roue d'une part, et, d'autre part, en amenant sur ces mêmes dents l'image conjuguée de la lumière éclairante. Le noir de fumée dont les dents sont recouvertes diffuse assez de lumière pour que l'éclairement des dents par la lumière employée apparaisse nettement; mais il faut de temps en temps couvrir l'objectif, car l'éclat de l'image de la station opposée empêcherait complétement d'apercevoir le faible éclat des dents noircies, et par suite de régler la lumière éclairante. Avec la lumière solaire le réglage est beaucoup plus facile.

25. Ce mode opératoire est en défaut, de jour, quand le temps est assez brumeux pour qu'on ne distingue pas très-bien la station opposée et, de nuit, lorsque par une cause quelconque l'appareil a été déréglé.

Voici donc un mode de réglage qui réussit dans tous les cas où l'état de l'atmosphère permet l'expérience; je supposerai qu'on opère de nuit, ce qui est le cas le plus défavorable et le plus embarrassant.

On commence par écarter la roue dentée en donnant au mécanisme moteur un petit déplacement d'ensemble qu'on obtient avec une espèce de vis de calage s' (*Pl. I, fig.* 1); on ne craint plus alors que l'image de la station opposée soit cachée par les dents ou par la jante de la roue dentée. On explore ensuite le champ de la manière suivante : d'abord on couvre, pour ainsi dire, de lumière tout le plan focal de la lunette, ce qu'on obtient en ôtant le petit diaphragme de 1 millimètre. Généralement, malgré l'excès d'éclairement du champ, on aperçoit la lumière de retour sous forme d'un petit point lumineux; on approche alors progressivement la roue dentée jusqu'à être tangente à ce point : le reste de l'opération s'effectue ensuite sans difficulté.

26. Je recommande également une autre manière d'explorer le champ, très-commode dans une foule de cas : elle consiste à déplacer le petit diaphragme, et par suite son image, conjuguée de façon à *balayer* de lumière le plan focal; mais il faut savoir, ou plutôt voir à chaque instant où se trouve la

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

partie éclairée du champ. On y arriverait en approchant de temps en temps un écran dans le plan focal ; mais on risque ainsi de toucher à la roue dentée, de la fausser ou d'enlever le noir qui couvre la denture ; il est beaucoup plus simple de placer cet écran (morceau de papier noir) sur le prolongement des rayons lumineux de l'éclaireur après leur passage à travers la lame réfléchissante. On arrive aisément à le placer au foyer en cherchant à rendre minimum la dimension de la partie éclairée qu'on aperçoit très-bien par réflexion sur cette lame. A ce moment l'image de la partie éclairée de l'écran se projette sur le plan focal au point même où elle apparaîtrait si l'écran était placé dans ce plan.

Ce mode d'exploration est surtout commode de jour avec la lumière solaire ; il permet de *sonder,* pour ainsi dire, chaque fenêtre de la station opposée, en projetant sur son image le cône de lumière éclairante ; lorsqu'on arrive à celle qui contient le collimateur, on voit un point s'illuminer subitement : c'est la lumière de retour cherchée, ou l'*écho lumineux,* suivant l'expression même de M. Fizeau.

27. Dans le cas où l'on veut donner la dernière perfection au réglage, perfection qu'on n'atteindra que lorsqu'on se sera familiarisé avec tous les procédés décrits précédemment, il est bon d'employer le mode d'exploration suivant. Il faut opérer d'une manière inverse de celle qui a été décrite précédemment; au lieu de prendre comme point de départ du réglage l'image de la station opposée et de faire converger sur elle la lumière de l'éclaireur, on prend, au contraire, le point de convergence de la lumière éclairante, et l'on amène en coïncidence avec lui l'image focale de la station opposée, et voici pourquoi : on risque, en opérant par la première méthode, d'envoyer un cône de rayons éclaireurs dont l'axe ne coïncide pas avec l'axe du cône des rayons de l'objectif. Ce défaut de réglage est causé par une petite excentricité inévitable dans la position de la lame à 45 degrés, dont la surface ne se trouve jamais exactement sur l'intersection des axes optiques de l'éclaireur et de la lunette, en même temps que perpendiculaire au plan de ces deux droites; il en résulte que le cône de lumière éclairante ne couvre

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

pas tout l'objectif de la lunette : il y a donc perte de lumière, dissymétrie du faisceau, etc., toutes causes d'affaiblissement de la lumière de retour.

Au contraire, si l'on commence par disposer le diaphragme de l'éclaireur et la lame réfléchissante de façon que le cône de rayons lumineux couvre bien symétriquement tout l'objectif, le point de convergence des rayons éclaireurs définit dans le plan focal le point où doit venir se peindre l'image de la fenêtre de la station opposée. Il suffit alors de manœuvrer les vis calantes de la lunette pour obtenir la coïncidence.

L'opération est très-facile de jour avec la lumière solaire; avec un peu d'habitude on réussit également de nuit, avec la lumière Drummond.

DESCRIPTION D'UNE EXPÉRIENCE.

28. On peut opérer de nuit et de jour; les observations de nuit sont en général meilleures et plus faciles à cause du calme de l'atmosphère; on emploie alors une lumière artificielle, telle que la lumière Drummond ou même une simple lampe à pétrole, à mèche plate, dont l'éclat, suivant la tranche de la mèche, est assez intense.

De jour, on peut opérer avec la lumière solaire; la lumière de retour est tellement intense lorsque le temps est clair, qu'il faut en affaiblir l'éclat soit en armant l'oculaire d'un verre coloré, soit en employant cette lumière sans la concentrer sur le diaphragme de l'éclaireur ; lorsque la lumière incidente est trop vive on n'a plus d'extinction, mais seulement un minimum de lumière moins facile à apprécier. En tout cas, il faut des circonstances météorologiques spéciales pour tirer un bon parti des observations faites avec le Soleil; la plupart du temps les courants d'air chaud rendent le point lumineux de retour tellement onduleux qu'il est impossible d'observer; par certains temps demi-brumeux, au contraire, l'expérience réussit assez bien.

On opérerait également dans de bonnes conditions pendant le jour, lorsque le temps est couvert, mais que l'atmosphère est pure, avec une lumière artificielle très-vive; la lumière Drummond suffit alors, et la lu-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

mière de retour est d'une fixité et d'un éclat extraordinaires ; j'ai regretté de n'avoir été qu'une seule fois en mesure de faire des déterminations dans ces circonstances.

29. Lorsqu'on veut faire une expérience, on commence par constater que la lumière de retour est suffisamment vive, puis on fait tous les préparatifs nécessaires. On veille à ce que les dents de la roue soient bien enfumées ; si elles ne le sont pas suffisamment, on approche une lampe à huile, à mèche très-petite, et l'on fait tourner doucement la roue dentée au milieu de la flamme ; d'un autre côté, on colle sur le cylindre enregistreur une feuille de papier qu'on enfume avec une lampe à huile, à mèche large et plate : on constate que les trois électro-aimants et leurs tracelets fonctionnent convenablement, et que les couples de pile (1) sont en bon état : deux couples Callaud sont suffisants pour chacun d'eux.

L'observateur règle d'abord, à l'aide de la vis calante du mécanisme, la position de la roue dentée, de manière que le point lumineux de retour soit dans la zone circulaire que décrivent les dents ; il rectifie la position du cône de la lumière éclairante de façon que ce point lumineux soit bien au milieu du reflet sur les dents produit par l'éclaireur. Il y a même quelque chose de plus à faire : il faut régler le rapport du plein au vide dans la denture, de façon à rendre l'extinction aussi nette que possible sans pour cela la rendre trop longue. A cet effet on a eu soin de faire tailler les dents en forme de pointes, de telle sorte que le rapport du plein au vide peut varier de 0 à 1 : le rapport *zéro* a lieu lorsque le point de retour est

(1) Les piles dont je fais usage, et dont je recommande l'emploi pour les enregistreurs, les horloges électriques, etc., sont du genre de celles que l'Administration des lignes télégraphiques emploie, au bureau central, sous le nom de couples *Callaud* ; on les construit aisément avec une éprouvette de 1 litre ou 2, remplie d'eau, au fond de laquelle on a placé des cristaux de sulfate de cuivre ; un cylindre de zinc formant le pôle négatif plonge à la partie supérieure une lame annulaire de cuivre, placée au fond de l'éprouvette et reliée par un fil de cuivre couvert de gutta-percha, forme le pôle positif ; la différence de densité des solutions du sulfate de zinc et de cuivre maintient cette dernière au fond de l'éprouvette. Ces couples fonctionnent au moins cinq ou six semaines sans qu'on ait à y toucher. Au bout de ce temps, il suffit, pour les remettre en état, de laver la surface des zincs généralement enduits d'une croûte de cuivre, et d'ajouter avec précaution quelques cristaux de sulfate de cuivre.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

placé sur le cercle décrit par l'extrémité des dents; le rapport *un*, lorsqu'on amène ce point à occuper le cercle décrit par le fond des intervalles vides. Avec un peu d'habitude on règle aisément la profondeur à laquelle il faut que le point lumineux de retour se trouve engagé dans la denture; la vis calante *s* du support du mécanisme permet aisément ce réglage.

30. Pour arriver au meilleur effet possible dans ce sens, il reste encore à régler l'intensité de la lumière qu'on emploie; dans les nuits un peu brumeuses, la lumière Drummond est nécessaire: le réglage de l'intensité s'obtient en chargeant plus ou moins les sacs d'oxygène; dans les nuits claires, la lampe à pétrole suffit amplement. Il est bon d'ajouter qu'en général plus la lumière nécessaire à la production du retour est faible, et meilleures sont les observations; en effet, la netteté des extinctions est d'autant plus grande que le champ de vision est plus obscur et que le reflet sur la denture de la roue est moins intense, ce qui conduit à employer une lumière aussi faible que possible.

Lorsque ces réglages ont été achevés ou vérifiés, tout est prêt pour une observation. L'observateur alors monte le mécanisme de la roue dentée jusqu'à refus, déclanche le moteur de l'enregistreur et, tout en ayant l'œil à l'oculaire, gouverne avec sa main droite la vis de réglage du frein et avec la main gauche la clef électrique qui transmet les signaux.

31. La première méthode d'observation que j'ai employée consiste à laisser croître, puis décroître régulièrement la vitesse de la roue dentée et à noter le moment des apparitions et des disparitions successives; à cet effet, on appuie sur la clef électrique pour faire passer le courant tant que la lumière est visible; on ouvre au contraire le circuit au moment où elle disparaît et tant qu'elle reste invisible. On retrouve alors aisément, sur le tracé graphique, les signaux occasionnés par cette manœuvre.

Je préfère en général une autre méthode, qui consiste à limiter beaucoup les variations de vitesse, de manière que la lumière de retour soit éteinte. Avec un peu d'habitude, on arrive à maintenir non pas une vitesse uniforme, mais une vitesse périodique, qui oscille entre les valeurs correspondant aux deux réapparitions voisines; quand ce régime est atteint, on

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

fait un signal au moment du milieu de la période. On voit qu'en faisant varier le rapport du plein au vide de la denture, ainsi qu'il a été expliqué plus haut, on resserre autant qu'on le veut les deux limites de réapparition. Les ondulations de l'image causées par les troubles de l'atmosphère sont les seuls obstacles à la précision théoriquement indéfinie de ce mode opératoire.

32. Cette méthode présente sur la précédente des avantages qu'il faut signaler : c'est une méthode qu'on peut appeler *statique*, car on attend presque au repos le moment favorable au pointé; la précédente, au contraire, exige qu'on saisisse au passage l'apparition ou la disparition. Il y a donc nécessairement un effet de *surprise* qui n'existe pas dans la seconde méthode; toutefois, il est nécessaire d'ajouter que les causes d'erreur de cette nature, par exemple le temps perdu, produit par la persistance de l'impression vituelle sur la rétine et par le retard de la transmission des signaux, s'éliminent aisément dans l'un ou l'autre de ces deux modes opératoires, en accouplant toujours les observations dans lesquelles la variation de la vitesse est de signe contraire.

Il est bon de signaler, au point de vue pratique, la facilité que présentent les pointés de la deuxième méthode. On a, en effet, pour se guider dans le réglage de la vitesse, trois éléments, trois impressions simultanées : 1° celle de la vue qui saisit les réapparitions; 2° celle du toucher, car la manœuvre du frein finit par devenir absolument instinctive; 3° enfin celle de l'ouïe qui perçoit, d'après le son rendu par les engrenages, le sens de la variation de la vitesse. Ce mode d'observation me paraît donc le plus précis.

33. On fait ainsi plusieurs séries de pointés successifs en augmentant ou en diminuant la vitesse de façon à atteindre différents ordres d'extinction. Il ne faut pas faire de suite plus d'une dizaine de pointés, car l'œil se fatigue rapidement; mais, si l'on a soin d'interrompre l'observation pendant une minute après cinq ou six pointés, la vue conserve une sensibilité parfaite. Cette précaution montre que l'observateur doit être dans l'obscurité la plus complète: aussi la lumière éclairante doit-elle être enfermée dans une boîte percée des ouvertures strictement nécessaires.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Après chaque série de cinq à dix pointés, on arrête l'enregistreur, et l'on note sur le carnet d'expériences le nombre de pointés, l'ordre d'extinction qui leur correspond et le *poids* qu'on leur attribue d'après la netteté de l'extinction ou la fixité du point lumineux. Ce sont les circonstances atmosphériques qui déterminent, en grande partie, le *poids* des observations; les annotations *assez bien, bien, très-bien, excellent*, que je compte comme équivalant aux nombres 1, 2, 3, 4, résument l'appréciation de toutes les circonstances pouvant influencer les pointés.

Comme on le verra dans la discussion des tracés graphiques, j'obtenais couramment les troisième, quatrième, cinquième et sixième ordre d'extinction avec les mécanismes d'horlogerie; avec le moteur Froment et un disque denté en aluminium de 360 dents, j'ai atteint le onzième ordre, dans des observations purement qualitatives, en lançant l'appareil à toute vitesse. Ce dernier résultat montre que le disque tournait de $10\frac{1}{2}$ dents pendant que la lumière parcourait le double de la distance des deux stations.

RELEVÉ DES TRACÉS GRAPHIQUES ET RÉDUCTION DES OBSERVATIONS.

34. Lorsque la feuille de papier enfumé de l'enregistreur est couverte entièrement par les tracés, on la coupe avec la pointe d'un canif suivant une génératrice du cylindre, et on la dépose, par sa face non noircie, sur une solution alcoolique de gomme laque à 4 pour 100. La feuille s'imprégne de ce vernis et, après dessiccation par évaporation spontanée, le noir de fumée est alors complétement fixé.

Il s'agit alors de relever les signaux qui s'y trouvent tracés.

Considérons d'abord le cas le plus simple où l'on a enregistré la vitesse maintenue constante pendant quelques secondes (deuxième méthode d'observation) : la triple hélice dentelée se trouve développée suivant trois droites dentelées (*Pl. I, fig.* 11); les dentelures de la droite du milieu marquent les *secondes* de temps. On ne les compte que de deux en deux, parce que les deux transmissions de courant produites aux élongations, à droite et à gauche d'un pendule à secondes, ne sont pas nécessairement équidistantes; l'une des deux autres lignes porte des dentelures d'abord à inter-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

valles très-écartés puis très-rapprochés, et qui s'écartent de nouveau : ce sont les signaux de la came électrique du mécanisme.

Enfin, sur la troisième droite, on retrouve un signal particulier (vibrations rapides), transmis par l'observateur au moment où il jugeait que la vitesse convenable était obtenue; ce signal dure environ deux à trois secondes, et comme, avant ce signal, la vitesse avait été soutenue pendant le temps nécessaire pour constater qu'elle était constante, on peut, sans erreur sensible, admettre que, pendant quatre secondes se terminant à la fin du signal, le mouvement est resté uniforme. Alors on compte le nombre de signaux de la came qui ont été tracés pendant cet intervalle de quatre secondes, et l'on en déduit facilement le nombre de dents qui ont passé dans l'unité de temps.

35. Soient, en effet,

m le nombre de tours que fait l'axe de la roue dentée entre deux passages consécutifs de la came électrique;

N le nombre de dents de la roue dentée;

μ le nombre de signaux de la came pendant une seconde.

Le temps θ qu'une demi-dent met à passer est représenté, en fractions de seconde, par l'expression

$$\theta = \frac{1}{2}\frac{1}{\mu N m}.$$

Soit maintenant n l'ordre de l'extinction observée correspondant à la vitesse représentée par μ; dans le temps τ que la lumière met à parcourir deux fois la distance D des deux stations, la roue dentée a tourné de $2n-1$ demi-dents : donc le temps que la lumière a mis à parcourir 2D est égal à $(2n-1)\theta$; la vitesse de la lumière V est donc mesurée par

$$V = \frac{2D}{(2n-1)\theta} = \frac{4D\mu m N}{2n-1}.$$

Isolant le facteur 4μ, qui représente le nombre de signaux de la came électrique pendant quatre secondes, il vient

$$V = \frac{DNm}{2n-1}\,4\mu.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On calcule pour chaque roue le facteur DNm et, pour déterminer la vitesse de la lumière correspondant à une observation donnée d'ordre n, il suffit de multiplier par ce facteur divisé par $2n - 1$ la valeur de 4μ relevée sur le graphique.

Nota. — Il est inutile de faire ce produit pour toutes les valeurs isolées de 4μ; il vaut même mieux n'effectuer la multiplication que sur la moyenne, car les valeurs de 4μ doivent être accouplées par séries, de façon à éliminer les retards dont il a été parlé plus haut (n° **32**). En général, lors de l'observation, on marquait les pointés correspondant à des vitesses alternativement croissantes et décroissantes.

36. Voici un exemple de ce calcul (feuille n° **10**) :

$$m = 120 \text{ tours},$$
$$N = 104 \text{ dents},$$
$$D = 10^{\text{km}},310.$$

On a relevé les 49 pointés : les valeurs de 4μ se rapportent à quatre ordres différents; les moyennes des valeurs obtenues (dont le nombre est entre parenthèses) sont

$4\mu =$	tours 6,962	(5)	dans l'intervalle de 4 secondes.
	11,617	(8)	» »
	16,056	(17)	» »
	21,041	(19)	» »

Le carnet d'expérience porte que ces pointés correspondent au deuxième, troisième, quatrième et cinquième ordre d'extinction, mais ces indications ne sont pas nécessaires; on peut les déduire des valeurs elles-mêmes. Il suffit, en effet, de chercher à quels termes de la série de nombres impairs ces valeurs sont proportionnelles; on trouve aisément

$$3, \quad 5, \quad 7, \quad 9;$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

car les quotients sont respectivement

$$2{,}321, \quad 2{,}222, \quad 2{,}286, \quad 2{,}224;$$

par suite, les numéros d'ordre d'extinction sont bien 2, 3, 4, 5.

Or le facteur $DmN = 128{,}669$, divisé successivement par 3, 5, 7, 9 et multiplié respectivement par les valeurs correspondantes de 4μ donne

	4μ.	V valeurs calculées.
$\frac{DNm}{3} = 42889$	6,962	$V = 298593^{km}$ par seconde
$\frac{DNm}{5} = 25734$	11,617	298952 »
$\frac{DNm}{7} = 18381$	16,056	295125 »
$\frac{DNm}{9} = 14297$	21,041	300823 »

On obtient ainsi quatre valeurs qui correspondent aux quatre ordres d'extinction observés.

37. Il reste peu de chose à ajouter pour décrire le relevé des tracés graphiques dans le cas de l'autre mode d'observation. Ce tracé (*Pl. I, fig.* 10) comprend, comme précédemment, les dentelures marquant les secondes et celles marquant les passages de la came du mécanisme ; le troisième tracé offre des dentelures plus écartées: elles indiquent le moment de la disparition et celui de la réapparition de la lumière de chaque ordre. On a à déterminer la valeur de la vitesse que possédait le mécanisme au moment de chacun des signaux; pour y parvenir on suppose que, pendant les trois passages consécutifs de la came les plus voisins du signal considéré, le mouvement du mécanisme a été uniformément accéléré, ce qui est très-approximativement vrai ; on relève les époques des trois passages t_1, t_2, t_3, en prenant une origine du temps arbitraire (généralement le commencement de la série) et l'époque t du signal de l'observateur.

La vitesse du mécanisme est représentée par le nombre v de demi-dents qui passe en une seconde; or à chaque signal de la came il a passé $2mN$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

demi-dents: donc la vitesse moyenne du mécanisme entre le premier passage et le deuxième est égale à $v = \frac{2mN}{\left(\frac{2}{t_2 - t_1}\right)}$, et $v' = \frac{2mN}{\left(\frac{2}{t_3 - t_2}\right)}$ entre le deuxième et le troisième de la came électrique.

En vertu d'une propriété bien connue du mouvement uniformément accéléré, la vitesse moyenne entre les deux instants est la vitesse réelle au milieu de ces deux instants, conclusion évidente, puisque *la vitesse varie proportionnellement au temps*. Les vitesses v et v' sont donc les vitesses réelles aux époques $\frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ et $\frac{1}{2}(t_2 + t_3)$.

Reste à connaître la vitesse au temps t: on la calcule par une simple proportion; on choisit en général t_1, t_2, t_3, de manière que t soit compris entre $\frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ et $\frac{1}{2}(t_2 + t_3)$; d'où l'on conclut, pour la vitesse z au temps t,

$$\frac{z - v}{v' - z} = \frac{t - \frac{1}{2}(t_1 + t_2)}{\frac{1}{2}(t_2 + t_3) - t}.$$

Cette interpolation se fait souvent à vue; dans les cas moins simples, on a recours à un tracé graphique; on prend pour abscisse le temps exprimé en secondes et pour ordonnées les valeurs de v et v' (au facteur $2mN$ près, qu'on rétablit ensuite); ces valeurs simplifiées de v et v', que nous appellerons y, y', sont les inverses de $\frac{1}{2}(t_2 - t_1)$ et $\frac{1}{2}(t_3 - t_2)$ correspondant aux abscisses $\frac{1}{2}(t_2 + t_1)$ et $\frac{1}{2}(t_3 + t_2)$. L'ordonnée y de la droite passant par les deux points ainsi définis, qui correspond à l'abscisse t, mesure la vitesse cherchée.

38. Ce mode de calcul est assez long, parce que, pour obtenir un seul résultat, il faut faire quatre fois un calcul analogue afin d'obtenir les quatre

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

valeurs de la vitesse z_1, z_2, z_3, z_4 du mécanisme

z_1	correspondant au commencement de l'extinction	} en vitesse croissante;	
z_2	» à la fin de l'extinction		
z_3	» au commencement de l'extinction de même ordre	} en vitesse décroissante.	
z_4	» à la fin de l'extinction de même ordre		

En effet, c'est la moyenne des vitesses au commencement et à la fin de l'extinction qui définit le milieu de cette période (¹); mais il est bon d'accoupler à cette valeur la valeur analogue correspondant au moment où la vitesse du mécanisme varie en sens inverse, de sorte qu'on prend la moyenne des quatre valeurs

$$\frac{1}{4}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) = Z.$$

Le résultat qu'on obtient ainsi est le nombre de demi-dents qui passent en une seconde au moment du milieu de l'extinction. Pour en déduire la valeur de la vitesse de la lumière, remarquons que, si n représente l'ordre de l'extinction considérée, la lumière mettrait à parcourir la distance $2D$ le même temps τ que les $(2n-1)$ demi-dents à passer. Or le temps de passage de $(2n-1)$ demi-dents est

$$\tau = \frac{2n-1}{z},$$

(¹) On se rend compte de cette assertion en considérant le phénomène optique qui se passerait si l'objectif du collimateur, au lieu de sous-tendre un angle de quelques secondes, sous-tendait un angle assez grand pour que l'image de la roue dentée, réfléchie sur le miroir, vînt se former en coïncidence avec la roue elle-même; au repos, cette coïncidence serait complète; mais, lorsque la roue tournerait, l'image serait *en retard* sur l'objet et tout se passerait comme si la roue se dédoublait en deux, l'une étant en arrière de l'autre d'un angle mesuré justement par le rapport de la vitesse de la roue à la vitesse de la lumière. L'extinction complète correspondrait au cas où les pleins de l'image de retour coïncideraient avec les vides de la roue réelle; l'extinction apparente au cas où l'intervalle libre laissé par la superposition des deux roues aurait une certaine valeur relative. On voit alors que pour des vitesses croissantes l'extinction réelle correspond à la moyenne de deux positions des deux roues donnant l'extinction apparente.

Cette considération, que je ne développe pas ici, montre l'analogie de la méthode du miroir tournant et celle de la roue dentée.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'où

$$V = \frac{2Dz}{\tau} = \frac{2DZ}{2n-1} = \frac{2D}{2n-1}\frac{1}{4}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4),$$

substituant à z_1, z_2, z_3, z_4 leurs valeurs de la forme $z = y \times 2mN$, d'où

$$V = \frac{DmN}{2n-1}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4),$$

expression de même forme que dans le cas précédent, où la somme des quatre ordonnées de la courbe auxiliaire équivaut à la valeur définie sous le nom de 4μ.

39. *Exemple numérique* (1) (feuille n° 13).

$$N = 500, \quad m = 100, \quad DNm = 515500.$$

		Diff. = δ.		
Vitesse croissante	$t_1 = 4^s,95$	$2^s,68$	$t = 7^s,23$ (extinction)	(2e ordre.)
	$t_2 = 7,63$	$2,03$	$t = 9,02$ (réapparition)	
	$t_3 = 9,66$	$1,69$		
	$t_4 = 11,35$			
Vitesse décroissante	$t'_1 = 26,60$	$1,52$	$t = 30,53$ (réapparition)	(2e ordre.)
	$t'_2 = 28,12$	$1,94$	$t = 31,36$ (extinction)	
	$t'_3 = 30,06$	$2,96$		
	$t'_4 = 33,02$			

Lors de la vitesse croissante, les quatre époques t_1, t_2, t_3, t_4, et lors de la vitesse décroissante, t'_1, t'_2, t'_3, t'_4 déterminent surabondamment la loi du

(1) Pour apprécier les fractions de seconde, je me sers d'une lame transparente de corne (*fig.* 9) sur laquelle vingt et un traits équidistants sont tracés; ces traits divergent légèrement, de façon que l'intervalle de 2 secondes du tracé puisse toujours correspondre aux deux traits extrêmes en un certain point de cette échelle; on parvient ainsi à mesurer la dixième partie de la seconde et à estimer le centième, car l'intervalle représentant une seconde est environ de 9 millimètres.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

mouvement; effectuant les calculs indiqués ci-dessus, il vient

x	$\frac{1}{\delta}$ y		
$\frac{1}{2}(t_1+t_2) = 6^s,29$	$\frac{1}{2,68} = 0,373$	$t = 7^s,23$	$y_1 = 0,425$
$\frac{1}{2}(t_2+t_3) = 8,65$	$\frac{1}{2,03} = 0,492$	$t = 9,02$	$y_2 = 0,512$
$\frac{1}{2}(t_3+t_4) = 10,51$	$\frac{1}{1,69} = 0,592$		
$\frac{1}{2}(t'_1+t'_2) = 27,36$	$\frac{1}{1,52} = 0,658$	$t = 30,53$	$y_3 = 0,415$
$\frac{1}{2}(t'_2+t'_3) = 29,09$	$\frac{1}{1,94} = 0,516$	$t = 31,36$	$y_4 = 0,355$
$\frac{1}{2}(t'_3+t'_4) = 31,54$	$\frac{1}{2,94} = 0,340$		$4\mu = 1,707$

On trace une courbe en prenant pour abscisse (6,29, 8,65, 10,51) et pour ordonnées respectives (0,373, 0,492, 0,592),...; on constate que les trois points ainsi obtenus sont sensiblement en ligne droite, ce qui vérifie l'hypothèse du mouvement uniformément accéléré; puis, sur la courbe ainsi définie, on relève les ordonnées y_1, y_2; on opère de même avec les nombres de la vitesse décroissante :

La somme $y_1+y_2+y_3+y_4$..... $= 4\mu$,

Le facteur correspondant au deuxième ordre..... $= \frac{DNm}{3} = 171833$,

d'où

$$V = 293314, \quad \text{poids } 1 \times 3 \times 2.$$

On calcule exactement de la même manière les relevés des pointés des autres ordres.

DÉTERMINATION DE LA DISTANCE DES DEUX STATIONS.

40. Si les deux stations avaient été situées loin d'une grande ville, une petite triangulation, en partant d'une base de 2 ou 3 kilomètres convenablement orientée, eût été très-facile. Je ne pouvais pas songer à exécuter un pareil travail aux abords de Paris, à cause des obstacles de tout genre

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

que j'aurais rencontrés. J'ai choisi alors un moyen détourné qui, on va le voir, m'a donné une exactitude satisfaisante.

En examinant avec soin, du haut du belvédère de l'École Polytechnique (où se trouve un petit observatoire astronomique), les parties visibles du Mont-Valérien, j'ai constaté qu'on apercevait trois saillants des bastions de la forteresse, dont la forme est pentagonale; deux d'entre eux (le n° 2 et le n° 5) se profilent sur le ciel. On peut, avec une lunette grossissant quarante à cinquante fois, distinguer facilement la saillie du bandeau de pierre qui couronne le revêtement, c'est-à-dire apprécier une épaisseur de 12 à 15 centimètres : les pointés sont donc dans de très-bonnes conditions d'exactitude. Le troisième saillant (n° 1) s'aperçoit aussi très-bien, grâce à la différence d'éclairement des deux flancs.

41. J'ai mesuré avec beaucoup de soin les deux angles horizontaux que forment ces trois directions; la connaissance des dimensions de la forteresse, dont le plan a été levé plusieurs fois par le Service du Génie, m'a dispensé de mesurer une base, et les deux angles définis plus haut suffisent pour déterminer la distance du belvédère de l'École à l'un des trois saillants; ces deux angles ont été trouvés égaux aux valeurs suivantes :

Angle des saillants n° 1 et n° 2	$= 0°58'\ 0''$	Somme $= 3°13'38''$, angle des saillants extrêmes (n° 2 et n° 5).
» » n° 1 et n° 5	$= 2°15'38''$	

Ils ont été mesurés à l'aide du cercle azimutal d'un instrument universel construit par MM. Brünner; ces nombres sont la moyenne de quatre mesures très-concordantes (1) effectuées avec les retournements nécessaires pour

(1) J'ai trouvé pour l'angle n° 2, n° 5,

$3^{\circ}.13'.39'',7$	Rotation dans le sens direct	Cercle vertical au N.
$37,5$	» inverse	
$37,5$	Rotation dans le sens direct	Cercle vertical au S.
$38,3$	» inverse	

Cet angle a été vérifié par deux séries de mesures exécutées avec deux instruments moins parfaits, placés à 1 mètre en avant de l'instrument méridien.

Un petit théodolite (Brünner) donnant les 10 secondes a donné comme moyenne

$3°13'40''$,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

éliminer les erreurs de verticalité des axes. Le diamètre du cercle azimutal étant de 30 centimètres, les verniers donnant les trois secondes et le grossissement de la lunette étant d'environ 60 fois, ces angles me paraissent exacts à une seconde d'arc près.

42. Grâce à l'obligeance de M. le colonel Laussedat et de M. le capitaine Baccharach, j'ai pu relever sur les plans de la forteresse les distances des points dont j'avais besoin; le plan qui m'a été indiqué comme le meilleur était à l'échelle de $\frac{1}{2000}$. Les erreurs ne paraissent pas devoir jamais atteindre $\frac{1}{500}$, surtout pour les points de la *magistrale*.

J'ai relevé les distances horizontales des trois saillants

n° 1,	n° 2.....	$413^{m},0$
n° 2,	n° 3.....	623,5
n° 3,	n° 1.....	435,4

Ce triangle résolu a donné, pour les trois angles rectilignes,

n° 1.....	$94^{\circ}.33'.44''$
n° 2.....	44. 6.56
n° 3.....	41.19.20
Somme.....	180. 0. 0

Appliquant le calcul trigonométrique bien connu des *segments capables*, j'ai trouvé (*Pl. I, fig.* 12)

$$x = 24^{\circ}29'35'',$$
$$y = 66^{\circ}50'31''.$$

---

un cercle azimutal (goniomètre), donnant les 3 secondes, mais sans mouvement vertical de la lunette,

$$3^{\circ}13'44''.$$

Ces mesures n'ont été faites qu'à titre de vérification.

L'angle des saillants n° 1, n° 3 déterminé avec le premier instrument, en prenant les mêmes précautions, a donné pour valeurs partielles

$$21^{\circ}53'37'',3$$
$$39$$
$$36$$
$$39$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'où la distance du saillant n° 1 au pilier du belvédère de l'École

$$10149^{m},2.$$

Ces directions, transportées sur une copie du plan, permettent d'évaluer immédiatement la distance du saillant n° 1 à la fenêtre de la station qui se trouve très-sensiblement sur le prolongement de la distance calculée : on trouve $171^{m},4$.

D'où l'on conclut pour la distance de la fenêtre de la station au pilier du belvédère, qui est, à fort peu près, la distance des foyers des deux appareils,

$$10320^{m},6.$$

43. Je ne me suis pas contenté de cette mesure, j'ai cherché à la contrôler par les résultats des triangulations effectuées précédemment dans diverses circonstances. Dans les bureaux de la Préfecture de la Seine, j'ai obtenu les documents suivants :

1° Distance du Panthéon à l'angle NE de la caserne C du Mont-Valérien (d'après la triangulation du cadastre) :

$$10073^{m},83.$$

J'ai relevé alors sur le plan de la ville de Paris au $\frac{1}{5000}$ la distance horizontale du belvédère de l'École Polytechnique à l'axe du Panthéon : elle est égale à 326 mètres, puis j'ai mesuré avec l'instrument universel l'angle horizontal compris entre l'axe du Panthéon et l'arête NE de la caserne C

$$42°8'0'',$$

d'où l'on conclut par un triangle facile le nombre 10314 mètres comme distance de l'arête de la caserne C au pilier du belvédère. La fenêtre où se trouve le collimateur étant, d'après le plan, 5 mètres moins loin, on a pour distance des deux stations

10308 mètres.

Je crois cette valeur très-approchée, car elle est déduite, par un calcul dont les données additionnelles n'ont pas besoin d'être connues avec une très-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

grande exactitude, de la distance de deux points géodésiques importants, lesquels ont dû être bien déterminés par la Commission du cadastre.

2° Distance du Panthéon à un signal placé sur le glacis du bastion n° 5, très-près du chemin couvert, à 4 mètres au delà de la capitale, $10049^{m},9$ (nouvelle triangulation de Paris).

Ce signal n'est malheureusement pas visible du belvédère ; je n'ai donc pas pu mesurer l'angle qu'il fait avec le Panthéon ; mais, en relevant sur le plan sa position approximative, j'ai trouvé qu'il est à 38 mètres plus au nord que le saillant n° 5, normalement à la direction joignant le saillant au belvédère ou, ce qui revient au même, au Panthéon. En ajoutant à l'angle $43°58'30''$, que fait le saillant n° 5 avec l'axe du Panthéon, l'arc $\frac{38}{10310} = 12'41''$, on a l'angle opposé au côté donné par la triangulation de Paris ; la distance du belvédère au Panthéon achève de déterminer le triangle, d'où l'on conclut, pour la distance du signal au pilier du belvédère, 10281 ; ajoutant la distance relevée sur le plan qui correspond à la fenêtre de la caserne = 20 mètres, ce qui donne pour troisième valeur de la distance des deux stations 10302 mètres.

Resumé des valeurs approchées de la distance des deux stations.

1°	D'après les données du cadastre.....			10308^{m}
2°	»	»	du plan de Paris.....	10302
3°	»	»	de mes observations et des plans du Génie.	10321
			Moyenne.....	10310

Cette moyenne, qui coïncide presque avec le résultat que je considère *a priori* comme le meilleur (celui du cadastre), doit être approchée à quelques mètres près ; en supposant que l'erreur fût de 10 mètres, on aurait encore plus de $\frac{1}{1000}$ d'approximation comme erreur relative.

RÉSUMÉ DES RELEVÉS EFFECTUÉS SUR LES TRACÉS GRAPHIQUES.

44. J'ai réussi à enregistrer vingt-deux séries d'observations qui comprennent un millier de pointés, et par suite un millier de déterminations de

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

la vitesse de la lumière; mais je n'ai réduit que les pointés portant des annotations satisfaisantes, ce qui réduit à 700 le nombre des valeurs examinées. En outre je rejette les six premières séries, dont les annotations sont les moins satisfaisantes et qui n'ont été faites qu'à titre d'essai. J'employais, en effet, un mécanisme d'horlogerie très-imparfait ou le mécanisme de Froment dirigé à la main, sans poids moteur ni frein; d'ailleurs le nombre des déterminations ainsi répétées s'élève à peine à cinquante, dont la moitié ne correspondent qu'à l'extinction du premier ordre; de plus leur moyenne (301 000 kilomètres) est si rapprochée de la moyenne définitive (298500) qu'il serait assez indifférent de les faire entrer en ligne de compte ou de les supprimer. Je les supprime pour simplifier, et je ne conserve que les déterminations portant annotations *assez bon, bon, très-bon, excellent,* et faites depuis que les appareils fonctionnent régulièrement; elles sont groupées par séries partielles d'observations désignées par le numéro de la feuille de tracés; chaque série ne comprend que la moyenne des pointés; les valeurs de chacun des pointés allongeraient inutilement les tableaux; il n'y aurait d'ailleurs aucun intérêt à les considérer isolément, car ils doivent être groupés pour éliminer les erreurs signalées au n° **32**.

45. Voici le résumé de toutes les observations :

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

NUMÉRO de la feuille	DATE des observations.	DÉSIGNATION du mécanisme	ROUE DENTEE — SENS de la vitesse de rotation	ROUE DENTEE — NOMBRE de dents	ROUE DENTEE — NOMBRE de tours pour un signal	NATURE de la lumière	FACTEUR DNm	EXTINCTION. — ORDRE n	EXTINCTION. — $2n-1$	FACTEUR $\frac{DNm}{2n-1}$	VITESSE du mécanisme relevée sur les tracés 4μ	VALEUR conclue de la vitesse V	POIDS	DÉTAIL DU POIDS — NOMBRE d'observations	DÉTAIL DU POIDS — $2n-1$	DÉTAIL DU POIDS — ANNOTATION
	1872															
7	7 août	M C	↖	116	120	Petrole.	143,515	3	5	28703	10,385	298100	270	22	5	3
8	7 août	Id.	Id.	116	120	"	143,515	3	5	28703	10,386	298100	690	46	5	3
9	10 août	Id	Id	104	120	Soleil	128,669	4	7	18381	15,825	290900	28	4	7	1
						Soleil	"	5	9	14297	20,695	295900	153	17	9	1
10	10 août.	Id	Id	104	120	Drummond	128,669	2	3	42889	6,962	298600	30	5	3	2
				"	"	"	"	3	5	25734	11,618	299000	80	8	5	2
				"	"	"	"	4	7	18381	16,056	295100	238	17	7	2
				"	"	"	"	5	9	14297	21,042	300800	342	19	9	2
11	10 août	Id.	Id	104	120	Drummond.	128,669	3	5	25734	11,350	292000	195	13	5	3
						"	"	4	7	18381	16,040	294800	420	20	7	3
						"	"	5	9	14297	20,803	297400	810	30	9	3
						"	"	6	11	11697	24,830	290400	132	4	11	3
11 *bis.*		M R		104	$\frac{1200}{7}$	Petrole.	183,812	3	5	36762	8,040	295600	25	5	5	1
						"	"	4	7	26259	11,240	295100	28	4	7	1
12	23 août	M C	↖	140	120	Drummond	160,836	4	7	24744	11,990	296700	105	5	7	3
						"	"	5	9	19245	15,447	297200	243	9	9	3
						"	"	6	11	15746	19,022	299500	693	21	11	3
13	23 août	M. F.	↗	500	100	Drummond	515,500	2	3	171833	1,714	299700 (*)	36	6	3	2
						"	"	3	5	103100	2,931	302200 (*)	80	8	5	2
						"	"	4	7	73643	4,071	299800 (*)	140	10	7	2
						"	"	5	9	57278	5,198	297700 (*)	90	5	9	2
14	23 août	M F	↖	500	100	Drummond	515,500	2	3	171833	1,788	307200 (*)	36	6	3	2
						"		3	5	103100	2,896	298600 (*)	60	6	5	2
						"		4	7	73643	4,028	296600 (*)	140	10	7	2
						"		5	9	57278	5,123	293400 (*)	112	8	7	2

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

				"	"	"	"	5	9	14297	20,784	297100	486	18	9	3
16	26 août	Id		104	120	Pétrole	128669	4	7	18381	16,293	299500	693	33	7	3
						"		5	9	14297	20,938	299400	1080	40	9	3
17	27 août	Id		104	120	Drummond.	128669	3	5	25734	11,720	301600	60	4	5	3
			"	"	"	"	"	4	7	18381	16,318	299900	162	12	7	3
			"	"	"	"	"	5	9	14297	20,835	297900	567	21	9	3
				"	"	"	"	4	7	18381	16,235	298400	504	24	7	3
			"	"	"	"	"	5	9	14297	21,306	304600	189	7	9	3
18	27 août	M P		360	100	Drummond.	371160	5	9	41240	7,340	302700	27	3	9	1
			"	"	"	"	"	7	13	28551	10,550	301200	65	5	13	1
				"	"	"	"	4	7	53023	5,700	302200	28	4	7	1
			"	"	"	"	"	7	13	28551	10,510	300100	195	15	13	1
19	29 août	M R		116	120	Drummond	143515	2	3	47838	6,361	304300	21	7	3	1
			"	"	"	"	"	3	5	28703	10,460	300200	110	11	5	2
			"	"	"	"	"	4	7	20502	14,758	302600	238	17	7	2
				"	"	"	"	3	5	28703	10,606	304400	35	7	5	1
			"	"	"	"	"	4	7	20502	14,663	300600	51	13	7	1
20	30 août	M R		116	120	Drummond.	143515	2	3	47838	6,380	305200	6	1	3	2
			"	"	"	"	"	3	5	28703	10,331	296500	220	11	5	4
			"	"	"	"	"	4	7	20502	14,612	299600	420	15	7	4
				"	"	"	"	3	5	28703	10,332	296600	240	12	5	4
			"	"	"	"	"	4	7	20502	14,630	299900	364	13	7	4
21	31 août	M R		140	120	Petrole.	160836	4	7	24744	12,340	305300	14	1	7	4
			"	"	"	"	"	5	9	19245	15,524	298800	126	7	9	2
				"	"	"	"	5	9	19245	15,714	302400	126	7	9	2
			"	"	"	"	"	4	7	24744	11,956	295800	105	5	7	3
			"	"	"	"	"	5	9	19245	15,445	297200	216	8	9	3
			"	"	"	"	"	6	11	15746	18,600	292900	99	3	11	3
				"	"	"	"	4	7	24744	12,202	301900	84	4	7	3
			"	"	"	"	"	5	9	19245	15,892	305800	216	8	9	3

(*) Les nombres marqués ainsi ont été obtenus par la première méthode d'observation (*voir* n° 31), tous les autres ont été obtenus par la seconde

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

DISCUSSION DES RÉSULTATS.

46. La moyenne générale et composée des 658 valeurs obtenues est égale à 298400 kilomètres à la seconde; si l'on ramène *au vide,* par multiplication par le facteur 1,0003, indice de réfraction de l'air par rapport au vide, on trouve que l'ensemble de mes expériences donne, pour la vitesse de propagation de la lumière dans le vide, le nombre

298500 kilomètres à la seconde.

Cette valeur est, comme on le voit, très-voisine de celle obtenue par Foucault à l'aide du miroir tournant (298000); on en déduit, pour la valeur de la parallaxe du Soleil, le nombre $8''{,}834$, en appliquant la formule (5) du n° **3.**

Il reste à chercher sur quelle approximation on peut compter. A cet effet, la meilleure méthode consiste à se rendre compte des causes d'erreurs possibles, puis à classer toutes les valeurs obtenues par catégories, de façon à mettre en évidence les influences que les moyennes ont pour but d'éliminer.

Causes d'erreur du résultat.

47. Les mesures à effectuer dépendent de quatre éléments d'appréciation ou d'évaluation précise :

1° L'appréciation physiologique de l'apparition et de la disparition de la lumière de retour : il est difficile de savoir *a priori* entre quelles limites l'erreur probable est comprise ; c'est la multiplication des observations, et surtout la variété des circonstances jointes à l'emploi des méthodes d'élimination des *retards* indiquées précédemment (n° 32), qui permettent d'espérer une compensation de ces sortes d'erreurs.

2° Les relevés des tracés graphiques comportent une erreur relativement très-faible comparée aux précédents. La plupart des opérations consistaient à évaluer la position de traits bien définis qu'on appréciait à $\frac{1}{10}$ de milli-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

mètre en moyenne ; la seconde de temps était représentée par 9 millimètres environ, et l'intervalle à mesurer était toujours compris entre 2 et 4 secondes ; les relevés isolés ne comportent donc pas d'erreur supérieure à $\frac{1}{2}$ pour 100.

3° La valeur absolue du temps dépend de la précision avec laquelle est donnée la *seconde*. La pendule dont j'ai fait usage est très-bonne et a été bien souvent vérifiée depuis plus de quatre ans ; elle est à balancier compensé (laiton et acier), sa marche est régulière, elle avance de 8 à 12 secondes par jour : elle donne donc à $\frac{1}{10000}$ près la valeur exacte de la seconde sexagésimale de temps moyen; cette erreur est entièrement négligeable vis-à-vis des autres et spécialement vis-à-vis des erreurs physiologiques citées plus haut.

4° La valeur absolue de la distance, comme on l'a vu précédemment, paraît exacte à $\frac{1}{1000}$ près.

48. Telles sont les causes d'erreurs qui peuvent directement influencer les déterminations. On voit que la plus grave provient des pointés : aussi ai-je cherché à les multiplier, et c'est ce qui m'a conduit à faire entrer dans la moyenne toutes les valeurs obtenues dans les circonstances atmosphériques favorables et à varier, autant que possible, les appareils et les méthodes d'observations.

Remarque. — La valeur de la vitesse de la lumière à la surface de la Terre doit être influencée par le déplacement même de la Terre dans ses mouvements diurnes et annuels et par le mouvement d'entraînement de tout le système solaire : il y aurait donc lieu de se demander si ces causes perturbatrices peuvent avoir une influence appréciable sur les résultats qu'on tire de l'observation et de la vitesse apparente de la lumière.

Mais il n'y a pas à se préoccuper de cette correction, non-seulement parce qu'elle est très-petite en soi, mais parce que la disposition expérimentale du retour des rayons élimine rigoureusement ces erreurs.

C'est à M. Villarceau que je dois cette remarque importante au point de vue de la rigueur de la méthode expérimentale.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Classement des valeurs obtenues.

49. 1° *D'après l'ordre des extinctions.* — Le tableau suivant est destiné à faciliter cette discussion : toutes les valeurs sont transcrites dans la colonne qui correspond à leur ordre d'extinction, et sont accompagnées du nombre qui représente le *poids,* défini comme il a été dit plus haut. Chaque colonne a été subdivisée en deux, suivant le sens de la rotation ; mais nous n'aurons d'abord égard qu'à la moyenne composée de toutes les valeurs qu'elle renferme; ces résultats sont les suivants; ils sont exprimés en milliers de kilomètres :

	2e ordre.	3e ordre.	4e ordre.	5e ordre.	6e ordre.	7e ordre.
Valeur moyenne.....	302,5	297,7	298,2	298,8	297,5	300,5
Poids.....	(129)	(2095)	(4391)	(4783)	(924)	(260)

Moyenne générale composée..... 298,4

Écart avec la moyenne.	+4.1	—0,7	—0.2	+0,4	—0,9	+2,1
Écart relatif moyen....	+0,0137	—0,0023	—0,0006	+0,0013	—0,0030	+0,0070

Les écarts avec la moyenne sont très-faibles, excepté pour les ordres extrêmes où les expériences sont peu nombreuses ; on pourrait supprimer ces valeurs dans la moyenne sans que le résultat final en fût sensiblement affecté. En résumé, l'examen de ce classement est une garantie importante de l'exactitude du résultat.

L'écart moyen des quatre valeurs intermédiaires n'est d'ailleurs que de 0,5, c'est-à-dire $\frac{0,5}{300} = \frac{1}{600}$; l'erreur probable est donc certainement moindre.

Je considère ce premier mode de discussion comme le plus important : il assure de la validité même de la méthode, car le résultat de l'examen prouve que la loi des vitesses correspondant aux extinctions successives est bien celle des nombres impairs, point fondamental de la théorie du phénomène mesuré. En effet, s'il en était autrement, on trouverait, pour la vitesse de la lumière, un nombre qui varierait d'une manière continue avec l'élévation de l'ordre, tandis que les résultats ne signalent que des erreurs sans loi apparente, c'est-à-dire qu'on doit attribuer aux erreurs inévitables de l'observation.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

NUMÉRO de la feuille.	DEUXIÈME ORDRE. Sens de rotation.				TROISIÈME ORDRE. Sens de rotation.				QUATRIÈME ORDRE. Sens de rotation.				CINQUIÈME ORDRE. Sens de rotation.				SIXIÈME ORDRE. Sens de rotation.				SEPTIÈME ORDRE. Sens de rotation.			
	↗	POIDS.	↘	POIDS.	↗	POIDS.	↘	POIDS	↗	POIDS.	↘	POIDS.	↗	POIDS.	↘	POIDS.	↗	POIDS	↘	POIDS.	↗	POIDS.	↘	POIDS
7	.....	....	.....	....	.....	....	298,1	270	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....	. ..	.....	....
8	.....	....	.....	....	.....	....	298,1	690	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....	.. ..	....	.....	....
9	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....	290,9	28	.....	....	295,9	153	.....	....	.....	.. .	....	....	.....	....
10	.....	....	298,6	30	.....	....	299,0	80	.....	....	295,1	238	.....	....	300,8	3½	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....
11	.....	....	.....	....	.....	....	293,1	195	.....	....	294,8	420	.....	....	297,4	810	.....	....	290,1	132	.....	...	.....	....
11 bis	.....	....	.....	....	.....	....	295,6	25	.....	....	295,2	28	.....	....	.....	....	.....	....	....	693	.....	...	.....	....
12	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....	296,7	105	.....	....	297,2	243	.....	....	299,5	....	.....	....	.....	....
13	299,7	36	.....	....	302,2	80	.....	....	299,8	140	.....	....	297,7	90	.....	....	. ..	....	.....	....	.....	....	.....	....
14	.....	....	307,2	36	.....	....	298,6	60	.....	....	296,6	140	.....	....	293,4	112	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....
15	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....	296,4	105	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....
»	.....	....	.....	....	.....	....	302,4	30	.....	....	296,1	524	.....	....	297,2	486	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....
16	.....	....	. ...	....	.....	....	.....	....	299,5	693	.....	....	299,4	1080	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....
17	.....	....	.....	....	301,6	60	.....	....	299,9	162	298,4	504	297,9	567	304,6	189	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....
18	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....	302,2	28	302,7	27	.....	....	... .	....	.....	...	301,2	65	300,1	195
19	.....	....	304,3	21	304,4	35	300,2	110	300,6	51	302,6	238	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....
20	305,2	6	.....	....	296,5	230	296,6	240	299,6	420	299,9	364	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....
21	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....	305,3	14	302,4	126	298,8	126	.....	...	.....	....	.....	....	.....	....
.....	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....	295,8	105	301,9	84	297,2	216	305,8	216	292,9	99	.....	...	.....	....	.....	....
	300,5	42	303,5	87	299,1	395	297,4	1700	299,4	1571	297,5	2820	298,9	2106	298,8	3677	292,9	99	298,0	825	301,2	65	300,1	195
	302,5 (129)				297,7 (2095)				298,2 (4391)				298,8 (4783)				297,5 (974)				300,5 (260)			

	↗ POIDS.	↘ POIDS
Moyennes générales suivant les sens de rotation.....	299,0 4290	298,1 8320
Moyenne générale.....	298,4 (12610)	

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

2° *D'après les diverses roues dentées employées dans les expériences.* — J'ai employé six roues différentes :

Deux de 104 dents, de 20 millimètres de diamètre, très-légères, ayant une forme pointue et inclinée (roue à crochets) ; l'une d'elles appartient exclusivement au mécanisme réveil ;

Une de 116 dents, plus massive, de 26 millimètres de diamètre ; les dents sont à flancs droits ;

Une de 140 dents, de 21 millimètres de diamètre, excessivement légère (taillée dans des balanciers de grosses montres) ; ses dents sont pointues et à flancs droits.

Un disque d'aluminium de 360 dents, à dents pointues ;

Un disque de laiton, de 500 dents, à flancs droits.

Ces deux dernières roues sont spéciales au mécanisme Froment. Les autres se montent indifféremment sur le mécanisme carré ou sur le mécanisme à vitesse réversible.

Roue 104. (Réveil.)	Roue 104 dents.	Roue 116.	Roue 140.	Disque 360. (Moteur Froment.)	Disque 500. (Moteur Froment.)
295,4	298,1	298,7	299,2	300,8	298,5
(6)	(635)	(174)	(204)	(33)	(78)

Il paraît y avoir une tendance à l'augmentation de la valeur de la vitesse lorsque le nombre de dents augmente, mais cette tendance s'arrête pour la roue à la denture la plus nombreuse, celle de 500 : il est vrai que la méthode d'observation n'était pas la même dans ce dernier cas.

D'un autre côté, si l'on considère le peu d'importance du *poids* qui correspond aux écarts extrêmes, il reste bien peu de probabilité pour que cette cause d'erreur soit appréciable ; la moyenne de ces nombres est évidemment 298,4 ; les écarts avec cette moyenne sont respectivement :

1re roue 104.	3e roue 104.	Roue 116.	Roue 140.	Roue 360.	Roue 500.
—3,0	—0,3	+0,3	+0,8	+2,4	+0,1

L'écart moyen, en tenant compte du poids, est 0,5, c'est-à-dire le même que dans la discussion précédente ; on peut donc affirmer que la forme et le

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

nombre des dents n'introduisent pas d'erreurs systématiques supérieures aux erreurs accidentelles.

3° *D'après les divers mécanismes moteurs.* — Les valeurs moyennes correspondant à chaque mécanisme sont comprises dans le tableau suivant :

Mécanisme réveil.	Mécanisme carré.	Mécanisme réversible.	Mécanisme Froment.
295,4	297,6	299,0	299,2
(6)	(400)	(620)	(111)
—3,0	—0,8	+0,6	+0,8

Écarts avec la moyenne.. 298.4

L'écart moyen, en ayant égard aux poids, dépasse peu 0,6, de sorte qu'on retrouve encore l'approximation de $\frac{1}{500}$ déduite des autres modes de discussion.

4° *D'après le sens de la vitesse de rotation des roues dentées.* — J'avais craint, durant le cours des expériences, que les défauts inévitables de symétrie dans le réglage des rayons de lumière, relativement aux dents de la roue, n'introduisissent quelque erreur systématique; mais je crois qu'il n'en est rien et que les petites différences qu'on trouve suivant le sens de la rotation dépendent bien plutôt des frottements du mécanisme, c'est-à-dire de l'inégale facilité que tous les moteurs possèdent à tourner dans un sens ou dans l'autre. L'un des tableaux précédents montre qu'en effet

La rotation / donne pour valeur moyenne.....	299,0
	(4290)
La rotation \ » »	298,1
	(8203)

en y comprenant tous les mécanismes.

En attribuant une égale importance à ces deux résultats, la moyenne générale devient 298,55 avec un écart de 0,55.

L'approximation du $\frac{1}{500}$ s'impose donc encore comme précédemment.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

5° *D'après les méthodes d'observation.* — Les feuilles 13 et 14 fournissent les résultats de deux grandes séries faites avec la première méthode d'observation : ce sont les seules qui aient été relevées ; elles ont été exécutées avec le moteur Froment et la roue de 500 dents ; elles comprennent 59 pointés quadruples, de sorte que leur importance est notable.

La moyenne de ces valeurs est égale à 298,5 ; on peut donc affirmer l'identité des deux méthodes au point de vue du résultat final.

6° *D'après l'opinion de l'observateur.* — Le mécanisme réversible possédant tous les perfectionnements que j'ai ajoutés peu à peu me paraîtrait devoir fournir les valeurs les meilleures : j'étais donc disposé à considérer exclusivement la moyenne des résultats obtenus avec ce mécanisme, à savoir 299,0 ; mais la différence 0,6 ou $\frac{1}{500}$ avec la moyenne générale est trop faible pour que la seule considération d'une préférence, non basée sur des arguments numériques, devienne prédominante. Cette considération pourrait tout au plus indiquer le sens de l'erreur probable, en supposant éliminées toutes les erreurs constantes, ce que j'ai essayé d'obtenir en variant le plus possible l'expérience ; mais c'est cet argument même tiré de la nécessité de varier les conditions de mesure qui me fait abandonner la préférence que je serais tenté d'accorder aux résultats du mécanisme réversible : il y a donc lieu d'admettre encore ici la moyenne générale comme exacte à $\frac{1}{500}$ près.

En résumé, j'admettrai comme définitive la moyenne générale des 658 expériences, après l'avoir multipliée par l'indice de réfraction de l'air 1,0003. On obtient, pour la valeur de la vitesse de propagation de la lumière dans le vide,

298500 kilomètres par seconde.

L'erreur probable due aux pointés paraissant inférieure à $\frac{1}{500}$, l'erreur due à l'appréciation de la distance n'atteignant pas $\frac{1}{1000}$ dans l'hypothèse la plus défavorable où deux erreurs seraient dans le même sens, l'approxima-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

tion de la valeur précédente serait encore égale ou inférieure à $\frac{1}{300}$ en plus ou en moins.

En raison de l'importance de cette détermination, j'ai le plus grand désir de pousser plus loin encore l'approximation, et j'espère être en état bientôt de déterminer la valeur de la vitesse de la lumière à moins d'un millième de sa valeur.

LÉGENDE EXPLICATIVE

DE LA PLANCHE ANNEXÉE A CE MÉMOIRE.

Fig. 1. — Vue générale de l'appareil, prise en arrière de l'oculaire de la lunette d'émission L. La figure théorique représentée (*fig.* 6) porte les mêmes lettres : *o* oculaire de la lunette L; EDE′ oculaire éclaireur, à savoir : E lentille concentrant la lumière de la lampe P sur le diaphragme D, percé d'un très-petit trou (*voir* n° 24); F′ lentille concentrant l'image conjuguée de ce diaphragme au foyer R de la lunette d'émission L, après réflexion sur la double lame μ (n° 28).

M est le mécanisme qui met en mouvement la roue dentée R (détail *fig.* 3); les rayons lumineux peuvent se croiser sur la roue dentée, grâce à l'échancrure α des platines du mécanisme.

F est le frein représenté en détail (*fig.* 4); la vis ν sert à écarter l'extrémité *b* du levier qui frotte plus ou moins sur la jante de l'avant-dernier mobile *r* (*fig.* 3). Les vis de réglage de la lunette sont en V et V′; celle du mécanisme en s' : J est la clef électrique pour les signaux de l'observateur.

Fig. 2. — Petite lampe à huile servant à enfumer la denture de la roue R.

Fig. 3. — Détail du mécanisme : BB′ barillets servant à faire tourner le mécanisme dans les deux sens ; on utilise l'un d'eux en écartant le cliquet de l'autre.

Fig. 4. — Détail du frein ; le ressort antagoniste à la vis n'est pas figuré : c'est un simple anneau de caoutchouc qui presse le levier F sur la pointe de la vis ν (n° 13).

Fig. 5. — Cylindre enregistreur C; le chariot H porte les 3 électro-aimants munis de leurs tracelets; il glisse sur deux rails parallèles à l'axe du cylindre non figurés sur le

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

dessin et est entraîné par l'intermédiaire de deux poulies pp', à l'aide d'un cordon q s'enroule sur l'arbre moteur du cylindre; N est un moteur Foucault à ressort qui donne le mouvement à tout l'enregistreur.

Les communications électriques sont disposées ainsi : *l* fil de terre commun aux trois piles; *m* fil de la clef de Morse J (*fig.* 1); *n* fil du mécanisme; *s* fil de l'horloge donnant la seconde. Les trois fils correspondants portent les mêmes lettres sur la *fig.* 1.

Fig. 6. — Représentation théorique de la marche de la lumière dans l'oculaire éclaireur PEDE'μ, dans la lunette d'émission RL et dans le collimateur à réflexion I'C.

Fig. 7. — Détail du miroir du collimateur à réflexion (n° 18) : D disque argenté sur la moitié de la surface, placé au foyer commun de l'objectif et de l'oculaire positif O.

Fig. 8. — Disposition des cordons et poulies pour le renversement de la vitesse du moteur décrit n° 11.

Fig. 9. — Plaque transparente en corne servant à subdiviser l'intervalle de 2 secondes sur le tracé en 200 parties (note du n° 39). Pour mieux représenter la convergence de ces traits et gagner de l'espace sur le dessin, on a raccourci la longueur des traits au quart de leur longueur, sans altérer leurs distances mutuelles aux extrémités du faisceau.

Fig. 10. — *Fac-simile* du tracé graphique dont le relevé est donné dans le n° 39 : ce tracé correspond à la première méthode d'observation. La ligne supérieure $t_1 t_2 t_3 t_4$ représente les signaux du mécanisme; la deuxième ligne, le tracé des secondes, n°s 4, 6, 8, 10, 12, enfin la troisième les deux signaux *ab* de l'observateur, correspondant l'un à l'extinction, l'autre à la réapparition.

Fig. 11. — *Fac-simile* d'un tracé correspondant à la deuxième méthode d'observation. La première ligne représente les signaux du mécanisme; la deuxième le battement des secondes n°s 2, 4; la troisième, le signal conventionnel *ab* de l'observateur indiquant que la vitesse convenable (milieu de l'extinction) est atteinte. On relève le nombre de signaux de la première ligne correspondant à quatre secondes : c'est ce qui dans le n° 36 est désigné par 4μ; la *fig* 11 donne $4\mu = 20{,}3$: c'est une extinction du cinquième ordre; elle est empruntée à la feuille d'expériences n° 10.

Fig. 12. — Plan de la forteresse du Mont-Valérien : les numéros 1, 2 et 3 sont les saillants dont il est question aux n°s 40, 41, 42, 43. Les traits ponctués sont censés converger à la station opposée. La lettre *a* sert à désigner le bâtiment où était installé le collimateur.

(Extrait du *Journal de l'École Polytechnique*, XLIVe Cahier.)

1657 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Mémoire sur une détermination nouvelle de la vitesse de la lumière, par M. A. Cornu.

Fig. 5

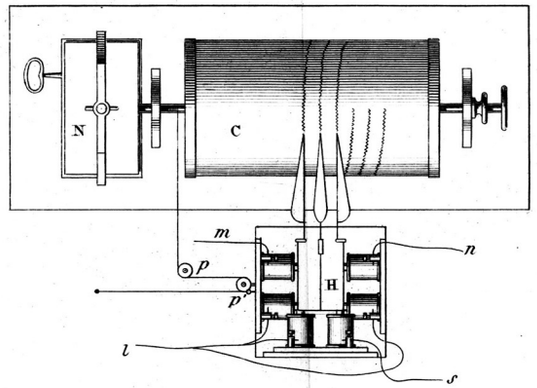


Fig. 6

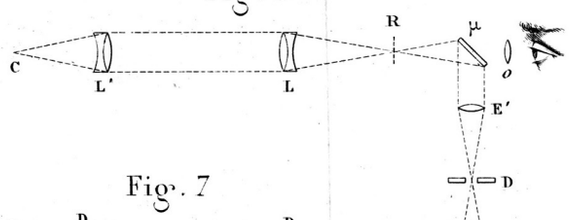


Fig. 7

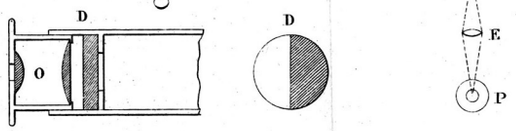


Fig. 8

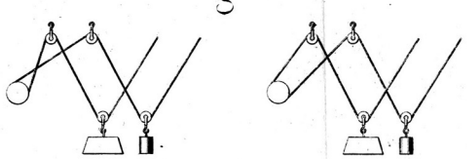


Fig. 9

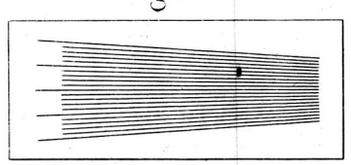


Fig. 2

Fig. 1

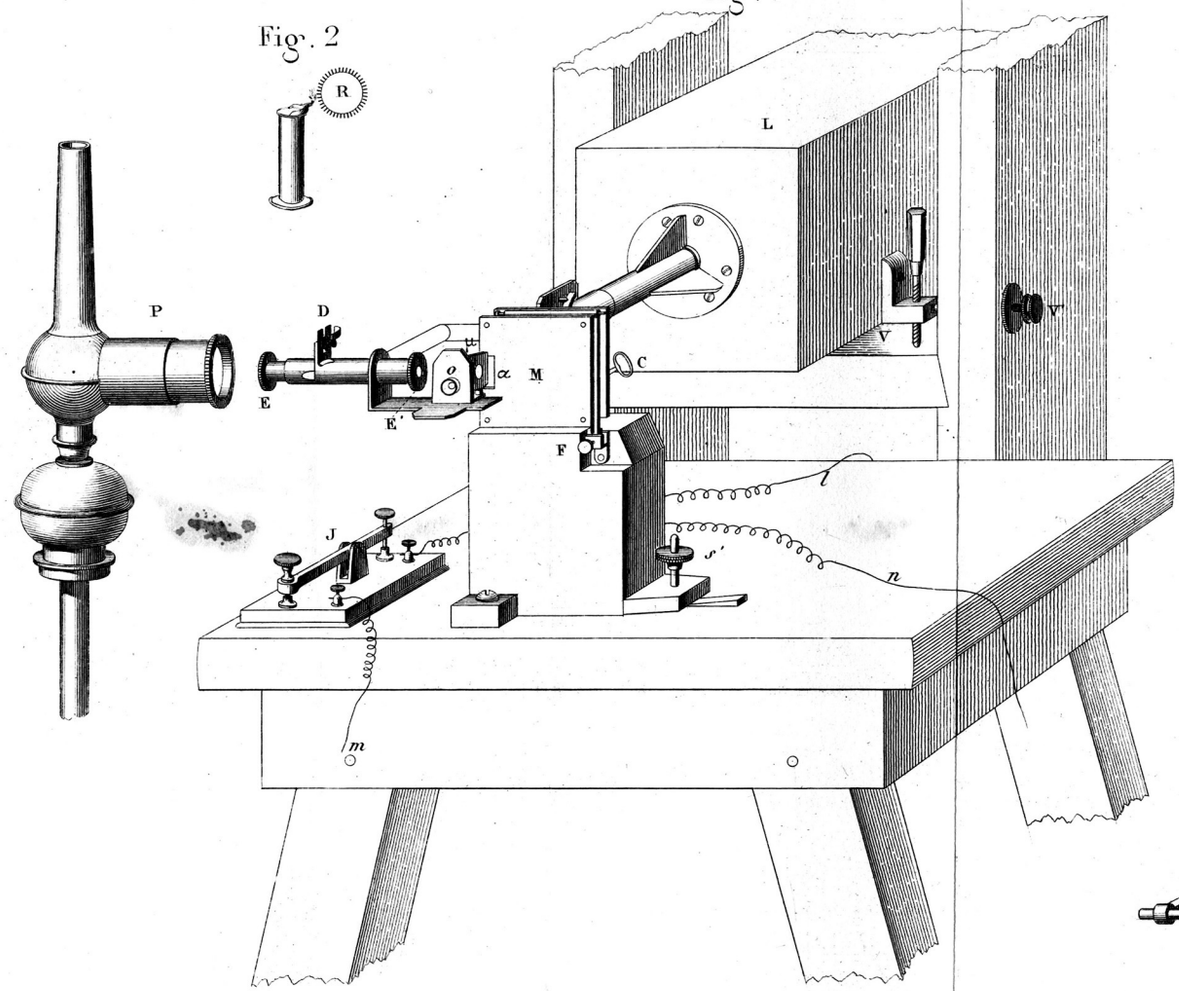


Fig. 10

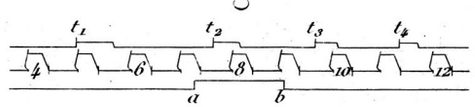


Fig. 11

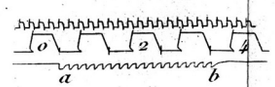


Fig. 12

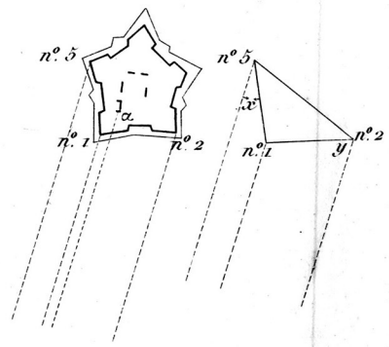


Fig. 3

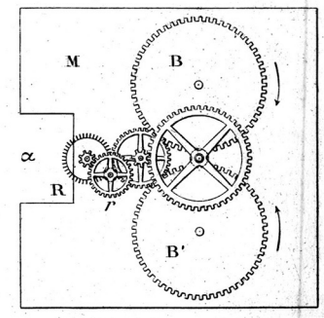
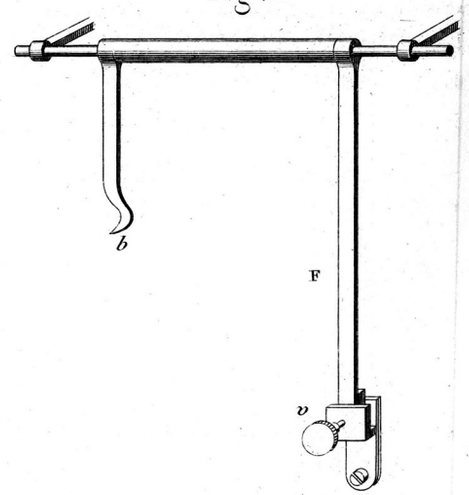


Fig. 4



Legay, imp. rue de la Bûcherie 1.

Gauthier-Villars, Libraire-Editeur, à Paris.

Legros sc.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ÉTUDE

DE

L'ABSORPTION ATMOSPHÉRIQUE DES RADIATIONS VISIBLES

PAR

L'OBSERVATION SPECTRALE DES FAISCEAUX ÉLECTRIQUES
DE LA TOUR EIFFEL EN 1889;

PAR M. A. CORNU.

Extrait du *Journal de l'École Polytechnique*, 2e Série. Cahier n° 7.

Il était naturel de penser que, dans une direction horizontale, l'atmosphère terrestre absorbait les mêmes radiations et produisait les mêmes raies spectrales, dites *telluriques*, qu'on observe dans le spectre solaire. L'existence de plusieurs groupes telluriques dans le spectre d'un faisceau électrique projeté de la Tour Eiffel sur l'observatoire de Meudon a été, en effet, signalée par M. Janssen (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CVIII, p. 1035) et présentée comme une démonstration de l'origine terrestre des groupes A et B, ainsi que de quelques bandes dues à la vapeur d'eau.

Je me suis proposé de relever minutieusement, sous une forte dispersion, la série des raies sombres observables dans le spectre des faisceaux électriques émis du haut de la tour, et de les comparer avec celles figurées dans les cartes spectrales que j'avais publiées antérieurement (1).

(1) *Sur les raies telluriques qu'on observe dans le spectre solaire au voisinage des*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

C'était, en outre, une vérification directe et précieuse de la méthode du *balancement des raies* qui m'avait conduit à distinguer individuellement les raies d'origine solaire et celles d'origine terrestre, dans les groupes de raies les plus compliqués du spectre solaire.

L'étude a été entreprise à l'École Polytechnique, dans le local et avec les appareils qui m'avaient servi aux recherches de spectroscopie solaire. Cette étude, commencée le 24 octobre 1889, en utilisant, d'abord simplement, la lumière du phare à éclats du sommet de la tour, fut poursuivie avec le faisceau d'un des projecteurs de 90^{cm} de MM. Sautter et Lemonnier, que M. Eiffel eut l'amabilité de faire diriger de 8^{h} à 10^{h} sur l'École Polytechnique, du 27 octobre au 6 novembre, jour de la clôture de l'Exposition universelle de 1889 et de l'extinction des projecteurs. La distance de la tour à l'École relevée sur un plan de Paris au $\frac{1}{12500}$ est d'environ 4350^{m}.

L'agent chargé du projecteur reconnaissait immédiatement le point de l'horizon vers lequel il devait diriger et maintenir le faisceau. A cet effet, j'avais disposé, à demeure, près de la fenêtre de la mansarde du Pavillon des élèves où étaient installés mes appareils, une grande lentille de 23^{cm} de diamètre et de 45^{cm} de distance focale : elle avait été réglée, de jour, par la condition d'amener l'image focale de la galerie supérieure de la tour dans le plan moyen de la flamme d'une lampe modérateur qu'on allumait au crépuscule, ce qui permettait de vérifier le réglage.

La réciprocité des foyers conjugués de la lentille assurait l'envoi d'un faisceau de lumière qui couvrait toute la galerie où les projecteurs étaient en batterie; l'agent préposé à leur manœuvre apercevait dans la direction demandée un disque extrêmement brillant, impossible à confondre avec les points scintillants de l'horizon. Un verre rouge interposé près de la flamme rendait la distinction encore plus facile.

---

raies D (*Journal de l'École Polytechnique*, LIIIe Cahier, p. 175-212; 1883). — *Étude des bandes telluriques* α, B *et* A *du spectre solaire* (*Annales de Chimie et de Physique*, 6e série, t. VII, p. 5-102; 1886). Ces planches sont reproduites à la fin du présent Mémoire.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

J'ai employé, suivant les circonstances, quatre spectroscopes de dispersion croissante :

1° Un spectroscope à vision directe de Duboscq avec échelle latérale;

2° Un goniomètre Brunner, muni de deux prismes de quartz et d'objectifs quartz-fluorine de 50^{cm} de distance focale pour la photographie des spectres;

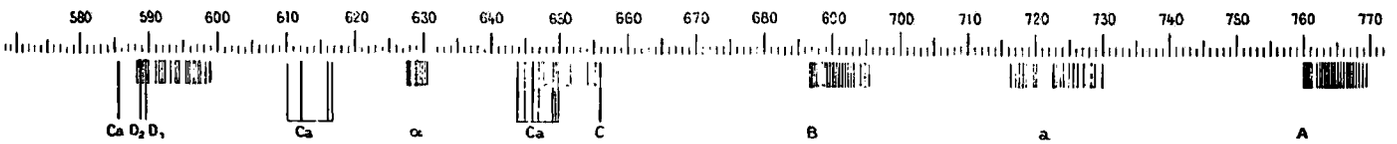
3° Le même goniomètre muni d'un prisme de flint et d'objectifs crown et flint de 45^{cm} de distance focale;

4° Enfin un grand réseau plan de Rowland observé avec un collimateur de 1^{m} et une lunette de 1^{m},40.

La fente du collimateur était éclairée par l'image du projecteur de la tour concentrée par un objectif astronomique de 16^{cm} de diamètre et de 2^{m},30 de distance focale.

Les résultats répondirent entièrement à mon attente; pendant les soirées favorables, je pus faire une étude complète des groupes telluriques A, *a*, B et D, d'abord avec une dispersion moyenne; mais ce qui m'importait surtout, c'était de pouvoir utiliser la grande dispersion du spectre de deuxième ordre du réseau Rowland; j'y suis parvenu plusieurs fois, ainsi que le témoigne le résumé donné plus loin des résultats obtenus dans chaque soirée (*fig.* 1).

Fig. 1.



J'aurais désiré relever au micromètre toutes les raies sombres visibles avec cette grande dispersion; malheureusement le ciel s'embruma progressivement; la pluie et le brouillard augmentèrent de plus en plus; je ne pus donc réaliser qu'imparfaitement cette partie de mon programme, les pointés devenant chaque jour plus difficiles et plus pénibles, faute d'intensité lumineuse.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Par bonheur, ce long travail est devenu en grande partie inutile, grâce à la configuration caractéristique des groupes qui reproduisaient exactement ceux de mes Cartes, de sorte qu'un petit nombre de pointés ont suffi pour assurer leur identification complète; c'était, en définitive, le but que je m'étais proposé.

Résumé des résultats obtenus.

J'extrais du carnet d'observations les principaux résultats de chaque soirée. Les longueurs d'onde sont celles qui figurent sur les Cartes qu'on trouvera à la fin du présent Mémoire :

24, 25 et 26 *octobre* 1889. — Premiers essais avec le spectroscope Duboscq à vision directe : une petite lentille collectrice, puis l'objectif de 16^{cm} projettent l'image linéaire du phare de la tour sur la fente.

Reconnu et relevé diverses raies brillantes des vapeurs métalliques de l'arc électrique (sodium, calcium, magnésium), ainsi que plusieurs raies sombres, sur le spectre continu des charbons dans la région rouge du spectre.

La comparaison de ces relevés avec ceux effectués dans la journée du 27, avec la lumière solaire, montre que les raies sombres représentent A, a et B (A et B sont dues à l'absorption par l'oxygène de l'air; a par la vapeur d'eau).

27 *octobre*. — Reçu le faisceau du projecteur de 90^{cm} : éclat admirable. On lit facilement un journal à la lumière venue du projecteur.

Spectre brillant. Lentille collectrice de 50^{cm} de foyer. Observé beaucoup de détails sur A, a, B, sur les raies aqueuses, près de C et de D, laquelle est double et renversée. Improvisé un essai avec le réseau Rowland. Aperçu les cannelures de B.

26 *octobre*. — Goniomètre Brunner. Prisme de flint (60°). Objectif de 16^{cm} pour concentrer l'image du projecteur sur la fente. Relevé, sur le cercle divisé, les principales raies dans les groupes A, a, B et quelques raies aqueuses voisines de D; en outre, plusieurs lignes brillantes du calcium.

L'éclat du faisceau devient assez grand pour utiliser le spectroscope Rowland. Les deux raies D (vapeur de sodium) sont magnifiques, même au deuxième spectre; elles sont renversées au milieu de leur longueur et brillantes aux extrémités. Dans leur voisinage toutes les raies aqueuses de ma carte s'y trouvent (les lignes métalliques solaires seules, naturellement, font défaut) : je les suis une à une dans le premier spectre.

Je puis suivre de même en détail la structure du groupe B jusqu'au huitième doublet; au delà l'intensité lumineuse est trop faible. (*Voir* la *Pl. II.*)

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

J'avais d'abord songé à relever toutes ces raies au micromètre; mais leur disposition m'est si connue et la concordance avec ma carte si parfaite, que je ne crois pas utile de me fatiguer la vue à faire ces pointés.

Le groupe α (dû à l'oxygène) est faible; il est surtout altéré dans son aspect ordinaire par l'intensité des raies aqueuses qu'il contient; toutefois, il est reconnaissable; je puis suivre aussi les groupes de raies aqueuses situées entre B et C, que j'ai marquées comme telles sur l'Atlas de Fievez.

30 *octobre*. — L'éclat du projecteur est très vif. Le groupe B est admirable dans le deuxième spectre. Je vois au moins jusqu'au onzième doublet et les raies aqueuses qui suivent, en particulier la raie très forte $\lambda = 695,58$. Vérification des raies aqueuses, près de C. Passé toute la soirée à préciser l'identification du groupe α très faible et altéré par la prédominance des raies aqueuses. En partant, je laisse le fil du micromètre sur l'une des raies caractéristiques de α : le lendemain à $2^h 50^m$ de l'après-midi, je constate, avec le soleil, que c'est bien la raie $\lambda = 627,68$ de α.

Pendant toute la soirée du 30 octobre, l'intensité de la lumière était si grande que, sans m'en apercevoir, j'ai observé constamment dans le deuxième spectre. La dispersion était si nette que dans le groupe voisin de D j'ai dédoublé la raie aqueuse $\lambda = 592,26$. (*Voir* la *Pl. I.*)

31 *octobre*. — Le ciel s'éclaircit; l'air se refroidit et s'embrume, l'éclat est moins vif qu'hier. On poussa l'amabilité jusqu'à m'envoyer simultanément les faisceaux des deux projecteurs; mais je n'en puis utiliser qu'un seul, leur écart angulaire étant trop grand. Les raies aqueuses sont beaucoup moins marquées; les deux raies D en sont presque dépouillées. En revanche, le groupe α devient beaucoup mieux reconnaissable. Le groupe B est très peu visible, aussi bien au premier qu'au deuxième spectre. Malgré la brume qui augmente, les raies violettes HK sont visibles et même la bande ultra-violette du carbone, avec le goniomètre Brunner. La fumée de l'usine électrique de la place du Panthéon gêne beaucoup.

2 *novembre*. — Belle soirée. Addition d'un tube de Geissler à hydrogène, pour produire la raie C comme repère dans le champ du spectroscope Rowland. Vérification des groupes aqueux dans le voisinage de C, par comparaison avec cette raie et les raies brillantes du calcium.

Très bien vu le groupe α; l'éclat du champ est assez vif pour montrer jusqu'au quatrième doublet de α et permettre d'effectuer des pointés. Mesuré la distance de la forte raie $\lambda = 627,68$ (oxygène) et de la raie aqueuse $\lambda = 629,14$, située au milieu du deuxième doublet de α : deux mesures ont donné $3^t,10$ et $3^t,11$ au micromètre à fil; le 4 novembre, la même mesure, effectuée avec la lumière solaire, a donné $3^t,105$; l'identification est donc parfaite.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Le groupe aqueux de D est admirable; c'est exactement ma carte (*Pl. I*); je dédouble 592,26.

3 *novembre*. — Soirée pluvieuse; néanmoins la lumière est assez vive. Essai de photographie de la partie réfrangible du spectre. Goniomètre Brunner. Lentille collectrice en quartz-fluorine. Double prisme de quartz au minimum de déviation sur la raie violette 423 du calcium. Obtenu 10 spectres violets et ultra-violets sur quatre plaques à la gélatine. Poses variant de cinq secondes à deux minutes. Aucune bande tellurique. On ne voit que le spectre continu des charbons, les deux bandes cannelées brillantes du carbone, les raies brillantes H et K du calcium, H′, K′ de l'aluminium et quelques autres. Contrairement à ce que l'on aurait pu croire d'après l'état météorologique, le spectre ultra-violet est assez étendu et ne paraît limité à la longueur d'onde $\lambda = 329$ que par l'absorption des glaces fermant l'ouverture du projecteur et par le défaut de réflexion ultra-violette du miroir concave en verre argenté.

4 *novembre*. — Un peu de brume et de fumée de l'usine du Panthéon. Les raies aqueuses voisines de D sont redevenues bien visibles. Pointés micrométriques d'identification. Vérifié l'existence de la raie aqueuse $\lambda = 588,27$, qui double presque une raie du fer sur ma carte et que le balancement de cette dernière découvre nettement.

Bien vu le groupe α, mais rien de plus que précédemment; le groupe B est très beau, en ouvrant la fente. Aperçu la raie aqueuse $\lambda = 692,57$, entre le dixième et le onzième doublet et celles qui empâtent le onzième, à savoir: $\lambda = 692,81$, 692,83 et 692,89.

5 *novembre*. — Pluie toute la journée; brouillard le soir; le faisceau présente une couleur très jaune. Néanmoins, la région rouge du spectre est assez brillante pour que j'aie pu faire une assez longue série de pointés entre B et C.

Les trente-quatre pointés micrométriques ont été réduits en longueurs d'onde en prenant comme repère la raie C ($\lambda = 656,18$), empruntée au tube de Geissler, et une raie brillante du calcium (643,81); six autres raies brillantes du calcium ont été identifiées avec les raies métalliques solaires et les autres raies sombres avec celles que j'avais marquées comme telluriques sur la planche de l'Atlas de Fievez et sur une carte inédite que j'ai construite autrefois avec le concours de M. Obrecht.

6 *novembre*. — Soirée brumeuse. Lumière pâle et jaune; raies aqueuses très effacées. Elles l'étaient déjà à 2^h de l'après-midi. Aucune observation utile.

Après la clôture de ces soirées d'observations, j'ai demandé au Bureau central météorologique les données recueillies au sommet de la tour se rapportant à l'état de l'atmosphère du 28 octobre au 6 novembre.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Les variations de température et d'humidité sont trop faibles pour intervenir utilement dans la discussion de la visibilité des raies spectrales : la direction et l'intensité du vent paraissent avoir exercé plus d'influence.

Voici les chiffres qui m'ont été transmis :

Date.			Température.	Tension de vapeur.	Vent	
					Direction.	Vitesse.
			°	mm		m
1889	Octobre	28...	11,0	7,1	SSW	7,8
	»	29...	9,8	7,4	SSW	10,3
	»	30...	10,5	7,3	SSW	12,3
	»	31...	7,0	4,9	WNW	1,8
	Novembre	1...	7,1	6,1	WNW	7,0
	»	2...	7,0	5,5	W	9,3
	»	3...	9,0	8,6	SW	20,0
	»	4...	8,9	7,7	SW	2
	»	5...	6,6	5,6	NNE	9,8
	»	6...	7,2	5,9	NNE	7,7

En résumé, les raies aqueuses ont été tantôt plus visibles, tantôt moins visibles que celles de l'atmosphère sèche (bandes A, B, α) : la variation de l'humidité de l'air et la direction du vent expliquent naturellement cet effet.

Les raies de l'atmosphère sèche ont toujours été moins marquées que dans le spectre solaire : cela tient à la faible distance (4350^m) parcourue par le faisceau lumineux comparée à celle que parcourt le faisceau solaire, l'astre étant même supposé au zénith. Il est, en effet, facile de montrer que la masse absorbante des 4350^m n'est guère plus de moitié de celle contenue dans une colonne de même base s'élevant verticalement jusqu'aux confins de l'atmosphère. Le poids de l'atmosphère sur 1^{mq} est, comme on sait, égal au poids d'une masse de mercure de même base ayant 76^{cm} de hauteur, c'est-à-dire $0,76 \times 13\,596^{kg} = 10\,333^{kg}$. Le mètre cube d'air à la surface du globe pesant $1^{kg},293$ la hauteur verticale d'une colonne d'air de densité uniforme serait de $\frac{10333}{1,293} = 7\,991^m$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La colonne horizontale de $4\,350^{m}$ ayant même base, contient donc une masse d'air plus petite dans le rapport de $4\,350$ à $7\,991$, c'est-à-dire de 1 à $0{,}544$, rapport un peu plus grand que $\frac{1}{2}$. Il n'est donc pas étonnant de voir les raies des bandes A, B, α relativement moins sombres que dans les observations solaires où l'astre est voisin du zénith et, à plus forte raison, voisin de l'horizon.

CONCLUSION.

Il résulte des observations spectrales résumées ci-dessus que près de deux cents raies sombres, produites par l'absorption atmosphérique des radiations d'une source de lumière terrestre, ont été identifiées individuellement avec les raies dites *telluriques* observées dans le spectre solaire. L'origine atmosphérique de ces raies est donc surabondamment vérifiée.

Les *Pl. I* et *II* sont la reproduction de celles des deux Mémoires cités plus haut, p. 1.

La première comprend les raies aqueuses voisines des raies D_1, D_2 du spectre solaire.

L'échelle est celle des longueurs d'onde exprimées en millionièmes de millimètre : les valeurs des longueurs d'onde ont été déduites de la raie D_2, $\lambda = 588{,}89$, que j'avais adoptée comme base des déterminations en 1883; aussi les longueurs d'onde citées dans la présente étude diffèrent-elles un peu de celles qu'on trouve dans la Table de Rowland généralement adoptées aujourd'hui; mais l'identification est facile, car la différence est sensiblement constante : il suffit d'ajouter $0{,}14$ aux chiffres de la planche pour retrouver ceux du savant américain.

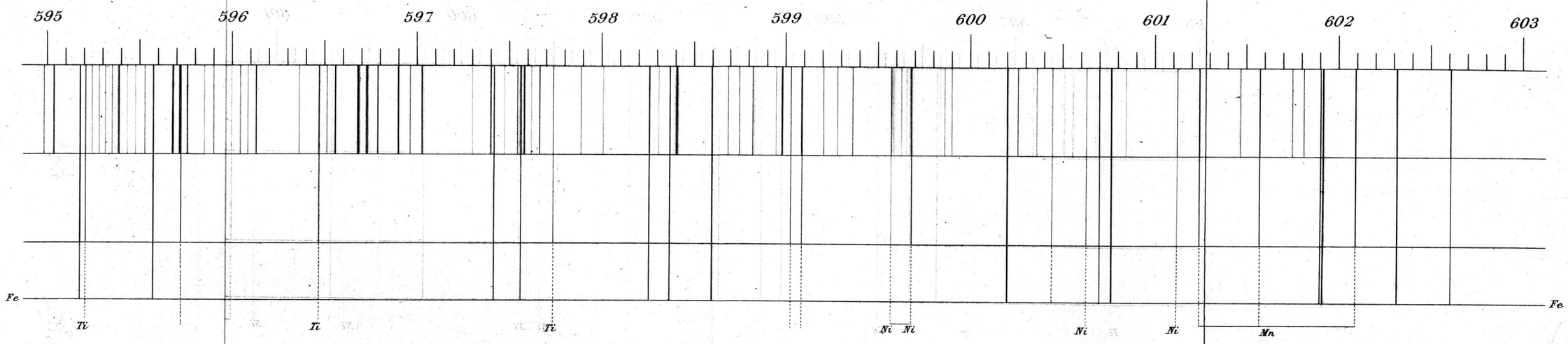
Quelques retouches ont été faites dans le nouveau tirage pour mettre le spectre d'accord avec les observations que j'ai faites depuis 1883 avec une dispersion plus grande et une définition plus précise.

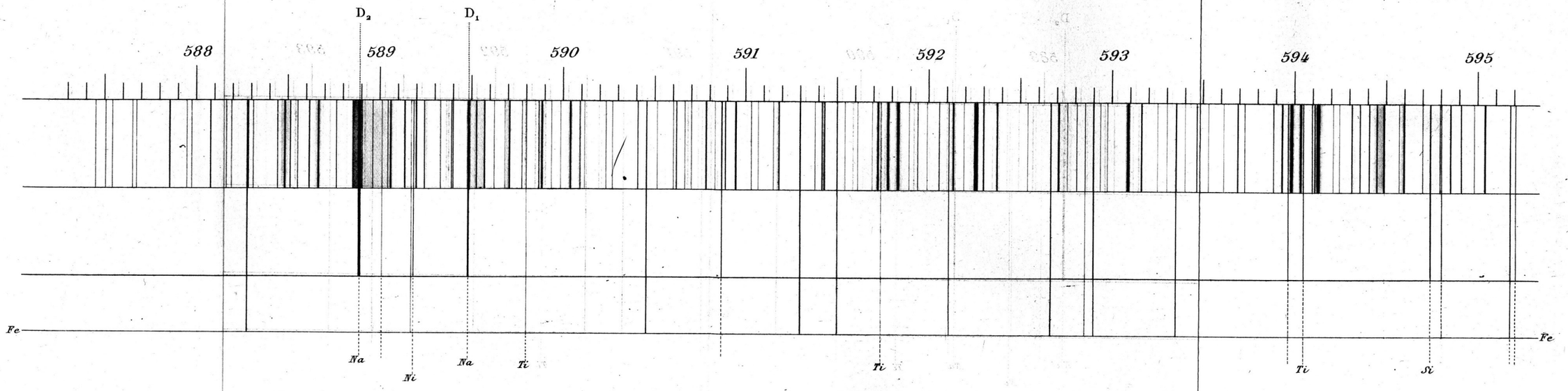
La *Pl. II*, représentant les groupes A, B, α, n'a pas été modifiée.

30938 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Raies telluriques voisines des raies $D_1 D_2$, par M. A. Cornu.





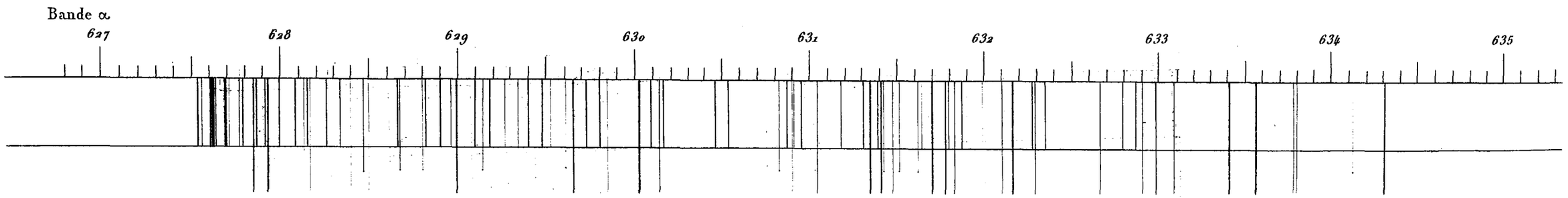
A. Cornu del.

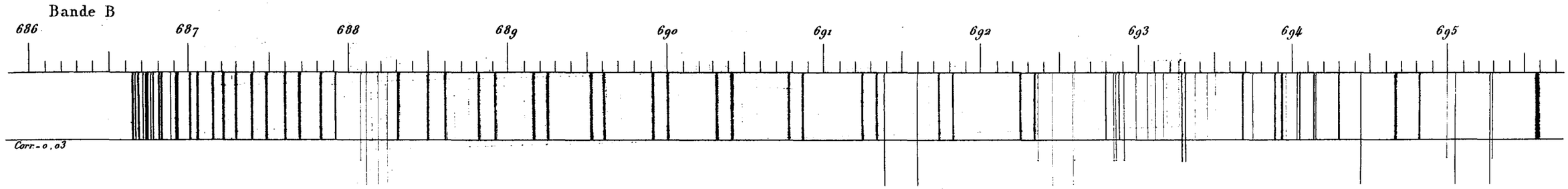
C. Legros sc.

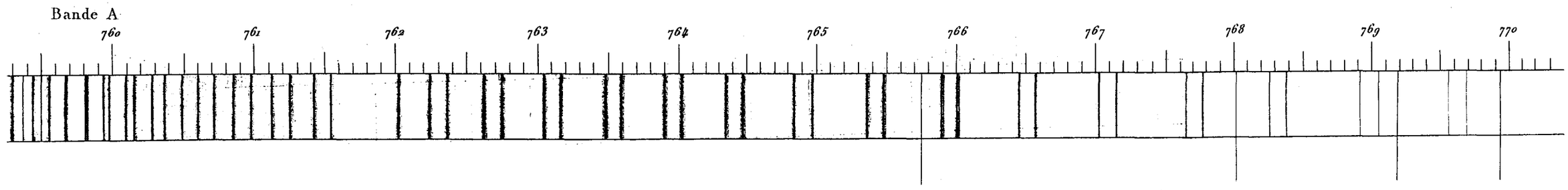
Gauthier-Villars, Editeur

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Etude des bandes telluriques α, B et A du spectre solaire, par M. A. Cornu.







A. Cornu del.

Gauthier-Villars, Editeur.

Blanadet sc.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

RECUEIL

DE

MÉMOIRES, RAPPORTS

ET DOCUMENTS

RELATIFS A L'OBSERVATION

DU

PASSAGE DE VÉNUS SUR LE SOLEIL

PARIS

TYPOGRAPHIE DE FIRMIN DIDOT FRÈRES, FILS ET Cie

IMPRIMEURS DE L'INSTITUT DE FRANCE, RUE JACOB, 56

M DCCC LXXIV

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

NOTE

SUR

LA TRANSFORMATION DE L'ACHROMATISME OPTIQUE

DES OBJECTIFS

EN ACHROMATISME PHOTOGRAPHIQUE

PAR

M. A. CORNU.

(Note présentée à la Commission du passage de Vénus, dans la séance du 25 janvier 1873 (1).)

Le problème que je me suis proposé et que je crois avoir résolu est le suivant :

Étant donnée une lunette astronomique achromatisée pour la vision, l'appliquer à la production d'images photographiques

---

(1) La méthode qui fait l'objet de cette Note avait déjà été signalée à la Commission par M. Fizeau, au nom de M. Cornu, dans la séance du 7 décembre 1872, comme l'indique le passage suivant du procès-verbal de cette séance :

« M. Fizeau expose les recherches auxquelles il s'est livré, et entre autres celles qui sont relatives aux objectifs achromatiques. Il s'est adressé à

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'une perfection comparable à celle des images optiques, sans aucune modification coûteuse ou qui la rende ultérieurement impropre à sa première destination.

Il est bon de rappeler que toutes les lunettes astronomiques d'ouverture angulaire petite, c'est-à-dire inférieure à $\frac{1}{12}$ ou $\frac{1}{15}$, sont susceptibles de produire des images photographiques d'une netteté très-satisfaisante pour une foule d'usages.

Il suffit, comme l'ont indiqué il y a bientôt trente ans MM. Fizeau et Foucault, de rechercher ce foyer chimique, généralement situé en arrière du foyer optique, à une petite fraction de la distance focale principale.

Je citerai, parmi les vérifications de cette règle pratique, outre mes observations sur trois lunettes de petites dimensions ($42^{cent.}$ 82 et $1^{m}10$ de distance focale), l'exemple du grand équatorial de l'Observatoire de Cadix construit récemment par MM. Brunner. L'objectif, de $30^{cent.}$ d'ouverture et de 5 mètres de distance focale, a fourni immédiatement des épreuves photographiques de la Lune, assez parfaites pour que M. Rutherfurd ait félicité MM. Brunner de ce résultat obtenu avec leur instrument par M. Pujazon, directeur de l'Observatoire de Cadix.

M. A. Cornu, professeur à l'École polytechnique, qui, par la théorie, est parvenu à obtenir l'achromatisme des objectifs, au moyen de calculs dont l'application est certaine. Il peut transformer une lunette quelconque en une lunette photographique, par une disposition rationnelle dont il donne la formule. M. Fizeau prend acte de ce fait au procès-verbal de la Commission. Il rendra compte plus tard du procédé de M. Cornu. Cette méthode permettra de corriger les erreurs de lunettes, qui ont parfois des changements de foyer de $0^{m}02$ à $0^{m}03$. Il y aura quelques difficultés de placement des miroirs; mais on peut se regarder, dès à présent, comme certain de réussir. »

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Ainsi les lunettes astronomiques réglées pour la vision peuvent déjà servir, lorsqu'on prend soin de rechercher attentivement le foyer chimique, à la production d'images photographiques relativement bonnes. Toutefois, lorsqu'on applique un fort grossissement aux clichés photographiques obtenus au foyer chimique de ces objectifs, on reconnaît que leur finesse est loin de valoir celle des images optiques; le défaut de netteté tient évidemment à ce que les radiations les plus réfrangibles, visibles et invisibles (ultra-violettes), ne forment pas toutes leur foyer dans un même plan, comme cela a lieu sensiblement pour les rayons visibles. Dans la pratique de la construction des objectifs photographiques, les opticiens arrivent à un achromatisme qu'ils appellent *bleu* et qui satisfait assez bien aux exigences de la photographie, mais ils n'ont aucune règle précise et n'arrivent qu'à des résultats incertains.

Depuis, M. Rutherfurd, en Amérique, a résolu le problème de l'achromatisme chimique des lunettes : il commença par modifier la courbure des verres des objectifs de façon à sacrifier l'achromatisme optique à l'achromatisme photographique.

Pour écarter ce grave inconvénient, de rendre un objectif impropre aux observations ordinaires, M. Rutherfurd employa un second moyen, qui consiste à ajouter une troisième lentille de flint, de courbures spéciales, étudiées de façon à corriger l'aberration chromatique des rayons chimiques.

Cette seconde solution a donné à son auteur de très-beaux résultats, spécialement pour la photographie de la Lune : mais elle exige l'addition d'une troisième lentille qui

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

doit avoir, comme pureté de matière et comme taille des surfaces, la même perfection que les deux autres : c'est donc une modification coûteuse, exigeant une matière très-belle, des essais ou des calculs longs et difficiles.

Je crois qu'on peut résoudre le problème d'une manière beaucoup plus simple et beaucoup moins dispendieuse. Sans entrer ici dans aucune des considérations théoriques, ni dans le détail des expériences qui m'ont conduit à cette solution, et que je compte développer dans un Mémoire spécial, je me contenterai de donner ici les conditions pratiques propres à en assurer le succès.

Étant donné un objectif achromatique qu'on veut employer à la production d'images photographiques aussi parfaites que possible, on commencera par déterminer son foyer chimique le *meilleur*, c'est-à-dire le plus *net*. On est assuré, à cause du peu de différence des verres employés en optique, de le trouver en arrière du foyer optique (le flint étant en dedans) à une distance égale à environ un demi pour cent de la distance focale principale.

On corrigera l'aberration chromatique des rayons chimiques en séparant la lentille de crown et de flint d'une petite quantité, égale à très-peu près à la différence entre la distance focale optique et la distance focale chimique la meilleure. Cette opération raccourcit le foyer d'environ $\frac{1}{20}$: dès lors on doit diaphragmer l'objectif d'environ $\frac{1}{20}$ de son diamètre, pour conserver la même ouverture angulaire.

Il reste à faire quelques tâtonnements pour obtenir la distance des verres qui donne les meilleures images. Cette distance est légèrement variable avec le degré d'achroma-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

tisme primitif. Mais la règle précédente est un guide bien utile pour éviter des pertes de temps.

Ces règles n'ont pas seulement été déduites de la théorie : elles ont été appliquées à trois lunettes de foyers différents, que j'avais à ma disposition. L'essai le plus concluant a été obtenu avec la plus grande d'entre elles, dont l'objectif a 10 centimètres d'ouverture et $1^m,10$ de foyer.

Les épreuves photographiques (sur collodion ou sur plaques daguerriennes) de mires éloignées ou du disque solaire sont remarquables comme finesse, car elles peuvent supporter un grossissement supérieur à celui de l'oculaire de la lunette; de sorte que leur netteté est entièrement comparable à celle de l'image optique.

Quant aux aberrations latérales, elles ne peuvent être décelées que par un examen micrométrique minutieux des clichés; il est facile de voir que ces aberrations, nulles sur l'axe, doivent être du même ordre que celles des images de M. Rutherfurd; car l'écartement des verres équivaut, comme variation d'épaisseur du système objectif, à l'addition d'un troisième verre.

Mais comme, dans tous les cas, on ne peut pas compter *à priori* sur l'absence absolue des aberrations, lorsqu'on fait avec une lunette quelconque des observations en dehors de l'axe, il est nécessaire de faire l'examen et de dresser une table de correction des aberrations latérales; la méthode que je viens d'indiquer n'apporte donc aucune difficulté nouvelle et me paraît l'emporter en simplicité sur toutes les méthodes proposées pour atteindre le même but.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

NOTE

SUR

L'APPROXIMATION EN VALEUR ABSOLUE DES POINTÉS

SUR

LES ÉPREUVES DAGUERRIENNES DU DISQUE SOLAIRE

OBTENUES AVEC LA LUNETTE PHOTOGRAPHIQUE

PAR

M. A. CORNU.

(Note présentée à la Commission du passage de Vénus, dans la séance du 22 février 1873).

Les épreuves daguerriennes du disque solaire sur lesquelles j'ai opéré ont $12^{mm}5$ de diamètre : elles ont été obtenues avec une lunette de 4 pouces d'ouverture et de $1^{m}42$ de foyer optique, rendue achromatique chimiquement par l'écartement des verres.

Elles ont été mesurées avec un micromètre à fil de Brunner, disposé sur un microscope : le grossissement définitif était d'environ 50 fois. Le tambour de la vis est divisé en 100 parties. Une partie équivaut à un peu plus d'un millième de millimètre. Plus exactement, $\frac{1}{100}$ de millimètre $= 84^{d}3$ (mesure directe sur un micromètre à traits).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

1° *Choix du réticule.*

Le réticule à fils peut être disposé suivant les formes n° 1 ou n° 2.

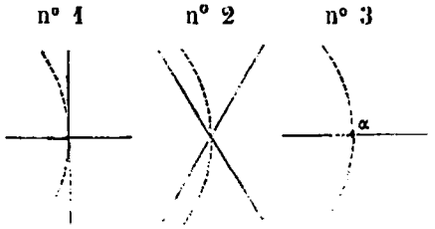


Fig. 1.

La forme n° 2 est de beaucoup préférable pour le pointé du bord du disque; mais le n° 3, qui représente un grain de poussière α fixé au fil, est encore préférable : c'est à cette disposition que je me suis arrêté.

2° *Approximation d'un pointé simple dans le cas le plus favorable.*

On pointait sur un trait de diamant tracé sur verre; la série des pointés a été :

Pointés.	*Écarts avec la moyenne.*
84d4	—0,1
84,6	+0,1
84,3	—0,2
84,2	—0,3
84,5	»
83,8	—0,7
85,7 (1)	+1,2
85,3	+0,8
84,0	—0,5
84,6	+0,1
845,4	4,0 somme des écarts.
Moyenne.. . 84,54	

(1) Malgré l'erreur accidentelle, l'écart moyen d'un pointé est de $\frac{1}{2}$ millième de millimètre.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Écart moyen 0,4

$$= \left(\frac{0,4}{843}\right)^{mm} = 0,0005^{mm} = \frac{1}{2000} \text{ de millimètre.}$$

Ainsi le micromètre adopté permet de pointer au moins au demi-millième de millimètre.

3° *Pointés sur le bord de l'épreuve du disque solaire.*

J'ai pris l'une des meilleures épreuves et j'ai choisi trois parties du bord du disque :

L'appareil photographique étant monté d'une manière peu stable, il y a toujours des trépidations qui rendent les bords inégalement nets dans diverses directions, mais toujours dans de très-petites limites d'inégalité. — L'état des courants d'air atmosphériques et le sens du mouvement diurne sont encore des causes de trouble qui, n'agissent pas de la même manière sur tous les points.

Une des parties A était très-nette,
La seconde B — assez nette,
La troisième C — comme netteté au-dessous de ce qu'on obtient d'ordinaire.

PARTIE A	Écarts.	PARTIE B		PARTIE C	
54,2	—0,4	61,5	+1,1	24,4	—2,4
55,1	+0,5	60,5	—0,2	27,7	+0,9
54,8	+0,2	59,5	—1,2	26,0	—0,8
55,1	+0,5	62,0	+1,3	28,5	+1,7
54,5	—0,1	59,9	—0,8	27,5	+0,7
55,1	+0,5	60,0	—0,7	27,0	+0,2
55,2	+0,6	60,5	—0,2	25,8	—1,0
54,2	—0,4	62,5	+1,8	25,1	—1,7
54,0	—0,6	61,0	+0,3	28,4	+1,6
53,9	—0,7	59,3	—1,4	27,7	+0,9
546,1	4,5	606,7	9,0	268,1	1,9
Moyenne. 54,6		60,67		26,81	

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Écart moyen. 0,45 mm	Écart moyen. 0,9 mm	Écart moyen 1,19 mm
$\frac{0,45}{843} = 0.00053$	$\frac{0,9}{843} = 0,0010$	$\frac{1,19}{843} = 0,0014$
$= \frac{1}{1500}$ de millimètre.	$= \frac{1}{930}$ de millimètre.	$= \frac{1}{710}$ de millimètre.

Ainsi le bord le plus net a donné un écart moyen de $\frac{1}{1500}$ de millimètre; le second, considéré comme ayant la netteté ordinaire, a donné presque le millième; le troisième, au-dessous de ce qu'on peut couramment obtenir, n'a pas donné deux millièmes d'*erreur de pointé*.

Je conclus de ces observations qu'on peut compter, avec les épreuves daguerriennes, sur des pointés dont la précision atteint au moins le *millième* de *millimètre*.

C'est donc purement et simplement du procédé optique pour la formation des images photographiques que dépend la précision du résultat.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

DESCRIPTION DE LA MÉTHODE

PERMETTANT D'OBTENIR

L'ACHROMATISME PHOTOGRAPHIQUE

DES OBJECTIFS ACHROMATISÉS POUR LA VISION DIRECTE.

DESCRIPTION SUCCINCTE

D'UNE OPÉRATION FOURNISSANT DES ÉPREUVES DAGUERRIENNES DU DISQUE SOLAIRE

PAR

M. A. CORNU.

(Note présentée à la Commission du passage de Vénus, dans la séance du 22 février 1873.)

La transformation d'un objectif achromatique pour la vision directe en objectif achromatique pour la photographie s'effectue pratiquement de la manière suivante :

Le barillet qui porte les deux verres étant disposé de manière à permettre entre eux l'interposition de *bagues*, on commence par mettre les verres au contact, puis on cherche le foyer chimique en prenant une épreuve photographique d'un objet éloigné. Il n'est pas nécessaire de choisir un objet tellement éloigné que son image optique se fasse au plan focal de l'infini : il suffit de le prendre à une distance qui soit à peu près égale à 100 fois ou 200 fois la distance focale de l'objectif.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On peut simplifier beaucoup la recherche du foyer chimique en opérant de la manière suivante :

1° On fait disposer une *chambre-noire-oculaire* de façon que la plaque sensible puisse glisser dans des coulisses : on peut ainsi faire cinq ou six épreuves sur la même plaque et, par suite, mener très-promptement les essais méthodiques.

2° On marque sur le tirage un trait qui correspond à la position du foyer optique en coïncidence avec le plan de la surface sensible. Le dispositif que nous avons l'honneur de mettre sous les yeux de la Commission permet de réaliser très-facilement cette condition. A cet effet, la plaque sensible est remplacée par une lame de verre sur laquelle des traits ont été marqués : la face portant ces traits est tournée vers l'objectif et, par suite, se trouve dans le plan même que doit occuper ultérieurement la plaque sensible ou la glace collodionnée.

Un oculaire à très-court foyer est disposé en arrière, de façon à viser par transparence les traits de la lame. On peut donc ainsi, en faisant varier le tirage par degrés très-petits, *mettre au point* l'image optique, c'est-à-dire amener le plan focal moyen des rayons visibles à coïncider avec le plan de la face antérieure de la glace.

3° On fait une série d'épreuves photographiques correspondant à des tirages variant de millimètre en millimètre ; mais on les fait sur la même plaque iodo-bromée, ou mieux encore sur la même glace colliodonnée (ce qui va plus vite), de sorte que l'opération est très-rapide : d'un autre côté, comme l'expérience montre que le foyer chimique est en arrière d'environ un demi pour cent de la distance focale

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

principale des rayons visibles, on peut immédiatement se placer aux environs du foyer chimique, ce qui diminue d'autant le nombre des essais.

Le dispositif qui permet d'obtenir cinq ou six épreuves sur la même plaque n'est pas avantageux seulement au point de vue de la rapidité des opérations : son but est surtout d'avoir des épreuves bien comparables au point de vue de la netteté : on serait évidemment dans des circonstances beaucoup moins bonnes, si les épreuves successives étaient faites sur des plaques ou sur des glaces séparées, car on ne serait jamais aussi sûr de l'identité de la préparation, ni des circonstances atmosphériques, nécessairement un peu variables.

Le résultat de la comparaison des six épreuves permet donc *immédiatement* de définir, à moins de *un demi-millimètre près,* la distance au foyer optique du foyer chimique *le moins imparfait.*

Il ne faudrait pas croire toutefois que l'image photographique obtenue ainsi soit très-imparfaite ; observée avec un oculaire dont le grossissement serait moitié de celui de l'oculaire le plus convenable à la lunette, elle est encore très-satisfaisante ; mais la rectification que nous allons indiquer maintenant permet une amplification au moins égale à celle de l'oculaire optique.

La seconde opération consiste à répéter les mêmes essais en écartant les deux verres d'une quantité égale à un demi pour cent de la distance focale, et à déterminer ainsi la distance du foyer chimique au foyer optique. Cette distance aura notablement diminué.

Une troisième opération, servant de contrôle aux deux

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

premières, devra également être effectuée : on écartera les deux verres d'une quantité égale à un pour cent de la distance focale, et on déterminera encore la distance des deux foyers. L'image optique, dans ces deux nouvelles opérations, aura sans doute un peu perdu de sa netteté ; mais, si l'on a soin d'employer un verre bleu très-clair, on évitera, d'une manière presque complète, cet inconvénient. On aura donc une troisième distance des deux foyers correspondant au nouvel écartement des verres. On pourra alors déterminer graphiquement l'écartement qui donne l'image photographique la plus convenable. Il suffira de tracer la courbe obtenue en prenant pour abscisses l'écartement des verres et pour ordonnées les distances correspondantes des deux foyers.

Le point de la courbe dont l'ordonnée sera nulle correspondra évidemment à la distance des verres qui produit la coïncidence du foyer optique imparfait et du foyer chimique : l'expérience prouve que ce point donne, en effet, des résultats très-satisfaisants ; mais si l'on ne craint pas de faire encore quelques essais, on pourra améliorer l'achromatisme chimique, en opérant dans le voisinage du point ainsi déterminé.

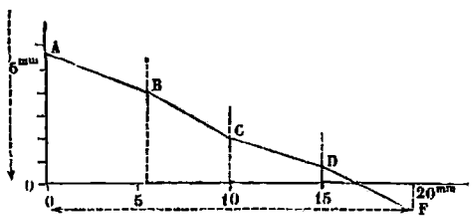


Fig. 1.

Voici un exemple tiré de nos expériences mêmes :

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La courbe représentée ci-contre (fig. 1) est celle qui a été obtenue avec un objectif de quatre pouces d'ouverture construit par MM. Brunner frères, et disposé dans un barillet spécial permettant l'écartement graduel et continu des deux verres : la distance focale de cet objectif est de $1^{m},42$. On a fait cinq fois l'opération précédemment décrite :

Les deux verres en contact donnaient un foyer chimique en arrière du foyer optique de $5^{m}\frac{1}{2}$ environ, c'est-à-dire :

1° A 0,4 % de la distance focale principale (point A);
2° A 6^{mm} de distance pour les verres les deux foyers étaient à 4^{mm} (point B);
3° A 10^{mm} la variation du foyer était de $2^{mm},5$ (point C);
4° A 15^{mm} — — $1^{mm},0$ environ (point D);
5° A 20^{mm} — — $1^{mm},5$ (point E);

c'est-à-dire que le foyer chimique était passé en avant du foyer optique : mais l'épreuve paraissait moins bonne, comme netteté, que l'épreuve obtenue à 15^{mm} de distance.

En comparant la netteté maximum de BCDE, on ne voyait pas de différence sensible entre celle de C et celle de D : celle de E, moins bonne que les deux précédentes, était d'ailleurs encore supérieure à celle de B. On a donc fixé la position d'écartement des deux verres à 15 millimètres, c'est-à-dire à un pour cent de la distance focale. Une légère variation de distance n'occasionnerait qu'une variation de netteté insignifiante.

Quant au foyer chimique, il est d'environ 1^{mm} en arrière du foyer optique le meilleur; par des épreuves répétées, il a été plus exactement fixé à $0^{mm},75$, à deux dixièmes de millimètre près.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Les épreuves daguerriennes du Soleil que nous avons l'honneur de mettre sous les yeux de la Commission ont été obtenues à l'aide de cet objectif dont les deux verres ont été écartés de 15^{mm} (1 % de la distance focale) et en plaçant la plaque sensible à $0^{mm},75$ en arrière du foyer optique obtenu par projection avec l'oculaire des traits de la glace dont il a été parlé plus haut et de l'un des bords du Soleil : la netteté de ces épreuves est telle qu'on peut les soumettre à un grossissement de 100 diamètres, sans cesser de pointer sur les bords solaires avec l'approximation de un $\frac{1}{500}$ de millimètre.

Le disque solaire ayant un diamètre de $12^{mm},5$ sur les épreuves, on conclut que l'approximation du diamètre solaire équivaut, en valeur angulaire, à

$$33' + \left(\frac{\frac{1}{500}}{12,5}\right) = 1920'' + \frac{1}{6250} = 0''3$$

c'est-à-dire à $\frac{1}{3}$ de seconde.

Ainsi, une simple lunette de quatre pouces d'ouverture, fournissant une image solaire de $12^{mm},5$ de diamètre, suffit complétement, comme exactitude, à toutes les exigences d'une détermination astronomique.

On pourrait objecter à cette méthode que la séparation des verres pourrait amener des aberrations latérales. L'expérience directe prouve que, si elles existent, elles sont entièrement inappréciables. A cet effet, on a placé à la distance la plus grande dont on pouvait commodément disposer (40^{m}) une échelle divisée en 500 millimètres, formée par des traits découpant un vernis noir, et éclairée par

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

transparence : des épreuves photographiques obtenues au foyer de la lunette achromatisée ont donné, avec une grande netteté, l'image des divisions qui sous-tendaient ainsi un angle de 5″ environ, dans toute l'étendue du champ, qui correspondait ainsi à 2500″, c'est-à-dire à près de une fois et demie le diamètre solaire.

[On a pu alors vérifier l'approximation du pointé en remarquant que l'intervalle entre deux divisions pouvait être subdivisé à vue en 10 parties, et même en 20 parties à l'aide d'un micromètre, ce qui fait 0″,25 d'approximation dans l'évaluation angulaire du cliché.]

Nous avons l'honneur de mettre ces épreuves sous les yeux de la Commission.

Ainsi il n'y a aucune *aberration* dans la position *longitudinale* des foyers en dehors de l'axe ; ce foyer est sensiblement *plan*. Le relevé micrométrique montre qu'il n'y a non plus *latéralement* aucune *aberration angulaire* sensible, c'est-à-dire que les images des traits sont aussi équidistantes que la perfection même de la vis micrométrique permet de l'affirmer.

DESCRIPTION D'UNE OPÉRATION POUR LA PRODUCTION D'UNE ÉPREUVE DU DISQUE SOLAIRE.

On dirige la lunette de manière que l'image du disque solaire se fasse exactement au centre du champ. Pour y arriver, une petite lentille, fixée latéralement sur le tube et donnant l'image solaire par projection sur un écran, sert

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de chercheur pour régler en direction l'axe optique de la lunette. A cet effet, deux traits tracés sur l'écran sont disposés de manière que, lorsque l'image du disque solaire est tangente à ces deux lignes, l'image focale de l'objectif est exactement au milieu du champ.

On apporte alors la chambre noire munie d'une plaque iodée; un obturateur garantit la couche sensible de l'accès de la lumière; on la fixe à l'extrémité du tube de la lunette, préalablement réglée de façon que le foyer chimique se fasse exactement sur le plan de la couche sensible.

Pour faire une épreuve solaire, on dispose l'obturateur à coulisse, formé d'une simple lame de clinquant, ou mieux d'aluminium, dans la rainure où elle glisse à frottement très-doux. La fente pratiquée dans cette lame qui, dans un mouvement rapide, passe à deux ou trois millimètres en avant de la plaque iodée, est de dimension convenable suivant le temps de pose et suivant le poids qu'on veut employer pour les mettre en mouvement.

Dans les essais que nous avons faits, il n'a pas été nécessaire d'employer le dispositif que nous conseillons d'adopter dans l'appareil définitif; le simple poids de la lame suffit pour produire le mouvement; alors, une ouverture de 10 millimètres produit dans la chute un temps de pose parfaitement suffisant, pendant le milieu du jour, aux heures où la hauteur du soleil reste à peu près constante. Après trois heures de l'après-midi, en hiver, lorsque le soleil baisse et perd en intensité, le temps de pose doit être augmenté : on prend une lame semblable, mais avec une ouverture de 15 millimètres : celle-ci suffit alors jusqu'au moment où l'intensité solaire ne permet plus d'obtenir des épreuves

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

daguerriennes dans un temps assez petit pour que le mouvement diurne ne soit pas gênant.

La plaque daguerrienne, après l'exposition au foyer de la lunette, est placée dans la boîte à mercure, à la température de 45° centigrades; environ 20 minutes suffisent pour obtenir le développement complet de l'image : on peut alors retirer l'épreuve, la laver et la fixer provisoirement à l'hyposulfite de soude étendu à $\frac{1}{30}$; on peut ensuite la fixer complétement avec une solution d'hyposulfite d'or et de soude, dissous dans la proportion de 1^{gr} dans 250 à 300^{gr} d'eau distillée.

En général, on n'a pas besoin de fixer au sel d'or les épreuves obtenues; elles sont assez brillantes pour être observées immédiatement à la loupe, ou mieux avec un microscope grossissant de 25 à 50 fois. On examine spécialement les bords, au point de vue de la netteté. Si l'on n'est pas exactement au foyer, les bords sont estompés, à moins que le temps de pose ait été insuffisant. Alors, on fait une série d'épreuves du disque solaire sur la même plaque, en plaçant un obturateur en avant de la coulisse mobile; de cette manière, le disque solaire ne s'imprime pas tout entier; un des bords suffit, de sorte qu'en faisant glisser la plaque dans la rainure où elle peut se déplacer, on obtient une série d'images, en faisant à chaque fois varier le tirage de quelques dixièmes de millimètre. On choisit, comme tirage définitif, celui qui correspond à la plus grande netteté.

L'avantage que présente l'emploi d'un objectif est de conserver un foyer complétement invariable : lorsque l'appareil a été réglé une fois avec soin, on fait un trait sur

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

le tirage, et la netteté reste parfaitement constante sur toutes les épreuves ultérieures.

En résumé, l'appareil optique que l'on emploie est réduit au maximum de simplicité, et par suite de précision, puisqu'il se compose d'un simple objectif.

Le procédé photographique est également réduit au maximum de simplicité, puisqu'il suffit d'employer l'iode pur, qui fournit une sensibilité largement suffisante : nous avons rejeté, dans nos essais, et nous conseillons de rejeter, dans les opérations définitives, l'emploi du brôme comme plus délicat : il faut, en effet, lorsqu'on se sert de plaques brômées, éviter avec soin l'humidité et l'accès de toute lumière : ces conditions, faciles à réaliser dans un laboratoire bien disposé, ne peuvent évidemment pas être remplies dans ces installations incomplètes dont il faudra se contenter lors des expéditions lointaines.

Nous avons l'honneur de mettre sous les yeux de la Commission des épreuves du disque solaire, de 12 millimètres et demi de diamètre, qui supportent un grossissement de 100 fois sans que la netteté du bord cesse d'être satisfaisante : d'après le calcul indiqué plus haut, leur précision, qui permet un point de $\frac{1}{3}$ de seconde, serait déjà bien suffisante pour le but que la Commission poursuit.

Néanmoins, pour augmenter encore les chances de succès et satisfaire aux exigences des astronomes qui ne se contenteraient pas d'images aussi petites, nous pensons qu'on pourrait adopter des objectifs d'une plus grande distance focale, avec une ouverture proportionnée.

Des objectifs de cinq pouces de diamètre et $2^m,20$ de dis-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

tance focale nous paraissent présenter toutes les garanties désirables : le disque solaire aurait 20^{mm} de diamètre sur les épreuves ; celles-ci, par suite, fourniraient des pointés d'une précision probablement supérieure à celle des pointés directs, sans toutefois exiger une installation équatoriale différente de celles qui sont usitées dans les Observatoires.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

RAPPORT

SUR

LA PHOTOGRAPHIE PAR IMAGES DIRECTES

PAR

M. FIZEAU.

(Présenté à la Commission du passage de Vénus, dans la séance du 22 février 1873.)

A la suite de plusieurs séances consacrées, en novembre dernier, à la discussion des méthodes proposées pour obtenir les meilleures épreuves photographiques du passage de Vénus, la Commission m'a fait l'honneur de me charger d'étudier en particulier la méthode *des images directes* reçues sur la plaque iodée de Daguerre, l'image étant empruntée *sans aucun intermédiaire,* soit au foyer d'un télescope, soit au foyer d'une lunette, et l'un ou l'autre instrument étant *dirigé directement* vers le Soleil. Avec l'autorisation de la Commission, j'ai prié M. Cornu de s'adjoindre à moi pour cette étude, et je viens aujourd'hui rendre compte des résultats obtenus.

On doit remarquer d'abord que le but que l'on se propose d'atteindre par la photographie est un but de haute

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

précision; qu'il s'agit d'obtenir, non des épreuves artistiques, mais une série d'épreuves très-nettes du Soleil, portant chacune le petit disque de Vénus dans la situation précise qu'il occupera à différents instants du passage, soigneusement déterminés. Au retour seulement de l'expédition, les différentes épreuves seront soumises, à loisir, à des mesures micrométriques très-précises, pour déterminer les positions de la planète sur le Soleil aux divers instants du passage, et de l'ensemble de ces positions on pourra conclure, pour chaque station, quelle aura été la distance minimum des centres et l'heure où ce minimum aura eu lieu, probablement aussi les heures des contacts. Voilà certainement le rôle qu'il convient d'attribuer à la photographie. Ce sont, en réalité, des déterminations micrométriques de positions de la planète sur le Soleil, lesquelles doivent égaler et même surpasser s'il se peut en précision les mesures semblables que les astronomes se proposent de faire par les moyens optiques ordinaires. Il résulte de là que l'instrument destiné à la photographie doit être, s'il est possible, aussi parfait que celui qui est destiné aux observations astronomiques.

Or l'expérience jointe à la théorie a conduit depuis longtemps les astronomes à l'emploi des systèmes optiques les plus directs et les plus simples, c'est-à-dire à ne faire porter leurs observations et les fils de leurs micromètres que sur les images directement formées au foyer d'une lunette ou d'un télescope, dirigé sans réflexion intermédiaire sur l'astre que l'on veut observer. L'œil regarde l'image avec une simple loupe, mais sans recourir jamais pour cela au microscope dit composé, ni à l'oculaire dit terrestre,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

dont l'usage est depuis longtemps condamné pour les observations qui réclament de la précision, à cause des déformations qu'ils occasionnent toujours dans les images.

Ce sont donc les images directes qui doivent avoir la préférence, si l'on veut que les opérations photographiques puissent rivaliser en précision avec les observations optiques des astronomes.

Mais est-ce à un télescope ou à une lunette que l'on doit avoir recours, pour former les images?

Le télescope possède un avantage capital au point de vue photographique, c'est que tous les rayons, quelle que soit leur refrangibilité, concourent exactement au même foyer, en sorte que les images sont absolument achromatiques, et que, par conséquent, la netteté de l'image photographique sera tout-à-fait la même que celle de l'image optique, et s'observera dans le même plan que cette dernière.

Nous avons donc d'abord fait des essais avec un télescope de Foucault, de $2^{m},40$ de distance focale, appartenant à l'Observatoire de Paris et que la Commission à fait mettre à notre disposition.

Les images de 22^{mm} obtenues avec cet instrument sur des plaques iodées de Daguerre ont été d'une netteté très-inégale : exceptionnellement, elles ont été excellentes, mais le plus souvent elles se sont montrées à bords troubles, à des degrés divers. Nous avons bientôt reconnu que ce résultat défavorable et tout-à-fait contraire à la précision des mesures devait être attribué presque uniquement aux déformations accidentelles du miroir de verre, sous l'influence des changements de température. Sous cette influence, en effet, le miroir dont la matière est un mauvais conducteur

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de la chaleur, subit des répartitions inégales de température, ainsi que des dilatations inégales, qui entraînent nécessairement des déformations de la surface réfléchissante, déformations tantôt symétriques autour du centre, avec allongement ou raccourcissement de la distance focale, tantôt irrégulières et dissymétriques, avec trouble des images focales.

Nous avons vérifié par une expérience directe la cause de ces phénomènes, en approchant à la distance de 20 à 30 centimètres du miroir un large disque de bronze chauffé vers 100 degrés. Nous avons alors observé que, par suite de l'influence du rayonnement de ce disque sur le miroir, les images focales s'altéraient rapidement en se troublant, et que la distance focale variait jusqu'à s'allonger d'au moins 10 millimètres.

Nos expériences sont donc peu favorables à l'emploi du télescope à miroir de verre, malgré sa précieuse propriété de parfait achromatisme.

Nous avons ensuite dirigé nos recherches vers les images obtenues au foyer des lunettes.

La lunette astronomique simple présente, tant au point de vue théorique qu'au point de vue pratique, des avantages incontestables qui expliquent la préférence constante des astronomes pour cet instrument, toutes les fois qu'il s'agit, non d'astronomie physique, mais de mesures précises d'angles et de temps. A peine sensible aux changements de température, à la fois simple, commode et maniable, la lunette aurait, dès les premières réunions de la Commission, rallié tous les suffrages, si l'on avait été dès lors certain d'avoir, en temps convenable, les quatre objectifs nécessaires

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

aux quatre stations, bien identiques entre eux et surtout bien éprouvés au point de vue de l'achromatisme spécial qu'exige la production des épreuves photographiques.

On sait, en effet, que le maximum de la lumière visible dans le spectre est situé dans le jaune, vers la raie D, tandis que le maximum photographique de l'effet chimique s'observe dans le violet, entre les raies G et H. L'achromatisme nécessaire à la netteté des images ne doit donc pas être le même pour l'œil et pour la surface photographique. Pour l'œil, il doit consister dans la réunion au même foyer des rayons voisins du maximum de lumière, tandis que, pour la netteté des images photographiques, ce sont les rayons voisins du maximum d'action chimique qui doivent être réunis ensemble. Les constructeurs d'objectifs pour la photographie obtenaient bien déjà, quelquefois, par des tâtonnements toujours incertains, un achromatisme convenable. Mais M. Rutherfurd est le premier qui ait obtenu, par une méthode bien définie, de grands objectifs véritablement achromatiques pour la photographie. Cependant la solution qu'il a donnée, quoique très-remarquable, est encore trop empirique et trop difficile à réaliser jusqu'à présent, pour que la Commission ait cru pouvoir l'adopter avec sécurité.

M. Cornu est parvenu, de son côté, à une solution qui paraît tout-à-fait correcte au point de vue théorique et qui présente de plus dans l'application une facilité, une perfection et une sûreté tout-à-fait inespérées. J'ai déjà annoncé ce résultat à la Commission et je lui ai donné lecture d'une première note de M. Cornu sur ce sujet; les expériences n'étaient pas encore aussi avancées qu'elles le sont

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

aujourd'hui, et j'espère que la Commission voudra bien entendre de M. Cornu lui-même la lecture d'un Rapport plus complet et plus détaillé, qui lui permettra d'arrêter son opinion en pleine connaissance de cause; en effet, une lunette photographique vient d'être construite par MM. Brunner, d'après la nouvelle méthode et avec un succès que la Commission pourra apprécier. Je dois faire remarquer que l'instrument a été construit à une échelle moindre que celle que nous proposons d'adopter, et cela afin d'abréger le temps réclamé par le constructeur et de pouvoir exécuter plus tôt les expériences et en soumettre sans retard les résultats à la Commission. L'achromatisme photographique a été obtenu tout de suite par la méthode de M. Cornu, avec une précision singulière, comme on peut le reconnaître sur les épreuves ci-jointes. On y voit tout de suite que la netteté des images photographiques est tout-à-fait du même ordre que la netteté des images optiques d'une bonne lunette astronomique, conformément aux prévisions de la théorie.

Dès lors, on peut concevoir que le passage de Vénus pourra être étudié au moyen de deux séries d'observations parallèles et du même ordre de précision, l'une optique, faite au moyen de la lunette astronomique, l'autre par images sur plaques iodées, au moyen de la lunette photographique, l'un et l'autre instrument étant également montés sur un pied parallactique d'une grande solidité, et ne différant entre eux qu'en ce que, dans l'un, il y aura l'oculaire micrométrique ordinaire, et, dans l'autre, un petit châssis porte-plaque, avec écran mobile.

Les dimensions qui résultent d'un examen attentif, comme étant les plus convenables à donner à la lunette photogra-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

phique, que nous avons l'honneur de proposer à la Commission, sont les suivantes :

	m
Diamètre de l'objectif.	0,135 (5 pouces).
Distance focale..	2,200 environ.
Diamètre de l'image.	0,020 environ.

C'est avec une conviction entière et une pleine confiance dans les résultats, que j'ose engager la Commission à adopter une solution qui, je m'en suis assuré, réunit l'assentiment de la plupart des physiciens les plus familiers avec l'optique. J'ajouterai cependant, en terminant, que si, par suite de préférences manifestées par quelques-uns des chefs de station pour un autre appareil, la Commission jugeait convenable de ne pas adopter (ce qui serait, je crois, regrettable) un système uniforme d'épreuves photographiques tout à fait comparables entre elles, je demanderais, *au moins*, l'adoption de la lunette photographique pour deux stations, l'une au nord, l'autre au midi. Dans ce cas et en raison du peu de temps que nous pouvons désormais accorder aux constructeurs, je prierais la Commission de vouloir bien décider, dès maintenant, la construction de deux de ces instruments.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

SUR LA PRÉCISION

QUE POURRA DONNER

DANS LA DÉTERMINATION DE LA PARALLAXE SOLAIRE

L'APPAREIL PHOTOGRAPHIQUE

PROPOSÉ PAR

MM. WOLF ET MARTIN.

NOTE ADDITIONNELLE

PAR

M. C. WOLF

(Présentée à la Commission du passage du Vénus, dans la séance du 1er mars 1873.)

L'appareil photographique que nous avons proposé, M. Ad. Martin et moi, pour l'observation du passage de Vénus sur le Soleil, donne des images du disque solaire d'environ 60^{mm} de diamètre. J'ai dit, en le décrivant, par quelles considérations nous avons été conduits à adopter cette grandeur d'image ; je me propose aujourd'hui de mon-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

trer qu'elle suffit à donner l'approximation nécessaire pour la détermination de la parallaxe solaire, et ensuite d'appeler l'attention de la Commission sur les avantages que présente la mesure des angles de position de Vénus sur le Soleil, mesure à laquelle peut seul se prêter, avec la précision nécessaire, un appareil muni comme le nôtre d'un héliostat.

L'examen des nombreux pointés que j'ai faits pour mesurer au microscope les intervalles des traits d'une mire, dans le but de contrôler la perfection des images photographiques que donne notre appareil (voir la planche insérée plus haut), m'a donné pour erreur moyenne d'un seul pointé $\pm$ $0^{mm},002$, c'est-à-dire que, sur une image aussi nette que puisse la donner l'appareil, on peut pointer presque avec autant de sûreté que sur le trait d'une bonne graduation. Cette quantité $\pm$ $0^{mm},002$ peut être considérée comme l'erreur de l'appareil, celle qu'il introduit, par suite de l'emploi de la plaque sensible et des aberrations inévitables, dans le pointé fait sur l'image d'un trait absolument net et immobile. Les pointés sur l'image solaire seront nécessairement moins bons, d'abord parce que le bord du Soleil n'est pas, par sa nature même, bien défini, puis en raison des ondulations produites par la présence de l'air.

Des pointés faits sur les bords de plusieurs images du Soleil obtenues le même jour m'ont donné $\pm$ $0^{mm},0045$ comme erreur moyenne d'un pointé. Voici un exemple de ces pointés, faits avec un microscope grossissant environ 40 fois, et pour lequel $1^p = 0^{mm},0066$:

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

	l.	l-m	(l-m)²
	31ᵖ 4	+0ᵖ59	0,3481
	30, 9	+0,09	0,0081
	31, 0	+0,19	0,0361
	31, 1	+0,29	0,0841
	30, 4	−0,41	0,1681
	31, 8	+0,99	0,9801
	31, 1	+0,29	0,0841
	30, 7	−0,11	0,0121
	30, 4	−0,41	0,1681
	29, 3	−1,51	0,2801
Moyenne. . .	30ᵖ,81		4,1690
			0,4632

Erreur moyenne $= \pm 0^{p},68 = 0^{mm},0045$

On peut donc admettre que l'erreur commise dans la mesure d'une distance sur une image solaire ne dépassera pas $0^{mm},005$, $\frac{1}{200}$ de millimètre. Cette approximation est-elle suffisante?

Les formules relatives au calcul de la parallaxe solaire à l'aide des mesures de distance des centres de Vénus et du Soleil, ont été établies par Hanssen dans son mémoire : *Bestimmung der Sonnenparallaxe*, Leipzig, 1870.

Si l'on élimine des formules l'angle de position de Vénus par rapport au cercle de déclinaison passant par le centre du Soleil, on arrive à une équation rigoureuse du 2ᵐᵉ degré dont la solution est facile à obtenir par approximations successives. La différenciation de cette équation donne, entre la variation de la distance mesurée des centres et la variation qui en résulte sur la valeur de la parallaxe, la relation suivante, d'ailleurs facile à établir directement :

$$\cos H \, d\rho_0 = \pm \frac{r_1 r'}{r} de$$

ρ_0 étant la parallaxe horizontale du Soleil, e la distance

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

mesurée des centres, H la hauteur du Soleil au-dessus de l'horizon au moment de l'observation, r et r' les rayons vecteurs tabulaires de Vénus et de la Terre, r_1 la distance de Vénus à la Terre.

L'opération est la plus favorable quand H = o. Alors

$$d\rho_0 = \pm(\bar{1},5579)\, de \qquad (\bar{1},5579) = 0,361 ;$$

une erreur de 1″ sur la distance mesurée produit au minimum sur la parallaxe une erreur de o″,361. A une erreur de o″,1 sur la parallaxe répond une erreur de o″,277 sur la distance des centres.

Si nous prenons une image du Soleil de 60^{mm} de diamètre, telle que la donne notre appareil, 1″ est représentée par o^{mm},0313. Pour n'avoir, par une seule comparaison de deux épreuves, qu'une erreur de o″,1 sur la parallaxe, il faut que la distance des centres soit mesurée sur chaque épreuve avec une erreur moindre que o^{mm},0087. Mais nous pouvons n'avoir qu'une erreur de o^{mm},005, il en résultera sur la parallaxe une erreur de o″,0625. Par conséquent, pour réduire cette erreur à o″,01, il faudra au minimum 39 épreuves obtenues dans chacune des deux stations.

J'ai constamment insisté sur la nécessité de pouvoir déterminer sur les épreuves photographiques non-seulement la distance des centres, mais encore l'angle de position de Vénus. C'est qu'en effet, si l'on conserve cette quantité dans les formules, parmi toutes les relations qui peuvent servir à déterminer la parallaxe par la comparaison de deux épreuves prises en deux lieux convenables, il en est une qui jouit de cette propriété importante, que la détermination

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

est indépendante des erreurs des tables et surtout des erreurs de longitude ; à tel point qu'une erreur d'une heure entière sur la différence des longitudes ne produirait sur la parallaxe qu'une erreur de o″,04. En outre, dans cette relation, donnée par Hanssen, page 73 de son mémoire, la valeur de ρ_0 a pour dénominateur une quantité qui, pour des lieux et des heures d'observation convenablement choisis, peut s'élever jusqu'à 2. Pour le Japon, combiné avec les îles Kerguelen ou même Saint-Paul, ce dénominateur peut atteindre la valeur 1,6. De telle sorte que, si l'on a déterminé les angles de position dans ces deux lieux, une erreur de o″,1 sur la parallaxe correspondrait à une erreur de o^{mm},0139 sur la distance mesurée (au lieu de o^{mm},0087 dans le cas où l'on néglige l'angle de position).

L'erreur sur cette distance dans nos photographies n'étant que de o^{mm},005, l'erreur sur la parallaxe résultant de la combinaison de deux épreuves isolées s'élèverait seulement à o″,036 ; et il suffirait de 14 bonnes épreuves en chaque station pour réduire l'erreur à o″,01.

Avec quelle approximation doit être mesuré l'angle de position ? La différenciation des formules fondamentales de Hanssen donne la relation :

$$d\rho_0 = \pm(\overline{3},5152)\, d\theta$$

dans les conditions les plus favorables, impossibles à réaliser, puisqu'elles supposent la hauteur du Soleil nulle et l'angle parallactique droit. On en tirerait $d\theta = 30''$ pour une erreur de o″,1 sur ρ_0. En admettant donc que l'angle θ doit être déterminé avec une approximation d'au moins 20″, nous resterons dans des limites encore très-larges. Dans

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

notre appareil, les tourillons qui portent le fil, dont l'image sur la plaque déterminera l'origine des angles de position, seront distants d'environ 15 centimètres; une erreur de 20″ (tang 20″ = 0,0001) supposerait une erreur de $0^{mm},015$ sur le réglage de ces tourillons, erreur qu'il sera facile d'éviter par l'emploi du niveau.

En résumé, pour obtenir la valeur de la parallaxe solaire avec une approximation de 0″,01, à l'aide d'épreuves photographiques de 60^{mm} de diamètre, sur lesquelles l'erreur d'un pointé sera de $\frac{1}{200}$ de millimètre, il faudra, avec notre appareil, obtenir au moins 39 épreuves dans chacune des stations correspondantes, si l'on se borne à la mesure des distances des centres ; il en faudra 14, si l'on mesure cette distance et l'angle de position, ce dernier étant déterminé avec une erreur moindre que 20″.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

RAPPORT

SUR

L'APPAREIL PHOTOGRAPHIQUE

PAR

M. FIZEAU.

(Présenté à la Commission du passage de Vénus, dans la séance du 8 mars 1873.)

Dans la dernière séance de la Commission, M. le président nous a chargés, MM. Yvon-Villarceau, Wolf, Cornu, et moi, de nous réunir en sous-commission et d'examiner en commun s'il serait possible de vous proposer, dès maintenant, une décision à prendre au sujet du choix de l'appareil photographique, dont il devient de jour en jour plus urgent de faire la commande aux constructeurs.

Dès notre première réunion, nous avons unanimement reconnu que la question peut être aujourd'hui considérée comme suffisamment élucidée par les discussions qui, à diverses reprises, ont occupé plusieurs de vos séances, ainsi que par les expériences que vous avez fait exécuter au moyen des diverses méthodes proposées, expériences sur

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

lesquelles plusieurs rapports vous ont été soumis dans les dernières séances ; ces discussions et ces rapports étant consignés dans nos procès-verbaux et étant d'ailleurs assez récents pour être parfaitement présents à l'esprit de tous, nous croyons inutile d'y revenir et nous allons faire connaître immédiatement la disposition que nous proposons, d'un commun accord, comme paraissant la plus propre à assurer le succès des opérations dont il s'agit, et conciliant autant que possible les opinions diverses émises à ce sujet dans le sein de la Commission.

Le principe de l'appareil est le suivant :

Une lunette fixée horizontalement dans une position invariable, sur des piliers, et au-devant d'elle le miroir mobile d'un héliostat.

La lunette aura une distance focale d'environ 4 mètres.

L'objectif aura une ouverture de $0^{m},135$ (5 pouces). Il sera rendu achromatique pour les rayons chimiques, par la méthode de l'écartement des verres.

Les images photographiques devront être obtenues directement au foyer même de la lunette, sur une surface plane d'argent ioduré.

Le diamètre du disque solaire (la distance focale étant de 4 mètres) sera à très-peu près de $36^{mm},5$, celui du disque de Vénus de $1^{mm},1$.

La différence de position de Vénus sur le Soleil entre les stations extrêmes, boréales et australes, sera à très-peu près de $0^{mm},5$.

Voici quelques-unes des raisons qui peuvent recommander l'adoption de ce plan.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

L'appareil est simple, il présente les avantages bien connus des lunettes, constance de la distance focale et de la netteté malgré les variations de la température, mise au point et manipulations photographiques sans grandes difficultés.

La position horizontale fixe a l'avantage d'éviter les vibrations accidentelles, dues surtout à l'action du vent sur un aussi grand instrument, vibrations qui seraient une grande cause de trouble pour les images photographiques. Dès lors, il est encore facile de placer près du foyer un fil exactement orienté. De plus, on peut ainsi se passer d'une monture sur un pied de très-grande dimension, que l'on n'aurait plus guère aujourd'hui la possibilité de faire construire en temps convenable.

L'emploi d'un miroir d'héliostat est une conséquence nécessaire de la position adoptée pour la lunette. Avec des précautions convenables, pour éviter l'échauffement inégal du miroir et par suite sa déformation, ainsi que l'ébranlement dû à l'action du vent, son emploi ne peut manquer d'être sûr et régulier.

Les dimensions de l'objectif et sa distance focale ont été considérées comme les meilleures, parce que, avec une ouverture plus grande, il faudrait compter sur un état trop favorable de l'atmosphère pour que l'on pût espérer le rencontrer à la fois dans les différentes stations; et avec une ouverture plus petite, la puissance de l'instrument tendrait à s'affaiblir.

Quant à la distance focale de 4 mètres, on remarquera que, l'ouverture étant de $0^m,135$, cette distance est égale à 30 fois l'ouverture, ce qui est presque le double du rap-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

port ordinaire. On a été conduit à considérer comme avantageux cet allongement du foyer, non pas parce que le pouvoir de définition serait proportionnel à la dimension des images, l'ouverture restant la même, ce qui serait une erreur, les images dans ce cas perdant en netteté ce qu'elles gagnent en grandeur, mais parce qu'on peut espérer néanmoins un petit avantage sous ce rapport, dans les circonstances spéciales où se feront les mesures, et surtout parce qu'il y aura ainsi une tolérance plus grande sur la position exacte de la plaque sensible au foyer.

Relativement à la nature de la couche sensible, la plaque iodurée de Daguerre paraît présenter de grands avantages, par la facilité et la sûreté de la préparation. Lorsque la durée d'exposition a été suffisante, les contours de ces images sont d'une netteté extrême et conservent leur définition précise sous les plus forts grossissements. Le degré de sensibilité est suffisant pour opérer en une petite fraction de seconde, par un ciel clair. En cas de brume plus ou moins épaisse, pouvant affaiblir beaucoup la lumière, on peut à volonté augmenter la sensibilité de la couche, par degrés, jusqu'à la rendre 100 fois plus grande, par l'addition d'un peu de vapeur de brôme ou de chlore. Ajoutons que les manœuvres du châssis porte-plaque, de l'obturateur instantané, et des écrans de diverses natures et d'orientation variée, s'exécutent déjà sans difficultés avec les appareils provisoires, lesquels seront perfectionnés encore dans la construction définitive.

En résumé, en adoptant les dispositions précédentes et en fixant les dimensions de l'appareil comme on vient de le voir, on doit, selon nous, se trouver dans les conditions à

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

peu près les plus favorables à l'observation du phénomène dont il s'agit; tout en tenant compte, comme il faut le faire, des conditions spéciales imposées par des expéditions lointaines, faites sous des climats et dans des saisons diverses, c'est-à-dire dans des circonstances qui ne sont nullement semblables. En ayant égard à ces considérations, nous ne pensons pas qu'il soit possible d'obtenir aujourd'hui, par la photographie, une précision notablement plus grande que celle qui doit résulter de l'emploi des moyens que nous proposons.

S'il s'agissait d'un instrument à établir à poste fixe dans un grand Observatoire, et surtout de l'observation d'un phénomène non passager et à date déterminée, comme celui dont il s'agit, mais d'un phénomène pour lequel on pourrait attendre à loisir l'état du ciel le plus favorable, la puissance de l'instrument pourrait évidemment être augmentée, en augmentant ses dimensions. Mais il n'en est pas de même dans le cas présent. Outre la difficulté croissante d'emporter, dans ces voyages lointains, des instruments de dimensions et de poids de plus en plus considérables, nous pensons que les chances de réussir avec de plus grands instruments seraient d'autant plus faibles, par la raison que les objectifs de plus grandes dimensions présentent plus souvent aussi (sans parler de ce qui dépend de l'imperfection des verres) du trouble et des ondulations dans les images, par suite de l'état de l'atmosphère, phénomène particulièrement nuisible pour la photographie; d'où il résulte que le choix du moment de l'observation devient alors d'autant plus nécessaire, choix qui est évidemment impossible dans le cas présent. Dans chaque station, on aurait donc une

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

chance faible de réussir, et, dans des stations multiples, une chance plus faible encore de réussir simultanément.

Voilà pourquoi on s'est décidé pour l'ouverture modérée de $0^{m}135$ (5 pouces), grandeur qu'il n'a pas paru prudent de dépasser, sous peine de compromettre le succès.

Mais, dans ces conditions, quel degré d'exactitude peut-on espérer des opérations photographiques?

Nous avons dit plus haut que la différence de position de Vénus sur le Soleil entre les stations extrêmes, boréales et australes, serait sur les épreuves à très-peu près de $0^{mm},5$, quantité qu'il ne paraît pas possible d'augmenter utilement, d'une manière notable, dans l'état actuel de l'optique et de la photographie. Les épreuves pourront être nombreuses, si les circonstances et l'état du ciel sont favorables; leur nombre, pour chaque station, pourra s'élever à 50, 100 et peut-être plus encore. Lors du retour de l'expédition, elles seront soumises à tout un ensemble de mesures micrométriques, faites cette fois tout-à-fait à loisir, avec de puissants microscopes, avec les meilleurs instruments, les méthodes et les répétitions de pointés jugées les plus favorables.

Or nous savons par les résultats des observations déjà connues des physiciens et des astronomes, résultats discutés récemment dans le sein de la Commission internationale des poids et mesures, que, dans la détermination de la position d'un trait fin tracé sur une surface, on peut atteindre une exactitude maximum de $0^{mm},0001$, l'erreur moyenne d'un pointé étant d'environ $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{4}$ de millième de millimètre.

Mais il faut remarquer qu'il n'est pas permis d'espérer une précision aussi grande en pointant sur les bords des deux astres, soit sur les images photographiques, soit aussi

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

sur les images optiques des lunettes comme le feront les astronomes avec le micromètre.

Plusieurs séries de pointés, faits par M. Wolf et par M. Cornu sur un certain nombre d'images photographiques du Soleil, autorisent à admettre qu'avec la lunette photographique on pourra obtenir une erreur moyenne d'un pointé égale à $0^{mm},001$, ce qui pourrait conduire dans les mesures à une exactitude d'environ $\frac{1}{2}$ millième de millimètre. S'il en était ainsi, on aurait, relativement à la grandeur de l'effet parallactique sur les épreuves, qui est $0^{mm},5$, la quantité $\frac{0,0005}{0,5} = 0,001$, c'est-à-dire $\frac{1}{1000}$ de la valeur du phénomène.

Cependant, en raison des diverses causes accidentelles de complications que l'on peut dès aujourd'hui prévoir comme inévitables, et de plus en raison de la nouveauté de l'emploi des procédés photographiques, appliqués pour la première fois à des mesures astronomiques précises, on ne doit considérer ce degré d'exactitude que comme un maximum qui très-probablement ne sera pas atteint. Nous pensons, néanmoins, que l'on doit espérer, avec beaucoup de vraisemblance, arriver à un degré d'exactitude moitié plus faible, c'est-à-dire à $\frac{1}{500}$ de la valeur du phénomène.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

EXAMEN MICROMÉTRIQUE

D'UNE ÉPREUVE DAGUERRIENNE

OBTENUE AU FOYER D'UN OBJECTIF ASTRONOMIQUE

ACHROMATISÉ CHIMIQUEMENT PAR L'ÉCARTEMENT DES VERRES

PAR

M. A. CORNU

(Note lue à la Commission du passage de Vénus, le 21 juin 1873.)

Après avoir étudié les meilleures conditions d'achromatisme chimique d'un objectif astronomique par la méthode de l'écartement des verres, je me suis proposé de rechercher si cet écartement, qui peut dépasser un pour cent de la distance focale optique ne produit pas de déformations de l'image focale.

Ces observations étant faites en vue de l'obtention d'épreuves daguerriennes du Soleil (sur la demande de la Commission du passage de Vénus), l'étude devait se borner à une portion du champ de la lunette égale ou un peu

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

supérieure au diamètre solaire : j'ai adopté comme limite largement suffisante un cône angulaire ayant environ 45' au sommet, le diamètre solaire étant au maximum de 32'.

L'idée qui s'offrait naturellement pour contrôler la perfection des images, consistait à prendre des épreuves du Soleil, les unes au milieu du champ, les autres légèrement excentriques et à constater sur ces épreuves l'égalité ou l'inégalité de tous les diamètres par des mesures micrométriques directes.

Ce mode de procéder est sujet à bien des erreurs; d'abord il faut supposer que l'aplatissement solaire est négligeable, ce qui est loin d'être prouvé, vu les difficultés de mesure du Soleil par les méthodes usitées d'ordinaire en astronomie : ensuite, il faudrait introduire la correction due à la réfraction inégale des deux bords horizontaux du Soleil, sans parler des déformations accidentelles que les couches inégalement chaudes de l'atmosphère apportent inévitablement dans les images. Enfin, il faudrait ajouter une correction assez incertaine due au déplacement du Soleil dans le sens du mouvement diurne pendant le temps nécessaire à la formation de l'image, lors de la chute de l'obturateur : en effet l'image étant produite par le déplacement d'une fente mobile près du plan focal, l'impression photographique des différents points du disque ne se fait pas simultanément : il en résulte une petite déformation (1)

(1) C'est cette considération qui m'a conduit dans une précédente communication à indiquer comme indispensable, dans les appareils photographiques destinés à l'observation du passage de Vénus, la condition de déplacer la fente de l'obturateur parallèlement à la ligne des centres, c'est-à-dire parallèlement à la direction qu'on devra mesurer sur les épreuves.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

proportionnelle au rapport des vitesses du déplacement de l'obturateur et de l'image solaire par suite du mouvement diurne. Pour éviter toutes ces complications, j'ai pensé qu'il valait mieux photographier un objet immobile; j'ai choisi une échelle divisée soustendant un angle supérieur au diamètre solaire afin de déterminer la loi même de déformation dans le cas où ces déformations auraient été sensibles.

L'échelle divisée a été obtenue de la manière suivante : une lame de verre de 60 centimètres de longueur sur 8 de largeur a été légèrement enfumée sur une lampe à huile; avec le traceIet d'une machine à diviser, on a enlevé le noir de fumée de façon à produire 566 divisions à 1 millimètre d'intervalle et numérotées de 10 en 10. La couche de noir de fumée a été protégée d'abord par une couche de collodion ricinié, puis par une couche de vernis.

Cette échelle a été placée sur l'appui d'une fenêtre exposée au midi au bout d'un long corridor du pavillon de l'École polytechnique. La lunette photographique, construite par MM. Brunner, se composait d'un objectif achromatique de 100 millimètres d'ouverture et de 1^m42 de foyer et d'un petit porte-plaque, monté à la place de l'oculaire astronomique; la distance des deux verres avait été fixée à 15 millimètres, l'objectif était situé à 40 mètres de l'échelle. A cette distance, les divisions millimétriques soustendaient chacune un angle de $4'',79$, les divisions extrêmes, un angle de $45'$.

A l'aide de quatre ou cinq épreuves photographiques faites au collodion humide, le foyer chimique a été déterminé exactement : la tolérance n'excède guère 2 à

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

3 dixièmes de millimètre : les épreuves définitives ont été obtenues sur plaques daguerriennes iodées puis brômées.

Les difficultés, que j'ai rencontrées pour obtenir des épreuves bien nettes, ont été les suivantes :

1° Les ondulations de l'air échauffé, lorsque j'ai essayé d'opérer à l'air libre : c'est ce qui m'a conduit à opérer dans un corridor sombre et clos de presque toutes parts.

2° Les trépidations du bâtiment, qui ont produit un peu de trouble dans les épreuves : en effet, le seul corridor, ayant une fenêtre au midi dont je pusse disposer commodément, était au cinquième étage.

3° L'impossibilité d'obtenir des épreuves instantanées qui nécessitent l'emploi de la lumière solaire directe par transparence : la longueur du temps de pose est défavorable à la netteté, en ce sens qu'il exagère l'influence des petits déplacements de l'image par les réfractions irrégulières et par les trépidations. Quant à l'emploi de la lumière solaire directe, il eût nécessité un héliostat portant un miroir de 60 centimètres de largeur, et de plus une lentille de concentration de même ouverture et de 40 mètres de foyer, pour que tous les points de l'échelle pussent recevoir la lumière. Il ne m'a pas été possible de réunir ces conditions : aussi me suis-je contenté d'éclairer l'échelle à l'aide d'un verre blanchi au blanc de zinc, recevant les rayons directs du Soleil et les rayons réfléchis par une bande de glace dans le sens de l'axe de la lunette.

Grâce à ces précautions, j'ai pu obtenir en 30 secondes des épreuves assez belles : je les ai successivement examinées au microscope avec un grossissement de vingt-cinq fois et j'ai mis de côté les plus nettes.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Le relevé micrométrique de l'une de ces épreuves a été exécuté au Conservatoire des arts et métiers, où M. le général Morin et M. Tresca ont bien voulu mettre à ma disposition la machine à diviser de Gambey; je dois aussi remercier M. Gustave Tresca de l'obligeance avec laquelle il a fait adapter tous les dispositifs nécessaires à l'exécution de ces mesures.

Voici comment j'ai opéré : On examina au microscope, installé sur la machine à diviser, les vingt-cinq épreuves qui paraissaient mériter attention sous un grossissement de deux cent trente fois (1) avec un éclairage normal intérieur; la plus nette de toutes sur la longueur entière de l'échelle fut disposée sur le chariot de la machine à diviser de manière à ce que la première division tombât sous le fil du micromètre. On faisait alors cinq pointés, puis on tournait la vis de la machine d'un tour entier. Le nombre de divisions qui passaient sous le fil était de vingt-neuf moins une fraction; avec le micromètre on mesurait la différence; c'était un micromètre à fil dont le tambour était divisé en cent parties : un tour du tambour équivalait à $\frac{1}{50}$ de millimètre environ. On répétait ainsi la même opération jusqu'au bout de l'épreuve, c'est-à-dire dix-neuf fois.

Grâce à cette manière de procéder, on se met à l'abri

(1) Ce grossissement est peut-être un peu exagéré : mais l'objectif du microscope étant le seul qui portât un prisme à 45° permettant l'éclairage normal intérieur, je ne pouvais pas en disposer un autre présentant une disposition aussi avantageuse.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

des erreurs périodiques de la vis de la machine à diviser puisqu'on n'utilise que des tours entiers de la vis : on n'a plus à craindre que les inégalités des pas successifs qui sont presque insignifiantes dans les vis bien travaillées: la machine que j'avais à ma disposition ayant été construite et rectifiée par Gambey, pour son propre usage, je n'avais aucune inquiétude à l'égard de cette erreur : néanmoins il était bon de se ménager quelques vérifications indirectes : on verra par les résultats obtenus qu'à moins de compensations bien improbables les erreurs sont inférieures à un demi pour mille.

Quant aux erreurs de la vis du micromètre, spécialement aux erreurs périodiques, je les ai étudiées et mesurées vers le milieu de la vis; mais elles sont inférieures à la limite d'exactitude nécessaire pour la validité des conclusions que j'avais en vue.

Le mode de mesure adopté a encore un autre avantage, celui de réduire à des mesures différentielles la mesure de longueurs d'une certaine étendue, et par suite à accroître notablement la précision. Ainsi chaque déplacement du micromètre ne correspondait qu'à un demi-tour du tambour, c'est-à-dire à 1 centième de millimètre, en sorte que la somme totale des déplacements du micromètre n'a correspondu qu'à 2 dixièmes de millimètre environ; l'épreuve avait 20 millimètres.

En résumé, l'épreuve daguerrienne de l'échelle divisée a été étudiée de vingt-neuf en vingt-neuf divisions (elle en comprend cinq cent soixante-six). Soit x la valeur en millimètre d'une division et y la partie complémentaire nécessaire pour former la longueur d'un pas de la vis de la

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

machine à diviser (1 millimètre); si les divisions sont égales, on doit avoir :

$$29\,x - y = 1$$

Soit u la longueur exprimée en millimètres qui correspond à un tour du tambour du microscope, les lectures successives $z_0\ z_1 \ldots z_n$ des divisions du tambour devront être telles que

$$u(z_1 - z_0) = u(z_2 - z_1) = \ldots\ = y$$

c'est-à-dire former les termes d'une progression arithmétique, si les divisions de l'épreuve sont réellement équidistantes.

Voici le tableau des observations : chaque nombre est la moyenne des lectures de cinq pointés :

N° d'ordre des DIVISIONS.	LECTURE du MICROSCOPE.	CALCUL.	DIFFÉRENCE.	N° d'ordre des DIVISIONS.	LECTURE du MICROSCOPE.	CALCUL.	DIFFÉRENCE.
	t.	t.			t.	t.	
28	10,00	9,99	—0,01	255	6,00	6,04	—0,04
57	10,55	10,58	—0,03	284	6,64	6,63	—0,01
86	11,17	11,17	0,00	313	7,22	7,22	0,00
115	11,72	11,75	—0,03	342	7,77	7,80	—0,03
144	12,36	12,34	+0,01	371	8,35	8,38	—0,03
173	12,98	12,93	+0,05	400	9,00	8,97	+0,03
202	13,60	13,52	+0,08	429	9,63	9,55	+0,08
231	14,09	14,11	—0,02	458	10,11	10,14	—0,03
260	14,64	14,71	—0,07	487	10,79	10,73	+0,06
				516	11,33	11,31	+0,02
				545	11,81	11,90	—0,09
Valeur de la raison de la progression t. 0,5883			Ecart moyen avec la moyenne 0,03	Valeur de la raison de la progression t. 0,5862			Ecart moyen avec la moyenne 0,04

Ce tableau contient la première série de mesures :

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

l'échelle a été étudiée en deux fois : quoique les parties puissent se raccorder, je n'ai considéré cette série que comme un essai et j'en ai refait une autre de manière à mesurer toute l'épreuve en une fois sans être obligé de changer l'origine des lectures du microscope.

N° d'ordre des DIVISIONS.	LECTURE du MICROSCOPE.	CALCUL.	DIFFÉRENCE.	N° d'ordre des DIVISIONS.	LECTURE du MICROSCOPE.	CALCUL.	DIFFÉRENCE.
	t.	t.			t.	t.	
0	5,14	5,15	—0,01	319	11,60	11,54	+0,06
29	5,74	5,73	+0,01	348	12,06	12,12	—0,06
58	6,25	6,31	+0,06	377	12,67	12,70	—0,03
87	6,77	6,89	—0,12	406	13,30	13,28	+0,02
116	7,43	7,47	—0,04	435	13,90	13,86	+0,04
145	8,09	8,05	+0,04	464	14,46	14,44	+0,02
174	8,73	8,63	+0,10	493	14,98	15,02	—0,04
203	9,30	9,22	+0,08	522	15,53	15,60	—0,07
232	9,86	9,80	+0,06				
261	10,35	10,38	—0,03	Valeur de la raison de la progression t. 0,5808			Ecart moyen avec la moyenne 0,05
290	10,97	10,96	—0,01				

Cette seconde série de mesure montre bien que, d'un bout à l'autre de l'échelle, la régularité est aussi parfaite qu'on est en droit de l'attendre : en effet, en regard des valeurs observées se trouvent les valeurs calculées d'après la méthode de moindres carrés, c'est-à-dire la série des termes de la progression arithmétique qui s'accorde le mieux avec les observations : les écarts extrêmes sont $-0^t,12$ et $+0^t,10$: réduits en fraction de millimètre, ils correspondent à $\frac{1}{500}$ de millimètre : l'écart moyen est 0,05 c'est-à-dire $\frac{1}{1000}$ de millimètre. Il est remarquable que les

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

pointés soient aussi précis, car sous le grossissement de deux cent trente fois employé, es traits sont un peu estompés. On peut donc affirmer, d'après ces mesures, qu'il n'y a aucune déformation appréciable dans l'image daguerrienne, obtenue au foyer d'une lunette achromatisée pour les rayons chimiques par l'écartement des verres. L'image de divisions équidistantes est formée par des traits équidistants. S'il y avait une déformation appréciable, elle se trahirait par des différences systématiques entre les nombres observés et les nombres calculés. Ici, il n'y a rien de pareil, les différences sont par groupes inégaux alternativement positives et négatives (1).

Je terminerai en donnant la valeur absolue des divisions mesurées et les erreurs relatives du résultat.

On a d'abord la relation

$$29x - y = 1^{m}$$

(1) Toutefois il y a peut-être une apparence de périodicité dans ces différences : quoique la valeur absolue des écarts soit au-dessous de la limite de précision qu'il importe de conserver je m'en suis préoccupé.

J'ai pensé que cette périodicité venait très-probablement des petites erreurs périodiques de la vis micrométrique car en prenant la moyenne des lectures qui donnent des différences positives ou négatives, ou mieux en traçant la courbe des écarts, on trouve que les écarts extrêmes correspondent à peu-près aux mêmes divisions du tambour. J'ai donc tenu à vérifier que la vis du micromètre produisait des erreurs périodiques et j'ai voulu en mesurer l'amplitude vers le milieu de la vis.

A cet effet j'ai effectué la série suivante qui a consisté à mesurer la même longueur convenablement choisie en prenant des origines variables : j'ai adopté deux traits tracés sur plaqué d'argent et distants de $\frac{1}{100}$ de millimètre, c'est-à-dire un demi-pas apparent. Il est facile de voir que, dans ces conditions, les différences extrêmes des valeurs conclues donnent qua-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

adoptant pour y le nombre de la deuxième série $0^t,581 = 0,581\,xu$

$$29\,x - (0^t,581)\,u\,1^{mm}$$

D'autre part, j'ai mesuré la longueur de dix divisions

---

tre fois *l'erreur* périodique cherchée a, erreur définie par une formule telle que

$$x = \frac{n}{N}h + a \sin 2\pi\left(\frac{n}{N} + \varphi\right)$$

x longueur à mesurer,
N nombre de divisions du tambour,
h longueur apparente du pas de vis,
n lecture du tambour,
a, φ constantes,

d'où l'on conclut par approximation :

$$n - n_0 = \frac{Nl}{h} - 2a\frac{N}{h}\sin\Pi\frac{l}{n}\cos 2n\left(\frac{n+n_0}{2N} + \varphi\right)$$

VOICI LA SÉRIE DE VALEURS OBTENUES.

Lecture initiale.	*Longueur absolue.*
t.	t.
8,082	0,498
8,176	0,483
8,265	0,481
8,363	0,464
8,533	0,464
8,657	9,472
8,777	0,489
8,894	0,484
8,992	0,492
9,051	0,499

Ainsi la longueur conclue varie lorsque l'origine de la lecture change d'une manière régulière, de 0',499 à 0',464 : la différence est donc de 0',035 en complétant le calcul de la sinussoïde. La différence atteint 0,04 : donc la vis micrométrique est soumise à des erreurs périodiques dont l'amplitude est $\pm$ 0,01. Ces erreurs sont trop petites pour mériter une correction spéciale, mais elles suffisent pour expliquer partiellement la périodicité aperçue plus haut.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

en partie du tambour

$$10x = 17{,}25u$$

d'où

$$x = 1{,}725u$$

$$[29 + 1{,}725 - 0{,}581]u = 1$$

d'où

$$u = \frac{1}{49{,}44} = 0^{mm},02023$$

et

$$x = 0^{mm},0349$$

Ainsi le tour de vis du microscope vaut $0^{mm},02023$, la longueur d'une division sur l'épreuve $0^{mm},0349$.

L'écart moyen étant de $0^{t},05$ c'est-à-dire $\frac{1}{1000}$ de millimètre, les divisions sont toutes égales entre elles à une approximation, représentée par $\frac{1}{34,9}$ ou $\frac{1}{35}$ de leur valeur.

Il est bon de remarquer que sur l'échelle primitive, divisée sur noir de fumée, il peut y avoir des erreurs accidentelles du même ordre, car $\frac{1}{35}$ de division correspond à $0^{mm},03$ environ, et l'on n'est pas assuré que le noir de fumée a été partout régulièrement enlevé avec cette approximation.

En résumé, à quelque point de vue qu'on se place, la régularité dans l'épreuve daguerrienne est assez parfaite pour qu'on soit assuré que le dispositif optique est irréprochable et qu'on puisse se fier aux mesures absolues qu'on est en droit de lui demander.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

MÉTHODE D'OBSERVATION

POUR

LE PASSAGE DE VÉNUS

ET POUR

LES ÉCLIPSES DE SOLEIL

PAR

M. A. CORNU

(Note lue à la Commission du passage de Vénus, dans sa séance du 21 juin 1873.)

Je me suis proposé de chercher, parmi les méthodes indiquées plutôt qu'usitées en astronomie, celle qui pourrait remplacer dans l'observation du passage de Vénus l'estime directe de l'heure des contacts, estime qui présente des difficultés signalées et discutées bien des fois par les astronomes et dont la précision devient très-bornée, avec l'emploi des procédés photographiques.

La méthode à laquelle je me suis arrêté, consiste dans la

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

mesure de la corde commune aux deux disques, c'est-à-dire de la distance des extrémités ou *cornes de l'échancrure* du disque solaire à des époques bien déterminées, surtout dans le voisinage de l'heure des contacts.

Le caractère essentiel de cette méthode repose sur la propriété géométrique suivante : La longueur de l'échancrure étant une quantité petite du premier ordre, l'épaisseur minimum du segment commun n'est que du second ordre.

Il en résulte que la mesure, même avec une précision médiocre de la longueur de l'échancrure, définit avec une très-grande précision la quantité dont l'un des disques a *mordu* sur l'autre, de sorte que, si l'on connaît la vitesse relative des deux disques, on calcule aisément l'époque du contact.

On ne saurait mieux comparer cette méthode, au point de vue géométrique, qu'à celle de Rœmer et Bessel pour la détermination de la latitude par l'observation d'une étoile zénithale dans le premier vertical : on détermine, par une mesure de temps, la longueur de la corde commune au petit cercle décrit par l'étoile et au cercle vertical perpendiculaire au méridien, et on en déduit les flèches avec une très-grande exactitude.

Au point de vue pratique, cette méthode me paraît la plus parfaite des méthodes indirectes proposées pour l'observation du passage de Vénus, c'est-à-dire des méthodes où l'on n'estime pas directement l'heure du contact. Comme instrument de mesure elle n'exige à la rigueur qu'un micromètre à un seul fil mobile, si l'on veut opérer par vision directe à l'équatorial : l'opération consiste à amener les

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

deux fils sur les deux cornes de l'échancrure, de façon qu'ils soient, en direction, bien perpendiculaires à la corde commune, et à estimer l'heure à laquelle la coïncidence est complète.

Ce mode d'observation a un autre avantage, c'est qu'il s'applique à une période où d'autres instruments réputés très-parfaits sont en défaut : je veux parler surtout de l'héliomètre, qui ne peut fonctionner utilement suivant la méthode ordinaire que lorsque les disques sont séparés.

Comme on l'aperçoit aisément, l'héliomètre peut également servir, quoique peut-être avec quelques précautions, à mesurer la longueur de l'échancrure : il suffirait de maintenir la ligne des centres des deux images parallèlement à la corde commune et de fixer le moment où les deux cornes opposées des deux images viennent en coïncidence.

Quant aux oculaires à double image, ils seraient évidemment d'un emploi très-avantageux et supérieur de beaucoup au dispositif compliqué et coûteux de l'héliomètre.

Mais c'est surtout dans l'observation photographique du phénomène que la méthode est avantageuse : en effet, grâce à l'énergie chimique de la lumière solaire, les épreuves peuvent être presque instantanées : l'époque à laquelle correspond l'image est donc définie avec une exactitude plus grande que par toute estime directe.

Quant aux mesures micrométriques des épreuves, elles peuvent être exécutées à loisir, avec une précision presque indéfinie (*).

(*) Voir plus haut la Note sur l'approximation en valeur absolue des pointés sur les épreuves daguerriennes du disque solaire, page 299.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Cet aperçu suffit pour montrer qu'à part l'estime directe du contact, la méthode photographique dont le principe vient d'être indiqué est supérieure de beaucoup à tous les autres modes d'observation.

MODES DE CALCUL.

Les données d'observation qu'on emprunte, soit aux mesures directes, soit au relevé des clichés photographiques sont les longueurs des cordes

$$2y_0 \quad 2y_1 \quad 2y_2 \ldots\ldots \quad 2y_n$$

et les époques correspondantes,

$$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \ldots\ldots \quad x_n$$

et au besoin, les diamètres des deux disques 2R, $2r$, la distance H, h de leurs bords les plus voisins.

On peut, de ces données, déduire l'heure des contacts, de deux manières indépendantes et qui peuvent, jusqu'à un certain point, se contrôler mutuellement.

PREMIER MODE DE CALCUL.

Le premier mode de calcul est fondé sur la propriété suivante, qu'une construction graphique rend très-claire.

Si l'on porte les demi-longueurs des cordes y_0, y_1, comme ordonnées sur les époques correspondantes prises

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

comme abscisses, le lieu obtenu est sensiblement une ellipse (fig. 1), ayant pour petit axe le diamètre de la planète et

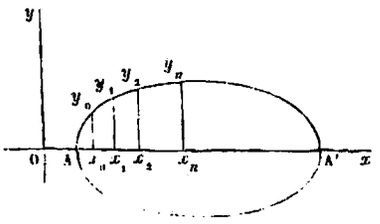


Fig. 1.

pour grand axe la durée du passage de la planète sur le bord solaire.

La courbe est en réalité du quatrième degré, mais elle se réduit à deux courbes du deuxième degré, qui sont des ellipses dans deux cas particuliers : 1° lorsque l'un des disques est très-grand par rapport à l'autre ; 2° lorsque les deux disques sont égaux.

En effet, soient

p la distance minimum de la trajectoire rectiligne du centre de la planète au centre du Soleil (fig. 2),

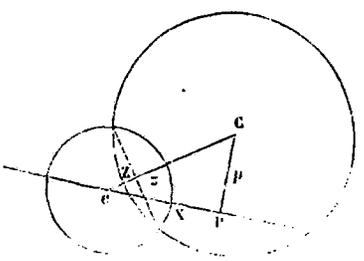


Fig. 2.

λ l'époque où le centre de la planète passe au minimum de distance,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

v la vitesse uniforme du mouvement,
R r les rayons des deux disques,
les deux flèches Z, z du segment commun sont respectivement données par les formules :

$$Z(Z-2R)=y^2$$
$$z(z-2r)=y^2$$

d'où

$$Z=R\pm\sqrt{R^2-y^2}$$
$$z=r\pm\sqrt{r^2-y^2}$$

Dans le triangle CcP on a :

$$(R+r-Z-z)^2=p^2+v^2(X-x)^2$$

ou

$$(\pm\sqrt{R^2-y^2}\pm\sqrt{r^2-y^2})^2=p^2+v^2(X-x)^2$$

courbe du quatrième degré qui se réduit à une ellipse lorsque $R=r$, car les deux radicaux deviennent identiques et disparaissent d'eux-mêmes :

$$4(R^2-y^2)=p^2+v^2(X-x)^2$$

Si le rayon R devenait infini, la formule deviendrait illusoire, car p et X seraient aussi infinis : l'une des boucles

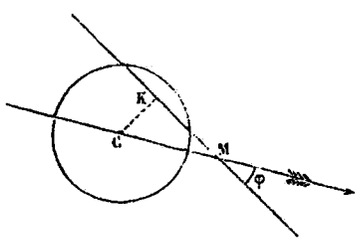


Fig. 3.

de la courbe du quatrième degré est infiniment éloignée, et celle qui reste devient une ellipse dont on a

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

directement l'équation par la considération de la figure ci-jointe (fig. 3).

Soit U l'époque où le centre du disque coupe le bord KM rectiligne du disque infiniment grand, et φ l'angle de la trajectoire avec ce bord.

Dans le triangle CKM on a :

$$\overline{CM}^2 \sin^2\varphi = \overline{CK}^2$$
$$v^2(U-x)^2 \sin^2\varphi = (r-z)^2 = r^2 - y^2$$

c'est l'équation d'une ellipse.

On retrouverait aisément cette équation en préparant convenablement celle du quatrième degré avant de supposer $R = \infty$.

Dans le cas du passage de Vénus où le diamètre de la planète est inférieur au trentième du diamètre solaire, la courbe représentative diffère peu d'une ellipse, surtout aux environs des sommets dont les abscisses représentent les heures des contacts.

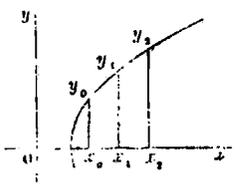


Fig. 4.

Pour faire le calcul, on déterminera par trois observations l'équation de l'ellipse osculatrice (fig. 4)

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$$Ay^2 + B(x-\alpha)^2 = 1 \tag{1}$$

à la courbe en question

$$Ay_0^2 + B(x_0-\alpha)^2 = 1$$
$$Ay_1^2 + B(x_1-\alpha)^2 = 1$$
$$Ay_2^2 + B(x_2-\alpha)^2 = 1$$

d'où, en retranchant membre à membre

$$A(y_1^2-y_0^2) + B\left[(x_1-\alpha)^2-(x_0-\alpha)^2\right] = 0$$
$$A(y_1^2-y_0^2) + B(x_1-x_0)\,[x_1+x_0-2\alpha] = 0$$
$$\begin{cases} \dfrac{A}{B}\dfrac{(y_1^2-y_0^2)}{x_1-x_0} + x_1 + x_0 - 2\alpha = 0 \\ \dfrac{A}{B}\dfrac{(y_2^2-y_0^2)}{x_2-x_0} + x_2 + x_0 - 2\alpha = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Les deux équations (2) retranchées membre à membre déterminent le rapport $\frac{A}{B}$ puis α : enfin la substitution des coordonnées de l'un des points dans l'une des équations (1) définit A et B.

On en conclut l'abscisse du sommet voisin des trois points choisis en faisant $y = 0$ dans l'équation (1) : elle représente l'heure du contact

$$x = \alpha \pm \frac{1}{\sqrt{B}};$$

le signe $\pm$ se détermine sans aucune hésitation.

Ce mode de calcul n'offre aucune difficulté : il a l'avantage de n'exiger aucune *mesure absolue d'angles ou de longueurs :* on construit, pour ainsi dire, une *courbe d'erreur* dont la forme est connue d'avance, et on détermine l'ordonnée nulle.

On voit encore aisément que, si les déformations de

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

l'image qu'on mesure suivent une loi régulière avec le temps, la précision de la méthode ne change pas, à la condition qu'on opère dans le voisinage des contacts. En effet toute déformation qui n'agira sur les ordonnées que par un terme de la forme $a + b\theta$, on aura

$$A(y + b\theta)^2 + B(x - \alpha)^2 = 1$$

$$\theta = (x - \alpha) \pm \frac{1}{\sqrt{B}}$$

θ étant le temps écoulé à partir de l'abscisse du sommet ne changera pas la nature de la courbe, qui restera une ellipse; de plus, cette ellipse aura même sommet, car la déformation étant nulle lorsque l'échancrure est nulle, le terme constant a est égal à zéro. Par suite, l'équation que l'on emploiera sera une équation empirique, mais qui, malgré cela, définira le sommet, c'est-à-dire l'époque du contact avec la même précision.

Ainsi la réfraction, le déplacement diurne, la déformation des images optiques n'ont pas d'influence sur le résultat définitif.

Quant à l'application des méthodes du calcul des probabilités à un nombre surabondant d'observations, elle ne laisse pas d'être un peu pénible : je n'entre pas dans le détail des essais que j'ai tentés pour la simplification de ces calculs, par la considération d'une certaine parabole qu'on peut substituer à l'ellipse. Il y aurait d'ailleurs lieu d'étudier ultérieurement le système de formules les plus appropriées à la discussion des observations.

Les mêmes considérations s'appliquent également à l'observation des éclipses de Soleil par la Lune. Au point

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de vue géométrique, on se trouve dans le cas également favorable où les deux disques sont égaux et où la courbe représentative des observations est une ellipse.

Au point de vue de la précision, le disque de la Lune, dont les bords sont irréguliers, se prête moins bien que celui de planètes plus éloignées ; mais, ainsi que je l'ai vérifié par des observations photographiques de l'éclipse du 26 mai 1873, les résultats sont très-satisfaisants et font bien augurer de l'application de la méthode au passage de Vénus (*).

DEUXIÈME MODE DE CALCUL.

La méthode précédente exige trois observations, convenablement espacées, et serait en défaut, ou tout au moins peu avantageuse, si, pour un motif ou pour un autre, on ne disposait que d'observations par trop voisines du contact et entachées de petites incertitudes. On voit qu'alors le sommet de l'ellipse serait très-mal défini par ces trois points qui, par l'époque de leur détermination, seraient cependant fort avantageux.

J'ai songé à parer à cet inconvénient en supposant connus les diamètres des deux planètes, la position de la trajectoire relative et la vitesse du mouvement. Comme ces données n'entrent que pour calculer une correction fort petite (dans l'hypothèse où nous sommes placés), ces éléments n'ont pas besoin d'être connus avec une grande

(*) Voir plus loin : *Résultats numériques relatifs à l'observation photographique de l'éclipse partielle du Soleil du* 26 *mai* 1873.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

exactitude et, à la rigueur, les tables astronomiques la fourniraient avec une précision plus que suffisante. Mais, en général, on n'aura pas besoin de recourir aux tables : l'observation directe ou le relevé des clichés donnera tous ces éléments.

Voici le détail du calcul.

Dans l'équation générale précédemment établie

$$(R+r-Z-z)^2=p^2+v^2(X-x)^2$$

où

$$z=R\pm\sqrt{R^2-y^2}$$

$$z=r\pm\sqrt{r^2-y^2}$$

posons

$$R+r=\rho$$

$$Z+z=\zeta$$

$$(\rho-\zeta)^2=p^2+v^2(X-x)^2$$

Soit $x=x_0$ l'heure du premier contact.

On aura :

$$\zeta=0$$

d'où

$$\rho^2=p^2+v^2(X-x_0)^2$$

d'où

$$v^2=\frac{\rho^2-p^2}{(X-x_0)^2}$$

Retranchant membre à membre

$$-2\rho\zeta+\zeta^2=v^2\left[(X-x)^2-(X-x_0)^2\right]$$

$$=v^2[X-x-X+x_0]\quad[X-x+X-x_0]$$

$$=v^2[x_0-x]\quad[2X-(x+x_0)]$$

$$\zeta\left(1-\frac{\zeta}{2\rho}\right)=\frac{v^2}{2\rho}[x-x_0]\quad[2X-x+x_0]$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Substituant la valeur de v^2

$$\zeta\left(1-\frac{\zeta}{2\rho}\right)=\frac{\rho^2-p^2}{\rho(X-x_0}\,(x-x_0)\left(X-\frac{x+x_0}{2}\right)$$

$$x-x_0=\frac{\rho(X-x_0)^2}{\rho^2-p^2}\,\frac{\zeta\left(1-\frac{\zeta}{2\rho}\right)}{\left(X-\frac{x+x_0}{2}\right)}$$

Formule qu'on peut résoudre par approximation, en négligeant au numérateur ζ^2, et au dénominateur la différence $x - x_0$: dès lors on a la formule très-simple

$$x-x_0=\frac{\rho(X-x_0)}{\rho^2-p^2}\cdot\zeta$$

laquelle ser à calculer une valeur approchée de x à l'aide de laquelle on poursuit l'approximation.

On conçoit aisément que cette méthode ne donne de résultats précis qu'avec des observations assez rapprochées des contacts, à moins qu'on n'ait à sa disposition des *mesures absolues* très-exactes, ce qui exclut les observations entachées d'erreurs provenant de déformations optiques ou autres.

Comme mode de discussion des observations isolées, cette méthode de calcul est très-avantageuse, car elle permet d'apprécier la concordance de l'une quelconque d'entre elles sans que l'influence des autres se fasse sentir.

RÉSUMÉ.

En résumé, la méthode d'observation de la *corde commune* ou de l'*échancrure* permet d'utiliser une longue période du passage à la détermination de l'heure des con-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

tacts : elle peut s'appliquer aux observations soit de l'héliomètre, soit de l'équatorial muni d'un oculaire à double image, même à la rigueur, d'un micromètre à un seul fil. Mais elle est surtout avantageuse dans les observations photographiques, à cause de la double précision de la mesure de l'heure et du relevé micrométrique.

Enfin deux modes de calcul très-simples permettent de calculer, de contrôler et de discuter les résultats.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

RÉSULTATS NUMÉRIQUES

RELATIFS A

L'OBSERVATION PHOTOGRAPHIQUE

DE L'ÉCLIPSE PARTIELLE DU SOLEIL

DU 26 MAI 1873

PAR

M. A. CORNU.

(Note présentée à la Commission du Passage de Vénus, dans sa séance du 21 juin 1873.)

Une lunette photographique de dimensions moitié moindres que celles qui ont été adoptées par la Commission, ayant été construite en vue d'études relatives à la construction et à l'installation des appareils définitifs, j'ai pensé qu'il était utile de l'employer à l'observation photographique de l'éclipse partielle de Soleil du 26 mai 1873 afin de se rendre compte, par l'observation d'un phénomène analogue à celui du passage de Vénus, du maniement des appareils et de l'efficacité des méthodes proposées pour le relevé micrométrique des épreuves. (Voir plus haut la Note sur *la méthode d'observation pour le passage de Vénus*, etc.)

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La lunette photographique se composait d'un objectif dont les verres étaient de matière identique à celle des objectifs des quatre appareils définitifs commandés par la Commission : l'ouverture ($72^{mm},5$), les courbures et par suite la distance focale de cet objectif avaient une valeur égale à la moitié de celles des objectifs précités. Un tube carré en bois servant de corps à la lunette ; le porte-plaque et le tube de tirage avaient été empruntés à la lunette construite par MM. Brunner et décrits dans une précédente communication.

L'objectif en question a d'abord été étudié suivant les règles que j'ai données : le résultat de ces études a été le suivant : l'intervalle entre la lentille convergente de crown-glass et la lentille divergent de flint-glass, était de $27^{mm},7$ pour que l'achromatisme chimique fût aussi satisfaisant que possible : la distance focale se réduisait ainsi à $1^{m},876$ comptés à partir de la surface extérieure du crown. (Un écartement donné des deux verres produisait une diminution de foyer environ 7 fois $\frac{1}{2}$ plus considérable.)

La disposition générale de l'appareil était celle adoptée par la Commission : la lunette photographique était posée horizontalement sur des supports en bois : un héliostat de Silberman, muni d'un miroir plan, retouché par M. Martin, permettait de renvoyer le faisceau solaire suivant l'axe de la lunette.

Le local où était installé l'appareil n'était malheureusement pas très-favorable ; c'était une mansarde située au cinquième étage du pavillon des élèves, à l'École polytechnique : la stabilité du plancher était assez médiocre et les trépidations du bâtiment nuisaient beaucoup à la per-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

fection des images photographiques. De plus, la seule fenêtre utilisable était exposée au levant, c'est-à-dire presque dans la direction du Soleil au moment de l'éclipse ; la réflexion sur le miroir était très-oblique.

L'opération a été conduite de manière à représenter autant que possible l'opération définitive lors du passage de Vénus. Un chronomètre réglé à quelques secondes près sur le temps moyen, m'avertit de l'époque approximative du premier contact, que d'ailleurs j'observais par projection à l'aide d'une lentille auxiliaire fixée en arrière de la lunette ; j'étais malheureusement presque seul pour suffire à tout, de sorte que je laissai écouler plus de 50 secondes avant de faire la première épreuve. A partir de ce moment tout a fonctionné régulièrement et j'ai obtenu trente épreuves du Soleil, aux heures indiquées dans le tableau ci-après ; elles furent réparties en trois groupes : douze dans les six premières minutes d'observation, huit pendant le maximum de l'éclipse et dix vers l'époque du dernier contact : vingt-quatre de ces images ont pu être utilisées pour les mesures.

Ces épreuves obtenues sur plaqué d'argent d'après le procédé de Daguerre, c'est-à-dire sensibilisées à l'iode pur (quelques-unes exposées légèrement à la vapeur de brôme, pour accélérer l'action) ont été mises sous les yeux de la Commission : avec un grossissement de 25 fois la netteté des bords était très-satisfaisante malgré les imperfections diverses de l'appareil d'essai.

J'ai relevé, à l'aide d'une vis micrométrique faisant mouvoir l'épreuve sur un chariot à coulisse, la longueur des échancrures successives produites sur l'image solaire par le bord de la lune ainsi que le diamètre du disque du So-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

leil. Le tableau ci-joint renferme les résultats de ces mesures qui ont toutes été répétées deux fois et qui ont toujours été concordantes à moins d'un centième de millimètre ; cette précision est bien suffisante pour la méthode que j'ai décrite dans une Note précédente, car la longueur de l'échancrure, ou corde commune aux deux disques, ne sert qu'à calculer la flèche correspondante. Les chiffres romains indiquent le numéro d'ordre des plaques daguerriennes : l'unité ou tour de vis de l'appareil micrométrique était : $1^t = 0^{mm},503$.

RÉSULTATS DU RELEVÉ MICROMÉTRIQUE

DES ÉPREUVES DAGUERRIENNES DU SOLEIL OBTENUES PENDANT L'ÉCLIPSE PARTIELLE DU 26 MAI 1873.

	$2y$ LONGUEUR de l'échancrure.	$2R$ DIAMÈTRE solaire.	T ÉPOQUE de l'épreuve.		$2y$ LONGUEUR de l'échancrure.	$2R$ DIAMÈTRE solaire.	T ÉPOQUE de l'épreuve.
I.	4t73	34t91	7h 45m 50s	IX.	24t26	34t94	8h 30m 40s
	5,07		46 0		24,25		39 50
II.	8,17		47 40	X.	19,48		9 4 10
	8,34		47 50		19,33		4 50
III.	9,98	34,72	49 10	XI.	15,73	34,74	12 50
	10,41		49 30		15,48		13 0
IV.	12,19		51 20	XIII.	6,74		23 10
	12,44		51 30		6,18		23 20
V.	14,06		53 30	XIV.	4,80		24 10
	»		»		»		»
VII.	24,40		8 31 40	XV.	1,92	34,78	25 10
	24,47		31 50		0,00		25 20
VIII.	24,44	34,93	34 20				
	24,45		34 30				

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

De ces nombres, sans avoir égard à la valeur absolue ou angulaire des épreuves, on déduit les époques des deux contacts, c'est-à-dire précisément les éléments qu'on cherche a obtenir dans l'observation du passage de Vénus.

Voici l'application des deux méthodes de calcul décrites dans la Note précédente.

Un premier aperçu des résultats a été obtenu en construisant graphiquement les deux portions d'ellipse correspondant au commencement et à la fin de l'éclipse; ce tracé m'a même permis de corriger immédiatement une erreur de une minute commise par inadvertance sur les époques des épreuves n° I.

Première méthode de calcul.

J'ai choisi sur le tracé graphique les trois points qui dans chaque cas définiraient le mieux l'ellipse osculatrice, et qui se correspondaient à peu près comme disposition.

Premier contact.		*Deuxième contact.*	
$2y_0 = 4^{l},73$	$x_0 = 7^h 45^m 50^s$	$2y_0 = 15^{l},48$	$x_0 = 9^h 13^m 0^s$
$2y_1 = 8,17$	$x_1 = 7\ 47\ 40$	$2y_1 = 6,74$	$x_1 = 9\ 23\ 10$
$2y_2 = 14,06$	$x_2 = 7\ 53\ 30$	$2y_2 = 4,80$	$x_2 = 9\ 24\ 10$

Pour simplifier le calcul on a retranché, respectivement aux abscisses, les quantités constantes, $7^h 45^m 50^s$ et $9^h 13^m 0^s$. On arrive sans peine à déterminer les coefficients de l'équation de l'ellipse

$$Ay^2 + B(x-\alpha)^2 = 1$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On trouve directement

$$\frac{A}{B} = 62760 \qquad \frac{A}{B} = 48937$$

$$\frac{1}{B} = 10\,718\,000 \qquad \frac{1}{B} = 5\,629\,700$$

$$\alpha = 3269^s,7 \qquad \alpha = -1742^s,5$$

d'où l'on conclut l'abscisse du sommet par la formule

$$x' = \alpha - \frac{1}{\sqrt{B}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{B}} = 3273^s,7 \qquad \frac{1}{\sqrt{B}} = 2371^s,9$$

$$x' = -4^s,0 \qquad x' = 730^s,4 = 12^m\,10^s,4$$

et par suite les époques x_1 et x_2 des deux contacts

$$x_1 = 7^h\,44^m\,36^s,0 \qquad x_2 = 9^h\,25^m\,10^s,4$$

Ces calculs se vérifient aisément en utilisant les équations surabondantes que fournit la permutation des indices (1,0) (2,1) (2,0)

La *Connaissance des temps* pour 1873 (p. 393) donnait comme durée approximative de l'éclipse $1^h 40',3$, à un dixième de minute près.

J'ai trouvé, d'après l'observation photographique

$$x_2 - x_1 = 1^h\,40^m\,14^s,5$$

Ces résultats présentent une vérification qu'il importe de signaler : comme le mouvement relatif de la lune est sensiblement rectiligne et uniforme les *deux portions* de courbe voisines du sommet doivent être identiques ; je dis les *deux portions*, car le reste des ellipses osculatrices ne sont pas nécessairement identiques ; il est évident en effet que les longueurs absolues des deux axes sont mal définies par les points voisins du sommet ; par suite on ne peut pas de-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

mander que les valeurs de A ou de B soient égales dans les deux calculs.

Mais ce qu'on peut exiger avec une exactitude plus grande c'est l'égalité *de forme au sommet*, c'est-à-dire l'égalité des rayons de *courbure* en ce point. Ce rayon de courbure se calcule aisément en rapportant l'ellipse à son sommet; à cet effet posons $u = x + x'$, x' étant l'abcisse du sommet, c'est-à-dire

$$x' = \alpha \pm \frac{1}{\sqrt{B}}$$

et substituant la valeur de $x' - \alpha$ dans l'équation de l'ellipse, il vient

$$y^2 = \pm \frac{2\sqrt{B}}{A} u \quad - \frac{A}{B} u^2$$

d'où l'on conclut que le rayon de courbure au sommet est $\frac{\sqrt{B}}{A}$, par identification avec l'équation du cercle :

$$y^2 + (u \pm R)^2 = R^2.$$

La substitution des valeurs numériques donne dans les deux cas

$$\frac{\sqrt{B}}{A} = 0{,}0521 \qquad \frac{\sqrt{B}}{A} = 0{,}0484$$

valeurs dont l'égalité est satisfaisante eu égard à l'ordre d'approximation que des mesures aussi indirectes peuvent fournir pour le calcul de la courbure de la ligne empirique.

Deuxième méthode de calcul.

Elle exige d'abord la connaissance de la valeur relative des demi-diamètres des deux astres : on pourrait l'em-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

prunter aux tables (*Connaissance du temps* pour 1873, page 391)

$$\text{R (soleil)} = 15'48'',5 = 948'',5$$
$$r \text{ (lune)} = 15'39'',0 = 939'',0$$

d'où

$$\frac{r}{R} = 0{,}9900$$

mais j'ai préféré ne rien emprunter aux tables et déduire ce rapport des épreuves elles-mêmes : l'échancrure maximum se trouve en effet sur les épreuves du milieu de l'éclipse à l'époque $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 8^h\,35^m\,3^s,2$ d'après la méthode précédente : on a justement fait une épreuve (VIII) à $8^h\,34^m\,30^s$; d'où l'on conclut par une interpolation à vue

$$ry = 24^l,46.$$

Le diamètre solaire a été sur la même épreuve égal à

$$2R = 34^l,93.$$

De plus j'ai mesuré la distance maximum du bord des deux astres

$$H = 24^l,89.$$

De ces trois données on peut déduire le diamètre lunaire avec une certaine précision : en effet soit p la distance minimum des centres on a

$$H = p + R - r$$

or la distance des centres est dans tous les cas représentée par

$$\sqrt{R^2 - y^2} + \sqrt{r^2 - y^2}$$

d'où

$$H = \sqrt{R^2 - y^2} + \sqrt{r^2 - y^2} + R - r$$

Développant et appelant pour simplifier

$$L = R + \sqrt{R^2 - y^2}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

il vient

$$r=\frac{(L-H)^2+y^2}{2(L-H)}.$$

La substitution des valeurs adoptées donne $r=17^{\prime},356$ d'où

$$\frac{r}{R}=0,9938$$

qui ne diffère du rapport calculé d'après les tables que de 0,0038 : les inégalités du bord de la Lune suffiraient presque à expliquer cette petite divergence ; d'ailleurs la marche indirecte suivie pour cette détermination ne comporte guère une plus grande précision.

Quant à la vitesse relative de la Lune, on peut aussi se passer du secours des tables : en effet elle est donnée par la formule

$$v^2=\frac{\rho^2-p^2}{(X-x_1)^2}$$

où $\rho=R+r$, X est l'époque du milieu de l'éclipse et x_1 celle du premier contact. On peut adopter pour $X-x_1$ la valeur approchée déduite de la première méthode

$$X-x_1=50^m7^s,2=3007^s,2,$$

d'où l'on conclut $v^2=0000661\,71$, $\quad\frac{\rho}{v^2}=56262300$,

Appliquant maintenant la formule donnée dans la Note précédente en y laissant subsister v^2

$$x-x_1=\frac{\rho}{v^2}\cdot\frac{\zeta\left(1-\frac{\zeta}{2\rho}\right)}{X-\frac{x+x_1}{2}}$$

avec

$$\zeta=R-\sqrt{R^2-y^2}.$$

On peut donc avoir autant de valeurs de x_1 qu'il y a de valeurs de ζ, c'est-à-dire de valeurs convenables de y.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Mais la méthode ne s'applique avec précision que si la flèche calculée $(x - x_1)$ est très-petite par rapport à l'ordonnée y : or, comme les épreuves correspondent à des époques assez éloignées du contact, il n'y a guère que les épreuves n° I, n° XIV et n° XV qui satisfassent aux conditions énoncées.

Dans une première approximation on peut remplacer au dénominateur x par la valeur approchée de x_1 : l'erreur commise n'atteint que les dixièmes de seconde : une seconde approximation donne alors la valeur plus exacte. Voici les résultats numériques :

PREMIER CONTACT.		DEUXIÈME CONTACT.	
N° I, 1re ÉPREUVE.	N° I. 2me ÉPREUVE.	N° XIV, 1re ÉPREUVE.	N° XV, 1re ÉPREUVE.
$2y = 4,73$	$2y = 5,07$	$2y = 4,80$	$2y = 1,92$
$x = 7^h\,45^m\,50^s$	$x = 7^h\,46^m\,0^s$	$x = 9^h\,24^m\,10^s$	$9^h\,25^m\,10^s$
$\zeta = 0,322$	$\zeta = 0,372$	$\zeta = 0.332$	$\zeta = 0,054$
$x_1 - x = -60^s,8$	$x_1 - x = -70^s,3$	$x_2 - x = +62,7$	$x_2 - x = +1^s,0$
$x_1 = 7^h\,44^m\,59^s,2$	$x_1 = 7^h\,44^m\,59^s,7$	$x_2 = 9^h\,25^m\,12^s,7$	$x_2 = 9^h\,25^m\,11^s$
Moyenne. . . $x_1 = 7^h\,44^m\,59^s,5$		Moyenne. . . $x_2 = 9^h\,25^m\,11^s,9$	
Moyenne. . . . $x_2 - x_1 = 1^h\,40^m\,12^s,4$			

Cette seconde méthode fournit des valeurs très-rapprochées de celles déduites de la première; la différence est de $+ 3^s,5$ pour le premier contact et de $+ 1^s,5$ pour le second.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Cette concordance est plus remarquable qu'elle ne le paraît au premier abord, car le problème résolu est celui-ci. On a déterminé l'instant du contact des deux astres en ne commençant l'observation que plus de 50 secondes après que ce contact a eu lieu (au moins pour le premier). Évidemment les circonstances sont très-défavorables et on juge quel avantage on aurait si l'observation avait pu être faite plus tôt,

En résumé, ces résultats numériques me paraissent promettre beaucoup pour l'observation du passage de Vénus : le disque de la planète sera, il est vrai, plus petit, mais il se mouvra plus vite par rapport à son diamètre et l'échancrure sera plus nette : et comme la planète mettra plus d'un quart d'heure à traverser le bord du Soleil, on pourra aisément obtenir à l'entrée et à la sortie 40 à 50 épreuves, dont la discussion donnera l'heure des contacts avec une grande précision.

Remarques faites à l'occasion de ces essais.

1° L'effet fâcheux de la chaleur solaire sur le miroir s'est fait ressentir dans mes observations. Il y a eu une légère *cambrure* de la surface qui a nécessité au début, avant l'heure de l'éclipse, une petite rectification du foyer : en outre une observation attentive des images daguerriennes montre une petite différence de netteté sur les bords du disque dans deux directions rectangulaires : le diamètre dont les bords sont les plus nets sont toujours dans le plan de réflexion ; il s'est donc produit un effet d'*astigmatisme* qui prouve la courbure du miroir.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Cet effet, je dois le dire, était d'ailleurs exagéré par l'obliquité extrême de la réflexion, obliquité commandée par l'orientation de la lunette et la disposition du local ; d'autre part, par la nécessité où j'étais, faute d'aide, de laisser le miroir découvert plus longtemps qu'il n'était strictement nécessaire.

2° Mais cet inconvénient m'a suggéré une précaution que je considère comme très-utile à la perfection des images photographiques définitives : elle se résume dans la condition suivante :

Installer dans chaque station la lunette photographique de manière que l'angle moyen de réflexion sur le miroir pendant toute la durée du passage de Vénus soit minimum.

A cet effet on dirigera l'axe horizontal de cette lunette dans le plan vertical mené par la position du Soleil au milieu de l'éclipse, le côté de l'objectif tourné dans le sens opposé au Soleil.

Je ne pense pas qu'on puisse faire d'objection sérieuse à cette condition : la connaissance de l'azimut absolu de la lunette pourra toujours être déterminé avec un simple théodolite avec une exactitude bien suffisante pour la plupart des cas. Une extrême précision ne serait nécessaire que dans le cas où l'on voudrait relever photographiquement les positions absolues ; mais l'emploi d'un miroir sans mouvement parallactique, la difficulté du réglage d'un fil horizontal ou vertical au foyer de la lunette font évanouir toutes les espérances qu'on pourrait fonder sur le relèvement des positions absolues.

3° La nécessité d'un réglage facile et prompt du miroir m'a apparu comme l'une des conditions les plus impor-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

tantes à réaliser : les pièces articulées de l'héliostat ont présenté des *temps perdus* qui me font rejeter en principe tout système d'articulations sans vérification optique directe, dans le dispositif à adopter. Je me propose de présenter à la Commission quelques essais du dispositif présentant une certaine analogie avec l'héliotrope de Gauss, destinés à amener avec certitude l'image au milieu du champ, et à rectifier au besoin sa position.

4° Enfin j'appellerai l'attention des observateurs sur la nécessité de se munir de substances accélératrices (chlorure d'iode, bromure de chaux, bromure d'iode, eau bromée) dont l'emploi peut dans certains cas être nécessaire pour l'obtention des épreuves ; ainsi un peu avant le commencement de l'éclipse du 26 mai, quoique le temps fût très-beau, une légère brume survint, qui affaiblit beaucoup la puissance chimique des rayons solaires : je fus obligé d'exposer pendant quelques secondes les plaques iodées à la vapeur de brome provenant de bromure de chaux; sans cette précaution, les bords du Soleil n'auraient pas été marqués, et j'aurais certainement perdu les premières observations : la brume se dissipa bientôt et l'addition de brome devint inutile. Comme règle générale, on doit se rappeler qu'il y a beaucoup moins d'inconvénients même à *brûler* les épreuves solaires qu'à les impressionner imparfaitement : les épreuves brûlées offrent encore des contours nets, tandis que les autres ne sont d'aucun usage.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ÉTUDE

DE

LA DISPERSION DES VERRES

EMPLOYÉS A LA CONFECTION DES OBJECTIFS

DES LUNETTES PHOTOGRAPHIQUES DE LA COMMISSION

PAR

M. A. CORNU

(Lue à la Commission du passage de Vénus, le 16 décembre 1873.)

Lorsque la Commission du passage de Vénus eut commandé à M. Lorieux la construction des quatre lunettes photographiques, je priai le constructeur de me fournir deux prismes taillés dans les matières mêmes qui devaient servir à la confection des objectifs.

L'étude de la dispersion de ces verres était nécessaire, afin de constater si l'achromatisme auquel ils pouvaient conduire répondait aux exigences des opérations photographiques.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Cet examen a été effectué au mois de mai dernier, et lorsque les verres ont été jugés satisfaisants, le constructeur a pu faire commencer les objectifs.

Le résultat de cet examen est très-favorable : la Commission peut juger, par le tracé graphique qui résume ces mesures, que la *courbe d'achromatisme* permet un achromatisme photographique complet sans altérer beaucoup l'achromatisme visible, condition très-commode pour la mise au point rigoureuse.

Les indices relatifs aux diverses raies du spectre ont été mesurés à l'aide d'un très-bon goniomètre de Brunner, dont le cercle de 25 centimètres de diamètre permet d'évaluer les 3″ et d'apprécier 1″,5.

TABLEAU DES MESURES.

	DOUBLE DÉVIATION MINIMUM.	
	Prisme de Flint glass.	Prisme de Crown glass.
Raie A	2D = 94° 12′ 36″	2D = 78° 43′ 30″
— C	95 12 45	79 15 12
— D (la plus réfrangible).	96 9 51	79 44 12
— *b* (la moins réfrangible).	97 37 57	80 27 24
— F	98 33 39	80 54 6
— G	100 47 24	81 54 57
Double de l'angle du prisme.	2A = 119° 59′ 56″	2A = 120° 0′ 15″

Le calcul des indices relatifs à ces diverses raies a donné

	n'	n
A.	1,60881	1,52487
C.	1,61399	1,52785
D.	1,61889	1,53057
b.	1,62638	1,53460
F.	1,63108	1,53709
G.	1,64226	1,54273

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Si l'on construit une courbe (fig. 1) dont les abscisses et les ordonnées soient les valeurs

$$x = n - 1 \text{ (Crown)}$$
$$y = n' - 1 \text{ (Flint)}$$

correspondant aux mêmes raies, on reconnaît que cette courbe est presque rectiligne depuis le milieu du spectre visible (entre D et F).

(Pour rendre plus claire la démonstration ultérieure, on a beaucoup exagéré la courbure de la ligne et retranché une constante aux abscisses et aux ordonnées.)

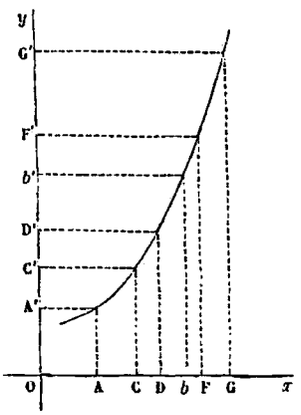


Fig. 1.

Or je démontre, dans une Note jointe à ce Mémoire, que la condition d'achromatisme est d'autant mieux satisfaite que la projection de la courbe ainsi définie (et que je nomme *courbe d'achromatisme*) sur une direction convenablement choisie est plus étroite : il est évident que, pour une longueur donnée de courbe (et l'accouplement des verres de nature analogue à ceux qu'on emploie pour les objectifs

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

donne sensiblement à cette courbe la même forme et le même développement), l'existence d'une portion presque rectiligne donne une *flèche moyenne* plus courte, c'est-à-dire une erreur d'achromatisme plus faible que si la courbure était continue et dans le même sens sur toute l'étendue de l'arc.

Il en résulte aussi que, l'achromatisme des rayons les plus réfrangibles une fois obtenu, l'achromatisme des rayons visibles sera peu altéré, parce que la corde de l'arc représentant les radiations violettes et ultraviolettes diffère très-peu de la corde analogue correspondante aux radiations visibles les plus intenses (jaune, vert).

La conclusion de cette étude est que les verres employés sont très-convenables pour l'achromatisme photographique, et que, de plus, la mise au point sera très-aisée, à cause du peu d'altération de l'achromatisme des rayons visibles, surtout si l'on cherche à mettre au point avec un verre de couleur verte, enlevant la majeure partie des rayons rouges.

Comme vérification de ces conclusions, l'étude directe d'un objectif de demi-grandeur a conduit aux résultats prévus. Cet objectif a, de plus, été employé pour observer photographiquement l'éclipse partielle de Soleil du 26 mai 1873; cette opération a parfaitement réussi et un compte rendu en a été donné à la Commission, dans sa séance du 21 juin dernier.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

DE

LA MÉTHODE D'ACHROMATISME

DES OBJECTIFS PAR ÉCARTEMENT DES VERRES

PAR

M. A. CORNU

(Lue à la Commission du passage de Vénus, le 16 décembre 1873.)

Considérons une lentille convergente dont on néglige l'épaisseur : la relation entre les deux distances au centre optique des foyers conjugués p, p', n étant l'indice de réfraction :

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=(n-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)=\frac{1}{f}=(n-1)P.$$

La lentille divergente destinée à l'achromatiser conduit à une relation analogue

$$\frac{1}{q}-\frac{1}{q'}=(n'-1)\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}\right)=\frac{1}{g}=(n'-1)Q.$$

Considérons les rayons parallèles incidents, $p=\infty$,

$$\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Ce point de convergence est considéré comme source lumineuse pour la seconde lentille : si l'on suppose que les deux lentilles sont séparées d'une longueur a, on a

$$q = f - a,$$

d'où l'on conclut la valeur du foyer résultant $\varphi = q'$

$$\frac{1}{f-a} - \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{g}$$

ou bien

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{q'} = \frac{1}{f}\left(1 - \frac{a}{f}\right)^{-1} - \frac{1}{g},$$

substituant à f et g leurs valeurs

$$\frac{1}{\varphi} = \left(1 - \frac{a}{f}\right)^{-1}(n-1)\,\mathrm{P} - n' - 1\,\mathrm{Q},$$

Comme le terme $\frac{a}{f}$ est très-petit, quoique f varie un peu avec n, on peut en prendre la valeur moyenne et la regarder comme constante.

La condition d'achromatisme parfait serait que φ restât constant quelles que fussent les valeurs de n et n'.

USAGE DE LA COURBE D'ACHROMATISME.

Considérons la courbe dont chaque point serait défini par deux coordonnées x et y (Voir fig. 1 du précédent Mémoire),

$$x = n - 1 = \mathrm{ON},$$
$$y = n' - 1 = \mathrm{NM},$$

telle que les abscisses et les ordonnées correspondent à la même couleur ou mieux à la même raie : soit $\mathrm{M_1\,M}$ cette

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

courbe (fig. 2) : la région M_1 correspond aux rayons rouges du spectre, la région M aux rayons violets.

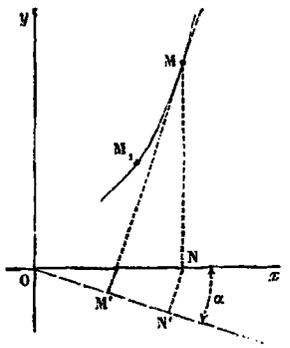


Fig. 2.

L'expression $\frac{1}{\varphi}$

$$\frac{1}{\varphi} = \left(1 - \frac{a}{f}\right)^{-1} Px - P'y$$

peut être considérée comme la projection du rayon vecteur OM, ou de ON' NM

$$OM' = x \cos\alpha - y \sin\alpha.$$

La condition d'achromatisme s'interprète ainsi :

Chercher à rendre OM' *aussi constant que possible pour un arc de courbe* MM_1 *donné.*

Il est évident que la condition sera remplie le mieux possible en projetant suivant la corde MM_1 ou bien suivant la tangente au milieu de MM_1.

D'où l'on conclut

$$\frac{\left(1 - \frac{a}{f}\right)^{-1} P}{\cos\alpha} = \frac{P'}{\sin\alpha} = \frac{\frac{1}{\varphi}}{OM'}$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{P'}{P}\left(1 - \frac{a}{f}\right).$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On voit que α diminue quand a augmente : donc la direction de la corde, ou direction moyenne de la courbe, lorsque a grandit, correspond à des points de plus en plus éloignés de l'origine M_1.

Or, avec les valeurs de n et n', les points vers M_1 correspondent aux rayons rouges, et les points vers M aux rayons violets : donc l'écartement des verres entraîne l'achromatisme moyen vers les rayons violets : — De plus OM' ou $\frac{1}{\varphi}$ augmente, donc φ diminue.

Première remarque. — Cette théorie est plus précise qu'elle ne le paraît au premier abord : l'hypothèse de l'épaisseur négligeable des lentilles se trouve compensée d'elle-même par la considération d'un intervalle additionnel, égal à très peu près à la distance des deux points *nodaux principaux* optiquement consécutifs des deux lentilles ; de sorte que, si l'on suppose que a est l'intervalle compris entre les points, au lieu d'être la distance des centres optiques, la compensation est presque rigoureuse.

Deuxième remarque. — Si dans la valeur de tang α on substitue $\frac{1}{f} = (n-1)\,\mathrm{P}$, dont on avait simplement pris la valeur moyenne pour rendre la démonstration plus simple, il vient :

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}} - a\mathrm{P}'(n-1).$$

Cette expression plus précise montre encore une circonstance favorable à l'achromatisme chimique, car le fac-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

teur $(n-1)$ grandit du rouge au violet; il en résulte que l'écartement des verres est optiquement plus considérable que l'écartement géométrique pour les rayons violets comparés aux rayons rouges; il n'est donc pas nécessaire de séparer les verres d'une quantité aussi grande que celle qui est indiquée par l'expression approchée de tang α.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

TABLE DES MATIÈRES

Pages.

Notice sur la distance du Soleil à la Terre. — Extrait de l'*Annuaire pour l'an* 1866, *publié par le Bureau des Longitudes*. — Par M. DELAUNAY. 3

Lettre de M. le Ministre de l'Instruction publique à M. le Président de l'Académie des sciences. — Extrait des *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences;* séance du 1er février 1869. 111

Résultat de l'examen auquel s'est livré le Bureau des longitudes, au sujet des stations où il devra envoyer des observateurs. — Communication à l'Académie de M. E. LAUGIER. 113

Recherches sur les apparences singulières qui ont souvent accompagné l'observation des contacts de Mercure et de Vénus avec le bord du Soleil. — Mémoire présenté à l'Académie des sciences, dans sa séance du 1er mars 1869. — Par MM. C. WOLF ET C. ANDRÉ. . . . 115

Nomination d'une Commission de Membres de l'Académie des sciences, pour signaler les stations principales de l'expédition. — Extrait du procès-verbal du Comité secret du 21 janvier 1870. 173

Sur l'observation photographique des passages de Vénus, et sur un appareil de M. Laussedat. — Extrait des *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences;* séance du 14 mars 1870. — Par M. FAYE. 175

Rapport présenté au nom de la Commission du passage de Vénus, sur le choix des stations et le matériel astronomique. — Comité secret du 14 mars 1870. — Par M. E. LAUGIER. 187

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Pages.

Rapport fait au Bureau des longitudes par la Commission chargée d'examiner les questions relatives à l'observation du passage de Vénus sur le Soleil, du 8 décembre 1874. — Extrait des *Additions à la Connaissance des temps pour* 1871. — Par M. PUISEUX. 199

Note sur la détermination de la parallaxe du Soleil, par l'observation du passage de Vénus sur cet astre, en 1874. — Extrait des *Additions à la Connaissance des temps, pour* 1871. —Par M. PUISEUX. . . 207

Nomination d'un nouveau Membre de la Commission précédente. — Extrait du procès-verbal du Comité secret du 23 octobre 1871. . . 221

Projet d'appareil pour l'observation du passage de Vénus. — Lettre à M. le Président de la Commission, du 11 mars 1872. — Par M. LAUSSEDAT. 223

Rapport sur le rôle de la photographie dans l'observation du passage de Vénus. — Extrait des *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences;* séance du 2 septembre 1872. — Par M. FAYE. 227

Nomination de trois nouveaux Membres de la Commission du passage de Vénus.— Extrait des *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences*, séance du 2 septembre 1872. 237

Sur un appareil photographique destiné à l'observation des passages de Vénus. — Lecture faite à l'*Association française*, dans sa séance du 12 septembre 1872, à Bordeaux. — Par M. LAUSSEDAT. 239

Projet d'inscription photographique du temps, dans l'observation du passage de Vénus.—Extrait des procès-verbaux de la Commission du passage de Vénus; séance du 3 décembre 1872. — Note de M. l'amiral PARIS. 257

Note sur la transformation de l'achromatisme optique des objectifs en achromatisme photographique. — Note présentée à la Commission du passage de Vénus, dans sa séance du 25 janvier 1873. — Par M. A. CORNU. 265

Projet d'appareil photographique pour l'observation du passage de Vénus. — Présenté à la Commission du passage de Vénus, dans sa séance du 15 février 1873. — Par MM. C. WOLF ET AD. MARTIN. 271

Méthode pour obtenir photographiquement les circonstances physiques des contacts, avec les temps correspondants. — Communication faite à la Commission du passage de Vénus, dans sa séance du 15 février 1873. — Par M. J. JANSSEN. 295

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Pages.

Note sur l'approximation, en valeur absolue, des pointés sur les épreuves daguerriennes du disque solaire, obtenues avec la lunette photographique. — Note présentée à la Commission du passage de Vénus, dans sa séance du 22 février 1873. — Par M. A. Cornu. 299

Description de la méthode permettant d'obtenir l'achromatisme photographique des objectifs achromatisés pour la vision directe. — Description succincte d'une opération fournissant des épreuves daguerriennes du disque solaire. — Note présentée à la Commission du passage de Vénus, dans sa séance du 22 février 1873. — Par M. A. Cornu. 303

Rapport sur la photographie par images directes.—Présenté à la Commission du passage de Vénus, dans la séance du 22 février 1873. —Par M. Fizeau. 315

Sur la précision que pourra donner, dans la détermination de la parallaxe solaire, l'appareil photographique proposé par MM. Wolf et Martin. — Note additionnelle, présentée à la Commission du passage de Vénus, dans sa séance du 1er mars 1873. — Par M. C. Wolf. 323

Rapport sur l'appareil photographique. — Présenté à la Commission du passage de Vénus, dans sa séance du 8 mars 1873. — Par M. Fizeau. 329

Rapport sur les mesures micrométriques directes à faire pour l'observation du passage de Vénus. — Présenté à la Commission du passage de Vénus, dans sa séance du 8 mars 1873. — Par MM. Yvon Villarceau et C. Wolf. 337

Note sur le passage de Vénus de 1882. — Extrait des *Additions à la Connaissance des temps, pour* 1875. — Par M. Puiseux. 345

Le passage de Vénus sur le Soleil en 1874. — Conférence faite à la Société des Amis des sciences, le 29 mai 1873. — Par M. C. Wolf. . 377

Examen micrométrique d'une épreuve daguerrienne obtenue au foyer d'un objectif astronomique, achromatisé chimiquement par l'écartement des verres. — Note lue à la Commission du passage de Vénus, le 21 juin 1873.—Par M. A. Cornu. 403

Méthode d'observation pour le passage de Vénus et pour les éclipses de Soleil. — Note lue à la Commission du passage de Vénus, dans sa séance du 21 juin 1873. — Par M. A. Cornu. 415

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Pages.

Résultats numériques relatifs à l'observation photographique de l'éclipse partielle de Soleil du 26 mai 1873. — Note présentée à la Commission du passage de Vénus, dans sa séance du 21 juin 1873. — Par M. A. Cornu. 429

Etude de la dispersion des verres employés à la confection des objectifs des lunettes photographiques de la Commission. — Note lue à la Commission du passage de Vénus, le 16 décembre 1873. — Par M. A. Cornu. 443

Théorie élémentaire de la méthode d'achromatisme des objectifs par écartement des verres. — Note lue à la Commission du passage de Vénus, le 16 décembre 1873. — Par M. A. Cornu. 447

Rapport sur les miroirs plans en verre argenté, exécutés par M. Ad. Martin pour la Commission du passage de Vénus.— Lu à la Commission le 3 janvier 1874. — Par M. C. Wolf. 453

PLANCHES TIRÉES HORS DU TEXTE.

Recherches sur l'observation des contacts de Mercure et de Vénus avec le bord du Soleil. — Par MM. C. Wolf et C. André 172

Carte pour le passage de Vénus sur le Soleil, le 8 décembre 1874. — Par M. Puiseux. 220

Appareil photographique destiné à l'observation des passages de Vénus. — Par M. A. Laussedat 242

Appareil photographique pour l'observation du passage de Vénus. — Par MM. C. Wolf et Ad. Martin. 294

Cartes pour le passage de Vénus sur le Soleil, le 6 décembre 1882. — Première carte : Heure d'entrée, heure de sortie et durée du passage. — Deuxième carte : Maxima et minima de la distance des centres de Vénus et du Soleil : maxima et minima de l'angle de position de Vénus. 376

Paris. — Typographie Firmin Didot frères, fils et Cie, rue Jacob, 56.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

RECUEIL

DE

MÉMOIRES, RAPPORTS

ET DOCUMENTS

RELATIFS A L'OBSERVATION

DU

PASSAGE DE VÉNUS SUR LE SOLEIL

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

RECUEIL

DE

MÉMOIRES, RAPPORTS

ET DOCUMENTS

RELATIFS A L'OBSERVATION

DU

PASSAGE DE VÉNUS SUR LE SOLEIL

(SUPPLÉMENT AU TOME 1er. — 2e PARTIE)

PARIS
TYPOGRAPHIE DE FIRMIN DIDOT ET Cie
IMPRIMEURS DE L'INSTITUT DE FRANCE, RUE JACOB, 56

M DCCC LXXVI

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

PROGRAMME

DES

OPÉRATIONS PHOTOGRAPHIQUES

QUI DEVRONT ÊTRE EXÉCUTÉES SIMULTANÉMENT

DANS TOUTES LES STATIONS

D'APRÈS UNE DÉCISION PRISE PAR LA COMMISSION DU PASSAGE DE VÉNUS, DANS LA SÉANCE DU 6 AVRIL 1874.

M. FIZEAU, *rapporteur*.

La commission chargée par l'Académie des sciences de préparer les expéditions destinées à aller observer, en divers points du globe, le prochain passage de la planète Vénus sur le Soleil, ayant reconnu que l'application de la photographie à l'observation de ce phénomène exigeait que les opérations faites en divers lieux fussent dirigées suivant un plan unique concerté à l'avance, a arrêté le programme suivant, destiné à être exécuté d'une manière identique, dans toutes les stations auxquelles la commission aura confié ses appareils photographiques. (1)

MM. les chefs de station pourront, en outre, effectuer

(1) Voir la planche à la fin du volume.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

toutes les opérations qu'ils jugeront utiles à la science et à l'œuvre commune, pourvu qu'elles ne soient pas de nature à compromettre la complète exécution du programme de la commission.

Nature des opérations photographiques.

Les opérations photographiques à exécuter dans les diverses stations, pendant le passage de Vénus sur le Soleil, consisteront à fixer, *par des épreuves successives, faites à des instants déterminés,* les différentes phases du phénomène.

Les observateurs n'auront à s'occuper ni des mesures micrométriques des épreuves, ni des calculs relatifs à la parallaxe du Soleil ; ces études devant être l'objet de travaux spéciaux, après le retour de l'expédition.

Il y aura deux catégories d'épreuves, correspondant aux deux phases principales du passage :

1° Pendant l'*entrée* et la *sortie,* les épreuves seront destinées spécialement à donner les grandeurs successives des cordes communes aux deux disques, afin d'en conclure surtout les heures des contacts.

2° Pendant le *trajet de la planète sur le disque solaire,* les épreuves seront destinées spécialement à donner les distances variables des centres des deux astres aux différents instants. Dans ce cas il faudra connaître la valeur angulaire de l'unité de longueur, au foyer de chaque instrument.

Procédé photographique.

Le procédé photographique adopté est celui de Da-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

guerre. Une plaque d'argent doublé de cuivre reçoit d'abord de la vapeur d'iode jusqu'à la formation de la couche sensible jaune d'or, puis, après avoir subi l'impression lumineuse dans l'appareil photographique, elle est exposée à la vapeur du mercure qui fait apparaître l'image en quelques instants. Les épreuves ainsi obtenues se conservent sans altération, tant qu'elles sont maintenues à l'abri de la lumière. On les rend inaltérables par un lavage spécial qui peut n'être effectué qu'après un temps très-long.

Préparation des plaques, marque, polissage, iodage.

Avant toute préparation, chaque plaque neuve sera *marquée* au revers et de haut en bas, à l'encre ordinaire : 1° *d'une lettre propre à chaque station,* 2° et plus bas, *d'un numéro d'ordre.*

Toutes les plaques seront polies avec les mêmes soins en employant le coton, l'essence de lavande (fleurs) et le tripoli, et tenues toujours exemptes de toute poussière.

Les plaques seront iodées immédiatement après le polissage, au moyen d'une *boîte à iode* à deux compartiments, l'un pour l'iode, l'autre pour le brome, puis placées de suite dans les rainures d'une boîte à plaques. Les plaques iodées doivent être soigneusement conservées à l'abri de la lumière et de la poussière.

Si, par l'effet de brumes, de brouillards, ou d'une trop faible hauteur du soleil au-dessus de l'horizon, les opérations exigeaient une sensibilité plus grande que celle donnée par l'iode seul, on aurait recours à la *vapeur de brome*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

qui permet d'obtenir une sensibilité 100 fois plus grande, en passant par tous les degrés intermédiaires. Dans ce but, on placera la plaque iodée, pendant un certain nombre de secondes déterminé par des essais préalables, dans le second compartiment de la boîte à iode, lequel renferme du bromure de chaux. Dans ce cas, il faut opérer dans une obscurité presque complète à cause de la sensibilité extrême de la plaque. Mais, à moins de circonstances comme celles que nous venons d'indiquer, ce sera toujours avec la plaque iodée qu'il conviendra d'opérer.

Si la température du lieu où se fera l'iodage était très-basse (voisine de zéro ou au-dessous), il faudrait maintenir la boîte à iode à une température un peu plus élevée, vers 8° à 10°, en la plaçant à l'avance sur un récipient clos renfermant de l'eau à 12° ou 15° environ.

Les plaques iodées nécessaires aux opérations pourront être préparées *la veille du jour du passage,* à la condition de les exposer de nouveau pendant un instant (2 ou 3 secondes) dans la boîte à iode, quelques heures avant le passage.

Appareil photographique. Sa disposition sur le terrain.

L'appareil adopté par la commission est composé : d'une *lunette photographique* (ouverture $= 0^m 135$, foyer $= 3^m 80$) avec chercheur latéral, porte-plaque avec écran mobile, et d'*un miroir plan* avec petit miroir chercheur, monté en altazimuth et dirigeable à distance par deux manettes à portée de l'opérateur.

L'écartement des verres ainsi que le tirage de la lunette,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

correspondant à l'achromatisme photographique, ont été fixés par des expériences préalables, faites au laboratoire de l'École des mines et dans le pavillon photographique du Luxembourg. L'instrument sera vérifié sous ce rapport, dans chaque station, avant les opérations définitives.

Un mur, formant pilier longitudinal en maçonnerie ou pierres de taille, et à fondations très-solides pour éviter toute vibration, supportera à la fois le miroir et la lunette dans une situation horizontale ; celle-ci sera dirigée *dans l'azimuth moyen du soleil pendant le passage*.

Une cabane propre aux opérations photographiques couvrira la lunette jusqu'à son extrémité.

Le miroir sera également recouvert par un abri léger, destiné surtout à le garantir contre l'échauffement produit par les rayons du soleil.

Précautions contre l'échauffement du miroir.

Les plus grandes précautions devront être prises, pendant les opérations, afin d'*éviter que le miroir ne se déforme en s'échauffant* par les rayons du soleil. A cet effet, le miroir sera constamment protégé par un écran, et ne devra être découvert pour chaque épreuve que pendant un temps très-court, *une seconde environ* : de plus, pendant les opérations, le jour du passage, les rectifications des positions de l'image solaire devront être obtenues sans découvrir le miroir, et uniquement au moyen du chercheur, réglé antérieurement.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Exposition des plaques à l'image solaire, au foyer de la lunette.

Le jour du passage, on devra commencer à faire des épreuves deux minutes avant l'heure probable de l'entrée.

Pendant toute la durée de l'*entrée,* on fera des épreuves *par zones,* un écran fixe ne laissant passer qu'une zone diamétrale du disque solaire.

Pendant le milieu du passage, on fera des *épreuves entières* du disque solaire.

Enfin, pendant *la sortie,* on fera de nouveau des épreuves *par zones.*

Le porte-plaque devra être orienté, suivant l'heure, dans un azimuth calculé à l'avance, pour chaque station, afin que Vénus se trouve toujours au milieu du bord de la zone. Cette orientation devra être rectifiée, de temps en temps, pendant toute la durée du passage.

En plaçant chaque plaque au foyer, on notera sur le registre *le numéro d'ordre* et ensuite *les heures des impressions* faites successivement sur la même plaque, en laissant tomber l'écran mobile. On aura soin que les épreuves soient faites dans le même ordre sur les plaques successives, de haut en bas par exemple, pour éviter sûrement les méprises dans les heures correspondantes.

La durée d'exposition sera mesurée à l'avance, à l'aide d'un diapason marquant ses vibrations sur le bord enfumé de l'écran mobile. Pour la plaque iodée, cette durée est comprise entre $\frac{1}{\cdots}$ et $\frac{1}{50}$ de seconde. Pour la plaque iodée-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

bromée, cette durée est réduite à volonté à $\frac{1}{500}$, $\frac{1}{1000}$ de seconde, et plus encore.

Exposition à la vapeur de mercure.

A mesure que les plaques auront été impressionnées, elles seront transportées successivement dans *une boîte à mercure,* pouvant contenir à la fois quarante plaques, et dont la température, entretenue par une lampe, devra toujours être comprise entre 60 et 70 degrés.

On n'aura pas à surveiller les épreuves dans la boîte à mercure ; il suffira d'en retirer successivement les plaques après un séjour de vingt à trente minutes, dans l'ordre où elles auront été apportées et de les placer immédiatement dans une boîte à plaques.

Les épreuves seront conservées soigneusement en cet état, à l'abri de la lumière, jusqu'à ce qu'elles soient rapportées en France au retour de l'expédition. Alors seulement elles seront soumises, avec tous les soins convenables, aux lavages destinés à les rendre inaltérables.

Cependant un certain nombre d'épreuves, *un quart au plus,* pourront subir les derniers lavages sur place, si les chefs de station le jugent convenable.

Nombre et intervalle des épreuves.

Il conviendra de préparer environ cent cinquante plaques pour les épreuves à faire pendant la durée du passage. Cent trente-six plaques seront employées de la manière

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

suivante : *dix-huit pour l'entrée*, *dix-huit pour la sortie* et *cent pour le trajet de la planète sur le disque solaire*.

En admettant vingt-cinq minutes pour la durée de l'*entrée* et autant pour la sortie, on fera pendant les *cinq premières minutes* de l'entrée, à raison de *une épreuve toutes les dix secondes* et de cinq impressions par zones pour chaque plaque, trente épreuves, exigeant six plaques. De même, pendant *les cinq dernières minutes* de l'entrée, soit encore trente épreuves par zones *de dix en dix secondes*, exigeant six plaques. De plus, pendant *les quinze minutes* intermédiaires (milieu de l'entrée), on fera encore des épreuves par zones, mais seulement *toutes les trente secondes*, ce qui donnera trente épreuves exigeant six plaques.

En opérant de même à la fin du passage *pour la sortie* de la planète, on voit que l'on aura obtenu un total de 180 épreuves sur 36 plaques.

Pendant *le trajet de Vénus* sur le disque du soleil on fera des *épreuves entières* du disque solaire, à raison de deux par chaque plaque, et séparées par des intervalles, de une minute au commencement et à la fin, et de deux à trois minutes vers le milieu.

On aura ainsi sans difficultés sérieuses deux cents épreuves entières du soleil exigeant cent plaques.

Ce sera donc, pour toute la durée du passage, un total de *trois cent quatre-vingts épreuves* obtenues à l'aide *de cent trente-six plaques*.

Il convient d'ajouter que MM. les chefs de station ne devront, dans aucun cas, sacrifier à la rapidité des opérations, ni l'exactitude de l'heure, ni la rectification de l'image du chercheur, ni l'orientation du porte-plaque, et qu'ils de-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

vront plutôt diminuer un peu le nombre des épreuves, si, dans les circonstances où ils se trouveront placés, la bonne exécution des opérations leur paraissait le réclamer.

Détermination de la valeur angulaire de l'unité de longueur, au foyer de l'appareil photographique.

La valeur angulaire de un millimètre, mesuré sur les épreuves, sera un élément indispensable pour l'interprétation de plusieurs des résultats fournis par la photographie (notamment pour les positions de la planète pendant son trajet sur le disque solaire). Sans doute cet élément pourra être déterminé en valeur absolue ou relative, pour les instruments des diverses stations, seulement après le retour des expéditions, et en procédant sur les épreuves elles-mêmes à des mesures convenables soit des diamètres du Soleil et de Vénus, soit des distances au centre des taches solaires, s'il en existe d'assez bien définies sur les épreuves. Mais, le succès de ces moyens n'étant pas suffisamment assuré, il y aura lieu, dans chaque station, de procéder d'avance à *la détermination de la valeur angulaire de l'instrument,* par les deux procédés suivants :

1° *Par des passages photographiques du Soleil,* en faisant des épreuves successives d'un même bord solaire, pendant que l'image traverse la plaque par l'effet du mouvement diurne. Le temps devra être mesuré par l'enregistreur électrique, avec une précision peu inférieure à $\frac{1}{100}$ de seconde.

2° *Par des visées réciproques* (avec l'intermédiaire du miroir) entre la lunette photographique munie à son foyer

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de divisions sur verre, et la lunette équatoriale de six pouces munie de son micromètre préalablement étudié sur les étoiles, mais surtout, ce qui sera le plus exact, en effectuant, dans ces conditions, *des épreuves photographiques des fils du micromètre* de l'équatorial. Les températures des instruments seront toujours notées avec soin.

L'équatorial devra donc être installé, soit passagèrement, soit à poste fixe, à peu de distance du miroir et de l'appareil photographique, afin que l'on puisse facilement diriger ces deux instruments l'un sur l'autre.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

NOTES PRATIQUES

SUR LES

OPÉRATIONS DE LA PHOTOGRAPHIE

PENDANT LE PROCHAIN PASSAGE DE VÉNUS SUR LE SOLEIL

RÉUNIES SUR LA DEMANDE

DE LA SOUS-COMMISSION DE PHOTOGRAPHIE

PAR

M. FIZEAU.

SOINS A PRENDRE DANS LA PRÉPARATION DES PLAQUES.

De grands soins doivent être apportés à la préparation des plaques, si l'on veut éviter sûrement les épreuves tachées, inégales, voilées, et même l'absence de sensibilité plus ou moins complète de la couche d'iodure. Voici ce que l'expérience a appris à ce sujet, comme réussissant très-régulièrement :

Placer la plaque sur un papier propre. Verser à sa surface 10 ou 15 gouttes d'essence de lavande. Saupoudrer

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

avec le nouet de tripoli. Polir en rond et en *appuyant assez fortement* avec un gros tampon de coton bien formé et uni à sa surface. Passer plusieurs fois toujours en tournant sur toute l'étendue de la plaque, surtout sur les bords et les coins ordinairement moins bien polis que le centre, jusqu'à la formation d'une couche uniforme de *cambouis* grisâtre très-mince.

On prend alors un nouveau tampon de coton, on place la plaque sur un nouveau papier, non imprégné d'essence. On saupoudre la surface de la plaque avec du tripoli, et l'on recommence à polir en rond comme précédemment. mais en appuyant *cette fois très-légèrement*, jusqu'à ce que la surface d'argent devienne brillante. On ajoute une ou deux fois un peu de tripoli pour que le coton ne frotte jamais seul sur l'argent. On essuie alors avec une pincée de coton le revers et les tranches de la plaque, on la porte au grand jour près d'une fenêtre en la tenant de la main gauche par les tranches, et de la main droite on passe légèrement à sa surface une pincée de coton propre non comprimé, jusqu'à ce que l'œil n'aperçoive plus de poussière de tripoli à la surface. La plaque est alors prête à être iodée.

Telle est la préparation qui convient à une plaque neuve ou à une plaque portant une épreuve peu intense et non lavée. Si la plaque a été lavée et surtout fixée, il faut répéter deux fois le polissage à l'essence et appuyer un peu plus fortement.

On recommande surtout de ne pas polir en terminant au coton seul, sans tripoli, et en appuyant fortement. Dans ce cas, et surtout lorsque la température est élevée et que le

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

coton est d'une nature un peu grasse, la surface de l'argent est fort belle, en apparence, mais impropre à la formation de la couche sensible.

MARQUE DES PLAQUES.

On pourrait adopter les conventions suivantes pour la marque des plaques, qui devra être faite longtemps à l'avance. L'encre ordinaire de Mathieu Plessy fait sur le cuivre des marques à peu près ineffaçables.

Station de Pékin	Station du Japon	Station de Nouméa
P	**J**	**N**

Station de Saint-Paul	Station de Campbell
S	**C**

Au-dessous de la lettre de la station se trouvera le numéro d'ordre propre à chaque plaque, suivant la figure ci-jointe :

S
N° 23.

Enfin, les plaques seront toutes placées la tête du même côté, par rapport au châssis porte-plaque.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

PRÉCAUTIONS CONTRE LES GOUTTELETTES DE MERCURE.

Les boîtes à mercure, les flacons qui renferment ce métal, les objets qui se sont trouvés en contact avec lui, doivent être soigneusement éloignés des plaques, des boîtes à plaques et des objets qui se rapportent au polissage et à l'iodage; de plus, lorsqu'on aura touché au mercure liquide, pour le transvaser ou le nettoyer, il faudra se brosser, se secouer avec soin et laver ses mains à grande eau, avant de toucher aux plaques ou aux objets relatifs au polissage (coton, papier, tripoli), les plus petites gouttelettes de mercure formant sur les plaques des taches que l'on a beaucoup de peine à enlever, et qui exigent des polissages répétés plusieurs fois.

PRÉCAUTIONS CONTRE LES VAPEURS D'IODE ET DE BROME.

Les vapeurs d'iode ou de brome, répandues dans l'air même en très-faible quantité, sont très-redoutables pour les plaques sensibles, à partir du moment où ces plaques subissent l'impression lumineuse, jusqu'au moment où l'image est tout à fait formée par l'action de la vapeur de mercure. Ces vapeurs ont, en effet, la propriété d'effacer plus ou moins complétement l'impression produite par la lumière, en ramenant peu à peu la couche sensible à son état primitif. C'est à cette cause qu'il faut rapporter les nombreux insuccès signalés, à l'origine de la découverte de Daguerre, par plusieurs voyageurs munis, à cette époque, de daguerréotypes soigneusement emballés dans des caisses

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

étroites, où les vapeurs d'iode pouvaient se répandre dans la chambre noire et dans la boîte à mercure, dont elles imprégnaient les parois.

Il conviendra donc, surtout si la température est élevée, de prendre des précautions spéciales pour éviter la diffusion de ces vapeurs dans la cabane photographique, et spécialement dans le voisinage du châssis porte-plaque de la lunette et des boîtes à mercure.

MOYENS A EMPLOYER POUR OBTENIR LA PLUS GRANDE NETTETÉ POSSIBLE DES IMAGES. — ÉLÉVATION DE LA LUNETTE ET DU MIROIR AU-DESSUS DU SOL.

Dans le but de diminuer autant que possible les ondulations des images, dues au mélange imparfait des couches d'air inégalement échauffées, surtout dans le voisinage du sol, il conviendra d'élever le pilier longitudinal qui doit supporter la lunette et le miroir à une certaine hauteur au-dessus du sol, supérieure à celle qui a été employée dans les expériences du Luxembourg (où la lunette était à 1^m30 du sol); il serait à désirer que l'on pût porter cette hauteur à 2 mètres, en ajoutant à chacune des extrémités du mur et sur le sol une plate-forme en bois ou en pierre, d'une hauteur convenable, 40 à 60 centimètres, pour que les observateurs soient assez élevés et à leur aise, dans le maniement du porte-plaque ou du miroir.

Cependant la partie du mur comprise entre l'objectif de la lunette et le miroir ne devra pas être élevée à une aussi grande hauteur que le reste, afin d'éviter que les rayons lumineux ne passent trop près de la face supérieure du

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

mur. Une hauteur de 50 centimètres dans cette partie du mur sera probablement suffisante.

Il est à désirer que l'extrémité de la lunette soit rapprochée du miroir, autant que l'ombre portée du toit de la cabane le permettra, sans toutefois que les rayons rasent de trop près le toit, lequel devra, en tous cas, être recouvert de toile; il sera bon de conserver, s'il est possible, une distance de 1 mètre entre les rayons et le toit.

SITUATION DE L'EXTRÉMITÉ DE LA LUNETTE PORTANT L'OBJECTIF.

Une autre remarque relative à la position de l'extrémité de la lunette, dirigée hors de la cabane, mérite quelque attention. Si l'objectif se trouve situé à l'intérieur de la cabane, près d'une petite fenêtre, volet ou coulisse que l'on ouvrira au moment des opérations, l'air plus chaud de l'intérieur sortira par l'ouverture en passant devant l'objectif, et se mélangera à l'air extérieur sur le passage même des rayons, circonstance très-mauvaise sous le rapport des ondulations. Il conviendra donc de ménager à cette extrémité de la cabane une très-large ouverture comprenant, s'il est possible, la paroi tout entière, ou bien encore de disposer les choses de manière à ce que l'extrémité de la lunette dépasse la paroi de la cabane, et sorte au dehors de 50 centimètres environ; pendant l'intervalle des opérations cette partie de la lunette serait protégée par un abri léger et facile à enlever, semblable à celui qui sera placé sur le miroir.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

VENTILATION DE LA CABANE ET DE L'INTÉRIEUR DE LA LUNETTE.

Les inégalités de la température des diverses couches de l'air, à l'intérieur de la cabane et dans la lunette, sont des causes certaines d'ondulations et de trouble dans les images. Il sera donc important d'adopter, dans la construction de la cabane, des dispositions propres à assurer une large circulation d'air, de ne pas en chauffer l'intérieur, et de se servir, pour l'agitation et le renouvellement de l'air à l'intérieur de la lunette, du petit ventilateur à rotation, joint à chaque appareil, avec lequel il faudra procéder par *aspiration* plutôt que par refoulement, afin d'éviter surtout la projection des poussières à l'intérieur de la lunette.

POSITION DU FOYER PHOTOGRAPHIQUE. — INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE.

Des soins particuliers doivent être pris pour connaître avec précision le plan focal de plus grande netteté, et en fixer la position d'après le numéro des divisions tracées sur le coulant ou tuyau de tirage de l'instrument. De plus, on doit s'attendre à de petites variations dans la position de ce foyer, par l'effet de changements notables dans la température (probablement 1 millimètre environ de raccourcissement apparent pour une élévation de température de 20°). Sans nous occuper ici des précautions très-grandes qu'il faudra prendre pour éviter que le miroir plan ne se déforme sous l'influence des rayons solaires, auxquels il ne devra rester exposé que le temps rigoureusement néces-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

saire pour chacune des épreuves successives, nous devons indiquer comment on obtiendra sûrement le maximum de netteté, compatible avec l'état variable de l'atmosphère de chaque jour.

Dans ce but, on établira d'abord entre les deux verres de l'objectif, au moyen de l'échelle de divisions gravées sur la monture à tirage, l'écartement reconnu le plus favorable à l'achromatisme photographique, dans les expériences antérieures du Luxembourg; cet écartement peut être considéré comme fixé définitivement pour toutes les lunettes. La vérification ne devrait en être tentée que si, tous les préparatifs étant complets longtemps à l'avance, on avait des loisirs convenables. Dans ce cas, il faudrait remarquer que, pour un accroissement dans l'écartement des verres de 1^{mm}, il se produit un raccourcissement du foyer d'environ 10^{mm}; l'opération est du reste très-simple et ne demande qu'un peu de temps et de soins.

En laissant donc l'écartement des verres fixe et invariable, on placera d'abord le châssis porte-plaque au numéro des divisions du coulant, déjà déterminé dans les expériences du Luxembourg pour chacune des cinq lunettes, comme donnant les épreuves les plus nettes. Puis on fera, sur une même plaque, cinq ou six épreuves du Soleil, par zones, en faisant marcher le coulant, à chaque épreuve, de $\frac{1}{5}$ millimètre en $\frac{1}{5}$ millimètre, en-deçà et au-delà de la première position. L'examen comparatif des bords du Soleil, sur chaque épreuve, fera connaître avec certitude, après deux ou trois opérations semblables, la position du porte-plaque correspondant à la plus grande netteté. On notera en même temps les températures indiquées par

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

un ou deux thermomètres fixés sur le tube de la lunette.

Ces expériences étant terminées et le point de plus grande netteté étant fixé pour une température bien connue, il conviendra de reprendre ces expériences un autre jour, dans des conditions thermométriques aussi différentes que possible, ce qui fera connaître quelle peut être l'influence de la température sur la position du foyer, ainsi que la petite correction, qu'il pourra être utile d'apporter à la position du porte-plaque, lorsque tout l'appareil éprouvera des changements de température un peu notables.

OBSERVATIONS DU THERMOMÈTRE ET DU BAROMÈTRE AU MOMENT DU PASSAGE.

Les degrés de température et les hauteurs du baromètre, pendant le passage, seront nécessaires pour la discussion et le calcul des observations, notamment pour les corrections dues à la réfraction. Ces données étant également nécessaires pour les observations astronomiques faites aux équatoriaux, elles ne sont pas spéciales pour la photographie, et nous n'avons pas à y insister. Il sera utile cependant que le thermomètre, placé sur le corps de la lunette photographique, soit observé de 30 minutes en 30 minutes, pendant le passage.

PRÉCAUTIONS CONTRE LE DÉPÔT DE ROSÉE SUR LES VERRES.

Si le temps était humide et chaud, le jour du passage, les jours précédents ayant été froids, il pourrait arriver que les

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

verres de l'objectif et le miroir fussent ternis par la vapeur d'eau se déposant en rosée. Cet effet est en général passager et se produit dans les premiers moments de l'afflux de l'air extérieur sur les surfaces plus froides des appareils. Il sera donc utile d'établir, plusieurs heures à l'avance, une large circulation d'air autour des appareils, afin de hâter le moment de l'équilibre des températures. Dans tous les cas, il sera bon de s'assurer, avant de commencer les opérations, que toutes les surfaces de verre sont bien nettes.

Si le climat d'une station se trouve être particulièrement humide, il sera utile de placer, dans le tube de la lunette, près du coulant, quelques fragments de chaux vive, renfermés dans du papier ou dans une boîte close de carton, ce qui maintiendra constamment l'air intérieur à un état de sécheresse convenable. La même précaution devra être prise au sujet des boîtes renfermant les plaques préparées à l'avance, pour lesquelles les effets de l'humidité sont à craindre. Il n'en est plus de même lorsque les épreuves sont terminées, au mercure; elles ne réclament plus aucune précaution spéciale sous ce rapport.

INTENSITÉ LUMINEUSE ET DURÉE D'EXPOSITION.

On sait que l'intensité lumineuse est plus faible aux bords du Soleil qu'au centre; il importe cependant que les épreuves, faites pendant le passage, présentent des bords nettement tracés, afin de faciliter les mesures qui seront faites ultérieurement. Il sera donc utile d'opérer avec des durées d'impression un peu plus grandes qu'on ne le ferait, si l'on voulait obtenir des épreuves artistiques, donnant les taches

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

solaires et l'apparence sphérique du disque entier, avec le plus d'effet. Cependant, il ne faudrait pas exagérer la durée d'impression, ce qui pourrait produire une dilatation sensible du diamètre solaire, surtout si la plaque n'était pas très-exactement au foyer. Il est évident d'ailleurs que toutes les épreuves devront être aussi semblables que possible, sous le rapport de l'intensité de l'impression.

On sait, d'autre part, que la rapidité de l'impression est directement proportionnelle à l'intensité de la lumière, en sorte que, pour obtenir des effets identiques, avec des intensités lumineuses différentes, il faut que les durées d'exposition soient en raison inverse des intensités lumineuses, lorsque la couche sensible reste la même. Lors donc que l'éclat du Soleil viendra à changer, soit par l'effet de la variation de hauteur de l'astre au-dessus de l'horizon, soit par l'effet de modifications survenues dans la transparence de l'atmosphère par des brumes, brouillards ou nuages légers, il y aura lieu de modifier l'ouverture ou la vitesse du passage de l'écran, de manière à obtenir toujours des épreuves de même intensité. L'emploi de l'écran à fentes multiples longitudinales abrégera beaucoup les tâtonnements nécessaires pour atteindre ce but.

Notons encore, à ce sujet, quelques points importants :

MESURE PAR LE DIAPASON DE LA VITESSE DE L'ÉCRAN ET DE LA DURÉE DE L'IMPRESSION.

Pour mesurer la vitesse de chute de l'écran, noircir à la flamme d'une bougie un bord de l'écran, et en approcher

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

pendant son mouvement un index léger, fixé à l'extrémité du diapason mis en vibration. Le nombre des battements inscrits sur le noir de fumée, dans une longueur déterminée, (la durée d'une vibration étant connue) donnera immédiatement la vitesse.

ORIENTATION DU CHASSIS PORTE-PLAQUE.

Rectifier, de temps en temps, pendant le passage, l'orientation du châssis porte-plaque, afin que le mouvement de l'écran ait toujours lieu, à très-peu près, dans une direction normale à la ligne joignant les centres des deux astres.

AVANTAGES DU MOUVEMENT RAPIDE DE L'ÉCRAN.

Il y aura avantage, sous certains rapports, à préférer les grandes vitesses et les grandes ouvertures d'écran, aux vitesses et aux ouvertures plus faibles, qui produiraient des images de même intensité. L'influence du mouvement diurne, pendant le passage de l'écran, aura moins d'inconvénients avec les grandes vitesses, lesquelles donneront lieu à des corrections plus faibles, pour les positions relatives des points de l'image non situés perpendiculairement à la direction du mouvement de l'écran.

ACCIDENTS DIVERS A ÉVITER. — IODAGE ET BROMAGE.

Pendant que la plaque est à l'iode ou au brome, il faut éviter avec soin tous les chocs qui pourraient être imprimés à la plaque ou à la boîte, celle-ci devra être fixée

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

par des vis sur la table des expériences. Ces précautions ont pour but d'éviter que des poussières, imprégnées d'iode ou de brome, ne se fixent sur la couche sensible, où elles donneraient lieu infailliblement à des points noirs.

Pendant l'exposition à l'iode et au brome, il est nécessaire, pour assurer l'égale épaisseur de la couche sensible, de retourner plusieurs fois la plaque de 180° dans son plan. Il conviendra, en outre, de s'assurer de temps en temps, pendant les expériences préliminaires, que les boîtes à iode sont en bon état, et de renouveler l'iode, s'il y a lieu, ainsi que le bromure de chaux, quand sa teinte sera devenue plus pâle.

Le meilleur moyen d'assurer le fonctionnement régulier des boîtes à iode, est de placer auprès d'elles un thermomètre dont les indications seront soigneusement notées, dans plusieurs séries d'essais, ainsi que le temps pendant lequel chaque plaque aura été exposée aux vapeurs d'iode ou de brome. Après quelques séries d'expériences semblables, il suffira de consulter le thermomètre pour prévoir, avec certitude, les durées d'exposition les plus convenables à la formation de la couche sensible.

Pour les stations du Nord, Chine et Japon, on doit prévoir des températures d'hiver très-basses; dans ce cas, il faudra maintenir artificiellement les boîtes à une température constante, voisine de 10°, et employer du bromure de chaux très-foncé en couleur.

Pour les stations du Sud, on aura des températures d'été probablement peu élevées, à Saint-Paul et à Campbell, mais certainement plus chaudes à Nouméa. L'effet

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'une température élevée n'est à craindre que pour le brome, qui agirait sur la plaque dans un temps trop court et d'une manière inégale; dans ce cas, on aura recours à du bromure de chaux de teinte très-pâle, de manière à ramener la durée d'exposition au brome à 25 ou 30 secondes, ce qui est le plus convenable.

EXPOSITION AU MERCURE. — OBSTACLES A L'ÉMISSION DES VAPEURS.

Toutes les boîtes à mercure, de même que toutes les boîtes à iode, devront être mises en expériences et éprouvées, longtemps avant le jour du passage. Mais il arrive quelquefois que, lorsque une boîte à mercure est longtemps de suite maintenue à la température de 60° à 70°, elle devient tout à fait impropre au développement des images, comme si l'on avait enlevé le mercure de la cuvette. Cet accident est dû à une mince couche d'oxyde, qui recouvre le bain de mercure et s'oppose à l'émission des vapeurs. Il convient donc de nettoyer de temps en temps la surface du bain, en passant le mercure dans un entonnoir et en s'abstenant de recueillir les dernières portions qui s'écoulent; on se débarrassera ainsi de la couche d'oxyde, qui remonte toujours à la surface du bain.

ALTÉRATION POSSIBLE DE L'ARGENTURE DU MIROIR.

Si la surface argentée du miroir venait à perdre ses propriétés réfléchissantes, sous l'influence de vapeurs salines ou sulfureuses, il serait nécessaire d'argenter de nouveau

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

la surface altérée, quelque temps avant l'époque du passage. Chaque station étant munie des réactifs nécessaires pour cette opération, et l'un au moins des observateurs s'étant exercé à l'avance à ce genre de manipulation, on doit espérer que le miroir pourra être rétabli dans son état primitif. Cependant, si des circonstances accidentelles s'opposaient au succès de cette opération, il resterait encore un moyen d'exécuter avec succès la plupart des opérations photographiques : ce serait d'enlever le reste de l'argent et de mettre à nu, d'une manière complète, la surface du verre. On se servirait alors de cette surface comme d'un miroir qui serait aussi propre que le précédent à donner de bonnes images, mais qui les donnerait avec une intensité vingt fois plus faible. Dans ce cas, rien ne serait changé aux opérations, si ce n'est qu'il faudrait toujours employer le brome, afin de donner aux plaques une sensibilité suffisante. Il conviendrait, de plus, de couvrir la seconde surface du miroir d'un vernis noir, afin d'éteindre les rayons qui, après s'y être réfléchis, viendraient troubler l'image principale.

S'il survenait enfin un accident plus grave, tel que la rupture du miroir, on pourrait tenter encore de faire un certain nombre d'épreuves photographiques, en dirigeant directement la lunette sur le soleil, à l'aide d'un pied improvisé avec quelques pièces de bois que l'on pourrait avoir à sa disposition. Les épreuves obtenues dans ces circonstances seraient sans doute en nombre très-limité; mais, comme elles pourraient être d'une grande perfection, elles offriraient encore beaucoup d'intérêt et d'utilité.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

DÉTAILS SUR LE LAVAGE ET LE FIXAGE DES ÉPREUVES.

Voici un résumé des opérations finales destinées à terminer les épreuves et à les rendre inaltérables; ces opérations ne doivent, en général, être exécutées qu'après le retour des expéditions, pour le plus grand nombre des épreuves. Cependant, comme un certain nombre d'entre elles pourront être terminées dans les stations mêmes, et que, d'autre part, il y aura une certaine quantité d'épreuves d'essai et de vues pittoresques à terminer de suite, il peut être utile de rappeler brièvement de quelle manière on doit procéder pour éviter les tâtonnements et les mécomptes.

On verse d'abord sur la plaque iodée, portant une image, quelques gouttes d'alcool ordinaire, lequel s'étend rapidement sur toute la surface; on la plonge ensuite dans une cuvette renfermant de l'eau et l'on agite pendant quelques instants; de là, elle est transportée dans une autre cuvette où l'on a versé, jusqu'à une hauteur convenable (6 à 8 millimètres), une dissolution d'hyposulfite de soude au vingtième; on agite sans cesse, jusqu'à la disparition complète de la couche jaune d'or. A ce moment, la plaque, soulevée avec un crochet, est enlevée et placée tout humide dans un grand entonnoir en verre, où elle est lavée pendant quelques instants à l'eau pure, puis posée horizontalement sur le support à fixer.

On verse alors sur sa surface autant de dissolution de sel d'or à fixer que la surface en peut retenir, puis on chauffe rapidement avec une lampe à alcool de force moyenne, en

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ayant soin de chauffer les angles et les bords autant que le centre. L'opération étant faite dans un lieu bien éclairé, on voit l'image s'assombrir d'abord, puis, quelques instants après, prendre un vif éclat sur toute sa surface ; l'opération est alors terminée ; la plaque est penchée, pour laisser écouler la liqueur qui ne doit servir qu'une seule fois, puis elle est placée rapidement et tout humide dans l'entonnoir de verre, pour y être lavée quelque temps à l'eau pure (eau distillée ou eau de pluie), et enfin séchée à l'aide d'une lampe à alcool promenée sur le revers de la plaque. L'épreuve est alors fixée et complétement achevée.

Le sel d'or à fixer se prépare, en quelques instants, de la manière suivante : il faut d'abord faire dissoudre 5 grammes d'hyposulfite de soude dans $\frac{1}{2}$ litre d'eau pure, et 1 gramme de cholure d'or brun également dans $\frac{1}{2}$ litre d'eau pure ; il faut ensuite verser *la solution d'or dans la solution de soude,* lentement, peu à peu et en agitant toujours le sel de soude. On a ainsi un litre de sel d'or à fixer, qui peut servir pour un grand nombre de plaques, et qui se conserve parfaitement sans altération ; toutes les liqueurs employées dans ces opérations et ces lavages doivent être limpides, et il convient de les filtrer s'il vient à se former quelque léger dépôt au fond des flacons ; il est important de changer, à chaque épreuve, la solution d'hyposulfite au vingtième, destinée à dissoudre l'iodure, ou au moins de ne pas s'en servir pour plus de deux ou trois épreuves consécutives ; sans cette précaution, il se produit souvent un voile bleuâtre sur l'épreuve, pendant le fixage au sel d'or.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

PRINCIPAUX ÉLÉMENTS A INSCRIRE SUR LES TABLEAUX DES OBSERVATIONS.

Il est à désirer que les tableaux des observations renferment, au moins, les éléments suivants, disposés en colonnes verticales successives.

1° *Numéros des plaques;*
2° *A l'iode ou au brome;*
3° *Heure;*
4° *Tirage du coulant de la lunette;*
5° *Grandeur de l'ouverture de l'écran mobile;*
6° *Vitesse de la chute de l'écran mobile;*
7° *Angle d'orientation du châssis porte-plaque avec la verticale;*
8° *Température de la lunette;*
9° *Température extérieure;*
10° *Hauteur du baromètre;*
11° *État du ciel;*
12° *Remarques particulières.*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

LÉGENDE EXPLICATIVE

DE LA

PLANCHE RELATIVE A LA *LUNETTE PHOTOGRAPHIQUE*

DESTINÉE

A L'OBSERVATION DU PASSAGE DE VÉNUS.

La planche, placée à la fin du volume, représente la lunette photographique adoptée par la Commission dans la séance du 8 mars 1873 (p. 329, 1er volume des mémoires, rapports et documents, etc.) et divers appareils relatifs à son usage; elle forme le complément nécessaire des documents imprimés dans le présent volume, en particulier du programme des opérations photographiques (voir p. 1), dont plusieurs passages seraient peu intelligibles sans la représentation des diverses pièces auxquelles ils se rapportent.

La théorie et le maniement de l'appareil seront l'objet d'une description et d'une discussion plus complètes lors de la publication des mesures effectuées sur les épreuves obtenues dans les diverses stations; on se contentera ici de

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

renvoyer pour les dispositions principales aux mémoires et rapports qui ont conduit à leur adoption.

FIGURE 1. — *Coupe de l'objectif photographique.* Objectif achromatique de $0^m,135$ (5 pouces) d'ouverture et de 4 mètres environ de distance focale. Le verre convergent en crown-glass C est porté par un manchon extérieur D qui glisse sur un tube intérieur T portant le verre divergent en flint glass F.

Les deux verres, taillés comme les objectifs employés en astronomie, pour donner des images achromatiques, peuvent être écartés, grâce au mouvement de glissement du manchon, à une distance comprise entre 1 millimètre et 100 millimètres, mesurée sur une échelle latérale fixée au manchon. Cette disposition, qui permet de vérifier optiquement la perfection de l'objectif lorsque les verres sont au contact, sert à transformer l'achromatisme des rayons visibles en achromatisme des rayons chimiques par un écartement convenable des verres. (Voir, 1er volume, les Notes présentées à ce sujet à la Commission par M. Cornu, p. 265, 303, 403 et 447, — ainsi que les Rapports de M. Fizeau, p. 315 et 329.)

La netteté la plus grande des épreuves photographiques correspondait à un écartement des verres voisin de 45 millimètres, ce qui réduisait la distance focale d'environ 30 centimètres.

FIG. 2. — *Oculaire Porte-plaque.* Il se compose d'un châssis BB′ destiné à renfermer les plaques impressionnables, glissant à coulisse entre deux guides AA′, A″A‴, dans le plan focal de la lunette. Le couvercle BB″ se ferme à charnière et porte un oculaire L pour la mise au point optique de l'appareil : un verrou K peut le maintenir fermé ; une pince J permet de le fixer en un point quelconque de sa course.

La platine qui porte les guides AA′A″A‴ est fixée au tube de la lunette par un collier de serrage qui embrasse le coulant R ; elle est représentée avec ses arêtes verticales ; mais elle peut prendre une orientation quelconque autour de l'axe de la lunette ; une graduation en degrés portée par le tube N, voisin du collier de serrage, et un index fixe V′, permettent de régler les orientations relativement à la verticale à moins d'un demi-degré près.

Un obturateur O, destiné à intercepter toute lumière venant de l'objectif ou à limiter le champ des images focales, s'introduit, à 5 millimètres en avant du plan des plaques impressionnables, dans une fente

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

convenable ménagée dans la pièce métallique qui raccorde la platine AA′A″A‴ au collier de serrage.

L'obturateur à fente GG′ est une lame d'acier poli qui glisse très-librement dans une fente traversant toute la longueur de la platine à deux millimètres environ du plan des plaques impressionnables : un système de poids et de poulies convenables fixé sur un support indépendant XY (voir fig. 4), permet de lui imprimer un mouvement plus ou moins rapide, sans ébranler la lunette. L'ouverture rectangulaire φφ′ (fig. 2), que porte cette lame, découvre successivement pendant un temps très-court les diverses parties de l'image focale du soleil et produit l'impression photographique sur la plaque sensible.

Le mouvement de cet obturateur devra s'effectuer toujours perpendiculairement à la ligne qui joint les centres du Soleil et de Vénus sur l'image focale (voir premier volume, p. 404): on y parviendra en réglant l'orientation du châssis (présent volume, programme, p. 6), d'après une table calculée à l'avance pour chaque station. (Voir dans le présent volume, p. 89 et p. 97, et les tables, p. 105.)

Sur le coulant de la lunette emboîté dans le tube V, muni lui-même d'un collier de serrage, est tracée une graduation en millimètres qui permet de régler à $\frac{1}{10}$ de millimètre, le tirage de la lunette, c'est-à-dire la position du porte-plaque : par une série d'essais méthodiques décrits précédemment (1er volume, p. 304 et suivantes; présent volume, *Notes pratiques*, p. 17), on définit la position du porte-plaque où les images du bord solaire ont le maximum de netteté.

FIG. 3. — *Lunette photographique montée équatorialement.* C'est la disposition photographique la plus simple et la plus parfaite qu'on puisse adopter lorsqu'on a soin de choisir une monture équatoriale bien stable et une distance focale de grandeur moyenne pour la lunette. (Voir le Rapport de M. Fizeau, 1er vol., page 315.) Sa perfection provient de ce que les organes optiques employés à la formation des images sont les moins difficiles à construire et que leur nombre est réduit au minimum.

FIG. 4. — *Perspective de la lunette photographique horizontale avec miroir.* C'est la disposition adoptée par la Commission; un appareil semblable est donné aux cinq expéditions de Saint-Paul, Pékin, Nagasaki, Campbell et Nouméa.

Le miroir-plan M, en verre argenté, est circulaire et a $0^m,30$ de diamètre; l'observateur le gouverne par l'intermédiaire de longues ma-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

nettes *mm'* qui transmettent les petits mouvements en azimut et en hauteur. Un véritable *chercheur,* composé d'une lentille à long foyer U, et d'un verre dépoli U' placé à son foyer principal, reçoit le faisceau réfléchi par un miroir auxiliaire M' plus petit et solidaire avec le grand miroir.

Un réglage préalable du parallélisme des plans réfléchissants et des axes optiques du chercheur et de la lunette permet de diriger sans peine le faisceau réfléchi par le grand miroir sans avoir besoin de découvrir celui-ci, excepté au moment de l'observation photographique. (Voir le Programme, page 5.)

Le porte-plaque A est celui qui est décrit fig. 2; on y voit en place la pièce additionnelle, XY, ou support qui porte le système de poids et de poulies destinées à mettre en mouvement l'écran mobile GG' de la fig. 2. Ce support est complétement indépendant des pièces qui l'avoisinent et ne touche en aucun point le porte-plaque ni la lunette; néanmoins il peut suivre les orientations diverses que ce porte-plaque doit prendre suivant l'heure de l'observation. Sa construction sera donnée plus tard en détail dans la description des mesures des épreuves obtenues.

Le ventilateur, à force centrifuge W, est destiné à agiter et renouveler par aspiration l'air de l'intérieur de la lunette afin d'éviter l'inégal échauffement des couches : on doit le faire fonctionner avant chaque observation. (Voir les notes pratiques, page 17.)

FIG. 5 et 6. — *Représentation en demi-grandeur des deux espèces d'épreuves à obtenir pendant la durée du passage de Vénus sur le Soleil.* (Voir le Programme, p. 6.) La première représente les deux épreuves du disque solaire entier qu'on devra obtenir vers le milieu du passage; la seconde, une série de cinq zones, correspondant à l'entrée ou à la sortie de la planète. Dans ce dernier cas, on obtient cette limitation des images par une ouverture convenable pratiquée dans l'obturateur O (fig. 2).

La multiplicité des épreuves sur une même plaque s'obtient en faisant glisser le châssis BB' (fig. 2) entre ses guides et en l'arrêtant aux positions convenables avec la pince J.

FIG. 7 et 8. — *Représentation en vraie grandeur du disque solaire et du disque de la planète dans chacun de ces deux genres d'épreuves.*

FIG. 9. — *Boîte à ioder et à bromer les plaques.* Boîte en noyer à deux com-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

partiments, renfermant chacun une cuvette rectangulaire à bords rodés : l'une contient des cristaux d'iode, l'autre de la chaux bromée. Deux glaces mobiles g *g'* permettent de fermer hermétiquement ces cuvettes et de les découvrir facilement comme on le voit en *g'*. Un châssis mobile à coulisse peut voyager de l'une à l'autre de ces cuvettes et, par suite, exposer successivement la plaque aux vapeurs d'ode ou de brome. (Voir le Programme, p. 3 et 4, et les notes pratiques, p. 11, etc.)

FIG. 10. — *Lame de métal*, avec rebords *hh'*, destinée à transporter, à l'abri de la lumière, les plaques daguerriennes, depuis la boîte à ioder jusqu'au porte-plaque et de là à la boîte à mercure : comme la cabane, où l'instrument est établi, est assez sombre, ce mode de transport suffit pour protéger complétement la couche sensible contre la lumière extérieure.

FIG. 11. — *Boîte à mercure*. (Voir le Programme, p. 7.) C'est une boîte en bois à rainures verticales *v*,*v*, dans lesquelles on peut ranger 40 plaques par groupes de deux, séparés par un intervalle de 10 millimètres environ : le fond est en tôle et contient du mercure chauffé par une lampe à alcool *l*. La température est indiquée par le thermomètre *tt'*. Une lame de tôle, dont on peut régler la distance au fond de la boîte, permet de maintenir la température bien stationnaire au degré voulu.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Lunette photographique destinée à l'observation du Passage de Vénus

Fig. 1

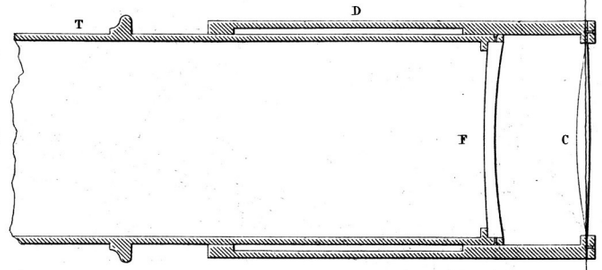


Fig. 2

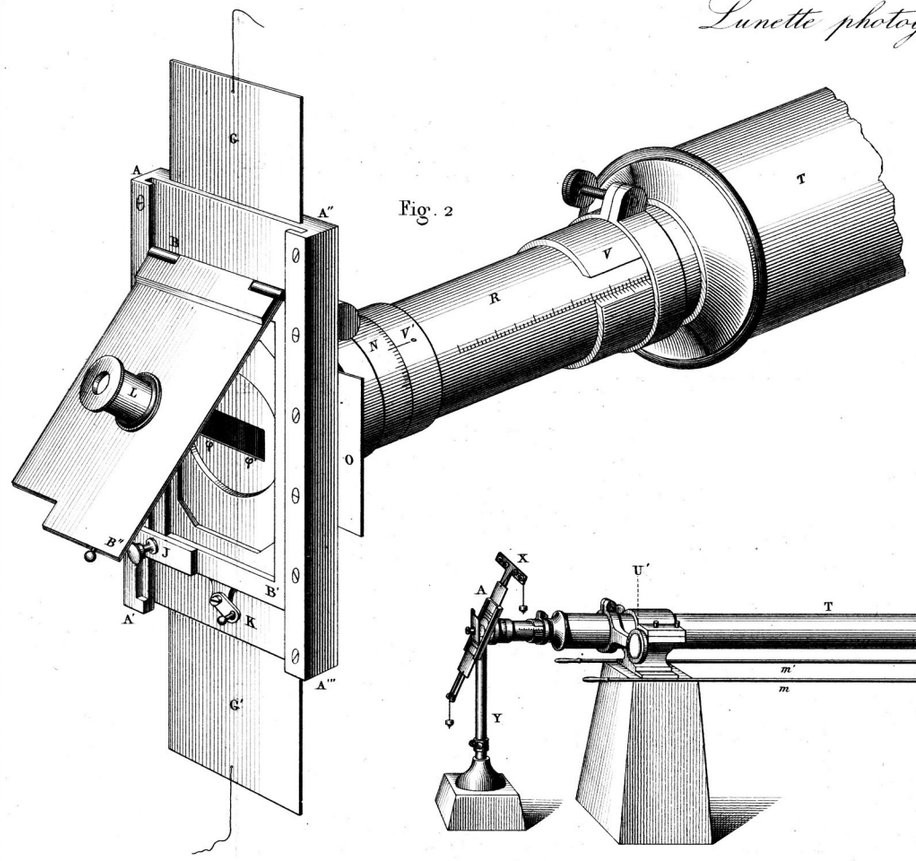


Fig. 3

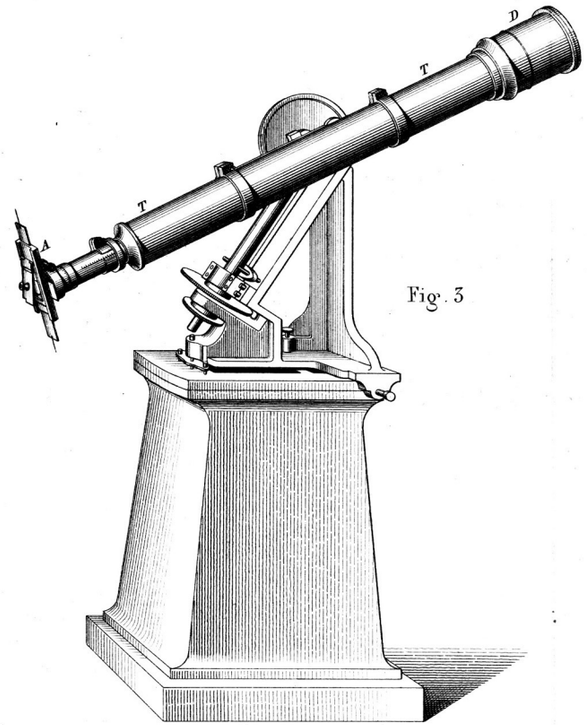


Fig. 4

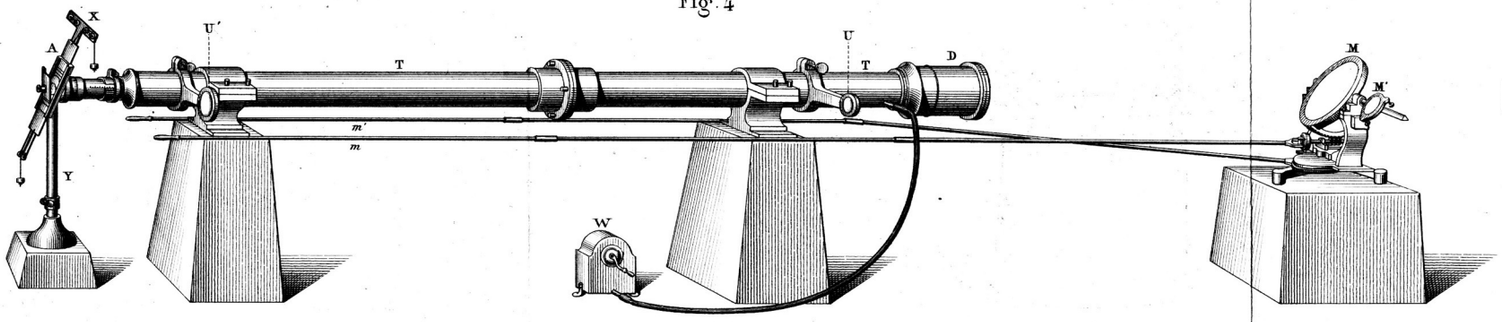


Fig. 5

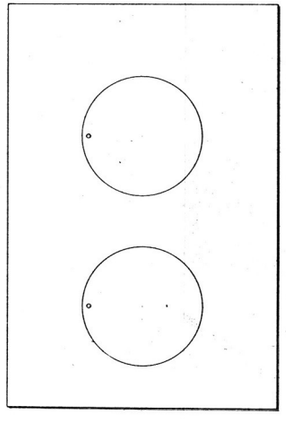


Fig. 6

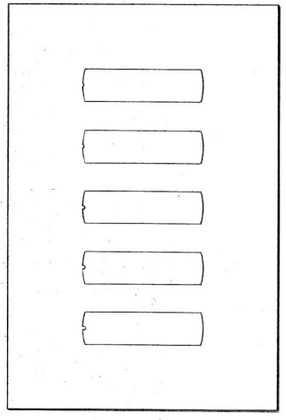


Fig. 8

Fig. 7

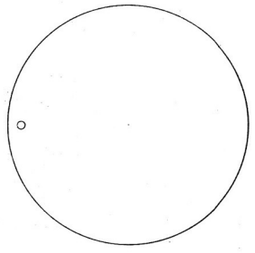


Fig. 9

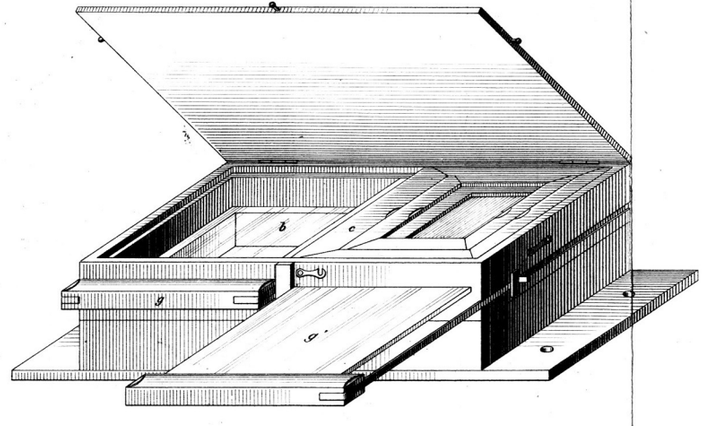


Fig. 10

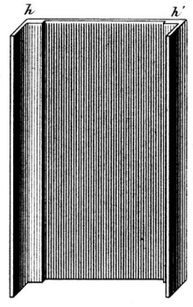
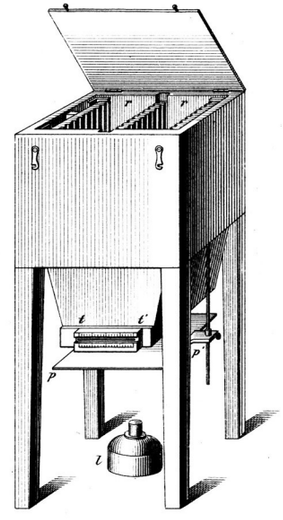


Fig. 11



Dessiné et Gravé par C. Legros

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

Programme des opérations photographiques qui devront être exécutées simultanément dans toutes les stations, d'après une décision prise par la Commission du passage de Vénus, dans la séance du 6 avril 1874. — M. FIZEAU, *rapporteur*.. 1

Notes pratiques sur les opérations de la photographie pendant le prochain passage de Vénus sur le Soleil, réunies sur la demande de la sous-commission de photographie. — Par M. FIZEAU. . . . 11

Programme des observations astronomiques qui devront être effectuées dans toutes les stations, d'après une décision prise par la Commission du passage de Vénus, dans la séance du 16 mai 1874. — M. YVON VILLARCEAU, *rapporteur*. 29

Effet d'une erreur dans la position tabulaire de Vénus sur le temps de l'entrée et de la sortie lors de son passage sur le Soleil, au 8 décembre 1874, d'après des observations effectuées près du nœud ascendant, en 1872, 1873 et 1874, à l'observatoire royal de Greenwich. — Par M. W. H. CHRISTIE.. 57

Extrait du Bulletin international de l'observatoire de Paris, 20 mai 1874. N° 140.. 61

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Pages.

Expéditions anglaises pour l'observation du passage de Vénus, le 8 décembre 1874. — Traduction des instructions aux observateurs, dressées par Sir GEORGE B. AIRY, *astronome royal*. 63

Note sur la manière de déterminer l'orientation du châssis porte-plaques de l'appareil photographique destiné à l'observation du passage de Vénus. — Par M. PH. HATT. 89

Résultats des calculs faits pour déterminer l'orientation de la ligne des centres de Vénus et du Soleil dans les quatre stations françaises. — Par M. PH. HATT. 97

Décision prise dans le but d'assurer la conservation des documents recueillis dans les diverses stations. 107

Légende explicative de la planche représentant la lunette photographique destinée à l'observation du passage de Vénus. Planche représentant l'appareil photographique. 109

Recueil de nombres pouvant servir à la discussion des observations du passage de Vénus, du 8 décembre 1874. — Par M. V. PUISEUX. 115

FIN DE LA TABLE.

Paris. — Typ. de Firmin-Didot et Cie, impr. de l'Institut, rue Jacob, 56.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

INSTITUT DE FRANCE.

ACADÉMIE DES SCIENCES.

RECUEIL DE MÉMOIRES, RAPPORTS ET DOCUMENTS
RELATIFS A L'OBSERVATION DU PASSAGE DE VÉNUS SUR LE SOLEIL.
EXTRAIT DU TOME III, 3e PARTIE.

DOCUMENTS

RELATIFS AUX

MESURES DES ÉPREUVES PHOTOGRAPHIQUES.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1882

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Extrait du *Recueil de Mémoires, Rapports et documents relatifs à l'observation du Passage de Vénus sur le Soleil*, tome III, 3e Partie.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

DOCUMENTS

RELATIFS AUX

MESURES DES ÉPREUVES PHOTOGRAPHIQUES.

FASCICULE A

COMPRENANT

LE RÉSUMÉ DES ÉTUDES DE LA SOUS-COMMISSION CHARGÉE DE LA MESURE DES ÉPREUVES

ET LES DOCUMENTS QUI S'Y RATTACHENT:

Par MM. FIZEAU et CORNU.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

OBSERVATION PHOTOGRAPHIQUE

DU

PASSAGE DE VÉNUS SUR LE SOLEIL

DU 8-9 DÉCEMBRE 1874.

OBTENTION DES ÉPREUVES.

Les épreuves photographiques dont il est question dans la présente publication ont été obtenues, aux stations de l'expédition française où le temps a permis l'observation du passage de Vénus, avec des appareils et des procédés d'expérimentation aussi identiques que possible : ce sont pour la plupart des épreuves daguerriennes obtenues en moins d'un dixième de seconde, à des époques parfaitement déterminées, et dont la liste est donnée plus loin pour chaque station.

Des précautions minutieuses ont été prises pour obtenir la plus grande comparabilité possible entre les épreuves : à cet effet les appareils ont été construits exactement sur le même modèle, par le même fabricant, avec des verres provenant de la même fonte; ils ont ensuite été expérimentés successivement dans un petit observatoire construit dans le jardin du Luxembourg, sous la direction de la Sous-Commission, composée de MM. Fizeau et Cornu et de

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

MM. les chefs de station. Les observateurs qui devaient effectuer les opérations sont venus successivement prendre part à ces essais, y ont appris la manœuvre des appareils et se sont exercés pendant plusieurs semaines à obtenir des épreuves solaires suivant les prescriptions de la Commission.

Au moment du départ des observateurs, il a été remis à chaque expédition le programme des opérations à effectuer suivant une marche uniforme et quelques notes pratiques destinées à faciliter les manipulations photographiques. Ces documents sont réunis dans le tome Ier du *Recueil de Mémoires, Rapports et Documents relatifs à l'observation du passage de Vénus sur le Soleil, du* 8-9 *décembre* 1874, IIe Partie, p. 1 et suivantes.

Appareil photographique. — Une description détaillée de l'appareil définitif a été donnée sous forme de *légende explicative*, accompagnant la Planche de la IIe Partie du tome Ier; on peut donc se borner à rappeler le principe sur lequel il est fondé.

C'est une lunette dont l'objectif, travaillé comme les objectifs astronomiques, de manière à être achromatique pour les rayons visibles, a été rendu achromatique pour les rayons chimiques par l'écartement des deux verres flint et crown qui le composent (*voir* t. Ier, Ire Partie, p. 265, 303, 315, 443 et 447). L'objectif a 135 millimètres (5 pouces) d'ouverture et 4 mètres de distance focale, lorsque les verres sont au contact; l'écartement des verres, qui est d'environ 45 millimètres, réduit cette distance à $3^m,70$.

La lunette est disposée horizontalement et vise au centre d'un miroir plan, permettant de réfléchir dans l'axe de la lunette la lumière de l'astre à photographier. L'azimut dans lequel la lunette était dirigée a été choisi dans chaque station, de façon que l'angle

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

moyen de réflexion, pendant toute la durée du passage, fût minimum (t. Ier, p. 440, et IIe Partie, p. 94).

Les images photographiques sont *directes,* c'est-à-dire obtenues directement au foyer de la lunette, sans amplification.

Les objectifs destinés aux lunettes photographiques ont été étudiés sur le ciel. A cet effet, ils ont été successivement montés sur un corps de lunette dirigé vers le pôle, de façon à viser l'étoile polaire (1). L'image de l'étoile, examinée avec un grossissement de 150 fois environ, a présenté l'aspect d'un point très-brillant, entouré d'anneaux de diffraction bien réguliers : le compagnon de 9e grandeur était parfaitement visible.

Il est bon de rappeler, pour éviter des méprises, qu'il a été prévu dès le début (*voir* t. Ier, Ire Partie, p. 404) que les épreuves solaires obtenues avec un appareil non parallactique par le moyen de la chute d'un écran percé d'une fente, la durée de la chute étant appréciable ($\frac{1}{50}$ à $\frac{1}{20}$ de seconde), ne peuvent fournir directement des mesures précises que perpendiculairement à la direction du mouvement de l'écran; aussi a-t-on pris soin de faire varier la direction de ce mouvement pendant toute la durée de l'observation photographique du passage, de façon à la maintenir toujours perpendiculaire à la ligne des centres sur l'épreuve (*voir* t. Ier, Ire Partie, p. 404, et t. II, les tableaux calculés, p. 89, et la légende explicative). Avec cette précaution, on est assuré que la position des bords des deux astres n'est pas altérée suivant la ligne de leur centre, quel que soit le rapport de la vitesse du mouvement diurne et du mouvement de l'écran. Cette propriété est due à ce que les images des

(1) Cette opération a été exécutée à l'École des Mines, au laboratoire de Photographie, que M. Daubrée, directeur de l'École des Mines, avait bien voulu mettre à la disposition de la Sous-Commission, pour l'instruction des observateurs chargés de la photographie.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

quatre bords ont été impressionnées simultanément : si le mouvement diurne a été appréciable pendant la durée de l'impression, il pourra quelquefois en résulter un petit défaut de netteté, mais ce défaut, étant le même sur les quatre bords, ne produira aucune erreur systématique dans la position relative de ces quatre bords.

Dans toute autre direction, la position relative des points de l'image peut être altérée dans des proportions plus ou moins grandes, suivant la loi du mouvement pendant la chute de l'écran ; cette question sera du reste examinée plus loin, pour se rendre compte de l'influence de cette cause d'erreur sur certains réglages où l'on utilise des portions du disque solaire en dehors de la ligne des centres.

Liste des épreuves photographiques du Soleil obtenues pendant le passage, du 8-9 décembre 1874.

Diagramme figuratif.

La *Pl. I* représente la répartition des épreuves solaires que l'état du ciel a permis d'obtenir aux différentes stations pendant le passage de Vénus, le 9-10 décembre 1874.

Ce diagramme a été obtenu en traçant pour chaque station une graduation représentant l'heure moyenne du lieu à l'échelle de 1 millimètre pour une minute de temps moyen, et en portant une petite perpendiculaire au point qui définit l'heure à laquelle chaque épreuve a été obtenue ; on a réuni par une petite ligne transversale toutes les épreuves qui se trouvent sur la même plaque photographique : au-dessus de ce groupe est inscrit le numéro d'ordre gravé sur la plaque, conformément au programme de la Commission (*voir* t. Ier, IIe Partie, p. 13). On aperçoit ainsi

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

les deux sortes d'épreuves définies dans ce programme, à savoir les épreuves par *zones*, comprenant en général cinq épreuves du Soleil limitées à une bande parallèle à la ligne des centres des deux astres et les épreuves comprenant deux *soleils entiers*.

La correspondance des heures des stations a été obtenue très-simplement par le choix de l'origine des graduations qui représentent le temps moyen du lieu. A cet effet, on a d'abord tracé les lignes verticales ponctuées qui figurent le temps moyen de Paris; en ajoutant au temps moyen de Paris la valeur de la longitude orientale de la station, on a obtenu le temps moyen du lieu, compté à partir de l'origine convenable. Il résulte de cette disposition que deux épreuves qui se trouvent figurées par des traits placés sur la même verticale ont été obtenues *au même instant physique*, représenté en temps moyen de Paris par la graduation correspondante indiquée au bas de la Planche.

La correspondance des époques de ces épreuves avec le phénomène astronomique est indiquée sur chaque graduation par quatre points (×) figurant les heures des quatre contacts de la planète avec le disque solaire. Ces quatre points forment les limites des trois phases principales du phénomène : ils permettent donc de distinguer immédiatement les épreuves sur lesquelles les disques des astres sont échancrés et celles où les astres sont séparés, distinction importante au point de vue du mode de mesure et des éléments qu'on peut leur demander.

Ce mode de représentation suffirait complétement pour donner la répartition des épreuves et leur nature; mais, pour parler plus directement aux yeux, on a profité de ce que cette graduation peut représenter d'une manière approchée la trajectoire apparente du centre de Vénus sur le disque solaire. Dans cette manière de voir, les quatre points (×) figurent la position du centre de

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

la planète aux époques des quatre contacts : on a donc tracé autour de ces quatre points pris comme centre, avec un rayon convenable, des circonférences représentant le disque de la planète, et l'on a mené à ces quatre circonférences une circonférence tangente qui représente le disque solaire. L'addition de ces circonférences peint donc en quelque sorte aux yeux les phases diverses du phénomène, et rend plus aisée l'interprétation du diagramme.

La valeur graphique des rayons rR de Vénus et du Soleil a été déduite des éléments astronomiques, par comparaison de leur valeur angulaire avec la valeur angulaire du moyen mouvement géocentrique, d'après les données suivantes, empruntées à la *Connaissance des Temps pour* 1874, p. 389 :

Mouvement horaire en ascension droite de Vénus.....	1'.33,"8	O
» » du Soleil.....	2.44,7	E
» en déclinaison de Vénus.....	47,7	B
» » du Soleil.....	14,8	A
Demi-diamètre vrai de Vénus.....	32,0	
» du Soleil.....	16.15,7	

On en conclut que le mouvement horaire relatif du centre de Vénus sur le disque solaire est :

En ascension droite..... 1'33",8 + 2'44",7 vers l'ouest = 4'18",5 — 258",5
En déclinaison..... 47",7 + 14",8 vers le nord = 1' 2",5 — 62",5

Composant ces deux mouvements, on obtient le mouvement horaire relatif sur la corde décrite par le centre de la planète

$$\sqrt{(258'',5)^2 + (62'',5)^2} = 265'',95.$$

Le mouvement correspondant pendant une heure de *temps*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

moyen (car le mouvement horaire est rapporté au temps sidéral) sera

$$265'',95 \times 1,00273 = 266'',68.$$

Si donc on admet que les graduations horizontales représentent la corde décrite par le centre de la planète, si l'on admet de plus, pour simplifier, que ce mouvement est uniforme, on aura entre les éléments de la figure la proportion suivante :

$$\frac{60^{mm}}{266'',68} = \frac{R}{975'',7} = \frac{r}{32''}, \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} R = 219^{mm},52, \\ r = 7^{mm},20. \end{cases}$$

C'est avec ces données qu'on a défini le rayon des circonférences, qui représentent, à titre purement figuratif, le disque des deux astres.

Les heures des épreuves obtenues à chaque station, dont la liste va suivre, ont été fournies par les observateurs chargés de l'observation photographique du passage, la longitude par les observateurs chargés de l'observation directe du phénomène. On trouvera dans le tome II de la présente publication les observations originales qui ont permis de calculer ces heures, ainsi que tous les détails nécessaires à leur réduction.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

LISTE DES ÉPREUVES PHOTOGRAPHIQUES OBTENUES AUX DIVERSES STATIONS AVEC LES HEURES CORRESPONDANTES.

Station de Nagasaki.

Observateur, M. L. Picaud. — Longitude adoptée = $8^h\,30^m\,16^s$.

Numéros des plaques.	T. M. du lieu.	T. M. de Paris.	Numéros des plaques.	T. M. du lieu.	T. M. de Paris.
	h m s	h m s		h m s	h m s
1	22.21.16,6	13.51. 0,6	6	22.26.15,7	13.57.59,7
	26,4	10,4		26,1	10,1
	37,1	21,1		36,1	20,1
	46,1	30,1		46,1	30,1
	56,1	40,1		56,1	40,1
2	22.22.17,1	13.52. 1,1	7	22.28 2,1	13.57.46,1
	26,1	10,1		10,1	54,1
	36,1	20,1		36,1	58.20,1
	46,1	30,1		29. 6,1	50,1
	56,1	40,1		36,1	59.20,1
3	22.23.16,9	13.53. 0,9	8	22.30. 7,1	13.59.51,1
	26,1	10,1		36,1	14. 0,20,1
	35,7	19,7		31. 6,1	50,1
	46,1	30,1		37,6	1.21,6
	56,1	40,1		32. 6,5	50,5
4	22.24.16,1	13.54. 0,1	9	22.32.38,0	14. 2,22,0
	27,3	11,3		33. 7,0	51,0
	36,1	20,1		36,2	3.20,2
	46,1	30,1		34. 7,0	51,0
	56,1	40,1		36,0	20,0
5	22.25.17,1	13.55. 1,1	10	22.35. 7,5	14. 4.51,5
	26,1	10,1		36,0	20,0
	36,1	20,1		36. 6,5	50,5
	45,7	29,7		36,0	6.20,0
	55,1	39,1		37. 6,0	50,0

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Numéros des plaques.	T. M. du lieu.	T. M. de Paris.
	h m s	h s
11	22.37.37,0	14. 7.21,0
	38. 6,0	50,0
	37,0	8.21,0
	39. 6,5	50,5
	37,0	9.21,0
12	22.40.44,5	14.10.28,5
	41. 6,0	50,0
	42. 7,0	11.51,0
	36,0	12.20,0
	43. 6,0	50,0
13	22.43.36,0	14.13.20,0
	44. 3,0	47,0
	36,0	14.20,0
	45. 6,0	50,0
	36,0	15.20,0
19	22.46.12,0	14.15.56,0
	37,0	16.21,0
	47. 6,0	50,0
	36,0	17.20,0
	48. 6,0	50,0
20	22.49. 7,0	14.18.51,0
	17,5	19. 1,5
	26,5	10,5
	36,0	20,0
	46,0	30,0
14	22.50. 7,0	14.19.51,0
	16,0	20. 0,0
	26,0	10,0
	36,0	20,0
	46,0	30,0
15	22.51. 6,5	14.20.50,5
	16,0	21. 0,0
	26,0	10,0
	36,0	20,0
	46,0	30,0

Numéros des plaques.	T. M. du lieu.	T. M. de Paris.
	h m s	h m s
16	22.52. 6,0	14.21.50,0
	16,5	22. 0,5
	27,0	11,0
	36,0	20,0
	46,0	30,0
17	22.53. 9,0	14.22.53,0
	19,0	23. 3,0
	36,6	20,6
	46,5	30,5
	56,0	40,0
18	22.54.17,0	14.24. 1,0
	26,7	10,7
	36,0	20,0
	46,0	30,0
	57,0	41,0
21	22.56. 5,9	14.25.49,9
	36,9	26.20,9
	57. 5,9	49,9
	35,9	27.19,9
	58. 5,9	49,9
22	22.59. 8,9	14.28.52,9
	23. 0. 5,9	49,9
23	23. 1. 5,9	14.30.49,9
	2. 4,9	31.48,9
24	23. 3. 4,9	14.32.48,9
	4. 5,9	33.49,9
25	23. 5. 6,4	14.34.50,4
	6. 3,9	35.47,9
26	23. 7. 5,9	14.36.48,9
	8. 3,9	37.49,9
27	23. 9. 4,9	14.38.48,9
	10. 5,4	39.49,4
28	23.11. 9,4	14.40.53,4
	12. 3,9	41.47,9

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Numéros des plaques.	T. M. du lieu.	T. M. de Paris.
	h m s	h m s
29	23.13. 4,9	14.42.48,9
	14. 3,9	43.47,9
30	23.15. 4,9	14.44.48,9
	16.27,4	46.11,4
31	23.18. 4,9	14.47.48,9
	20. 3,9	49.47,9
32	23.21. 5,8	14.50.49,8
	22. 5,8	51.49,8
33	23.23. 6,3	14.52.50,3
	24. 3,8	53.47,8
34	23.25. 4,8	14.54.48,8
	26. 4,8	55.48,8
35	23.27. 5,3	14.56.49,3
	28. 7,8	57.51,8
36	23.29. 4,0	14.58.48,0
	30. 4,0	59.48,0
37	23.31.12,8	15. 0.56,8
	32. 4,3	1.48,3
38	23.33. 5,8	15. 2.49,8
	34. 4,8	3.48,8
39	23.35. 5,8	15. 4.49,8
	36. 4,8	5.48,8
40	23.37. 7,3	15. 6.51,3
	38. 4,4	7.48,4
41	23.39. 5,8	15. 8.49,8
	41. 6,8	10.50,8
42	23.42. 4,8	15.11.48,8
	43. 4,1	12.48,4
43	23.44. 4,8	15.13.48,8
	45. 4,3	14.48,9
44	23.46. 8,3	15.15.52,3
	47. 3,8	16.47,8

Numéros des plaques.	T. M. du lieu.	T. M. de Paris.
	h m s	h m s
45	23.48. 6,4	15.17.50,4
	49. 5,8	18.49,8
46	23.51. 5,7	15.20.49,7
	53. 4,2	22.48,2
47	23.55. 4,7	15.24.48,7
	57. 4,2	26.48,2
48	23.59. 5,2	15.28.49,2
	0. 1. 4,7	30.48,7
49	0. 3. 5,7	15.32.49,7
	5. 5,7	34.49,7
50	0. 7. 4,7	15.36.48,7
	9. 5,7	38.49,7
51	0.11. 5,7	15.40.49,7
	13. 4,9	42.48,9
52	0.16. 5,5	15.45.49,5
	18. 5,5	47.49,5
53	0.20. 5,5	15.49.49,5
	22. 5,9	51.49,9
54	0.24. 9,1	15.53.53,1
	26. 5,1	55.49,1
55	0.28. 7,6	15.57.51,6
	30. 4,6	59.48,6
56	0.32. 5,6	16. 1.49,6
	34. 4,6	3.48,6
57	0.36. 6,1	16. 5.50,1
	0.38. 5,6	7.49,6
58	0.40. 3,6	16. 9.47,6
	1.17. 5,2	46.49,2
59	1.18. 6,0	16.47.50,0
	19. 5,0	48.49,0
60	1.20. 5,4	16.49.49,4
	21. 5,4	50.49,4

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Numéros des plaques.	T. M. du lieu.	T. M. de Paris.	Numéros des plaques.	T. M. du lieu.	T. M. de Paris.
	h m s	h m s		h m s	h m s
61	1.24.15,6	16.52.59,6	64	2.20.16,9	17.50. 0,9
	25.45,6	54.29,6		33,4	17,4
62	2.16.38,4	17.46.22,4	103	2.42.30,1	18.12.14,1
	17. 2,4	46,4		43.24,3	13. 8,3
				35,9	19,9
63	2.18.38,4	17.47.22,4		46,9	30,9
	19. 4,9	48,9		44.23,3	14. 8,3

Il est nécessaire de remarquer que dans cette station on était en plein hiver : le soleil, très-bas sur l'horizon, a été presque constamment brumeux ou couvert de nuages; il en résulte que le nombre d'épreuves faiblement impressionnées ou incomplètes, par suite de la présence de nuages sur le soleil, est notable, ce qui diminue d'autant le nombre des épreuves susceptibles de fournir des mesures précises.

Hauteur barométrique moyenne pendant l'observation..... 760mm (?)

Température extérieure..... 12°,0

Station de Pékin.

Observateurs, MM. Blarez et Lapied. — Longitude adoptée = $7^h 36^m 30^s$.

Numéros des plaques.	T. M. du lieu.	T. M. de Paris.	Numéros des plaques.	T. M. du lieu.	T. M. de Paris.
	h m s	h m s		h m s	h m s
9	21.44.18,3	14. 7.48,3	13	21.54.06,9	14.17.36,9
	27,0	57,0		16,1	46,1
	36,8	8.06,8		23,4	53,4
	45,6	15,6		30,9	18. 0,9
	54,6	24,6		38,1	08,1
10	21.46.14,5	14. 9.44,5	14	21.56.11,5	14.19.41,5
	24,5	54,5		20,8	50,8
	36,7	10. 6,7		28,9	58,9
	46,5	16,5		36,0	20. 6,0
	54,5	24,5		44,0	14,0
12	21.51.48,0	14.15.18,0	15	21.58. 8,7	14.21.38,7
	56,5	26,5		17,4	47,4
	52.12,8	42,5		26,1	56,1
	20,7	50,7		34,2	22. 4,2
	29,5	59,5		42,8	12,8

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Numéros des plaques.	T. M. du lieu.	T. M. de Paris.
	h m s	h m s
16	21.59.56,6	14.23.26,6
	22. 0. 6,9	36,9
	16,9	46,9
	27,1	57,1
	36,1	6,1
Probablement le deuxième contact.		
17	22. 2.27,8	14.25.57,8
	36,2	26. 6,2
	43,8	13,8
	51,2	21,8
	59,2	29,8
18	22. 5.54,3	14.29.24,3
	7.10,5	30 40,5
19	22. 8.59,5	14.32.29,5
	22.10.54,2	34.24,2
20	22.13.30,6	14.37. 0,6
	14.26.1	56,1
27	1.18.31,8	17.42. 1,8
	55,0	25,0
28	1.20.10,1	17.43.40,1
	29,1	59,1
29	1.21.42,3	17.45.12,3
	56,8	26,8
30	1.23.39,6	17.47. 9,6
	55,7	25,7
31	1.28.57,4	17.52.27,4
	29. 9.1	39,1
32	1.30.25,8	17.53.55,8
	39,8	54.09,8
33	1.32.27,5	17.55.57,5
	55,5	56.25,5
34	1.34.25,4	17.57.55,4
	57,2	58.27,2

Numéros des plaques.	T. M. du lieu.	T. M. de Paris.
	h m s	h m s
35	1.36.16,0	17.59.46,0
	30,8	18. 0. 0,8
36	1.37.59,0	18.01.29,0
	38. 9,7	39,7
38	1.41. 8,6	4.38,6
	21,6	51,6
39	1.42.51,0	18. 6.21,0
	43. 4.5	34,5
40	1.44.14,6	18. 7.44,6
	36,6	8.06,6
41	1.46. 8,4	18. 9.38,4
	18.0	48,0
	28,6	58,0
	39,6	10. 9,6
	51,7	21,7
42	1.48. 5,3	18.11.35,3
	13,6	43,6
	21,5	51,5
	29,4	59,4
	37,1	12. 7,1
43	1.50. 4,6	18.13.34,6
	16,8	46,8
	25,7	55,7
	34,4	14. 4,4
	42,8	12,8
Probablement le troisième contact.		
44	1.51.55,6	18.15.25,6
	52. 5,7	35,7
	15,7	45,7
	25,1	55,1
	35,0	16. 5,0
45	1.54.26,0	18.17.56,0
	38,8	18. 8,8
	49,3	19,3
	55. 2,0	32,0
	11,7	41,7

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Numéros des plaques.	T. M. du lieu.	T. M. de Paris.
	h m s	h m s
46	1.56.20,6	18.19.50,6
	27,6	57,6
	35,1	20. 5,1
	43,3	13,3
	51,5	21,5
47	1.57.43,5	18.21.13,5
	52,8	22,8
	58. 0,7	30,7
	8,8	38,8
	16,3	46,3
48	1.58.54,1	18.22.24,1
	59. 3,0	33,0
	11,0	41,0
	18,5	48,5
	28,0	58,0
49	2. 0.53,2	18.24.23,2
	1. 4,0	34,0
	12,2	42,2
	20,4	50,4
	28,0	58,0
50	2. 2. 9,0	18.25.39,0
	15,8	45,8
	22,5	52,5
	28,3	58,3
	35,0	26. 5,0
51	2. 3.43,7	18.27.13,7
	50,5	25,5
	57,5	20,5
	4. 5,5	35,5
	12,7	42,5

Numéros des plaques.	T. M. du lieu.	T. M. de Paris.
	h m s	h m s
52	2. 5. 5,5	18.28.35,5
	12,3	42,3
	22,3	52,3
	29,8	59,8
	39,3	29. 9,3
53	2. 6.37,3	18.30. 7,3
	48,0	18,0
	58,2	28,2
	7. 7,3	37,3
	15,0	45,0
54	2. 9,10,0	18.32.40,0
	22,7	52,7
	32,3	33. 2,3
	40,7	10,7
	50,0	20,0
55	2.12.28,0	18.35.58,0
	38,9	36. 8,9
	47,6	17,6
	55,0	25,6
	13. 3,3	33,3
56	2.13.58,9	18.37.28,9
	14. 8,9	38,9
	17,9	47,9
	26,5	56,5
	33,7	38. 3,7

Comme dans la station précédente, on était alors en plein hiver; le soleil, très-onduleux, était très-bas sur l'horizon et l'atmosphère était brumeuse; aussi les épreuves sont-elles en général un peu faibles, malgré la compensation obtenue par une exposition prolongée aux vapeurs de mercure. Ces circonstances réduisent notablement le nombre des épreuves susceptibles de donner de bonnes mesures.

Hauteur barométrique moyenne pendant l'observation..... 763^{m},0
Température moyenne extérieure..... ..... 4°,8

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Station de Saint-Paul.

Observateur, M. Cazin. — Longitude adoptée = $5^h\,0^m\,44^s$.

Remarque. — Les épreuves marquées d'un * ont été obtenues sur collodion sec albuminé, pour les distinguer des épreuves sur plaqué d'argent.

Les chiffres romains ont été employés pour désigner les plaques rendues planes par un estampage spécial exécuté à la presse hydraulique.

Numéros des plaques.	T. M. du lieu d'après le chronographe.	T. M. du lieu d'après le chronomètre.	T. M. de Paris.
	h m s	s	h m s
I	18.59.38,6	38,1	13.58.54,6
	47,9	47,9	59.03,9
	60. 0,0	59,7	16,7
	19. 0.13,2	12,9	29,2
	25,9	25,7	41,9
II	19. 0.56,4	56,0	14. 0.12,4
	1.06,2	5,9	22,2
	19,0	18,7	35,0
	31,1	30,8	47,1
	55,5	55,5	1.11,5
III	19. 2.30,0	30,0	14. 1.46,0
	3.10,9	10,9	2.26,9
	21,3	20,9	37,3
	30,3	30,0	46,3
	38,3	37,9	54,3
IV	19. 4. 1,9	1,9	14. 3.17,9
	5.44,6	44,4	5. 0,6
	6.12,1	11,7	28,1
	33,5	33,1	49,5
	41,2	40,9	57,2
V	19. 8. 9,4	9,1	14. 7.25,4
	34,4	34,0	50,4
		Entrée.	
	12.35,6	35,1	11.51,6
	45,0	43,9	12. 1,0
	52,9	52,7	8,9
VI	19.13.22,8	25,5	14.12.38,8
	33,7	33,5	49,7

Numéros des plaques.	T. M. du lieu d'après le chronographe.	T. M. du lieu d'après le chronomètre.	T. M. de Paris.
	h m s	s	h m s
VII	19.18.12,0	11,7	14.17.28,0
	21,5	21,0	37,5
	31,7	31,4	47,7
	40,6	40,5	56,6
	48,9	48,9	18.04,9
1*	19.20.00,5	00,3	14.19.16,5
	21.00,6	00,6	20.16,6
	10,6	10,4	26,6
	19,3	18,8	35,3
	22.04,7	04,6	21.20,7
VIII	19.22.37,8	37,7	14.21.53,8
	47,1	46,9	22.03,1
	56,2	56,1	12,2
	23. 4,0	04,0	20,0
	15,5	15,0	31,5
IX	19.23,42,0	41,0	14.22.58,0
	52,9	52,8	23.08,9
	24. 5,9	5,9	21,9
	15,2	14,8	31,2
	23,5	23,1	39,5
X	19.24.46,9	46,9	14.24. 2,9
	55,9	55,7	11,9
XI	19.26.14,1	13,7	14.25.30,1
	24,0	23,6	40,0
	34,3	33,9	50,3
	43,0	42,9	59,0
	50,9	50,9	26. 6,9

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Numéros des plaques.	T. M. du lieu d'après le chronographe.	T. M. du lieu d'après le chronomètre.	T. M. de Paris.
	h m s	s	h m s
XII	19.27.14,0	13,7	14.26.30,9
	22,9	22,6	38,9
	31,9	31,7	47,9
	40,4	40,0	56,4
	49,6	49,5	27.05,6
XIV	19.30.43,5	43,2	14.29.59,5
XIII	19.31.38,7	38,6	14.30.54,7
	48,8	48,9	31.04,8
XV	19.32.18,1	17,8	14.31.34,1
	31,6	31,3	47,6
	40,9	40,9	56,9
	50,4	50,3	32.06,4
	58,2	58,1	14,2
XVIII	19.33.23,8	23,7	14.32.37,8
	32,3	31,9	48,3
	40,2	40,1	56,2
	48,3	48,1	33.04,3
	57,5	57,3	13,5
3*	19.35.19,7	19,6	13.34.35,7
	30,6	30,3	46,6
XVI	19.37.00,1	00,1	14.36.16,1
	10,6	10,5	26,6
	1er contact interne.		
XVII	19.38.08,7	08,4	14.34.24,7
	23,3	22,8	39,3
	31,8	31,7	47,8
	41,1	40,9	57,1
	50,1	49,9	38.06,1
XIX	19.39.17,4	17,0	14.38.33,4
	26,4	26,1	42,4
	35,5	35,4	51,5
	43,8	42,8	59,8
	51,1	50,9	39.07,1
XX	19.40.29,1	28,8	14.39.45,1
	37,7	37,7	53,7
	41.18,5	18,3	40.34,5
	26,0	25,7	42,0
	32,8	32,7	48,8

Numéros des plaques.	T. M. du lieu d'après le chronographe.	T. M. du lieu d'après le chronomètre.	T. M. de Paris.
	h m s	s	h m s
XXII	19.45. 0,5	0,5	14.44.16,5
	14,9	14,6	30,9
	24,1	23,9	40,1
	33,3	33,1	49,3
	41,1	40,9	57,1
XXIII	19.46. 6,3	5,9	14.45.22,3
	15,6	15,3	31,6
4*	19.47.40,2	39,9	14.46.56,2
	49,6	49,5	47. 5,6
XXIV	19.49.25,6	25,5	14.48.41,6
	34,9	34,7	50,9
XXVIII	19.51. 2,4	2,5	14.50.18,4
	10,5	10,1	26,5
XXIX	19.51.31,3	31,2	14.50.47,3
	39,2	38,8	55,2
XXX	19.52.17,5	16,9	14.51.33,5
	26,7	26,5	42,7
5*	19.53.24,2	23,6	14.52.40,2
	37,1	37,1	53,2
XXXV	20. 2.27,4	26,9	15. 1.43,4
	13,1	12,9	52,9
XXXVI	20. 3. 3,6	3,6	15. 2.19,6
	13,1	12,9	29,1
6*	20. 5. 5,8	5,8	15. 4.21,8
	15,0	14,9	31,0
7*	20. 6. 3,4	3,3	15. 5.19,4
	11,8	11,7	27,8
8*	20. 6.55,3	55,7	15. 6.11,3
	7.13,7	13,7	29,7
XXXVIII	20. 9. 7,2	6,9	15. 8.23,2
	15,1	14,7	31,1
XXVII	20.10.46,4	46,3	15.10. 2,4
	54,9	54,9	10,9
9*	20.12.23,2	23,0	15.11.39,2
	31,8	31,7	47,8

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Numéros des plaques.	T. M. du lieu d'après le chronographe.	T. M. du lieu d'après le chronomètre.	T. M. de Paris.
	h m s	s	h m s
XL	20.14.15,9	15,7	15.14. 1,9
	57,7	57,7	13,7
	15.11,7	11,7	27,7
	28,8	28,9	44,8
	36,3	36,1	52,3
XLI	20.16.34,6	34,3	15.15.50,6
	43,2	43,0	59,2
	51,1	51,3	16. 7,1
	17. 0,9	0,9	16,9
	8,3	8,1	24,3
XLII	20.17.38,2	38,0	15.16.54,2
	53,0	52,9	17. 9,0
	18. 2,1	2,3	18,4
	10,1	10,4	26,4
	19,4	19,1	35,4
XLIII	20.19.31,1	31,3	15.18.47,4
	40,2	39,9	56,2
XLIV	20.20. 6,1	6,6	15.19.22,4
	15,5	15,3	31,5
10*	20.21.50,3	50,1	15.21. 6,3
	59,8	59,7	15,8
	22. 8,4	8,1	21.24,4
	16,2	15,9	32,2
	32,8	32,6	48,8
11*	20.23.13,1	12,9	15.22.29,4
	21,2	20,7	37,2
	30,0	29,6	46,0
	37,1	36,8	53,1
	44,8	44,7	23. 0,8
12*	20.24.21,3	20,9	15.23.37,3
	29,5	29,1	45,5
13*	20.25. 4,4	4,1	15.24.20,4
	14,1	14,1	30,1
XLV	20.26.41,4	41,3	15.25.57,4
	52,5	52,3	26. 8,5

Numéros des plaques.	T. M. du lieu d'après le chronographe.	T. M. du lieu d'après le chronomètre.	T. M. de Paris.
	h m s	s	h m s
XLVII	20.30.57,6	57,5	15.30.13,6
	31. 7,5	7,5	23,5
	17,5	17,2	33,5
	29,2	28,9	45,2
	39,9	39,7	55,9
XLVIII	20.32.17,3	16,9	15.31.33,3
	28,2	27,9	44,2
14*	20.34.36,5	36,4	15.33.52,5
	46,6	46,6	34. 2,6
15*	20.35.23,4	22,9	15.34.39,4
	31,9	31,6	47,9
	40,8	40,9	56,8
	50,0	49,7	35. 6,0
	58,1	57,9	14,1
XLIX	20.36.43,9	43,7	15.35.59,9
	54,9	54,9	36.10,9
XXXIX	20.37.37,0	36,9	15.36.53,0
	46,2	45,9	37. 2,2
L	20.47.10,1	9,9	15.46.26,1
	20,7	20,5	36,7
	34,2	33,9	50,2
	44,4	44,0	47. 0,4
	54,1	53,8	10,1
1	20.50.11,4	11,3	15.49.27,9
	22,7	22,3	38,7
	41,5	41,3	57,5
	52,5	52,5	50. 8,5
	51. 1,5	1,3	17,5
2	20.51.54,8	54,9	15.51.10,8
	52. 5,0	4,9	21,0
16*	20.55.42,1	41,9	15.54.58,1
	52,5	52,3	55. 8,5
	56. 6,3	6,1	22,3
	16,7	16,1	32,7
	26,1	25,9	42,1
17*	20.57.31,2	30,9	15.56.47,2
	40,2	40,0	56,2

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Numéros des plaques.	T. M. du lieu d'après le chronographe.	T. M. du lieu d'après le chronomètre.	T. M. de Paris.
	h m s	s	h m s
3	20.58.41,9	41,6	15.57.57,9
	52,1	51,9	58. 8,2
5	21. 3.52,7	52,6	16. 3. 8,7
	4.10,6	10,5	26,6
6	21. 5. 9,0	8,9	16. 4.25,0
	17,5	17,3	33,5
18*	21. 8. 3,9	3,6	16. 7.19,9
	31,0	30,9	47,0
19*	21. 9.39,1	38,9	16. 8,55,1
	47,9	42,8	9. 3,9
7	21.14.31,1	30,7	16.13.47,1
	15. 0,9	0,9	14.16,9
	41.1	40,9	57,1
	49,3	49,2	15. 5,3
	16.10,0	9,7	26,0
8	21.17.10,1	10,1	16.16.26,1
	25,0	24,5	41,0
10	21.21. 2,6	2,5	16.20.18,6
	27,9	27,5	43,9
	36,9	36,7	52,9
	49,4	49,3	21. 5,4
	22.34,6	34,4	50,6
11	21.23. 0,9	0,9	16.22.16,9
	24.21,2	20,7	23.37,2
	37,1	37,2	53,4
	25.44,9	44,9	25. 0,9
	26.38,2	37,9	51,2
12	21.27. 0,7	0,5	16.26.16,7
	10,7	10,5	26,7
	20,4	20,1	36,4
	30,2	29,9	46,2
	56,2	55,9	27.12,2
13	21.33.59,8	59,6	16.33.15,8
	34.52,5	52,4	34. 8,5
	35. 1,0	0,9	17,0
	10,8	9,7	26,8
	16,9	16,7	34,9

Numéros des plaques.	T. M. du lieu d'après le chronographe.	T. M. du lieu d'après le chronomètre.	T. M. de Paris.
	h m s	s	h m s
15	21.35.43,0	42,9	16.34.59,0
	51,8	51,7	35. 7,8
	36.25,5	25,3	41,5
	36,2	35,9	52,2
	49,7	49,6	36. 5,7
14	21.37.25,1	25,0	16.36.41,1
	38,2	37,9	54,2
16	21.37.59,9	59,3	16.37.15,9
	38. 9,0	8,7	25,0
18	21.56.11,6	11,3	16.55.27,6
	23,2	22,6	39,2
	31,7	31,5	47,7
	39,8	39,7	55,8
	47,9	47,8	56. 3,9
21	21.57.24,0	23,6	16.56.40,0
	33,1	32,9	51,1
25*	22. 0.21,1	20,9	16.59.37,1
	29,6	29,4	45,6
	39,9	39,6	55,9
	48,9	48,9	17. 0. 4,9
	56,9	56,9	12,9
26*	22. 1.42,2	41,9	17. 0.58,2
	51,4	51,3	1. 7,4
27*	22. 3.23,2	22,7	39,2
28*	22. 3.56,2	56,1	17. 3.12,2
	4. 4,3	4,2	20,3
23	22. 4.46,0	45,7	17. 4. 2,0
	55,6	55,5	11,6
22	22.11.39,8	39,7	17.10.55,8
	50,4	50,3	11. 6,4
27	22.13.36,0	35,7	17.12.52,0
	53,6	53,4	13. 9,6
	14. 6,6	6,3	22,6
	15,4	15,2	31,4
	25,6	25,4	41,6

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Numéros des plaques.	T. M. du lieu d'après le chronographe.	T. M. du lieu d'après le chronomètre.	T. M. de Paris.
	h m s	s	h m s
30	22.14.59,8	59,7	17.14.15,8
	15.11,1	10,9	27,8
31	22.15.40,5	40,3	17.14.56,5
	52,4	52,2	15. 8,2
29*	22.16.35,1	34,9	17.15.51,1
	43,1	42,9	59,1
30*	22.17.27,1	26,7	17.16.43,1
	35,1	34,9	51,1
	44,7	44,5	17. 0,7
	52,4	51,9	8,4
	59,9	59,7	15,9
31*	22.18.32,9	32,6	17.17.48,9
	42,0	41,7	58,0
32	22.19.17,5	17,3	17.18.33,5
	25,5	25,2	41,5
33	22.19.52,0	51,9	17.19. 8,0
	20. 1,0	0,9	17,0
34	22.20.34,9	34,7	17.19.50,9
	42,9	42,7	58,9
	54,4	54,1	20.10,4
	21. 3,6	3,4	19,6
	11,6	11,3	27,6
38	22.25.13,7	13,7	17.24.39,7
	47,6	47,4	25. 3,6
39	22.29.27,1	26,7	17.28.43,1
	37,9	37,7	53,9
	47,6	47,5	29. 3,6
	57,0	56,9	13,0
	30. 7,5	7,3	23,0
40	22.31.26,7	26,4	17.30.42,7
	35,6	35,5	51,6
	44,5	44,5	31. 0,5
	55,8	55,6	11,8
	32. 4,7	4,5	20,7

Numéros des plaques.	T. M. du lieu d'après le chronographe.	T. M. du lieu d'après le chronomètre.	T. M. de Paris.
	h m s	s	h m s
41	22.32.37,8	37,6	17.31.53,8
	57,8	57,7	32.13,8
32*	22.33.59,5	59,3	17.33.15,5
	34. 8,2	7,9	24,2
	17,3	16,9	33,3
	27,1	26,7	43,1
	34,5	34,2	50,5
33*	22.35.25,3	24,9	17.34.41,3
	33,7	33,9	49·7
34*	22.36. 9,7	9,6	17.35.25,7
	15,8	15,4	31,8
42	22.37.27,1	26,7	17.36.43,1
	36,3	36,1	52,3
	44,6	44,7	37. 0,6
	52,5	52,5	8,5
	38. 1,0	0,9	17,0
43	22.38.32,2	31,9	17.37.48.2
	40,2	39,9	56,2
44	22.39.18,2	17,9	17.38.34,2
	26,3	25,9	42,3
35	22.40.12,8	12,6	17.39.28,8
	25,6	25,1	41,6
36	22.41, 0,7	0,5	17.40.16,7
	9,7	9,6	25,7
	23,6	23,1	39,6
	32,7	32,5	48,7
	41,3	41,3	57,3
45	22.43.18,5	17,9	17.42.34,5
	41,2	40,9	57,2
	44.12,5	12,5	43.28,5
	21,9	21,5	37,9
	30,6	30,1	46,6
46	22.45.14,2	13,9	17.44.30,2
	23,8	23,1	39,8
47	22.45.54,1	54,1	17.45.10,1
	46. 3,3	3,2	19,3

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Numéros des plaques.	T. M. du lieu d'après le chronographe.	T. M. du lieu d'après le chronomètre.	T. M. de Paris.
	h m s	s	h m s
35*	22.46.58,5	58,3	17.46.14,5
	47. 8,4	8,1	24,4
	18,4	18,1	34,1
	27,8	27,7	43,8
	35,6	35,6	51,6
36*	22.48.12,1	12,0	16.47.28,1
	19,9	19,7	35,9
37*	22.48.54,1	53,9	17.48.10,1
	49. 2,5	2,5	18,5
37	22.49.37,9	37,8	17.48.53,9
	46,7	46,7	49. 2,7
49	22.50.23,5	22,9	17.49.39,5
	31,1	30,9	47,1
	39,2	38,9	55,2
	46,5	46,4	50. 2,5
	53,9	53,9	9,9
38*	22.53.38,5	37,9	17.52.54,5
	48,4	48,3	53. 4,1
39*	22.54.40,9	40,9	17.53.56,9
	50,2	50,1	54. 6,9
48	22.57.38,9	38,9	17.56.54,9
	58.30,6	30,3	57.46,6
	45,9	45,7	58. 1,9
	57,7	55,7	13,7
	59. 6,1	5,7	22,1
52	22.59.36,7	36,6	17.58.52,7
	50,7	50,6	59. 6,7
	60,1	59,9	16,1
	23. 0. 8,6	8,5	24,6
	17,2	17,0	33,2
	Deuxième contact interne.		
40*	23. 2.47,6	47,3	18. 2. 3,6
	55,5	55,5	11,5
	3. 3,4	3,3	19,4
	11,7	11,6	27,7
	18,5	18,3	34,5
41*	23. 3.50,2	49,9	18. 3. 6,2
	58,1	57,9	14,1

Numéros des plaques.	T. M. du lieu d'après le chronographe.	T. M. du lieu d'après le chronomètre.	T. M. de Paris.
	h m s	s	h m s
50	23. 4.35,1	35,0	18. 3.51,4
	43,8	43,7	59,8
	51,8	51,7	4. 7,8
	5. 1,7	1,5	17,7
	9,2	8,9	25,2
51	23. 5.37,2	36,9	18. 4.53,2
	44,6	44,1	5. 0,6
	52,3	51,9	8,3
	60,0	59,8	16,0
	6. 7,1	6,9	23,1
42*	23. 9.40,9	40,8	18. 8.56,9
	49,3	49,1	9. 5,3
	10. 1,1	0,9	17,1
	21,0	20,7	37,0
	29,8	29,6	45,8
43*	23.11. 1,1	1,1	18.10.17,1
	9,1	8,7	25,1
44*	23.17.23,5	23,2	18.16.19,5
	31,8	31,6	27,8
	39,5	38.9	35,5
	46,8	46,6	17. 2,8
	53,7	53,7	9,7
45*	23.18.50,5	50,5	18.18. 6,5
	19. 1,0	0,9	7,0
57	23.22.20,1	19,9	18.21.36,1
	40,6	40,6	56,6
	49,9	49,5	22. 5,9
	58,0	57,8	14,0
	23. 6,9	6,7	22,9
58	23.23.35,3	34,9	18.22.51,3
	44,0	43,9	23. 0,0
	52,2	52,1	8,2
	59,5	59,3	15,5
	24. 6,7	6,5	22,7
69	23.27. 3,1	2,9	18.26.19,1
	11,9	11,7	27,9
	20,5	20,1	36,5
	28,2	27,9	44,2
	35,6	35,2	51,6

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Numéros des plaques.	T. M. du lieu d'après le chronographe.	T. M. du lieu d'après le chronomètre.	T. M. de Paris.
	h m s	s	h m s
70	23.29.31,4	31,2	18.28.47,1
	40,4	40,4	56,1
	48,9	48,7	29. 4,9
	57,1	57,3	13,4
	30.49,4	49,1	30. 5,1
71	23.31.31,3	31,1	18.30.47,3
	56,0	55,9	31.12,0
	32.10,9	10,7	26,9
	58,7	58,3	32.14,7
	33.15,0	14,7	31,0
	Sortie.		
72	23.34.32,3	31,9	18.33.48,3
	45,0	44,9	34. 1,0
	54,0	53,7	10,0
	35. 3,4	3,3	19,1
	10,3	10,1	26,3
73	23.35.37,5	37,5	18.34.53,5
	57,2	56,9	35.13,2
	36. 6,0	5,9	22,0
	14,2	13,9	30,2
	21,0	20,7	37,0

Numéros des plaques.	T. M. de Paris d'après le chronographe.	T. M. de Paris d'après le chronomètre.	T. M. de Paris.
	h m s	s	h m s
74	23.36.41,1	40,9	18.35.47,1
	49,0	48,9	36. 5,0
	57,5	57,3	13,5
	37. 5,4	5,2	21,4
	13,1	12,9	29,1
75	23.37.34,9	34,7	18.36.50,9
	42,0	41,9	58,0
	49,6	49,4	37. 5,6
	57.2	56,9	13,2
	38. 4,8	4,5	20,8
76	23.38.27,8	27,6	18.37.43,8
	36,2	35,9	52,2
	43.9	43,9	59,9
	51,3	51,9	38. 7,3
	59,0	58,9	15,0
77	23.39.20,9	20,9	18.38.36,9
	28,9	28,9	44,9
	37,6	37,4	53,6
	44,1	43,9	39. 0,4
	53,6	43,7	9,6

Les conditions de hauteur du soleil et de transparence atmosphérique ont été particulièrement favorables dans cette station : aussi le nombre d'épreuves pouvant fournir de bonnes mesures est-il considérable.

Hauteur barométrique moyenne pendant l'observation..... 750^{mm}
Température extérieure ..... $14°,5$

Station de Nouméa.

Observateur, M. Angot. — Longitude adoptée = $10^h 56^m 27^s$.

Numéros des plaques.	T. M. du lieu.	T. M. de Paris.
	h m s	h m s
101	1. 1. 2,82	14. 4.35,8
	36,73	5. 9,7
	54,68	27,7
	2.13,63	46,6

Numéros des plaques.	T. M. du lieu.	T. M. de Paris.
	h m s	h m s
102	1. 3. 0,50	14. 6.33,5
	20,45	53,5
	35,40	7. 8,4
	50,20	23,2

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Numéros des plaques.	T. M. du lieu.	T. M. de Paris.
	h m s	h m s
103	1. 4.41,22	14. 8.14,2
	51,23	24,2
	5. 5,16	38,2
	19,12	52,1
	35,08	9. 8,1
104	1.10.24,28	14.13.57,3
	43,23	14.16,2
	11. 0,19	33,2
	16,14	49,1
	37,08	15.10,1
105	1.12.10,99	14.15.44,0
	19,97	53,0
	32,93	16. 5,9
	46,40	19,4
	57,86	30,9
106	1.13.30,77	14.17. 3,8
	44,74	17,7
	55,71	28,7
	14. 5,68	38,7
	16,15	49,2
107	1.16. 7,35	14.19.40,4
	29,28	2,3
	41,75	14,8
	59,20	32,2
	17. 7,68	20.40,7
108	1.17.37,10	14.21.10,1
	47,07	20,1
	18. 0,04	33,0
	8,76	41,8
	19,98	53,0
109	1.18.44,91	14.22.17,9
	19. 2,86	35,9
	19,82	52,8
	38,78	23.11,8
	49,74	22,7

Numéros des plaques.	T. M. du lieu.	T. M. de Paris.
	h m s	h m s
110	1.20.18,66	14.23.51,7
	39,60	24.12,6
	49,57	22,6
	59,54	32,5
	21.11,51	44,5
111	1.25.17,84	14.28.50,8
	51,75	29.24,8
112	1.27.10,53	14.30.43,5
	29,48	31. 2,5
113	1.28. 4,38	14.31.37,4
	43,27	32.16,3
114	1.29.23,17	14.32.56,2
	43,11	33.16,1
115	1.30.19,01	14.33.52,0
	50,91	34.23,9
116	1.34.14,37	14.37.47,4
	35. 1,24	38.34,2
	22,18	55,2
	52,10	39.25,1
117	1.37. 2,91	14.40.35,9
	38. 2,74	41.35,7
118	1.39. 2,58	14.42.35,6
	40. 2,42	43.35,4
119	1.41. 2,25	14.44.35,3
	42. 3,08	45.36,1
120	1.48.36,01	14.52. 9,0
	50.10,75	53.43,8
121	1.51.40,50	14.55.13,5
	53. 0.29	56.33,3
122	1.57.31,54	15. 1. 4,5
123	1.59.41,19	15. 3.14,2
	2. 1. 9,95	4.43,0
124	2. 3.39,54	15. 7.12,5
	5.13,28	8.46,3

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Numéros des plaques.	T. M. du lieu.	T. M. de Paris.
	h m s	h m s
125	2. 6.58,00	15.10.31,0
	7.57,83	11.30,8
126	2. 9.27,58	15.13. 0,6
	10.29,41	14. 2,4
127	2.11.57,17	15.15.30,2
	12.57,01	16.30,0
128	2.14.36,74	15.18. 9,7
	15.36,57	19. 9,6
129	2.16.36,41	15.20. 9,4
	17.36,25	21. 9,3
130	2.18.56,03	15.22.29,0
	19.55,85	23.28,9
131	2.20.55,70	15.24.28,7
	21.35,59	25. 8,6
132	2.27.34,61	15.31.37,6
	28.44,42	32.17,4
133	2.30.19,16	15.33.52,2
	31.19,00	34.52,0
134	2.32.43,76	15.36.16,8
	33.58,56	37.31,6
135	2.40.12,53	15.43.45,5
6	2.41.42,29	15.45.15,3
	43.11,79	46.44,8
7	2.44.36,81	15.48. 9,8
	46.21,52	49.54,5
8	2.47.51,28	15.51.24,3
	49.21,03	52.54,0
9	2.50.50,78	15.54.23,8
	52.20,54	55.53,5
136	2.56.49,80	16. 0.22,8
	57.22,71	55,7
137	2.57.55,62	16. 1.28,6
	58.19,56	32,6

Numéros des plaques.	T. M. du lieu.	T. M. de Paris.
	h m s	h m s
138	2.59.29,36	16. 3. 2,4
	59.59,28	52,3
139	3. 0.33,19	16. 4. 6,2
	1. 4,10	37,1
140	3. 2.48,82	16. 6.21,8
	3.23,72	56,7
141	3. 4. 3,61	16. 7.36,6
	4.33,53	8. 6,5
10	3. 5.18,41	16. 8.51,4
	48,33	9.21,3
11	3. 6.48,16	16.10.21,2
	7.48,00	11.21,0
12	3.10. 2,88	16.13.35,9
	11.32,38	15. 5,4
13	3.14. 6,96	16.17.40,0
	15.37,71	19.10,7
14	3.17.19,43	16.20.52,4
	18.46,20	22.19,2
15	3.20.15,95	16.23.49,0
16	3.22.18,62	16.25.51,6
	24.10,31	27.43,3
17	3.26.14,97	16.29.48,0
	27.45,72	31.18,7
18	3.29.14,23	34.17,2
19	3.36.18,32	16.39.51,3
	40.42,59	44.15,6
20	3.55,55,09	16.59.28,1
	57.24,85	17. 0.57,9
21	3.59.41,47	17. 3.14,5
	4. 0.39,32	4.12,3
22	4. 2. 9,07	17. 5.42,1
	54,95	6.28,0

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Numéros des plaques.	T. M. du lieu.	T. M. de Paris.
	h m s	h m s
23	4. 3.48,80	17. 7.21,8
	4.38,66	8.11,17
24	4. 5.38,50	17. 9.11,5
	6.38,33	10.11,3
25	4. 7.38,17	17.11.11,2
	8.38,00	12.11,0
26	4. 9.37,84	17.13.10,8
	10.37,18	14.10,2
27	4.11.52,47	17.15.25,5
	12.37,60	16.10,6
28	4.13.47,41	17.17.20,4
	14.37,02	18.10,0
29	4.15.40,85	17.19.13,9
	16.38,69	20.11,7
30	4.15.40,85	17.19.13,5
	18.36,12	22. 9,1
31	4.21.35,87	17.25. 8,9
	22.35,71	26. 8,7
32	4.23.40,53	17.27.13,5
	24.35,38	28. 8,4
33	4.25.35,22	17.29. 8,2
	26.35,05	30. 8,1
34	4.27.35,89	17.31. 8,9
	28.34,73	32. 7,7
35	4.29.34,57	17.33. 7,6
	30.34,40	34. 7,1
36	4.31.34,24	17.35. 7,2
	32.34, 7	36. 7,1

Numéros des plaques.	T. M. du lieu.	T. M. de Paris.
	h m s	h m s
37	4.33.33,91	17.37. 6,9
	34.35,00	38. 8,0
38	4.35.33,58	17.39. 6,6
	36.38,40	40.11,1
39	4.37.33,25	17.41. 6,3
	38.33,09	42. 6,1
40	4.39.36,17	17.43. 9,2
142	5.14.52,13	18.18.25,1
	15.12,07	45,1
	30,02	19. 3,0
	46,97	20,0
	16. 5,92	38,9
143	5.16.32,85	18.20. 5,9
	51,80	24,8
	17. 8,75	41,8
	22,71	55,7
	34,68	21. 7,7
144	5.18. 6,59	18.21.39,6
	17,56	50,6
	28,53	22. 1,5
	39,50	12,5
	39,95	33,0
145	5.22.33,86	18.26. 7,9
	57,79	30,8
	23. 8,76	41,8
	18,74	51,7
	27,71	27. 0,7
146	5.23.54,64	28.27.27,6
	24. 8,60	41,6
	22,56	55,6
	37,53	10,5

Le nombre d'épreuves susceptibles de fournir de bonnes mesures est assez limité à cause de la faiblesse des images : le ciel était brumeux, et d'autre part la durée d'exposition des épreuves aux vapeurs de mercure a été un peu trop courte.

Pression barométrique moyenne pendant l'observation. . $758^{mm},2$

Température extérieure..... .... $28^{o},5$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

MESURE DES ÉPREUVES

OBTENUES

PENDANT LE PASSAGE DE VÉNUS SUR LE SOLEIL.

I. — Exposé de la méthode.

Pour se rendre un compte exact de la difficulté du problème à résoudre, il est nécessaire de se reporter d'abord au mode d'obtention des épreuves (p. A.3) et de se rappeler que les images ont été obtenues sans mouvement parallactique pendant une durée qui n'est pas négligeable à l'aide d'un dispositif décrit d'une manière complète t. I, IIe Partie, p. 109.

Ces images ne présentent aucun repère pouvant donner l'angle de position : les dispositifs proposés à l'effet de fournir ces repères ont été discutés longuement au sein de la Commission et ont finalement été rejetés comme ne donnant pas la précision requise. Les épreuves ne fournissent donc que les disques superposés des deux astres, ou plutôt l'impression de leur position moyenne produite pendant la durée de la chute de l'écran : telles sont les images dont il s'agit de tirer le plus possible d'éléments précis de mesure.

Il a déjà été remarqué plusieurs fois (t. I, p. 404, t. III, p. A. 5) que, d'après ce mode d'obtention des épreuves à l'aide de la chute d'un écran percé d'une fente au foyer d'une lunette fixe, il n'existe qu'une direction suivant laquelle les positions relatives des différents points de l'image sont à l'abri de toute correction : c'est la direction perpendiculaire au déplacement de l'écran ou parallèle à la direction de la fente (*voir* t. Ier, Ire Partie, p. 404). Aussi a-t-il

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

été décidé que la direction du mouvement de l'écran mobile serait fréquemment réglée pendant toute la durée de l'observation du passage, de manière à être perpendiculaire à la ligne des centres des deux astres sur l'image photographique. A cet effet, un dispositif spécial a été exécuté (*voir* la légende explicative de la Planche représentant l'appareil photographique, t. Ier, IIe Partie, p. 110), pour obtenir ce réglage, et des Tables ont été calculées pour toutes les stations, permettant aux observateurs d'orienter le porte-plaque suivant cette condition.

Les épreuves ont été obtenues sans difficultés et à la seule inspection de chacune d'elles on vérifie que la condition imposée a été parfaitement remplie, car la ligne des centres des deux astres est toujours perpendiculaire au grand côté de l'épreuve, lequel est parallèle à la glissière de l'écran mobile (*voir* la Planche ci-dessus désignée, t. Ier, IIe Partie).

On a donc pris comme point de départ, dans la recherche d'une méthode de mesure, la condition de n'employer que les éléments de l'image voisins de la ligne des centres : en conséquence, on a recherché les éléments les plus précis qu'on a pu tirer des épreuves parallèlement à cette direction.

Éléments à mesurer.

On est donc ainsi ramené à la mesure des distances mutuelles des bords des deux astres suivant la ligne de leurs centres, distances qui définissent trois éléments géométriques absolus, les diamètres des deux disques et la distance de leurs centres : il est évident qu'elles ne peuvent pas donner davantage. Par contre, les imperfections inévitables des images réduisent à deux le nombre des éléments qu'on peut tirer de ces mesures en; effet, les mesures

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

sont entachées de l'incertitude des contours, elles ne peuvent donc pas donner les diamètres absolus des deux disques. Heureusement, comme on va le voir, la somme de ces diamètres est affranchie de la plus grande partie de cette erreur ; la distance des centres est plus indépendante encore de ce genre d'incertitude. Il en résulte que les éléments à déduire de la mesure des quatre bords se réduisent à deux :

1° La distance des centres des deux astres ;

2° La somme de leurs rayons.

Il est facile de voir, ainsi que M. Fizeau l'a indiqué bien des fois dans la Commission, que ces deux éléments sont sensiblement affranchis des erreurs constantes que peut occasionner le défaut de netteté des bords, toujours à redouter dans les épreuves photographiques; mais il est nécessaire d'analyser de plus près l'influence des erreurs à craindre. Le résultat de cette analyse peut se résumer sous forme de deux théorèmes, que nous énoncerons ainsi :

1° *La distance des centres des deux astres, déduite de mesures effectuées dans le voisinage de la direction de la ligne des centres, est indépendante de l'erreur commise par l'observateur dans l'appréciation de la limite des contours, tant au point de vue de la dégradation de l'intensité des bords de l'image qu'au point de vue de la forme de ces contours.*

2° *La somme des rayons des deux astres est affranchie de l'erreur d'appréciation d'intensité, mais n'est pas complétement indépendante de l'erreur de pointé dépendant de la forme ou courbure de ces contours.*

Pour démontrer ces deux propositions, il suffit d'exprimer l'erreur qu'on commet dans le pointé de chaque bord ; on sim-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

plifiera beaucoup les notations en représentant la mesure *idéale exacte* ou coordonnée du bord à relever relativement à une origine fixe arbitraire, par les lettres

S_1 pour le premier bord du Soleil (le plus voisin de la planète),
V_1 » de Vénus,
V_2 pour le second bord de Vénus,
S_2 » du Soleil,
} suivant la ligne des centres,

et les valeurs des erreurs sur chaque bord par des lettres analogues.

La mesure réelle se composera donc de la mesure idéale augmentée des divers genres d'erreurs que l'observateur peut commettre; ces genres d'erreurs peuvent se ramener à deux types :

1° L'erreur d'appréciation de la limite du contour indécis du bord à relever : chaque observateur aura sa manière d'apprécier, ce qui constitue pour lui le *bord moyen;* on désignera par s_1, v_1, v_2, s_2 les erreurs provenant de ce chef commises respectivement sur les bords S_1, V_1, V_2, S_2; elles dépendent non-seulement de l'observateur, mais aussi de l'*épreuve* qui peut être plus ou moins *vigoureuse,* plus ou moins *frappée, mercurée,* etc.

2° L'erreur de *pointé tangentiel* du fil du micromètre sur le bord à relever : cette erreur est d'une nature toute différente de la précédente, elle est toute géométrique; elle existerait, mais à un moindre degré, si le bord, au lieu d'être indécis, était parfaitement net : elle dépend de la manière dont l'observateur apprécie, aux environs du point de contact, la courbure du contour auquel il mène une tangente par l'approche du fil micrométrique : elle est toute *personnelle* à l'observateur, quoique aggravée par l'indécision des contours de l'épreuve.

On désignera par σ_1, v_1, v_2, σ_2 ces erreurs ou plus généralement la somme des erreurs de ce genre commises sur les bords S_1, V_1, V_2, S_2.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On aura donc, pour l'évaluation de la position de chacun des quatre bords, l'expression

$$S_1 + s_1 + \sigma_1, \qquad V_1 + v_1 + \sigma_1, \qquad V_2 + v_2 + \sigma_2, \qquad S_2 + s_2 + \sigma_2.$$

Comme on exécute la même mesure en retournant de 180 degrés, il suffira d'accentuer toutes les lettres pour représenter cette nouvelle évaluation de la position des quatre bords,

$$S'_1 + s'_1 + \sigma'_1, \qquad V'_1 + v'_1 + \sigma'_1, \qquad V'_2 + v'_2 + \sigma'_2, \qquad S'_2 + s'_2 + \sigma'_2.$$

Si l'observateur est assez exercé pour qu'on puisse supposer que, dans les *mêmes circonstances,* il commet toujours les *mêmes erreurs,* il existe nécessairement des relations entre ces seize expressions d'erreurs.

En effet, considérons d'abord les erreurs relatives à l'appréciation de la limite d'intensité supposée complétement indépendante de la forme ou courbure du bord; on doit admettre que toutes les fois que la dégradation d'intensité aura lieu *dans le même sens,* l'erreur commise sera la même; il en résulte que les erreurs s_1 et v_2 sont égales à v_1 et s_2, de même s'_1 et v'_2, ainsi que v'_1 et s'_2.

Dans le retournement, le sens des mesures est inverse, on doit aussi supposer que $s_1 = s'_2$, $v_1 = v'_2$, $s_2 = s'_1$, $v_2 = v'_1$: d'où l'on conclut (1)

$$(1) \qquad \begin{cases} s_1 = v_2, & s'_1 = v'_2, & s_1 = s'_2, & s_2 = s'_1, \\ v_1 = s_2, & v'_1 = s'_2, & v_1 = v'_2, & v_2 = v'_1. \end{cases}$$

(1) On pourrait objecter que les quatre relations $s_1 = v_2$, $v_1 = s_2$, $s'_1 = v'_2$, $v'_1 = s'_2$ supposent une identité complète dans la loi de dégradation de l'intensité des quatre bords, identité qui n'est pas absolue sur toutes les épreuves : il est vrai, en effet, que sur les épreuves très-faibles on aperçoit, indépendamment du défaut de netteté photographique, la diminution progressive de l'intensité de l'éclat solaire du centre à la circonférence; il est donc vraisemblable de supposer que cette variation doit, sur les

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

L'appréciation des courbures pour le pointé tangentiel aux contours indécis des astres doit également produire des erreurs égales dans les mêmes circonstances ; mais ici la simplification des expressions est moindre que dans le cas précédent, parce que les quatre bords diffèrent ou par la courbure des disques ou par le sens de leur convexité ; on ne peut donc établir *a priori* aucune relation entre σ_1, v_1, v_2 et σ_2 ; il ne reste donc que l'égalité des erreurs correspondant aux bords de même nom, à savoir :

$$(2) \qquad \begin{cases} \sigma_1 = \sigma'_2, & \sigma_2 = \sigma'_1, \\ v_1 = v'_2, & v_2 = v'_1 \end{cases}$$

Pour démontrer les propositions énoncées ci-dessus, il suffit d'exprimer la distance des centres et la somme des rayons à l'aide des coordonnées des quatre bords et en effectuant les réductions indiquées.

1° Distance des centres.

Elle s'obtient évidemment en retranchant la demi-somme des coordonnées des bords du Soleil de la demi-somme des coordonnées des bords de la planète :

$$\mathfrak{D} = \tfrac{1}{2}(V_1 + V_2 + v_1 + v_2 + v_1 + v_2) - \tfrac{1}{2}(S_1 + S_2 + s_1 + s_2 + \sigma_1 + \sigma_2),$$

qu'on peut écrire

$$\mathfrak{D} = \tfrac{1}{2}[(V_1 + V_2) - (S_1 + S_2)] + \tfrac{1}{2}(v_1 - s_2) + \tfrac{1}{2}(v_2 - s_1) + \tfrac{1}{2}(v_1 - \sigma_1) + \tfrac{1}{2}(v_2 - \sigma_2)$$

---

bords du Soleil, modifier la loi de dégradation qui se présente sur les bords de la planète, laquelle forme écran sur un champ lumineux. Mais les épreuves qui présentent un effet de ce genre sont trop faibles pour se prêter aux mesures : les épreuves vigoureuses, les seules utilisables, présentent, en fait, une identité complète d'aspect aux quatre bords, de sorte que l'objection est sans valeur. En tout cas, si ce genre d'erreur existait, l'analyse précédente serait inutile, car les erreurs se réduiraient à un type unique, à celui qui est étudié en second lieu.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La première parenthèse exprime la distance des centres affranchie des deux sortes d'erreurs; nous l'appellerons Δ. Les deux premières demi-sommes $\frac{1}{2}(\nu_1 - s_2)$ et $\frac{1}{2}(\nu_2 - s_1)$ sont nulles, en vertu des équations de condition (1); les deux autres ne sont pas nulles, mais, si l'on combine cette mesure avec la mesure correspondante effectuée après retournement de 180 degrés, on peut éliminer ces termes. En effet, la distance des centres s'obtiendra cette fois en retranchant la demi-somme des coordonnées du bord de la planète de la demi-somme des coordonnées des bords du Soleil, puisque la situation respective des centres est inverse : dès lors on aura l'expression

$$\mathfrak{D}' = \tfrac{1}{2}[(S'_1 + S'_2) - (V'_1 + V'_2)] + \tfrac{1}{2}(s'_2 - \nu'_1) + \tfrac{1}{2}(s'_1 - \nu'_1) + \tfrac{1}{2}(\sigma'_1 - \nu'_1) + \tfrac{1}{2}(\sigma'_2 - \nu'_2),$$

qui se déduit de la première en accentuant les lettres, permutant les indices et en changeant les S, s, σ en V, ν, υ, et inversement.

La première parenthèse représente encore la valeur exacte Δ, et les deux suivantes sont également nulles; les deux dernières ne le sont pas. Mais, si l'on prend la moyenne de $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$, il viendra

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{D} + \mathfrak{D}') = \Delta + \tfrac{1}{4}[(\upsilon_1 - \sigma_1) + (\upsilon_2 - \sigma_2) + (\sigma'_1 - \nu'_1) + (\sigma'_2 - \nu'_2)],$$

qu'on peut écrire

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{D} + \mathfrak{D}') = \Delta + \tfrac{1}{4}(\upsilon_1 - \nu'_2) + (\upsilon_2 - \nu'_1) + (\sigma'_1 - \sigma_2) + (\sigma'_2 - \sigma_1),$$

et où les quatre différences sont nulles séparément, en vertu des équations (2); donc il reste

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{D} + \mathfrak{D}') = \Delta,$$

ce qui démontre la première proposition.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On remarquera que cette démonstration est plus générale que l'énoncé à laquelle elle répond ; un grand nombre d'erreurs, fonctions de la loi de dégradation de la lumière ou de la courbure des bords, telles que celles qui peuvent être produites par certaines aberrations optiques des appareils employés, par *l'irradiation photographique* (dilatation des images dans les épreuves vigoureuses), par des dissymétries dans l'éclairage des épreuves, dans le mode de pointé, dans la disposition du fil micrométrique, etc., rentrent dans l'une ou l'autre des deux catégories d'erreurs et s'éliminent par la série des opérations indiquées.

2° Somme des rayons.

On l'obtient en ajoutant la demi-différence des coordonnées des deux bords

$$S = \tfrac{1}{2}(S_2 - S_1 + s_2 - s_1 + \sigma_2 - \sigma_1) + \tfrac{1}{2}(V_2 - V_1 + v_2 - v_1 + \upsilon_2 - \upsilon_1),$$

qu'on peut écrire

$$S = \tfrac{1}{2}[(S_2 - S_1) + (V_2 - V_1)] + \tfrac{1}{2}(s_2 - v_1) + \tfrac{1}{2}(v_2 - s_1) + \tfrac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) + \tfrac{1}{2}(\upsilon_2 - \upsilon_1).$$

La première parenthèse représente la somme des rayons affranchie des erreurs considérées : on la désignera par Σ; les deux demi-sommes suivantes sont nulles, en vertu des équations (1); les deux dernières ne le sont pas. La combinaison de cette mesure avec la mesure exécutée en retournant l'épreuve de 180 degrés n'élimine pas complétement l'influence des σ et υ, ainsi qu'on va le voir. En effet, l'expression correspondante s'obtiendra en accentuant toutes les lettres et en permutant les indices 1 et 2 :

$$S' = \tfrac{1}{2}[(S'_1 - S'_2) + (V'_1 - V'_2)] + \tfrac{1}{2}(s'_1 - v'_2) + \tfrac{1}{2}(v'_1 - s'_2) + \tfrac{1}{2}(\sigma'_1 - \sigma'_2) + \tfrac{1}{2}(\upsilon'_1 - \upsilon'_2);$$

la première parenthèse représente Σ; les deux demi-sommes suivantes sont nulles, comme plus haut. Si l'on prend la moyenne

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de s et s', il vient

$$\frac{1}{2}(s + s') = \Sigma + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) + \frac{1}{2}(\upsilon_2 - \upsilon_1) + \frac{1}{2}(\sigma'_1 - \sigma'_2) + \frac{1}{2}(\upsilon'_1 - \upsilon'_2).$$

Si, à l'aide des équations de condition (2), on élimine $\sigma'_1, \sigma'_2, \upsilon'_1, \upsilon_2$, on trouve que les deux dernières parenthèses deviennent égales aux deux précédentes et de même signe. Il n'y a donc pas élimination des erreurs σ, υ, et il vient en définitive

$$\frac{1}{2}(s - s') = \Sigma + (\sigma_2 - \sigma_1 + \upsilon_2 - \upsilon_1),$$

ce qui démontre la seconde proposition.

On voit que l'expression de la mesure de la somme des rayons n'est pas indépendante des erreurs relatives à l'erreur d'appréciation du *pointé tangentiel*.

Il est naturel de se demander si l'alternance des signes que présentent ces erreurs n'amène pas de chances notables de compensation : malheureusement il n'en est rien. En effet, les erreurs commises sur les bords de même nom et d'indice différent sont de signe inverse et elles sont de même signe sur les bords de nom différent et de même indice.

La première condition est défavorable, car les bords de même nom ayant des courbures de sens inverse, les erreurs commises ont grande chance d'être de signes contraires, ce qui arrivera, par exemple, dans le cas où l'observateur aurait une tendance à faire *mordre* le fil du réticule sur le contour circulaire ou inversement, quel que soit le sens de la concavité.

La seconde condition n'est pas moins défavorable, car elle montre que si l'observateur commet des erreurs de même genre dans la manière dont il apprécie la condition de tangence du réticule sur les bords des deux astres, comme les deux circonférences à apprécier sont intérieures, les quatre erreurs s'ajouteront en

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

valeur absolue, malgré l'apparence des deux signes contraires qui tendraient à faire croire à une sorte de compensation.

Remarque sur la nature des erreurs considérées.

Il est nécessaire de faire remarquer que ces deux causes d'erreurs, à savoir l'estompement du bord et l'appréciation de la forme du disque, ne sont pas spéciales à la mesure des épreuves photographiques ; elles se présentent dans toutes les observations astronomiques directes et les divergences signalées si souvent par les astronomes dans les mesures des diamètres angulaires des astres et spécialement du Soleil en sont la preuve.

En particulier, dans l'observation actuelle du passage de Vénus, les observateurs qui avec l'héliomètre ou le micromètre à fils ont effectué les mêmes observations devront compter avec ces erreurs personnelles et en trouver la trace dans les divergences que présenteront les mesures des diverses stations.

On pourrait néanmoins penser que l'épreuve daguerrienne, qui est nécessairement imparfaite au point de vue de l'éclat et de la netteté des contours, est bien inférieure à l'image directe des astres observés à l'oculaire des lunettes ; mais on se convaincra aisément que l'infériorité des épreuves est beaucoup moindre qu'elle ne le paraît au premier abord, surtout pour l'observation du Soleil, car dans l'observation directe il existe une cause d'erreur qui introduit une perturbation autrement grave dans les mesures : c'est la mobilité continuelle des images et la variabilité de leur netteté causée par la réfraction irrégulière de l'atmosphère. L'observateur prend, il est vrai, une sorte de moyenne entre toutes les positions qu'il observe, mais c'est là précisément que se produisent des erreurs personnelles d'une nature toute spéciale, sans compter

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

les erreurs qu'introduit le micromètre dont les diverses parties sont inégalement échauffées.

L'image photographique, au contraire, est fixe : l'observateur effectue ses pointés à loisir, sans être dérouté par les ondulations continuelles des bords. Ces ondulations, il est vrai, sont reproduites sur l'image solaire, et l'observateur mesure un disque déformé ; mais la multiplicité des mesures de ce disque dans des azimuts différents permet d'atténuer l'effet de la déformation et d'obtenir le disque *moyen ;* dans tous les cas, l'erreur qui subsiste est, comme la perturbation atmosphérique qui en est la cause, *fortuite,* par conséquent susceptible d'être éliminée par la combinaison d'un nombre suffisant d'épreuves faites dans les mêmes conditions et mesurées par un même observateur.

Dans l'observation directe au foyer des lunettes astronomiques, la mobilité de l'image introduit une erreur variable avec l'observateur et le climat de la station, c'est-à-dire une véritable erreur *systématique,* non susceptible d'élimination par la combinaison des diverses mesures.

Ainsi donc, même avec leurs imperfections inévitables, les épreuves photographiques ont en elles-mêmes une valeur très-comparable à celle des images observées directement ; prises en grand nombre, elles doivent même présenter une supériorité notable, à cause des chances de compensation d'erreurs que comporte leur ensemble et de la possibilité de les faire mesurer toutes par le même observateur.

Élimination plus complète de l'équation personnelle.

Si l'on n'a pas cherché à dissimuler les causes d'erreurs pour ainsi dire *personnelles* à l'observateur, il est nécessaire d'indiquer

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

maintenant comment on peut atténuer leur influence d'une manière notable.

Il faut se reporter à la condition qui domine toutes les mesures faites en vue d'obtenir la parallaxe du Soleil par le passage de Vénus : ce sont des *mesures différentielles;* de quelque manière qu'on les exécute, soit par l'observation directe, soit par l'observation photographique, le résultat cherché dépend de la différence de deux mesures obtenues en des lieux ou en des temps différents : ainsi c'est la différence de position du disque de la planète sur le disque solaire qui est l'élément de mesure pour deux observateurs placés à des points différents du globe.

Comme dans toutes les mesures différentielles, la précision du résultat final ne dépend pas tant de la perfection absolue de chaque mesure que de la complète élimination des erreurs qui se rencontrent dans la combinaison des deux mesures.

Le procédé d'observation pourrait introduire une erreur d'un ordre inacceptable au point de vue absolu ; si cette erreur est sensiblement la même et de même signe dans les deux mesures, son influence sera nulle ou négligeable.

Dans le cas présent, les mêmes principes s'appliquent : il en résulte que, pour obtenir la plus grande précision possible, il faudra combiner entre elles les mesures effectuées par le même observateur sur les épreuves des différentes stations : de cette manière, l'erreur personnelle sera toujours sensiblement la même; elle n'aura qu'une influence négligeable ou tout au moins n'entraînera qu'une correction facile à calculer d'après une évaluation approximative de l'erreur constante.

En résumé, les deux éléments qu'on peut, par des mesures précises, relever sur les épreuves photographiques ont un carac-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

tère de précision très-remarquable : l'un, la distance des centres, paraît affranchi de la totalité des erreurs systématiques; l'autre, la somme des rayons, est, il est vrai, entaché d'une erreur personnelle, mais cette erreur est sensiblement constante dans les conditions normales d'observation. Cette circonstance permet donc d'espérer des compensations très-satisfaisantes, lorsqu'on comparera entre elles les mesures faites par un même observateur sur les épreuves obtenues aux différentes stations.

Tels sont les résultats qu'on déduit des deux propositions énoncées plus haut, résultats qui constituent le fondement de la méthode de mesure des épreuves : il n'est pas besoin d'insister sur leur importance théorique; mais il est utile d'ajouter, dès à présent, quelques mots pour faire ressortir leur valeur pratique, car la méthode définitive est en usage courant depuis près de deux ans.

L'expérience a vérifié l'exactitude des deux propositions : toutes les épreuves, mesurées complétement par deux observateurs différents, présentent des résultats généralement concordants à quelques millièmes de millimètre. Les différences sont presque toujours de même signe pour les deux mêmes observateurs, et c'est sur la somme des rayons que porte surtout la petite influence systématique, véritable *équation personnelle,* dont l'analyse précédente a signalé l'origine.

Nous aurons plus loin occasion de revenir sur ce point très-important.

A. C.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

II. — Description succincte des machines micrométriques employées aux mesures.

Le principe de ces machines et le plan général de leur disposition ont été établis, sur la demande de M. Dumas, Président de la Commission, en novembre 1874, par une sous-Commission formée de MM. Fizeau et Cornu; la construction en a été confiée à MM. Brünner frères, qui les ont exécutées avec leur habileté et leur précision habituelles.

Ces machines sont au nombre de quatre, désignées par un numéro d'ordre (n° **1**, n° **2**, n° **3** et n° **4**) d'après l'époque de leur installation.

La machine n° **1** a été construite la première et a servi à effectuer les premiers essais de mesure; les trois autres ont été construites simultanément lorsque le bon fonctionnement de la première a été suffisamment éprouvé; elles sont semblables entre elles et ne diffèrent de la première que par la longueur de la course du chariot, qui a été portée de 8 à 13 centimètres, et par des détails insignifiants de construction; elles sont destinées à mesurer des épreuves daguerriennes, qui sont opaques; la machine n° **4** porte toutefois une disposition additionnelle pour la mesure des épreuves transparentes.

La description suivante et les *fig.* 1 et 2 de la *Pl. II* se rapportent donc à l'une ou l'autre de ces machines, sauf les réserves qui seront faites ultérieurement. Il est bon cependant d'ajouter que ces figures ont été faites d'après un dessin levé sur la machine n° **2**, et qu'elles représentent l'appareil réduit à $\frac{1}{8}$ de sa grandeur naturelle.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Chacune de ces machines se compose essentiellement (*fig.* 1 *et* 2 : *les mêmes lettres correspondent aux mêmes organes dans les deux figures*) :

1° D'un microscope vertical MM à long foyer, muni d'un micromètre à fil mobile ;

2° D'un chariot CC glissant sur des rails horizontaux RR. Ce chariot porte un plateau circulaire divisé P, mobile autour d'un axe vertical, destiné à supporter et à centrer l'épreuve ; il est entraîné par une vis micrométrique parallèle aux rails RR dans le prolongement de l'axe du tambour K ;

3° D'un moteur électrique E, destiné à donner au chariot un mouvement périodique et régulier.

Le fonctionnement de cette machine est très-simple : l'épreuve à mesurer est fixée sur le plateau P normalement à l'axe optique du microscope, de façon que le centre de l'image de l'un des deux astres soit sur le prolongement de l'axe du plateau qui la supporte. Sous l'influence du moteur électrique et d'un encliquetage convenable, le plateau s'avance périodiquement de longueurs égales correspondant à des tours entiers de la vis du chariot ; on arrête le mouvement à la fin de l'une de ces périodes, lorsque le bord de l'astre à mesurer est dans le milieu du champ du microscope ; on lit alors sur l'échelle C, portée par le chariot, le nombre de tours de vis, et l'on évalue la fraction ou *appoint* avec le micromètre du microscope.

Le sens des lectures positives sur l'échelle et sur le tambour du microscope a été choisi de telle sorte qu'en ajoutant les deux lectures, multipliées l'une ou l'autre par un facteur convenable, on définit par le même nombre la position du point à mesurer, quelle que soit sa position dans le champ du microscope.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

1° Microscope.

Le microscope se compose d'un objectif achromatique simple de 70 millimètres de distance focale principale; il est monté sur un tube cylindrique de 250 millimètres de longueur, sur lequel est fixé le micromètre à fil; avec cette dimension du tube, l'amplification des images par l'objectif est de 2 fois $\frac{1}{2}$ et le plan focal du microscope est à 100 millimètres de la surface inférieure de l'objectif.

Le micromètre ne diffère en rien des micromètres utilisés dans les instruments d'Astronomie et de Géodésie : le fil mobile est conduit par une vis micrométrique de $\frac{1}{2}$ millimètre de pas, dont l'écrou est muni d'un tambour divisé en 100 parties : il en résulte qu'une division du tambour correspond à $\frac{1}{500}$ de millimètre environ sur les épreuves placées au foyer.

Un jeu d'oculaires positifs permet d'obtenir des grossissements variables entre 5 et 25 fois; le grossissement à employer dépend de la perfection de l'épreuve à mesurer : on n'a pas intérêt, en général, à dépasser 15 fois; avec ce grossissement, on effectue, sur des traits bien définis, des pointés dont l'*écart moyen* ne dépasse pas $\frac{1}{2}$ division du tambour, soit $\frac{1}{1000}$ de millimètre.

La pièce qui porte l'oculaire est mobile; à l'aide d'un bouton à vis *m*, on peut toujours amener l'image à mesurer au milieu du champ de l'oculaire et éviter les effets de parallaxe, qui se produiraient si le plan de l'image ne coïncidait pas exactement avec le plan du réticule.

Éclairage de l'épreuve. — L'éclairage de l'épreuve daguerrienne se fait par réflexion normale à l'aide d'un petit miroir

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

concave, en argent, qui couvre la moitié de l'objectif du microscope. Ce miroir reçoit un faisceau de lumière provenant d'une lampe à huile ou à gaz placée à $1^{m},50$ en avant de l'appareil, par l'intermédiaire d'une lentille B (*fig.* 2 seulement).

L'image daguerrienne apparaît ainsi comme un *cliché négatif*, les *blancs* étant noirs par transparence et les parties non impressionnées étant claires.

Ce miroir projette l'image de la flamme sur la surface à éclairer; les rayons sont réfléchis par la surface argentée de l'épreuve daguerrienne et pénètrent symétriquement par la moitié libre de l'objectif.

Un jeu de verres de couleurs se place devant la lentille B; la couleur de ces verres est choisie de façon à éviter toute fatigue à l'œil de l'observateur et aussi à rendre plus marqués les contours des images. La couche impressionnée de l'épreuve présentant sous cet éclairage une teinte brune plus ou moins violacée, on a en général avantage à employer une lumière verte complémentaire qui assombrit dans une proportion notable les *noirs* de l'épreuve, relativement aux parties *claires* ou non impressionnées. Cette teinte est en même temps très-douce pour la vue de l'observateur; la couleur jaune rougeâtre de la lumière de la lampe, réfléchie sur l'épreuve, est au contraire assez fatigante.

Réglage. — Les imperfections de l'éclairage de l'épreuve conduiraient à des erreurs très-graves dans les mesures, car les images paraissent se déplacer lorsqu'on introduit quelque dissymétrie dans les faisceaux éclairés. On parvient à obtenir un réglage parfaitement symétrique en se guidant à la fois sur l'aspect du champ et sur l'aspect de l'anneau oculaire du microscope : tous deux doivent être uniformément éclairés.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Dans cet appareil, l'anneau oculaire se réduit à un demi-cercle, par suite de la présence du miroir éclaireur; on l'observe sans difficulté avec une loupe auxiliaire.

On parvient aisément à remplir ces deux conditions en réglant : 1° la largeur de la source de lumière; 2° la position du miroir éclaireur qui peut prendre toutes les inclinaisons possibles dans tous les azimuts (il est mobile autour d'un axe horizontal et autour d'un collier de serrage sur le tube du microscope); 3° enfin l'inclinaison de l'épreuve sur le plateau, ainsi qu'on le verra plus loin.

Supports et accessoires. — Le corps du microscope glisse à frottement doux dans un coulant et peut être fixé dans une position déterminée par deux vis de serrage SS; il devient alors complétement solidaire avec un support très-massif en fonte, boulonné sur la masse de l'appareil : ce support, bien visible sur la *fig.* 2, est enveloppé d'un feutre épais pour éviter ou tout au moins atténuer l'échauffement que la présence de l'observateur placé en arrière pourrait occasionner.

Sur ce pied est fixée une petite lunette additionnelle L, destinée à viser, par réflexion sur un miroir auxiliaire x, l'index I de l'échelle du chariot.

2° Chariot et plateau.

Le chariot est une plaque de fonte munie de quatre patins glissant sur deux rails horizontaux RR; l'un de ces rails est plat, l'autre présente une section triangulaire. Le réglage rectiligne est parfaitement établi par la longueur du chariot et la distance des patins.

Les rails font corps avec le socle de l'appareil, lequel est

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

très-massif, pour posséder une rigidité et une stabilité complètes.

Le chariot porte une échelle divisée en demi-millimètres, qui mesure son déplacement en passant devant un index fixe I, que l'observateur aperçoit très-aisément par réflexion sur le miroir x, à l'aide de la petite lunette L, placée près du micromètre à fil.

Plateau. — Le chariot porte un plateau divisé mobile autour d'un axe semblable à ceux des instruments de Géodésie ; dans une position particulière du chariot, la direction de l'axe du plateau est en coïncidence avec l'axe optique du microscope.

Le pourtour du plateau est divisé en 360 degrés dans le sens des aiguilles d'une montre. Un vernier fixe, donnant directement le $\frac{1}{10}$ de degré et le $\frac{1}{100}$ à l'estime, permet de mesurer les angles dont tourne le plateau ; une pince p, munie d'une vis de rappel, sert à fixer le plateau et à lui imprimer les mouvements très-lents de rotation.

Le plateau de la machine n° 1, adapté plus spécialement à certaines mesures dont il sera parlé ultérieurement, porte une disposition particulière : son pourtour présente des rainures dans lesquelles s'engage une vis sans fin ou vis tangente, qu'on peut embrayer ou débrayer à volonté. Chaque tour de vis fait tourner le plateau de $\frac{1}{2}$ degré ; le tambour divisé, dont est munie la tête de la vis, donne directement le $\frac{1}{100}$ de degré et permet d'apprécier le $\frac{1}{1000}$.

Réglage de la position de l'épreuve. — Sur ce plateau est disposée une plaque circulaire sur laquelle sont fixées les épreuves, et qui sert à achever le réglage de leur position. A cet effet, cette plaque est mobile par l'action de trois vis buttantes v, v, v, qui équilibrent l'action d'un ressort caché dans l'épaisseur des pièces : en

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

manœuvrant ces trois vis, on fait varier l'inclinaison de cette plaque, et par suite de l'épreuve qu'elle supporte.

Le centrage convenable de l'épreuve s'obtient par la manœuvre de trois vis horizontales u, u, u, qui buttent sur trois arrêts fixés au plateau.

On commence par fixer l'épreuve sur cette plaque circulaire avec un peu de cire molle, qui permet les déplacements suffisants pour un réglage approximatif; quand ce premier réglage est effectué, on fixe solidement l'épreuve, en faisant couler sur les quatre angles quelques gouttes d'arcanson fondu (mélange en parties égales de cire jaune et de colophane); on termine alors l'opération par la manœuvre des six vis v et u.

Mouvement du chariot. — Le chariot glisse à frottement doux sur deux rails RR, grâce à l'action du contre-poids W, qui tend à l'entraîner dans le sens convenable. Ce sens est celui du mouvement que doit lui imprimer la vis horizontale, à laquelle il est relié par l'intermédiaire d'un écrou. La vis est fixée au socle de l'appareil; elle tourne entre deux collets. L'écrou est fixé au chariot, mais il est composé de deux parties séparées qui viennent embrasser la vis lorsque le levier d'embrayage Q est convenablement tourné (*fig.* 1 seulement). La vis exécute un tour complet à la fois; il en résulte que le chariot avance successivement de longueurs égales entre elles et égales à un pas entier de la vis ou à $\frac{1}{2}$ millimètre.

Pour obtenir la plus grande uniformité possible dans le fonctionnement de la vis, cette rotation périodique s'effectue automatiquement par la chute d'un poids H, porté par une petite corde à boyau, qui s'enroule sur le tambour K. Ce tambour tourne autour d'un axe sur lequel est aussi fixé un plateau K′, qui porte

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

le cliquet destiné à entraîner la roue à rochets qui forme la tête de la vis horizontale du chariot.

Lorsque le poids H descend, le tambour K tourne en entraînant cette vis par l'intermédiaire du cliquet ; cette chute est d'ailleurs très-lente, car le poids est soutenu par une pièce mise en mouvement par le moteur ; lorsque ce poids est soulevé, un contre-poids h, porté aussi par une corde enroulée en sens inverse sur le tambour K, produit la rotation inverse : le cliquet glisse alors sans entraîner la tête de la vis.

Le mouvement rectiligne alternatif du poids H se transforme ainsi en un mouvement périodique de rotation de la vis toujours dans le même sens et finalement à un mouvement périodique rectiligne du chariot, également toujours dans le même sens.

Compteur. — Pour limiter la rotation de la vis à un tour entier, la transmission du mouvement est limitée par un dispositif qu'on nomme souvent *compteur* dans les machines à diviser; il est entièrement dû à MM. Brünner. Le tambour K′ porte un buttoir qui vient d'un côté butter sur une pièce fixe, de l'autre sur une pièce mobile portée par un écrou entraîné par l'axe fileté du tambour KK′.

Le jeu du cliquet dans les dents de l'encliquetage (au nombre de 250 dans la machine n° 1 et de 100 seulement dans les autres) assure le fonctionnement régulier et facile du compteur. Par précaution, l'observateur a soin à chaque mesure de vérifier la position du cliquet sur les dents de l'encliquetage, qui sont numérotées. Si, par suite d'un accident quelconque, le cliquet avait laissé passer une dent, on n'aurait pas besoin de recommencer l'opération : il suffirait d'ajouter au mouvement du chariot la fraction de pas correspondant à la dent échappée.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

3° Moteur électrique.

Le déplacement alternatif du poids H s'obtient à l'aide d'un petit moteur électrique E, construit sur le modèle de celui imaginé par Froment, en vue d'obtenir un mouvement de rotation uniforme. On en trouve la description complète dans la plupart des Traités de Physique. Une série de roues d'engrenages transforment le mouvement de rotation continu imprimé à l'axe du moteur en un mouvement alternatif, par l'intermédiaire d'une manivelle N et d'une bielle, qui guide entre deux montants une pièce Y, formant plateau; c'est sur ce plateau, équilibré par un contre-poids Z, que repose le poids H pendant la plus grande partie de sa course; car, à la partie inférieure de sa course, le poids devient libre et tend le cordon, pour produire, toujours avec la même intensité, le choc sur le buttoir qui limite la course utile de l'encliquetage.

Pour rendre visible le poids H sur la *fig.* 2, on a déplacé un peu le moteur vers la droite.

Commutateur et pile. — Un commutateur R, placé sous la main de l'observateur, ferme ou rompt à volonté le circuit de la pile, pour mettre en mouvement le moteur ou pour l'arrêter. La pile employée se compose de vingt couples Leclanché réunis par groupes de cinq, ce qui constitue, suivant l'expression ordinaire, une pile de quatre éléments à quintuple surface; chaque machine a d'ailleurs sa pile spéciale. Grâce à cette disposition, la pile conserve une énergie constante pendant plus d'un an : il suffit de nettoyer les cylindres de zinc lorsqu'ils se couvrent de cristaux, et d'ajouter de temps à autre du sel ammoniac qui doit rester en excès.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

4° Dispositions accessoires.

Chaque machine micrométrique est placée sur un socle en bois de chêne très-épais J, lequel repose non pas sur le parquet, mais sur la maçonnerie qui forme le sol de la pièce : à cet effet le parquet a été entaillé et les pieds du socle portent sur des briques qui traversent ce parquet et s'appuient sur la maçonnerie. La salle étant au rez-de-chaussée, la stabilité de l'appareil est aussi complète que possible.

La même disposition a été adoptée pour le moteur électrique, qui est fixé sur un socle épais en fonte, reposant lui-même sur un socle de bois posé sur trois briques traversant le parquet : de cette manière, il n'y a aucune communication des trépidations du moteur à la machine micrométrique.

Position de l'observateur. — L'observateur est placé en arrière de l'appareil (*fig.* 1) [ou à gauche de l'appareil représenté de profil (*fig.* 2)], derrière le support du microscope : il peut observer soit debout, soit à genoux sur un siége convenable, dont le dossier est parallèle à ce support. Il manœuvre le tambour du microscope avec la main droite, tout en appuyant le bras droit sur une table spéciale de $1^{m},20$ de hauteur, dont les quatre pieds comprennent le moteur. Dans ces conditions, l'observateur n'éprouve aucune fatigue et peut écrire très-commodément, sur la table où son coude est appuyé, les lectures à mesure qu'il les effectue.

Les observations peuvent se faire de jour ou de nuit : la lumière nécessaire à l'éclairage de l'épreuve et des diverses graduations est empruntée à une lampe à huile ou à gaz, placée à $1^{m},50$ en avant de l'appareil ; on prend soin d'allumer cette lampe environ une

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

demi-heure avant de commencer les lectures, parce qu'alors la température devient à fort peu près stationnaire. Par surcroît de précautions, on exécute successivement les mesures dans un sens et dans le sens inverse, de façon à *croiser* les observations : s'il y avait une petite variation d'effet proportionnelle au temps, la moyenne des mesures correspondrait alors à la température moyenne.

Un thermomètre placé le long des rails du chariot permet d'observer cette température.

A chaque nouvelle épreuve, on essuie soigneusement les rails avec un linge ; on ajoute quelques gouttes d'huile sur les pièces frottantes, et l'on fait glisser le chariot plusieurs fois de suite, d'un bout à l'autre de sa course, pour égaliser le graissage.

La vis inférieure est également huilée de temps en temps ; mais c'est surtout pour le chariot que cette condition est utile : elle est suffisamment remplie lorsque le contre-poids W entraîne facilement le chariot préalablement débrayé.

5° Usage de la machine pour la mesure des longueurs.

Pour mesurer la distance comprise entre deux points ou plusieurs points situés sur une même droite, on a à effectuer, après un réglage convenable, une série de pointés identiques : il suffira évidemment d'indiquer comment on opère pour relever la position de l'un quelconque d'entre eux; on répétera l'opération successivement autant de fois qu'il y aura de points à relever.

On amène d'abord par le mouvement progressif du chariot le point à relever dans le milieu du champ du microscope : comme la vis motrice du chariot ne tourne que d'un nombre entier de tours ou demi-millimètres, et que le champ du microscope correspond à près de 3 millimètres d'étendue sur l'objet placé à son foyer,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

il reste une certaine indétermination dans la position à donner au chariot; on choisit, en général, celle qui amène le point à relever le plus près possible de l'axe optique du microscope, c'est-à-dire du milieu du champ. On arrête alors le moteur, on lit l'échelle du chariot et l'on effectue avec le fil du microscope une série de cinq pointés. Si donc on connaît le nombre N de divisions du tambour du microscope qui correspond à une division de l'échelle du chariot, la position du point visé sera définie par l'expression

$$l + \frac{n}{N},$$

l étant la lecture de l'échelle du chariot et n la moyenne des cinq lectures du tambour du micromètre (y compris les nombres entiers de tours indiqués par le peigne intérieur).

Cette expression contient une constante arbitraire dépendant des origines des graduations sur lesquelles se font les lectures; mais, comme cette constante est la même dans toutes les opérations successives, elle s'élimine, par différence, dans le calcul de la longueur mesurée : on n'a donc pas à s'occuper de sa détermination.

Quant au nombre N, il faut le mesurer directement. On y parvient aisément en répétant la mesure qu'on vient d'effectuer, après avoir fait avancer le chariot d'une division de l'échelle inférieure : d'après ce qui a été dit plus haut (p. 40), le sens des deux graduations a été choisi de telle sorte qu'en ajoutant la lecture de l'échelle et celle du tambour multipliées, l'une ou l'autre, par un facteur convenable, on définit par le même nombre la position du point à relever, quelle que soit sa position dans le champ du microscope. Il en résulte qu'en appelant n' la moyenne des cinq nouveaux pointés du même point dans le microscope,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

on aura

$$l+\frac{n}{N}=l+1+\frac{n'}{N},\quad \text{d'où}\quad n-n'=N.$$

Ce nombre est très-voisin de 500 dans les quatre machines (p. 41).

Il semble que ce nombre N puisse être pour chaque appareil déterminé une fois pour toutes, puisqu'il ne dépend que de la construction du microscope; mais il est nécessaire de faire souvent cette détermination, ainsi qu'on va le voir par l'analyse des conditions optiques. En effet, ce nombre N serait rigoureusement constant si l'on était assuré de l'invariabilité absolue du grossissement du microscope; mais cette condition suppose que l'image conjuguée de l'objet visé sera toujours placée rigoureusement dans le plan du fil micrométrique. Or, comme le grossissement du microscope est faible, il y a une certaine indécision dans l'appréciation de cette coïncidence et par suite une légère altération dans le rapport de l'image à l'objet.

On pourrait accuser la construction du microscope (p. 41) d'avoir exagéré cette incertitude de mise au point par suite de la grande longueur donnée à la distance focale de l'objectif; mais cette grande longueur (100 millimètres) a été choisie à dessein dans le but de n'employer qu'une ouverture angulaire relativement petite de l'objectif, condition indispensable pour que les images ne soient pas déformées. L'obligation de déterminer plus souvent la valeur du rapport N est donc un bien faible inconvénient vis-à-vis de celui que présenterait la déformation des images dans le champ du microscope; il est évident, en effet, que, si les images étaient déformées, la précision du micromètre deviendrait illusoire.

Ainsi il est bon de répéter cette détermination du rapport N

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

à chaque nouvelle mise au point, pour tenir compte de la variation dans le grossissement du microscope; il est même utile de répéter cette détermination en différentes positions du chariot, car les pas de la vis qui le mène peuvent varier suivant une loi continue d'une extrémité à l'autre de sa course : de cette manière, toutes les mesures qu'on effectuera seront exprimées en fonction de la vis micrométrique du chariot, et l'*appoint* mesuré avec le microscope sera lui-même exprimé en fonctions du tour de vis correspondant à la lecture de l'échelle.

Il suffit alors d'effectuer l'étude du pas successif de cette vis : on y parvient en mesurant successivement une même longueur en différents points de la source du chariot; cette opération sera décrite plus tard, lorsqu'il sera question de la construction des Tables de correction des vis micrométriques. On arrive ainsi à exprimer chaque tour de vis en fonction de l'un d'eux pris comme unité et à construire une Table qui fournit la fraction c de pas qui ramènerait au cas idéal où tous les pas seraient égaux. Il en résulte que chaque mesure est donnée par une expression de la forme

$$l_i + \frac{n}{N_i} + c_i,$$

N_i représentant la valeur de N déterminée dans la position du chariot correspondant à la lecture l_i. Cette expression représente une longueur comptée à partir d'une origine arbitraire en fonction d'une unité inconnue égale au pas d'un certain tour de vis : l'origine arbitraire n'a aucune influence, puisqu'on ne considère jamais que des différences; mais on ramène aisément ces mesures à une unité donnée. Il suffit de mesurer avec la machine un intervalle H préalablement mesuré en fonction de l'unité nouvelle. Soient M l'expression numérique de cette longueur en fonction de l'unité

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

inconnue de la machine et k le coefficient par lequel il faut multiplier les résultats obtenus avec la machine pour les exprimer en fonction de l'unité nouvelle, on aura

$$kM = H, \quad \text{d'où} \quad k = \frac{H}{M}.$$

Dans la plupart des cas on simplifie beaucoup le calcul arithmétique par la construction d'une Table spéciale.

La vis micrométrique du microscope doit être également étudiée à part; mais cette étude n'est pas aussi utile que celle de la vis du chariot, l'amplification du microscope atténuant d'autant les erreurs à craindre, et d'autre part l'étendue utile de la course étant assez petite pour qu'on puisse en général regarder l'erreur de proportionnalité comme négligeable.

6° Adjonction d'une échelle auxiliaire.

La méthode qui vient d'être exposée est entièrement correcte au point de vue théorique et d'un emploi relativement facile : aussi un grand nombre de mesures d'épreuves daguerriennes ont-elles été effectuées d'après cette méthode. La seule modification qu'on ait fait subir à la marche indiquée est la substitution pour la détermination de N_i d'un repère plus précis que les contours des astres ; on choisissait une petite tache accidentelle de l'épreuve ou un grain de poussière, repères sur lesquels les pointés se font avec une très-grande exactitude.

Toutefois cette méthode présente un point faible, que la série des observations n'a pas tardé à mettre en évidence et qui, finalement, l'a fait rejeter. L'exactitude des mesures dépend essentiellement de la constance absolue de la Table de correction de la vis micrométrique qui mène le chariot. Or il est arrivé que, lorsqu'on

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

a voulu répéter, à plusieurs semaines d'intervalle, les observations servant à dresser la Table de correction, on a trouvé parfois des différences supérieures aux erreurs de pointés : ces erreurs, insensibles pour de faibles courses du chariot, se sont élevées à près de $\frac{1}{100}$ de millimètre, lorsque la course du chariot atteignait les 40 millimètres que présente le disque solaire des épreuves daguerriennes. Ces différences sont souvent restées constantes pendant un certain temps; mais brusquement, sans cause apparente, elles ont quelquefois varié sans qu'on ait pu prévoir ni le sens ni la grandeur du changement (1).

Bien que ces anomalies soient faibles et accidentelles, on n'a pas cru devoir les considérer comme des erreurs *fortuites* susceptibles d'être éliminées par la moyenne d'un grand nombre d'observations de même genre : on a cherché à s'affranchir entièrement de leur influence, sans toutefois changer le mode opératoire ni se priver des données précises que fournirait la machine si l'on avait quelques raisons de croire pendant un certain temps à la stabilité de la Table de correction.

On y est parvenu en principe, en cherchant à mesurer concurremment une épreuve et une longueur invariable, formant pour ainsi dire une échelle de proportion destinée à ramener les indications de la machine à une unité fixe, malgré les petites variations relatives de son unité propre.

---

(1) Une étude assez approfondie de ces anomalies (*voir* le fascicule B relatif aux mesures exécutées avec la machine n° 1) a conduit à penser que leur cause réside dans la variation du frottement du chariot, nécessairement assez lourd, sur ses rails : on conçoit en effet que, si la résistance au mouvement vient à varier, l'élasticité des pièces de transmission, en particulier de l'écrou brisé, entre en jeu d'une manière inégale, et des tours égaux de la vis n'entraînent plus nécessairement le chariot de longueurs identiques.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Cette idée est une conséquence de la condition qui domine toutes les mesures faites en vue d'obtenir la parallaxe du Soleil (*voir* p. 37) : la condition de faire des *mesures différentielles*, il était donc naturel de comparer les éléments à relever sur les épreuves du passage à une longueur invariable.

On a réalisé expérimentalement ce principe de plusieurs manières, dont la plus pratique consiste dans la superposition à l'épreuve d'un réseau de traits tracés sur une lame de glace à faces parallèles, qu'on désignera désormais sous le nom d'*échelle auxiliaire*.

La *fig.* 5 de la *Pl. II* représente en vraie grandeur la disposition adoptée : l'échelle est tracée sur une petite bande de glace d'une longueur un peu supérieure au diamètre de l'image solaire; elle repose sur l'épreuve par l'intermédiaire de deux petites bandes de papier dont l'épaisseur, mesurée au sphéromètre, est de $\frac{1}{10}$ de millimètre. Cette échelle se compose de sept traits répartis en deux groupes : le premier formé de cinq traits distants de 1 millimètre; le deuxième de deux traits distants aussi de 1 millimètre; l'intervalle de deux groupes est de 33 millimètres.

Grâce à cette disposition, on peut toujours enclaver chacun des quatre bords à relever entre deux traits consécutifs de l'échelle. L'opération consiste alors à mesurer avec le microscope la distance du bord de l'astre aux deux traits voisins; à cet effet, par le mouvement du chariot, on amène le bord et les deux traits dans le champ du microscope et l'on effectue les pointés. La vis micrométrique du chariot n'a plus d'utilité; néanmoins on ne néglige pas de noter ses indications, car elles permettraient de reconstituer le premier mode de mesure (p. 49), dans le cas où l'on jugerait à propos de faire abstraction des pointés effectués sur les traits de l'échelle auxiliaire.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Comme complément de détails pratiques, il est bon d'ajouter que les traits de l'échelle auxiliaire, gravés à l'acide fluorhydrique liquide, sont doubles (à une distance de $0^{mm},03$) et rendus opaques par un mélange de noir de fumée très-fin et de vernis à graveur. L'intervalle clair qui sépare les deux traits permet des pointés très-précis.

La stabilité absolue de l'échelle est assurée par le poids d'un anneau de plomb placé sur le milieu de sa longueur à une place qui ne peut gêner en rien les observations. On s'est assuré par des mesures directes que les petits chocs de l'encliquetage de la vis du chariot ne déplacent en aucune manière cette échelle.

La lumière qui sert à éclairer l'épreuve se réfléchit aussi sur les deux faces de la lame de glace et *lave* de blanc les noirs de l'épreuve. Sur les épreuves vigoureuses cet effet n'a pas d'inconvénient, mais certaines épreuves faibles perdent beaucoup de leur relief; on remplace alors l'échelle auxiliaire sur verre par un véritable *réticule*, formé par sept fils de platine de $\frac{1}{10}$ de millimètre de diamètre, tendus sur la fente d'une lame de laiton et présentant la même disposition que les sept traits de l'échelle sur verre. La réflexion de la lumière envoyée par le miroir éclaireur fait naître sur les fils des lignes brillantes longitudinales très-favorables à la précision des pointés.

Avec cette manière de procéder, c'est l'échelle auxiliaire qui est le terme direct de comparaison de toutes les mesures : il faut donc, par des mesures préliminaires, déterminer les distances mutuelles des traits et les exprimer en fonction d'une unité convenablement choisie. On construit alors une Table donnant les distances de chacun de ces traits au premier d'entre eux servant d'origine et désigné par O; les six autres seront toujours désignés dans la suite par les chiffres romains I, II, III, IV, V et VI.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On trouvera dans le fascicule B et dans les suivants tous les détails relatifs à cette détermination préliminaire.

On peut reprocher au premier abord à cette méthode d'augmenter beaucoup le nombre des pointés, puisque chaque point à relever exige aussi le relèvement des deux traits qui le comprennent, ce qui triple le nombre des pointés à effectuer. Si l'on y regarde de plus près, on verra que l'inconvénient signalé est bien exagéré et surtout qu'il est compensé par bien des avantages.

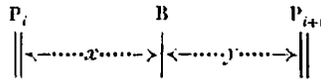
D'abord ces pointés s'effectuant dans le champ de vision, sans avoir besoin de déplacer autre chose que l'oculaire mobile, n'exigent qu'un temps additionnel bien faible comparativement aux préparatifs des mesures et à la durée de déplacement du chariot; les pointés sur les traits étant d'ailleurs très-faciles et très-précis, l'observateur n'éprouve aucune fatigue à les faire.

Si, d'autre part, on songe que, sans l'adjonction de l'échelle auxiliaire, il est nécessaire de répéter les pointés pour la détermination du rapport N, soit sur les points à relever, soit sur des repères qu'il faut prendre la peine de rechercher et de choisir convenablement, on reconnaîtra que l'avantage de la rapidité et de la simplicité reste encore à l'emploi de l'échelle auxiliaire.

Mais l'avantage le plus précieux, et qui n'apparaît pas lorsqu'on se borne à examiner le principe de la méthode, c'est l'uniformité et la sécurité du mode de réduction des mesures. En effet, considérons une mesure élémentaire composée d'un pointé P_i sur le trait T_i, d'un pointé B sur le point à relever (par exemple le bord d'un astre sur une épreuve photographique) et d'un pointé P_{i+1} sur le trait T_{i+1}. D'après la Table construite antérieurement, on connaît les distances respectives des deux traits de repère au trait zéro : soient D_i et D_{i+1} ces distances, on supposera par exemple $D_{i+1} > D_i$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Des trois pointés effectués (chacun d'eux étant la moyenne de plusieurs lectures), on peut facilement et de deux manières différentes déduire la distance du point B au trait zéro de l'échelle auxi-



liaire ; en effet, cette distance D se compose, en partant du repère T_i (qu'on nommera *trait d'avant*), de la distance D_i *augmentée* d'un appoint x qu'on calcule par la proportion

$$\frac{x}{B - P_i} = \frac{D_{i+1} - D_i}{P_{i+1} - P_i}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{D_{i+1} - D_i}{P_{i+1} - P_i}(B - P_i).$$

En partant du repère P_{i+1} (qu'on nommera *trait d'arrière*, d'après l'ordre dans lequel il se présente sous le fil), cette distance se compose de la distance D_{i+1} *diminuée* d'un appoint y qu'on calcule par la proportion

$$\frac{y}{P_{i+1} - B} = \frac{D_{i+1} - D_i}{P_{i+1} - P_i}, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{D_{i+1} - D_i}{P_{i+1} - P_i}(P_{i+1} - B),$$

de sorte qu'on a la vérification évidente

$$D = D_i + x = D_{i+1} - y.$$

Si l'on a soin de prendre comme unité pour les distances de l'échelle auxiliaire $D_i D_{i+1}$ une grandeur voisine de l'unité (division du tambour du micromètre) avec laquelle on fait les pointés P_i, B, P_{i+1}, le facteur $\frac{D_{i+1} - D_i}{P_{i+1} - P_i}$ est très-voisin de l'unité, et le calcul arithmétique de x et de y se fait à vue, avec l'aide d'une Table qui sera ultérieurement donnée. (On trouvera un exemple numérique un peu plus loin, dans la *Note explicative pour l'intelligence des tableaux résumant les mesures des épreuves*.)

On effectue les mesures et les réductions analogues pour tous les points qu'on a à relever. Le résultat qu'on obtient dans

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

chaque cas est la *distance du point relevé au trait zéro de l'échelle auxiliaire*, distance exprimée avec la même unité que celle *qui définit les distances des traits de cette échelle*.

Par différence, on obtient les distances mutuelles des points à relever; la position arbitraire du zéro de l'échelle auxiliaire se trouve ainsi éliminée.

En résumé, malgré une complication plus apparente que réelle, l'adjonction d'une échelle auxiliaire, sans empêcher d'utiliser les indications de la machine micrométrique suivant le premier mode de mesure, a l'avantage :

1° D'éliminer les petites anomalies reconnues dans la machine micrométrique;

2° De permettre un mode de réduction simple, symétrique, avec des vérifications numériques rendant à peu près impossibles les erreurs matérielles;

3° D'exprimer directement les résultats en fonction d'une unité invariable et indépendante de la machine;

4° De présenter une sorte de contrôle dans chaque série de mesures par l'examen des valeurs des distances des traits de repères, lesquelles doivent toujours rester proportionnelles.

La méthode éprouvée par un long usage est maintenant exclusivement employée pour les mesures des épreuves daguerriennes du passage de Vénus. Les fascicules suivants donnent le résumé des observations effectuées jusqu'ici dans des tableaux dont l'explication complète sera donnée plus loin; outre les données fondamentales, on a ajouté le calcul des réductions avec détails pour rendre plus facile le contrôle numérique des résultats.

La précision finale des mesures dépend en grande partie de la

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

précision avec laquelle la position relative des traits de l'échelle auxiliaire a été déterminée ; aussi on verra avec quel soin chaque observateur a effectué et répété cette détermination préliminaire qui a servi de base aux calculs de réduction. Mais il est bon de faire remarquer que le mode même de mesure permet théoriquement d'accroître, d'une manière en quelque sorte indéfinie, la précision avec laquelle on peut déterminer ces distances des traits de l'échelle auxiliaire, à mesure qu'on en multiplie l'application. En effet, dans chaque série de mesures, l'intervalle des traits de repères se trouve mesuré à nouveau et d'une manière indépendante ; si donc, après une discussion approfondie des mesures, on reconnaissait quelque intérêt à reprendre leur réduction, on pourrait déduire de l'ensemble de toutes les mesures effectuées par un même observateur la valeur des distances relatives des traits de l'échelle.

Le nouveau calcul de réduction ne serait même ni long, ni difficile, parce que les corrections à introduire dans les résultats seraient nécessairement très-petites et se prêteraient à l'emploi de formules différentielles qui permettraient de corriger immédiatement certains résultats définitifs sans avoir besoin de passer par les calculs intermédiaires.

Cette considération conduit même à penser qu'une petite erreur sur les nombres adoptés pour la distance des traits de l'échelle auxiliaire n'aurait dans un certain nombre de cas qu'une influence négligeable pour le calcul de la parallaxe du Soleil : il suffit pour cela de se reporter aux remarques faites précédemment (p. 37 et 55) sur la nature de ces mesures, qui sont essentiellement *différentielles,* et de rappeler que les erreurs commises n'entrent que par leurs différences d'une mesure à l'autre.

Ce n'est pas ici le lieu de se livrer à une discussion approfondie sur l'influence des erreurs de mesure sur le résultat définitif, mais

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

il était utile de signaler les chances de compensation qu'offre la méthode de l'échelle auxiliaire, même en supposant de petites erreurs dans son application. A. C.

III. — Note explicative pour l'intelligence des tableaux résumant les mesures des épreuves photographiques.

(*Voir*, pour de plus amples détails, l'*Exposé de la méthode de mesure des épreuves* et la *Description de la machine micrométrique*.)

Vis micrométrique du microscope. — Tous les pointés sont faits avec le micromètre d'un microscope grossissant environ vingt fois.

Unité de mesure. — L'unité de mesure, notée d, est le centième de tour ou division du tambour de la vis micrométrique : elle vaut à fort peu près $\frac{1}{500}$ de millimètre : il suffit donc de *doubler* chaque nombre pour avoir sa valeur approchée en millièmes de millimètre : ainsi $736^{d},58$ équivalent à $1473,16$ millièmes de millimètre ou $1^{mm},47316$.

Pointés. — Les moyennes de plusieurs séries de pointés étant en général concordantes à $0^{d},1$ ou $0^{d},2$, on a conservé dans toutes les moyennes les centièmes de division, pour que les opérations arithmétiques nécessaires aux réductions ne risquent pas d'introduire d'erreurs comparables à l'approximation des pointés.

Moyennes. — Chaque pointé est répété 5 fois : ce nombre de 5 a été choisi pour faciliter le calcul des moyennes et éviter les erreurs matérielles : il suffit, en effet, de doubler la somme des cinq lectures et d'avancer la virgule d'un rang vers la gauche pour avoir la moyenne de la série. Dans la publication des observations,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

on a, pour abréger, supprimé les lectures individuelles et donné seulement les moyennes ; l'écart moyen d'un pointé isolé avec la moyenne des 5 dépassant rarement $0^{d},2$ dans la mesure des traits de repère et $0^{d},5$ dans la mesure des bords des astres, on voit qu'il était peu utile de donner le détail de ces pointés.

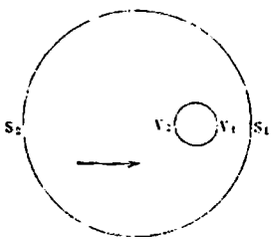
Vis inférieure, échelle du chariot. — La vis micrométrique du microscope ne sert qu'à mesurer les distances aux traits de repères compris dans le champ de vision ; toutefois, avec les indications de l'*échelle du chariot* qui porte l'épreuve, c'est-à-dire avec la connaissance du nombre de tours de la vis qui mène le chariot, on pourrait déterminer avec une assez grande approximation les longueurs à mesurer indépendamment des traits de repère (*voir* p. 49 la première méthode de mesure) ; une Table construite préalablement (qu'on pourrait même à la rigueur déduire de l'ensemble des observations effectuées avec l'échelle auxiliaire) donne la valeur de chaque tour de vis du chariot en fonction des divisions du tambour. Cette méthode de mesure, irréprochable au point de vue théorique, rencontre en pratique quelques difficultés qui en diminuent la précision et qui ont fait préférer l'emploi de mesures comparatives avec une échelle auxiliaire (p. 53). Mais il est bon de connaître cette propriété de la machine, car elle est souvent utilisée dans la réduction des observations pour mettre en évidence des erreurs matérielles (de 100 divisions, par exemple), lesquelles seraient difficiles à retrouver si l'on n'avait pas une vérification indépendante.

Plateau. — L'épreuve est fixée sur un plateau tournant autour d'un axe vertical solidaire avec le chariot ; ce plateau porte une graduation dont la chiffraison croît dans le sens positif (sens de rotation des aiguilles d'une montre) ; mais, comme la lecture se

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

fait sur un vernier fixe, les rotations successives du plateau dans le sens positif correspondent à des lectures décroissantes.

Notation des bords des deux astres $S_1V_1S_2V_2$. — Les quatre



bords des astres à relever sont distingués par les lettres $S_1V_1V_2S_2$, qui signifient :

S_1,	premier bord du Soleil (le plus voisin de la planète)		sur le diamètre
V_1,	» de Vénus	»	passant par la ligne
V_2,	second bord »	»	des centres
S_2,	» du Soleil	»	des deux astres.

Positions directe et inverse. — La *position directe* de l'épreuve est celle pour laquelle, la ligne des centres des deux astres étant parallèle au mouvement du chariot, le déplacement du chariot conduit par la vis inférieure (1) amène sous le réticule du microscope les bords des astres dans l'ordre $S_1V_1V_2S_2$.

La *position inverse* s'obtient en tournant de 180 degrés le plateau lorsque l'épreuve est dans la position directe.

Réglage de l'épreuve.

Recherche de la ligne des centres. — Le centre de rotation du plateau étant amené dans l'axe du microscope, on fixe l'épreuve

(1) Un encliquetage placé à la tête de la vis ne permet le déplacement que dans un seul sens.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de façon que le centre de la planète soit aussi sur le prolongement de cet axe : quelques tâtonnements suffisent pour remplir cette condition d'une manière très-approchée. Si l'on déplace alors le chariot jusqu'à amener le bord le plus éloigné S_2 dans le champ du microscope, la ligne des centres sera évidemment la bissectrice des deux directions lues sur le cercle du plateau, directions qui amènent par rotation le bord solaire à passer par la croisée des fils.

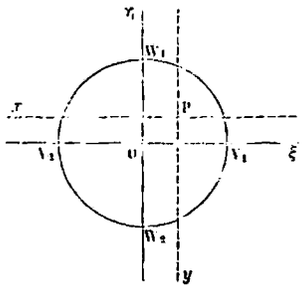
Position relative du centre de la planète et de l'axe du plateau. — Pour vérifier le centrage de la planète, le rectifier au besoin et en tout cas conserver les éléments numériques de ce centrage par rapport à l'axe du plateau, on effectue quatre opérations consistant chacune dans le relevé des deux bords opposés de la planète dans quatre positions rectangulaires du plateau à partir de la position directe et dans le sens positif (sens des aiguilles d'une montre).

Notations W_1, W_2 *des bords de la planète normalement à la ligne des centres.* — On est ainsi conduit à donner le nom de W_1 et W_2 aux deux bords de la planète situés sur le diamètre perpendiculaire à la ligne des centres : leur dénomination est choisie de telle sorte que la rotation du plateau dans le sens positif amène successivement les quatre bords sous le fil dans l'ordre V_1, W_1, V_2, W_2.

On désigne par x la demi-somme des relevés des deux bords V_1V_2 quand ils se présentent dans l'ordre V_1, V_2 (la lecture $V_1 <$ la lecture V_2, position directe) ; par x' la demi-somme V_2V_1 dans l'azimut à 180 degrés (position inverse) ; de même W_1W_2 par y et W_2W_1 par y'. Il en résulte que $x - x'$ est le double de la distance du milieu du diamètre V_1V_2 au centre idéal de rota-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

tion du plateau et que $y - y'$ est le double de la distance au même point du milieu du diamètre W_1W_2, ces distanees étant estimées parallèlement à ces diamètres et comptées positivement de V_1 à V_2 et de W_1 à W_2.



Coordonnées du centre du plateau. — Inversement les coordonnées ξ, n du centre du plateau P, rapportées à deux axes rectangulaires OV_1 et OW_1, sont

$$\xi = \frac{x - x'}{2}, \quad n = \frac{y - y'}{2}.$$

Ces coordonnées ξ, n ne sont pas utilisées dans les réductions publiées; mais elles serviraient au besoin à retrouver certaines corrections extrêmement petites, dues au défaut de centrage de la planète, dans le cas où les calculs ultérieurs montreraient que la précision des résultats comporte l'emploi de ces corrections.

Exemple numérique.

Les deux opérations du *centrage de l'épreuve* et de la *détermination des coordonnées relatives du centre de la planète et du plateau* constituent les deux opérations préliminaires à effectuer avant les mesures proprement dites. Aussi, dans les tableaux numériques, figurent-elles en tête du *détail des mesures* sous une

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

forme très-condensée, mais qui contient néanmoins tous les éléments observés. L'exemple suivant, emprunté au fascicule C, p. 13, permettra de donner à ce sujet tous les éclaircissements nécessaires :

DÉTAIL DES MESURES.

Recherches de la ligne des centres.

	Position directe.			Position inverse.		
Échelle du chariot.....	108mm,0			43mm,0		
Tambour du microscope.....	1000d	750d	500d	500d	750d	1000d
Couples d'azimuts.....	184°,1	179°,7	176°,1	3°,1	358°,3	355°,3
	203°,5	208°,3	211°,9	21°,6	29°,5	32°,7
Demi-somme.....	193°,95	194°,0	194°,0	12°,0	13°,9	14°,0
Moyennes.....	Az = 194°,0			Az = 14°,0		

Position relative du centre de la planète et de l'axe du plateau.

Az = 194°.	Az = 104°.	Az = 14°.	Az = 284°.	Corrections moyennes de la vis.
$V_1 = 424^d,67$	$W_1 = 412^d,77$	$V_2 = 405^d,69$	$W_2 = 419^d,27$	0d,63
$V_2 = 1026,05$	$W_2 = 1004,65$	$V_1 = 1005,13$	$W_1 = 1011,27$	0,64
$x = 725,36$	$y = 708,71$	$x' = 705,56$	$y' = 715,27$	

Coordonnées du centre du plateau par rapport aux axes OV_1, OW_1 passant par le centre O de la planète.

$$\xi = \frac{x - x'}{2} = -9^d,90 \quad \text{suivant } OV_1,$$

$$\eta = \frac{y - y'}{2} = -3^d,28 \quad \text{suivant } OW_1.$$

Dans le tableau relatif à la recherche de la ligne des centres, on voit que l'épreuve a été d'abord placée dans la *position directe* (p. 63), le chariot étant fixé à la division 108,0 de l'échelle millimétrique qui définit ses positions : le centre du plateau était dès lors en dehors de l'axe du microscope, car l'exact centrage sur le milieu du champ correspond à la division 75,5. On a tourné le plateau jusqu'à ce que le bord du Soleil, côté S_2 (*voir* p. 63), apparaisse dans le champ, et, quand il a coïncidé avec la croisée des fils, le fil mobile étant placé à la position définie par 10d,00 ou 1000 divisions, on a lu sur le bord divisé du plateau le nombre 184°,4, marqué par le vernier fixe (p. 44); en tournant le plateau en sens inverse, la partie symétrique du bord solaire S_2 a apparu

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et a été mise en coïncidence avec la croisée des fils : on a lu 203°, 5 sur le plateau. La demi-somme de ces couples d'azimuts donne 193°, 95 : c'est l'azimut que doit marquer l'index du plateau lorsque la ligne des centres est parallèle au mouvement du chariot.

L'opération a été répétée deux autres fois, avec une légère variante, pour éviter les erreurs matérielles, en changeant un peu la croisée des fils ; le fil mobile a été placé à $7^t, 50$ ou 750^d et à $5^t, 00$ ou 500^d.

Les trois opérations sont toujours concordantes à $\frac{1}{10}$ de degré.

Remarque. — Quelquefois l'observateur a opéré d'une manière différente, mais équivalente au fond : au lieu de déplacer le réticule pour varier la mesure, c'est le chariot qu'on a déplacé d'une ou deux divisions. Alors il y a inversion dans les titres, *Tambour du microscope* et *Échelle du chariot*, mais les *couples d'azimuts* et les moyennes ont la même signification (exemple : p. C.17).

La même série d'opérations a été répétée en mettant l'épreuve dans la *position inverse* (p. 63) d'une manière symétrique relativement à l'axe du microscope, ainsi que le témoigne l'indication de l'échelle du chariot $43^{mm}, 0$. Comme on doit s'y attendre, l'azimut déterminé ainsi diffère de 180°, 0 de l'azimut précédent. S'il y avait quelque erreur d'excentricité dans la graduation du plateau, ce second mode d'évaluation permettrait d'en atténuer l'influence.

Quant à la seconde partie du tableau : *Position relative du centre de la planète et de l'axe du plateau*, elle est la traduction fidèle de l'exposé donné plus haut (p. 64) et n'a besoin d'aucun commentaire.

Mesure des distances des quatre bords.

Ordre des mesures. — La mesure des distances mutuelles des quatre bords S_1, V_1, V_2, S_2 (p. 63) est répétée six fois pour chaque épreuve. Ces six mesures se groupent deux par deux, chaque mesure effectuée dans la *position directe* (ordre : S_1, V_1, V_2, S_2) étant immédiatement suivie de la mesure dans la *position inverse* (ordre inverse : S_2, V_2, V_1, S_1).

Ces trois groupes de mesures forment trois tableaux symétriques qui occupent les trois dernières des quatre pages consacrées à chaque épreuve (*voir* fascicule C, p. 14, 15 et 16).

Le premier groupe comprend le relevé, dans les positions directe et inverse, des quatre bords suivant la ligne des centres : les

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

deux autres, les opérations analogues suivant des droites inclinées de 2 degrés de part et d'autre de cette ligne : l'indication des deux azimuts du plateau, qui figure au haut de chaque page, ne laisse d'ailleurs aucune incertitude sur la direction à laquelle les mesures se rapportent (*voir*, un peu plus loin, l'exemple emprunté au fascicule C, p. 14).

Les observations à $\pm 2°$ de la ligne des centres ne sont pas seulement destinées à augmenter le nombre et la précision des mesures, elles ont surtout pour but d'atténuer l'influence des déformations accidentelles du bord solaire causées par les réfractions régulières de l'atmosphère au moment de l'obtention de l'épreuve (p. 35 et 36).

Échelle auxiliaire. — Toutes les mesures des quatre bords S_1, V_1, V_2, S_2 des deux astres ont été faites par comparaison avec les traits d'une échelle auxiliaire tracée sur verre et placée de façon que les traits soient à une distance de $\frac{1}{10}$ de millimètre au-dessus de la surface de l'épreuve (p. 55).

Notation des traits. — Cette échelle porte seulement sept traits, qu'on distingue par les chiffres O, I, II, III, IV, V, VI et répartis en deux groupes : le premier groupe, composé des cinq traits O, I, II, III, IV, distants d'un millimètre, forme un réseau qui comprend toujours les trois bords S_1, V_1 et V_2 ; le deuxième groupe, formé des traits V et VI, également distants d'un millimètre, est toujours placé de façon à comprendre le bord S_2.

Traits d'avant et d'arrière. — Le pointé d'un bord est donc toujours accompagné du pointé des deux traits qui le comprennent : l'un est désigné par le nom de *trait d'avant* (c'est le premier qui se présente dans le déplacement du fil du micromètre

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

dans le sens positif), l'autre par celui de *trait d'arrière*. Chaque pointé est répété cinq fois, mais c'est la moyenne des cinq pointés qui figure seule près de la notation correspondante.

Corrections, vis; parallaxe. — Cette moyenne est corrigée de l'erreur de la vis du microscope (d'après une Table spéciale qui figure au commencement de chaque fascicule) et de l'erreur due à la parallaxe des traits qui ne sont pas exactement dans le même plan que l'épreuve : la petite distance entre les traits et l'épreuve ($0^{mm},1$), la grande distance focale de l'objectif du microscope (100 millimètres) et la faible étendue du champ réduisent cette erreur à une très-petite quantité, mais qu'on n'a pas cru devoir négliger, de peur des erreurs systématiques.

Ces corrections ont été rendues positives par l'addition d'une constante convenable, qui s'élimine évidemment dans les différences (p. 52).

Distance des traits de l'échelle auxiliaire. — Les distances mutuelles des traits de l'échelle auxiliaire ont été déterminées avec beaucoup de soin par l'observateur même qui en fait usage, par comparaison avec une *échelle normale,* tracée sur plaqué d'argent, dont l'étude préalable a été faite (*voir* le fascicule B).

Le tableau en est donné avec les Tables de correction au commencement de chaque fascicule; mais les nombres utilisés dans chaque série sont répétés dans les colonnes de réduction et donnés en face de chaque notation I, II, . . . , VI. Ainsi III signifie distance du trait III au trait O servant d'origine, en fonction de l'unité de l'*échelle normale sur plaqué d'argent*. En outre, dans la page 14 du fascicule C, adoptée comme exemple numérique, tous ces nombres sont marqués d'un astérisque.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Réductions. — Il en résulte que le pointé d'un bord rapporté à deux traits peut être également rapporté au trait O, en fonction de la même unité ; il suffit pour cela d'exprimer la différence de ces distances aux deux repères en fonction de la même unité que celle qui mesure la distance des traits. Cette réduction se fait aisément, grâce à ce que cette limite est très-voisine de celle qu'expriment les divisions du tambour du microscope.

A cet effet, on prend la différence des deux pointés obtenus, c'est-à-dire la distance des deux traits de repère désignés par *obs.* ; on les compare à la distance adoptée (*ad.*) des deux traits d'après le tableau résumant l'étude préalable ; la différence de ces deux nombres représenterait, si les erreurs de pointé étaient nulles, la différence d'évaluation numérique de la même distance provenant du changement d'unité. La connaissance de cette différence suffit pour réduire par une simple proportion la lecture du bord de l'astre à ce qu'elle serait si le tambour du microscope avait évalué la distance des repères avec l'unité de l'*échelle normale* ; et comme on peut faire cette réduction par comparaison, soit au trait d'avant, soit au trait d'arrière, on a deux manières indépendantes de faire ce calcul ; ce contrôle est très-précieux et empêche d'une manière presque absolue les erreurs matérielles.

Exemple numérique.

La théorie du mode de réduction des mesures a été donnée avec détails précédemment (p. 58). Un exemple numérique rendra facile l'intelligence des tableaux où ces réductions sont résumées : on choisira le premier groupe de mesures de la page 14 du fascicule C.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

SAINT-PAUL, N° 5. AZIMUTS DU PLATEAU : Az = 194°,0 ET Az = 14°,0. 0 MOY. = 7°,9.

Échelle du chariot.	Lectures du microscope.					Distance des traits.	Distance du bord de l'astre.			
	Trait d'avant.		Bord de l'astre.	Trait d'arrière.			Trait d'avant.		Trait d'arrière.	
		d			d	d		d		d
73,0	O.....	409,38	S_1...	782,98	I... 911,12	Obs. 501,78		373,69		— 128,09
	Vis.....	0,63		0,68	0,67	Ad*. 500,68	Réd.	— 0,81		0,29
	Par trait.	0,50		0,54	0,50	Diff. — 1,10	O*..	0,00	II*..	500,68
	Val. corr.	410,51		784,20	912,29				S_1 = 372,88	

Dans ce tableau, les azimuts du plateau Az = 194°,0 et Az = 14°,0, qui figurent, là comme partout, en tête de la page, coïncident avec les moyennes finales de la page précédente (*Recherche de la ligne des centres*) : ils indiquent donc que la mesure est faite suivant la ligne des centres, c'est-à-dire dans l'azimut central.

L'index du chariot marquait 73,0 sur l'échelle millimétrique qui mesure les déplacements du chariot de l'épreuve : ce nombre n'a pas d'utilité dans le mode de mesure employé, par comparaison avec l'échelle auxiliaire; mais il serait indispensable si l'on voulait employer le mode de mesure décrit en premier lieu (p. 49), après avoir préalablement dressé la Table de correction de la vis du chariot.

Les trois nombres O... 409,38, S_1... 782,98, I... 911,12, placés respectivement sous la dénomination de *Lecture du microscope, Trait d'avant, Bord de l'astre, Trait d'arrière*, sont les moyennes des cinq pointés effectués sur le premier bord du Soleil S_1 (position directe) et sur les traits *zéro* et *un* de l'échelle de verre qui le comprennent. L'unité est le centième de tour de vis du microscope, c'est-à-dire $\frac{1}{500}$ de millimètre. Les corrections de la vis correspondant aux lectures sont placées au-dessous de chacun de ces nombres, ainsi que les corrections de l'effet de la parallaxe des traits.

La somme des trois nombres de la même colonne verticale fournit la valeur corrigée correspondant au titre de la colonne.

La quatrième colonne verticale, désignée sous le nom de *Distance des traits*, comprend la différence des deux valeurs corrigées extrêmes, c'est-à-dire la distance mesurée des traits O-I = 501,78 : au-dessous le nombre Ad.* 500,68 représente la valeur adoptée pour ces deux traits d'après l'étude antérieure de l'échelle sur verre, étude qui figure pour chaque machine en tête du fascicule correspondant.

L'unité employée est une unité arbitraire, mais qui est choisie à dessein voisine de l'unité que fournit le microscope : la différence, Diff. = — 1,10, montre, en effet, que l'évaluation numérique de la même longueur avec les deux unités est presque la même.

C'est cette différence de — 1,10 qu'on répartit proportionnellement sur les deux intervalles compris entre le bord S_1 et les deux traits O et I par le calcul indiqué dans

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

les colonnes suivantes. Ces intervalles, désignés par *Distance du bord de l'astre au trait d'avant — au trait d'arrière,* sont les différences des trois valeurs corrigées, comptées dans le sens des divisions croissantes du micromètre : aussi la distance au trait d'avant est-elle positive, + 373,69 ; la distance au trait d'arrière, négative, — 128,09 : c'est une règle générale adoptée dans tous les tableaux.

Le partage de la différence — 1,10, proportionnellement aux nombres + 373,69 et — 126,09, donne — 0,81 et 0,29, désignés par *Réd.*, c'est-à-dire réduction à l'unité de l'échelle sur verre. (Une table de réduction, donnée plus loin, permet d'effectuer aisément ce calcul.) Au-dessous de ces nombres sont placées les valeurs $O^* = 0,00$ et $I^* = 500,68$, qui représentent les distances, au trait *zéro* de l'échelle, du trait *zéro* et du trait I exprimés avec l'unité spéciale dont il a été parlé plus haut et à laquelle le calcul d'interpolation précédent a réduit les lectures.

Ces deux nombres O^* et I^* (marqués d'un astérisque, comme toutes les évaluations préalables relatives à l'échelle auxiliaire, dans la p. 14 du fascicule C) ont le signe +, parce que le sens des divisions croissantes de l'échelle auxiliaire est le même que celui des divisions croissantes du micromètre : c'est le cas qui se présente toujours lorsque l'épreuve est dans la position directe; dans le cas de la position inverse dont les mesures figurent dans la moitié inférieure du tableau, l'échelle est retournée bout pour bout et les nombres correspondants ont le signe —. C'est encore une règle générale adoptée dans tous les tableaux.

D'après ces conventions, la somme algébrique des trois nombres situés dans la même colonne verticale, *trait d'avant, trait d'arrière,* conduit exactement au même résultat désigné ici par $S_1 = 372,88$. Ce nombre représente évidemment la distance du bord de l'astre S_1 au trait *zéro* de l'échelle auxiliaire; l'unité étant celle qui définit la distance adoptée *Ad.** des traits de cette échelle.

Le signe de ce nombre est positif dans la position directe de l'épreuve : il serait négatif dans la position inverse.

Remarque. — Il n'est pas inutile d'indiquer les trois vérifications numériques successives qu'il faut toujours essayer pour éviter les erreurs matérielles de réduction : 1° la somme des distances absolues du bord de l'astre au trait d'avant et au trait d'arrière reproduit la distance observée des traits ; 2° la somme des valeurs absolues des corrections *Réd.* est égale à la différence *Diff.* ; 3° la somme algébrique des nombres des deux dernières colonne est la même.

Il est bon aussi de résumer les règles des signes.

La distance du bord de l'astre au *trait d'avant* est toujours positive; au *trait d'arrière,* négative.

La correction *Réd.* est toujours de même signe que la différence *Diff.* dans la colonne *trait d'avant;* de signe contraire, dans la colonne *trait d'arrière.*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Cette différence *Diff.*, différence entre la distance des traits adoptée *Ad.* et la distance observée *Obs.* est toujours prise dans le sens *Ad.* — *Obs.*

Ces règles sont générales, quelle que soit la position de l'épreuve; pour le signe des traits de l'échelle auxiliaire I, II, ..., V, VI, il n'en est pas de même. Dans la position directe de l'épreuve (moitié supérieure de chaque tableau), les nombres I, II, ..., V, VI ont le signe + dans la colonne *trait d'avant*, — dans la colonne *trait d'arrière* : c'est le contraire pour la position inverse.

La même série d'opérations effectuées sur les mesures des trois autres bords V_1, V_2, S_2 permet de définir la distance des quatre bords S_1, V_1, V_2, S_2 au trait *zéro* de l'échelle auxiliaire du verre. On recommence la série en donnant à l'épreuve la position inverse : on a ainsi deux séries indépendantes de distances qui se présentent avec des signes contraires et en ordre inverse, et se distinguent aisément du reste du calcul par le caractère typographique (chiffres gras); en voici le résumé :

S_1 =	372,88	S_2 =	− 18291,41
V_1 =	1278,31	V_2 =	− 1874,50
V_2 =	1875,33	V_1 =	— 1277,48
S^2 =	18291,45	S_1 =	— 372,68

Ces deux séries sont toujours concordantes, quoiqu'elles soient affectées de petites erreurs étudiées précédemment (p. 29) mais qui s'éliminent par leur combinaison.

Chaque série permet de calculer séparément les valeurs $\frac{1}{2}(S_1 + S_2)$, $\frac{1}{2}(V_1 + V_2)$, $\frac{1}{2}(S_2 - S_1)$, $\frac{1}{2}(V_2 - V_1)$, qui forment les deux premières colonnes verticales du *Résumé* placé au bas du tableau, et par suite les valeurs de la distance des centres et la somme des rayons représentées par Δ et Σ pour la première série des mesures et Δ' et Σ' pour la seconde :

Δ =	7755,35	Σ =	9257,80
Δ' =	7756,06	Σ' =	9257,88
Moy. =	7755,70	Moy. =	9257,84
Réd. C =	»	Réd. C =	»
Réd. 0 =	0,69	Réd. 0 =	0,83
Δ =	7756,39	Σ =	9258,67

On prend les moyennes des résultats de même nom des deux séries, afin d'éliminer les erreurs précitées (le calcul séparé de chaque série permettra plus tard la discussion de ces erreurs). On ajoute à ces moyennes la réduction à l'azimut central *Réd.* C dans le cas où l'on opère à $\pm 2^{\circ}$ de la ligne des centres, ainsi que la correction de température, *Réd.* 0, qui ramène les résultats à ce qu'ils seraient si les épreuves avaient été obtenues et mesurées à la température de 15° C.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On obtient les nombres définitifs Δ et Σ qui figurent en tête de la première page sous le nom de *Résumé des mesures :* la première ligne correspond aux mesures suivant la ligne des centres; les deux autres donnent les résultats analogues, mais déduits des mesures effectuées suivant les azimuts inclinés de ±± 2° sur cette ligne.

Il n'est peut-être pas d'usage, dans les publications analogues, de donner les calculs de réductions avec autant de détails : on préfère, en général, pour abréger, supprimer l'indication des corrections réduites en Tables et les interpolations faciles pour ne donner que les valeurs définitives.

Dans le cas présent, vu la nouveauté de la méthode, on n'a pas hésité à donner tous les détails : la suppression des corrections n'eût pas abrégé beaucoup les tableaux et les aurait privés de la clarté qu'ils présentent. Le lecteur peut, à vue simple, vérifier tous les calculs, sans être obligé de les reprendre par écrit.

Résumé définitif des mesures.

Au commencement de chaque série de mesures relatives à chaque épreuve obtenue à la station dont le nom est en lettres capitales en tête de la page, avec le numéro de l'épreuve (numéro d'ordre de la *Liste générale des épreuves de chaque station*, *voir* p. 10), on trouve, après diverses indications évidentes, le *Résumé des mesures*. Ce sont les trois valeurs de la distance des centres Δ et la somme des rayons Σ des deux astres (p. 28).

Voici la disposition de ce résumé :

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Exemple numérique.

RÉSUMÉ DES MESURES

(réduites à la température de 15° C.).

Mesures déduites des observations.	Distance des centres des deux astres Δ.	Somme des rayons Σ.	Rapport $\frac{\Delta}{\Sigma}$.
	d	d	
Suivant la ligne des centres.....	7756,39	9258,67	0,837743
A + 2 degrés..	7760,82	9260,28	0,838076
A — 2 degrés...	7762,36	9269,08	0,837447
Moyennes.....	7759,86	9262,68	0,837755
Rapport des moyennes.....			0,837756

Remarques diverses : Bord S_1 bon; V_1 très-bon; V_2 plus faible que V_1; S_2 très-faible et médiocre comme netteté.

Ce tableau n'a besoin d'aucune explication spéciale :

Les moyennes de Δ et de Σ sont exprimées avec l'unité arbitraire employée pour la mesure de l'échelle normale sur plaqué d'argent (p. 69).

Pour réduire ces valeurs en *secondes d'arc,* c'est-à-dire à l'unité usitée en Astronomie, il suffirait de les multiplier par la valeur angulaire de l'unité arbitraire employée, unité qui diffère peu de $\frac{1}{500}$ de millimètre.

Les observateurs ont effectué (suivant les indications du Programme, t. I, 2e Partie, p. 9) un certain nombre d'observations qui permettent de conclure ce facteur; mais la discussion de ces données a soulevé quelques difficultés dont la solution n'est pas encore définitive : on n'a donc pas opéré cette dernière réduction.

Heureusement elle n'est pas indispensable, car, d'après les données astronomiques, on peut calculer avec une très-grande

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

précision les demi-diamètres Rr du Soleil et de la planète pour l'époque du passage. A l'aide de ces deux nombres exprimés en secondes d'arc, on peut déduire des mesures effectuées l'élément caractéristique de chaque épreuve, à savoir la distance apparente des centres Δ : on a en effet, en désignant par D la distance exprimée en secondes d'arc,

$$\frac{\Delta}{\Sigma} = \frac{D}{R + r}, \quad \text{d'où} \quad D = \frac{\Delta}{\Sigma}(R + r).$$

On pourrait adopter, par exemple, pour les valeurs de R et r, celles qui figurent dans la *Connaissance des Temps pour* 1874, p. 389, données précédemment, p. 8 (1).

$$\left.\begin{array}{l} R = 16'\,15'',7, \\ r = \quad 32'',0, \end{array}\right\} \quad \text{d'où} \quad R + r = 16'47'',7 = 1007'',7.$$

Ce mode de détermination de Δ a l'inconvénient de ne pas tirer toutes les données des observations mêmes du passage ; mais il présente un grand avantage, celui d'atténuer l'influence d'un certain nombre d'erreurs de mesures communes aux valeurs Σ et Δ par l'emploi de leur quotient : on en verra la preuve dans la plupart des tableaux numériques qui donnent les trois systèmes de valeurs Σ et Δ et leur rapport ; on remarquera, en effet, que les divergences individuelles des valeurs correspondantes de Δ et Σ sont presque toujours de même sens, de sorte que leurs rapports présentent une concordance relative plus grande, quoique l'in-

(1) Théoriquement il faudrait leur faire subir une petite correction provenant de ce que ces valeurs se rapportent au centre de la Terre, tandis que l'observateur est, en réalité, placé à sa surface; mais cette correction est négligeable, à l'ordre d'approximation qu'on est en droit d'attendre de ces mesures.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

fluence des erreurs accidentelles doive, au contraire, aggraver l'erreur probable du quotient.

Il est bon de remarquer aussi qu'une petite erreur relative sur la somme $R + r$ n'aura sur le calcul de la parallaxe qu'une influence de même ordre : en effet, l'élément caractéristique de ce calcul est la différence de distance des centres des astres $\Delta_1 - \Delta_2$ à deux stations éloignées. Si donc on commet sur $R + r$ une certaine erreur relative, le facteur étant le même pour Δ_1 et Δ_2, la différence $\Delta_1 - \Delta_2$ sera affectée de la même erreur relative, mais non de l'erreur absolue de $R + r$. Ainsi une erreur de 1 seconde sur $R + r$ ne produirait sur la parallaxe du Soleil qu'une erreur relative de $\frac{1''}{1007''}$ ou $\frac{1}{1000}$. Cette question de l'erreur relative du résultat doit nécessairement être traitée d'une manière moins superficielle ; mais il était utile de montrer d'une manière générale l'influence des erreurs du facteur adopté.

L'importance de ce facteur $(R + r)$ étant néanmoins très-grande, on laisse aux astronomes le soin et la responsabilité de sa détermination, en se bornant à donner plus haut sa valeur approchée $1007'',7$.

Le rapport $\frac{\Delta}{\Sigma}$, qui figure dans la troisième colonne du *Résumé des mesures,* est donc le résultat définitif du travail relatif à chaque épreuve : on l'obtient de trois manières d'après les mesures effectuées dans les trois azimuts.

Pour résumer les trois résultats par un nombre unique et définitif, on pouvait se demander s'il fallait prendre le rapport de la moyenne des Δ à la moyenne des Σ ou la moyenne des trois rapports $\frac{\Delta}{\Sigma}$. Dans le cas présent, ces deux manières d'effectuer la moyenne conduisent à des résultats identiques, grâce à la fai-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

blesse des écarts individuels des six mesures; le calcul rend très-bien compte de cette particularité (¹).

Sous la rubrique *Remarques diverses*, on résume la valeur photographique de l'épreuve : ce sont les impressions mêmes des observateurs inscrites sur les carnets d'observation. Les qualifications des défauts sont quelquefois un peu sévères, car les épreuves mesurées sont en général très-bonnes, les épreuves médiocres n'étant pas susceptibles de mesures; mais on a préféré indiquer nettement les points faibles de l'épreuve, afin d'éclairer plus tard la discussion numérique. A. C.

(¹) *La moyenne des rapports d'une série de couples de nombres est égale au rapport de la moyenne de tous les numérateurs à la moyenne de tous les dénominateurs, quand la moyenne des carrés des écarts relatifs moyens est d'un ordre de grandeur négligeable devant l'unité.*

Soit une série de nombres très-voisins $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dont la moyenne est a : on peut poser $a_i = a(1+\alpha_i)$, α_i étant l'écart relatif du nombre a_i avec la moyenne, avec la condition $\Sigma\alpha_i = 0$; soit de même la série correspondante de nombres très-voisins $b_1, b_2, \ldots, b_n$, dont la moyenne est b : on aura aussi $b_i = b(1+\beta_i)$ avec $\Sigma\beta_i = 0$.

Le rapport des moyennes est, par définition, $\frac{a}{b}$.

D'autre part, la moyenne des rapports est égale à

$$\frac{1}{n}\sum_1^n \frac{a(1+\alpha_i)}{b(1+\beta_i)} = \frac{1}{n}\frac{a}{b}\sum_1^n (1+\alpha_i)(1-\beta_i+\beta_i^2+\ldots)$$

$$= \frac{a}{b}\left[1+\frac{1}{n}\sum_1^n(\alpha_i-\beta_i-\alpha_i\beta_i+\beta_i^2+\ldots)\right];$$

les deux premiers termes $\Sigma\alpha_i$ et $\Sigma\beta_i$ sont nuls par définition : si donc les carrés des écarts relatifs moyens $\frac{1}{n}\Sigma\alpha_i^2$ et $\frac{1}{n}\Sigma\beta_i^2$ sont négligeables devant l'unité, le terme $\Sigma\alpha_i\beta_i$ le sera évidemment aussi, et le rapport cherché se réduira à $\frac{a}{b}$. C. Q. F. D.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

IV. — Construction des diverses Tables de correction.

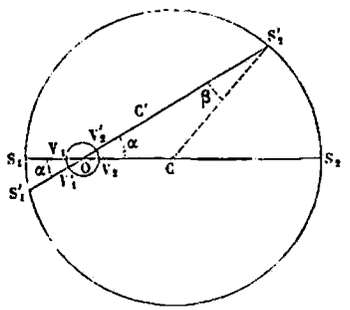
Les diverses corrections employées dans les calculs de réduction exposés plus haut nécessitent quelques explications qui font l'objet des Notes suivantes.

Réduction à l'azimut central.

Suivant la ligne des centres (*azimut central*), les mesures fournissent directement la distance des centres Δ, et la somme des rayons Σ

$$\Delta = \tfrac{1}{2}(V_1 + V_2) - \tfrac{1}{2}(S_1 + S_2),$$
$$\Sigma = \tfrac{1}{2}(V_2 - V_1) + \tfrac{1}{2}(S_2 - S_1),$$

en désignant, suivant la convention ordinaire, les distances des quatre bords à une origine fixe par les lettres S_1, V_1, V_2, S_2.



Lorsqu'on effectue les mêmes mesures suivant une direction faisant l'angle α avec la ligne des centres (*azimut latéral*), la substitution des données numériques dans les formules précédentes conduit à des expressions analogues, mais dont la signification est différente,

$$\Delta' = \tfrac{1}{2}(V'_1 + V'_2) - \tfrac{1}{2}(S'_1 + S'_2),$$
$$\Sigma' = \tfrac{1}{2}(V'_2 - V'_1) + \tfrac{1}{2}(S'_2 - S'_1).$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

A l'aide d'un terme de correction, on peut ramener cette mesure à ce qu'elle eût été, si elle avait été effectuée suivant la ligne des centres : cette correction est désignée sous le nom de *réduction à l'azimut central.* Elle n'est pas la même pour Δ' et pour Σ'.

1° *Correction de la distance* Δ'. — Dans le triangle rectangle OCC′, dont les sommets sont les centres des deux disques et le milieu de la corde $S'_1 S'_2$ suivant l'azimut α, le côté $OC = \Delta$ et le côté $OC' = \Delta'$. On a évidemment

$$\Delta' = \Delta \cos\alpha, \quad \text{d'où} \quad \Delta = \frac{\Delta'}{\cos\alpha}.$$

On a choisi

$$\alpha = \pm 2^\circ.$$

D'après les Tables, on calcule

$$\log\cos\alpha = \bar{1},9997354,$$

$$\frac{1}{\cos\alpha} = 1,00060954,$$

d'où

$$\Delta = \Delta' + 0,00060954\,\Delta'.$$

Ce facteur numérique a d'ailleurs été vérifié par le calcul direct de $\frac{1}{\cos\alpha}$ développé en série suivant les puissances croissantes de α.

La correction, réduite en Table, se calcule aisément.

Δ'.	Correction.
d	d
1000	0,610
2000	1,219
3000	1,829
4000	2,438
5000	3,048
6000	3,657
7000	4,267
8000	4,876
9000	5,486

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Exemple numérique. — Pour réduire le nombre $\Delta' = 7755^d, 33$ (fascicule C, p. 15), on écrira :

Correction pour	7000^d	$4,267^d$
»	700	0,427
»	50	0,030
»	5	0,003
»	0,5	0,001
		$4,728$

ou, en conservant deux chiffres $4^d, 73$: c'est le nombre désigné dans le Résumé au bas du tableau par *Réd. C* (Réduction à l'azimut central), et qu'il faut ajouter à Δ' pour en conclure Δ. La correction est toujours positive.

2° *Correction de la distance* Σ'. — Les mesures s'effectuent en pointant dans le champ du microscope, l'intersection du bord de l'astre avec le fil parallèle au déplacement du chariot : on relève donc les quatre points S'_1, V'_1, V'_2, S'_2.

La demi-différence $\frac{1}{2}(V'_2 - V'_1)$ est évidemment égale à $\frac{1}{2}(V_2 - V_1)$, comme égale au demi-diamètre du disque de la planète : la correction doit porter seulement sur le terme $\frac{1}{2}(S'_2 - S'_1)$, qui est la demi-corde $S'_1 S'_2$ ou $C'S'_2$. Dans le triangle rectangle $CC'S'_2$, on a

$$C'S'_2 = R\cos\beta,$$

en appelant R le rayon du disque solaire (égal d'ailleurs à CS_2 et β l'angle CS'_2O).

La correction cherchée y est évidemment la différence entre R et CS'_2,

$$y = R - R\cos\beta.$$

Mais on a, dans le triangle OCS'_2, la relation

$$\sin\beta = \frac{\Delta}{R}\sin\alpha, \quad \text{d'où} \quad \cos\beta = \sqrt{1 - \frac{\Delta^2}{R^2}\sin^2\alpha}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Développant en série le radical en se bornant aux deux premiers termes

$$R\cos\beta = R\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{R^2}\sin^2\alpha + \ldots\right),$$

d'où

$$y = \frac{\Delta^2}{2R}\sin^2\alpha;$$

la série est, en effet, très-convergente, car $\frac{\Delta}{R}$ est moindre que l'unité et, l'angle α étant égal à 2 degrés, le sinus carré de cet angle est une quantité très-petite.

La réduction de cette formule en Table exigeant deux entrées ne serait pas d'un usage facile. Mais on peut simplifier le calcul numérique en rapportant cette correction à celle déjà calculée de Δ'. En effet, appelons x cette correction de Δ', égale, comme on l'a vu précédemment, à

$$x = \left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)\Delta' = (1 - \cos\alpha)\frac{\Delta'}{\cos\alpha} = 2\Delta\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

ou approximativement

$$x = \frac{1}{2}\Delta\sin^2\alpha.$$

Substituant dans la valeur de y, il vient

$$y = \frac{\Delta}{R}x$$

La correction y de Δ' s'obtient donc en multipliant la correction x de Δ' par $\frac{\Delta}{R}$.

Le facteur $\frac{\Delta}{R}$ étant moindre que l'unité, la correction y est donc toujours moindre que x.

On peut encore réduire l'opération arithmétique, en profitant

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de ce que Δ diffère peu de R dans toutes les épreuves, en calculant non pas y, mais la différence entre x et y,

$$x - y = x - \frac{\Delta}{R}\,x = x\left(\frac{R-\Delta}{R}\right);$$

la règle à calcul suffit alors pour faire cette opération.

Exemple numérique. — Pour réduire le nombre $\Sigma = 9255^{d},28$ (fascicule C, p. 15), on calculera la différence $x - y$ des corrections de Δ' et Σ'; la valeur x a été calculée plus haut $x = 4^{d},728$. D'après le *Résumé*, on a pour $\frac{1}{2}(S_2 - S_1)$ qui n'est autre chose que R ou rayon du Soleil, les deux valeurs concordantes 8953,64 et 8955,11, moyenne 8954.

La valeur de Δ a été calculée : c'est 7755,33 + 4,73, ou en nombre rond 7760 (on voit qu'on n'a pas besoin d'avoir calculé exactement la correction x, toujours voisine de 4^{d} à 5^{d}), d'où

$$\frac{R-\Delta}{R} = \frac{8954 - 7760}{8954} = \frac{1194}{8954} = 0,134.$$

Ce quotient, multiplié par $x = 4,728$, donne

$$x - y = 0,632, \quad \text{d'où} \quad y = 4,096.$$

Le calcul direct de y aurait été plus long : mais il donne exactement le même résultat 4,096.

Table de correction de la vis du microscope.

Remarques préliminaires. — L'analyse des conditions dans lesquelles se font les mesures permet de montrer que l'influence des inégalités systématiques de la vis du microscope, supposées d'ailleurs comprises dans d'étroites limites, est, sinon complétement éliminée, du moins très-notablement atténuée.

Ce résultat est important, car on serait tenté de croire au premier abord, en voyant toutes les mesures se réduire à des pointés au microscope, que la précision de ces mesures repose sur l'étude

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

approfondie de la vis micrométrique qui sert à effectuer ces pointés, comme cela a lieu dans la plupart des instruments employés en Géodésie ou en Astronomie : on va voir qu'il n'en est rien.

Ces instruments, en effet, sont construits en vue de donner la plus grande précision possible dans des mesures susceptibles d'être utilisées individuellement ; car on n'est pas toujours maître de les répéter, de les varier pour éliminer les erreurs du micromètre, et toute observation isolée doit pouvoir conduire à un résultat absolu.

Le type de ces conditions se rencontre dans le micromètre d'une lunette méridienne non réversible sur ses tourillons ; le déplacement du fil par rapport à une origine fixe doit être connu avec la plus grande précision, et c'est par une étude minutieuse de la vis micrométrique et la construction d'une table de correction qu'on déduit le déplacement absolu du fil d'après la lecture du tambour.

Dans le cas des mesures actuelles, avec l'emploi d'une échelle auxiliaire (p. 53), les conditions sont tout autres : un pointé isolé n'a pas d'utilité propre, car les mesures sont essentiellement différentielles ; on les effectue par groupes indivisibles de trois dans le champ même du microscope : on est maître de les répéter autant de fois qu'il est utile de le faire, en divers points du champ, dans le sens direct et dans le sens inverse.

Mais les mesures actuelles ont surtout cela de particulier qu'elles servent exclusivement à calculer la distance des centres Δ et la somme des rayons Σ des deux astres, quantités qu'on déduit de la combinaison d'un nombre considérable de mesures. En effet, les expressions de Δ et Σ sont

$$\Delta = \tfrac{1}{2}(S_1 + S_2) - \tfrac{1}{2}(V_1 + V_2),$$
$$\Sigma = \tfrac{1}{2}(S_2 + S_1) + \tfrac{1}{2}(V_2 - V_1),$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

dans lesquelles figurent les distances des quatre bords S_1, S_2, V_1, V_2 à une même origine. Or chacune de ces distances se déduit de trois pointés (1), un sur le bord de l'astre, deux sur les traits de l'échelle auxiliaire ; d'après la règle uniforme adoptée, ces mesures sont effectuées successivement dans un sens et dans le sens inverse : cette opération double est répétée trois fois, une fois dans l'azimut central et deux fois dans les azimuts à $\pm 2^{\circ}$. Il en résulte que les valeurs de Δ et Σ sont la combinaison d'un nombre de mesures représentées par $4 \times 3 \times 2 \times 3 = 72$. Ces mesures, en nombre considérable, étant indépendantes et effectuées en des points du champ que le jeu des retournements et des déplacements par degrés égaux du chariot distribue d'une manière fortuite, sur toute la longueur utile de la vis du micromètre, on est en droit de considérer les erreurs continues et périodiques de la vis comme se compensant mutuellement d'une manière complète, et de prendre comme valeur moyenne du pas de la vis le pas correspondant du milieu du champ.

Cette conclusion rendrait à peu près inutile toute étude de la vis du micromètre, supposée même d'une perfection très-ordinaire, s'il n'y avait pas quelques réserves à faire sur l'*indépendance* des mesures et la *fortuité* de la disposition des pointés dans le champ.

En effet, les traits de l'échelle auxiliaire sont distants de un millimètre, c'est-à-dire d'une longueur double du pas de la vis du chariot : il en résulte que les déplacements du chariot, qui s'effectuent par intervalles égaux, amènent systématiquement les traits de repères successifs aux mêmes points du champ, deux combinaisons seulement étant possibles, suivant que la vis du chariot a tourné d'un nombre pair ou impair de révolutions. On

(1) Qui sont eux-mêmes la moyenne de cinq pointés indépendants.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ne peut donc pas compter sur la *fortuité* de la disposition des traits de repère, ce qui diminue un peu les chances de compensation que cette fortuité devrait apporter.

Une réserve analogue doit être faite pour les deux bords V_1, V_2 de la planète, qui se substituent l'un à l'autre dans le retournement de 180 degrés, quel que soit l'azimut, puisque le disque de la planète est centré sur l'axe du plateau.

En un mot, la distribution systématique, dans le champ du microscope, de quelques-uns des éléments à relever réduit les chances de compensation qui semblaient devoir résulter de la multiplicité considérable des mesures et de la variété des circonstances dans lesquelles on les effectue. Ces chances sont probablement encore très-notables, mais il est évidemment prudent de ne pas se fier à l'élimination rigoureuse des erreurs et de dresser la Table des corrections de la vis du microscope.

L'analyse précédente a au moins comme résultat de montrer que, si cette Table de correction n'est qu'approchée, les mesures qu'on en déduira n'en posséderont pas moins une très-grande précision : c'est justement la conclusion énoncée au début de ces remarques.

Mode de construction de la Table de correction de la vis du microscope. — On trouvera au début de chaque fascicule les séries d'observations qui composent l'étude de la vis du microscope de chaque machine. Ces observations ont été effectuées sur des réseaux de traits tracés sur le plaqué d'argent qui sert à obtenir ces épreuves daguerriennes. Ces réseaux (1) se composent de six traits distants de $\frac{1}{10}$ de millimètre : chaque trait est double et formé de deux

(1) Ces réseaux ont été obtenus par M. Cornu avec une machine à diviser de Bianchi,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

traits distants de $\frac{5}{100}$ de millimètre ; c'est l'intervalle qui, pour le grossissement du microscope, a paru le plus favorable à la précision des pointés : avec l'éclairage normal employé, les traits apparaissent en noir sur fond lumineux, le fil du réticule amené dans l'intervalle de l'image des deux traits apparaît comme un troisième trait qu'on règle par la condition d'équidistance, c'est-à-dire par l'égalité des deux filets lumineux qu'il laisse entre les deux autres.

La précision est telle que l'écart moyen des pointés dépasse rarement 0,2 parties du tambour ou $\frac{1}{2500}$ de millimètre.

L'observateur choisit dans ce réseau les intervalles qui lui conviennent pour étudier les pas ou fractions de pas de la vis du micromètre. On se rappelle (p. 41) que le grossissement par l'objectif du microscope est de deux fois et demie et que le pas de la vis est de $\frac{1}{2}$ millimètre ; par conséquent le pas entier correspond à l'intervalle de $\frac{1}{5}$, le demi-pas à $\frac{1}{10}$ de millimètre.

Pour étudier les différentes parties de la vis, on mesure successivement le même intervalle en pointant toujours sur les mêmes traits : les différences d'évaluation de cet intervalle permettent de conclure la loi des inégalités de la vis qui sert à effectuer les pointés.

Il résulte de la discussion des mesures que la partie utile de ces vis est très-régulière : on n'a pas cru toutefois, malgré ce que

---

appartenant au cabinet de Physique de l'École Polytechnique. Les plaques, polies à dessein comme pour les épreuves daguerriennes, ont été divisées avec un burin d'acier, puis polies à nouveau de la même manière. Ce second polissage a pour effet d'*ébarber* les traits et de les rendre plus apparents. C'est avec la même machine que M. Cornu a tracé sur verre les divisions des échelles auxiliaires décrites plus haut.

Chaque machine est pourvue d'une semblable lame de plaqué d'argent reposant sur trois petites cales fixes, réglées parallèlement au plan moyen de la plaque : cette lame porte différents réseaux de traits à $\frac{1}{10}$ de millimètre et une échelle à $\frac{1}{2}$ millimètre à traits doubles, destinée primitivement à l'étude de la vis du chariot.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

l'analyse précédente offre de rassurant, négliger les corrections qu'entraînent leurs petites imperfections dans le cas où les corrections ont un caractère de certitude suffisant. C'est ce qui est arrivé dans l'étude de l'inégalité des pas successifs, auxquels on a reconnu une variation continue non douteuse (microscopes des machines n°s 2, 3 et 4). Mais, dans l'étude des inégalités périodiques, l'existence d'une correction appréciable n'a pas été suffisamment démontrée : du reste l'influence des erreurs périodiques est celle qui a le plus de chance d'être éliminée par la combinaison de mesures multipliées. On s'est, en conséquence, borné à construire les Tables de correction des pas entiers de la vis suivant une méthode qu'un exemple numérique rendra très-facile à comprendre.

Exemple numérique.

Nous prendrons comme exemple l'étude des pas de vis entiers du microscope de la machine n° 2 et la construction de la Table de correction.

La distance de deux traits doubles espacés de $0^{mm},2$ a été mesurée successivement à partir des origines 0^t, 1^t, ..., 14^t, 15^t. Comme cette distance correspond à fort peu près à un tour ou 100 divisions du tambour du micromètre, il en résulte que par ce mode de mesures la vis a été étudiée de pas en pas.

Le détail des observations est donné page 4 du fascicule C (exécutées par M. Angot les 13 et 14 décembre 1875); en voici le résumé, c'est-à-dire les diverses évaluations de l'intervalle adopté :

	0^t-1^t	1^t-2^t	2^t-3^t	3^t-4^t	4^t-5^t	5^t-6^t	6^t-7^t	7^t-8^t
	d	d	d	d	d	d	d	d
Série du 13 déc..	100,02	100,04	100,04	100,06	100,06	100,06	100,06	100,08
Série du 14 déc..	100,06	100,06	100,06	100,08	100,10	100,08	100,08	100,08
Moyenne....	100,04	100,05	100,05	100,07	100,08	100,07	100,08	100,09

	8^t-9^t	9^t-10^t	10^t-11^t	11^t-12^t	12^t-13^t	13^t-14^t	14^t-15^t
	d	d	d	d	d	d	d
Série du 13 déc..	100,10	100,10	100,14	100,14	100,14	100,12	100,16
Série du 14 déc..	100,12	100,12	100,16	100,16	100,22	100,08	100,18
Moyenne....	100,11	100,11	100,15	100,15	100,18	100,10	100,17

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Soient f_n la correction à ajouter à la lecture du $n^{\text{ième}}$ tour du tambour; h la valeur moyenne d'un tour du tambour qu'il s'agit de déterminer; L la longueur constante qui a été mesurée et qui correspond sensiblement à un tour; δ_{n+1} l'appoint très-petit (exprimé en centièmes de tour du tambour) qui exprime la différence entre L et la valeur d'un tour; on aura pour la mesure de L effectuée du $n^{\text{ième}}$ au $(n+1)^{\text{ième}}$ tour,

$$L = (n+1)h - nh + \frac{h\delta_{n+1}}{100} + f_{n+1} - f_n,$$

ou

$$f_{n+1} = f_n + L - h - \frac{h\delta_{n+1}}{100},$$

ou encore

$$\frac{f_{n+1}}{\left(\frac{h}{100}\right)} = \frac{f_n}{\left(\frac{h}{100}\right)} + \left(\frac{L}{h} - 1\right)100 - \delta_{n+1};$$

si l'on exprime la correction f_n en centièmes de tour et qu'on l'appelle φ_n, il viendra

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \left(\frac{L}{h} - 1\right)100 - \delta_{n+1}.$$

La quantité $100\,\frac{L}{h}$ est une constante c pour toutes les mesures, et qu'il s'agit de déterminer d'après leur ensemble; substituant les valeurs numériques du tableau ci-dessus à la place de $100 + \delta_{n+1}$, il vient, pour $n = 0, 1, 2$, etc., la série d'équations

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \varphi_0 + c - 0,04 & \varphi_{9} &= \varphi_{8} + c - 0,09\\
\varphi_2 &= \varphi_1 + c - 0,05 & \varphi_{10} &= \varphi_{9} + c - 0,11\\
\varphi_3 &= \varphi_2 + c - 0,05 & \varphi_{11} &= \varphi_{10} + c - 0,15\\
\varphi_4 &= \varphi_3 + c - 0,07 & \varphi_{12} &= \varphi_{11} + c - 0,15\\
\varphi_5 &= \varphi_4 + c - 0,08 & \varphi_{13} &= \varphi_{12} + c - 0,18\\
\varphi_6 &= \varphi_5 + c - 0,07 & \varphi_{14} &= \varphi_{13} + c - 0,10\\
\varphi_7 &= \varphi_6 + c - 0,07 & \varphi_{15} &= \varphi_{14} + c - 0,47\\
\varphi_8 &= \varphi_7 + c - 0,08
\end{aligned}$$

La quantité φ_0 peut être regardée comme une constante arbitraire H, qu'on choisira plus tard de manière à rendre les corrections positives.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Additionnant successivement chaque valeur avec la somme des précédentes :

$$\varphi_1 = H + c - 0,01 \qquad \varphi_9 = H + 9c - 0,60$$
$$\varphi_2 = H + 2c - 0,09 \qquad \varphi_{10} = H + 10c - 0,71$$
$$\varphi_3 = H + 3c - 0,14 \qquad \varphi_{11} = H + 11c - 0,86$$
$$\varphi_4 = H + 4c - 0,21 \qquad \varphi_{12} = H + 12c - 1,01$$
$$\varphi_5 = H + 5c - 0,29 \qquad \varphi_{13} = H + 13c - 1,19$$
$$\varphi_6 = H + 6c - 0,36 \qquad \varphi_{14} = H + 14c - 1,29$$
$$\varphi_7 = H + 7c - 0,43 \qquad \varphi_{15} = H + 15c - 1,76$$
$$\varphi_8 = H + 8c - 0,51$$

On a évidemment intérêt à ce que les corrections φ soient aussi petites que possible, de façon que la valeur du pas moyen $h = \frac{L}{c}$ se rapproche autant que possible de la longueur moyenne du pas de la vis. On déterminera en conséquence cette valeur de h par la condition que c rende minimum la somme des carrés des différences

$$(c - \delta_1)^2 + (2c - \delta_2)^2 + \ldots + (nc - \delta_n)^2.$$

Égalant à zéro la dérivée de cette somme par rapport à c, il vient

$$(c - \delta_1) + 2(2c - \delta_2) + \ldots + n(nc - \delta_n) = 0,$$
$$c(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = \delta_1 + 2\delta_2 + \ldots + n\delta_n,$$

d'où

$$c = \frac{\delta_1 + 2\delta_2 + 3\delta_3 + \ldots + n\delta_n}{\frac{n.n+1.2n+1}{6}}.$$

Le calcul numérique donne

$$c = \frac{106,19}{1240} = 0,085637.$$

On le vérifie en remarquant que le numérateur de c peut prendre la forme

$$(n+1)\Sigma\delta - [n\delta_1 + (n-1)\delta_2 + \ldots + \delta_n].$$

On peut dès lors calculer les termes $c - \delta_1$, $2c - \delta_2$, $nc - \delta_n$, c'est-à-dire les valeurs

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de φ_1, φ_2, φ_n à la constante H près : on trouve

	Diff.		Diff.
$\varphi_1 = H + 0,05$		$\varphi_9 = H + 0,17$	
	0,03		— 0,02
$\varphi_2 = H + 0,08$		$\varphi_{10} = H + 0,15$	
	0,04		— 0,07
$\varphi_3 = H + 0,12$		$\varphi_{11} = H + 0,08$	
	0,01		— 0,06
$\varphi_4 = H + 0,13$		$\varphi_{12} = H + 0,02$	
	0,01		— 0,10
$\varphi_5 = H + 0,14$		$\varphi_{13} = H - 0,08$	
	0,01		— 0,01
$\varphi_6 = H + 0,15$		$\varphi_{14} = H - 0,09$	
	0,02		— 0,39
$\varphi_7 = H + 0,17$		$\varphi_{15} = H - 0,48$	
	0,01		
$\varphi_8 = H + 0,18$			
	— 0,01		

On vérifie ce calcul numérique en utilisant l'équation de condition

$$\Sigma n(nc - \delta_n) = 0.$$

On choisit la constante H de façon à rendre tous les termes φ positifs : il suffit de prendre H = 0,50. On obtient ainsi la Table cherchée et qui figure en tête du fascicule C, p. 3, tableau I.

Comme vérification, on peut corriger les pointés individuels des deux séries des 13 et 14 décembre 1875, qui servent de point de départ à ce calcul (p. C. 4); la moyenne des nombres correspondants des deux séries donne, quelle que soit l'origine de la mesure, le même nombre $100^d,09$.

Remarque. — Comme on le voit, on n'a eu recours à aucun développement algébrique ou trigonométrique pour représenter le résultat de l'observation ; la Table de correction n'est que la transformation pure et simple de ces résultats et la détermination de la longueur moyenne du pas de la vis qui satisfait le mieux aux données numériques.

Il reste à dire un mot sur l'interpolation des nombres de cette Table ainsi obtenue : comme elle est la traduction fidèle des résultats observés, elle est essentiellement discontinue, de sorte qu'à un point de vue rigoureux l'opération d'interpolation n'a pas de sens ; mais il est évident que la loi des erreurs du genre de celles que l'on considère est continue : l'interpolation est parfaitement légitime. En fait, elle offre une petite difficulté théorique, parce que les différences, tout en suivant une loi à peu près continue, sont entachées des erreurs d'observation, ce qui les rend un peu irrégulières, ainsi qu'on peut le voir dans le précédent tableau et dont voici la liste exprimée en centièmes de division :

Machine n° 2.

3, 4, 1, 1, 1, 2, 1, — 1, — 2, — 7, — 6, — 10, — 1, — 39.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Heureusement ces différences sont si petites que la question d'interpolation perd toute son importance et qu'il serait à peu près indifférent de l'exécuter ou de la rejeter.

Dans la construction des Tables des microscopes des machines n° 3 et n° 4, les différences, tout en étant du même ordre, n'étaient pas aussi régulières ; mais il a suffi de modifier de quelques unités la répartition de ces différences pour rétablir une continuité complète et rendre l'interpolation possible.

Voici la série des différences réelles $\varphi_1 - \varphi_0$, $\varphi_2 - \varphi_0$ et corrigées exprimées en centièmes de division :

Machine n° 3.

Diff. observées.	5,	—5,	4,	2,	0,	4,	12,	— 1,	3,	1,	— 17,	— 17,	— 7,	— 3,	— 10,
Diff. corrigées.	1,	1,	2,	2,	2,	3,	5,	2,	— 1,	— 3,	— 10,	— 17,	— 7,	— 4,	— 9.

Machine n° 4.

Diff. observées.	13,	4,	5,	4,	3,	3,	0,	1,	— 12,	— 1,	— 6,	— 14,	— 15,	— 24,	— 23,
Diff. corrigées.	13,	4,	5,	4,	3,	2,	1,	— 1,	— 3,	— 5,	— 7,	— 10,	— 16,	— 25,	— 26.

Si l'on songe que l'erreur moyenne d'un pointé est d'environ $0^d,20$, on verra que les rectifications apportées aux différences sont bien inférieures aux erreurs probables auxquelles on doit s'attendre.

Ce mode de calcul a été appliqué en outre plusieurs fois à la construction des Tables de corrections de la vis du chariot des machines n° 1 et n° 2 : on trouvera à ce sujet quelques détails dans le fascicule B. C'est à la suite de ces études et de la constatation de changements brusques dans la Table de correction de ces vis qu'on a adopté la méthode de l'échelle auxiliaire.

Réduction des mesures à ce qu'elles eussent été si la température avait été de 15 degrés C. au moment de leur obtention et pendant leur mesure.

Cette correction, quoique faible, est plus importante qu'elle ne le paraît au premier abord : dans la discussion des résultats, les différences de température qui auront certainement existé au moment des diverses mesures introduiraient des erreurs apparentes dont on trouverait difficilement la source : leur amplitude pour-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

rait, par l'effet de la variation de température de l'été à l'hiver, atteindre 1 $\frac{1}{2}$ à 2 divisions.

Remarque préliminaire. — *Les épreuves daguerriennes obtenues, pendant le passage de Vénus, avec la même lunette photographique (le miroir étant supposé constamment plan), quoique à des températures différentes, sont comparables, lorsqu'on les ramène à la même température pour les observer.*

Cette propriété des épreuves daguerriennes provient :

1° De ce que le métal sur lequel elles sont formées (cuivre rouge argenté) possède sensiblement le même coefficient de dilatation que le tube de laiton qui forme le corps de la lunette ;

2° De ce que la variation du foyer de l'objectif avec la température, relativement au tube de la lunette qui varie aussi par la chaleur, est négligeable.

Si ces conditions sont remplies, il est évident que la propriété de ces épreuves daguerriennes est exacte ; en effet, en vertu de la seconde remarque, la plaque, mise soigneusement au point à une température quelconque, y sera toujours, quelle que soit la température. En vertu de la première remarque, la dilatation de la plaque daguerrienne étant proportionnelle à la dilatation du tube, lorsqu'on ramènera la température de toutes les épreuves à être la même, θ, la grandeur de l'image solaire, deviendra rigoureusement la même, car elle sera égale à celle qui eût été obtenue à la température θ, le tube de la lunette étant aussi à cette température.

Ainsi il n'est pas nécessaire de connaître la température à laquelle chaque épreuve a été obtenue, dans le cas où l'on n'a besoin que de comparer entre elles les épreuves d'une même station.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Analyse des effets de la température lors de la mesure des épreuves, d'après la méthode employée par la Commission des mesures.

L'opération se fait (p. 55) en comparant l'épreuve aux traits d'une échelle de verre qui a été préalablement comparée à une échelle tracée sur le même plaqué d'argent que les épreuves daguerriennes. La dilatation de ces deux espèces d'échelle n'étant pas la même, leur variation de longueur par la chaleur entraîne des différences, fonction de la température, qui nécessitent des corrections faciles d'ailleurs à établir.

Nous désignerons par

θ_0 la température à laquelle a été faite la *mesure de l'échelle normale sur plaqué d'argent* (p. 69) ;

θ_1 la température à laquelle a été faite la *comparaison* de l'*échelle de verre* avec l'*échelle normale ;*

θ_2 la température à laquelle a été faite la *comparaison* de l'*échelle de verre* avec l'épreuve ;

α le coefficient de dilatation du cuivre argenté de l'épreuve et de l'*échelle normale ;*

ν le coefficient de dilatation du verre (verre de Saint-Gobain).

1° *Mesure des divisions de l'échelle normale.*

Considérons d'abord le cas idéal où l'échelle normale sur plaqué aurait été mesurée à la température de zéro, avec un microscope muni d'une vis micrométrique aussi à zéro. La distance du trait n° O au trait d'ordre i de l'échelle normale, à la tempéra-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ture de zéro, étant désignée par D'_0, sera exprimée par un nombre N_0 de partiesdu micromètre, prises comme unités auxiliaires, unités dont la longueur sera désignée par u_0. La vraie longueur D'_0 sera donc exprimée par

$$D'_0 = N_0 u_0.$$

Si la température s'élève à θ degrés, la longueur D'_0 devient $D'_0(1 + c\theta)$, c étant le coefficient de dilatation du plaqué d'argent; l'unité u_0 devient u_θ et, par suite, l'expression numérique N_0 devient N_θ, satisfaisant à l'équation

$$D'_0(1 + c\theta) = D'_0 = N_\theta u_\theta.$$

On ne peut guère calculer la variation de longueur de l'unité auxiliaire u, parce qu'elle comprend non-seulement la dilatation de la vis d'acier du micromètre, mais la dilatation des pièces optiques et mécaniques du microscope et, par conséquent, son grossissement.

Mais ce qu'il importe de retenir, c'est que l'expression de D'_0 doit avoir la même valeur dans les deux cas, d'où la relation

$$D'_0 = N_0 u_0 = \frac{N_\theta u_\theta}{1 + c\theta}.$$

Cette formule donne la modification qu'il faut faire subir à l'expression numérique N dans le cas idéal où, le microscope restant à une température fixe θ, on mesurerait l'échelle à des températures variables; en effet, supposons qu'on observe successivement l'échelle à la température θ et à la température θ', l'unité micrométrique restant la même u_0, on aurait toujours

$$N_0 u_0 = \frac{N_\theta u_\theta}{1 + c\theta} = \frac{N_{\theta'} u_{\theta'}}{1 + c\theta'}, \quad \text{d'où} \quad \frac{N_{\theta'}}{N_\theta} = \frac{1 + c\theta'}{1 + c\theta} = 1 + c(\theta' - \theta).$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Cette *formule*, qu'on peut écrire

$$N_{\theta'} = N_0[1 + c(\theta' - 0)],$$

permet de conclure la valeur numérique $N_{\theta''}$ *de l'intervalle de deux divisions quelconques à la température* θ'', *d'après une mesure* $N_{\theta'}$ *faite à la température* θ', *l'unité restant la même dans les deux cas, c'est-à-dire celle que donnerait le microscope maintenu à la température* θ.

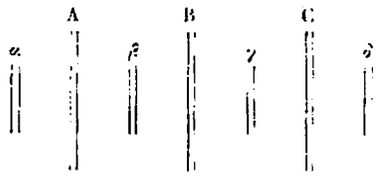
Nous désignerons dans la suite par θ_0 cette température θ à laquelle on suppose maintenu le micromètre; c'est celle qui existait pendant la mesure des divisions de l'échelle normale : il en résulte que l'intervalle mesuré alors et valant N_{0_0} dans ces circonstances serait exprimé, lorsque l'échelle sera portée à la température θ_1, par la formule

$$N_{\theta_1} = N_{\theta_0}[1 + c(\theta_1 - \theta_0)],$$

si l'on pouvait mesurer l'intervalle donné avec le micromètre à la température de θ_0, quoique la plaque fût à la température θ_1.

2° *Comparaison de l'échelle de verre avec l'échelle normale.*

Elle a lieu à la température θ_1 : elle consiste à fixer successivement la position de chacun de ses traits A, B, C, relativement aux traits α, β, γ de l'échelle normale sur plaque, par une série de mesures comprenant l'évaluation des distances αA, Aβ, puis βB et Bγ, ...



L'unité avec laquelle on effectue ces mesures αA, Aβ est arbi-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

traire, car elle ne sert qu'à donner des rapports de longueurs,

$$\frac{\alpha A}{A\beta} \quad \text{ou mieux} \quad \frac{\alpha A}{\alpha\beta}.$$

Comme on connaît d'avance (par l'étude faite à la température θ_0 de l'échelle normale) les distances des traits $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, . . ., on en conclut les distances αA, βB, ...

Mais la mesure est effectuée à la température θ_1, au lieu de l'être à la température θ_0; il en résulte que l'expression numérique de chacun de ces intervalles doit être modifiée par un facteur qui est le même, quel que soit l'intervalle, facteur donné par la formule précédente

$$N_{\theta_1} = N_{\theta_0}[1 + c(\theta_1 - \theta_0)],$$

l'unité étant toujours la partie du micromètre maintenue idéalement à la température θ_0.

On pourra donc exprimer les distances mutuelles des traits de l'échelle de verre A, B, C, telles qu'elles sont à la température θ_1, en fonction de l'unité idéale à θ_0, en multipliant par

$$1 + c(\theta_1 - \theta_0)$$

les mesures faites d'après les données numériques provenant de l'échelle normale.

En résumé, on fera tous les calculs de rapports, addition et soustraction, sans se préoccuper de la différence de température θ_1 de la comparaison actuelle et de l'étude préalable de l'échelle normale θ_0, et l'on multipliera les distances calculées par $[1 + c(\theta_1 - \theta_0)]$; l'unité sera toujours celle que fournirait le microscope si l'on pouvait faire l'observation de l'échelle de verre à θ_1, le microscope étant maintenu à θ_0.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

3° *Comparaison de l'échelle sur verre avec l'épreuve daguerrienne.*

Elle est faite à la température θ_2. L'échelle de verre a varié de longueur, car elle a été mesurée à la température θ_1 : l'expression numérique de la distance de ces traits doit donc être multipliée par

$$1 + \varepsilon(\theta_2 - \theta_1),$$

pour tenir compte de sa dilatation et l'unité sera la même unité fixe du microscope à θ_0.

Comme le coefficient de dilatation ε n'est plus le même et que la température θ_0 ne figure plus, il est bon de montrer directement l'exactitude de cette correction.

n_{θ_1} étant l'évaluation d'un certain intervalle d à la température θ_1 avec l'unité désignée par u_{θ_1}, on a, par définition,

$$d = n_{\theta_1} u_{\theta_1}.$$

L'intervalle d des deux traits sur verre dont le coefficient de dilatation est ε devient $d[1 + \varepsilon(\theta_2 - \theta_1)]$, en passant de la température θ_1 à θ_2, d'où l'on calcule l'évaluation n_{θ_2} de cet intervalle en fonction de la même unité

$$d[1 + \varepsilon(\theta_2 - \theta_1)] = n_{\theta_2} u_{\theta_1}.$$

Divisant membre à membre, il vient

$$n_{\theta_2} = n_{\theta_1}[1 + \varepsilon(\theta_2 - \theta_1)],$$

ce qui est bien l'expression annoncée.

Ainsi toutes les mesures de comparaison avec l'échelle de verre devront être multipliées par le facteur $1 + \varepsilon(\theta_2 - \theta_1)$ pour représenter la *vraie grandeur* des intervalles à la température θ_2, en fonction de l'unité désignée par u_{θ_1}.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

4° Calcul définitif pour rapporter toutes les mesures à la même température. Correction définitive.

Calculons la vraie grandeur des intervalles mesurés sur l'épreuve lorsque l'épreuve sera à la température Θ (température fixe à laquelle on rapportera les mesures de toutes ces épreuves), l'unité étant toujours l'unité fixe u_{θ_0}.

L'épreuve daguerrienne ayant pour coefficient de dilatation c, il suffira d'appliquer la même règle, c'est-à-dire de multiplier le résultat des mesures faites à la température θ_2 par le facteur

$$1 + c(\Theta - \theta_2).$$

Faisant la récapitulation de tous les facteurs :

$1 + c(\theta_1 - \theta_0)$ . . .	θ_0 température de la mesure micrométrique de l'échelle normale; θ_1 température de la comparaison de l'échelle de verre avec l'échelle normale;
$1 + c'(\theta_2 - \theta_1)$ . . .	θ_2 température de la comparaison de l'épreuve avec l'échelle sur verre;
$1 + c(\Theta - \theta_2)$ . .	Θ température normale.

Le produit de ces facteurs représente le facteur de *correction définitive* des résultats obtenus sans avoir égard à la température.

Il se réduit à

$$[1 + c(\theta_1 - \theta_0) + c'(\theta_2 - \theta_1) + c(\Theta - \theta_1)].$$

Pour une échelle normale donnée et une même échelle de verre, les températures θ_0, θ_1, Θ sont des constantes déduites des études préliminaires : il n'y a que θ_2 qui soit variable d'une mesure à l'autre; on peut donc grouper les termes ainsi :

$$1 + [c(\theta_1 - \theta_0 + \Theta - \theta_1) - c'\theta_2] = (c - c')\theta_2.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Posant

$$\delta_i = c(\theta_1 - \theta_0 + \Theta) = \text{const.},$$

i étant le numéro d'ordre de l'échelle sur verre ou signe distinctif, il vient

$$1 + \delta_i - (c - \nu)\theta_2.$$

Pour simplifier encore, posons

$$\delta_i = \theta_i(c - \nu), \quad \text{d'où} \quad \theta_i = \frac{c(\theta_1 - \theta_0 + \Theta) - \nu\theta_1}{c - \nu},$$

θ_i représentant une température constante, paramètre caractéristique de l'échelle de verre adoptée, et le *facteur définitif* prendra la forme très-simple

$$1 + (c - \nu)(\theta_i - \theta_2).$$

Réduction en nombres.

1° Calcul de θ_i.

$$\theta_i = \theta_1 + \frac{c}{c - \nu}(\Theta - \theta_0).$$

Le facteur $(\Theta - \theta_0)\frac{c}{c - \nu}$ est le même pour toutes les échelles de verre, car l'étude de l'échelle sur plaqué a été faite, une fois pour toutes, à la température θ_0.

On adoptera $\Theta = 15°$ comme étant la température moyenne des observations; ce qui réduira les corrections à être très-petites.

La valeur de θ_0 se calculera d'après la moyenne des observations de température faites pendant l'étude micrométrique (effectuée par M. Cornu avec la machine n° 1 (*voir* le fascicule B) de l'échelle normale :

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Le 17 décembre 1875..	$\theta_0 =$	$\left\{\begin{matrix} 9,00 \\ 9,40 \end{matrix}\right.$	en mesurant l'échelle de 10 millimètres.	
Le 18 »	$\theta_0 =$	$\left\{\begin{matrix} 9,30 \\ 10,00 \end{matrix}\right.$	»	sur verre A.
Le 20 »	$\theta_0 =$	$\left\{\begin{matrix} 8,80 \\ 9,00 \end{matrix}\right.$	»	sur verre B.
Le 20 »	$\theta_0 =$	$\left\{\begin{matrix} 9,80 \\ 9,90 \end{matrix}\right.$	»	de 10 millimètres.
Le 21 »	$\theta_0 =$	$\left\{\begin{matrix} 10,10 \\ 10,40 \end{matrix}\right.$	»	sur verre B.
Moyenne.....	...	9,57		
Correction du thermomètre.		−0,20		
		9,37		

$\theta_0 = 9°,37$, d'où $\Theta - \theta_0 = 15° - 9°,37 = 5°,63$.

2° Calcul des coefficients de dilatation pour 15 degrés.

D'après M. Fizeau, le coefficient de dilatation du cuivre rouge est

0,00001921

pour une température moyenne de 40 degrés, avec une variation de 0,0000000205 par degrés.

Donc, pour 15 degrés, le coefficient du cuivre est. 0,00001627

Pour l'argent,

0,00001884,

avec 0,00000001147 par 1 degré.

Donc le coefficient de l'argent est..... 0,00001884

Différence..... 257

Comme le plaqué d'argent est au $\frac{1}{10}$, on peut ajouter le $\frac{1}{10}$ de la différence des deux dilatations à la dilatation du cuivre, soit 0,00000026, d'où

$c = 0,00001653$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Pour le verre on adoptera le nombre de Laplace et Lavoisier entre zéro et 100 degrés,

$$\nu = 0{,}00000891;$$

donc

$$c - \nu = 0{,}00000762,$$

d'où

$$\frac{c}{c-\nu} = \frac{1653}{762} = 2{,}1693.$$

Le produit $\frac{c}{c-\nu}\theta_0$ est égal à

$$2{,}1693 \times 5^{\circ},63 = 12^{\circ},213;$$

le facteur définitif devient donc

$$1 + 0{,}00000762\,(\theta_1 - \theta_2), \quad \text{avec} \quad \theta_1 = \theta_i + 12^{\circ},213,$$

θ_i étant la caractéristique de l'échelle de verre;
θ_1 la température moyenne de sa comparaison avec l'échelle normale sur plaqué;
θ_2 la température moyenne de la mesure de l'épreuve.

3° Réduction en Table.

Le terme 0,00000762 $(\theta_1 - \theta_2)$ se réduit en Table : on met la formule sous la forme

$$H(1 + 0{,}00000762\,\theta),$$

et l'on construit une Table à double entrée dans laquelle θ varie par degré de 1 à 20 degrés et H (nombre à corriger) de 1000^d à 9000^d (d représentant l'unité, partie du micromètre).

A l'intersection des deux directions on trouve le produit $H\theta \times 0{,}00000762$.

Cette Table est donnée à la fin de cette Note.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

4° Calcul numérique des constantes θ_i.

Les échelles de verre employées sont au nombre de trois, désignées par les lettres A, B, C (à sept traits).

Il suffit de calculer la température moyenne de comparaison θ_1 de ces échelles avec l'échelle normale pour en déduire

$$\theta_A\,\theta_B\,\theta_C, \quad \theta_i = \theta_1 + 12°,213.$$

Échelle A. (Observ. de M. Baille).	Échelle B. (Observ. de M. Angot).	Échelle B. (Observ. de M. Gariel).	Échelle C. (Observ. de M. Mercadier).
$\theta_1 = 11°,75$	$\theta_1 = 7°,40$	$\theta_1 = 20°,12$	$\theta_1 = 12°,75$
$12,213$	$12,213$	$12,213$	$12,213$
$\theta_A = 23,963$	$\theta_B = 19,613$	$\theta_B = 32,33$	$\theta_C = 24,963$

On emploiera :

$\theta_A = 24,0$	$\theta_B = 19,6$	$\theta_B = 32,3$	$\theta_C = 25,0$

Détail du calcul du θ_1.

Échelle A (M. Baille).

1re série...	4 février 1876.....	9°,4
	4 »	9,6
2e série....	22 février.....	13,75
	23 »	13,75
3e série....	20 avril 1876	11,8
	21 »	12,2
	Somme.....	70,50
	Moyenne.. $\theta_1 =$	11,75

Échelle B (M. Angot).

20 janvier 1876.....	5°,5
21 »	5,5
9 février.....	8,4
11 »	7,2
23 mars 1876.....	8,5
24 »	9,3
Somme.....	4,4
Moyenne.. $\theta_1 =$	7,40

Échelle B (M. Gariel).

1re série...	26 mai 1877	14°,2
	»	15,6
2e série....	19 juin 1877.....	23,4
	»	24,3
3e série....	25 juillet 1877.....	22,3
	»	20,9
	Somme.....	120,7
	Moyenne.. $\theta_1 =$	20,12

Échelle C (M. Mercadier).

21 janvier 1876.....	9°,0
22-24 »	9,8
8 avril 1876.....	13,5
10 »	13,3
17 mai 1876.....	13,9
19 »	14,3
17 »	13,9
19 »	14,3
Somme.....	102,0
Moyenne.. $\theta_1 =$	12,75

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Table de correction pour la réduction à 15°,0 C. des mesures des épreuves daguerriennes du passage de Vénus.

	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d
1000	0,008	0,015	0,023	0,030	0,038	0,046	0,053	0,061	0,069	0,076
2000	015	030	046	061	076	091	107	122	137	152
3000	023	046	069	091	114	137	160	183	206	229
4000	030	061	091	122	152	183	213	244	274	305
5000	038	076	114	152	191	229	267	305	343	381
6000	046	091	137	183	229	274	320	366	411	457
7000	053	107	160	213	267	320	373	427	480	533
8000	061	122	183	244	305	366	427	488	549	610
9000	069	137	206	274	343	411	480	549	617	686

	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	20°
d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d
1000	0,084	0,091	0,099	0,107	0,114	0,122	0,130	0,137	0,145	0,152
2000	168	183	198	213	229	244	259	274	290	305
3000	251	274	297	320	343	366	389	411	434	457
4000	335	366	396	427	457	488	518	549	579	610
5000	419	457	495	533	572	610	648	686	724	762
6000	503	549	594	640	686	732	777	823	869	914
7000	587	640	693	747	800	853	907	960	1,013	1,067
8000	671	732	792	853	914	975	1,036	1,097	1,158	1,219
9000	754	823	892	960	1,029	1,097	1,166	1,234	1,303	1,372

Exemple numérique. — La moyenne des deux valeurs de la distance des centres des deux astres Δ a été trouvée égale à 7755,70 (fascicule C, p. 14. — *Résumé*, au bas de la page) : la température moyenne était 7°,9 ; l'échelle auxiliaire à sept traits était celle désignée par B et comparée par M. Angot. On a donc $\theta_2 = 7°,9$, et, d'après la valeur numérique calculée à la page précédente, $\theta_B = 19°,6$. La réduction à 15 degrés se calcule ainsi avec le tableau ci-dessus :

$\theta_B - \theta_2 = 11°,7$.

Pour 11°	et 7000	0d,587
»	700	59
»	50	4
»	5,7	1
0,7	7000	0,037
	700	04
Correction.		0,692

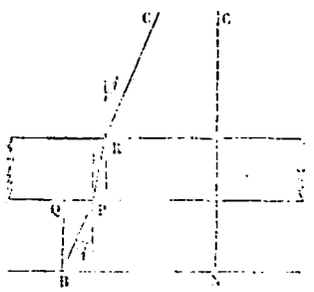
C'est la correction désignée par *Réd.* $\theta = 0,69$ qui figure dans le *Résumé* de la page C.14.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Table de correction de la parallaxe des traits.

L'emploi de l'échelle auxiliaire nécessite la comparaison des points de l'épreuve avec les traits de l'échelle : le plan de ces traits et celui de l'épreuve étant différents, la comparaison dans des directions obliques variables entraîne un véritable effet parallactique, qu'il est utile de corriger pour atteindre la précision qu'on est en droit de demander aux mesures.

Soient BN le plan de l'épreuve, PQ celui des traits, c'est-à-dire la face inférieure de la lame de glace sur laquelle ils sont tracés. Ces deux plans sont sensiblement parallèles, et leur distance BQ est très-petite ($\delta = \frac{1}{10}$ de millimètre) comparativement à la distance focale du microscope ($f = 100^{mm}$).



La direction commune de ces deux plans est sensiblement perpendiculaire à l'axe optique du microscope CN. La ligne brisée CRPB représente l'axe du pinceau de lumière qui part d'un point B de l'épreuve, passe par un trait P et par le centre optique C de l'objectif du microscope. Il y a, en apparence, coïncidence entre le point B et le point P, parce que ces deux images se superposent dans le champ du microscope; en réalité, si la comparaison se faisait par des rayons normaux au plan des traits, le point B se projetterait en Q : la distance PQ constitue la *parallaxe* du trait.

On a évidemment $PQ = \delta \operatorname{tang} i$, i étant l'angle d'incidence ou d'émergence de l'axe du pinceau. Si la glace a ses faces parallèles et a été bien réglée, l'angle i est celui que l'axe du pinceau CR fait avec l'axe du microscope CN.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Comme δ est très-petit, il n'est pas besoin de connaître l'angle i, qui est lui-même très-petit, avec une très-grande exactitude; on a une valeur bien suffisante pour le calcul de la correction $\delta \operatorname{tang} i$, en prenant $\operatorname{tang} i = \frac{PM}{f}$, f étant la distance focale du microscope. Soit $PM = x$, on a donc sensiblement pour la correction $PQ = \varpi$,

$$\varpi = \delta \operatorname{tang} i = \delta \frac{x}{f}.$$

La distance δ est la même pour toutes les échelles auxiliaires et sensiblement constante dans toutes les mesures; elle est produite par une petite feuille de papier collée sur la face striée : un anneau de plomb posé sur cette échelle (p. 56) produit une pression suffisante pour assurer le contact dans des conditions toujours identiques. M. Fizeau et M. Cornu ont mesuré avec un sphéromètre très-délicat l'effet produit par cette petite cale de papier, et l'ont trouvé très-sensiblement égal à $\frac{1}{10}$ de millimètre.

Quant à f, il est égal à 100 millimètres, de sorte que la formule est

$$\varpi = 0{,}0001\, x.$$

La correction, pour être directement applicable aux lectures du microscope, doit être exprimée avec la même unité que ces lectures; il suffit dès lors de remplacer x par son évaluation y en fonction des divisions du tambour : cette distance n'est autre que celle de l'image du point P dans le champ du microscope à l'image idéale de l'axe optique, c'est-à-dire au milieu du champ.

Les machines n°s 2, 3 et 4, spécialement consacrées aux mesures des épreuves avec une échelle auxiliaire, sont disposées de façon que le milieu du champ du microscope corresponde à la division 750 du tambour (7 $\frac{1}{2}$ tours); les distances y sont donc exprimées par $y = n - 750$, n étant le nombre de divisions du tambour lorsque le fil du réticule est en coïncidence avec l'image du point B.

La valeur de la correction devient donc, en remplaçant, dans la formule précédente, x par $(n - 750)$,

$$\varpi = 0{,}0001\,(n - 750).$$

Elle est donc égale, en valeur absolue, à la dix-millième partie de la distance du fil au milieu du champ, cette distance étant exprimée en divisions du tambour.

Le signe de cette correction doit toujours correspondre à une augmentation de la distance observée PM; si donc le sens des divisions croissantes est celui du mouvement du fil de P en M, la correction doit être négative, c'est-à-dire avoir le même signe que $n - 750$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On construit donc aisément la Table suivante :

Pour la lecture.	Corrections.
d	d
500.....	— 0,25
550.....	— 0,20
600.....	— 0,15
650.....	— 0,10
700.....	— 0,05
750.....	0,00
800.....	+ 0,05
850.....	+ 0,10
...	....

Cette Table donne la correction à faire subir au pointé d'un point de l'épreuve pour le rapporter aux traits de l'échelle.

On peut rendre la correction toujours positive, ce qui rend les calculs plus faciles, en ajoutant à toutes les lectures une constante positive qui s'élimine par différence. On a adopté $0^d,50$. Il en résulte que les pointés sur les traits paraissent subir une correction, quoique, en réalité, ils en soient affranchis : mais c'est cette constante $0^d,50$ destinée à éviter les signes négatifs. On obtient ainsi la Table suivante :

	Trait d'avant.	Bord de l'astre.	Trait d'arrière.
250.....	0,50	0,00	0,50
300.....	0,50	0,05	0,50
350.....	0,50	0,10	0,50
400.....	0,50	0,15	0,50
450.....	0,50	0,20	0,50
500.....	0,50	0,25	0,50
550.....	0,50	0,30	0,50
600.....	0,50	0,35	0,50
650.....	0,50	0,40	0,50
700.....	0,50	0,45	0,50
750.....	0,50	0,50	0,50
800.....	0,50	0,55	0,50
850.....	0,50	0,60	0,50
900.....	0,50	0,65	0,50
950.....	0,50	0,70	0,50
1000.....	0,50	0,75	0,50
1050.....	0,50	0,80	0,50
1100.....	0,50	0,85	0,50
1150.....	0,50	0,90	0,50
1200.....	0,50	0,95	0,50

Remarque. — La Table précédente s'applique au micromètre des machines n° 2, 3

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et 4 seulement. Le micromètre de la machine n° 1, ne comprenant que 10 tours de vis, nécessite une Table différente que voici en abrégé :

100.....	0,50	0,10	0,50
200.....	0,50	0,20	0,50
300.....	0,50	0,30	0,50
400.....	0,50	0,40	0,50
500.....	0,50	0,50	0,50
600.....	0,50	0,60	0,50
700.....	0,50	0,70	0,50
800.....	0,50	0,80	0,50
900.....	0,50	0,90	0,50

L'usage de cette Table n'a pas besoin d'autre explication que celle qui a été donnée ci-dessus et l'exemple numérique cité (p. 71) montre comment s'effectue la correction : elle s'y trouve désignée par l'indication *Par. trait* (*parallaxe du trait*).

Remarques. — On a fait diverses hypothèses sur la perfection des conditions à remplir, le parallélisme des faces de la glace et du plan de l'épreuve. Si ces conditions n'étaient qu'imparfaitement remplies, la correction serait encore bien suffisamment exacte, vu sa petitesse.

L'inclinaison des faces de la glace a été mesurée directement, elle n'excède pas une minute d'angle.

Une légère inclinaison de la glace déplacerait toutes les images d'une même quantité, ce qui n'aurait aucune influence sur les mesures : il est utile d'avoir égard à cette remarque lorsqu'on compare les mesures des épreuves faites avec l'échelle auxiliaire entre elles, soit avec les mesures préliminaires relatives au centrage de l'épreuve exécutées sans l'adjonction de l'échelle.

Enfin, pour que cette correction soit valable, il est nécessaire que l'observateur fasse usage de l'oculaire mobile (p. 41) ; car il faut bien remarquer que la coïncidence des images des points B et P n'a lieu que si l'observateur vise dans la direction du pinceau réfracté : en réalité, les deux points ont des foyers conjugués différents qui ne peuvent pas être tous deux à la fois dans le plan du réticule. Dans le réglage préliminaire, on établit généralement la coïncidence du plan du réticule avec les images des traits, qui offrent les repères les plus nets : l'image des contours de l'épreuve est donc en dehors du plan du micromètre. Mais, si l'on a soin d'amener l'oculaire mobile exactement au-dessus du bord à pointer, l'erreur de parallaxe causée par cette différence se trouve annulée.

Bien que l'analyse sur laquelle s'appuie le calcul de cette correction soit très-simple, on a jugé utile de vérifier la Table par des mesures directes dont on trouvera le détail dans le fascicule B.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Table de correction de réfraction.

La réfraction atmosphérique déforme les images des deux astres. Si donc on exprimait les mesures en secondes d'arc, à l'aide du facteur dont il a été parlé plus haut (p. 75), il faudrait encore, pour obtenir les valeurs absolues des éléments mesurés Σ et Δ, multiplier un facteur $(1+f)$, dont M. Puiseux a bien voulu, sur la demande de la Sous-Commission, calculer la Table pour chaque station.

Le facteur $(1+f)$ est donné de 5 minutes en 5 minutes de temps pour toute la durée du passage : il tient compte, bien entendu, de l'orientation de la ligne des centres relativement au vertical par le centre du Soleil.

Dans le mode de réduction adopté, ces Tables ne sont pas utilisées, parce qu'on n'emploie que le rapport $\frac{\Delta}{\Sigma}$, lequel est indépendant de la réfraction : c'est même encore un avantage à ajouter à ceux qui ont été signalés précédemment (p. 76). Mais, comme la détermination du facteur angulaire (p. 75) permettrait de calculer les valeurs absolues de Δ et de Σ, les Tables suivantes présenteraient alors la plus grande utilité.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

NAGASAKI.

(Longitude admise : $8^h 30^m 7^s$.)

Temps moyen de Paris.	Temps moyen de Nagasaki.	f	Temps moyen de Paris.	Temps moyen de Nagasaki.	f
h m	h m		h m	h m	
13.50	22.20	0,000 09	16.15	0.45	0,000 94
55	25	12	20	0.50	95
14. 0	30	14	25	55	96
5	35	16	30	1. 0	97
10	40	18	35	5	98
15	45	21	40	10	99
20	50	24	45	15	99
25	55	27	50	20	99
30	23. 0	30	55	25	99
35	5	33	17. 0	30	99
40	10	37	5	35	98
45	15	40	10	40	97
50	20	43	15	45	96
55	25	46	20	50	94
15. 0	30	50	25	55	93
5	35	54	30	2. 0	92
10	40	58	35	5	91
15	45	62	40	10	89
20	50	65	45	15	88
25	55	68	50	20	86
30	0.0	71	55	25	84
35	0.5	75	18. 0	30	81
40	10	78	5	35	79
45	45	81	10	40	77
50	20	84	15	45	75
55	25	87	20	50	73
16.30	30	89	25	55	71
5	35	91	30	3. 0	69
10	40	92	35	5	67
15	45	0,000 94	40	10	0,000 65

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

PÉKIN.

(Longitude admise : $7^h 36^m 31^s$.)

Temps moyen de Paris.	Temps moyen de Pékin.	f	Temps moyen de Paris.	Temps moyen de Pékin.	f
h m	h m		h m	h m	
13.50	21.27	0,000 09	16.20	23.57	0,001 27
55	32	11	25	0. 2	1 30
14. 0	37	14	30	7	1 33
5	42	17	35	12	1 34
10	47	21	40	17	1 35
15	52	24	45	22	1 36
20	57	28	50	27	1 37
25	22. 2	31	55	32	1 38
30	7	35	17. 0	37	1 38
35	12	39	5	42	1 38
40	17	44	10	47	1 38
45	22	48	15	52	1 38
50	27	52	20	57	1 38
55	32	57	25	1. 2	1 37
15. 0	37	62	30	7	1 37
5	42	66	35	12	1 36
10	47	71	40	17	1 34
15	52	75	45	22	1 33
10	57	80	50	27	1 31
25	23. 2	84	55	32	1 29
30	7	89	18. 0	37	1 27
35	12	93	5	42	1 25
40	17	98	10	47	1 23
45	22	1 02	15	52	1 21
50	27	1 06	20	57	1 19
55	32	1 10	25	2. 2	1 17
16. 0	37	1 13	30	7	1 15
5	42	1 17	35	12	1 13
10	47	1 21	40	17	1 11
15	52	1 24	45	22	1 09
20	57	0,001 27	50	27	0,001 06

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ILE SAINT-PAUL.

(Longitude admise : $5^h\,0^m\,44^s$.)

Temps moyen de Paris.	Temps moyen de Saint-Paul.	f	Temps moyen de Paris.	Temps moyen de Saint-Paul.	f
h m	h m		h m	h m	
14. 0	19. 1	0,001 32	16.20	21.21	0,000 25
5	6	1 23	25	26	23
10	11	1 15	30	31	22
15	16	1 08	35	36	21
20	21	1 02	40	41	41
25	26	95	45	46	19
30	31	89	50	51	18
35	36	83	55	56	17
40	41	78	17. 0	22. 1	17
45	46	73	5	6	16
50	51	69	10	11	16
55	56	65	15	16	15
15. 0	20. 1	61	20	21	15
5	6	57	25	26	15
10	11	54	30	31	15
15	16	51	35	36	15
20	21	49	40	41	15
25	26	46	45	46	15
30	31	43	50	51	16
35	36	41	55	56	16
40	41	39	18. 0	23. 1	16
45	46	37	5	6	16
50	51	35	10	11	17
55	56	33	15	16	18
16. 0	21. 1	31	20	21	19
5	6	29	25	26	20
10	11	28	30	31	21
15	16	26	35	36	22
20	21	25	40	41	0,000 24

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

NOUMÉA.

(Longitude admise : $10^h 56^m 27^s$.)

Temps moyen de Paris.	Temps moyen de Nouméa.	f	Temps moyen de Paris.	Temps moyen de Nouméa.	f
h m	h m		h m	h m	
13.50	0.46	0,000 17	16.10	3. 6	0,000 01
55	51	17	15	11	1
14. 0	56	17	20	16	0
5	1. 1	16	25	21	0
10	6	15	30	26	0
15	11	15	35	31	0
20	16	14	40	36	0
25	21	14	45	41	1
30	26	13	50	46	1
35	31	13	55	51	2
40	36	12	17. 0	56	3
45	41	12	5	4. 1	4
50	46	11	10	1	5
55	51	10	15	11	7
15. 0	56	9	20	16	9
5	2. 1	9	25	21	12
10	6	8	30	26	15
15	11	8	35	31	19
20	16	7	40	36	23
25	21	6	45	41	29
30	26	5	50	46	35
35	31	5	55	51	43
40	36	4	18. 0	56	52
45	41	4	5	5. 1	63
50	46	3	10	6	76
55	51	3	15	11	92
16. 0	56	2	20	16	1 11
5	3. 1	2	25	21	1 35
10	6	0,000 01	30	26	0,001 66

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Table d'interpolation pour abréger la réduction des mesures.

Cette Table, annoncée p. 58 et 72, permet d'effectuer à vue les réductions des mesures obtenues directement avec le microscope, à l'unité avec laquelle sont exprimées les distances des traits des échelles auxiliaires.

D'après les remarques données (p. 71 et 72), le calcul arithmétique est encore plus simple qu'on ne l'indique à la page 38; car il se réduit à partager une différence, en général assez petite, proportionnellement à deux nombres dont la somme est à peu près constante dans tous les cas et voisine du nombre 500. Ce nombre voisin de 500 est l'évaluation en parties du micromètre de la distance des deux traits consécutifs de l'échelle auxiliaire; la différence à partager est la différence entre l'évaluation de cette même longueur avec le micromètre et avec l'unité de l'*échelle normale sur plaqué d'argent* (p. 65).

La Table est la mise en nombre de l'expression

$$z\,\frac{u}{500},$$

dans laquelle u représente la différence à partager et z le nombre proportionnel auquel on effectue le partage : la Table est donc à double entrée; suivant les lignes verticales z varie de 0 à 500, et suivant les lignes horizontales u varie de 0 à 9; à l'intersection des deux lignes correspondant aux valeurs choisies de z et de u, on trouve la valeur de la correction à employer.

La règle ordinaire des signes algébriques s'applique à l'expression ci-dessus, ainsi qu'on peut le voir d'après l'explication de la page 72, de sorte que la formule précédente fournit toujours le signe à employer.

Il n'y a du reste aucune indécision à craindre à ce sujet; car, après avoir appliqué la correction aux deux nombres qu'il s'agit de calculer, on rencontre une vérification numérique très-simple, qu'on trouvera ci-après dans l'*Exemple numérique*.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

	1	2	3	4	5	6	7	8	9		1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	50	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
1	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,02	0,02	1	0,10	0,20	0,31	0,41	0,51	0,61	0,71	0,82	0,92
2	0,00	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	0,03	0,03	0,04	2	0,10	0,21	0,31	0,42	0,52	0,62	0,73	0,83	0,94
3	0,01	0,01	0,02	0,02	0,03	0,04	0,04	0,05	0,05	3	0,11	0,21	0,32	0,42	0,53	0,64	0,74	0,85	0,95
4	0,01	0,02	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,06	0,07	4	0,11	0,22	0,32	0,43	0,54	0,65	0,76	0,86	0,97
5	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	5	0,11	0,22	0,33	0,44	0,55	0,66	0,77	0,88	0,99
6	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,10	0,11	6	0,11	0,22	0,34	0,45	0,56	0,67	0,78	0,90	1,01
7	0,01	0,03	0,04	0,06	0,07	0,08	0,10	0,11	0,13	7	0,11	0,23	0,34	0,46	0,57	0,68	0,80	0,91	1,03
8	0,02	0,03	0,05	0,06	0,08	0,10	0,11	0,13	0,14	8	0,12	0,23	0,35	0,46	0,58	0,70	0,81	0,93	1,04
9	0,02	0,04	0,05	0,07	0,09	0,11	0,13	0,14	0,16	9	0,12	0,24	0,35	0,47	0,59	0,71	0,83	0,94	1,06
10	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	60	0,12	0,24	0,36	0,48	0,60	0,72	0,84	0,96	1,08
1	0,02	0,04	0,07	0,09	0,11	0,13	0,15	0,18	0,20	1	0,12	0,24	0,37	0,49	0,61	0,73	0,85	0,98	1,10
2	0,02	0,05	0,07	0,10	0,12	0,14	0,17	0,19	0,22	2	0,12	0,25	0,37	0,50	0,62	0,74	0,87	0,99	1,12
3	0,03	0,05	0,08	0,10	0,13	0,16	0,18	0,21	0,23	3	0,13	0,25	0,38	0,50	0,63	0,76	0,88	1,01	1,13
4	0,03	0,06	0,08	0,11	0,14	0,17	0,20	0,22	0,25	4	0,13	0,26	0,38	0,51	0,64	0,77	0,90	1,02	1,15
5	0,03	0,06	0,09	0,12	0,15	0,18	0,21	0,24	0,27	5	0,13	0,26	0,39	0,52	0,65	0,78	0,91	1,04	1,17
6	0,03	0,06	0,10	0,13	0,16	0,19	0,22	0,26	0,29	6	0,13	0,26	0,40	0,53	0,66	0,79	0,92	1,06	1,19
7	0,03	0,07	0,10	0,14	0,17	0,20	0,24	0,27	0,31	7	0,13	0,27	0,40	0,54	0,67	0,80	0,94	1,07	1,21
8	0,04	0,07	0,11	0,14	0,18	0,22	0,25	0,29	0,32	8	0,14	0,27	0,41	0,54	0,68	0,82	0,95	1,09	1,22
9	0,04	0,08	0,11	0,15	0,19	0,23	0,27	0,30	0,34	9	0,14	0,28	0,41	0,55	0,69	0,83	0,97	1,10	1,24
20	0,04	0,08	0,12	0,16	0,20	0,24	0,28	0,32	0,36	70	0,14	0,28	0,42	0,56	0,70	0,84	0,98	1,12	1,26
1	0,04	0,08	0,13	0,17	0,21	0,25	0,29	0,34	0,38	1	0,14	0,28	0,43	0,57	0,71	0,85	0,99	1,14	1,28
2	0,04	0,09	0,13	0,18	0,22	0,26	0,31	0,35	0,40	2	0,14	0,29	0,43	0,58	0,72	0,86	1,01	1,15	1,30
3	0,05	0,09	0,14	0,18	0,23	0,28	0,32	0,37	0,41	3	0,15	0,29	0,44	0,58	0,73	0,88	1,02	1,17	1,31
4	0,05	0,10	0,14	0,19	0,24	0,29	0,34	0,38	0,43	4	0,15	0,30	0,44	0,59	0,74	0,89	1,04	1,18	1,33
5	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	5	0,15	0,30	0,45	0,60	0,75	0,90	1,05	1,20	1,35
6	0,05	0,10	0,16	0,21	0,26	0,31	0,36	0,41	0,47	6	0,15	0,30	0,46	0,61	0,76	0,91	1,06	1,21	1,37
7	0,05	0,11	0,16	0,22	0,27	0,32	0,38	0,43	0,49	7	0,15	0,31	0,46	0,62	0,77	0,92	1,08	1,23	1,39
8	0,06	0,11	0,17	0,22	0,28	0,34	0,39	0,45	0,50	8	0,16	0,31	0,47	0,62	0,78	0,94	1,09	1,25	1,40
9	0,06	0,12	0,17	0,23	0,29	0,35	0,41	0,46	0,52	9	0,16	0,32	0,47	0,63	0,79	0,95	1,11	1,26	1,42
30	0,06	0,12	0,18	0,24	0,30	0,36	0,42	0,48	0,54	80	0,16	0,32	0,48	0,64	0,80	0,96	1,12	1,28	1,44
1	0,06	0,12	0,19	0,25	0,31	0,37	0,43	0,50	0,56	1	0,16	0,32	0,49	0,65	0,81	0,97	1,13	1,30	1,46
2	0,06	0,13	0,19	0,26	0,32	0,38	0,45	0,51	0,58	2	0,16	0,33	0,49	0,66	0,82	0,98	1,15	1,31	1,48
3	0,07	0,13	0,20	0,26	0,33	0,40	0,46	0,53	0,59	3	0,17	0,33	0,50	0,66	0,83	1,00	1,16	1,33	1,49
4	0,07	0,14	0,20	0,27	0,34	0,41	0,48	0,54	0,61	4	0,17	0,34	0,50	0,67	0,84	1,01	1,18	1,34	1,51
5	0,07	0,14	0,21	0,28	0,35	0,42	0,49	0,56	0,63	5	0,17	0,34	0,51	0,68	0,85	1,02	1,19	1,36	1,53
6	0,07	0,14	0,22	0,29	0,36	0,43	0,50	0,58	0,65	6	0,17	0,34	0,52	0,69	0,86	1,03	1,20	1,38	1,55
7	0,07	0,15	0,22	0,30	0,37	0,44	0,52	0,59	0,67	7	0,17	0,35	0,52	0,70	0,87	1,04	1,22	1,39	1,57
8	0,08	0,15	0,23	0,30	0,38	0,46	0,53	0,61	0,68	8	0,18	0,35	0,53	0,70	0,88	1,06	1,23	1,41	1,58
9	0,08	0,16	0,23	0,31	0,39	0,47	0,55	0,62	0,70	9	0,18	0,36	0,53	0,71	0,89	1,07	1,25	1,42	1,60
40	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,48	0,56	0,64	0,72	90	0,18	0,36	0,54	0,72	0,90	1,08	1,26	1,44	1,62
1	0,08	0,16	0,25	0,33	0,41	0,49	0,57	0,66	0,74	1	0,18	0,36	0,55	0,73	0,91	1,09	1,27	1,46	1,64
2	0,08	0,17	0,25	0,34	0,42	0,50	0,59	0,67	0,76	2	0,18	0,37	0,55	0,74	0,92	1,10	1,29	1,47	1,66
3	0,09	0,17	0,26	0,34	0,43	0,52	0,60	0,69	0,77	3	0,19	0,37	0,56	0,74	0,93	1,12	1,30	1,49	1,67
4	0,09	0,18	0,26	0,35	0,44	0,53	0,62	0,70	0,79	4	0,19	0,38	0,56	0,75	0,94	1,13	1,32	1,50	1,69
5	0,09	0,18	0,27	0,36	0,45	0,54	0,63	0,72	0,81	5	0,19	0,38	0,57	0,76	0,95	1,14	1,33	1,52	1,71
6	0,09	0,18	0,28	0,37	0,46	0,55	0,65	0,73	0,83	6	0,19	0,38	0,58	0,77	0,96	1,15	1,34	1,54	1,73
7	0,09	0,19	0,28	0,38	0,47	0,56	0,66	0,75	0,85	7	0,19	0,39	0,58	0,78	0,97	1,16	1,36	1,55	1,75
8	0,10	0,19	0,29	0,38	0,48	0,58	0,67	0,76	0,86	8	0,20	0,39	0,59	0,78	0,98	1,18	1,37	1,57	1,76
9	0,10	0,20	0,29	0,39	0,49	0,59	0,69	0,77	0,88	9	0,20	0,40	0,59	0,79	0,99	1,19	1,39	1,58	1,78

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80
1	0,20	0,40	0,61	0,81	1,01	1,21	1,41	1,62	1,82
2	0,20	0,41	0,61	0,82	1,02	1,22	1,43	1,63	1,84
3	0,21	0,41	0,62	0,82	1,03	1,24	1,44	1,65	1,85
4	0,21	0,42	0,62	0,83	1,04	1,25	1,46	1,66	1,87
5	0,21	0,42	0,63	0,84	1,05	1,26	1,47	1,68	1,89
6	0,21	0,42	0,64	0,85	1,06	1,27	1,48	1,70	1,91
7	0,21	0,43	0,64	0,86	1,07	1,28	1,50	1,71	1,93
8	0,22	0,43	0,65	0,86	1,08	1,30	1,51	1,73	1,94
9	0,22	0,44	0,65	0,87	1,09	1,31	1,53	1,74	1,96
110	0,22	0,44	0,66	0,88	1,10	1,32	1,54	1,76	1,98
1	0,22	0,44	0,67	0,89	1,11	1,33	1,55	1,78	2,00
2	0,22	0,45	0,67	0,90	1,12	1,34	1,57	1,79	2,02
3	0,23	0,45	0,68	0,90	1,13	1,36	1,58	1,81	2,03
4	0,23	0,46	0,68	0,91	1,14	1,37	1,60	1,82	2,05
5	0,23	0,46	0,69	0,92	1,15	1,38	1,61	1,84	2,07
6	0,23	0,46	0,70	0,93	1,16	1,39	1,62	1,86	2,09
7	0,23	0,47	0,70	0,94	1,17	1,40	1,64	1,87	2,11
8	0,24	0,47	0,71	0,94	1,18	1,42	1,65	1,89	2,12
9	0,24	0,48	0,71	0,95	1,19	1,43	1,67	1,90	2,14
120	0,24	0,48	0,72	0,96	1,20	1,44	1,68	1,92	2,16
1	0,24	0,48	0,73	0,97	1,21	1,45	1,69	1,94	2,18
2	0,24	0,49	0,73	0,98	1,22	1,46	1,71	1,95	2,20
3	0,25	0,49	0,74	0,98	1,23	1,48	1,72	1,97	2,21
4	0,25	0,50	0,74	0,99	1,24	1,49	1,74	1,98	2,23
5	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25
6	0,25	0,50	0,76	1,01	1,26	1,51	1,76	2,02	2,27
7	0,25	0,51	0,76	1,02	1,27	1,52	1,78	2,03	2,29
8	0,26	0,51	0,77	1,02	1,28	1,54	1,79	2,05	2,30
9	0,26	0,52	0,77	1,03	1,29	1,55	1,81	2,06	2,32
130	0,26	0,52	0,78	1,04	1,30	1,56	1,82	2,08	2,34
1	0,26	0,52	0,79	1,05	1,31	1,57	1,83	2,10	2,36
2	0,26	0,53	0,79	1,06	1,32	1,58	1,85	2,11	2,38
3	0,27	0,53	0,80	1,06	1,33	1,60	1,86	2,13	2,39
4	0,27	0,54	0,80	1,07	1,34	1,61	1,88	2,14	2,41
5	0,27	0,54	0,81	1,08	1,35	1,62	1,89	2,16	2,43
6	0,27	0,54	0,82	1,09	1,36	1,63	1,90	2,18	2,45
7	0,27	0,55	0,82	1,10	1,37	1,64	1,92	2,19	2,47
8	0,28	0,55	0,83	1,10	1,38	1,66	1,93	2,21	2,48
9	0,28	0,56	0,83	1,11	1,39	1,67	1,95	2,22	2,50
140	0,28	0,56	0,84	1,12	1,40	1,68	1,96	2,24	2,52
1	0,28	0,56	0,85	1,13	1,41	1,69	1,97	2,26	2,54
2	0,28	0,57	0,85	1,14	1,42	1,70	1,99	2,27	2,56
3	0,29	0,57	0,86	1,14	1,43	1,72	2,00	2,29	2,57
4	0,29	0,58	0,86	1,15	1,44	1,73	2,02	2,30	2,59
5	0,29	0,58	0,87	1,16	1,45	1,74	2,03	2,32	2,61
6	0,29	0,58	0,88	1,17	1,46	1,75	2,04	2,34	2,63
7	0,29	0,59	0,88	1,18	1,47	1,76	2,06	2,35	2,65
8	0,30	0,59	0,89	1,18	1,48	1,78	2,07	2,37	2,66
9	0,30	0,60	0,89	1,19	1,49	1,79	2,09	2,38	2,68

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
150	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70
1	0,30	0,60	0,91	1,21	1,51	1,81	2,11	2,42	2,72
2	0,30	0,61	0,91	1,22	1,52	1,82	2,13	2,43	2,74
3	0,31	0,61	0,92	1,22	1,53	1,84	2,14	2,45	2,75
4	0,31	0,62	0,92	1,23	1,54	1,85	2,16	2,46	2,77
5	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55	1,86	2,17	2,48	2,79
6	0,31	0,62	0,94	1,25	1,56	1,87	2,18	2,50	2,81
7	0,31	0,63	0,94	1,26	1,57	1,88	2,20	2,51	2,83
8	0,32	0,63	0,95	1,26	1,58	1,90	2,21	2,53	2,84
9	0,32	0,64	0,95	1,27	1,59	1,91	2,23	2,54	2,86
160	0,32	0,64	0,96	1,28	1,60	1,92	2,24	2,56	2,88
1	0,32	0,64	0,97	1,29	1,61	1,93	2,25	2,58	2,90
2	0,32	0,65	0,97	1,30	1,62	1,94	2,27	2,59	2,92
3	0,33	0,65	0,98	1,30	1,63	1,96	2,28	2,61	2,93
4	0,33	0,66	0,98	1,31	1,64	1,97	2,30	2,62	2,95
5	0,33	0,66	0,99	1,32	1,65	1,98	2,31	2,64	2,97
6	0,33	0,66	1,00	1,33	1,66	1,99	2,32	2,66	2,99
7	0,33	0,67	1,00	1,34	1,67	2,00	2,34	2,67	3,01
8	0,34	0,67	1,01	1,34	1,68	2,02	2,35	2,69	3,02
9	0,34	0,68	1,01	1,35	1,69	2,03	2,37	2,70	3,04
170	0,34	0,68	1,02	1,36	1,70	2,04	2,38	2,72	3,06
1	0,34	0,68	1,03	1,37	1,71	2,05	2,39	2,74	3,08
2	0,34	0,69	1,03	1,38	1,72	2,06	2,41	2,75	3,10
3	0,35	0,69	1,04	1,38	1,73	2,08	2,42	2,77	3,11
4	0,35	0,70	1,04	1,39	1,74	2,09	2,44	2,78	3,13
5	0,35	0,70	1,05	1,40	1,75	2,10	2,45	2,80	3,15
6	0,35	0,70	1,06	1,41	1,76	2,11	2,46	2,82	3,17
7	0,35	0,71	1,06	1,42	1,77	2,12	2,48	2,83	3,19
8	0,36	0,71	1,07	1,42	1,78	2,14	2,49	2,85	3,20
9	0,36	0,72	1,07	1,43	1,79	2,15	2,51	2,86	3,22
180	0,36	0,72	1,08	1,44	1,80	2,16	2,52	2,88	3,24
1	0,36	0,72	1,09	1,45	1,81	2,17	2,53	2,90	3,26
2	0,36	0,73	1,09	1,46	1,82	2,18	2,55	2,91	3,28
3	0,37	0,73	1,10	1,46	1,83	2,20	2,56	2,93	3,29
4	0,37	0,74	1,10	1,47	1,84	2,21	2,58	2,94	3,31
5	0,37	0,74	1,11	1,48	1,85	2,22	2,59	2,96	3,33
6	0,37	0,74	1,12	1,49	1,86	2,23	2,60	2,98	3,35
7	0,37	0,75	1,12	1,50	1,87	2,24	2,62	2,99	3,37
8	0,38	0,75	1,13	1,50	1,88	2,26	2,63	3,01	3,38
9	0,38	0,76	1,13	1,51	1,89	2,27	2,65	3,02	3,40
190	0,38	0,76	1,14	1,52	1,90	2,28	2,66	3,04	3,42
1	0,38	0,76	1,15	1,53	1,91	2,29	2,67	3,06	3,44
2	0,38	0,77	1,15	1,54	1,92	2,30	2,69	3,07	3,46
3	0,39	0,77	1,16	1,54	1,93	2,32	2,70	3,09	3,47
4	0,39	0,78	1,16	1,55	1,94	2,33	72,2	3,10	3,49
5	0,39	0,78	1,17	1,56	1,95	2,34	2,73	3,12	3,51
6	0,39	0,78	1,17	1,57	1,96	2,35	2,74	3,14	3,53
7	0,39	0,79	1,18	1,58	1,97	2,36	2,76	3,15	3,55
8	0,40	0,79	1,19	1,58	1,98	2,38	2,77	3,17	3,56
9	0,40	0,80	1,19	1,59	1,99	2,39	2,79	3,18	3,58

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
200	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60
1	0,40	0,80	1,21	1,61	2,01	2,41	2,81	3,22	3,62
2	0,40	0,81	1,21	1,62	2,02	2,42	2,83	3,23	3,64
3	0,40	0,81	1,22	1,62	2,03	2,44	2,84	3,25	3,65
4	0,40	0,82	1,22	1,63	2,04	2,45	2,86	3,26	3,67
5	0,41	0,82	1,23	1,64	2,05	2,46	2,87	3,28	3,69
6	0,41	0,82	1,24	1,65	2,06	2,47	2,88	3,30	3,71
7	0,41	0,83	1,24	1,66	2,07	2,48	2,90	3,31	3,73
8	0,42	0,83	1,25	1,66	2,08	2,50	2,91	3,33	3,74
9	0,42	0,84	1,25	1,67	2,09	2,51	2,93	3,34	3,76
210	0,42	0,84	1,26	1,68	2,10	2,52	2,94	3,36	3,78
1	0,42	0,84	1,27	1,69	2,11	2,53	2,95	3,38	3,80
2	0,42	0,85	1,27	1,70	2,12	2,54	2,97	3,39	3,82
3	0,43	0,85	1,28	1,70	2,13	2,56	2,98	3,41	3,83
4	0,43	0,86	1,28	1,71	2,14	2,57	3,00	3,42	3,85
5	0,43	0,86	1,29	1,72	2,15	2,58	3,01	3,44	3,87
6	0,43	0,86	1,30	1,73	2,16	2,59	3,02	3,46	3,89
7	0,43	0,87	1,30	1,74	2,17	2,60	3,04	3,47	3,91
8	0,44	0,87	1,31	1,74	2,18	2,62	3,05	3,49	3,92
9	0,44	0,88	1,31	1,75	2,19	2,63	3,07	3,50	3,94
220	0,44	0,88	1,32	1,76	2,20	2,64	3,08	3,52	3,96
1	0,44	0,88	1,33	1,77	2,21	2,65	3,09	3,54	3,98
2	0,44	0,89	1,33	1,78	2,22	2,66	3,11	3,55	4,00
3	0,45	0,89	1,34	1,78	2,23	2,68	3,12	3,57	4,01
4	0,45	0,90	1,34	1,79	2,24	2,69	3,14	3,58	4,03
5	0,45	0,90	1,35	1,80	2,25	2,70	3,15	3,60	4,05
6	0,45	0,90	1,36	1,81	2,26	2,71	3,16	3,62	4,07
7	0,45	0,91	1,36	1,82	2,27	2,72	3,18	3,63	4,09
8	0,46	0,91	1,37	1,82	2,28	2,74	3,19	3,65	4,10
9	0,46	0,92	1,37	1,83	2,29	2,75	3,21	3,66	4,12
230	0,46	0,92	1,38	1,84	2,30	2,76	3,22	3,68	4,14
1	0,46	0,92	1,39	1,85	2,31	2,77	3,23	3,70	4,16
2	0,46	0,93	1,39	1,86	2,32	2,78	3,25	3,71	4,18
3	0,47	0,93	1,40	1,86	2,33	2,80	3,26	3,73	4,19
4	0,47	0,94	1,40	1,87	2,34	2,81	3,28	3,74	4,21
5	0,47	0,94	1,41	1,88	2,35	2,82	3,29	3,76	4,23
6	0,47	0,94	1,42	1,89	2,36	2,83	3,30	3,78	4,25
7	0,47	0,95	1,42	1,90	2,37	2,84	3,32	3,79	4,27
8	0,48	0,95	1,43	1,90	2,38	2,86	3,33	3,80	4,28
9	0,48	0,96	1,43	1,91	2,39	2,87	3,35	3,82	4,30
240	0,48	0,96	1,44	1,92	2,40	2,88	3,36	3,84	4,32
1	0,48	0,96	1,45	1,93	2,41	2,89	3,37	3,86	4,34
2	0,48	0,97	1,45	1,94	2,42	2,90	3,39	3,87	4,36
3	0,49	0,97	1,46	1,94	2,43	2,92	3,40	3,89	4,37
4	0,49	0,98	1,46	1,95	2,44	2,93	3,42	3,90	4,39
5	0,49	0,98	1,47	1,96	2,45	2,94	3,43	3,92	4,41
6	0,49	0,98	1,48	1,97	2,46	2,95	3,44	3,94	4,43
7	0,49	0,99	1,48	1,98	2,47	2,96	3,46	3,95	4,45
8	0,50	0,99	1,49	1,98	2,48	2,98	3,47	3,97	4,46
9	0,50	1,00	1,49	1,99	2,49	2,99	3,49	3,98	4,48

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
250	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50
1	0,50	1,00	1,51	2,01	2,51	3,01	3,51	4,02	4,52
2	0,50	1,01	1,51	2,02	2,52	3,02	3,53	4,03	4,54
3	0,51	1,01	1,52	2,02	2,53	3,04	3,54	4,05	4,55
4	0,51	1,02	1,52	2,03	2,54	3,05	3,56	4,06	4,57
5	0,51	1,02	1,53	2,04	2,55	3,06	3,57	4,08	4,59
6	0,51	1,02	1,54	2,05	2,56	3,07	3,58	4,10	4,61
7	0,51	1,03	1,54	2,06	2,57	3,08	3,60	4,11	4,63
8	0,52	1,03	1,55	2,06	2,58	3,10	3,61	4,13	4,64
9	0,52	1,04	1,55	2,07	2,59	3,11	3,63	4,14	4,66
260	0,52	1,04	1,56	2,08	2,60	3,12	3,64	4,16	4,68
1	0,52	1,04	1,57	2,09	2,61	3,13	3,65	4,18	4,70
2	0,52	1,05	1,57	2,10	2,62	3,14	3,67	4,19	4,72
3	0,53	1,05	1,58	2,10	2,63	3,16	3,68	4,21	4,73
4	0,53	1,06	1,58	2,11	2,64	3,17	3,70	4,22	4,75
5	0,53	1,06	1,59	2,12	2,65	3,18	3,71	4,24	4,77
6	0,53	1,06	1,60	2,13	2,66	3,19	3,72	4,26	4,79
7	0,53	1,07	1,60	2,14	2,67	3,20	3,74	4,27	4,81
8	0,54	1,07	1,61	2,14	2,68	3,22	3,75	4,29	4,82
9	0,54	1,08	1,61	2,15	2,69	3,23	3,77	4,30	4,84
270	0,54	1,08	1,62	2,16	2,70	3,24	3,78	4,32	4,86
1	0,54	1,08	1,63	2,17	2,71	3,25	3,79	4,34	4,88
2	0,54	1,09	1,63	2,18	2,72	3,26	3,81	4,35	4,90
3	0,55	1,09	1,64	2,18	2,73	3,28	3,82	4,37	4,91
4	0,55	1,10	1,64	2,19	2,74	3,29	3,84	4,38	4,92
5	0,55	1,10	1,65	2,20	2,75	3,30	3,85	4,40	4,95
6	0,55	1,10	1,66	2,21	2,76	3,31	3,86	4,42	4,97
7	0,55	1,11	1,66	2,22	2,77	3,32	3,88	4,43	4,99
8	0,56	1,11	1,67	2,22	2,78	3,34	3,89	4,45	5,00
9	0,56	1,12	1,67	2,23	2,79	3,35	3,91	4,46	5,02
280	0,56	1,12	1,68	2,24	2,80	3,36	3,92	4,48	5,04
1	0,56	1,12	1,69	2,25	2,81	3,37	3,93	4,50	5,06
2	0,56	1,13	1,69	2,26	2,82	3,38	3,95	4,51	5,08
3	0,57	1,13	1,70	2,26	2,83	3,40	3,96	4,53	5,09
4	0,57	1,14	1,70	2,27	2,84	3,41	3,98	4,54	5,11
5	0,57	1,14	1,71	2,28	2,85	3,42	3,99	4,56	5,13
6	0,57	1,14	1,72	2,29	2,86	3,43	4,00	4,58	5,15
7	0,57	1,15	1,72	2,30	2,87	3,44	4,02	4,59	5,17
8	0,58	1,15	1,73	2,30	2,88	3,46	4,03	4,61	5,18
9	0,58	1,16	1,73	2,31	2,89	3,47	4,05	4,62	5,20
290	0,58	1,16	1,74	2,32	2,90	3,48	4,06	4,64	5,22
1	0,58	1,16	1,75	2,33	2,91	3,49	4,07	4,66	5,24
2	0,58	1,17	1,75	2,34	2,92	3,50	4,09	4,67	5,26
3	0,59	1,17	1,76	2,34	2,93	3,52	4,10	4,69	5,27
4	0,59	1,18	1,76	2,35	2,94	3,53	4,12	4,70	5,29
5	0,59	1,18	1,77	2,36	2,95	3,54	4,13	4,72	5,31
6	0,59	1,18	1,78	2,37	2,96	3,55	4,14	4,74	5,33
7	0,59	1,19	1,78	2,38	2,97	3,56	4,16	4,75	5,35
8	0,60	1,19	1,79	2,38	2,98	3,58	4,17	4,77	5,36
9	0,60	1,20	1,79	2,39	2,99	3,59	4,19	4,78	5,38

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
300	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	3,60	4,20	4,80	5,40
1	0,60	1,20	1,81	2,41	3,01	3,61	4,21	4,82	5,42
2	0,60	1,21	1,81	2,42	3,02	3,62	4,23	4,83	5,44
3	0,61	1,21	1,82	2,42	3,03	3,64	4,24	4,85	5,45
4	0,61	1,22	1,82	2,43	3,04	3,65	4,26	4,86	5,47
5	0,61	1,22	1,83	2,44	3,05	3,66	4,27	4,88	5,49
6	0,61	1,22	1,84	2,45	3,06	3,67	4,28	4,90	5,51
7	0,61	1,23	1,84	2,46	3,07	3,68	4,30	4,91	5,53
8	0,62	1,23	1,85	2,46	3,08	3,70	4,31	4,93	5,54
9	0,62	1,24	1,85	2,47	3,09	3,71	4,33	4,94	5,56
310	0,62	1,24	1,86	2,48	3,10	3,72	4,34	4,96	5,58
1	0,62	1,24	1,87	2,49	3,11	3,73	4,35	4,98	5,60
2	0,62	1,25	1,87	2,50	3,12	3,74	4,37	4,99	5,62
3	0,63	1,25	1,88	2,50	3,13	3,76	4,38	5,01	5,63
4	0,63	1,26	1,88	2,51	3,14	3,77	4,40	5,02	5,65
5	0,63	1,26	1,89	2,52	3,15	3,78	4,41	5,04	5,67
6	0,63	1,26	1,90	2,53	3,16	3,79	4,42	5,06	5,69
7	0,63	1,27	1,90	2,54	3,17	3,80	4,44	5,07	5,71
8	0,64	1,27	1,91	2,54	3,18	3,82	4,45	5,09	5,72
9	0,64	1,28	1,91	2,55	3,19	3,83	4,47	5,10	5,74
320	0,64	1,28	1,92	2,56	3,20	3,84	4,48	5,12	5,76
1	0,64	1,28	1,93	2,57	3,21	3,85	4,49	5,14	5,78
2	0,64	1,29	1,93	2,58	3,22	3,86	4,51	5,15	5,80
3	0,65	1,29	1,94	2,58	3,23	3,88	4,52	5,17	5,81
4	0,65	1,30	1,94	2,59	3,24	3,89	4,54	5,18	5,83
5	0,65	1,30	1,95	2,60	3,25	3,90	4,55	5,20	5,85
6	0,65	1,30	1,96	2,61	3,26	3,91	4,56	5,22	5,87
7	0,65	1,31	1,96	2,62	3,27	3,92	4,58	5,23	5,89
8	0,66	1,31	1,97	2,62	3,28	3,94	4,59	5,25	5,90
9	0,66	1,32	1,97	2,63	3,29	3,95	4,61	5,26	5,92
330	0,66	1,32	1,98	2,64	3,30	3,96	4,62	5,28	5,94
1	0,66	1,32	1,99	2,65	3,31	3,97	4,63	5,30	5,96
2	0,66	1,33	1,99	2,66	3,32	3,98	4,65	5,31	5,98
3	0,67	1,33	2,00	2,66	3,33	4,00	4,66	5,33	5,99
4	0,67	1,34	2,00	2,67	3,34	4,01	4,68	5,34	6,01
5	0,67	1,34	2,01	2,68	3,35	4,02	4,69	5,36	6,03
6	0,67	1,34	2,02	2,69	3,36	4,03	4,70	5,38	6,05
7	0,67	1,35	2,02	2,70	3,37	4,04	4,72	5,39	6,07
8	0,68	1,35	2,03	2,70	3,38	4,06	4,73	5,41	6,08
9	0,68	1,36	2,03	2,71	3,39	4,07	4,75	5,42	6,10
340	0,68	1,36	2,04	2,72	3,40	4,08	4,76	5,44	6,12
1	0,68	1,36	2,05	2,73	3,41	4,09	4,77	5,46	6,14
2	0,68	1,37	2,05	2,74	3,42	4,10	4,79	5,47	6,16
3	0,69	1,37	2,06	2,74	3,43	4,12	4,80	5,49	6,17
4	0,69	1,38	2,06	2,75	3,44	4,13	4,82	5,50	6,19
5	0,69	1,38	2,07	2,76	3,45	4,14	4,83	5,52	6,21
6	0,69	1,38	2,08	2,77	3,46	4,15	4,84	5,54	6,23
7	0,69	1,39	2,08	2,78	3,47	4,16	4,86	5,55	6,25
8	0,70	1,39	2,09	2,78	3,48	4,18	4,87	5,57	6,26
9	0,70	1,40	2,09	2,79	3,49	4,19	4,89	5,58	6,28

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
350	0,70	1,40	2,10	2,80	3,50	4,20	4,90	5,60	6,30
1	0,70	1,40	2,11	2,81	3,51	4,21	4,91	5,62	6,32
2	0,70	1,41	2,11	2,82	3,52	4,22	4,93	5,63	6,34
3	0,71	1,41	2,12	2,82	3,53	4,24	4,94	5,65	6,35
4	0,71	1,42	2,12	2,83	3,54	4,25	4,96	5,66	6,37
5	0,71	1,42	2,13	2,84	3,55	4,26	4,97	5,68	6,39
6	0,71	1,42	2,14	2,85	3,56	4,27	4,98	5,70	6,41
7	0,71	1,43	2,14	2,86	3,57	4,28	5,00	5,71	6,43
8	0,72	1,43	2,15	2,86	3,58	4,30	5,01	5,73	6,44
9	0,72	1,44	2,15	2,87	3,59	4,31	5,03	5,74	6,46
360	0,72	1,44	2,16	2,88	3,60	4,32	5,04	5,76	6,48
1	0,72	1,44	2,17	2,89	3,61	4,33	5,05	5,78	6,50
2	0,72	1,55	2,17	2,90	3,62	4,34	5,07	5,79	6,52
3	0,73	1,55	2,18	2,90	3,63	4,36	5,08	5,81	6,53
4	0,73	1,56	2,18	2,91	3,64	4,37	5,10	5,82	6,55
5	0,73	1,46	2,19	2,92	3,65	4,38	5,11	5,84	6,57
6	0,73	1,46	2,20	2,93	3,66	4,39	5,12	5,86	6,59
7	0,73	1,47	2,20	2,94	3,67	4,40	5,14	5,87	6,61
8	0,74	1,47	2,21	2,94	3,68	4,42	5,15	5,89	6,62
9	0,74	1,48	2,21	2,95	3,69	4,43	5,17	5,90	6,64
370	0,74	1,48	2,22	2,96	3,70	4,44	5,18	5,92	6,66
1	0,74	1,48	2,23	2,97	3,71	4,45	5,19	5,94	6,68
2	0,74	1,49	2,23	2,98	3,72	4,46	5,21	5,95	6,70
3	0,75	1,49	2,24	2,98	3,73	4,48	5,22	5,97	6,71
4	0,75	1,50	2,24	2,99	3,74	4,49	5,24	5,98	6,73
5	0,75	1,50	2,25	3,00	3,75	4,50	5,25	6,00	6,75
6	0,75	1,50	2,26	3,01	3,76	4,51	5,26	6,02	6,77
7	0,75	1,51	2,26	3,02	3,77	4,52	5,28	6,03	6,79
8	0,76	1,51	2,27	3,02	3,78	4,54	5,29	6,05	6,80
9	0,76	1,52	2,27	3,03	3,79	4,55	5,31	6,06	6,82
380	0,76	1,52	2,28	3,04	3,80	4,56	5,32	6,08	6,84
1	0,76	1,52	2,29	3,05	3,81	4,57	5,33	6,10	6,86
2	0,76	1,53	2,29	3,06	3,82	4,58	5,35	6,11	6,88
3	0,77	1,53	2,30	3,06	3,83	4,60	5,36	6,13	6,89
4	0,77	1,54	2,30	3,07	3,84	4,61	5,38	6,14	6,91
5	0,77	1,54	2,31	3,08	3,85	4,62	5,39	6,16	6,93
6	0,77	1,54	2,32	3,09	3,86	4,63	5,40	6,18	6,95
7	0,77	1,55	2,32	3,10	3,87	4,64	5,42	6,19	6,97
8	0,78	1,55	2,33	3,10	3,88	4,66	5,43	6,21	6,98
9	0,78	1,56	2,33	3,11	3,89	4,67	5,45	6,22	7,00
390	0,78	1,56	2,34	3,12	3,90	4,68	5,46	6,24	7,02
1	0,78	1,56	2,35	3,13	3,91	4,69	5,47	6,26	7,04
2	0,78	1,57	2,35	3,14	3,92	4,70	5,49	6,27	7,06
3	0,79	1,57	2,36	3,14	3,93	4,72	5,50	6,29	7,07
4	0,79	1,58	2,36	3,15	3,94	4,73	5,52	6,30	7,09
5	0,79	1,58	2,37	3,16	3,95	4,74	5,53	6,32	7,11
6	0,79	1,58	2,38	3,17	3,96	4,75	5,54	6,34	7,13
7	0,79	1,59	2,38	3,18	3,97	4,76	5,56	6,35	7,15
8	0,80	1,59	2,39	3,18	3,98	4,78	5,57	6,37	7,16
9	0,80	1,60	2,39	3,19	3,99	4,79	5,59	6,38	7,18

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
400	0,80	1,60	2,40	3,20	4,00	4,80	5,60	6,40	7,20
1	0,80	1,60	2,41	3,21	4,01	4,81	5,61	6,42	7,22
2	0,80	1,61	2,41	3,22	4,02	4,82	5,63	6,43	7,24
3	0,81	1,61	2,42	3,22	4,03	4,84	5,64	6,45	7,25
4	0,81	1,62	2,42	3,23	4,04	4,85	5,66	6,46	7,27
5	0,81	1,62	2,43	3,24	4,05	4,86	5,67	6,48	7,29
6	0,81	1,62	2,44	3,25	4,06	4,87	5,68	6,50	7,31
7	0,81	1,63	2,44	3,26	4,07	4,88	5,70	6,51	7,33
8	0,82	1,63	2,45	3,26	4,08	4,90	5,71	6,53	7,34
9	0,82	1,64	2,45	3,27	4,09	4,91	5,73	6,54	7,36
410	0,82	1,64	1,46	3,28	4,10	4,92	5,74	6,56	7,38
1	0,82	1,64	1,47	3,29	4,11	4,93	5,75	6,58	7,40
2	0,82	1,65	1,47	3,30	4,12	4,94	5,77	6,59	7,42
3	0,83	1,65	1,48	3,30	4,13	4,96	5,78	6,61	7,43
4	0,83	1,66	1,48	3,31	4,14	4,97	5,80	6,62	7,45
5	0,83	1,66	2,49	3,32	4,15	4,98	5,81	6,64	7,47
6	0,83	1,66	2,50	3,33	4,16	4,99	5,82	6,66	7,49
7	0,83	1,67	2,50	3,34	4,17	5,00	5,84	6,67	7,51
8	0,84	1,67	2,51	3,34	4,18	5,02	5,85	6,69	7,52
9	0,84	1,68	2,51	3,35	4,19	5,03	5,87	6,70	7,54
420	0,84	1,68	2,52	3,36	4,20	5,04	5,88	6,72	7,56
1	0,84	1,68	2,53	3,37	4,21	5,05	5,89	6,74	7,58
2	0,84	1,69	2,53	3,38	4,22	5,06	5,91	6,75	7,60
3	0,85	1,69	2,54	3,38	4,23	5,08	5,92	6,77	7,61
4	0,85	1,70	2,54	3,39	4,24	5,09	5,94	6,78	7,63
5	0,85	1,70	2,55	3,40	4,25	5,10	5,95	6,80	7,65
6	0,85	1,70	2,56	3,41	4,26	5,11	5,96	6,82	7,67
7	0,85	1,71	2,56	3,42	4,27	5,12	5,98	6,83	7,69
8	0,86	1,71	2,57	3,42	4,28	5,14	5,99	6,85	7,70
9	0,86	1,72	2,57	3,43	4,29	5,15	6,01	6,86	7,72
430	0,86	1,72	2,58	3,44	4,30	5,16	6,02	6,88	7,74
1	0,86	1,72	2,59	3,45	4,31	5,17	6,03	6,90	7,76
2	0,86	1,73	2,59	3,46	4,32	5,18	6,05	6,91	7,78
3	0,87	1,73	2,60	3,46	4,33	5,20	6,06	6,93	7,79
4	0,87	1,74	2,60	3,47	4,34	5,21	6,08	6,94	7,81
5	0,87	1,74	2,61	3,48	4,35	5,22	6,09	6,96	7,83
6	0,87	1,74	2,62	3,49	4,36	5,23	6,10	6,98	7,85
7	0,87	1,75	2,62	3,50	4,37	5,24	6,12	6,99	7,87
8	0,88	1,75	2,63	3,50	4,38	5,26	6,13	7,01	7,88
9	0,88	1,76	2,63	3,51	4,39	5,27	6,15	7,02	7,90
440	0,88	1,76	2,64	3,52	4,40	5,28	6,16	7,04	7,92
1	0,88	1,76	2,65	3,53	4,41	5,29	6,17	7,06	7,94
2	0,88	1,77	2,65	3,54	4,42	5,30	6,19	7,07	7,96
3	0,89	1,77	2,66	3,54	4,43	5,32	6,20	7,09	7,97
4	0,89	1,78	2,66	3,55	4,44	5,33	6,22	7,10	7,99
5	0,89	1,78	2,67	3,56	4,45	5,34	6,23	7,12	8,01
6	0,89	1,78	2,68	3,57	4,46	5,35	6,24	7,14	8,03
7	0,89	1,79	2,68	3,58	4,47	5,36	6,26	7,15	8,05
8	0,90	1,79	2,69	3,58	4,48	5,38	6,27	7,17	8,06
9	0,90	1,80	2,69	3,59	4,49	5,39	6,29	7,18	8,08

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
450	0,90	1,80	2,70	3,60	4,50	5,40	6,30	7,20	8,10
1	0,90	1,80	2,71	3,61	4,51	5,41	6,31	7,22	8,12
2	0,90	1,81	2,71	3,62	4,52	5,42	6,33	7,23	8,14
3	0,91	1,81	2,72	3,62	4,53	5,44	6,34	7,25	8,15
4	0,91	1,82	2,72	3,63	4,64	5,45	6,36	7,26	8,17
5	0,91	1,82	2,73	3,64	4,55	5,46	6,37	7,28	8,19
6	0,91	1,82	2,74	3,65	4,56	5,47	6,38	7,30	8,21
7	0,91	1,83	2,74	3,66	4,57	5,48	6,40	7,31	8,23
8	0,92	1,83	2,75	3,66	4,58	5,50	6,41	7,33	8,24
9	0,92	1,84	2,75	3,67	4,59	5,51	6,43	7,34	8,26
460	0,92	1,84	2,76	3,68	4,60	5,52	6,44	7,36	8,28
1	0,92	1,84	2,77	3,69	4,61	5,53	6,45	7,38	8,30
2	0,92	1,85	2,77	3,70	4,62	5,54	6,47	7,39	8,32
3	0,93	1,85	2,78	3,70	4,63	5,56	6,48	7,41	8,33
4	0,93	1,86	2,78	3,71	4,64	5,57	6,50	7,42	8,35
5	0,93	1,86	2,79	3,72	4,65	5,58	6,51	7,44	8,37
6	0,93	1,86	2,80	3,73	4,66	5,59	6,52	7,46	8,39
7	0,93	1,87	2,80	3,74	4,67	5,60	6,54	7,47	8,41
8	0,94	1,87	2,81	3,74	4,68	5,62	6,55	7,49	8,42
9	0,94	1,88	2,81	3,75	4,69	5,63	6,57	7,50	8,44
470	0,94	1,88	2,82	3,76	4,70	5,64	6,58	7,52	8,46
1	0,94	1,88	2,83	3,77	4,71	5,65	6,59	7,54	8,48
2	0,94	1,89	2,83	3,78	4,72	5,66	6,61	7,55	8,50
3	0,95	1,89	2,84	3,78	4,73	5,68	6,62	7,57	8,51
4	0,95	1,90	2,84	3,79	4,74	5,69	6,64	7,58	8,53
5	0,95	1,90	2,85	3,80	4,75	5,70	6,65	7,60	8,55
6	0,95	1,90	2,86	3,81	4,76	5,71	6,66	7,62	8,57
7	0,95	1,91	2,86	3,82	4,77	5,72	6,68	7,63	8,59
8	0,96	1,91	2,87	3,82	4,78	5,74	6,69	7,65	8,60
9	0,96	1,92	2,87	3,83	4,79	5,75	6,71	7,66	8,62
480	0,96	1,92	2,88	3,84	4,80	5,76	6,72	7,68	8,64
1	0,96	1,92	2,89	3,85	4,81	5,77	6,73	7,70	8,66
2	0,96	1,93	2,89	3,86	4,82	5,78	6,75	7,71	8,68
3	0,97	1,93	2,90	3,86	4,83	5,80	6,76	7,73	8,69
4	0,97	1,94	2,90	3,87	4,84	5,81	6,78	7,74	8,71
5	0,97	1,94	2,91	3,88	4,85	5,82	6,79	7,76	8,73
6	0,97	1,94	2,92	3,89	4,86	5,83	6,80	7,78	8,75
7	0,97	1,95	2,92	3,90	4,87	5,84	6,82	7,79	8,77
8	0,98	1,95	2,93	3,90	4,88	5,86	6,83	7,80	8,78
9	0,98	1,96	2,93	3,91	4,89	5,87	6,85	7,82	8,80
490	0,98	1,96	2,94	3,92	4,90	5,88	6,86	7,84	8,82
1	0,98	1,96	2,95	3,93	4,91	5,89	6,87	7,86	8,84
2	0,98	1,97	2,95	3,94	4,92	5,90	6,89	7,87	8,86
3	0,99	1,97	2,96	3,94	4,93	5,92	6,90	7,89	8,87
4	0,99	1,98	2,96	3,95	4,94	5,93	6,92	7,90	8,89
5	0,99	1,98	2,97	3,96	4,95	5,94	6,93	7,92	8,91
6	0,99	1,98	2,98	3,97	4,96	5,95	6,94	7,94	8,93
7	0,99	1,99	2,98	3,98	4,97	5,96	6,96	7,95	8,96
8	1,00	1,99	2,99	3,98	4,98	5,98	6,97	7,97	8,96
9	1,00	2,00	2,99	3,99	4,99	5,99	6,99	7,98	8,98

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Exemple numérique.

Dans l'exemple cité (p. 71), la différence, diff. = — 1,10, doit être partagée proportionnellement aux nombres 373,69 et — 128,09 (*voir* p. 72) ; à l'aide de la Table précédente on opère ainsi :

Pour 1	unité et 374	la correction est..	0,75	de même 128..	0,26
Pour 0,1	»		0,07	»	0,03
			0,82		0,29

Appliquant la règle des signes, la correction est donc — 0,82 pour 373,69 et + 0,19 pour — 128,09, ce qui donne pour les nombres corrigés 372,87 et — 127,80.

La vérification annoncée est la suivante : la somme des valeurs absolues des nombres corrigés 372,87 + 127,80 = 500,67, qui représente la distance des deux traits de l'échelle auxiliaire, doit reproduire exactement le nombre adopté Ad. = 500,68 ; ou encore, la somme algébrique du nombre corrigé et de la distance correspondante au zéro du trait d'avant (372,87 + 0,00 = 372,87) et du trait d'arrière (— 127,80 + 500,68 = 372,88) doit être la même.

La différence est ici de 0,01 : elle est entièrement négligeable ; elle provient de ce que la Table d'interpolation est la mise en nombre de l'expression $= \frac{u}{500}$, le dénominateur 500 étant fixe, tandis qu'il devrait être variable et égal à la somme des deux nombres à corriger ; dans le cas présent, cette somme étant 501,78, les valeurs absolues des corrections sont donc trop fortes d'environ $\frac{1}{500}$; en conséquence, il faudrait diminuer 0,82 et 0,29 de la $\frac{1}{500}$ partie de leur valeur : en mettant 0,81 au lieu de 0,82 la vérification serait complète.

Cette remarque permet de prévoir dans quel sens il faut *forcer* le dernier chiffre des corrections pour que la vérification soit complète ; dans tous les cas, d'ailleurs, l'erreur à craindre est d'un ordre de grandeur absolument négligeable eu égard à l'approximation qu'on est en droit d'attendre des mesures.

Ici se termine l'exposition de la méthode d'observation et de réduction des mesures relatives aux épreuves ; un certain nombre de questions accessoires se sont présentées dans le courant des études dont le présent fascicule offre la conclusion. On trouvera à ce sujet des détails complémentaires dans le fascicule B.

A. C.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

DOCUMENTS

RELATIFS AUX

MESURES DES ÉPREUVES PHOTOGRAPHIQUES.

FASCICULE B

COMPRENANT

LE RÉSUMÉ DES ÉTUDES ET DES MESURES EXÉCUTÉES AVEC LA MACHINE N° 1,

Par M. A. CORNU.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

RÉSUMÉ DES ÉTUDES

ET DES

MESURES EXÉCUTÉES AVEC LA MACHINE N° 1.

AVERTISSEMENT.

La machine micrométrique désignée sous le n° 1, construite comme instrument provisoire pour exécuter les essais préliminaires, a présenté des dispositions assez satisfaisantes pour pouvoir, après quelques modifications de détail, servir de modèle à la construction des machines définitives n° 2, n° 3 et n° 4 (*voir* le Fascicule A, p. A.39) et, finalement, être employée à des mesures précises.

C'est avec cette machine que les observateurs se sont exercés, au début, à la mesure des épreuves daguerriennes, à l'étude des inégalités des vis, etc. ; une assez longue série de mesures d'épreuves du passage de Vénus a même été exécutée par eux avec cette machine d'après un plan (p. A.49) qui a été perfectionné dans la suite. Les résultats n'en ont pas été publiés, bien qu'ils aient été réduits complétement, à cause de l'incertitude planant sur la fixité de certaines corrections : on a préféré reprendre les mesures dès que chaque observateur a été en possession d'une

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

machine dont il avait l'usage exclusif. Dans ces conditions, évidemment plus favorables, et avec l'emploi d'une échelle auxiliaire (*voir* p. A.53), les mesures des épreuves exécutées d'après une méthode uniforme ont été définitives.

C'est également avec cette machine qu'ont été étudiées les difficultés relatives à des points accessoires, mais importants pour le perfectionnement de la méthode de mesure et sa réduction à un système de règles pratiques.

On donnera un résumé aussi court, mais aussi complet que possible, des études ou essais effectués dans cette voie. Ces détails seront utiles pour justifier la méthode adoptée et suppléeront à la brièveté des indications de l'exposé rapide donné dans le fascicule précédent.

Ces détails auront également l'avantage de faciliter aux observateurs qui voudraient exécuter des mesures analogues des études qui sont toujours longues et pénibles lorsqu'on les entreprend sans expérience préliminaire. Comme on n'a cherché ni à dissimuler les difficultés rencontrées, ni à déguiser les points faibles, cet exposé un peu aride sera néanmoins apprécié de ceux qui se sont trouvés aux prises avec des difficultés semblables.

D'autre part, comme on n'a pas, malgré beaucoup d'efforts, la prétention d'avoir obtenu des dispositifs parfaits, on ne craindra pas, à l'occasion, de faire la critique de certaines imperfections de détail reconnues par un long usage des machines employées et d'indiquer les améliorations à apporter à leur construction.

L'expérience acquise dans cette longue série de recherches pourra donc être utilisée dans la suite au profit de travaux analogues, en particulier pour l'observation photographique du prochain passage de Vénus sur le Soleil.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Il ne faudra pas perdre de vue, en lisant cet exposé, que ces études préliminaires avaient pour but de constituer une *méthode pratique* destinée à être employée d'une manière courante, de façon que les observateurs eussent le moins possible d'initiative personnelle à dépenser.

Cette manière de procéder, nécessaire quand il s'agit de mesurer un nombre considérable d'épreuves, devait en effet se distinguer de la marche que suivrait un observateur unique n'ayant qu'une seule mesure ou un très-petit nombre de mesures à effectuer ; dans ce dernier cas, l'observateur doit employer toutes les ressources de son esprit à tirer parti des circonstances particulières présentées par l'épreuve au profit de l'exactitude des mesures ; il est évident qu'on ne peut pas et qu'on ne doit même pas demander les mêmes efforts à un groupe d'observateurs n'ayant ni les mêmes habitudes d'esprit ni les mêmes aptitudes, surtout lorsqu'un pareil travail doit se prolonger pendant plusieurs années.

L'uniformité et la simplicité des procédés sont alors les conditions indispensables à réaliser, de manière à rendre aussi comparables que possible les mesures exécutées par des observateurs différents. C'est ce qui expliquera, dans ce qui va suivre, la minutie de certains détails et la recherche constante de règles pratiques, destinées à simplifier et à uniformiser le travail si délicat des mesures.

Dans le présent fascicule, on trouvera donc le résumé succinct des essais exécutés en vue de perfectionner les procédés de mesure et l'indication des précautions à prendre pour éviter certaines difficultés pratiques qu'on est exposé à rencontrer dans ces travaux. On y trouvera ensuite le détail des observations relatives aux échelles auxiliaires, dont les résultats définitifs sont consignés

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et utilisés dans les fascicules suivants (tableaux numériques); enfin, dans des appendices, l'examen théorique de quelques questions accessoires qui se sont présentées dans le courant de ces études.

I. — Résumé des essais divers relatifs a l'emploi de la machine micrométrique.

(Pour l'intelligence du présent Chapitre, il est nécessaire de se reporter à la description des machines micrométriques donnée p. A.39 et suivantes.)

1° Moteur électrique.

Difficultés rencontrées au début. — Les premières fois qu'on fit fonctionner la machine, on employa pour actionner le moteur deux éléments Bunsen, placés à l'extérieur, sur l'appui d'une des fenêtres du laboratoire. Mais la manipulation et l'entretien de ces éléments ne tardèrent pas à devenir très-pénibles. Le montage et le démontage des couples à chaque séance étaient un véritable embarras pour l'observateur ; d'autre part, l'action des vapeurs acides risquait à la longue d'endommager les machines et les épreuves.

Disposition définitive. — On songea un instant à remplacer le moteur électrique par un moteur mécanique puissant, destiné à mettre en mouvement les quatre machines micrométriques.

Mais le calcul du travail disponible à emmagasiner par l'élévation d'un poids conduisait à un appareil si considérable, qu'on dut renoncer à ce projet; on en revint aux piles, et, après divers essais, M. Mercadier proposa d'employer les éléments Leclan-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ché (1), accouplés en surface. L'expérience réussit parfaitement. Vingt couples de grand modèle furent groupés en quatre séries de cinq, et le courant de ces quatre couples quintuples donna aux moteurs une vitesse très-convenable. Lorsque les couples sont fraîchement montés, trois de ces couples suffisent même parfaitement. La pile reste toujours montée. Tous les trois mois on enlève les cristaux formés sur le zinc, on ajoute de l'eau pour compenser l'évaporation et l'on maintient le chlorhydrate d'ammoniaque en excès; les bords des vases étant enduits de suif ou de paraffine, on évite l'effet fâcheux des *sels grimpants*. Plusieurs de ces piles ont fonctionné près de deux ans sans autre précaution.

Accidents à la marche du moteur. — Il n'est pas inutile d'indiquer quelques précautions nécessaires pour obtenir un fonctionnement régulier du moteur. D'abord, on doit éviter de laisser le circuit fermé inutilement. C'est pourquoi le commutateur indiqué dans la description (p. A.47) doit toujours interrompre le courant quand le moteur est au repos : il est arrivé parfois que, par mégarde, le circuit est resté fermé un jour ou deux, sans que pour cela le moteur fût en marche; la pile a perdu alors beaucoup de son énergie, même après plusieurs jours de repos.

Le moteur lui-même a quelquefois éprouvé de petits accidents : c'était toujours un défaut d'isolement des fils, soit dans les bobines des électro-aimants, soit dans les communications longeant le bâti de fonte de l'appareil. L'examen de l'appareil montrait que l'un des électro-aimants restait constamment aimanté ou ne s'aimantait plus au passage du courant; le défaut aperçu, il était facile d'y parer.

---

(1) On a adopté le grand modèle, connu dans le service des signaux de chemin de fer sous le nom de *modèle de disques*.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Ces moteurs fonctionnant très-bien, leur emploi pourrait être recommandé dans des cas analogues, mais il serait utile d'avertir le constructeur de prendre toutes les précautions nécessaires pour obtenir le meilleur isolement possible; les trépidations de l'appareil pendant des milliers et des milliers de tours (quatre à cinq tours par seconde) produisent sans doute en certains points l'usure des vernis isolants ou desserrent les pièces en contact.

Si ces moteurs n'avaient pas aussi bien fonctionné, on les aurait remplacés par de petites machines Gramme qui ont également une marche très-régulière comme moteurs, sous l'influence du courant d'une pile convenable.

2° Microscope.

Forme du réticule. — On a adopté après divers essais le réticule formé de deux fils rectangulaires, l'un parallèle au mouvement du chariot (fil horizontal), l'autre à angle droit (fil vertical), avec lequel on effectue les pointés. D'après des études antérieures (voir *Mémoires,* t. I, Ire Partie, p. 300), ce ne serait pas la disposition la plus favorable à la précision des pointés; sur des épreuves photographiques un peu estompées, les meilleurs pointés se font avec un grain de poussière très-fin placé sur le fil horizontal. On n'a pas, toutefois, adopté cette modification du réticule pour plusieurs motifs : le premier est la difficulté de placer à volonté un grain de poussière de grosseur et de forme convenables, et surtout de le conserver en place; la nécessité d'étudier la vis et de construire la table de correction des lectures du tambour exigeait cette fixité. Le second motif était la nécessité reconnue presque dès le début, d'effectuer successivement ou simultanément des pointés sur les traits d'une échelle auxiliaire; la facilité extrême avec laquelle on bissecte avec un fil une ligne brillante

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

compense largement la petite incertitude de pointé qui subsiste dans le cas des pointés sur des épreuves estompées.

Le réticule à fils croisés et inclinés aurait pu aussi être employé; mais, comme le grain de poussière, il a l'inconvénient de ne s'appliquer qu'à un point spécial de l'échelle auxiliaire, tandis que le fil dans toute sa longueur permet d'établir une *coïncidence moyenne* plus satisfaisante, ce qui élimine en grande partie les inégalités accidentelles des traits de l'échelle auxiliaire.

Enfin le fil horizontal permet de vérifier ou de régler d'une manière très-expéditive et très-sûre le parallélisme des déplacements du réticule et du chariot portant les épreuves.

Oculaires. — L'étude comparative des pointés avec quatre oculaires de force graduée donnant au microscope des grossissements variant de 5 à 25 (mesure par l'anneau oculaire) a montré que la précision et la concordance des pointés ne varient pas beaucoup avec le grossissement, lorsqu'on opère sur des épreuves daguerriennes dont les contours sont généralement indécis. Si l'épreuve est bien *frappée,* c'est-à-dire si les différences de teinte sont très-marquées, on a intérêt à augmenter le grossissement, mais seulement jusqu'à une certaine limite au delà de laquelle le *grain* de l'épreuve devient gênant pour les appréciations. Mais, lorsque l'épreuve est pâle, on a au contraire intérêt à diminuer le grossissement dans de fortes proportions; les forts grossissements ont alors pour effet apparent d'effacer les contours et l'épreuve n'est plus visible, tandis qu'elle reprend de la visibilité avec un grossissement plus faible. Il est évident que dans ce cas la précision des pointés diminue, mais dans une proportion beaucoup moindre que le rapport des grossissements.

Les quatre oculaires se substituent aisément l'un à l'autre sur

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

les machines, et la pièce qui les porte est mobile parallèlement au mouvement du réticule, pour éviter les erreurs de parallaxe.

Manœuvre de l'oculaire mobile. — Une bonne précaution à indiquer dans l'usage de ces oculaires mobiles, c'est l'addition d'une graduation sur l'une des pièces fixes de l'appareil pour placer sans tâtonnement l'oculaire au-dessus du fil du réticule avant de faire la mesure. A cet effet, on place le fil sur le point à relever, on lit sur le *peigne* le nombre de tours du tambour qu'on inscrit sur le carnet d'observations, puis on tourne le bouton de l'oculaire mobile jusqu'à ce que l'index de l'oculaire mobile marque le même nombre sur la graduation, un réglage préalable ayant établi la concordance. Cette opération se fait bientôt instinctivement, et l'on est assuré d'éviter les erreurs de parallaxe.

Mise au point exact des fils et des objets à mesurer. — L'une des premières difficultés qu'on rencontre dans les essais de mesures précises avec les micromètres est la mise au point simultanée du fil du réticule et des objets, traits ou contours à relever.

Voici la règle pratique à laquelle on s'est arrêté :

L'observateur, quelle que soit sa vue, myope ou presbyte, par un tirage convenable de l'oculaire, met *au point*, c'est-à-dire à la distance de la vision distincte, le réticule, sans s'occuper des autres objets visibles dans le champ; avec une petite bande de papier divisée en millimètres, il mesure le tirage de l'oculaire; puis il répète l'opération en négligeant le réticule et en s'attachant au contraire, par la variation du tirage, à mettre au point les objets à relever, traits, points, lignes photographiées. La même échelle divisée sert à définir le nouveau tirage de l'oculaire :

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

la différence des deux lectures donne ainsi la différence de mise au point des images à comparer.

On pourrait soulever le corps du microscope tout entier de la quantité nécessaire pour rétablir la coïncidence du foyer des images avec le fil du réticule ; mais, en général, il vaut mieux laisser le microscope fixe, parce que l'on risque de dérégler le parallélisme du réticule au mouvement du chariot et que la stabilité de son axe optique sera d'autant plus assurée, que l'on touchera moins souvent aux vis de serrage qui maintiennent le microscope enveloppé dans son manchon.

On cherchera donc en général, lorsqu'on sera arrivé aux *opérations courantes*, à ramener la coïncidence des images par le déplacement en hauteur de l'épreuve placée sur le chariot; à cet effet, les trois vis de réglage du plateau (p. A.44) permettent un petit mouvement dont on peut fixer l'amplitude d'après la connaissance approchée de la valeur des pas.

Pour calculer la correction, on opère de la manière suivante :

Les distances focales conjuguées de l'objectif du microscope étant p et p' et f la distance focale principale, on a, en négligeant l'épaisseur des verres,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f};$$

différentiant par rapport à p et à p', il vient

$$\frac{dp}{p^2} = -\frac{dp'}{p'^2} \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{p'} = -\frac{p^2}{p'^2}\,dp'.$$

Si donc dp représente la distance dont il faut faire varier la hauteur de l'objet pour faire varier de dp' la position de l'image conjuguée (mesurée comme précédemment par la différence de tirage de l'oculaire), l'équation précédente permettra d'en calcu-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ler la valeur; d'après la construction du microscope, $p = 100^{mm}$, $p' = 250^{mm}$; on a donc

$$dp = -\frac{dp'}{6,25}.$$

En conséquence, le dépointement dp' de l'image d'un point de l'objet examiné relativement au plan du réticule se corrige en déplaçant l'objet d'environ la sixième partie de dp'. Quant au sens, comme p et p' sont comptés en sens contraire, le sens de la correction dp est inverse de celui de l'erreur dp'.

Lorsqu'il y a, outre l'épreuve à relever, une échelle auxiliaire, on établit la coïncidence du réticule avec un plan idéal situé entre les deux images, mais plus rapproché de l'image la plus nette, c'est-à-dire de celle des traits de l'échelle auxiliaire (p. A.108).

Éclairage. — Depuis le 10 avril 1875, jour où la machine n° 1 a été mise en station, jusqu'au moment où ont commencé les travaux définitifs (novembre 1875), les essais ont été très-nombreux; on cherchait, d'abord pour s'exercer, puis ensuite pour évaluer la précision des pointés, à obtenir des séries concordantes de mesures relatives à l'intervalle, soit des traits d'une échelle divisée, soit des éléments d'une épreuve daguerrienne du passage de Vénus. Les anomalies qu'on a rencontrées au début ont été principalement causées par l'imperfection de l'éclairage.

On avait d'abord adopté, comme dans les instruments d'Astronomie, l'éclairage par un miroir concave percé d'une ouverture centrale, laissant à découvert la presque totalité de l'objectif du microscope : le résultat fut très-mauvais; le bord du champ seul était éclairé, et le centre, c'est-à-dire la partie utile, restait dans une pénombre dont l'éclat était tout à fait insuffisant. On fut d'abord un peu surpris de voir qu'un dispositif si satisfaisant

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

pour l'éclairage des cercles divisés fonctionnait si mal pour l'éclairage des épreuves daguerriennes. En examinant les choses de plus près, on ne tarda pas à reconnaître que les circonstances, si semblables en apparence, sont au fond très-différentes dans les deux cas.

Ce dispositif réussit dans les microscopes adaptés aux cercles divisés, parce que le limbe est strié systématiquement par le polissage, dans une direction perpendiculaire aux traits, et c'est par diffraction ou réflexion sur ces stries que l'éclairage fait ressortir les divisions. Au contraire, sur les épreuves daguerriennes, les stries ont été soigneusement effacées par le poli spéculaire, et, s'il en reste, elles n'ont aucune direction systématique, par suite des précautions prises au polissage (¹). Il fallut donc examiner le problème sous ce point de vue et modifier notablement le dispositif; voici le résultat de cette étude.

L'analyse de la marche des rayons dans les circonstances présentes conduit aisément à la nécessité de remplir les deux conditions suivantes pour obtenir la perfection de l'éclairage :

1° *Le champ de vision doit être uniformément éclairé dans toute son étendue.*

2° *L'anneau oculaire du microscope, examiné avec une loupe convenable, doit avoir une forme symétrique et présenter un éclat uniforme.*

La première condition est évidemment nécessaire, car c'est par des motifs de symétrie d'aspect de chaque côté du fil du réti-

(¹) La recommandation expresse de polir les plaques en évitant les stries parallèles à une direction fixe avait été faite aux observateurs (*voir* le Programme, *Mémoires*, et t. Ier, IIe Partie, Supplément, p. 121), en vue d'éviter des dissymétries dans le développement de l'image daguerrienne.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

cule que l'œil se guide dans les pointés ; une dissymétrie dans l'éclairage du champ ne pourrait que gêner son appréciation et introduire des erreurs systématiques.

La seconde condition est un peu plus délicate à mettre en évidence ; cependant, si l'on se rappelle que : 1° la pupille de l'œil est placée à l'anneau oculaire ; 2° l'anneau oculaire est l'image de la surface de l'objectif ; 3° la quantité de lumière que l'objectif fait converger en chaque point de l'image est celle qui a traversé tous les points de la surface de l'objectif ; 4° le maximum de symétrie de l'image se présente lorsque le contour de l'objectif présente une forme symétrique, et que l'intensité de la lumière est distribuée uniformément sur sa surface ; 5° l'examen avec une loupe convenablement placée permet précisément d'observer cette distribution, on reconnaîtra sans peine que la condition énoncée conduit au maximum de symétrie qui puisse exister dans la formation de l'image.

On est parvenu à remplir cette double condition en remplaçant le miroir circulaire percé d'un trou central par un miroir demi-circulaire couvrant la moitié de l'objectif, le bord rectiligne du miroir étant dirigé perpendiculairement au réticule et à l'axe du microscope. Ce miroir (p. A. 41 et *fig.* 1 et 2, *Pl. II*) est incliné de manière à projeter un faisceau convergent sur l'épreuve, laquelle est bien normale à l'axe.

De ces conditions il résulte que, si la surface de ce miroir est éclairée par une source lumineuse d'éclat uniforme :

1° La distribution de la lumière sur le miroir sera uniforme ;

2° Que l'image réelle de la source sur le plan focal conjugué sera uniformément éclairée (au moins d'une manière très-approchée, en raison de la forme du miroir, de son inclinaison sur l'axe et du diamètre de la source) ;

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

3° Que, si le plan de l'épreuve (assez poli pour être réfléchissante) est à la fois dans le plan focal du microscope et dans celui du miroir éclaireur, les rayons réfléchis couvriront d'un éclat uniforme la moitié restée libre de l'objectif ;

4° Et qu'enfin l'anneau oculaire, ayant la forme d'un demi-cercle, présentera un éclat uniforme sur toute sa surface.

Cette condition d'éclat uniforme est assez délicate à remplir ; elle permet même de contrôler jusqu'à un certain point la perpendicularité du plan de la plaque daguerrienne à l'axe du microscope. Elle le contrôlerait rigoureusement si toutes les conditions théoriques étaient poussées à l'extrême (¹). Lorsque l'éclat uniforme a été obtenu pour un certain azimut de la plaque, il doit subsister lorsqu'on fait tourner le plateau et par suite la plaque. Si l'éclat se modifie sur les bords de l'anneau oculaire, c'est que le réglage est imparfait ; on le rectifie par approximation successive à l'aide des vis du plateau (*voir* p. A. 44). Il se produit d'ailleurs dans l'éclairage du champ des dissymétries qui décèlent également la position dissymétrique de la surface de l'épreuve.

Cette analyse des conditions de l'éclairage paraîtra peut-être un peu minutieuse; elle était nécessaire pour expliquer et faire disparaître des anomalies quelquefois désespérantes, spécialement dans les mesures des échelles divisées, effectuées comme essais pour déterminer la précision de l'appareil.

Avant qu'on eût réalisé la double condition exposée plus haut, on obtenait rarement deux fois de suite le même pointé sur un trait si dans l'intervalle on déplaçait tant soit peu la flamme

(¹) Source lumineuse réduite à un point, champ infiniment petit, miroir aplanétique pour l'inclinaison adoptée et sous-tendant exactement, vu de la trace de l'axe optique du microscope sur l'épreuve, un angle superficiel égal à celui de l'objectif, etc.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

éclairante. Avec la flamme du gaz, quelquefois vacillante, l'effet se produisait de lui-même (¹); les erreurs atteignaient une ou deux divisions, c'est-à-dire près de dix fois l'erreur probable ordinaire. En d'autres termes, la position des traits paraissait une fonction capricieuse du temps ou de la position de la flamme.

Depuis l'établissement du nouveau dispositif et l'application des deux règles, toutes les anomalies ont cessé; au contraire, on a constaté bien souvent la fixité des pointés, quel qu'ait été le déplacement de la source lumineuse, lorsque les conditions d'éclat uniforme du champ et de l'anneau oculaire étaient remplies.

L'agrandissement de la dimension angulaire apparente de la source lumineuse par l'adjonction de la lentille collectrice (*voir* p. A.12 et *fig.* 2, *Pl. II*) a du reste facilité beaucoup l'exécution pratique de ces conditions.

Sources de lumière. — On a essayé la lumière des nuées, la lampe modérateur et le gaz d'éclairage. La lumière des nuées donne quelquefois de bons résultats, mais la nécessité d'opérer à toute heure de la journée a fait rejeter cette source et adopter l'emploi de lumières artificielles plus constantes dans leur éclat.

La lampe modérateur à double courant d'air, à cheminée cylindrique, est très-convenable; mais la manipulation et l'entretien des lampes à huile causent toujours un peu d'embarras aux observateurs qui ont généralement préféré l'emploi du gaz. Le bec est formé par une série circulaire de petits trous; la flamme dégage

(¹) L'effet est encore plus sensible lorsque les traits ne sont pas *ébarbés*, c'est-à-dire lorsqu'il existe de chaque côté du trait un bourrelet réfléchissant formant une sorte de miroir cylindrique.

C'est pourquoi on s'est toujours astreint à polir à nouveau la surface d'argent après le tracé des divisions.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

un peu plus de chaleur que celle des lampes, ce qui est un petit inconvénient, mais elle est si large et si homogène, que le réglage des épreuves est plus rapide et plus facile.

Verres de couleur. — On a insisté précédemment (p. A. 42) sur l'usage des verres de couleur pour faciliter les pointés; nous n'y reviendrons pas.

Vis micrométrique du microscope. — La méthode d'étude de la vis micrométrique a été indiquée précédemment (p. A.83); les résultats numériques des observations relatives à la machine n° 1 sont consignés plus loin. Il n'est peut-être pas inutile de rappeler que le succès de ces mesures réside dans le choix des traits sur lesquels on opère; les moindres imperfections entraînent des incertitudes qui rendent illusoire la précision ordinaire des pointés. Il est donc nécessaire de choisir avec beaucoup de soin la partie des traits (doubles, distants de $\frac{3}{100}$ de millimètre) sur laquelle on pointe, de l'amener sous le fil horizontal et de ne chercher à apprécier les pointés que dans le voisinage immédiat de ce fil.

3° Plateau.

Vernier. — Le bord du plateau est divisé en degrés; le vernier fixe donne seulement le $\frac{1}{10}$ de degré, ou 6 minutes d'angle; on en apprécie avec certitude la moitié, c'est-à-dire 3 minutes. Cette approximation est bien suffisante pour l'approximation qu'on est en droit de demander aux mesures : un vernier plus précis aurait été d'une lecture plus pénible, sans utilité. En tout cas, la réitération des mesures d'azimut (p. A.67) réduit à peu de chose l'erreur probable causée par l'insuffisance du vernier.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Vis tangente. — Le plateau de la machine n° 1 peut, lorsque la pince de serrage est libre, être mû avec une vis tangente, destinée à certaines mesures spéciales, qui sera décrite, à l'occasion, lors de la publication des résultats numériques obtenus.

Fixage de l'épreuve. — Il n'est pas inutile d'indiquer le procédé pratique pour fixer les épreuves sur le plateau : il s'agit en effet de fixer solidement l'épreuve sans risquer de l'endommager, ni surtout de la déformer. A cet effet, on fixe provisoirement l'épreuve avec un peu de cire molle, ce qui permet le réglage approximatif. Pour la fixer définitivement, on verse sur chaque angle de l'épreuve une goutte d'*arcanson* (mélange par fusion de 2 parties de colophane et 3 parties de cire ; on le moule en petits bâtons qu'on manie comme la cire à cacheter). Après solidification, l'adhérence est parfaite. Pour détacher l'épreuve, il suffit d'approcher une tige de métal chauffée pour fondre l'arcanson, ou simplement de donner un léger à-coup sur la tranche de la plaque.

4° Chariot et vis micrométrique de la machine.

Tambour divisé de la tête de la vis. — Le tambour divisé de la tête de vis (p. A. 46) porte un encliquetage de 250 dents. Avec un aussi grand nombre de dents, la dimension de chacune d'elles est si petite, que l'observateur a quelque peine à vérifier le retour à la dent *zéro;* aussi, dans les machines n°s 2, 3 et 4, l'encliquetage a été réduit à 100 dents.

Lecture des tours de vis du chariot. — Il est bon d'ajouter qu'on rend très-facile la lecture de l'échelle du chariot en plaçant un papier huilé en arrière du miroir *x* (*Pl. II, fig.* 2,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et p. A.44). La lampe qui sert à l'éclairage de l'épreuve lui donne un certain éclat, qui, réfléchi spéculairement sur l'échelle polie du chariot en fait ressortir les divisions avec beaucoup de netteté.

Difficultés qui se sont présentées dans la construction de la table de correction de la vis du chariot. — Pour construire la table de correction de la vis qui mène le chariot, on a placé sur le plateau une échelle divisée en doubles traits (*voir* plus loin la construction des échelles divisées); on a choisi parmi les meilleurs traits un intervalle fixe de 10 millimètres, et, par le mouvement du chariot, on a amené dans le milieu du champ successivement le premier et le dernier de ces intervalles en recommençant successivement la même opération à partir des différents points de la vis. Chaque opération simple se compose donc de deux groupes de pointés effectués sur les deux traits choisis; le premier groupe de cinq pointés s'effectue sur le premier trait; le second, également de cinq pointés, s'effectue sur l'autre trait amené dans le champ du microscope par le déplacement du chariot. On recommence l'opération en déplaçant l'échelle divisée sur le plateau de façon à ramener le trait initial dans le champ en laissant le chariot fixe; on reprend quelque tours en arrière pour éviter les temps perdus et l'on répète la mesure, qui se trouve ainsi correspondre à une autre portion de la vis.

Une règle métallique fixée sur le plateau et dirigée parallèlement aux rails permet de ramener toujours dans le champ les mêmes parties des traits, condition indispensable pour la concordance des mesures.

Comme cette vis n'est utilisée que pour mouvoir le chariot de longueurs égales à un nombre entier de pas complet, il suffit de

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

faire l'étude des pas entiers sans s'inquiéter des erreurs dont la période est inférieure à un tour.

La longueur adoptée étant 10 millimètres environ, et le pas de la vis de $\frac{1}{2}$ millimètre, on a trouvé pour la mesure de cette longueur 20 tours, plus un appoint (différence des lectures du deuxième trait et du premier trait) exprimé en divisions du tambour au $\frac{1}{300}$ de millimètre environ.

Tableau des observations.

Échelle du chariot.	I. M. MERCADIER. Juillet 1875.	II. M. BAILLE. Juillet 1875.	Moyenne.
mm mm	t d	t d	t d
79 — 69	20 + 8,46	20 + 9,04	20 + 8,75
69 — 59	7,14	7,48	7,31
59 — 49	6,58	6,52	6,55
49 — 39	9,10	9,02	9,06
39 — 29	8,78	8,52	8,65
29 — 19	7,38	7,56	7,47
19 — 9	6,90	6,74	6,82

Chaque nombre est la différence de deux moyennes de cinq pointés (le nombre cinq est choisi pour simplifier; il suffit de doubler la somme des lectures et d'avancer la virgule d'un rang vers la gauche pour avoir la moyenne).

La concordance des pointés faits par deux observateurs différents étant très-satisfaisante, on a pensé que l'on pouvait réduire la moyenne des deux séries à une formule de correction; en effet, on peut représenter cette série moyenne par une expression de la formule

$$l = l_0 + \mathrm{M}n(1 + bn) + p\sin\alpha(n - n_0),$$

l exprimant à une constante l_0 près la valeur réduite d'une longueur mesurée en prenant pour origine le nombre n de tours lu à l'échelle, M, b, p, α, n_0 étant des constantes dont la valeur numérique est donnée par

$$l = l_0 + \mathrm{M}n(1 + 0^d,000375n) + 0^d,92\sin 9^n(n - 18) - 0^d,121\sin 18^n(n - 24).$$

Comme vérification, la réduction de cette formule en nombres comparés à ces deux séries (M = 10) donne des résultats très-satisfaisants, l'écart moyen étant compris entre $0^d,1$ et $0^d,2$.

A la fin de juillet 1875, on crut nécessaire de faire nettoyer la machine par

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

MM. Brunner, et après la remise en état on refit une série de mesures (série III) suivant la marche employée pour les deux précédentes, mais sans s'astreindre absolument, ce qui eût été difficile, à reprendre exactement les mêmes parties des mêmes traits de l'échelle; c'est ce qui explique la petite différence dans la valeur de l'appoint.

La courbe des appoints (construits en prenant pour abscisse la demi-somme des lectures de l'échelle du chariot) est de même forme générale que celle des séries précédentes, mais l'amplitude périodique est notablement plus grande.

Une nouvelle série (série IV) ne donna pas plus de concordance avec la précédente qu'avec les premières. D'autres furent faites par MM. Angot et Cornu (séries V, VI, VII, VIII). Ces six séries furent discutées; on pensa que les divergences, d'ailleurs très-petites, pouvaient s'expliquer par un petit déplacement causé par les trépidations de l'encliquetage. MM. Angot et Mercadier firent alors trois séries (séries IX, X, XI) en fixant à la cire l'échelle divisée à chaque mesure; l'amélioration ne fut pas très-sensible, malgré les soins apportés à cette nouvelle opération. Enfin trois nouvelles séries (séries XII, XIII, XIV) furent faites par M. Angot en changeant l'origine des mesures (3, 13, ..., 63, 73).

Échelle du chariot.	III. M. MERCADIER. 9 août 1875. $\theta = $ ".	IV. M. MERCADIER. 14 août 1875. $\theta = $ ".	V. M. ANGOT. 18 août 1875. $\theta = 21^{o},5$.	VI. M. CORNU. 20 août 1875. $\theta = 24^{o},1$.	VII. M. ANGOT. 21 août 1875. $\theta = 22^{o},0$.
mm — mm	t d	t d	t d	t d	t d
78 — 68....	20 + 4,30	20 + 5,84	20 + 10,68	20 + 9,08	20 + 10,52
68 — 58....	3,70	3,70	6,04	6,70	6,12
58 — 48....	5,20	4,30	6,94	6,81	4,82
48 — 38....	8,33	8,09	11,52	11,17	11,14
38 — 28....	7,00	6,69	8,24	7,44	8,84
28 — 18....	4,07	5,33	6,18	7,36	7,54
18 — 8....	4,30	4,84	7,56	8,00	7,06

Échelle du chariot.	VIII. M. ANGOT. 21 août 1875. $\theta = 21^{o},0$.	IX. M. ANGOT. 31 août 1875. $\theta = 21^{o},8$.	X. M. MERCADIER. 1er sept. 1875. $\theta = 21^{o},6$.	XI. M. ANGOT. 2 sept. 1875. $\theta = 20^{o},5$.
mm — mm	t d	t d	t d	t d
78 — 68.....	20 + 9,15	20 + 9,38	20 + 9,04	20 + 10,00
68 — 58.....	6,12	6,72	6,76	6,74
58 — 48.....	6,41	5,82	5,90	6,50
48 — 38.....	11,14	12,54	11,88	12,54
38 — 28.....	9,36	8,84	8,94	8,66
28 — 18.....	7,82	7,14	7,62	7,18
18 — 8.....	7,22	6,04	6,96	7,24

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Échelle du chariot	XII M ANGOT 3 sept 1875 $\theta = 20°,0$	XIII M ANGOT 3 sept 1875 $\theta = 20°,2$.	XIV M ANGOT 7 sept 1875 $\theta = 21°,0$
mm — mm	t d	t d	t d
73 — 63	20 + 8,02	20 + 7,04	20 + 9,54
63 — 53	4,38	5,76	7,32
53 — 43	7,94	8,34	7,38
43 — 33	11,12	11,20	11,62
33 — 23	7,72	7,38	7,88
23 — 13	6,88	7,38	7,00
13 — 3	7,10	8,02	7,48

Après une nouvelle discussion de ces douze séries et leur réduction à deux series, formées par voie de moyenne, la courbe des appoints moyens présentant une forme dissymétrique, le developpement trigonométrique aurait conduit à une complication extrême pour la représentation empirique des résultats. On adopta alors la méthode exposée en détail précédemment (p. A 88)

En vue de simplifier le calcul, on réduisit chaque série à ce qu'elle serait si l'appoint moyen etait le même pour toutes les séries, ce qui serait arrive pour un choix convenable des deux traits de repères, l'appoint est une si petite fraction de leur distance que cette supposition n'a aucun inconvénient. En conséquence, pour chaque serie, on fit la moyenne des appoints, et l'on retrancha la valeur moyenne ainsi trouvée de la valeur observee, puis on prit la moyenne des différences relatives à la même mesure dans chaque série on obtint ainsi deux groupes.

PREMIER GROUPE . *Moyenne des neuf séries III, IV, . , IX.*

La moyenne des six premières a été combinée à la moyenne des trois dernières pour donner à celles-ci une importance égale à celle des autres.

Échelle du chariot	Difference de l'appoint a la moyenne
mm — mm	d
18 — 8	— 1,10
28 — 18	— 0,82
38 — 28	+ 0,66
48 — 38	+ 3,56
58 — 48	— 1,81
68 — 58	— 1,65
78 — 68	+ 1,16

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

DEUXIÈME GROUPE : *Moyenne des trois séries XII, XIII, XIV.*

Échelle du chariot.	Différence de l'appoint à la moyenne.
mm mm	d
13 — 3	— 0,40
23 — 13	0,84
33 — 23	— 0,27
43 — 33	3,38
53 — 43	— 0,04
63 — 53	— 2,11
73 — 63	+ 0,26

Adoptant les notations de l'exposé précité (p. A. 88), où φ_i représente la correction à apporter à la lecture de la division i de l'échelle, on voit que ces tableaux donnent $\varphi_{18} - \varphi_8$, etc.; le premier suffit, le second n'est utilisé que comme vérification.

Les nombres extrêmes étant, en valeur absolue, très-faibles, on peut simplifier la méthode et se dispenser de calculer le coefficient de proportionnalité c, en le regardant comme égal à zéro, ce qui revient à supposer ici que la moyenne des mesures de l'échelle auxiliaire est considérée comme équivalente à 10 millimètres (ou bien encore $L = h$ d'après la notation de la page A. 89). Comme on ne fait pas de mesures absolues, cette supposition n'a aucun inconvénient.

On a calculé ainsi par addition de proche en proche les valeurs de φ_{18}, φ_{28}, ..., φ_{78} en fonction de φ_8, considérée comme une constante arbitraire : on a alors construit à une grande échelle la représentation graphique de ces valeurs, afin d'effacer les discontinuités inévitables.

A l'aide de cette courbe on a pu calculer les valeurs du second tableau qui contiennent aussi une constante arbitraire φ_3 :

	Valeurs $\overline{\varphi}_i$ relevées sur la courbe.	Valeurs observées.	Différences.
φ_3	$\varphi_8 + 0,40$	φ_3	$\varphi_3 - \varphi_3 + 0,40$
φ_{13}	$\varphi_8 + 0,50$	$\varphi_3 + 0,40$	— 0,10
φ_{23}	$\varphi_8 + 1,65$	$\varphi_3 - 1,24$	— 0,41
φ_{33}	$\varphi_8 + 1,88$	$\varphi_3 + 1,51$	— 0,37
φ_{43}	(point d'inflexion, courbe mal définie)		»
φ_{53}	(point d'inflexion, courbe mal définie)		»
φ_{63}	$\varphi_8 + 0,70$	$\varphi_3 - 0,28$	+ 0,42
φ_{73}	$\varphi_3 + 1,00$	$\varphi_3 + 0,02$	+ 0,98

La concordance est satisfaisante, car, à l'exception du premier et du dernier nombre

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

qui correspondent aux extrémités, non utilisables en général, de ces vis, la différence est de même ordre de grandeur et de même signe. La moyenne des différences est — 0,31, de sorte que, si l'on pose $\varphi_3 - \varphi_3 = 0,31$, la divergence moyenne de la seconde série sera nulle.

Reportant ces valeurs intermédiaires sur le tracé graphique, la courbe a été mieux définie, et le trait continu qui reliait le mieux l'ensemble de tous ces points a servi à tracer la table de correction : finalement on a adopté pour φ_0 la valeur + 3,00 qui rendait toutes les valeurs positives. Comme on l'a indiqué plus haut, la valeur de cette constante est arbitraire, puisqu'elle s'élimine toujours dans les différences de lectures, qui seules entrent en ligne de compte.

Voici quelques termes de cette table de correction, qui a été employée pendant plusieurs mois pour réduire des observations qui n'ont pas été publiées :

Lecture de l'échelle du chariot.	Corrections correspondantes.	Lecture de l'échelle du chariot.	Corrections correspondantes.
mm	d	mm	d
0	2,84	45	0,90
5	3,02	50	0,85
10	3,34	55	1,81
15	3,77	60	2,98
20	4,32	65	3,94
25	4,75	70	4,17
30	4,95	75	3,55
35	4,77	80	2,10
40	3,25		

La machine n° 1 fut employée pendant les mois de septembre et d'octobre à relever un certain nombre d'épreuves du passage de Vénus. Au mois de novembre, on voulut vérifier la table de correction de la vis du chariot : la loi de correction fut trouvée très-modifiée; l'amplitude des périodes avait beaucoup diminué et fait place à une marche presque régulière.

Voici les séries relevées, toujours suivant la même méthode, par MM. Mercadier et Cornu :

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Échelle du chariot.	XV. M. CORNU. 13 nov. 1875. $\theta = 14°,8$.	XVI. M. CORNU. 14 nov. 1875. $\theta = 14°,1$.	Moyenne.
mm — mm	t d	t d	d
78 — 68	20 + 4,02	20 + 3,48	3,75
68 — 58	3,18	2,42	2,80
58 — 48	1,92	3,88	2,90
48 — 38	3,60	5,66	4,63
38 — 28	7,16	5,82	6,49
28 — 18	5,60	8,94	7,27
18 — 8	9,52	5,66	7,59

Voici comment on fut mis sur la trace de la cause de ces divergences.

En examinant le mouvement du chariot, les rails étant fortement huilés, on crut apercevoir que le frottement au départ, faible lorsque l'arrêt du chariot était très-court, croissait avec le temps d'arrêt dans de grandes proportions; on attribua à l'expulsion progressive de l'huile cette augmentation de frottement au départ : en effet, comme la conformation des rails n'est probablement pas la même sur tous les points de la course, la durée d'expulsion est variable en chaque point suivant le temps nécessaire aux lectures; le frottement au départ n'est pas le même aux deux extrémités des courses partielles et l'élasticité des pièces de transmission de la vis au chariot entre en jeu d'une façon inégale (1).

Pour vérifier cette manière de voir, on essuya aussi complétement que possible l'huile des rails : le frottement en marche augmenta notablement, mais le frottement au départ parut plus régulier. Deux séries nouvelles furent exécutées immédiatement :

Échelle du chariot.	XVII. M. CORNU. 15 nov. 1875. $\theta = 13°,9$.	XVIII. M. MERCADIER. 15 nov. 1875. $\theta = 14°,0$.	Moyenne.
mm — mm	t d	t d	d
78 — 68	20 + 2,11	20 + 2,30	2,21
68 — 58	3,14	1,66	2,40
58 — 48	3,80	3,28	3,54
48 — 38	5,46	4,86	5,16
38 — 28	5,84	5,96	5,90
28 — 18	5,02	7,90	6,46
18 — 8	9,36	6,84	8,10

(1) Le magnétisme propre de la fonte, surtout de la fonte rabotée qui constitue les rails et le chariot, peut bien n'être pas étranger à la production de ces anomalies.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La périodicité est, comme on le voit, à peu près effacée; cet accroissement régulier de l'appoint paraît confirmer l'hypothèse relative à la cause des variations inégales.

La machine fut alors démontée pour constater le bon état de toutes les pièces; les rails furent enduits d'huile avec un peu de tripoli, et, pendant 45 minutes, on fit glisser le chariot dans toute sa longueur de course pour effacer les petites irrégularités de frottement qu'on apercevait lorsqu'on laissait glisser le chariot sous la traction de son contre-poids. On essuya le tout avec beaucoup de soin et l'on fit un nouvel essai en remplaçant l'huile par du suif pour graisser les rails. La différence entre le frottement au départ et le frottement en marche a paru encore plus atténuée, du moins en faisant glisser le chariot à la main.

La cause d'inégalité du mouvement paraît donc bien résider dans la variation du frottement au départ. C'est ce que semblent confirmer les cinq séries suivantes :

Échelle du chariot.	XIX. M. CORNU. 16 nov. 1875. $\theta = 13^{\circ},0$.	XX. M. MERCADIER. 16 nov. 1875. $\theta = 13^{\circ},1$	XXI. M. CORNU. 20 nov. 1875. $\theta = 14^{\circ},1$.	XXII. M. CORNU. 20 nov. 1875. $\theta = 14^{\circ},2$.	XXIII. M. CORNU. 22 nov. 1875. $\theta = 9^{\circ},7$.
mm — mm	t d	t d	t d	t d	t d
78 — 68...	20 + 4,48	20 + 4,36	20 + 3,90	20 — »	20 + 3,72
68 — 58...	4,30	4,00	3,18	»	5,32
58 — 48...	4,10	4,48	4,48	5,78	4,82
48 — 38...	6,46	6,06	6,70	6,48	6,98
38 — 28...	»	5,32	7,24	7,33	6,70
28 — 18...	»	5,66	5,40	5,88	5,06
18 — 8...	»	4,60	3,72	3,44	4,04

Ainsi les résultats deviennent de plus en plus réguliers; il est évident que le graissage des rails avec le suif donne de meilleurs résultats qu'avec l'huile.

Si l'on avait eu plus de temps pour continuer ces essais, on aurait probablement trouvé le meilleur enduit; malheureusement le temps pressait : les trois autres machines étaient prêtes, il fallait adopter une marche définitive et uniforme. Or, la perspective de dépenser beaucoup de temps à vérifier périodiquement la table de correction de toutes les machines, de modifier continuellement le travail de réduction des mesures, décida à passer outre et à adopter la méthode de l'échelle auxiliaire, qui dispense entièrement de cette étude.

5° Échelles auxiliaires.

Disposition des traits. — La nécessité d'employer des échelles auxiliaires soit pour l'étude des vis micrométriques, soit pour

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

le relevé des épreuves solaires, a conduit à divers essais pour rechercher la meilleure manière de tracer les divisions.

Dans les appareils de Géodésie et d'Astronomie, les graduations sont formées par des traits sombres sur fond éclairé par réflexion ou diffraction de la lumière; les meilleurs pointés s'obtiennent avec un réticule formé de deux fils parallèles avec lesquels l'observateur cherche à obtenir une apparence parfaitement symétrique, le trait sombre occupant le milieu de l'intervalle entre les deux fils du micromètre.

Dans les mesures actuelles, le même réticule devant servir à effectuer successivement des pointés sur les épreuves solaires et sur les échelles divisées, il était impossible d'adopter un double fil qui aurait été dans de mauvaises conditions pour effectuer des pointés sur les bords estompés des épreuves des bords circulaires des astres. On a alors adopté les conditions inverses : au lieu d'un double fil pointant sur un trait simple, on a disposé un fil simple pointant sur des traits doubles; toutes les divisions des échelles auxiliaires ont été formées de deux traits parallèles au lieu de traits simples, comme on a coutume de les tracer. Cette manière d'opérer a parfaitement réussi (*voir* p. A. 56), et la distance la plus convenable des deux traits constituant une division isolée a été d'environ $0^{mm},03$ avec les grossissements de 10 à 25 fois adoptés pour l'examen des épreuves.

Il n'est peut-être pas inutile de donner quelques détails pratiques sur le tracé de ces divisions.

Échelles sur plaqué d'argent. — *L'échelle normale sur plaqué d'argent* qui a servi d'échelle de comparaison pour toutes les machines, ainsi que les petites échelles auxiliaires destinées à l'étude des vis micrométriques (*loc. cit.*, p. A.55), a été tra-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

cée sur le même plaqué d'argent que les épreuves daguerriennes, afin d'avoir le même coefficient de dilatation.

Pour que la vivacité de l'éclairage fût aussi sensiblement la même que celle des épreuves, la surface argentée a été polie comme pour l'obtention d'une épreuve daguerrienne, c'est-à-dire suivant le procédé indiqué dans le Programme (t. I, 2e Partie, Supplément, p. 12).

Le burin de la machine à diviser était en acier et formé par un biseau à faces courbes se coupant suivant un angle d'environ 40 degrés, dont l'arête courbe rencontrait la troisième face plane et verticale sous un angle d'environ 70 degrés. Le burin coupait le métal sans enlever de copeau; on traçait le nombre voulu de divisions, puis on recommençait l'opération en avançant la tête de la vis de $0^{mm},03$, ce qui fournissait les doubles traits en question. Ainsi tracés, les traits présentaient des bavures ou mieux des bourrelets sur leurs bords, provenant du métal refoulé, circonstance fâcheuse pour l'éclairage des traits, qui paraissaient plus larges et d'apparence variable suivant le sens de l'obliquité de l'éclairage. Après des essais de diverse nature destinés à parer à cet inconvénient, on a reconnu qu'il suffisait de polir à nouveau la plaque, comme pour la préparation de l'épreuve daguerrienne, pour effacer ces bourrelets de métal et obtenir des traits d'une grande perfection; de plus, en prolongeant l'opération du polissage, on parvient à diminuer de plus en plus la largeur des traits et à les amener au degré voulu de largeur; on s'arrête lorsque, vus à travers le microscope, les traits paraissent de même grosseur que le fil du réticule : la bissection de l'intervalle lumineux qui sépare les deux traits par le fil du réticule est alors d'une précision remarquable.

Toutes les échelles auxiliaires ont été tracées à l'École Poly-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

technique par M. Cornu, à l'aide de la machine à diviser de Bianchi, appartenant au cabinet de Physique de cet établissement.

Échelles sur verre. — Le tracé des doubles divisions sur verre a donné lieu à bien des mécomptes. MM. Brunner ont tracé au diamant, sur des glaces travaillées, des traits d'une beauté remarquable; malheureusement, dans les conditions d'éclairage adoptées, ces traits sont peu visibles quand ils sont fins, et, lorsqu'ils sont plus profondément coupés, ils s'écaillent, se fendillent avec le temps et donnent naissance à des jeux de lumière qui ôtent toute précision aux pointés. Les meilleurs résultats ont été obtenus en gravant les traits à l'acide fluorhydrique liquide : à cet effet, les lames de glace ont été enduites de vernis à graveur, divisées à la machine, comme les échelles sur plaqué d'argent et avec le même burin d'acier. L'acide fluorhydrique liquide et fumant à l'air a été étendu au pinceau; on l'a laissé agir pendant dix secondes environ; on a interrompu son action par un lavage à grande eau. L'échelle est alors tracée; on la sèche, on la lave à la benzine pour enlever le vernis; enfin l'on frotte la surface gravée avec un tampon mouillé d'une pâte formée de vernis à graveur et de noir de fumée pour faire ressortir les traits.

Étude optique des lames de glace. — Les échelles auxiliaires sur verre désignées par A, B, C, D, E, etc., et quelques autres relatives à des mesures accessoires, ont été taillées dans une bande de glace de Saint-Gobain, de $2^{mm},1$ d'épaisseur environ, laquelle a été étudiée optiquement de diverses manières :

1° *Avec les anneaux colorés produits entre les deux faces,* les anneaux rouges vus à la flamme lithium-sodium sont assez espacés; on n'apercevait aucune irrégularité de contour;

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

2° *Avec un collimateur et une lunette*, par réflexion à 45 degrés et par réfraction normale, les surfaces ont donné lieu à des dépointements très-faibles, de l'ordre de ceux qu'on peut attendre des erreurs ordinaires de pointé.

Mesure de l'épaisseur de la bande de papier. — La nécessité de protéger l'épreuve contre les rayures qui se produiraient inévitablement pendant le réglage de l'échelle auxiliaire a conduit à coller aux deux extrémités de cette échelle deux petites bandes de papier; la face graduée de l'échelle est donc à une petite distance au-dessus de l'épreuve; de là une petite correction de parallaxe (p. A.105) qui nécessite la connaissance de l'épaisseur de la feuille de papier interposée. Avec un excellent sphéromètre de Brunner appartenant à M. Fizeau, M. Fizeau et M. Cornu ont mesuré cette épaisseur en prenant la différence de hauteur de la lame posée sur ses cales de papier ou sur sa face libre.

	Échelle B.	Échelle C.		Échelle F.
	mm	mm	mm	mm
Lecture du sphéromètre....	0,4374	0,4298	0,4327	0,4136
	0,3299	0,3246	0,3264	0,3134
Différences.....	0,1075	0,1052	0,1063	0,1002

On doit retrancher $\frac{1}{200}$ de la mesure pour avoir la valeur en fonction du millimètre de MM. Brunner.

Pour simplifier, on a adopté $0^{mm},10$ pour le calcul de la correction de parallaxe; la différence avec la réalité, d'ailleurs variable suivant la surface des plaques daguerriennes, serait négligeable (*voir* plus loin les vérifications numériques directes).

Essai de mesure de l'intervalle par un procédé purement optique. — Il est bon de mentionner les essais qui avaient été tentés

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

pour mesurer optiquement par le changement de foyer la différence de hauteur de l'épreuve et des traits (*voir* p. A.108). On cherche à apprécier avec un fort oculaire la position de l'oculaire qui donne la netteté la plus parfaite à l'image des traits de l'échelle, puis l'image des petites stries ou taches accidentelles de l'épreuve. D'après un calcul précédent (p. B.12), les conditions de construction du microscope donnent un rapport de 6 fois $\frac{1}{4}$ pour les variations relatives des foyers conjugués : il y avait donc lieu de tenter l'expérience avec quelque chance de succès, puisque l'épaisseur à mesurer était multipliée par 6. Malheureusement, la mesure est très-incertaine, à cause de la différence de nature d'objet à mettre au point : le double trait donne une ligne brillante sur fond noir; les stries, une ligne grise sur fond clair; les conditions d'appréciation sont très-diverses et entachées de toutes les aberrations du système optique. Voici le détail de quelques-unes de ces mesures :

	Échelle A.		Échelle B.		Échelle C.		Échelle F.	
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
Lecture du rivage de l'oculaire	7,8	5,0	5,0	2,7	5,0	3,1	5,0	4,6
	7,1	5,1	5,5	2,7	5,3	2,7	4,0	3,1
	6,9	5,2	4,2	3,0	6,0	4,0	5,0	4,0
	7,3	5,9	6,0	3,1	5,0	2,7	5,4	3,0
	7,6	4,0	5,8	3,1	5,8	4,0	4,9	4,8
Moyennes	7,34	5,04	5,30	2,92	5,42	3,30	4,86	3,90
Différences	2,30		2,38		2,12		0,96	
Épaisseurs calculées	0,37		0,38		0,34		0,15	

Comme on le voit, les pointés ont été alternés pour éliminer autant que possible la fatigue et les erreurs systématiques de l'œil; les épaisseurs calculées sont plus grandes que l'épaisseur réelle; mais les écarts des observations individuelles sont de l'ordre de la quantité à mesurer.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Il est peut-être bon de retenir le *sens* de l'erreur produite : si, dans la discussion très-détaillée des mesures, on reconnaissait un effet systématique correspondant à la parallaxe des traits, il y aurait lieu de rechercher si, en effet, les aberrations des images ne doivent pas entrer en ligne de compte.

6e Lavage, fixage et nettoyage des épreuves.

Il ne sera pas inutile de compléter ici les opérations nécessaires pour fixer définitivement les images daguerriennes et enlever les taches brunes qui couvrent parfois les épreuves lorsqu'elles ont été maintenues longtemps à l'air dans une atmosphère chargée d'émanations diverses, comme cela arrive généralement dans les laboratoires pourvus de becs de gaz d'éclairage.

Les premières opérations, destinées à rendre la plaque daguerrienne sensible à la lumière, ont été décrites dans le supplément du tome Ier de la présente publication (*Recueil de Mémoires,* etc. Programme des opérations photographiques, p. 2). On supposera donc que la lame de plaqué d'argent a été nettoyée, iodée, bromée, exposée au foyer de la lunette photographique, puis aux vapeurs de mercure, suivant les prescriptions indiquées dans les *Notes pratiques* (*loc. cit.*, p. 11). C'est à cet état que les épreuves du passage de Vénus ont été rapportées en France, dans des boîtes hermétiquement fermées ; l'image solaire était développée, mais la couche sensible existait toujours, et les épreuves ne pouvaient supporter l'action prolongée de la lumière sans s'altérer rapidement.

Les épreuves furent alors lavées et fixées par MM. Fizeau, Cornu et Angot, suivant les indications de M. Fizeau, à l'aide d'un procédé très-simple, dont voici la description :

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Les épreuves sont traitées une à une, et les réactifs sont renouvelés à chaque épreuve nouvelle. C'est une condition indispensable pour obtenir une sécurité complète dans la réussite de l'opération.

Lavage. — Le laboratoire doit être rendu très-sombre, afin d'éviter l'action de la lumière, à l'aide de rideaux épais. On extrait de la boîte l'épreuve à fixer et on la recouvre d'alcool à 40 degrés, qu'on verse goutte à goutte jusqu'à ce que la plaque soit entièrement couverte; puis on la plonge dans une cuvette de porcelaine remplie d'eau distillée en agitant d'une manière continue. La plaque se *mouille* complétement, ce qui n'arriverait pas sans cette opération préalable. On la retire alors avec un crochet d'argent, et on la plonge immédiatement dans une cuvette placée à côté de la première et renfermant une solution récemment filtrée d'hyposulfite de soude au $\frac{1}{25}$ (40 grammes de sel pour 1 litre d'eau distillée). On agite toujours en faisant osciller légèrement la cuvette jusqu'à ce que la teinte jaune de l'iodure d'argent ait entièrement disparu; l'épreuve est désormais insensible à l'action de la lumière. On peut donc ouvrir les rideaux et examiner à loisir l'épreuve dans le bain d'hyposulfite, par réflexion de la lumière directe du jour.

L'épreuve est alors lavée à l'eau distillée. On doit éviter le plus possible le contact des doigts avec le plaqué d'argent; à cet effet, on soulève l'épreuve avec le crochet d'argent tenu de la main gauche, et on la laisse retomber sur les doigts de la main droite, de façon qu'elle porte par le milieu du dessous, c'est-à-dire par la partie de cuivre rouge. On la tient ainsi facilement en équilibre dans une position horizontale. On la dépose alors dans un grand entonnoir; elle n'a de points de contact que par ses

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

quatre angles avec la surface du verre et se lave alors sur ses deux faces avec une grande perfection, sous un courant abondant d'eau distillée versé à l'aide d'une carafe.

Lorsque le lavage est considéré comme suffisant, on sèche l'épreuve; à cet effet, on la saisit avec une *pince plate* à bouts d'argent par un angle, et on la chauffe doucement sur une large flamme d'alcool dans une position presque verticale. On commence par l'angle supérieur. La dessiccation s'opère régulièrement du haut en bas si la plaque a été bien lavée; il ne reste qu'une goutte d'eau à l'angle inférieur tenu par la pince, goutte qui sèche rapidement lorsqu'on pose la plaque sur les doigts pour dégager la pince.

Fixage. — L'épreuve est alors *lavée;* elle est, comme on l'a dit plus haut, insensible à l'action de la lumière, mais la couche mercurielle qui forme les blancs de l'épreuve ne forme qu'un duvet extrêmement léger et altérable; il faut fixer ce duvet. On y parvient, comme l'a découvert autrefois M. Fizeau, en *dorant* l'épreuve de la manière suivante.

On compose une solution en dissolvant 1 gramme de chlorure d'or aussi neutre que possible dans 600 grammes d'eau distillée; d'autre part, on fait une solution de 3 grammes d'hyposulfite de soude dans 400 grammes d'eau distillée. On verse très-lentement et par un filet très-petit la solution du sel d'or dans la solution du sel de soude, en agitant constamment de façon qu'en aucun point du mélange le sel d'or ne se trouve en excès, ce qui produirait une décomposition avec précipitation du métal.

On laisse reposer le mélange environ vingt-quatre heures; le dépôt jaune-brun qui se forme presque toujours doit être très-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

faible ; on décante et l'on filtre, et la liqueur est prête pour le fixage.

L'épreuve est alors posée sur un support convenable muni de vis calantes pour la maintenir parfaitement horizontale. Avec une pipette, on verse sur la surface d'argent autant de liqueur d'or que la surface peut en contenir ; la plaque étant bien séchée, il se forme un bourrelet qui par capillarité retient une épaisseur de 3 à 4 millimètres de hauteur de liquide.

On chauffe alors doucement l'épreuve en approchant en dessous une large flamme de lampe à alcool, qu'on promène de façon à élever uniformément la température de tous les points de la plaque. On surveille l'opération avec beaucoup de soin, en examinant l'épreuve bien éclairée par le jour et en évitant, pour l'observer, la réflexion spéculaire sur la surface argentée.

La couche mercurielle d'un blanc bleuâtre devient mate, de couleur rosée, et prend graduellement un grand éclat. On continue toujours à chauffer, mais sans atteindre l'ébullition vive ; on peut néanmoins aller jusqu'à l'apparition de petites bulles fixes. Lorsque l'éclat de l'épreuve ne gagne plus, on jette rapidement la plaque dans une grande cuvette d'eau distillée, en évitant avec soin qu'elle ne sèche en aucun de ses points, ce qui ferait infailliblement des taches.

On recommence le lavage à l'eau distillée et l'on sèche comme précédemment. L'épreuve est alors définitivement fixée ; elle a gagné non-seulement de la fixité, mais de l'éclat ; examinée par réflexion, les blancs deviennent noirs et d'un noir beaucoup plus sombre qu'avant le fixage. Cette condition est très-précieuse pour l'observation et la mesure des épreuves.

Nettoyage des épreuves. — Après une longue exposition à

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

l'air du laboratoire, les épreuves brunissent soit par l'action du gaz d'éclairage, soit par l'ozone formé par les étincelles des moteurs électriques. On a essayé d'absorber les vapeurs sulfureuses en plaçant dans le laboratoire des terrines remplies de chaux et d'autres d'acétate de plomb; mais ces précautions ont été insuffisantes.

On rend aux épreuves leur éclat primitif, après qu'elles ont été mesurées, en les plongeant dans une solution de cyanure de potassium à 2 pour 100 (20 grammes de cyanure de potassium du commerce et 1 litre d'eau). Il est bon de laver préalablement la surface de l'épreuve avec de l'alcool, puis avec de l'eau distillée, avant de la plonger dans le bain de cyanure.

On surveille l'action du cyanure, afin de ne pas la prolonger inutilement; enfin, on lave et on sèche la plaque, suivant les indications précédemment données.

II. — Détermination des distances des traits de l'échelle normale sur plaqué d'argent pour la comparaison des échelles auxiliaires.

Après qu'on eut reconnu que les inégalités de frottement du chariot étaient la cause de divergences accidentelles dans la valeur des pas successifs de la vis inférieure, il a été convenu de mesurer les épreuves en les rapportant à des traits tracés sur une lame de verre à faces parallèles posée sur l'épreuve suivant une méthode spéciale exposée précédemment (p. A.54).

Une série d'essais assez longs sur la construction et l'emploi de ces glaces divisées a conduit à des résultats que l'on va brièvement rappeler.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Les meilleurs traits pour l'exactitude des pointés sont des traits doubles gravés à l'acide fluorhydrique liquide (l'action de l'acide ne se prolongeant que pendant 10 à 15 secondes), distants de $0^{mm},03$, et remplis de noir de fumée à l'aide du même vernis qui sert à les tracer. Ces traits sont assez profonds et larges; néanmoins, ils laissent entre eux une petite ligne claire d'environ $\frac{1}{10}$ de la largeur totale des deux traits, c'est-à-dire d'environ $0^{mm},005$, que le fil du réticule couvre presque complétement sous un grossissement de $2\frac{1}{2}$ fois par l'objectif: il en résulte que le pointé sur cette ligne est excellent.

Le grossissement total du microscope étant environ 15 fois, l'écart moyen des pointés s'élève rarement à $0^{d},2$ du tambour, c'est-à-dire à $\frac{0^{m.m},2}{500} = \frac{1}{2500}$ de millimètre.

La lame de verre divisée, étant placée sur l'épreuve daguerrienne, risquerait de la rayer; pour éviter cet inconvénient, elle porte deux petites bandes de papier ayant environ $\frac{1}{10}$ de millimètre d'épaisseur, collées à ses extrémités en dehors de la graduation; c'est sur ces petites bandes qu'elle repose. La graduation se trouve donc à $\frac{1}{10}$ de millimètre au-dessus de la surface de l'épreuve; ce petit intervalle produit une erreur de parallaxe et nécessite en général l'emploi d'une correction dont la table a été dressée précédemment p. A.105, mais il n'a aucun inconvénient sensible dans le cas qui va bientôt nous occuper, où l'on a à étudier une échelle dont les traits ont le même intervalle que ceux de l'échelle transparente; la correction de parallaxe, nécessaire en toute autre circonstance, serait la même à chaque mesure partielle et s'éliminerait ici dans les différences.

L'éclairage normal n'est nullement altéré par l'interposition de ces lames transparentes; l'effet de la surface supérieure est de diffuser un peu la lumière dans le champ, ce qui lave de blanc les parties sombres, mais l'effet est à peine sensible sur les parties polies, à cause du grand pouvoir réflecteur de l'argent.

Conditions à remplir dans l'étude des distances des traits de l'échelle auxiliaire transparente. — En réalité, l'emploi d'une échelle auxiliaire transparente constitue une méthode différentielle de mesure, car on rapporte les points des épreuves aux traits de l'échelle auxiliaire à l'aide d'un *appoint* micrométrique de très-petite amplitude.

Toute la précision des mesures (sauf les réserves faites précédemment, p. A.60) des épreuves repose donc sur la précision de la mesure des traits de cette échelle auxiliaire. Il faut donc

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

employer, pour l'étude de ces divisions, une méthode de mesure indépendante de l'emploi de la vis inférieure de la machine, dont la régularité ordinaire est quelquefois troublée par des causes accidentelles dont le sens et la grandeur sont impossibles à prévoir.

D'autre part, il ne faut pas perdre de vue que cette échelle divisée, n'étant qu'un auxiliaire, peut, dans certains cas, introduire des erreurs, et que, par conséquent, le mode de mesure doit tâcher d'éliminer ces erreurs. Ainsi, les plus graves sont l'influence de la réfraction de la lame transparente, de la parallaxe causée par la non-coïncidence des traits avec la surface de l'épreuve. Tout mode d'étude qui ne ferait pas entrer ces causes d'erreur de la même manière dans l'étude de l'échelle transparente et dans l'étude des épreuves doit être rejeté.

Par exemple, il paraîtrait aussi simple que rigoureux d'étudier ces divisions, la surface divisée étant tournée du côté de l'objectif du microscope et éclairée par transparence; on mesurerait ainsi la distance réelle des traits : mais ce n'est pas là le but qu'on doit se proposer, car, en retournant la lame divisée pour l'appliquer sur l'épreuve, on mettrait en jeu les inégalités de réfraction de la lame, l'effet de parallaxe indiqué plus haut, la différence d'éclairement des traits, etc.

Enfin, dans l'étude de chaque échelle auxiliaire, il y a encore une petite difficulté à éviter : c'est l'inconvénient que présentent ces études isolées de n'établir aucun lien entre les échelles auxiliaires et de nécessiter une comparaison ultérieure pour obtenir la concordance de ces échelles.

Comparaison immédiate avec une échelle type. — Échelle normale sur plaqué d'argent. — On évite à la fois tous les incon-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

vénients qu'on vient d'énumérer, à savoir les inégalités de réfraction de la lame, les erreurs de parallaxe, les modifications d'apparence des traits et la comparaison ultérieure des échelles transparentes en effectuant l'étude des traits de ces échelles par une méthode différentielle par comparaison directe avec une *échelle type* dont les traits ont été préalablement bien étudiés.

Voici la marche qui a été suivie :

Une échelle divisée de 40 millimètres a été tracée sur une lame de plaqué d'argent choisie parmi celles qui ont été employées à l'obtention des épreuves; cette échelle a été étudiée à part, comme on le verra bientôt. On la désigne sous le nom d'*échelle normale sur plaqué d'argent*. On a placé sur elle les échelles de verre à étudier, et la comparaison micrométrique des deux systèmes de divisions donne la distance des traits de l'échelle sur verre en fonction de la distance des traits de l'échelle sur plaqué.

Dans cette manière de procéder, l'échelle normale sur plaqué d'argent sert d'*étalon de mesure;* la lame de verre divisée sert d'intermédiaire entre cet étalon et l'épreuve daguerrienne, et, si les circonstances dans lesquelles la comparaison de l'échelle sur verre avec l'épreuve sont identiques avec celles qui se rencontrent dans sa comparaison avec l'étalon, le résultat sera équivalent à la comparaison par *superposition idéale* de l'étalon avec l'épreuve.

Dans les observations réelles, ces circonstances sont aussi identiques que la réalisation expérimentale de conditions théoriques le permet; en effet, il y a identité :

1° Dans la position relative de la lame transparente;

2° Dans l'éclairage du champ à étudier;

3° Dans la production des aberrations causées par la lame.

C'est donc en réalité une série de mesures différentielles qu'on

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

exécute : on observe la différence de distance des traits de l'étalon et des contours de l'épreuve à un même trait de la lame de verre ; les déformations optiques, si elles existent, étant les mêmes, il ne reste plus que les erreurs de pointé ou celles de proportionnalité causées par la vis micrométrique, erreurs excessivement faibles lorsque les grandeurs mesurées sont petites. L'étude directe de la vis, qu'on trouvera plus loin, en donne d'ailleurs la preuve.

L'opération importante se réduit donc à l'étude d'une seule échelle, l'*échelle normale;* les autres études seront de simples comparaisons différentielles. On va décrire succinctement les opérations et donner les résultats numériques qui ont permis d'étudier les divisions de l'échelle normale. Les observations ont toutes été faites par M. Cornu avec la machine n° 1. L'oculaire employé donnait un grossissement de 13 fois environ; l'éclairage était produit par une lampe à huile munie d'un verre vert.

Données numériques relatives à l'étude de l'échelle divisée sur plaqué d'argent.

Les 40 millimètres (traits doubles à $0^{mm},03$) qu'elle comprend ont été partagés en quatre groupes de 10, qu'on a comparés entre eux en superposant une lame de verre divisée en 10 millimètres (*échelle à 11 traits*); cette lame, prise dans le même morceau de glace de Saint-Gobain que celles destinées aux échelles auxiliaires, a été divisée de la même manière et présente les doubles traits décrits plus haut.

Les traits zéro de ces deux échelles superposées ont été placés à une petite distance ($\frac{1}{5}$ de millimètre environ) et rendus exactement parallèles, de manière à pouvoir être bien couverts dans leur partie centrale lumineuse par le fil du réticule. Par construction les traits étant perpendiculaires à la ligne qui joint leurs milieux et les deux fils rectangulaires du micromètre bien réglés, il suffit de rendre le fil *horizontal* du micromètre parallèle au mouvement du chariot pour définir la direction que doivent avoir les traits dans le champ.

On a déterminé avec la vis micrométrique du microscope la distance des deux traits n° zéro, puis celle des deux traits n° 10, en faisant avancer le chariot de la quantité convenable (10 millimètres ou 20 tours de la vis inférieure) avec le moteur électro-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

magnétique. On a effectué cinq pointés sur chaque trait et pris la moyenne des cinq lectures généralement très-concordantes (erreur moyenne $0^d,10$ à $0^d,20$: c'est donc les différences des moyennes de ces deux groupes de lectures qui fournissent les distances des traits.

On a répété la même série d'opérations en avançant la lame de verre de 10 millimètres; son trait zéro était alors voisin du trait n° 10 de l'échelle sur plaqué, et son trait n° 10 du trait n° 20 de la même échelle. On a poursuivi ainsi la comparaison des quatre groupes de 10 millimètres avec la longueur l de l'échelle sur verre; on a obtenu ainsi les résultats suivants:

Traits.	Première série. 13 décembre 1875. $\theta = 11°,2$.	Deuxième série. 14 décembre 1875. $\theta = 9°,6$.	Moyenne.
mm 0-10 de l'échelle normale.	$= l - 1^d,42$	$l - 0,94$	$l - 1,18$
10-20 »	$= l + 0,70$	$l + 0,20$	$l + 0,45$
20-30 »	$= l + 4,56$	$l + 4,66$	$l + 4,61$
30-40 »	$= l + 7,00$	$l + 6,96$	$l + 6,98$
0-40.	$= 4l + 10,84$	$4l + 10,88$	$4l + 10,86$

La différence des deux séries est assez faible, et leur régularité d'allure assez bonne pour qu'on puisse se contenter de cette détermination; en conséquence, si l'on désigne par L la distance des traits 0-40 de l'échelle normale exprimée en divisions du tambour du micromètre, on aura une première équation de condition (α)

$$(\alpha) \qquad L = 4l + 10^d,86,$$

dans laquelle il y a deux inconnues à déterminer, L et l.

Les quatre mesures dont cette équation contient la somme seront prises pour base du contrôle des déterminations ultérieures des subdivisions; on peut les écrire sous la forme d'équations de condition (λ)

$$(\lambda) \qquad \begin{cases} \text{Distance.} \\ \text{0-10. . . . . } = l - 1^d,18 \\ \text{10-20. . . . . } = l + 0,45 \\ \text{20-30. . . . . } = l + 4,61 \\ \text{30-40. . . . . } = l + 6,98 \end{cases}$$

Elles serviront en outre à déterminer ces distances lorsque l sera connu.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

A l'aide du même artifice, on a comparé entre eux les intervalles des traits suivants :

$$0\text{-}5,\quad 5\text{-}10,\quad \ldots,\quad 30\text{-}35,\quad 35\text{-}40.$$

A cet effet, les cinq premiers millimètres de l'échelle de verre ont été successivement portés sur les quatre groupes précédents; désignant par l' cet intervalle de comparaison pris sur cette échelle transparente, on a observé :

Distance des traits.		Première série. 15 déc. 1875. $\theta = 9°,1$.	Deuxième série. 20 déc. 1875. $\theta = 9°,9$.	Moyenne.
0-5 mm de l'échelle normale	$=$	$l' - 2^d,80$	$l' - 1^d,98$	$l' - 2^d,39$
5-10 »	$=$	$l' - 1,60$	$l' - 1,54$	$l' - 1,57$
0-10	$=$	$2l' - 4,40$	$2l' - 3,52$	$2l' - 3,96$
30-35 »	$=$	$l' + 1,52$	$l' + 1,20$	$l' + 1,36$
35-40 »	$=$	$l' + 2,00$	$l' + 2,06$	$l' + 2,03$
30-40	$=$	$2l' + 3,52$	$2l' + 3,26$	$2l' + 3,39$

Ces nouvelles mesures doivent présenter dans leur comparaison avec les premières une vérification : en effet, $2l'$ est très-voisin de l. Soit x la différence, $2l' + x = l$; on a ainsi deux équations distinctes pour calculer x :

$$\text{Traits } 0\text{-}10^{mm} \ldots\ldots\ldots \quad 2l' - 3^d,96 = l - 1^d,18,$$
$$\text{Traits } 30\text{-}40^{mm} \ldots\ldots\ldots \quad 2l' + 3^d,39 = l + 6^d,98,$$

ce qui donne

$$x = 2l' - l = 3^d,96 - 1^d,18 = 2^d,78$$
$$x = 2l' - l = 6^d,98 - 3^d,39 = 3^d,59$$
$$\text{Différence} \ldots\ldots\ldots \quad 0^d,81$$

L'erreur est donc de $0^d,81$.

Comme chaque valeur est donnée par la combinaison de trois observations, et que l'erreur est la différence de deux pareils systèmes, l'erreur de $0^d,81$ comprend la somme d'incertitudes de six observations; elle est donc très-admissible (1).

(1) On pourrait penser que la vérification serait plus satisfaisante si l'on comparait la proportionnalité des mesures au lieu de leur identité : il est, en effet, naturel de croire que les variations de température, les petits changements inévitables survenus

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On réduira cette erreur à moitié $0^d,40$ (environ $\frac{1}{1250}$ de millimètre) en prenant la moyenne des deux résultats, ce qui donnera une deuxième équation de condition

$$(\beta) \qquad 2l' - l = 3^d,185,$$

dans laquelle l' est une nouvelle inconnue.

Enfin, pour obtenir une troisième équation de condition, on a mesuré successivement chacun des intervalles

0-1, 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, ..., 35-36, 36-37, 37-38, 38-39, 39-40,

à l'aide du micromètre, d'abord par deux séries spéciales et ensuite par trois séries (incomplètes pour le second groupe), lors de la comparaison des échelles à 7 traits (on trouvera plus loin le détail de cette comparaison dans l'appendice II).

Ces mesures ont été effectuées en faisant reposer la lame divisée sur l'échelle d'argent dans la position des comparaisons précédentes (ou des comparaisons ultérieures pour les échelles à 7 traits). On n'a pas, pour ces mesures, utilisé les pointés effec-

---

dans l'appareil aient modifié l'évaluation de certains éléments sans en altérer les grandeurs relatives; il y a donc, tout au moins, lieu d'examiner la différence des quotients des évaluations des mêmes éléments

$$\frac{l - 1,18}{2l' - 3,96} - \frac{l + 6,98}{2l' + 3,39},$$

au lieu de considérer, comme ci-dessus, la différence

$$[(2l' - 3,96) - (l - 1,18)] - [(2l' + 3,39) - (l + 6,98)].$$

Il est facile de prouver que ces deux modes de comparaison reviennent identiquement au même dans le cas où les appoints sont très-petits par rapport aux grandeurs à mesurer; en effet, la différence de ces quotients est de la forme

$$\frac{y - \xi}{y' - \xi'} - \frac{y - \eta}{y' - \eta'}$$

ou

$$\frac{y}{y'}\left[\left(1 - \frac{\xi}{y}\right)\left(1 + \frac{\xi'}{y'} + \frac{\xi'^2}{y'^2} + \dots\right) - \left(1 - \frac{\eta}{y}\right)\left(1 + \frac{\eta'}{y'} + \frac{\eta'^2}{y'^2} + \dots\right)\right].$$

Comme y et y' sont sensiblement égaux, l'expression se réduit, au signe près, à $\xi - \xi' + \eta' - \eta$; c'est précisément ce à quoi se réduit l'équation de la différence

$$[(y' - \xi') - (y - \xi')] - [(y' - \eta') - (y - \eta)]. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

B.6.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

tués sur les traits de l'échelle transparente : l'échelle ne figurait que pour conserver les mêmes conditions de réfraction.

Résumé.

Distance des traits de l'échelle sur plaqué d'argent.

	0-1.	1-2.	2-3.	3-4.	4-5.	Sommes.
	d	d	d	d	d	d
I. Échelle de 10mm (1).	499,42	500,60	500,24	500,20	500,66	2501,12
II. Échelle 7 traits A (2).	500,34	501,26	500,62	500,92	500,92	2504,06
III. Échelle 7 traits B (3).	500,58	501,14	500,32	500,54	500,74	2503,32
IV. Échelle de 10mm (4).	500,30	501,26	500,30	500,20	500,78	2502,84
V. Échelle 7 traits C (5).	500,12	501,44	500,20	500,82	500,78	2503,36
	2500,76	2505,70	2501,68	2502,68	2503,88	12514,70
Moyenne....	500,152	501,140	500,336	500,536	500,776	2502,94

Distance des traits de l'échelle sur plaqué d'argent.

	35-36.	36-37.	37-38.	38-39.	39-40.	Sommes.
	d	d	d	d	d	d
I. Échelle de 10mm...	500,52	500,62	500,82	501,38	502,62	2505,96
II. Échelle 7 traits A .	»	501,16	500,86	»	»	»
III. Échelle 7 traits B..	»	501,22	500,78	»	»	»
IV. Échelle de 10mm...	501,20	501,10	500,30	500,38	502,46	2505,44
V. Échelle 7 traits C..	»	501,14	500,69	»	»	»
	1001,72	2505,24	2503,45	1001,76	1005,08	5011,40
Moyenne.....	500,86	501,048	500,69	500,88	502,54	»

Somme des deux séries complètes..... 2505d,70,
Somme des cinq moyennes..... 2506d,02.

Dans cette dernière série, la moyenne des sommes n'est plus, comme dans la série précédente, égale à la somme des moyennes, à cause des lacunes qui y existent : on

(1) 17 décembre 1875.. .... θ = 9°,2.
(2) 18 décembre 1875 . .... θ = 9°,7.
(3) 20 décembre 1875.... .. θ = 9°,0.
(4) 21 décembre 1875 ..... θ = 10°,3.
(5) 24 décembre 1875..... θ = 12°,0.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

adopta de préférence la somme des moyennes 2506,02 pour représenter l'intervalle 35-40 comme correspondant à un plus grand nombre d'observations et surtout comme correspondant aux observations des traits 36, 37, 38 qui seront employés à la comparaison des échelles auxiliaires.

Bien que ces deux séries de mesures doivent, en réalité, servir comme mesures relatives et non absolues, il est bon d'en contrôler la précision par les déterminations précédentes.

Il doit encore ici se présenter une vérification analogue aux précédentes; on a, en effet, deux expressions différentes de la distance 0-5 et 35-40 qui devraient être identiques.

Distance 0- 5.....	$l' - 2^d,39 = 2502^d,94$	d'où	$l = 2505^d,33$
Distance 35-40.....	$l' + 2^d,03 = 2506^d,02$	d'où	$l' = 2503^d,99$
		Différence..... ...	$1^d,34$

L'erreur $1^d,34$, représentant la somme d'incertitudes de $2(5+2) = 14$ observations, est parfaitement admissible; il est naturel d'attribuer cette petite discordance à ces deux longues séries, dans lesquelles les chances d'erreur sont multiples.

En prenant la moyenne des deux résultats, ce qui réduit l'erreur à la moitié, $0^d,67$ (un peu plus de $\frac{1}{1500}$ de millimètre), on conclut la troisième équation de condition

$$l' = 2504^d,66. \tag{7}$$

Des trois équations (α), (β), (7) on déduit

$$\begin{aligned} l' &= 2504^d,66, \\ l &= 5006^d,135, \\ L &= 20036^d,40. \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de déterminer la position des deux groupes de six traits, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 35, 36, 37, 38, 39, 40 des deux extrémités de l'échelle, qui seront les seuls utiles pour la détermination par comparaison des traits des échelles sur verre (A, B, C). On a toutes les mesures nécessaires pour cette détermination.

En effet, on a mesuré individuellement la distance des traits consécutifs 0-5 et 35-40; il suffirait donc d'ajouter les distances des traits 0-5 à partir de zéro et de retrancher celles des traits 40-35 du nombre $20035^d,42$, qui représente la distance 0-40. Mais, comme les concordances des valeurs déterminées deux fois n'ont pas été rigoureuses et qu'on a pris des moyennes, il faut introduire une correction, destinée à rétablir les vérifications numériques.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Ainsi on a trouvé :

Distance 0- 5..... .	$l' - 2^d,39 = 2502^d,94$	d'où	$l' = 2505^d,33$
Distance 35-40...	$l' + 2^d,03 = 2506^d,02$	d'où	$l' = 2503^d,99$
	Différence.....		1,34

On a adopté la moyenne

$$l' = 2504^d,66;$$

par suite, la somme des cinq intervalles 0-5 doit être diminuée de la différence $\frac{1}{2}(1,34)$ existant entre la moyenne et elle.

De même, la somme des cinq intervalles 0-5 doit être augmentée de la même quantité.

On répartira cette différence $0^d,67$ sur les cinq distances, c'est-à-dire qu'on ajoutera à chacune des cinq premières distances $\frac{1}{5}\,0^d.67 = -0^d,134$ et aux cinq dernières $= +0^d,134$.

Distance.			
0-1.....	$500^d,152 - 0^d,134 =$		$500^d,018$
1-2.....	$501,140 - 0,134 =$		$501,006$
2-3.....	$500,336 - 0,134 =$		$500,202$
3-4.....	$500,536 - 0,134 =$		$500,402$
4-5.....	$500,776 - 0,134 =$		$500,642$
	$2502,940$		$2502,270$
		+	$2,39$
Vérification.....	$l' =$		$2504,66$

Distance.			
35-36.....	$500^d,860 + 0^d,134 =$		$500^d,994$
36-37.....	$501,050 + 0,134 =$		$501,184$
37-38.....	$500,690 + 0,134 =$		$500,824$
38-39.....	$500,880 + 0,134 =$		$501,014$
39-40.....	$502,540 + 0,134 =$		$502,674$
	$2506,020$		$2506,690$
		—	$2,03$
Vérification.....	$l' =$		$2504,66$

Avec cette légère modification, qui n'est autre qu'une interpolation, nous sommes

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

assurés que les vérifications numériques seront complètes pour les divisions 0, 1, 2. 3, 4, 5, et 35, 36, 37, 38, 39, 40.

On déterminera les intervalles 0-10, 10-20, 20-30, 30-40 avec les équations (λ), puisque la valeur de l est maintenant connue; d'où l'on conclut

Distance.	d
0-10	5004,955
10-20	5006,585
20-30	5010,745
30-40	5013,115

Valeurs définitives. — En procédant par addition à partir du trait zéro des intervalles obtenus, on arrive à la table suivante :

Trait.	d	Différence. d
0	0,00	500,02
1	500,02	501,01
2	1001,03	500,20
3	1501,23	500,40
4	2001,63	500,64
5	2502,27	
10	5004,96	
20	10011,54	
30	15022,29	
35	17528,73	500,99
36	18029,72	501,18
37	18530,90	500,82
38	19031,72	501,01
39	19532,73	502,67
40	20035,40	

L'unité adoptée est la division du tambour du microscope de la machine n° 1 : c'est environ $\frac{1}{500}$ de millimètre (*voir* p. A.69 et suivantes).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Vérification directe de la table de correction de la parallaxe des traits de l'échelle auxiliaire.

L'emploi de l'échelle auxiliaire, dont le plan des traits est environ à $\frac{1}{10}$ de millimètre au-dessus de l'épreuve, nécessite une petite correction dont la théorie et la table ont été données précédemment (p. A.105).

Bien que les considérations sur lesquelles repose la détermination de cette correction soient très-simples, on a jugé utile de vérifier par des mesures directes la grandeur et le signe de cette correction et de justifier de l'efficacité de la table pour annuler ou au moins réduire à une grandeur insensible l'effet prévu par l'analyse géométrique de la marche des rayons.

On est parvenu à la formule très-simple (p. A.106)

$$\frac{\varpi}{\delta} = \frac{x}{f},$$

où ϖ est la correction correspondant à un point situé à une distance x de l'axe du microscope, f étant la distance focale de ce microscope et δ l'intervalle compris entre le plan de l'épreuve et le plan de l'échelle.

Il n'est pas difficile de voir que, vu la faible valeur de δ, la correction ϖ, au signe près, peut être considérée indifféremment comme la parallaxe des traits relativement à l'épreuve ou comme la parallaxe des points de l'épreuve relativement aux traits de l'échelle auxiliaire.

D'autre part, la fonction qui donne ϖ étant linéaire par rapport à x, et les mesures x n'entrant que par leur différence, l'origine de x peut être arbitraire, pourvu que l'on considère à la fois les deux pointés différents en parallaxe.

Le problème de la vérification expérimentale de la valeur de cette parallaxe a consisté à rechercher une disposition permettant de mesurer une même longueur de deux manières, l'une directement, donnant la vraie grandeur, l'autre indirectement par rapport aux traits d'une échelle auxiliaire (dans des conditions aussi identiques que possible avec le cas des mesures des épreuves), donnant une mesure entachée de l'er-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

reur totale de la parallaxe; la différence des résultats devra donc donner la valeur de la correction.

Voici le détail du mode expérimental adopté :

On a obtenu sur plaqué d'argent, au daguerréotype (1), une petite échelle formée de cinq traits simples, distants de $\frac{1}{2}$ millimètre, α, β, γ, δ, ε : trois d'entre eux seulement ont été utilisés, β, γ, δ. Les traits étaient assez nets et se prêtaient à des pointés dont la précision était à fort peu près identique à celle des bonnes épreuves daguerriennes du passage de Vénus.

Cette échelle fut placée sur le plateau de la machine micrométrique de façon que l'axe de rotation du plateau passât vers le milieu de l'intervalle des deux traits γ, δ; cette condition était facile à remplir, car, lorsque le chariot est au n° 42 de son échelle, l'axe du microscope, l'axe de rotation du plateau est en coïncidence avec l'axe optique moyen du microscope. Cette disposition était destinée à rendre symétrique le retournement de 180 degrés par rapport au centre du champ du microscope.

On a superposé une échelle auxiliaire (2) sur verre reposant sur l'échelle photographiée par l'intermédiaire de deux petites bandes de papier collées sur la surface divisée; l'épaisseur de cet intermédiaire était exactement la même que celle des bandes collées sur la surface des échelles auxiliaires servant à la mesure des épreuves du passage (A, B, C, etc.), car les bandes ont été prises dans la même feuille de papier, collées le même jour et dans des conditions identiques : les mesures directes rapportées plus haut en font foi (p. B.30). Les divisions de cette échelle auxiliaire furent examinées avec soin; on choisit les trois meilleurs traits consécutifs IV, V, VI, et on les plaça symétriquement relativement aux traits de l'échelle photographiée dans

---

(1) Cette échelle a été obtenue par M. Cornu, au laboratoire de l'École Polytechnique, en prenant une épreuve d'une petite échelle tracée à la machine à diviser sur une couche très-légère de noir de fumée : l'échelle était formée de cinq traits distants de 2 millimètres; l'appareil photographique (simple chambre noire à portraits, mais dont l'objectif était très-diaphragmé intérieurement) était placé à une distance calculée pour réduire dans le rapport de 4 à 1.

La couche de noir de fumée s'obtient en passant rapidement la lame de glace sur laquelle on veut tracer les divisions au-dessus d'une lampe à huile dont la lame écrase légèrement la flamme; le dépôt fuligineux est très-uniforme; on augmente progressivement son opacité en répétant l'opération; on doit s'en tenir à une faible épaisseur, sans quoi les traits s'égrillent sous l'action du tracelet.

Cette échelle sur noir de fumée était éclairée par transparence par un verre dépoli placé en arrière et recevant un large faisceau de lumière solaire.

(2) C'était l'échelle à onze traits distants de 1 millimètre qui avait servi à l'étude de l'échelle normale sur plaqué d'argent (*voir* plus haut, p. B.40).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

l'ordre IV, α, β, V, γ, δ, VI (*fig.* 1). Grâce au réglage des traits β, γ et à la valeur du pas de la vis conduisant le chariot ($\frac{1}{2}$ millimètre), on amena le milieu de l'intervalle $\alpha\beta$ dans l'axe du microscope après avoir bien réglé le parallélisme du mouvement du chariot et celui du réticule, ainsi que le parallélisme du réticule avec les traits. Cette dernière condition s'obtint en tournant le plateau jusqu'à l'azimut Az = 82 degrés. On releva alors les traits IV, β, V, en faisant cinq pointés sur chaque trait; puis, déplaçant le chariot de deux tours, on amena le milieu de γ, δ dans le milieu du champ et l'on releva les traits V, γ, δ, VI. Pour éliminer certaines dissymétries, toujours à craindre dans ces observations, on répéta ces mesures en ordre inverse en tournant le plateau de 180 degrés : Az = 262 degrés.

Voici les détails des mesures : on ne donne que les moyennes des cinq pointés exprimés en divisions du tambour ou $\frac{1}{500}$ de millimètre; ces pointés étaient d'ailleurs très-concordants; l'erreur moyenne de ces pointés atteint à peine $0^d,20$.

Première série. — Observateur : M. Cornu.
12 février 1876, $\theta = 5°,8$.

Disposition des traits dans le champ du microscope pour Az = 82 degrés :

Fig. 1.

Az = 82°,0.

Échelle du chariot.						Différences.
		IV.	α.	β.	V.	
mm		d	d	d	d	β — V = 142,32
43,0	Moyenne des 5 pointés.	785,34	»	425,70	283,38	IV — V = 501,96
		V.	γ.	δ.	VI.	V — γ = 108,78
						γ — δ = 251,44
42,0	Moyenne des 5 pointés.	783,72	674,94	423,50	283,94	V — VI = 499,78

Retournement : Az = 262°,0.

		VI.	δ.	γ.	V.	γ — V = 110,44
						δ — γ = 250,76
42,0	Moyenne des 5 pointés.	815,00	675,66	424,90	314,46	VI — V = 500,54
		V.	β.	α.	IV.	V — β = 141,88
41,0	Moyenne des 5 pointés.	814,86	672,98	»	312,96	V — IV = 501,90

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Résumé. Moyenne des valeurs....

β-V	= 142,10	$\frac{\beta\gamma}{2} = 251,71$
γ-V	= 109,61	
γ-δ	= 251,10	
IV-V	= 501,93	
V-VI	= 500,16	

Immédiatement après, on fit une deuxième série en déplaçant l'échelle de verre par rapport aux traits de l'échelle photographiée, de manière à les mettre dans l'ordre IV, β, γ, V, δ, ε, VI (*fig.* 2). Grâce à la valeur du pas de la vis du chariot, qu'on déplaça d'un nombre impair de tours ou de $\frac{1}{2}$ millimètre, on put amener le milieu de δε au milieu du champ, relever les traits VI, δ, V, puis V, γ, β, IV, et répéter les mesures en ordre inverse après retournement du plateau.

Deuxième série. — Observateur : M. Cornu.

$\theta = 6°,3.$

Disposition des traits dans le champ du microscope pour Az = 82° :

Fig. 2.

Az = 262°,0.

Échelle du chariot.		VI.	ε.	δ.	V.	Différence.
		d	d	d	d	δ — V = 118,78
mm 42,5	Moyenne des 5 pointés.	807,32	»	425,86	307,08	VI — V = 500,24
		V.	γ.	β.	IV.	V — γ = 133,06
41,5	Moyenne des 5 pointés.	807,78	674,72	422,80	305,80	γ — β = 251,92
						V — IV = 501,98

Az = 82°,0.

		IV.	β.	γ.	V.	γ — V = 134,32
42,5	Moyenne des 5 pointés.	791,36	674,62	423,80	289,48	γ — β = 250,82
						IV — V = 501,88
		V.	δ.	ε.	VI.	V — δ = 117,42
41,5	Moyenne des 5 pointés.	789,96	672,54	»	290,16	V — VI = 499,80

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Résumé. Moyenne des valeurs....

γ-V	= 133,69	$\overline{\overline{\gamma\delta}} = 251,79$
δ-V	= 118,10	
β-γ	251,37	
IV-V	501,93	
V-VI	500,02	

Dans cette double série on a réalisé la condition, dont il a été parlé plus haut, d'effectuer la mesure de la même longueur de deux manières différentes : l'une en vraie grandeur, l'autre avec une erreur de parallaxe ; l'opération a été conduite de manière à offrir deux fois le même résultat, afin de montrer l'ordre d'approximation sur lequel on peut compter.

En effet, dans la première série, on a mesuré directement la distance $\gamma\delta$ (*fig.* 1) : dans la deuxième indirectement, en deux fois, par l'intermédiaire du trait V (*fig.* 2) ; la somme $\gamma V + V\delta$ donnera $\gamma\delta$. Mais, dans cette dernière manière de procéder, chacune des mesures γV et $V\delta$ était entachée de l'erreur de parallaxe, puisque le trait V n'était pas dans le plan des traits $\gamma\delta$. Dans les mesures consécutives γV et $V\delta$ par exemple, le trait V occupait d'abord l'extrémité droite du champ pour la mesure γV, puis l'extrémité gauche du champ pour la mesure $V\delta$; il est facile de voir, en se reportant à la figure de la page A.105, que les deux effets de parallaxe du trait V sont de sens contraire dans les deux cas, puisque les deux positions de ce trait sont de part et d'autre de l'axe du microscope ; mais, dans la somme $\gamma V = V\delta$, ces effets s'ajoutent en valeurs absolues pour produire une erreur correspondant à la distance absolue de ces deux positions du trait V, c'est-à-dire à deux tours de la vis du chariot, ou 1 millimètre ; quant au sens de l'erreur, il est facile de le reconnaître : le trait V étant, dans les deux cas, du même côté de l'axe du microscope que les traits γ ou δ, et plus éloigné de cet axe, la position apparente du trait V sur le plan de $\gamma\delta$ est plus éloignée de l'axe que γ ou δ ; les distances à γ et δ sont donc trop grandes ; par suite, la somme $\gamma V + V\delta$, que nous représenterons par $\overline{\overline{\gamma\delta}}$, doit être plus grande que la valeur $\overline{\gamma\delta}$ mesurée en une fois. La différence mesure la parallaxe y du trait V correspondant à un déplacement de 1 millimètre dans le plan de l'échelle de verre.

C'est en effet ce que l'expérience donne :

$$\overline{\overline{\gamma\delta}} = 251,79 > \overline{\gamma\delta} = 251,10, \qquad \text{Différence...} \quad + 0^{d},69 = y.$$

Les mêmes séries fournissent également $\overline{\overline{\beta\gamma}}$ et $\overline{\beta\gamma}$:

$$\overline{\overline{\beta\gamma}} = 251,71 > \overline{\beta\gamma} = 251,37, \qquad \text{Différence...} \quad + 0^{d},34 = y.$$

La différence est encore dans le sens prévu ; elles devraient être rigoureusement

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

égales si les mesures avaient une précision suffisante. Prenons donc la moyenne de ces deux valeurs, qui représentent y :

$$y = 0^{d},515.$$

Telle est la valeur de la parallaxe des traits correspondant au déplacement de 1 millimètre dans le plan de l'échelle auxiliaire.

Le sens de l'erreur est donc vérifié : on peut aller plus loin et déduire de la valeur moyenne y de l'erreur la valeur approchée de la distance δ de l'échelle et de l'épreuve, à l'aide des équations

$$\frac{\varpi}{\delta} = \frac{x}{f} \quad \text{et} \quad \frac{\varpi'}{\delta} = \frac{x'}{f},$$

où ϖ et ϖ' sont les corrections parallactiques correspondant à des pointés effectués respectivement à des distances x et x' de l'axe du microscope, δ l'intervalle de l'échelle et de l'épreuve, et f la distance de l'objectif du microscope; d'où l'on déduit

$$\frac{\varpi - \varpi'}{\delta} = \frac{x - x'}{f}.$$

Ici $\varpi - \varpi' = y = 0^{d},515$, $x - x' = 1^{mm} = 500^{d}$, $f = 100^{mm}$, et δ est l'inconnue exprimée en millimètres comme f :

$$\delta = 100\,\frac{0.515}{500} = 0^{mm},103.$$

On conclut donc de la valeur moyenne de y que la distance de l'échelle à l'épreuve est $0^{mm},103$, conformément aux mesures directes (p. B.30). C'est par une coïncidence fortuite que l'approximation paraît aussi grande; la vérification est donc tout au moins très-satisfaisante.

Les séries fournissent divers sujets intéressants d'examen; on peut, en particulier, y voir que les pointés sur les doubles traits de l'échelle sur verre donnent une approximation plus grande que les traits photographiés; en effet, la distance IV-V est égale à 501,93 dans les deux séries : l'exactitude est donc ici fortuitement parfaite; la distance V-VI, 500, 16 et 500, 02 donne une erreur de 0, 14 seulement.

Les traits α, β, γ, δ, ε proviennent de la réduction de 1 à 4 d'une échelle tracée avec une bonne machine à diviser dont on utilisait des pas entiers. La distance $\beta\gamma$ doit donc être très-sensiblement la même que $\gamma\delta$: les mesures directes donnent respectivement 251,37 et 251,10; la différence $0^{d},27$ représente l'erreur de division augmentée de l'erreur de pointé; les mesures indirectes donnent 251,71 et 251,79; la différence 0,08 représente l'erreur de division augmentée de l'erreur de pointé sur les traits photographiés et sur les traits de l'échelle auxiliaire.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Ces exemples donnent une idée très-nette de l'ordre de grandeur des erreurs qu'on commet avec la machine micrométrique, les échelles et les épreuves.

Il reste à montrer qu'en appliquant aux lectures directes les nombres de la table de correction (p. A.108) suivant la règle pratique appliquée p. A.71, les différences $\overline{\overline{\gamma\delta}} - \overline{\gamma\delta}$ et $\overline{\overline{\beta\gamma}} - \overline{\beta\gamma}$ deviennent, sinon nulles, du moins de l'ordre des erreurs moyennes de pointé $0^d,10$ à $0^d,20$, et ne sont pas nécessairement positives.

Il n'est pas nécessaire de transcrire ici la table de correction de parallaxe de la machine n° 1 (p. A.108), qui présente une simplification (1). La règle consiste à ajouter à chaque trait de l'échelle auxiliaire le nombre constant $0^d,50$ et aux pointés intermédiaires la millième partie de la lecture correspondante.

On va reproduire les tableaux numériques des deux séries, en ajoutant, sous la rubrique *Corr. par. trait*, la correction indiquée par la table, et l'on calculera les résultats analogues avec les nombres corrigés :

Première série.

	IV.	α.	β.	V.	Différences corrigées de la parallaxe.	
	d	d	d	d		d
Pointés.....	785,34	»	425,70	283,38	β′ — V	142,25
Corr. par. trait..	0,50	»	0,43	0,50	IV — V	501,96
Nombres corrigés.	785,84	»	426,13	283,88		
	V.	γ.	δ.	VI.		
Pointés.....	783,72	674,94	423,50	283,94	V — γ′ =	108,61
Corr. par. trait...	0,50	0,67	0,42	0,50	γ′ — δ′ =	251,69
Nombres corrigés.	784,22	675,61	423,92	284,44	V — VI =	499,78
	VI.	δ.	γ.	V.		
Pointés.....	815,00	675,66	424,90	314,46	γ′ — V =	110,36
Corr. par. trait...	0,50	0,68	0,42	0,50	δ′ — γ′ =	251,02
Nombres corrigés.	815,50	676,34	425,32	314,96	VI — V =	500,54
	V.	β.	α.	IV.		
Pointés.....	814,86	672,98	»	312,96	V — β′ =	141,71
Corr. par. trait...	0,50	0,67	»	0,50	V — IV =	501,90
Nombres corrigés.	815,36	673,65	»	313,46		

(1) On s'est aperçu, depuis la mise en usage des tables de correction des autres machines, que la même simplification aurait pu s'appliquer à ces tables si l'on avait pris pour constante $0^d,75$, c'est-à-dire la millième partie de la lecture correspondant au milieu du champ, au lieu de $0^d,50$, constante adoptée.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Résumé. Moyennes des valeurs corrigées .....

β'-V = 141,98	$\overline{\beta'\gamma'}$ = 251,47
γ'-V = 109,49	
γ'-δ' = 251,36	
IV-V = 501,93	
V-VI = 500,10	

Deuxième série.

	VI.	ε.	δ.	V.	Différences corrigées de la parallaxe.
	d	d	d	d	
Pointés.....	807,32	»	425,86	307,08	δ — V' = 118,71
Corr. par. trait...	0,50	»	0,43	0,50	VI — V = 500,24
Nombres corrigés.	807,82	»	426,29	307,58	
	V.	γ	β.	IV.	
Pointés.....	807,78	674,72	422,80	305,80	V — γ' = 132,89
Corr. par. trait...	0,50	0,67	0,42	0,50	γ' — β' = 252,17
Nombres corrigés.	808,28	675,39	423,22	306,30	V — IV = 501,98
	IV.	β.	γ.	V.	
Pointés.....	791,36	674,62	423,80	289,48	γ' — V = 134,24
Corr. par. trait...	0,50	0,67	0,42	0,50	β — γ' = 251,07
Nombres corrigés.	791,86	675,29	424,22	289,98	IV — V = 501,88
	V.	δ.	ε.	VI.	
Pointés.....	789,96	672,54	»	290,16	V — δ' = 117,25
Corr. par. trait...	0,50	0,67	»	0,50	V — VI = 499,80
Nombres corrigés.	790,46	673,21	»	290,66	

Résumé. Moyennes des valeurs corrigées .....

γ'-V = 133,57	$\overline{\gamma'\delta'}$ = 251,55
δ'-V = 117,98	
β'-γ' = 251,63	
IV-V = 501,93	
V-VI = 500,02	

Les corrections n'ont évidemment apporté aucun changement aux distances IV-V et V-VI, puisque ces corrections sont identiques pour les traits de l'échelle auxiliaire.

Les valeurs corrigées $\overline{\beta'\gamma'}$ et $\overline{\gamma'\delta'}$ sont inférieures aux valeurs primitives $\overline{\beta\gamma}$ et $\overline{\gamma\delta}$, puisque l'effet de la correction est précisément de les diminuer.

Mais on peut se demander pourquoi les valeurs directement observées $\overline{\beta'\gamma'}$ et $\overline{\gamma'\delta'}$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

sont augmentées de $0^d,25$ relativement aux valeurs $\overline{\beta\gamma}$ et $\overline{\gamma\delta}$: cela tient à ce que les mesures de l'échelle photographiée sont, par suite de l'emploi de la table de correction, ramenées au plan des traits de l'échelle auxiliaire; elles étaient considérées comme *en perspective*, le point de vue étant le centre optique de l'objectif du microscope; par suite, elles ont été amplifiées dans le rapport des distances de ces deux plans à ce point : ici, c'est le rapport de 100^{mm} à $100^{mm} + \frac{1}{10}$, c'est-à-dire à $1 + \frac{1}{1000}$. Il n'est donc pas étonnant que les distances $\beta\gamma$, $\gamma\delta$ soient augmentées exactement d'un millième de leur valeur.

Calculons les différences qui font l'objet de la vérification :

$$\left.\begin{array}{llll} \overline{\beta'\gamma'} = 251^d,47, & \overline{\beta'\gamma'} = 251^d,62, & \text{Diff.} = -0^d,15 & \\ \overline{\gamma'\delta'} = 251^d,55, & \overline{\gamma'\delta'} = 251^d,36, & \text{Diff.} = +0^d,19 & \end{array}\right\} \text{Diff. moy.} = 0^d,02.$$

Ainsi, en adoptant pour la distance des deux surfaces $\delta = \frac{1}{10}$ de millimètre, les deux différences qui étaient positives sont maintenant de signe contraire, et en valeur absolue sont de l'ordre des erreurs moyennes de pointés.

Pour avoir une idée de l'approximation des résultats, on peut vérifier l'égalité des distances $\beta\gamma$ et $\gamma\delta$, très-probable par construction. La moyenne de toutes les valeurs de $\beta\gamma = 251,55$, et pour celle de $\gamma\delta = 251,45$: la différence $0^d,10$ est de l'ordre de l'approximation qu'on ne peut guère dépasser, car $0^d,18 = \frac{1}{1000}$ de millimètre.

Pour compléter ces études, une nouvelle série de mesures a été effectuée dans des circonstances un peu différentes : on a employé la machine n° 2 et une autre échelle sur verre, l'échelle B (qui sert à la mesure des épreuves du passage de Vénus), pour observer l'effet parallactique sur les traits de l'échelle photographiée.

Les tableaux suivants donnent les observations originales corrigées des inégalités de la vis (tableau 1, p. C.3) du microscope de la machine n° 2; ces corrections, du reste, sont très-faibles : elles varient entre $0^d,63$ et $0^d,68$; elles s'éliminent donc presque complétement par différence. On a effectué immédiatement la correction de la parallaxe d'après le tableau donné p. A.107, ou mieux en ajoutant $0^d,25$ aux trois colonnes du tableau, afin de prendre pour correction des pointés intermédiaires la millième partie de la lecture, suivant la simplification indiquée précédemment (*voir* la note de la p. B.54). On va voir que la correction correspondant à $\frac{1}{10}$ de millimètre d'intervalle réduit l'erreur de parallaxe à une quantité négligeable.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Observateur : M. Angot.

23 février 1876, $\theta = 13^{\circ},2$.

Première série.

$Az = 219^{\circ},2$.

Échelle du chariot.		II.	α.	β.	III.	Différences corrigées de la parallaxe.
		d	d	d	d	
75,0	Pointés.....	403,49	»	762,58	904,71	III — β' = 142,12
	Corr. par. trait..	0,75	»	0,76	0,75	III — II = 501,22
	Nombres corrigés.	404,24	»	763,34	905,46	
		III.	γ.	δ.	IV.	
76,0	Pointés.....	404,37	514,16	765,24	904,89	γ' — III = 109,55
	Corr. par. trait..	0,75	0,51	0,76	0,75	δ' — γ' = 251,33
	Nombres corrigés.	405,12	514,67	766,00	905,64	IV — III = 500,52

$Az = 39^{\circ},2$.

		IV.	δ.	γ.	III.	
						δ' — IV = 142,86
75,0	Pointés.....	528,48	671,42	923,41	1029,91	γ' — δ' = 252,24
	Corr. par. trait..	0,75	0,67	0,92	0,75	III — γ' = 106,33
	Nombres corrigés.	529,23	672,09	924,33	1030,66	III — IV = 501,43
		III.	β.	α.	II.	
76,0	Pointés.....	529,50	674,58	»	1031,67	β' — III = 145,00
	Corr. par. trait..	0,75	0,67	»	0,75	II — III = 502,17
	Nombres corrigés.	530,25	675,25	»	1032,42	

Résumé. Moyennes des valeurs corrigées.....

III-β' = 143,56	$\overline{\beta'\gamma'}$ = 251,50
III-γ' = 107,94	
γ'-δ' = 251,79	
II-III = 501,95	
III-IV = 501,40	

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Deuxième série.

Az = 219°,2.

Échelle du chariot.		II.	β.	γ.	III.	
75,5	Pointés.....	386,69	511,74	762,74	888,21	γ′ − β′ = 251,25
	Corr. par. trait..	0,75	0,51	0,76	0,75	III − γ′ = 125,46
	Nombres corrigés.	387,44	512,25	763,50	888,96	III − II = 501,52
		III.	δ.	ε.	IV.	
76,5	Pointés.....	387,95	514,88	»	889,61	δ′ − III = 126,69
	Corr. par. trait..	0,75	0,51	»	0,75	IV − III = 501,66
	Nombres corrigés.	388,70	515,39	»	890,36	

Az = 39°,2.

		IV.	ε.	δ.	III.	
74,5	Pointés.....	542,04	»	918,63	1042,64	III − δ′ = 123,84
	Corr. par. trait..	0,75	»	0,92	0,75	III − IV = 500,60
	Nombres corrigés.	542,79	»	919,55	1043,39	
		III.	γ.	β.	III.	
75,5	Pointés.....	542,36	669,92	920,83	1043,64	γ′ − III = 127,48
	Corr. par. trait..	0,75	0,67	0,92	0,75	β′ − γ′ = 251,16
	Nombres corrigés.	543,11	670,59	921,75	1044,39	II − III = 501,28

Résumé. Moyenne des valeurs corrigées.....

δ′-III = 125,27
γ′-III = 126,47
β′-γ′ = 251,21
II-III = 501,40
III-IV = 501,13

$\overline{\gamma'\delta'} = 251^{d},74$

D'où l'on conclut

$\overline{\overline{\beta'\gamma'}} = 251^{d},50$, $\overline{\beta'\gamma'} = 251^{d},21$, Diff. = + 0d,29
$\overline{\overline{\gamma'\delta'}} = 251^{d},74$, $\overline{\gamma'\delta'} = 251^{d},79$, Diff. = − 0d,05

Diff. moy. = 0d,12.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Les valeurs non corrigées donneraient

$$\left.\begin{array}{llll} \overline{\overline{\beta\gamma}} = 251^{d},76, & \overline{\beta\gamma} = 250,96, & \text{Diff.} = 0^{d},80 \\ \overline{\overline{\gamma\delta}} = 251^{d},99, & \overline{\gamma\delta} = 251,53, & \text{Diff.} = 0^{d},46 \end{array}\right\} \text{Diff. moy.} = 0^{d},63.$$

Ainsi, l'erreur moyenne, qui serait de $0^{d},63$, se réduit, par l'emploi de la table de correction, à $0^{d},12$, c'est-à-dire à moins de cinq fois sa valeur.

Ces nouvelles séries, quoique peut-être un peu moins satisfaisantes, comme précision, que les précédentes, offrent l'intérêt spécial d'avoir été effectuées par un observateur accoutumé aux mesures des épreuves du passage, avec la machine et l'échelle auxiliaire servant aux *opérations courantes;* elles donnent, outre le résultat intéressant en vue duquel elles ont été faites, une idée de l'exactitude qu'on peut obtenir dans la mesure de bonnes épreuves.

En résumé, la nécessité et l'efficacité de la table de correction de la parallaxe des traits se trouvent complétement justifiées.

Importance du résultat précédent. — Ces études, relatives à la correction de la parallaxe des traits de l'échelle auxiliaire, paraîtront peut-être exagérées dans leur développement; on va voir qu'elles répondent à une difficulté réelle et qu'elles permettent d'annuler une cause d'erreur systématique.

On sait qu'en dernière analyse la détermination de la parallaxe solaire d'après les épreuves photographiques du passage revient à mesurer, avec toute la précision possible, le déplacement apparent du centre de Vénus relativement au centre du Soleil. Sur les épreuves de la Commission, l'effet parallactique à mesurer est d'environ $\frac{1}{2}$ millimètre, ou 250 divisions.

Cette différence de $\frac{1}{2}$ millimètre se retrouvera donc systématiquement dans les deux groupes correspondants d'épreuves obtenues dans les stations des hémisphères opposés.

Or, dans la mesure de ces épreuves par comparaison avec l'échelle auxiliaire, cette différence de position de $\frac{1}{2}$ millimètre

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

peut introduire une erreur, causée par l'effet de la parallaxe des traits, égale à environ $\frac{1}{2}$ division. Lorsqu'on examine la question en détail, on voit que cette erreur est non-seulement probable, mais presque inévitable, par suite d'une circonstance spéciale, à savoir la grandeur relative du diamètre de la planète sur les épreuves, grandeur égale à 1 millimètre, et la valeur du tour de vis du chariot de la machine micrométrique; cette dimension exige, pour le relevé des deux bords V_1 et V_2, qu'on tourne de deux tours la vis du chariot pour amener successivement V_1 et V_2 au milieu du champ; il en résulte que l'erreur de parallaxe de ces deux bords est la même; par suite, il n'y a aucune chance de compensation de ce côté.

D'autre part, le diamètre solaire n'est pas exactement le même sur toutes les épreuves; de là une autre chance d'erreur qui peut compenser la première, mais qui peut aussi l'aggraver.

En résumé, l'existence d'une certaine commensurabilité entre l'élément caractéristique à mesurer sur les épreuves et les dimensions de la machine micrométrique pouvait rendre systématique la petite erreur, en apparence fortuite, causée par l'emploi si utile de l'échelle auxiliaire.

Il était donc nécessaire de poursuivre l'étude de la correction de la parallaxe des traits de la façon la plus minutieuse, pour être bien assuré d'avoir annulé, par la table de correction, une cause d'erreur systématique qui aurait entaché les résultats sans altérer leur concordance apparente.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

DONNÉES NUMÉRIQUES UTILISÉES POUR LES MESURES DÉFINITIVES.

Étude de la vis du microscope de la machine n° 1.

Les observations faites en vue de déterminer la table de correction de la vis du microscope ont montré que cette vis était très-régulière, surtout en son milieu. Les mesures auxquelles cette machine a été consacrée n'exigeant que l'emploi de quelques tours du milieu de la vis, la table de correction est devenue tout à fait inutile, tant pour la correction des tours entiers que pour celle des fractions de tour. On trouvera du reste ci-après le détail des observations effectuées pour comparer entre elles les diverses portions de la vis et mettre en évidence les erreurs progressives ou périodiques.

Le micromètre de la machine n° 1 est formé par une vis plus courte que celle des autres machines n°s 2, 3 et 4; il ne comprend que dix tours de vis au lieu de quinze, mais les dimensions du microscope et les distances focales conjuguées sont les mêmes.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

RÉSUMÉ DES MESURES RELATIVES A L'ÉTUDE DE LA VIS DU MICROSCOPE DE LA MACHINE N° 1.

(Mesures effectuées en vue de la construction de la table de correction ; chaque nombre est en général la moyenne de cinq pointés.)

1° *Comparaison des* 10 *tours* 5 *par* 5.

(Deux doubles traits distants de 1 millimètre = 500 divisions du tambour.)

15 avril 1875, $\theta = 12°,1$ (éclairage encore imparfait).

			Différence.
	d	d	d
Mesures croisées, moyennes de six et neuf pointés.....	1000,19	499,07	501,12
	499,87	198,34	501,53

10 décembre 1875, $\theta = 8°,3$.

Moyennes de cinq pointés.....	1005,48	505,86	499,62
	505,76	5,90	499,86
Répétition des mesures mêmes...	1006,76	506,70	500,06
	507,36	7,56	499,80
	1005,80	505,70	500,10
	506,12	6,06	500,06

Moyennes des trois dernières séries...	0- 500d	499d,91
	500-1000d	499d,93

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

2° *Comparaison des tours de 2 en 2.*

(Deux traits doubles distants de $\frac{1}{10}$ de millimètre = 200 divisions du tambour = 2 tours.)

25 avril 1875, $\theta = $ » (éclairage imparfait).

				Moyenne.	
d	d	d	d	d	d
205,36	202,86	200,30	202,11	0- 200...	202,48
2,50		198,19			
404,38	202,10	403,10	201,76	200- 400...	201,93
202,28		201,34			
604,88	201,78	604,34	201,54	400- 600...	201,66
403,10		402,80			
804,56	201,42	805,90	201,52	600- 800...	201,47
603,14		604,38			
1005,82	202,00	1005,22	201,76	800-1000...	201,88
803,82		803,46			

3° *Comparaison des tours entiers successifs.*

(Deux traits doubles distants de $\frac{1}{5}$ de millimètre = 100 divisions du tambour = 1 tour.)

10 décembre 1875, $\theta = 9$ degrés.

d	d	d	d
101,44	99,10	601,14	99,06
2,34		502,08	
202,66	98,86	700,78	98,52
103,80		602,26	
301,22	99,16	801,26	98,92
202,06		702,34	
401,50	98,90	900,56	98,94
302,60		801,62	
500,94	98,90	1001,40	99,04
402,04		902,00	

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

4° *Comparaison des demi-tours.*

(Deux traits doubles distants de $\frac{1}{10}$ de millimètre = 50 divisions du tambour = $\frac{1}{2}$ tour.)

11 décembre 1875, $\theta = 8^{\circ},8$.

351,08	49,02
302,06	
374,78	49,12
325,66	
399,64	48,98
350,66	
424,40	48,90
375,50	
449,32	48,94
400,38	
474,00	48,78
425,22	
497,90	48,86
449,04	
523,68	48,82
474,86	

13 décembre 1875, $\theta = 9$ degrés.

549,12	48,94
500,18	
573,60	48,84
524,76	
597,88	48,74
549,14	
623,98	49,02
574,96	
650,04	49,06
600,98	
673,76	48,82
624,92	
699,88	48,86
650,02	
723,70	48,72
674,98	

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

APPENDICE I.

ESSAI DE DÉTERMINATION DE LA VALEUR ANGULAIRE DU MILLIMÈTRE AU FOYER DE LA LUNETTE PHOTOGRAPHIQUE DE LA STATION DE SAINT-PAUL.

Bien que la détermination angulaire absolue des résultats des mesures ne soit pas nécessaire pour le calcul de la parallaxe du Soleil (*voir* p. A.75), on a pensé néanmoins qu'il serait utile d'effectuer cette détermination d'après la méthode qui a paru présenter le plus de garantie d'exactitude. On se rendra ainsi un compte assez exact de la précision qu'on peut obtenir dans ces sortes de comparaisons.

Parmi les méthodes recommandées par le *Programme* (*Recueil de Mémoires,* t. I, Supplément, p. 10) figure l'obtention d'épreuves daguerriennes du réticule d'un instrument astronomique bien étudié.

M. le commandant Mouchez, chef de la station de Saint-Paul, a fait une étude toute spéciale du réticule de son altazimut (voir t. II, *Mission de l'île Saint-Paul,* p. 124, 140, 144, 157, 159, 162), en vue, précisément, de la détermination photographique exécutée les 11 et 16 décembre 1874 (p. 157 et 159).

Les épreuves, au nombre de six, furent donc examinées au microscope de la machine micrométrique; malheureusement, elles sont, à l'exception d'une seule, peu favorables à la précision

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

des mesures, à cause du peu de netteté des images des fils. Voici le résultat de cet examen :

Épreuve marquée n° 1. — Peu de netteté en général, surtout pour quelques fils.
» n° 3. — Bourrelets de lumière très-accentués et inégaux d'un côté seulement de l'image des fils : on voit sur certaines parties de l'épreuve des franges de diffraction très-nettes.
» n° 4. — Mêmes bourrelets, peut-être un peu moins marqués que sur la précédente épreuve.
» n° 5 $\frac{1}{2}$. — Bourrelet dissymétrique de lumière sur chaque fil; l'apparence des six fils est assez uniforme.
» n° 6 $\frac{1}{2}$. — Netteté très-imparfaite, surtout pour quelques fils.
» n° 7 $\frac{1}{2}$. — Netteté imparfaite.

Parmi ces six épreuves, celle marquée 5 $\frac{1}{2}$ a paru seule susceptible d'une étude soignée.

On aurait adopté la méthode de l'échelle auxiliaire transparente si la disposition des fils avait été semblable à celle des quatre bords des astres figurés sur les épreuves du passage de Vénus; mais les échelles auxiliaires à 7 traits employées pour les mesures se prêtaient mal à cette opération. On a eu recours alors à la première méthode (*voir* p. A.49), qui recouvrait ici tout son avantage, attendu que l'ensemble des mesures a été exécuté en quarante-huit heures environ, intervalle pendant lequel l'expérience a montré que la table de correction de la vis du chariot ne varie pas sensiblement.

On a donc relevé la position des images des six fils en faisant avancer le chariot d'un nombre entier de pas, de façon à amener successivement chaque image au milieu du champ; on complétait par un appoint donné par le micromètre du microscope. On répétait chaque mesure en faisant avancer le chariot d'un tour de vis ou $\frac{1}{2}$ millimètre, afin de se ménager une vérification des

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

pointés et de déterminer la valeur du tour de vis du microscope en fonction du tour de la vis du chariot.

La série des mesures a été répétée en ordre inverse, en retournant le plateau de 180 degrés.

Bien que la machine n° 1 fût depuis longtemps en usage, et que sa table de correction tendît de plus en plus vers une loi de proportionnalité (*voir* les études relatives à la vis du chariot, p. B.26), on n'a pas cru devoir se fier à la régularité de la vis du chariot de cette machine, et l'on a cherché une méthode permettant de déterminer la table de correction de cette vis.

On a effectué, dans ce but, une double série de mesures sur l'*échelle normale sur plaqué d'argent,* laquelle, ayant été étudiée avec beaucoup de soin par une méthode indépendante de la régularité de la vis du chariot, permettait de déterminer la table de correction de cette vis, en admettant les résultats de cette étude préliminaire (*voir* p. B.47).

Cette manière de procéder présente plusieurs avantages :

1° Celui d'exprimer les mesures effectuées sur l'épreuve du micromètre en fonction de l'*unité même* avec laquelle les mesures *de toutes* les épreuves du passage de Vénus sont exprimées (*voir* p. A.59); il en résulte qu'on obtient directement, non pas la valeur angulaire du millimètre, qui importe peu, puisque les mesures ne sont pas exprimées en millimètres, mais la valeur angulaire de l'unité arbitraire de mesure d, en fonction de laquelle toutes les mesures sont obtenues;

2° Les erreurs causées par les variations de température s'éliminent si les deux séries de mesures sur l'épreuve du réticule et sur l'échelle normale sont effectuées à la même température, parce que les lames de plaqué d'argent sur lesquelles sont tracés les éléments à mesurer sont identiques aux lames des épreuves

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

daguerriennes du passage. En fait, les deux températures moyennes des deux séries d'observations ont été 11°,5 et 11°,3, températures dont la différence est si faible, qu'on est en droit d'en négliger l'influence.

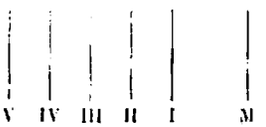
Après les considérations exposées précédemment (p. A.93 et suivantes), il n'est pas besoin de s'arrêter à démontrer que, quelle que soit la température à laquelle la comparaison de l'épreuve du réticule et de l'échelle normale ait été faite, le résultat est le même que si cette comparaison avait été faite à 15 degrés C., température à laquelle toutes les mesures sont rapportées.

Détail des observations.

Mesure de l'épreuve du réticule marquée $5\frac{1}{2}$ *(île Saint-Paul)*. — L'image des fils étant très-large (environ $0^{mm},25$), on a pointé successivement sur les deux bords : l'un des bords est assez faible; l'autre est assez net et est constitué par un bourrelet de diffraction.

La disposition des fils est la suivante, et leur désignation est celle que leur donne M. le commandant Mouchez dans son Mémoire.

Disposition des fils :



Le fil III est le fil méridien et le fil M le fil mobile amené de manière à accroître la largeur utile du champ.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Mesure de l'épreuve du réticule.

(Chaque nombre est la moyenne de cinq pointés, dont l'erreur moyenne est de 1 à 3 divisions, suivant la netteté du bord relevé.)

Observateur : M. Cornu.

23 février 1877, $\theta = 11^{\circ},5$.

Az $320^{\circ},4$.

Fil.	Échelle du chariot.	Pointé. Bord net.	Pointé. Bord faible.	Largeur de l'image.	Échelle du chariot.	Pointé. Bord net.	Pointé. Bord faible.	Largeur de l'image.	Différence = valeur du tour de la vis du chariot d'après le bord net.	Différence = valeur du tour de la vis du chariot d'après le bord faible.
	mm	d	d	d	mm	d	d	d	d	d
V.....	55,0	475,80	598,92	123,12	54,5	724,86	845,84	120,98	249,06	246,92
IV.....	49,0	341,56	493,94	122,38	48,5	591,12	716,88	125,76	249,56	252,94
III.....	42,5	452,60	574,48	121,88	42,0	699,18	826,92	127,74	246,58	252,44
II.....	36,5	336,78	457,94	121,16	36,0	586,56	708,16	121,60	249,78	250,22
I.....	30,5	204,60	320,06	115,46	30,0	455,24	567,90	112,66	250,64	247,84
M.....	18,0	185,08	305,54	120,46	17,5	433,04	562,54 (1)	119,50	247,96	247,00
							Moyennes.....		248,93	249,56
							Moyenne générale...		249,25	

Az $140^{\circ},4$.

Fil.	Échelle du chariot.	Pointé. Bord faible.	Pointé. Bord net.	Largeur de l'image.	Échelle du chariot.	Pointé. Bord faible.	Pointé. Bord net.	Largeur de l'image.	Différence = valeur du tour de la vis du chariot d'après le bord faible.	Différence = valeur du tour de la vis du chariot d'après le bord net.
	mm	d	d	d	mm	d	d	d	d	d
M.....	68,0	218,16	331,62	113,46	67,5	468,10	581,44	113,34	249,94	249,82
I.....	55,5	191,72	313,42	121,70	55,0	441,04	562,76	121,72	249,32	249,34
II.....	49,0	309,78	440,18	130,40	48,5	559,64	685,76	126,12	249,86	245,58
III.....	43,0	199,26	324,46	125,20	42,5	449,58	572,84	123,26	250,32	248,38
IV.....	36,5	312,78	429,06	116,28	36,0	559,40	678,56	119,16	246,62	249,50
V.....	30,0	427,40	549,60	122,20	29,5	678,12	802,88	124,76	250,72	253,28
							Moyennes.....		249,61	249,32
							Moyenne générale...		249,47	

(1) Le registre d'observation porte 562,54, mais les différences avec tous les

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Comme on le voit aux différences, la précision de ces pointés est inférieure à celle des bonnes épreuves solaires; néanmoins, l'ensemble des observations peut conduire à des résultats satisfaisants, car la vérification que fournit la détermination du tour de la vis du chariot est très-complète :

Première série.....	$249^d,27$
Deuxième série.....	$249^d,47$
Différence...	$0^d,20$
Moyenne.....	$249^d,37$

Il y a donc lieu de tirer de ces mesures tout le parti possible.

Mesure de l'échelle normale sur plaqué d'argent. — L'échelle normale (p. B.27) a été placée sur le plateau de façon que les divisions extrêmes, distantes de 40 millimètres, occupaient à peu près les mêmes positions que les images des fils extrêmes du réticule, distantes de $37^{mm},5$ environ; le trait n° 15 était sur l'axe de rotation du plateau.

On a mesuré seulement de 10 en 10 millimètres, en répétant la mesure comme précédemment, après avoir fait avancer le chariot d'un tour de vis.

Mesure de l'échelle normale.

(Chaque nombre est la moyenne de cinq pointés, dont l'erreur moyenne dépasse rarement $0^d,3$.)

Observateur : M. Cornu.

25 février 1877, $\theta = 11^\circ,3$.

$Az = 140^\circ,9$.

Trait.	Échelle du chariot.	Pointé sur les traits.	Différence.	Échelle du chariot.	Pointé sur les traits.	Différence.	Différence moyenne.	Valeur du tour de la vis du chariot.
	mm	d'		mm	d'			d'
0...	55,5	375,78	$20^t + 3^{d'},18$	55,0	625,42	$20^t + 3^{d'},58$	$20^t + 3^{d'},38$	249,64
10...	45,5	372,60	6,20	45,0	621,84	6,14	6,17	249,24
20. .	35,5	366,40	11,18	35,0	615,70	10,88	11,03	249,30
30. .	25,5	355,22	9,94	25,0	604,82	10,04	9,99	249,60
40...	15,5	345,28		15,0	594,78			249,50
						Moyenne.		249,46

pointés voisins des fils I et M et ceux des autres séries montrent d'une manière évidente qu'il y a une erreur de 10 divisions dans la lecture du tambour; l'erreur moyenne des 5 lectures est $2^d,8$; les erreurs extrêmes, $-2^d,9$ et $+4^d,5$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Az = 320°,9.

Trait.	Échelle du chariot.	Pointé sur les traits.	Différence.	Échelle du chariot.	Pointé sur les traits.	Différence.	Différence moyenne.	Valeur du tour de la vis du chariot.
	mm	d'	t d'	mm	d'	t d'	t d'	d'
40...	70,0	430,68	20 + 9,94	69,5	679,58	20 + 9,90	20 + 9,92	248,90
30...	60,0	420,74	7,78	59,5	669,68	7,58	7,68	248,94
20...	50,0	412,96	5,10	49,5	662,10	5,10	5,10	249,14
10...	40,0	407,86	5,32	39,5	657,00	5,50	5,41	249,14
0...	30,0	402,54		29,5	651,50			248,96
							Moyenne.....	249,02

Les différences s'accordent ici à quelques dixièmes de division près; la précision est donc beaucoup plus grande pour les mesures. La vérification fournie par la détermination du tour de vis est satisfaisante :

Première série....	$249^d,46$
Deuxième série.	$249^d,02$
Différence.	$0^d,44$
Moyenne.....	$249^d,19$

La petite différence entre ces deux séries peut s'expliquer soit par une légère inclinaison de l'échelle relativement à l'axe du micromètre, soit par la plus grande étendue de la vis du chariot mise en jeu.

La valeur moyenne $249^d,19$ n'est pas absolument égale à la valeur moyenne déduite des séries précédentes, $249^d,37$: la différence $0^d,18$ est de l'ordre des erreurs inévitables, mais l'égalité n'est pas nécessaire, parce qu'il existe nécessairement une tolérance d'une petite fraction de millimètre pour la mise au point de l'épreuve ou de l'échelle, par suite une petite variation possible de la distance focale du microscope. L'angle, sous-tendu par une longueur constante placée au foyer, ne reprendra donc pas rigoureusement la même valeur à chaque nouvelle mise en place de la lame portant cette longueur.

Cette considération était nécessaire à rappeler pour faire comprendre certains points délicats de la discussion qui va suivre, en particulier, pourquoi on a désigné par d' les divisions du tambour dans la mesure de l'échelle normale, et non pas d, suivant l'usage ordinaire.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Construction de la Table de correction de la vis du chariot.

La première opération à effectuer consiste à déduire des observations de l'échelle normale la Table de correction de la vis du chariot. A cet effet, on considérera chacun des tours de cette vis comme égal à une constante X plus une correction φ_i, i étant la lecture de l'échelle qui indique les déplacements du chariot.

Par suite, la valeur de la distance comprise entre les tours d'ordre i et j sera

$$(j - i)X + \varphi_j - \varphi_i.$$

Comme on connaît, d'après le tableau donné précédemment (p. B.70), les distances mutuelles des traits 0, 10, 20, 30, 40 de l'*échelle normale*,

Distance des traits.	
0-10	$5004^{d},96$
10-20	5006,58
20-30	5010,75
30-40	5013,11

on peut écrire immédiatement les équations de condition qui existent entre X, les corrections φ et les données numériques des tableaux précédents. On aurait ainsi 16 équations correspondant aux 16 différences qui expriment les distances des traits de l'échelle sur plaqué.

Pour simplifier, on réduira ce nombre à 8, en négligeant la demi-différence qui peut exister entre les corrections φ correspondant à deux tours consécutifs; on prend alors la moyenne des appoints qui figurent dans l'avant-dernière colonne de droite du Tableau ci-dessus sous le nom de *différence moyenne;* il est bon de remarquer que les discordances entre les appoints sont de l'ordre des incertitudes de pointé et qu'il est inutile de conserver une précision illusoire.

On conclura donc les équations suivantes :

Premier groupe.		Deuxième groupe.	
$20X + \varphi_{35} - \varphi_{15} + 3,38^{d'}$	$= 5004^{d},96$	$20X + \varphi_{30} - \varphi_{10} + 9,92^{d'}$	$= 5013^{d},11$
$20X + \varphi_{45} - \varphi_{25} + 6,17$	$= 5006,58$	$20X + \varphi_{40} - \varphi_{20} + 7,68$	$= 5010,75$
$20X + \varphi_{35} - \varphi_{25} + 11,03$	$= 5010,75$	$20X + \varphi_{30} - \varphi_{10} + 5,10$	$= 5006,58$
$20X + \varphi_{25} - \varphi_{15} + 9,99$	$= 5013,11$	$20X + \varphi_{10} - \varphi_{00} + 5,41$	$= 5004,96$

On sait d'avance que les unités d et d' sont très-voisines l'une de l'autre, et que les corrections φ_i sont petites; néanmoins, quoique les appoints en d' soient très-petits,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

il serait imprudent, sans examen préalable, de prendre d' égal à d; il est donc nécessaire de déterminer approximativement le rapport de ces unités.

C'est ce qu'on obtient aisément d'après la valeur moyenne du tour de la vis du chariot, égale à $249^{d'},46$ dans la série d'observations qui a donné le premier groupe d'équations, et à $249^{d'},02$ dans la deuxième série, correspondant au deuxième groupe.

On négligera donc, dans cette première approximation, la différence des corrections φ qui figurent dans les équations, et l'on substituera, dans le premier groupe, $X = 249^{d'},46$, et dans le second, $X = 249^{d'},04$. On obtient, après substitution numérique, les valeurs

	$\frac{d'}{d} = 1 + 0,00248$	$\frac{d'}{d} = 1 + 0,00456$
	224	462
	310	423
	278	384
Moyennes.....	$\frac{d'}{d} = 1 + 0,00240$	$\frac{d'}{d} = 1 + 0,00429$

Tels sont les facteurs par lesquels il faut multiplier les appoints en d' pour les expressions en d; les corrections ne dépassent pas $0^d,04$; on pourrait donc, à la rigueur, les négliger; tout calcul fait, il vient

Premier groupe.	Deuxième groupe.
$20X + \varphi_{25} - \varphi_{15} = 5001^d,57$	$20X + \varphi_{70} - \varphi_{60} = 5003^d,15$
$20X + \varphi_{45} - \varphi_{35} = 5000,39$	$20X + \varphi_{60} - \varphi_{50} = 5003,04$
$20X + \varphi_{35} - \varphi_{25} = 4999,69$	$20X + \varphi_{50} - \varphi_{40} = 5001,46$
$20X + \varphi_{15} - \varphi_{05} = 5003,09$	$20X + \varphi_{40} - \varphi_{30} = 4999,56$

Si l'on veut suivre exactement la méthode donnée précédemment (p. A.88 et suivantes), de manière à déterminer la valeur de X, qui donne les corrections φ minimum, condition toujours avantageuse pour la construction d'une Table de correction et pour la facilité des interpolations, on posera $X = 250^d + x$, de manière à simplifier d'abord les évaluations numériques; il viendra alors

Premier groupe.	Deuxième groupe.
$20x + \varphi_{25} - \varphi_{15} = 1^d,57$	$20x + \varphi_{70} - \varphi_{60} = 3^d,15$
$20x + \varphi_{45} - \varphi_{35} = 0,39$	$20x + \varphi_{60} - \varphi_{50} = 3,04$
$20x + \varphi_{35} - \varphi_{25} = -0,31$	$20x + \varphi_{50} - \varphi_{40} = 1,46$
$20x + \varphi_{25} - \varphi_{15} = 3,09$	$20x + \varphi_{40} - \varphi_{30} = -0,44$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'où l'on tirera, par additions successives, les équations suivantes, dans lesquelles y représente $20.x$:

$$\varphi_{15} = \varphi_{55} + y - 1^{d},57 \qquad \varphi_{10} = \varphi_{30} + y - 0^{d},44$$
$$\varphi_{35} = \varphi_{55} + 2y - 1,96 \qquad \varphi_{50} = \varphi_{30} - 2y + 1,02$$
$$\varphi_{25} = \varphi_{55} + 3y - 1,65 \qquad \varphi_{60} = \varphi_{30} - 3y + 4,06$$
$$\varphi_{15} = \varphi_{55} + 4y - 4,74 \qquad \varphi_{70} = \varphi_{30} - 4y + 7,21$$

Chaque groupe d'équations contient une constante arbitraire; on a choisi ici les constantes φ_{55} et φ_{30} dans la partie commune aux deux groupes, pour faciliter la comparaison et le raccordement des deux Tables de correction qu'on en doit déduire.

Appliquant la règle donnée précédemment (p. A.90), on cherche la valeur de y qui rend minimum la somme des carrés des différences

$$y - 1,57)^2 + (2y - 1,96)^2 + \ldots + (4y - 4,74)^2,$$

et de même dans l'autre groupe.

On obtient respectivement

$$y = 0^{d},94667, \qquad y = 1^{d},42067.$$

Ce sont là les valeurs de y ou de $20.x$ qui, dans chaque groupe, donnent les valeurs minimum des corrections; il est évident que toute valeur voisine changera extrêmement peu la grandeur de ces corrections; on adoptera, pour les deux groupes, la valeur unique

$$y = 1^{d},00 \quad \text{ou} \quad x = 0^{d},05,$$

qui a l'avantage de simplifier le calcul numérique et de réduire à une seule valeur la grandeur moyenne apparente du tour de vis dans les deux groupes. Le raccordement des deux parties de la Table de correction se fera donc d'une manière plus complète. Par substitution de $y = 1^{d}$, on déduit

$$\varphi_{15} = \varphi_{55} - 0^{d},57 \qquad \varphi_{10} = \varphi_{30} + 1^{d},44$$
$$\varphi_{35} = \varphi_{55} + 0,04 \qquad \varphi_{50} = \varphi_{30} + 0,98$$
$$\varphi_{25} = \varphi_{55} + 1,35 \qquad \varphi_{60} = \varphi_{30} + 1,06$$
$$\varphi_{15} = \varphi_{55} - 0,74 \qquad \varphi_{70} = \varphi_{30} + 3,21$$

Remarque. — Si l'on construit graphiquement les courbes ayant pour abscisses les indices des φ et pour ordonnées leurs valeurs numériques, on reconnaîtra que les courbes ont la même allure dans leur partie commune à une constante près; on est donc assuré de la concordance des deux groupes, ce qui est une vérification de leur précision.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Si l'on adopte pour valeur des constantes arbitraires $\varphi_{55} = -1^d$, et $\varphi_{30} = 1^d,80$, on rendra positives les deux Tables de correction, et l'on rendra leur raccordement très-satisfaisant. D'où il résulte

$\varphi_{55} = 1,00$	$\varphi_{30} = 1,80$
$\varphi_{15} = 0,43$	$\varphi_{10} = 0,36$
$\varphi_{35} = 1,04$	$\varphi_{50} = 0,82$
$\varphi_{25} = 2,35$	$\varphi_{60} = 2,86$
$\varphi_{15} = 0,26$	$\varphi_{70} = 5,01$

On vérifie ces Tables en substituant, dans chacun des groupes primitifs d'équation, les valeurs de φ_i correspondantes et la valeur $X = 250^d + 0^d,05 = 250^d,05$. La vérification est complète, à quelques centièmes de division d près, qui représentent les corrections effectuées plus haut pour la transformation des d' en d.

On relève aisément, sur le tracé graphique, les deux tableaux suivants, qui permettent de corriger d'une manière indépendante les deux séries de mesures de l'épreuve du réticule; on ne donne les corrections φ que pour les divisions observées, en négligeant, comme on l'a fait dans l'établissement de ces Tableaux, la différence de correction entre deux tours consécutifs de la vis du chariot.

$\varphi_{55} = 1,00$	$\varphi_{65} = 4,50$
$\varphi_{19} = 0,60$	$\varphi_{55} = 1,70$
$\varphi_{12} = 0,40$	$\varphi_{19} = 0,70$
$\varphi_{56} = 0,90$	$\varphi_{13} = 0,40$
$\varphi_{40} = 2,00$	$\varphi_{36} = 0,80$
$\varphi_{13} = 1,30$	$\varphi_{30} = 1,80$

Réduction des observations effectuées sur l'épreuve du réticule.

On a maintenant tous les éléments de réduction des pointés effectués sur l'épreuve du réticule; en effet, chaque pointé se compose :

1° D'une lecture faite sur l'échelle du chariot : c'est un nombre i de doubles tours, compté à partir d'une origine arbitraire;

2° D'un appoint δ exprimé en divisions d', également compté à partir d'une origine arbitraire.

Or, la valeur moyenne du tour de vis du chariot a été déterminée plus haut en fonction de l'unité d : $X = 250^d,05$.

La correction à ajouter au tour de vis d'ordre i est φ_i; la Table en a été dressée.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

L'unité d' est maintenant connue, puisqu'on a observé la valeur moyenne d'un tour de vis en fonction de d' :

Première série... $X = 249^{d'},25$, Deuxième série... $X = 249^{d'},17$,

d'où

$$\frac{d}{d'} = \frac{250,05}{249,25} = 1,00321, \qquad \frac{d}{d'} = \frac{250,05}{249,17} = 1,00313$$

(on voit que la première approximation adoptée plus haut était déjà très-précise).

D'après la règle indiquée précédemment (p. A.50), il suffit d'ajouter les lectures multipliées par des coefficients convenables pour exprimer les pointés en unités d, à une constante arbitraire près, qui s'éliminera par différence. On aura, pour chacun d'eux,

$$2iX + \varphi_i + \delta\frac{d}{d'},$$

ou, numériquement,

Première série..... $500,10i + \varphi_i + 1,00321\,\delta$,
Deuxième série..... $500,10i + \varphi_i + 1,00313\,\delta$.

Si l'on effectue les calculs à l'aide des observations des deux premiers Tableaux, on obtient les résultats suivants :

Première série : $Az = 320^{o},4$.

Trait.	Bord net.	Bord faible.	Bord net.	Bord faible.
	d	d	d	d
V.....	27983,83	28107,34	27983,64	28105,00
IV.....	24848,16	24970,93	24848,47	24974,63
III.....	21708,70	21830,97	21706,02	21834,17
II.....	18592,41	18713,96	18592,94	18714,93
I.....	15460,30	15576,14	15461,70	15574,72
M.. ...	9188,77	9309,62	9187,48	9307,36

Deuxième série : $Az = 140^{o},4$.

Trait.	Bord faible.	Bord net.	Bord faible.	Bord net.
	d	d	d	d
M.	34230,14	34343,96	34230,82	34344,51
I.....	27949,57	28071,65	27949,62	28071,72
II.....	24816,35	24947,16	24816,94	24913,46
III.. ..	21704,58	21830,18	21705,64	21829,28
IV.....	18568,21	18684,85	18565,55	18685,08
V	15433,54	15556,12	15434,99	15560,14

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Comme vérification inhérente au mode de mesure, on peut remarquer qu'après la réduction des lectures les pointés sur les mêmes bords sont sensiblement identiques, quelles que soient leurs positions dans le champ du microscope (*voir* p. A.40 et A.50). L'approximation est de l'ordre de la précision des pointés : elle est plus grande sur le bord net que sur le bord faible; d'où l'on conclut, pour la distance au fil mobile M :

Première série.

Trait.	Bord net.	Bord faible.	Moyenne.	Bord net.	Bord faible.	Moyenne.
	d	d	d	d	d	d
M.....	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
I.....	6271,53	6266,52	6269,03	6274,22	6267,36	6270,79
II.....	9403,64	9404,34	9403,99	9405,46	9407,57	9405,52
III. .	12519,93	12521,35	12520,64	12518,54	12526,81	12522,68
IV....	15659,39	15661,31	15660,35	15660,99	15667,27	15664,13
V.....	18795,06	18797,72	18796,39	18796,16	18797,64	18796,90

Deuxième série.

Trait.	Bord faible.	Bord net.	Moyenne.	Bord faible.	Bord net.	Moyenne.
	d	d	d	d	d	d
M.....	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
I.....	6280,57	6272,31	6276,44	6281,20	6272,79	6277,00
II.....	9413,79	9396,80	9405,30	9413,88	9401,05	9407,47
III....	12525,56	12513,78	12519,67	12525,18	12515,23	12520,21
IV....	15661,93	15659,11	15660,52	15665,27	15659,43	15662,35
V.....	18796,60	18787,84	18792,22	18795,83	18784,37	18790,10

Ainsi l'on obtient huit groupes de valeurs des distances des bords des fils; on peut reconnaître pour les bords de même nom que, dans chaque série, la concordance est assez satisfaisante, surtout pour le bord net. La précision réelle est même plus grande que la précision apparente, car chaque nombre du Tableau étant la différence de deux autres, les erreurs peuvent s'ajouter.

Quoique les mesures sur le bord net aient plus de chances de précision que les mesures effectuées sur le bord faible, il est nécessaire de prendre la moyenne des distances des deux bords pour définir le centre du fil, qui seul a été considéré dans les mesures micrométriques faites à l'altazimut.

Les images des fils paraissent d'ailleurs inégales en diamètre, ainsi que le témoignent les différences indiquées sur les premiers Tableaux (p. B.69).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Voici les moyennes de chaque série et la moyenne générale :

Trait.	Première série.	Deuxième série.	Écart.	Moyenne générale.
	d	d	d	d
M.....	0,00	0,00	0,00	0,00 (1)
I.....	6269,91	6276,72	+ 6,81	6273,31
II.....	9405,26	9406,39	+ 1,13	9405,82
III.....	12521,64	12519,94	− 2,70	12520,79
IV.....	15662,24	15661,44	− 0,80	15661,84
V.....	18796,65	18791,16	− 5,49	18793,90
Écart moyen des deux séries.....			3,655	

Il est difficile d'apprécier l'approximation du résultat final : les divergences partielles s'expliquent naturellement par l'insuffisance de netteté de l'épreuve; la variété des conditions dans lesquelles ces mesures ont été faites fait espérer que les erreurs accidentelles seront réduites dans une proportion notable. La troisième colonne du Tableau présente pour chaque nombre l'écart des deux séries; elle montre l'ordre des divergences, plutôt en l'exagérant, puisque, dans les différences, les erreurs peuvent s'ajouter.

Comme ces deux séries de mesures sont complétement indépendantes, aussi bien comme observations que comme réduction, on aura donc une idée de l'approximation du résultat final des mesures, c'est-à-dire de la moyenne générale, en adoptant comme erreur moyenne la moitié de l'écart moyen des deux séries, ou $1^{d},33$.

Réduite en valeur métrique, l'erreur moyenne de la position de chaque fil d'après l'épreuve serait donc $\pm \frac{1^{mm},33}{500} = \pm 0^{mm},00266$, ou près de $\frac{3}{1000}$ de millimètre.

Comparaison des mesures photographiques avec les mesures angulaires directes du micromètre.

On trouve dans le Mémoire de M. le commandant Mouchez (*Mission de l'île Saint-Paul*, t. II de la présente publication) les mesures relatives à la détermination de la valeur angulaire des fils du réticule.

Voici d'abord le résumé des pointés effectués avec le fil mobile sur les fils fixes; on

(1) Si l'on ne se croyait pas autorisé à faire la correction de 10 divisions indiquée au début (*voir* la note, p. B.69), il faudrait ajouter $\frac{1}{8}\,10^{d} = 1^{d},25$ à l'intervalle compris entre M et I, car la correction effectuée porte sur le fil M et en diminue la distance au fil I; il faudrait donc compter − 1,25 au lieu de 0,00 pour le fil M.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

aura ainsi la valeur relative des distances des cinq fils. Le zéro des tours de vis du fil mobile est très-voisin de la position du fil I; mais, comme le fil mobile a été placé souvent à 4 tours en arrière, on ajoutera 4 à toutes les lectures des nombres de tours figurant dans la publication citée plus haut.

Trait.	(P. 124.) 20 octobre 1874. $\theta = 15°,0$.	(P. 140.) 3 décembre. $\theta = 20°,3$.	(P. 141.) 7 décembre. $\theta = 13°,1$.	(P. 159.) 16 décembre. $\theta = 18°,0$.	Moyenne des 3, 7 et 16 déc.
	t	t	t	t	t
I.....	4,0310	4,0085	4,0095	4,0043	4,0074
II.....	6,0337	6,0115	6,0160	6,0030	6,0102
III.....	8,0217	8,0008	8,0025	7,9955	7,9996
IV.....	10,0312	10,0108	10,0115	10,0027	10,0083
V.....	12,0307	12,0120	12,0130	12,0067	12,0106
V – I.....	7,7997	8,0035	8,0035	8,0024	8,0032

Les observations photographiques du réticule du micromètre ayant été faites après le passage de Vénus, c'est-à-dire après le 9 décembre, on n'aura égard qu'aux trois dernières déterminations, qui sont très-concordantes, si l'on en juge surtout par la distance des fils extrêmes. La première détermination, remontant à près de deux mois, sera laissée de côté.

Voici maintenant le résumé des déterminations de la valeur angulaire moyenne du tour de vis du micromètre de l'altazimut.

On les a obtenues en pointant sur le bain de mercure, un fil étant mis en coïncidence avec sa propre image ou avec celle d'un autre fil, et les déplacements angulaires de la lunette étant mesurés sur le cercle de hauteur à l'aide de quatre microscopes.

(P. 127.)
3 novembre 1874.
$\theta = 15°,1$.

Fil mobile de $2^t,0000$ à $14^t,0000 = 34'4'',4$,
$1^t = 170'',45$.

(P. 135.)
20 novembre.
$\theta = 14°,7$.

$1^t = 170'',63$.

(P. 157.)
11 décembre.
$\theta = 18°,0$.

De I à V $22'44'',2 = 8^t,0031$,
$1^t = 170'',46$.

(P. 157.)
11 décembre.
$\theta = 18°,0$.

De 0^t à $16^t = 45'28'',3$,
$1^t = 170'',52$.

(P. 159.)

De 0^t à 16^t,
$1^t = 170'',68$.

La moyenne de ces cinq déterminations donne $1^t = 170'',548$; on admet que la vis est régulière; c'est, en effet, ce que confirment les observations du 11 décembre.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Quant à l'approximation, on voit qu'elle est environ de $\frac{1}{10}$ de seconde d'arc; en valeur relative, l'erreur serait voisine de $\frac{1}{20000}$.

Pour établir le coefficient de proportionnalité entre les mesures de l'épreuve et les mesures du micromètre, on va exprimer les positions des fils de l'altazimut d'abord en fonction du tour de vis, et, en multipliant chaque nombre par 170″,55, on obtiendra en secondes d'arc la position mutuelle des fils.

On prendra à cet effet la moyenne des trois déterminations précédentes (des 3, 7 et 16 décembre 1874) pour la position absolue des cinq fils fixes sur le micromètre; le fil mobile, ayant toujours été placé à 4 tours avant le fil I, c'est-à-dire à la division que nous avons appelée $0^t,000$, servira d'origine.

D'où l'on conclut le Tableau suivant :

Trait.			Moyennes générales des mesures de l'épreuve.
	t	″	d
M.	0,0000	0,00	0,00
I.	4,0074	683,46	6273,31
II.	6,0102	1025,04	9405,82
III.	7,9996	1364,33	12520,79
IV.	10,0083	1706,92	15661,84
V.	12,0106	2048,41	18793,90

Il s'agit maintenant de chercher la valeur V en secondes d'une division d qui sert d'unité pour les mesures de l'épreuve du réticule.

Comme la proportionnalité exacte des nombres de ce Tableau avec ceux de la moyenne générale des mesures n'est pas possible, on va chercher la valeur de V qui rende minimum la somme des carrés des différences des deux déterminations.

La valeur approchée de V, déduite de la comparaison des premiers et des derniers nombres, est V = 0″,10899.

Posons donc, pour simplifier le calcul, V = 0″,109 + ε, ε étant une inconnue auxiliaire à déterminer, et multiplions par le facteur V les valeurs de la moyenne générale (p. B.78); on trouve ainsi, pour la transformation des mesures,

″	
0,00 + 0	
683,79 +	6273,31ε
1025,23 +	9405,82ε
1364,77 +	12520,79ε
1707,14 +	15661,84ε
2048,51 +	18793,90ε

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La différence avec les distances exprimées en secondes est $\varepsilon_i - V x_i$:

$$\begin{aligned}
&0'',00\\
&-0,33 - 6273,31\varepsilon\\
&-0,19 - 9405,82\varepsilon\\
&-0,44 \quad 12520,79\varepsilon\\
&\quad 0,22 \quad 15661,84\varepsilon\\
&-0,13 - 18793,90\varepsilon
\end{aligned}$$

Comme on le voit, ε doit être très-petit, car la proportionnalité est presque rigoureuse.

Pour simplifier le calcul numérique, on remarquera que les facteurs de ν sont sensiblement proportionnels à 2, 3, 4, 5, 6; si donc on divise ces différences par $\frac{1}{2}6273,31 = 3136,66$, on aura la série des quantités dont la somme des carrés doit être minimum :

$$\begin{aligned}
&0'',0001052 - 2\varepsilon \quad \text{ou} \quad \delta_2 - 2\varepsilon\\
&-0,0000605 - 3\varepsilon \qquad \delta_3 - 3\varepsilon\\
&-0,0001402 - 4\varepsilon \qquad \delta_4 - 4\varepsilon\\
&-0,0000701 - 5\varepsilon \qquad \delta_5 - 5\varepsilon\\
&-0,0000414 - 6\varepsilon \qquad \delta_6 \quad 6\varepsilon
\end{aligned}$$

La solution est évidemment

$$\varepsilon = -\frac{2\delta_2 + 3\delta_3 + \ldots + 6\delta_6}{2^2 + 3^2 + \ldots + 6^2} = -\frac{0'',0015516}{90} = +0'',0001724.$$

Par substitution de cette valeur, les différences deviennent

$$0'',00, \quad -0'',23, \quad -0'',03, \quad -0'',22, \quad -0'',05, \quad -0'',19.$$

Par suite, la valeur de V qui satisfait à la condition demandée est

$$\begin{aligned}
V &= 0'',109 - 0'',0001724 = 0'',1089286,\\
V &= 0'',10898;
\end{aligned}$$

c'est la valeur moyenne de d exprimée en secondes, autrement dit la valeur angulaire cherchée.

Ainsi, les valeurs de Σ et de Δ, somme des rayons et distance des centres du Soleil et de Vénus, obtenues avec les épreuves de Saint-Paul, peuvent être transformées en

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

secondes d'arc par multiplication par ce facteur. Il ne faut pas oublier que, dans ce cas, la somme Σ est altérée par la réfraction, et qu'il faut, pour obtenir la valeur exacte, multiplier par le facteur qu'on trouvera dans la Table (p. A.112).

Remarque. — Les différences résiduelles

$$0'',00, \quad -0'',23, \quad -0'',03, \quad -0'',22, \quad +0'',05, \quad +0'',19,$$

desquelles il est nécessaire de retrancher la première, qui est nulle par définition, présentent une allure systématique. On voit en effet qu'avec ce mode de calcul le fil M, étant considéré comme origine, est supposé déterminé sans erreur. Graphiquement, cette hypothèse gratuite se met mieux en évidence. Si l'on prend les déterminations angulaires de la position des fils comme ordonnées et les déterminations correspondantes de l'épreuve comme abscisses, la série des points doit déterminer une ligne droite

$$y = ax + b,$$

et l'on doit définir les coefficients a et b de cette droite par la condition qu'elle passe le plus près possible des points.

Dans le calcul précédent, on a supposé que la droite passait par le point d'origine $y = 0$, $x = 0$, par suite, que b était égal à zéro. On a donc fait pour l'origine une exception non justifiée.

Rétablissons la symétrie des conditions pour la détermination du coefficient a, qui est précisément le facteur V cherché. Quant à b, il donnera l'erreur dont l'origine est affectée.

La distance d'un point $x_i y_i$ à la droite dont l'équation est donnée plus haut est égale à

$$\frac{y_i - ax_i - b}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

La somme des carrés des distances d'une série de points $x_i y_i$ sera

$$\frac{1}{a^2 + 1} \Sigma (y_i - ax_i - b)^2.$$

On cherche les valeurs de a et de b qui rendent minimum cette somme de carrés; ces valeurs sont celles qui annulent les dérivées partielles de cette somme prises par rapport à a et à b. Mais on peut simplifier la condition en remarquant qu'ici l'incertitude qui pèse sur a est extrêmement faible, de sorte que a est assez bien déterminé pour que le facteur $\frac{1}{a^2 + 1}$ puisse être considéré comme constant; on peut donc faire abstraction de ce facteur et égaler à zéro les dérivées du signe Σ seulement

$$\Sigma x_i (y_i - ax_i - b) = 0, \quad \Sigma (y_i - ax_i - b) = 0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ce qui revient à écrire que la somme des carrés des différences des ordonnées de la droite et des ordonnées des points est la même, condition d'ailleurs aussi plausible que l'analogue avec les distances; d'où, en appelant n le nombre de points,

$$a\Sigma x_i^2 + b\Sigma x_i = \Sigma x_i y_i, \quad a = \frac{n\Sigma x_i y_i - \Sigma x_i \Sigma y_i}{n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2},$$

$$a\Sigma x_i + nb = \Sigma y_i, \quad b = \frac{\Sigma x_i^2 \Sigma y_i - \Sigma x_i \Sigma x_i y_i}{n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2}.$$

Malgré l'apparence complexe du nouveau mode de calcul, la mise en nombre des formules n'exige que peu de travail supplémentaire si l'on profite de certaines simplifications déjà remarquées : ainsi, l'on prendra pour ordonnées y_i, non pas les valeurs angulaires déduites des mesures, mais ces valeurs diminuées du produit

$$0'',109 x_i,$$

ce qui revient à poser

$$a = 0'',109 + \alpha;$$

alors les y_i deviennent très-petits. Si l'on remarque, comme précédemment, que les valeurs de x_i sont sensiblement proportionnelles à 0, 2, 3, 4, 5, 6, on peut diviser les δ des équations de condition par le facteur de proportionnalité 3136,66 déjà employé; les y_i deviennent les δ_i du calcul précédent, et $\frac{b}{3136,66}$ β; on a alors

$$n = 6, \quad \Sigma x_i = 20, \quad \Sigma x_i^2 = 90,$$

$$\Sigma x_i \delta_i = -0'',0015516, \quad \Sigma \delta_i = -0'',0004174,$$

$$\alpha = \frac{6\Sigma x_i \delta_i - 20\Sigma \delta_i}{6.90 - 400} = \frac{3\Sigma x_i \delta_i - 10\Sigma \delta_i}{70}, \quad \beta = \frac{90\Sigma \delta_i - 20\Sigma x_i \delta_i}{140} = \frac{9\Sigma \delta_i - 2\Sigma x_i \delta_i}{14},$$

$$\alpha = -0,0000687, \quad \beta = -0,0000467,$$

$$a = 0'',10899313, \quad b = -0'',1465.$$

Si l'on substitue ces valeurs de a et de b, c'est-à-dire si l'on multiplie par a les valeurs x_i et qu'on y ajoute b, les différences deviendront

Traits.			
	"		d
M.....	+ 0,15	ou, en divisions,	+ 1,64
I.....	- 0,14		- 1,53
II.....	+ 0,02		+ 0,22
III.....	- 0,20		- 2,18
IV.....	+ 0,04		+ 0,44
V.....	0,15		+ 1,64
Écart moyen...	0,12		1,28

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Le mode de calcul n'a pas changé beaucoup le résultat : en effet, la valeur de a qui représentait précédemment V devient

$$a - V = 0'',1089931 ;$$

c'est la valeur angulaire de l'unité d adoptée dans les mesures.

On remarquera que l'écart moyen des valeurs angulaires est 0″,12, c'est-à-dire à peu près l'approximation inhérente à ces mesures (p. B.80). De même, l'écart moyen des mesures de l'épreuve photographique est très-voisin de l'écart moyen $1^d,33$ adopté comme approximation des mesures de cette épreuve (p. B.78).

Il n'est pas inutile, en terminant, de faire remarquer l'accord très-satisfaisant de ces deux genres de déterminations : d'une part, la mesure des positions des fils du réticule, exécutée à l'île Saint-Paul avec le micromètre de l'altazimut ; d'autre part, la mesure des positions des images de ces fils, exécutée à Paris d'après une épreuve photographique faite à Saint-Paul, avec la machine micrométrique de la Commission.

La proportionnalité de ces deux genres de résultats, obtenus par des intermédiaires si différents, est aussi satisfaisante que possible, puisque les vérifications se présentent avec un écart moyen égal à celui qu'on est en droit d'attendre des procédés de mesure dans les circonstances où l'on est placé.

Application numérique.

La connaissance du facteur V = 0″,1089931 permet de réduire en *secondes d'arc* les résultats numériques obtenus avec les épreuves de l'île Saint-Paul.

On se bornera ici, comme exemple, à calculer la valeur de la somme des rayons Σ du Soleil et de la planète Vénus d'après les mesures exécutées par M. Angot, fascicule C ; cette somme, en particulier, comporte une vérification importante : en effet, elle doit rester constante dans toute la série et être très-voisine du nombre $R = r = 1007'',7$, fourni par les données de la *Connaissance des Temps* (*voir* p. A.76). La vérification est, comme on va le voir, aussi satisfaisante qu'il était permis de l'espérer.

La correction de l'effet de la réfraction d'après la Table de

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

M. Puiseux (p. A.112) ne modifie que de quelques dixièmes de seconde d'arc le résultat.

Épreuves de la station de l'île Saint-Paul.	Valeur observée de la somme des rayons Σ.	Produit par le facteur V Σ × 0″,1089931.	Correction de réfraction Σ × f.	Valeur définitive de la somme des rayons des deux astres.
N° 5.....	9262,68	1009,6	0,3	1009,6
N° XXX...	9233,16	1006,4	0,7	1007,1
N° XLVIII. .	9270,95	1010,5	0,4	1010,9
N° 45	9245,24	1007,7	0,2	1007,9
N° XLVII...	9265,61	1009,9	0,3	1010,2
			Moyenne.....	1009,14

On retrouve à 1″,4 près le résultat prévu; la vérification est donc très-satisfaisante. Toutefois, il sera nécessaire d'attendre la discussion générale des valeurs de Σ de toute la série avant de se prononcer définitivement sur l'approximation du résultat; ainsi, il y aura lieu d'examiner la grandeur des variations accidentelles de la réfraction, l'effet du mouvement diurne, la valeur de l'erreur systématique personnelle à l'observateur (*voir* p. A.28), l'influence du miroir plan, dont la surface a probablement changé légèrement de forme sous l'action répétée de la chaleur solaire, etc.....

En tout cas, il importe de rappeler que l'on peut se passer de demander aux épreuves les valeurs absolues de Σ et de Δ (*voir* p. A.76), et que le rapport $\frac{\Delta}{\Sigma}$ suffit pour le calcul de la parallaxe du Soleil.

L'examen des résultats précédents a néanmoins le grand avantage d'accroître la confiance qu'on peut avoir dans les épreuves du passage, et en particulier dans la mesure du rapport $\frac{\Delta}{\Sigma}$, puisque cinq épreuves prises au hasard donnent avec une approximation très-remarquable la valeur absolue de Σ.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Il est utile aussi de faire remarquer, en terminant, que cette vérification de la valeur de Σ est aussi une vérification de l'analyse des compensations d'erreurs faite précédemment (p. A.28), en particulier du phénomène de l'*irradiation photographique*, qui, dans d'autres circonstances, peut avoir un effet fâcheux. Il y a donc lieu d'espérer que toutes les conclusions de cette analyse se vérifieront avec le même succès.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

APPENDICE II.

ÉTUDE DES ÉCHELLES SUR VERRE A, B, C.

Après les essais divers (p. B.26) tentés pour obtenir des échelles transparentes pour la mesure différentielle des épreuves, on parvint à la construction définitive de ces échelles en gravant des traits doubles à l'acide fluorhydrique.

Avant de mettre ces échelles entre les mains des observateurs pour effectuer les observations courantes, on a jugé utile de se rendre compte de leur *comparabilité,* au double point de vue de l'aspect des traits et de l'identité de leurs distances. En conséquence, les trois échelles auxiliaires A, B, C, destinées aux machines n°s 2, 3, 4, furent comparées successivement avec l'échelle normale sur plaqué d'argent, suivant la méthode même qui fut employée plus tard par les observateurs de chaque machine.

Le résultat fut très-satisfaisant : ces trois échelles, construites ensemble avec des précautions identiques, c'est-à-dire avec la même machine à diviser (p. B.29), le même tracelet, la même partie de la vis, etc., furent trouvées aussi identiques que possible ; l'identité est même telle, qu'elles présentent toutes le même petit défaut sur le trait V, défaut qui consiste en ce que la ligne lumineuse est un peu plus étroite sur ce trait que sur les autres.

Le tableau ci-après montre que l'accord des distances des

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

traits est extrêmement satisfaisant. Cette condition n'était pas absolument indispensable; cependant elle est utile, parce qu'elle augmente les chances de comparabilité des mesures effectuées par les différents observateurs.

Résumé des mesures.

(Distances au trait zéro exprimées avec la même unité que les distances des traits de l'échelle normale.)

	Traits.						
	D.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
	d	d	d	d	d	d	d
Échelle A. .	0,00	501,83	1003,17	1504,41	2006,00	18037,16	18535,51
Échelle B...	0,00	501,07	1001,10	1502,39	2003,28	18037,70	18532,48
Échelle C...	0,00	502,52	1002,79	1503,64	2004,45	18040,63	18535,03

L'écart moyen n'atteint pas une division, ou $\frac{1}{600}$ de millimètre; on peut dire que les échelles auxiliaires qui ont servi aux mesures des épreuves du passage sont identiques; elles ont, du reste, été ultérieurement mesurées par les observateurs à qui elles ont été confiées (*voir* les fascicules suivants).

Ces mesures, destinées seulement à contrôler l'identité approchée de la construction des échelles, n'auraient peut-être pas mérité d'être publiées en détail si quelques-unes d'entre elles n'avaient pas été utilisées dans l'étude de l'échelle normale sur plaqué d'argent (p. B.43). C'est à ce titre qu'elles sont données ici sous la forme adoptée ultérieurement pour ce genre d'observations. (*Voir*, p. A.61, la Note explicative pour l'intelligence des Tableaux numériques; exemple, p. A.71.)

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ÉTUDE DE L'ÉCHELLE *A* SUR VERRE A 7 TRAITS.

COMPARAISON AVEC L'ÉCHELLE NORMALE.

18 Décembre 1875. Observateur : M. CORNU. $\theta_{MOY.} = 9°,7$.

Échelle du chariot.	Lectures du microscope. Trait d'avant.	Trait sur verre.	Trait d'arrière.	Distance des traits.	Distance des traits sur verre. Trait d'avant.	Trait d'arrière.
	d	d	d	d	d	d
61,5	N° 0... 874,00	O... 777,28	N°1... 373,66	Obs. 500,34	96,72	— 403,62
				Ad.. 500,02	Réd. — 0,08	+ 0,24
				Diff. —0,32	Dist. 0,00	500,02
					O = **96,64**	
60,5	N° 1... 874,22	I... 775,72	N°2... 372,96	501,26	98,50	— 402,79
				501,01	— 0,05	+ 0,20
				—0,25	500,02	1001,03
					I = **598,47**	
59,5	N° 2... 873,60	II... 774,72	N°3... 372,98	502,62	98,88	— 401,74
				500,20	— 0,09	+ 0,31
				—0,40	1001,03	1501,23
					II = **1099,81**	
58,5	N° 3... 873,38	III.. 773,46	N°4... 372,46	500,92	99,52	— 401,00
				500,40	0,10	+ 0,42
				—0,52	1501,23	2001,63
					III = **1601,05**	
57,5	N° 4... 873,06	IV.. 772,00	N°5... 372,14	500,92	101,06	— 399,86
				500,64	— 0,05	+ 0,23
				—0,28	2001,63	2502,27
					IV = **2102,64**	
25,5	N° 36.. 850,34	V... 746,26	N°37.. 349,18	501,16	104,08	— 397,08
				501,18	0,00	— 0,02
				+0,02	18029,72	18530,90
					V = **18133,80**	
24,5	N° 37.. 849,48	VI.. 748,22	N°38.. 348,62	500,86	101,26	— 399,60
				500,82	— 0,01	+0,03
				—0,04	18530,90	19031,72
					VI = **18632,15**	

Résumé.

	O.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
Résultats.....	96,64	598,47	1099,81	1601,05	2102,64	18133,80	18632,15
Distance au trait O.....	0,00	501,83	1003,17	1504,41	2006,00	18037,16	18535,51

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ÉTUDE DE L'ÉCHELLE *B* SUR VERRE A 7 TRAITS.

COMPARAISON AVEC L'ÉCHELLE NORMALE.

20 Décembre 1875. Observateur : M. Cornu. θ moy. = 9°,6.

Échelle du chariot.	Lectures du microscope. Trait d'avant.	Trait sur verre.	Trait d'arrière.	Distance des traits.	Distance des traits sur verre. Trait d'avant.	Trait d'arrière.
	d	d	d	d	d	d
61,5	N° 0... 873,30	O... 767,78	N°1... 372,72	Obs. 500,58	105,52	—395,06
				Ad.. 500,02	Réd. — 0,11	0,45
				Diff. —0,56	Dist. 0,00	500,02
					O = **105,41**	
60,5	N° 1... 873,34	I... 767,06	N°2... 372,40	501,14	106,48	— 394,66
				501,01	—0,02	0,13
				—0,13	500,02	1001,01
					I = **606,48**	
59,5	N° 2... 872,92	II... 767,42	N°3... 372,60	500,32	105,50	— 394,82
				500,20	—0,02	0,10
				—0,12	1001,03	1501,23
					II = **1106,51**	
58,5	N° 3... 872,85	III.. 767,26	N°4... 372,32	500,54	106,60	— 393,94
				500,40	—0,03	0,11
				—0,14	1501,23	— 2001,63
					III = **1607,80**	
57,5	N° 4... 873,14	IV.. 766,06	N°5... 372,40	500,74	107,08	— 393,66
				500,64	—0,02	0,08
				— 0,10	2001,63	— 2502,27
					IV = **2108,69**	
25,5	N° 36.. 851,22	V... 737,82	N°37.. 350,00	501,22	113,40	— 387,82
				501,18	— 0,01	0,03
				—0,04	18029,72	18530,90
					V = **18143,11**	
24,5	N° 37.. 849,34	VI.. 742,36	N°38.. 348,56	500,78	106,98	— 393,80
				500,82	+ 0,01	— 0,03
				+0,04	18530,90	19031,72
					VI = **18637,89**	

Résumé.

	O.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
Résultats.....	105,41	606,48	1106,51	1607,80	2108,69	18143,11	18637,89
Distance au trait O.....	0,00	501,07	1001,10	1502,39	2003,28	18037,70	18532,48

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ÉTUDE DE L'ÉCHELLE *C* SUR VERRE A 7 TRAITS.

COMPARAISON AVEC L'ÉCHELLE NORMALE.

24 Décembre 1875. Observateur : M. CORNU. 9 MOY. = 12°,0.

Échelle du chariot.	Lectures du microscope. Trait d'avant.	Trait sur verre.	Trait d'arrière.	Distance des traits.	Distance des traits sur verre. Trait d'avant.	Trait d'arrière.
61,5	N° 0... 875,70	0... 796,10	N°1... 375,58	Obs. 500,12	79,30	— 120,82
				Ad.. 500,02	Réd. — 0,02	0,08
				Diff. —0,10	Dist. 0,00	500,02
					O = 79.28	
60,5	N° 1... 876,20	1... 794,34	N°2... 374,76	501,44	81.86	— 119,58
				501,01	— 0,07	0,36
				—0,43	500,02	1001,03
					I = 581,80	
59,5	N° 2... 875,44	II... 794,10	N°3... 375,24	500,20	81.04	— 119,16
				500,20	0.00	0,00
				0,00	1001,03	1501,23
					II = 1082,07	
58,5	N° 3... 875,58	III.. 793,82	N° 4... 374,76	500,82	81,76	— 119.06
				500,40	— 0.07	0,35
				—0,42	1501,23	2001,63
					III = 1582,92	
57,5	N° 4... 875,50	IV.. 793,36	N°5... 374,60	500,90	82.14	— 118,76
				500,61	— 0,01	0,22
				—0,26	2001,63	2502,27
					IV = 2083,73	
25,5	N° 36.. 854,06	V... 763,88	N°37.. 352.92	501,14	90,18	— 410,96
				501,18	— 0.01	— 0.03
				—0,04	18029,72	18530,90
					V = 18119,91	
24,5	N° 37.. 853,34	VI.. 769,94	N°38.. 352,60	500,74	83.40	— 417,34
				500,82	— 0,01	— 0,07
				—0,08	18530,90	19031,72
					VI = 18614,31	

Résumé.

	O.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
Résultats.....	79,28	581,80	1082,07	1582,92	2083,73	18119,91	18614,31
Distance au trait O.....	0,00	502,52	1002,79	1503,64	2004,45	18040,63	18535,03

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

APPENDICE III.

ÉTUDE DE L'INFLUENCE DES DÉFORMATIONS SYSTÉMATIQUES DE L'ÉPREUVE DU DISQUE SOLAIRE SUR LA DÉTERMINATION DE LA DIRECTION DE LA LIGNE DES CENTRES.

On a vu précédemment (p. A.28) que les éléments à relever sur les épreuves étaient la distance des centres des deux astres et la somme de leurs rayons. Ces mesures s'appuient sur la détermination préalable de la direction de la ligne des centres, ligne idéale qu'on déduit d'observations exécutées sur le contour du disque, supposé rigoureusement circulaire.

On sait que les mesures micrométriques effectuées sur le disque solaire n'ont permis de constater avec certitude aucun aplatissement sensible; on peut donc admettre, abstraction faite de l'influence de la réfraction atmosphérique, que le contour du Soleil est une circonférence de cercle.

La réfraction atmosphérique est une cause inévitable de déformation du disque solaire, et les épreuves photographiques de cet astre présentent nécessairement cette déformation.

Les aberrations de l'objectif ou du miroir seraient également une cause de déformation des images, mais on a pris les plus grands soins pour obtenir l'aplanétisme de ces appareils; on a étudié minutieusement l'influence de l'écartement des verres (*voir* le t. I, 2ᵉ Partie, *Recueil de Mémoires,* p. 403), et on l'a trouvée négligeable. Il ne reste comme cause possible d'aberration provenant de la disposition optique des appareils que l'al-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

tération de la forme de la surface du miroir sous l'influence de la chaleur du Soleil pendant les observations; mais les observateurs, prévenus de ce danger (*voir* Programme, t. I, 2e Partie, Supplément, p. 5), ont pris toutes les précautions nécessaires pour l'éviter. Nous pouvons donc considérer la déformation provenant de cette cause comme très-faible.

Cependant il existe encore une cause de déformation de l'image solaire dans le moyen mécanique de production de l'impression photographique avec l'appareil employé aux stations françaises et décrit précédemment (*voir* p. A.4).

En effet, l'impression photographique sur la plaque sensible ne s'est produite que par l'ouverture d'un écran mobile placé sensiblement au foyer de l'objectif; il en résulte que les différents points de l'image n'ont pas été obtenus rigoureusement au même instant; or, comme l'effet du mouvement diurne déplaçait l'image dans le plan focal avec une vitesse appréciable, les différentes zones successivement découvertes par la fente de l'écran mobile appartenant à des images solaires *différentes*, on en conclut l'existence d'une déformation qui dépend, en grandeur et en direction, des vitesses relatives de l'écran et de l'image solaire.

Il importe de se rendre un compte exact de ces deux sortes de déformations pour en évaluer l'influence possible sur la détermination de la ligne des centres des deux astres; on va voir bientôt que, dans les circonstances où les observations photographiques ont été faites, ces causes d'erreur sont négligeables.

1° Influence de la réfraction atmosphérique.

Nous considérerons seulement l'effet de la réfraction régulière, c'est-à-dire en faisant abstraction des variations accidentelles,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

dont il est impossible de prévoir, en général, ni le sens ni la grandeur; grâce à la *fortuité* de ces variations, on peut admettre que les erreurs qu'elles amènent sont tantôt positives, tantôt négatives, et qu'elles se compensent exactement dans la moyenne d'observations suffisamment nombreuses.

La réfraction régulière augmentant en apparence la hauteur des astres suivant une loi que la théorie et l'observation ont confirmée, on en conclut que les deux bords du Soleil sont inégalement relevés, le bord inférieur l'étant davantage, et, par suite, que le diamètre vertical du Soleil est diminué. Adoptant les Tables de réfraction calculées d'après les formules de Laplace, publiées dans la *Connaissance des Temps*, on en déduit aisément, pour les différentes hauteurs, la diminution du diamètre vertical du Soleil, supposé égal réellement à 2° 16′ 15″,7 = 1951″,1 (*Connaissance des Temps pour* 1874, p. 389) :

Hauteur apparente du centre du Soleil.	Diminution du diamètre vertical.
°	″
90	0,5
80	0,5
70	0,6
60	0,7
50	0,9
40	1,2
30	2,1
20	4,6
10	16,6

Au-dessous de 10 degrés, les réfractions accidentelles deviennent si grandes, que les observations perdent toute précision; il est donc inutile de pousser l'étude au-dessous de cette limite.

Dans ces circonstances, les cordes verticales sont diminuées dans le même rapport que le diamètre vertical; par conséquent,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

le disque du Soleil apparaît elliptique; cette ellipticité est encore extrêmement petite à 20 degrés de hauteur, puisque le rapport des axes principaux ne diffère de l'unité que de $\frac{4'',6}{1951,4}$ ou $\frac{1}{500}$ environ.

Il est inutile de considérer des hauteurs inférieures à 20 degrés, car, dans les stations françaises, la hauteur du Soleil au-dessus de l'horizon a été supérieure à cette limite, qu'elle a atteinte une seule fois à la station de Pékin, au moment de l'entrée de la planète Vénus sur le Soleil.

2° Influence de la durée de la chute de l'écran.

Il est bon de rappeler que l'écran était formé d'une lame d'acier percée d'une ouverture rectangulaire perpendiculaire à sa grande dimension (*voir* t. I, *Supplément,* légende explicative, p. 111). C'est par cette ouverture, supérieure en longueur au diamètre du Soleil, que l'impression photographique se faisait par zones successives.

On sait que la direction de l'ouverture de l'écran a été choisie parallèlement à la ligne des centres des deux astres (*voir* t. I, *Recueil de Mémoires,* p. 404), pour que les quatre bords à relever soient impressionnés en même temps; des Tables ont été construites (*Supplément,* p. 89), et, dans chaque station, les observateurs changeaient de quart d'heure en quart d'heure l'azimut du porte-plaque, de manière à remplir cette condition.

Il résulte aussi de cette disposition de l'écran que les dimensions de l'épreuve solaire, comptées parallèlement à la ligne des centres, ne présentent aucune déformation; mais, comme la durée de la chute de l'écran n'était pas instantanée, les zones

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

successives sont légèrement déplacées les unes par rapport aux autres; l'image du Soleil, supposée parfaitement circulaire, se trouve donc déformée suivant une loi que l'on va rechercher.

Soit

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$

l'équation du cercle représentant le disque solaire, en prenant comme axes de coordonnées rectangulaires la direction de l'ouverture longitudinale de l'écran pour les abscisses x et la direction perpendiculaire ou celle du mouvement de l'écran pour les ordonnées. L'image du disque se déplaçant par suite du mouvement diurne, les coordonnées α, β du centre sont fonctions du temps; mais cette fonction se réduit à une relation linéaire pendant le très-petit intervalle de temps où il sera utile de le considérer; si donc on désigne par u la vitesse du déplacement diurne sur l'épreuve et par θ la direction qu'elle fait avec la ligne des centres, on aura

$$\alpha=\alpha_0+ut\cos\theta,\quad \beta=\beta_0+ut\sin\theta,$$

α_0 et β_0 étant les coordonnées du centre à l'origine du temps $t=0$; cette origine du temps étant arbitraire, les constantes α_0 et β_0 sont arbitraires aussi.

Le mouvement de la chute de l'écran peut également être considéré comme uniforme, surtout pendant le petit intervalle de temps où l'on aura besoin de le considérer, à cause des frottements qui limitent bientôt sa vitesse. La position de la ligne moyenne de l'ouverture sera donc définie par l'équation

$$y=y_0+Vt,$$

V étant la vitesse de chute de l'écran, y_0 la position de l'écran à l'origine du temps.

Si à chaque instant on substitue dans les équations la valeur t correspondante, on déduira les valeurs de x et de y appartenant aux points de la circonférence solaire découverts par l'écran et impressionnés photographiquement. En conséquence, l'élimination de t entre ces équations donnera le lieu géométrique de ces points ou l'équation de la courbe qui représente le disque solaire déformé.

Pour simplifier le calcul, et par raison de symétrie, on peut choisir comme origine du temps le moment où l'ouverture de l'écran passait par le centre du disque solaire; d'où

$$\alpha_0=0,\quad \beta_0=0,\quad y_0=0.$$

Il vient alors, comme résultat de l'élimination de t,

$$\left(x-\frac{y}{V}u\cos\theta\right)^2+\left(y-\frac{y}{V}u\sin\theta\right)^2=R^2,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ou, en posant $\frac{u}{V} = w$,

$$x^2 - 2xyw\cos\theta + y^2(1 - 2w\sin\theta + w^2) = R^2;$$

c'est l'équation d'une conique rapportée à son centre, qu'on pourrait mettre sous la forme

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1,$$

et dans laquelle l'expression $B^2 - AC = -\frac{1}{R^4}(1 - w\sin\theta)^2$ est négative, quels que soient w et θ. L'image du disque solaire est donc transformée en une ellipse.

On déterminera les axes principaux de cette ellipse en direction et en grandeur, en cherchant la direction ω qui rend maximum le rayon vecteur ρ de cette courbe :

$$x = \rho\cos\omega,$$
$$y = \rho\sin\omega,$$
$$A\cos^2\omega + 2B\cos\omega\sin\omega + C\sin^2\omega = \frac{1}{\rho^2}.$$

Cette condition annule la dérivée du premier membre prise par rapport à ω; on en déduit aisément

$$\operatorname{tang} 2\omega = \frac{2B}{A - C} \quad \text{et} \quad \rho^2 = \frac{A + C \pm \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}}{2(AC - B^2)}.$$

1° *Direction des axes principaux.* — Si l'on substitue à ABC leur valeur dans l'expression de tang 2ω, il vient définitivement

$$\operatorname{tang} 2\omega = \frac{\cos\theta}{\frac{1}{2}w - \sin\theta},$$

ω étant l'angle des axes principaux avec l'axe des x.

On verra bientôt que w, rapport des vitesses du mouvement diurne et du mouvement de l'écran, est une fraction excessivement petite, inférieure en général à $\frac{1}{500}$. On peut donc écrire simplement

$$\operatorname{tang} 2\omega = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right),$$

d'où

$$2\omega = i\pi + \frac{\pi}{2} - \theta, \quad \omega = (2i + 1)\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2},$$

i étant un nombre entier quelconque; or $(2i + 1)\frac{\pi}{2}$ représente la série de directions rectangulaires coïncidant avec celles des axes coordonnés; il suffit donc, pour ob-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

tenir des directions des axes de l'ellipse, de porter, à partir de chaque axe, la valeur $\frac{\theta}{2}$ en sens inverse du sens des angles croissants.

L'interprétation peut être encore simplifiée en remarquant que $\frac{\pi}{2} - \theta$ est l'angle θ' du mouvement diurne avec la direction de la chute de l'écran; donc

$$2\omega = i\pi + \theta', \quad \text{d'où} \quad \omega = \frac{i\pi}{2} + \frac{\theta'}{2};$$

on arrive ainsi à l'énoncé très-simple :

Les axes de l'ellipse coïncident sensiblement en direction avec les bissectrices aiguë et obtuse des vitesses du mouvement diurne et du mouvement de l'écran.

2° *Détermination de la grandeur des axes.* La substitution des valeurs de ABC dans l'expression de ρ^2 donnerait une expression assez compliquée, que l'on simplifie beaucoup en négligeant le carré de ω devant l'unité, c'est-à-dire en substituant d'abord

$$A = \frac{1}{R^2}, \quad B = -\frac{\omega\cos\theta}{R^2}, \quad C = \frac{1 - 2\omega\sin\theta}{R^2},$$

$$AC - B^2 = \frac{1 - 2\omega\sin\theta}{R^4}; \quad \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2} = \frac{2\omega}{R^2};$$

d'où l'on conclut

$$\rho^2 = R^2 \frac{1 - \omega\sin\theta \pm \omega}{1 - 2\omega\sin\theta} = R^2(1 - \omega\sin\theta \pm \omega)(1 + 2\omega\sin\theta);$$

et, si l'on remplace, comme précédemment, θ par $\frac{\pi}{2} - \theta'$, on trouve finalement, pour les valeurs des deux axes,

$$\rho_1 = R\left(1 - \omega\sin\frac{\theta'}{2}\right),$$

$$\rho_2 = R\left(1 + \omega\cos^2\frac{\theta'}{2}\right).$$

Le carré de l'excentricité de l'ellipse $e^2 = \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{\rho_1^2}$ se réduit évidemment à $\frac{2(\rho_2 - \rho_1)}{R}$, d'où

$$e^2 = 2\omega.$$

Donc le carré de l'excentricité de l'ellipse est sensiblement égal au double du rapport des vitesses du mouvement diurne et du mouvement de l'écran.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On vérifie le calcul de ρ_1 et ρ_2 en substituant directement les deux solutions utiles

$$\omega_1 = \frac{\theta'}{2}, \qquad \omega_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta'}{2},$$

qui donnent les directions des axes; cette manière de procéder a, en outre, l'avantage d'établir la corrélation entre la grandeur des axes et leur direction: c'est ainsi que l'on arrive à vérifier que ρ_1 correspond bien à ω_1 et ρ_2 à ω_2.

Application numérique. — Le rapport des vitesses du mouvement diurne et du mouvement de l'écran est facile à calculer : le mouvement diurne du Soleil au solstice correspond à environ 13 secondes d'arc par seconde de temps; le diamètre du Soleil est de 1951″,4; or, l'impression photographique du disque solaire a toujours été obtenue en moins de $\frac{1}{10}$ de seconde de temps; par conséquent, la vitesse de chute de l'écran est donc de

$$1951''4 \times \frac{10}{3} = 6505'' \text{ par seconde.}$$

Le rapport des vitesses est certainement inférieur à

$$\alpha = \frac{13''}{6505''} = \frac{1}{500} \text{ en nombre rond.}$$

L'approximation employée précédemment, et qui a consisté à négliger α devant l'unité, est donc parfaitement justifiée.

3° *Calcul de l'erreur produite sur la détermination de la ligne des centres par l'ellipticité de l'image solaire.* — Il résulte de ce qui précède que chacune des deux causes analysées produit une petite ellipticité de l'image solaire. Cherchons une limite supérieure de l'erreur commise dans chaque cas; si l'on suppose que les deux causes, agissant ensemble, ajoutent leurs erreurs, on aura une limite supérieure de l'erreur définitive; on va voir que, en supposant maximum la somme de ces erreurs, l'effet est encore négligeable.

Le problème expérimental rigoureux aurait consisté à déterminer la direction qui joint le centre de la planète au centre de l'ellipse.

Le centrage de la planète est satisfaisant, car on l'obtient en général à moins de $\frac{1}{100}$ de millimètre près (5 divisions) par la rotation du plateau (*voir* p. A.63).

L'ellipticité de l'image de la planète, qui est proportionnelle évidemment à celle du disque, correspond à une différence si petite des axes, que leur différence est tout à fait négligeable dans ce réglage. On peut donc admettre que le réglage de la planète est rigoureux.

Quant à la position du centre du Soleil, on l'obtient en prenant la bissectrice VO

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de l'angle MOM′ (*fig.* 1), que sous-tend une corde commune MM′ au disque et un cercle décrit du centre de la planète comme centre (*voir* p. A.64).

Fig. 1.

Mais l'arc MM′ est un arc d'ellipse; il en résulte que, bien que l'étendue de cet arc soit très-petite, on ne peut pas supposer que son centre de courbure soit placé au centre de l'ellipse; on doit le supposer placé, comme il l'est réellement, au point de la développée de l'ellipse correspondant au milieu de l'arc MM′.

L'équation de la développée de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

est

$$\left(\frac{x}{\mathrm{P}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{\mathrm{Q}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

avec

$$\mathrm{P} = \frac{a^2 - b^2}{a}, \quad \mathrm{Q} = \frac{a^2 - b^2}{b}.$$

Lorsque l'excentricité devient très-petite, les deux quantités P et Q deviennent également très-petites et tendent vers l'égalité; ainsi, supposons que $a = 1$ et $b = 1 - \frac{1}{100}$, on aura

$$\frac{a^2 - b^2}{a} = 0{,}0199, \qquad \frac{a^2 - b^2}{b} = 0{,}0197.$$

On peut donc, à l'ordre d'approximation où l'on doit se placer, considérer les deux axes P et Q comme égaux à leur valeur moyenne p,

$$p = \frac{a^2 - b^2}{\left(\frac{a+b}{2}\right)} = 2(a - b).$$

Les quatre points de rebroussement sont alors à égale distance du centre de la courbe, et les quatre branches de courbe sont tangentes à un même cercle concen-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

trique à l'ellipse; le rayon de ce cercle est égal à r, défini par la condition d'être le rayon vecteur minimum de la courbe

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = p^{\frac{2}{3}},$$

lequel correspond évidemment à $x = y$, d'où

$$r^2 = 2x^2 = 2y^2,$$

avec

$$2x^{\frac{2}{3}} = 2y^{\frac{2}{3}} = p^{\frac{2}{3}}, \quad 8x^2 = p^2, \quad 2x^2 = \frac{p^2}{4};$$

enfin

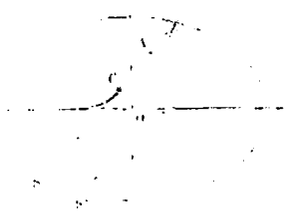
$$r = \frac{p}{2} = \frac{a - b}{2}.$$

Le rayon du cercle inscrit est donc moitié de la distance des quatre points de rebroussement au centre de la courbe; ce résultat se déduirait très-simplement de l'étude géométrique de la courbe

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = p^{\frac{2}{3}},$$

qui représente l'épicycloïde décrite par un point d'une circonférence de rayon $\frac{1}{4}p$ roulant intérieurement sur une circonférence de rayon p.

Fig. 2.



La description de la forme et de la grandeur de la développée de l'ellipse à faible excentricité a l'avantage de représenter intuitivement l'erreur que l'on commet en prenant la normale VS (*fig.* 2), passant par un point V, au lieu de la ligne VOS' joignant le centre. Le maximum d'erreur a lieu lorsque la distance OC est égale au rayon r du cercle défini plus haut; il est donc représenté par $\frac{r}{\Delta}$, Δ étant la distance OV, ou par

$$\frac{a - b}{\Delta} = \text{angle maximum.}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Si le point V est près de la circonférence, Δ est voisin de a ou de b, de sorte que l'erreur maximum est sensiblement égale à la moitié du carré de l'*excentricité*. L'excentricité de l'ellipse est

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{(a+b)(a-b)}}{a},$$

dont le carré se réduit à $2\left(\frac{a-b}{a}\right)$ lorsque a est voisin de b.

L'angle d'écart entre la direction vraie et la direction apparente de la ligne des centres est donc, en définitive, égal à la DIFFÉRENCE RELATIVE *des axes de l'ellipse.*

Calcul définitif de l'erreur totale. — Admettons que les causes d'erreur agissent dans le même sens et de manière à produire l'effet maximum : la réfraction et la composition des vitesses déformeront les diamètres du cercle de façon à leur donner une différence relative de $\frac{1}{600} + \frac{1}{600} = \frac{1}{250}$. L'erreur produite sur la détermination de la ligne des centres est donc, d'après ce qu'on vient de voir, égale à l'angle dont la tangente est $\frac{1}{250}$, ou environ 13′40″.

Cette correction de 13′40″, introduite dans le calcul de la distance des centres Δ et de la somme des rayons Σ (*voir* p. A.79 et suivantes), modifierait les réductions; il suffit de s'occuper de la correction de la distance des centres Δ, qui est la plus grande des deux.

Les mesures mêmes de l'azimut central devraient être divisées par cos 13′40″; mais log cos 13′40″ = $\bar{1}$,9999966; le facteur est moindre que $1 + \frac{1}{100000}$; on peut entièrement le négliger.

Les mesures à $\pm 2^\circ$ de distance, au lieu d'être divisées par cos 2°, devraient être divisées respectivement par cos(2° − 13′40″) et cos(2° + 13′40″). Les corrections étant très-petites, on peut adopter la correction de leur moyenne pour la moyenne des cor-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

rections ; on a donc à évaluer le facteur

$$\cos 2'' \times \frac{\cos 2''\,13'\,40'' \div \cos 1°\,46'\,20''}{2\cos 2''\,13'\,40''\cos 1°\,46'\,20''} = \frac{\cos^2 2''\cos 13'\,40''}{\cos 2''\,13'\,40''\cos 1°\,46'\,20''} = 0,9999853,$$

facteur qui diffère de l'unité d'un peu plus de $\frac{1}{100000}$.

Ainsi, même avec le maximum d'erreur possible, l'erreur dépasse à peine $\frac{1}{100000}$ de la valeur des mesures. Comme toutes les mesures présenteraient une erreur à peu près de même grandeur et de même signe, on voit que l'effet sur le quotient $\frac{\Sigma}{\Delta}$ est entièrement négligeable, à l'ordre d'approximation qu'on est en droit d'attendre de ces mesures.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

APPENDICE IV.

INDICATION DES AMÉLIORATIONS A APPORTER AUX APPAREILS DIVERS EMPLOYÉS POUR L'OBTENTION ET LA MESURE DES ÉPREUVES.

L'expérience acquise par les divers observateurs dans cette longue série d'études, s'étendant depuis l'époque des préparatifs de l'observation du passage jusqu'à la mesure définitive des épreuves, peut se résumer par l'indication sommaire des principales améliorations à apporter aux appareils employés pour l'obtention et la mesure des épreuves. On se bornera à des indications très-succinctes et purement théoriques, chacune des modifications proposées exigeant quelques études pratiques pour arriver à leur forme définitive.

1° Appareil photographique.

Diminution de la distance focale de la lunette photographique. — Les épreuves de la station de Saint-Paul ont été aussi satisfaisantes que possible; les circonstances atmosphériques étaient d'ailleurs excellentes; mais, aux autres stations, où les circonstances atmosphériques ont été moins favorables, les épreuves sont moins vigoureuses, surtout lorsqu'elles sont voilées par l'effet de la brume.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Il résulte de cette comparaison que les dispositions de l'appareil photographique, satisfaisantes lorsque l'atmosphère est pure et le soleil brillant, sont insuffisantes dans les stations où l'éclat du Soleil est faible.

Il paraît donc nécessaire de donner à l'image focale plus d'intensité, ce qu'on peut théoriquement obtenir de deux manières, soit en augmentant l'ouverture de l'objectif, soit en diminuant la longueur focale.

La Commission a déjà étudié la question (t. I, 2ᵉ Partie, p. 321), et décidé que, pour les épreuves photographiques, il ne fallait pas donner une trop grande ouverture à l'objectif: en effet, les troubles des images croissent rapidement avec le diamètre absolu de l'objectif. Ce trouble, variable à chaque instant, suivant la position des couches atmosphériques, est beaucoup moins grave pour les observations optiques continues, parce qu'il disparaît accidentellement pendant quelques fractions de seconde, et l'observateur saisit pour ainsi dire *au vol* des détails qui échappent pendant le reste du temps.

Mais, pour les observations photographiques, qui sont discontinues et qui n'utilisent qu'une fraction extrêmement petite de la durée du phénomène, ce trouble des images est très-fâcheux, parce que la probabilité de tomber exactement sur l'instant où l'image est accidentellement nette est pour ainsi dire nulle.

Telles sont les considérations qui justifient les opinions en apparence contradictoires de la Commission, laquelle a muni les stations principales d'équatoriaux de 8 pouces d'ouverture pour les observations optiques et de lunettes de 5 pouces seulement d'ouverture pour les observations photographiques.

Il n'y a donc pas lieu d'augmenter le diamètre de l'objectif photographique (5 pouces = 135 millimètres); il reste seule-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ment à en diminuer la distance focale, laquelle est un peu grande, puisqu'elle est égale à 28 fois l'ouverture de l'objectif.

La réduction à 20 fois seulement donnerait aux images focales une intensité près de deux fois plus considérable, ce qui serait avantageux à tous égards; la longueur focale serait réduite à 2^m, 50 environ.

L'image focale serait, il est vrai, réduite dans le même rapport, c'est-à-dire de 37 millimètres à 27 environ; la précision paraîtrait donc réduite également dans la même proportion. Il n'en est rien : les distances focales exagérées, comme celle de la lunette actuelle, ne font rien gagner comme précision, parce que l'indécision du contour augmente à peu près dans le même rapport que la grandeur de l'image focale. Ainsi, la diminution de diamètre de l'image ne diminuerait pas sensiblement la précision relative des mesures.

Suppression du miroir et construction parallactique de la lunette photographique. — En tout cas, on retrouvera certainement un accroissement notable de la précision des images en supprimant le miroir, qui est un organe optique inutile, et par cela même nuisible, puisque, dans aucun cas, il ne peut améliorer les images; il ne peut donc que les déformer ou les troubler.

La suppression du miroir aurait, en outre, un grand avantage au point de vue de l'augmentation de l'intensité des images, chose si désirable, ainsi qu'on l'a vu plus haut : en effet, le miroir argenté perd rapidement son pouvoir réflecteur par l'action de l'air et absorbe certainement près de la moitié de l'intensité des rayons reçus; de plus, sa surface ternie diffuse la lumière et produit comme un brouillard sur l'image.

La réduction de la distance focale de 3^m, 70 à 2^m, 50 aurait, en

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

outre, l'avantage de rendre facile le montage parallactique stable de la lunette photographique, montage difficile avec la longueur actuelle.

Cette disposition parallactique est d'ailleurs réclamée par les observateurs des stations où les nuages ont été fréquents. La nécessité de projeter l'image solaire sur le verre dépoli du chercheur (*voir* t. I, IIe Partie, Supplément, p. 112) pour régler la position du miroir avait le grave inconvénient de laisser l'appareil complétement déréglé tant que le Soleil était caché par les nuages; à chaque éclaircie on perdait beaucoup de temps à amener le faisceau solaire dans la lunette, et souvent, lorsque le réglage était effectué, le Soleil se cachait de nouveau et l'épreuve était manquée. Ces tâtonnements, toujours très-longs, ont du reste l'inconvénient de laisser inévitablement le miroir exposé au Soleil et, par suite, risquent de le déformer.

Les observateurs sont unanimes à déclarer que les moindres éclaircies auraient pu être utilisées si la lunette photographique avait été automatiquement dirigée sur le Soleil, ce qui aurait permis d'augmenter dans une proportion considérable l'importance des épreuves, et surtout d'améliorer la répartition des épreuves pendant toute la durée du passage.

En outre, la tranquillité d'esprit, si nécessaire à l'observateur dans de semblables circonstances, serait complète si, pendant ces périodes où le Soleil était caché, il pouvait s'assurer de la marche régulière du mouvement d'horlogerie en relevant avec le chronomètre le déplacement progressif du cercle horaire.

Le moyen le plus facile de contrôler la régularité du mouvement d'horlogerie consisterait probablement dans la sonnerie automatique d'un timbre qui, à chaque minute, permettrait à l'observateur de suivre sur son chronomètre la marche de son appareil.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

En résumé, le montage parallactique de la lunette photographique est une *condition indispensable,* non-seulement au point de vue de la perfection des images, mais encore au point de vue de la sécurité des observations et de la certitude de pouvoir utiliser les moindres éclaircies.

L'aérage du tube de la lunette par un ventilateur spécial devra être soigneusement conservé.

L'obturateur mécanique (dont la fente devra toujours être dirigée suivant la ligne des centres) serait porté par une pièce indépendante fixée au bâti de l'équatorial, ou tout au moins à l'axe horaire, pour éviter l'ébranlement du tube de la lunette. Grâce à l'accroissement d'intensité de l'image focale, on pourra donner une plus grande vitesse à l'obturateur et obtenir des images dans un temps plus court que la durée d'exposition des épreuves actuelles, ce qui serait avantageux au point de vue de la netteté de l'image.

Dispositifs photographiques. — Il est bon d'ajouter l'indication de quelques améliorations à étudier relativement à l'obtention des épreuves.

Avec la disposition horizontale de la lunette à long foyer, l'observation photographique s'exécutait dans une chambre obscure, où le transport des plaques sensibles se faisait sans grande précaution. Il serait bon d'adopter un châssis mobile complétement fermé, analogue à ceux en usage dans les appareils photographiques ordinaires, afin de ne plus exiger l'obscurité complète dans la cabane de l'équatorial; en effet, pour éviter l'influence fâcheuse des courants d'air chaud le long des parois de la cabane, il vaudrait mieux que l'instrument fût, autant que possible, en plein air, au milieu d'un espace gazonné : la disposition des ca-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

banes en toile de l'île Saint-Paul paraît être, sous ce rapport, un excellent modèle.

2° Plaques daguerriennes.

La principale amélioration à apporter à la construction des plaques daguerriennes est relative à la face argentée, qui est souvent insuffisamment plane; les réglages très-délicats de l'éclairement des épreuves (*voir* précédemment, p. B.12) mettent en évidence des courbures irrégulières qui nuisent à la perfection des ajustements.

On a essayé, au moment du départ des expéditions, de produire ces surfaces planes par la compression énergique des plaques entre des matrices d'acier poli : les résultats obtenus dans cette voie ont été satisfaisants; ils mériteraient d'être repris.

On avait proposé d'obtenir les épreuves sur une glace argentée, qui présenterait alors une surface plane beaucoup plus parfaite : malheureusement, les opérations du fixage au sel d'or soulèvent la plupart du temps la couche d'argent, qui est très-mince.

Cette faible couche d'argent présente aussi le grand inconvénient d'être très-altérable à l'air, ce qui serait un obstacle à la conservation des épreuves : une fois brunies par l'action de l'atmosphère, on ne pourrait probablement pas les soumettre à l'opération du nettoyage, indiquée plus haut (p. B.32), sans risquer de détruire complétement la surface de métal.

3° Machines micrométriques.

Bien que le fonctionnement des machines micrométriques ait été très-satisfaisant, on peut dire qu'elles nécessiteraient une modification très-utile dans leur construction, à savoir la diminution

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

du poids du chariot, qui rend l'adhérence sur les rails trop énergique; on y parviendrait, soit en modifiant les épaisseurs, soit même en pratiquant des évidements convenables dans toutes les pièces du chariot ou du plateau.

Il y aurait lieu aussi d'essayer à changer la nature des patins du chariot : au lieu de les prendre dans la masse même de fonte qui constitue le chariot, il serait peut-être bon de les former par des pièces de bronze ou de laiton; le frottement du bronze ou du laiton sur la fonte serait plus doux que le frottement de deux pièces de fonte; on pourrait alors éviter ces difficultés, étudiées en détail précédemment (p. B.19 et suivantes), et utiliser les indications de la vis du chariot, ce qui fournirait un contrôle utile des mesures faites indépendamment à l'aide de l'échelle auxiliaire.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CONCLUSION.

Ici s'arrête le travail que la Sous-Commission avait été chargée d'entreprendre pour la mesure des épreuves daguerriennes obtenues par la Commission française, laissant aux astronomes le soin de déduire de ces mesures la valeur de la parallaxe solaire.

La Sous-Commission ne pouvait, vu la longueur des opérations, se proposer d'étudier individuellement chacune des nombreuses épreuves rapportées des quatre stations. Elle a d'abord mis à part celles qui, par leur netteté apparente, semblaient devoir se prêter le mieux aux mesures précises : le nombre des bonnes épreuves étant considérable, il a fallu restreindre encore les conditions déterminantes et choisir un petit nombre d'entre elles convenablement réparties pendant toute la durée du passage; la Sous-Commission s'est laissé guider, dans le choix de ces épreuves, d'abord par la netteté des contours, ensuite par la condition de prendre autant que possible, à des époques simultanées, des couples d'épreuves faites à des stations présentant la plus grande différence soit de longitude, soit de latitude. Malheureusement le nombre d'épreuves remplissant ces conditions multiples n'a pas été aussi considérable qu'on l'eût désiré, à cause des lacunes que les conditions atmosphériques ou autres ont introduites dans les séries mises entre les mains de la Sous-Commission.

Les travaux des mesures des épreuves daguerriennes ont été arrêtés, conformément à la résolution prise au début, d'accord avec

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

la Commission, lorsqu'une cinquantaine d'épreuves convenablement choisies dans l'intervalle des deux contacts internes ont été mesurées par deux observateurs différents ou contrôlées par une opération équivalente.

Ce programme a été rempli de la manière suivante :

51 épreuves ont été étudiées, sur lesquelles 41 ont été mesurées par deux observateurs [2 d'entre elles par trois] et 10 ont été mesurées par un seul observateur ; pour celles-ci, le contrôle qu'on cherchait à obtenir par deux observateurs différents a été atteint par le choix de deux épreuves voisines dans la série des temps, sur la même plaque ou sur deux plaques consécutives.

On a, en somme, 94 résultats qui résument chacun six séries où les quatre bords des astres ont été pointés cinq fois ; et comme le pointé de chaque bord peut être considéré, dans l'ensemble des réglages et des mesures, comme ayant entraîné le pointé de deux traits de l'échelle auxiliaire de comparaison, il en résulte que l'ensemble des 94 résultats précédents représente un nombre de pointés indépendants égal à

$$94 \times 6 \times 4 \times 5 \times 3 = 33840.$$

Il est donc naturel de supposer qu'on a atteint le nombre d'observations nécessaires pour tirer de ces mesures toute la précision que comporte la perfection des épreuves et pour éliminer les erreurs fortuites provenant de l'imperfection inévitable des appareils ou des perturbations accidentelles de l'atmosphère.

C'est donc avec une grande confiance que la Sous-Commission attend le résultat de la discussion de ces nombres ; le principal mérite de ces mesures, outre leur précision et les éléments de contrôle qu'elles présentent, est d'être entièrement à l'abri de toute idée préconçue de la part des observateurs sur le résultat final ;

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

il suffit en effet de jeter les yeux sur l'un des Tableaux donnant le détail des mesures, et de considérer la multiplicité des calculs et des corrections qui en dérivent pour comprendre que l'observateur n'avait aucune indication sur le sens dans lequel les mesures étaient plus ou moins favorables à un résultat déterminé.

Résumé des résultats obtenus.

Pour faciliter les recherches et résumer le travail dont tous les détails sont donnés dans le présent Volume, il a paru utile de dresser la liste suivante des épreuves rangées dans l'ordre de l'époque de leur obtention, définie par l'heure en temps moyen de Paris; on y a joint le résultat définitif de la mesure, c'est-à-dire le rapport $\frac{\Delta}{\Sigma}$ de la distance des centres à la somme des rayons des deux astres (1) et le numéro de la page du Volume où se trouve le détail des observations. On a placé dans des colonnes spéciales le résultat obtenu par chacun des quatre observateurs. Il est en effet utile, pour atténuer l'influence des erreurs personnelles, de ne comparer entre elles que les mesures faites par un même observateur. Comme chaque épreuve a été en général mesurée par deux observateurs différents, il en résulte que l'ensemble des observations comprendra des éléments nombreux de contrôle relatif.

---

(1) La valeur approchée de la somme des rayons des deux astres, calculée dans la *Connaissance des Temps*, est égale à 1007″,7 (*voir* p. A.76). La comparaison des valeurs angulaires du micromètre d'un altazimut de la station de Saint-Paul (*voir* p. B.65), avec l'épreuve photographique de ce micromètre, donne un nombre très approché de celui-ci, d'après les résultats publiés dans le fascicule C (*voir* p. B.85).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Avec cette disposition on peut trouver immédiatement toutes les combinaisons qu'on désire obtenir en classant les résultats par rapport aux observateurs, aux stations, aux époques d'obtention, etc.

Les stations sont désignées, pour abréger,

		Longitude adoptée.	
		h m s	
Nagasaki par	Ng....	8.30.16	Pages A.10
Pékin par	Pk.....	7.36.30	» A.13
Saint-Paul par	S.-P	5. 0.41	» A.16
Nouméa par	Na.....	10.56.27	» A.22

Les chiffres arabes ou romains dans les colonnes marquées *stations* indiquent les numéros d'ordre des plaques daguerriennes dont le détail est donné pages A.10, 13, 16, 22.

Les résultats définitifs, c'est-à-dire le rapport $\frac{\Delta}{\Sigma}$ de la distance des centres à la somme des rayons des deux astres, sont donnés par une fraction à six décimales en regard de chaque numéro d'épreuve daguerrienne dans les colonnes *fascicules*. Le numéro entre parenthèses indique la page du fascicule dont la pagination porte les lettres C, D, E, F, marquées en haut de la colonne.

Chacun de ces fascicules renferme le détail des mesures faites par un même observateur :

Le fascicule C par M. A. Angot.
» D » M. J.-B. Baille.
» E » M. E. Mercadier.
» F » M. C.-M. Gariel.

On a conservé les six décimales que le mode de calcul numérique a données, bien que l'approximation qu'on doit attendre des mesures soit très inférieure à $\frac{1}{1000000}$; mais, la comparaison de

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

l'ensemble des mesures d'une même épreuve par les deux mêmes observateurs montrant que les quatre premières décimales au moins doivent être conservées, on n'a pas cru devoir supprimer les deux dernières.

Cette comparaison met en évidence une différence systématique dans les résultats des deux observateurs, visible à l'inspection du Tableau ci-après ; mais il a été établi plus haut (p. A. 36) que la détermination de la parallaxe solaire, étant une mesure différentielle, ne peut être que faiblement influencée par cette erreur systématique, laquelle s'élimine en quelque sorte par différence, si l'on a soin de ne faire entrer dans chaque série de calculs que les résultats obtenus par un même observateur.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Tableau comprenant les valeurs du rapport $\frac{\Delta}{\Sigma}$ de toutes les épreuves mesurées.

TEMPS MOYEN de Paris.	STATIONS.				FASCICULES			
	Ng.	Pk.	SP.	Na.	C.	D.	E.	F.
h m s								
17.32,18,9	24	..	.....	...	.....	.....	.....	0,915014 (67)
33.49,9	24	..	.....	...	.....	.....	.....	0,914291 (71)
41.47,9	28	..	.....	...	.....	.....	0,893954 (113)	.....
48.50,9	..	..	XXIV	...	.....	0,917098 (73)	0,916569 (93)	.....
50.26,5	..	..	XXVIII	...	.....	0,916101 (117)	.....	0,915123 (97)
50.47,3	..	..	XXIX	...	.....	.....	.....	0,913891 (39)
50.55,2	..	..	XXIX	...	.....	.....	0,914383 (121)	0,915111 (35)
51.42,7	..	..	XXX	...	0,916239 (17)	0,916681 (13)	.....	.....
15.17.50,4	15	..	.....	...	.....	0,842498 (61)	0,841646 (53)	.....
18.49,8	45	..	.....	...	.....	0,842354 (57)	0,841282 (49)	.....
30.23,5	..	..	XLVII	...	0,859106 (49)	.....	0,860311 (29)	.....
31.33,3	..	..	XLVIII	...	0,859986 (25)	.....	0,858626 (17)	.....
33.52,2	..	..	.....	133	0,841105 (11)	.....	0,838113 (25)	.....
35.59,9	..	..	XLIX	...	.....	.....	.....	0,857950 (13)
36.10,9	..	..	XLIX	...	.....	.....	.....	0,855930 (17)
50. 8,5	..	..	1	...	.....	0,846257 (129)	.....	0,846107 (63)
50.17,5	..	..	1	...	.....	0,846786 (125)	.....	0,846156 (15)
16. 1.49,6	56	..	.....	...	0,805461 (61)	0,806113 (29)	.....	.....
3.26,6	..	..	5	...	0,837756 (13)	0,838317 (17)	.....	0,837795 (11)
4.25,0	..	..	6	...	.....	0,836956 (109)	.....	0,836481 (19)
20.18,6	..	..	10	...	....	.....	....	0,835000 (75)
21. 5,1	..	..	10	...	.....	.....	.....	0,835343 (79)
49.49,1	60	..	.....	...	.....	.....	0,816489 (109)	0,818162 (93)
17.25. 3,6	..	..	38	...	.....	0,879120 (53)	0,879335 (75)	.....
25. 8,9	..	..	.....	31	.....	.....	0,879547 (105)	0,878398 (31)
31. 0,5	..	..	40	...	.....	.....	0,886754 (81)	0,886506 (91)
31.20,7	..	..	40	...	.....	.....	0,886373 (85)	0,886774 (87)
32.13,8	..	..	41	...	.....	0,888043 (101)	0,888014 (77)	.....
38.42,3	..	..	44	...	.....	0,896291 (77)	0,894560 (89)	.....
41. 6,3	..	..	.....	39	0,902958 (37)	0,903512 (33)	.....	.....
42. 6,1	..	..	.....	39	0,904116 (21)	0,905590 (25)	.....	.....
42.25,0	..	27	.....	...	0,875788 (29)	0,877375 (21)	.....	.....
43.46,6	..	..	45	...	0,906582 (33)	.....	0,906295 (13)	.....
43.59,1	..	28	.....	...	.....	0,882668* (135)	.....	.....
45.12,3	..	29	.....	...	.....	0,882178 (45)	0,880718 (37)	.....
46.46,1	62	..	.....	...	0,885193 (65)	0,887339 (37)	.....	.....
47. 9.6	..	30	.....	...	0,884691 (57)	0,886247 (19)	.....	.....
47.25,7	..	30	.....	...	0,884636 (55)	0,887173 (97)	.....	.....
52.39,1	..	31	.....	...	0,893327 (45)	.....	0,894074 (21)	.....
54. 9,8	..	32	.....	...	.....	0,898223 (113)	0,896872 (101)	0,898529 (85)
55.57,5	..	33	.....	...	.....	0,899532 (11)	0,899156 (33)	.....
58.32,1	..	..	48	...	.....	0,930549 (105)	0,930045 (97)	.....
18. 1.29,0	..	36	.....	...	.....	.....	0,912734 (117)	0,914689 (59)
4.38,6	..	38	.....	...	.....	.....	.....	0,917633 (55)
4.51,6	..	38	.. ...	...	.....	0,918637 (121)	.....	0,917941 (51)
7.44,6	..	40	.....	...	.....	0,924304 (65)	0,920627 (15)	.....
8. 6,6	..	40	.....	...	.....	0,926755 (69)	0,925332 (11)	.....
9.48,0	..	41	.....	...	.....	0,933162 (93)	0,929727 (69)	.....
9.58,0	..	41	.....	...	.....	0,927610 (89)	0,925712 (65)	.....
10. 9,6	..	41	.....	...	.....	0,930202 (85)	0,928066 (61)	.....
10.21,7	..	41	.....	...	.....	0,932387 (81)	0,930649 (57)	.....

* Observations faites par comparaison avec un réticule en fils de platine : c'est la seule valeur qui ait été obtenue ainsi.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

TABLE DES MATIÈRES.

FASCICULE A

COMPRENANT LE RÉSUMÉ DES ÉTUDES DE LA SOUS-COMMISSION CHARGÉE DE LA MESURE DES ÉPREUVES ET LES DOCUMENTS QUI S'Y RATTACHENT;

Par MM. FIZEAU et A. CORNU.

	Pages
Obtention des épreuves.	A. 3
Appareil photographique	A. 4
Liste des épreuves. — Diagramme représentatif	A. 6
Station de Nagasaki	A. 10
» de Pékin	A. 13
» de Saint-Paul	A. 16
» de Nouméa	A. 22
MESURE DES ÉPREUVES : I. *Exposé de la méthode*	A. 26
Éléments à mesurer	A. 27
1° Distance des centres	A. 31
2° Somme des rayons	A. 33
Remarque sur la nature des erreurs considérées	A. 35
Élimination plus complète de l'erreur personnelle	A. 36
II. *Description succincte des machines micrométriques*	A. 39
1° Microscope	A. 41
2° Chariot et plateau	A. 43
3° Moteur électrique	A. 47
4° Dispositions accessoires	A. 48
5° Usage de la machine pour la mesure des longueurs	A. 49
6° Adjonction d'une échelle auxiliaire	A. 53

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Pages

III. *Note explicative pour l'intelligence des Tableaux résumant les mesures des épreuves photographiques* ..... A. 61

Notation des bords des deux astres S_1V_1 S_2V_2 ..... A. 63
Réglage de l'épreuve ..... A. 63
Notations W_1, W_2 des bords de la planète ..... A. 64
Exemple numérique ..... A. 65
Mesure des distances des quatre bords ..... A. 67
Échelle auxiliaire. — Notation des traits ..... A. 68
Distance des traits de l'échelle auxiliaire ..... A. 69
Réduction. — Exemple numérique ..... A. 70
Résumé définitif des mesures. — Exemple numérique ..... A. 74
Valeur approchée de la somme des rayons des astres ..... A. 76

IV. *Construction des diverses Tables de correction* ..... A. 79

Réduction à l'azimut central ..... A. 79
Table de correction de la vis du microscope ..... A. 83
Mode de construction de la Table ..... A. 86
Exemple numérique ..... A. 88
Réduction des mesures à 15° ..... A. 92
Analyse des effets de la température ..... A. 94
Réduction en nombres ..... A. 100
Calcul numérique des constantes θ pour les échelles A, B, C ..... A. 103
Table de correction pour la réduction à 15° ..... A. 104
Table de correction de la parallaxe des traits ..... A. 105
Table de correction de réfraction, calculée par M. Puiseux ..... A. 109
Nagasaki, Pékin, Saint-Paul, Nouméa ..... A. 110 à A. 113
Table d'interpolation pour abréger la réduction des mesures ..... A. 114 à A. 119
Exemple numérique ..... A. 120

Planche I. — Diagramme figurant la distribution des épreuves obtenues pendant le passage de Vénus sur le Soleil.

Planche II. — Machine micrométrique employée pour la mesure des épreuves.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

FASCICULE B

COMPRENANT LE RÉSUMÉ DES ÉTUDES ET DES MESURES EXÉCUTÉES AVEC LA MACHINE N° 1 :

Par M. A. CORNU.

Pages

Avertissement ..... B. 3

I. *Résumé des essais divers relatifs à l'emploi de la machine micrométrique.*

1° Moteur électrique ..... B. 6
2° Microscope ..... B. 8
Conditions à remplir pour la perfection de l'éclairage ..... B. 13
3° Plateau ..... B. 17
4° Chariot et vis micrométrique de la machine ..... B. 18
Difficultés qui se sont présentées dans la construction de la table de correction de la vis du chariot ..... B. 19
5° Échelles auxiliaires ..... B. 26
Échelle normale sur plaqué d'argent ..... B. 27
Échelles sur verre ..... B. 29
6° Lavage, fixage et nettoyage des épreuves ..... B. 32

II. *Détermination des distances des traits de l'échelle normale sur plaqué d'argent pour la comparaison des échelles auxiliaires* ..... B. 36

Données numériques ..... B. 41
Valeur définitive ..... B. 47
Vérification directe de la Table de correction de la parallaxe des traits de l'échelle auxiliaire ..... B. 48

Données numériques utilisées pour les mesures définitives ..... B. 59

Étude de la vis du microscope de la machine n° 1 ..... B. 61
Résumé des mesures ..... B. 62

APPENDICE I.

Essai de détermination de la valeur angulaire du millimètre au foyer de la lunette photographique de la station de Saint-Paul ..... B. 65
Détail des observations ..... B. 68

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Pages

Comparaison des mesures photographiques avec les mesures angulaires directes des micromètres ..... B. 78
Application numérique au calcul de la somme du rayon des deux astres.... B. 84

APPENDICE II.

Étude des échelles sur verre A, B, C.. ..... B. 89

Échelle A..... ..... B. 89
» B..... B. 90
» C.. ..... B. 91

APPENDICE III.

Étude de l'influence des déformations systématiques de l'épreuve du disque solaire sur la détermination de la direction de la ligne des centres... .... B. 92

1° Influence de la réfraction atmosphérique ..... B. 93
2° Influence de la durée de la chute de l'écran..... B. 95
Calcul de l'erreur produite..... B. 99
Calcul définitif de l'erreur totale..... B. 102

APPENDICE IV.

Indication des améliorations à apporter aux appareils divers employés pour l'obtention de la mesure des épreuves. ..... B. 104

1° Appareil photographique ..... B. 104
2° Plaques daguerriennes..... B. 109
3° Machines micrométriques. ..... B. 109

FASCICULE C

COMPRENANT LES MESURES EXÉCUTÉES AVEC LA MACHINE MICROMÉTRIQUE N° 2;

PAR M. ANGOT.

Données numériques relatives à la machine n° 2 et de l'échelle auxiliaire B.... C. 3

1° Table de correction de la vis du microscope de la machine n° 2..... C. 3
2° Tableau de la distance de l'échelle auxiliaire B à sept traits employée avec la machine n° 2..... C. 3

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Pages

Résumé des mesures relatives à l'étude de la vis du microscope de la machine n°2. C. 4

Étude de l'échelle B *sur verre à sept traits*, ... C.12

Comparaison avec l'échelle normale..... ..... C.12

MESURES DES ÉPREUVES DAGUERRIENNES DU PASSAGE.

Stations.	Numéro de l'épreuve.	Heure de l'épreuve en T. M. Paris.	
Saint-Paul	5	16h 3m 26s,6.....	C.13
Saint-Paul	XXX	14.51.42,7.....	C.17
Nouméa	39	17.42. 6,1.....	C.21
Saint-Paul	XLVIII	15.31.33,3.....	C.25
Pékin	27	17.42.25,0.....	C.29
Saint-Paul	45	17.43.46,6.....	C.33
Nouméa	39	17.41. 6,3.....	C.37
Nouméa	133	15.33.52,2.....	C.41
Pékin	31	17.52.39,1.....	C.45
Saint-Paul	XLVII	15.30.23,5.....	C.49
Pékin	30_2	17.47.25,7.....	C.53
Pékin	30_1	17.47. 9,6.....	C.57
Nagasaki	56	16. 1.49,6.....	C.61
Nagasaki	62	17.46.46,4.....	C.65

FASCICULE D

COMPRENANT LES MESURES EXÉCUTÉES AVEC LA MACHINE MICROMÉTRIQUE N° 3;

Par M. J.-B. BAILLE.

Données numériques relatives à la machine n° 3 et à l'échelle auxiliaire A.. D.3

I. — Table de correction de la vis du microscope de la machine n° 3..... D.3

II. — Tableau de la distance des traits de l'échelle auxiliaire A à 7 traits employée avec la machine n° 3. ..... D.3

Résumé des mesures relatives à l'étude de la vis du microscope de la machine n° 3..... ..... D.4

Étude de l'échelle A *sur verre à 7 traits.* — Comparaison avec l'échelle normale..... D.6

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

MESURES DES ÉPREUVES DAGUERRIENNES DU PASSAGE.

Stations.	Numéro de l'épreuve.	Heure de l'épreuve en T. M. Paris. h m s	Pages
Saint-Paul	XXX	14.51.42,7	D. 13
Saint-Paul	5	16. 3.26,6	D. 17
Pékin	27	17.42.25,0	D 21
Nouméa	39	17.42. 6,1	D. 25
Nagasaki	56	16. 1.49,6	D. 29
Nouméa	39_2	17.41. 6,3	D. 33
Nagasaki	62	17.46.46,4	D. 37
Pékin	33_1	17.55.57,5	D. 41
Pékin	29_1	17.45.12,3	D. 45
Pékin	30_1	17.47. 9,6	D. 49
Saint-Paul	38	17.25. 3,6	D. 53
Nagasaki	45_1	15.18.49,8	D. 57
Nagasaki	45_2	15.17.50,4	D. 61
Pékin	40_1	18. 7.44,6	D. 65
Pékin	40_2	18. 8. 6,6	D. 69
Saint-Paul	XXIV	14.48.50,9	D. 73
Saint-Paul	44	17.38.42,3	D. 77
Pékin	41_1	18.10.21,7	D. 81
Pékin	41_2	18.10. 9,6	D. 85
Pékin	41_3	18. 9.58,0	D 89
Pékin	41_4	18. 9.48,0	D 93
Pékin	30_2	17.47 25,7	D. 97
Saint-Paul	41	17.32.13,8	D.101
Saint-Paul	48_4	17.58.22,1	D 105
Saint-Paul	6_1	16. 4.25,0	D.109
Pékin	32_2	17.54. 9,8	D.113
Saint-Paul	XXVIII	14.50.26,5	D.117
Pékin	38	18. 4.51,6	D.121
Saint-Paul	1_3	15.50.17,5	D.125
Saint-Paul	1_4	15.50. 8,5	D.129
Étude de l'échelle à fils de platine. — Comparaison avec l'échelle normale.			D.133
Pékin	28_2	17.43.59,1	D.135

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

FASCICULE E

COMPRENANT LES MESURES EXÉCUTÉES AVEC LA MACHINE MICROMÉTRIQUE N° 4;

Par M. E. MERCADIER.

	Pages
Données numériques relatives à la machine n° 4 et à l'échelle auxiliaire C..	E. 3
I. — Table de correction de la vis du microscope de la machine n° 4....	E. 3
II. — Tableau de la distance des traits de l'échelle auxiliaire C à 7 traits employée avec la machine n° 4.....	E. 3
Résumé des mesures relatives à l'étude de la vis du microscope de la machine n° 4.....	E. 5
Étude de l'échelle C *sur verre à 7 traits.* — Comparaison avec l'échelle normale.....	E.6 à E.12

MESURES DES ÉPREUVES DAGUERRIENNES DU PASSAGE.

Stations.	Numéro de l'épreuve.	Heure de l'épreuve en T. M. Paris.	
		h m s	
Saint-Paul	45	17.43.46,6.....	E.13
Saint-Paul	XLVIII	15.31.33,3.....	E.17
Pékin	31	17.52.39,1.....	E.21
Nouméa	133	15.33.52,2.....	E.25
Saint-Paul	XLVII	15.30.23,5.....	E 29
Pékin	33_1	17.55.57,5.....	E.33
Pékin	29	17.45.12,3.....	E.37
Pékin	40_1	18. 8. 6,6.....	E.41
Pékin	40_2	18. 7.44,6.....	E.45
Nagasaki	45_1	15.18.49,8.....	E.49
Nagasaki	45_2	15.17.50,4.....	E.53
Pékin	41_1	18.10.21,7.....	E.57
Pékin	41_2	18.10. 9,6.....	E 61
Pékin	41_3	18. 9.58,0.....	E.65
Pékin	41_4	18. 9.48,0.....	E.69
Saint-Paul	38	17.25.45,6.....	E.73
Saint-Paul	41	17.32.13,8.....	E.77
Saint-Paul	40_3	17.31. 0,5.....	E.81

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Stations.	Numéro de l'épreuve.	Heure de l'épreuve en T. M. Paris. h m s	Pages
Saint-Paul	40_1	17.31.20,7	E. 85
Saint-Paul	44	17.38.42,3	E. 89
Saint-Paul	XXIV	14.48.50,9	E. 93
Saint-Paul	48_1	17.58.22,1	E. 97
Pékin	32_2	17.54. 9,8	E.101
Nouméa	31	17.25. 8,9	E.105
Nagasaki	60	16.49.49,1	E.109
Nagasaki	28	14.41.47,9	E.113
Pékin	36_1	18. 1.29,0	E.117
Saint-Paul	XXIX_2	14.50.55,2	E.121

FASCICULE F

COMPRENANT LES MESURES EXÉCUTÉES AVEC LA MACHINE MICROMÉTRIQUE N° 2.

Par M. CARIEL.

Données numériques relatives à la machine n° 2 et à l'échelle auxiliaire B.. F. 3

I. — Table de correction de la vis du microscope de la machine n° 4..... F. 3

II. — Tableau de la distance des traits de l'échelle auxiliaire B à 7 traits employée avec la machine n° 2..... F. 3

Étude de l'échelle B *sur verre à 7 traits.* — Comparaison avec l'échelle normale..... F.4 à F.10

MESURES DES ÉPREUVES DAGUERRIENNES DU PASSAGE.

Stations.	Numéro de l'épreuve.	Heure de l'épreuve en T. M. Paris. h m s	
Saint-Paul	5	16. 3.26,6	F.11
Saint-Paul	1	15.50.17,5	F.15
Saint-Paul	6	16. 4.25,0	F.19
Nagasaki	60	16.49.49,4	F.23
Saint-Paul	XXVIII	14.50.26,5	F.27
Nouméa	31	17.25. 8,9	F.31

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Stations.	Numéro de l'épreuve.	Heure de l'épreuve en T. M. Paris.	Pages
Saint-Paul	XXIX_2	14h.50m.55s,2	F. 35
Saint-Paul	XXIX_1	14.50.47,3	F. 39
Sanit-Paul	XLIX	15.35.59,9	F. 43
Saint-Paul	XLIX	15.36.10,9	F. 47
Pékin	38	18. 4.51,6	F. 51
Pékin	38_1	18. 4.38,6	F. 55
Pékin	36	18. 1.29,0	F. 59
Saint-Paul	I_4	15.50. 8,5	F. 63
Nagasaki	24_1	14.32.48,9	F. 67
Nagasaki	24_2	14.33.49,9	F. 71
Saint-Paul	10	16.20.18,6	F. 75
Saint-Paul	10_4	16.21. 5,4	F. 79
Pékin	32_2	17.51. 9,8	F. 83
Saint-Paul	40_1	17.31.20,7	F. 87
Saint-Paul	40_3	17.31. 0,5	F. 91

CONCLUSION ..... F. 95

Résumé des résultats numériques obtenus ..... F. 100

Tableau comprenant les valeurs du rapport $\frac{\Delta}{\Sigma}$ de toutes les épreuves mesurées. F. 101

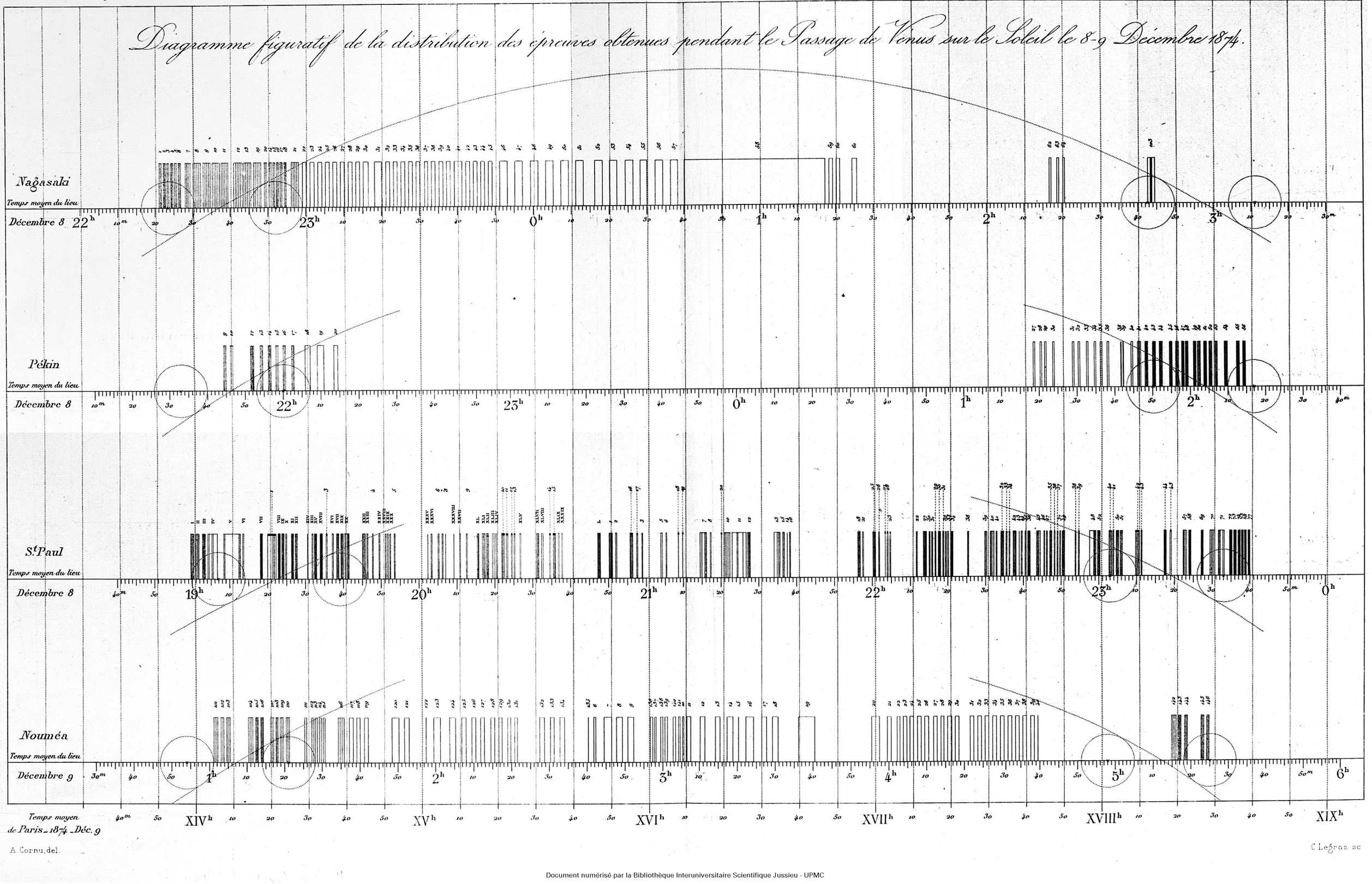
ERRATA.

Page C. 13, T. M. Paris, *au lieu de* $16^h 3^m 16^s,6$, *lisez* $16^h 3^m 26^s,6$.
Page F. 51, T. M. Paris, *au lieu de* $17^h 4^m 51^s,6$, *lisez* $18^h 4^m 51^s,6$.

2816 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Diagramme figuratif de la distribution des épreuves obtenues pendant le Passage de Vénus sur le Soleil le 8-9 Décembre 1874.



A. Cornu. del.

C. Lefros sc

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Machine micrométrique employée pour la mesure des épreuves

Fig. 1

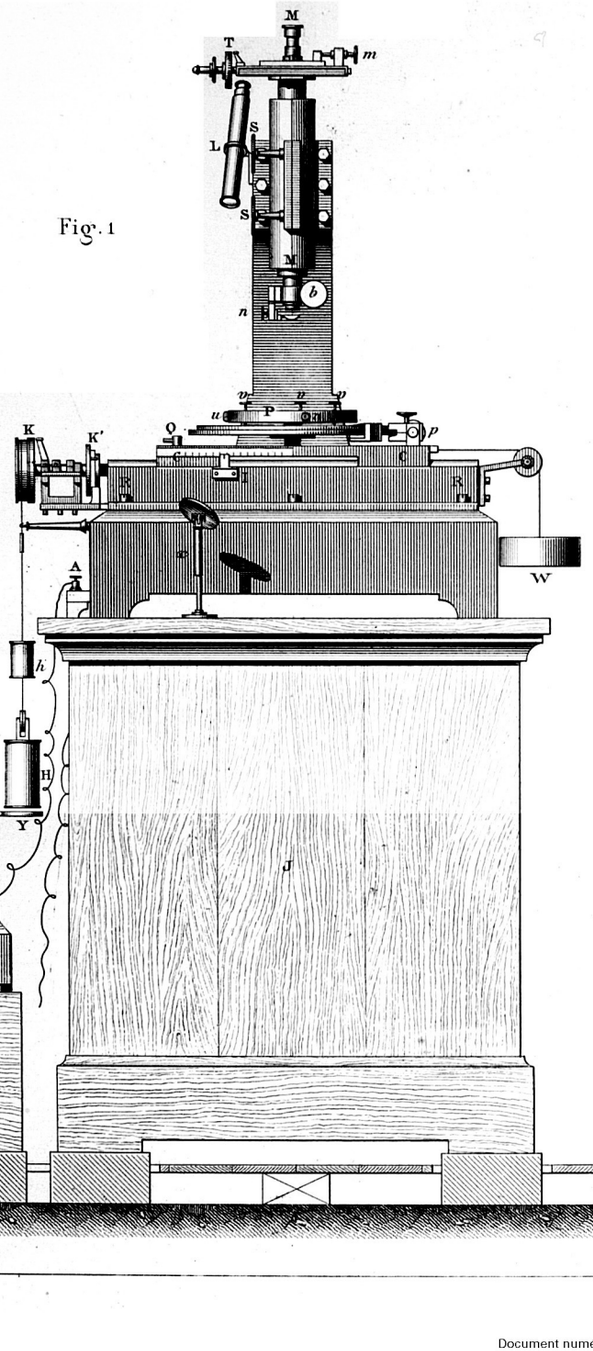
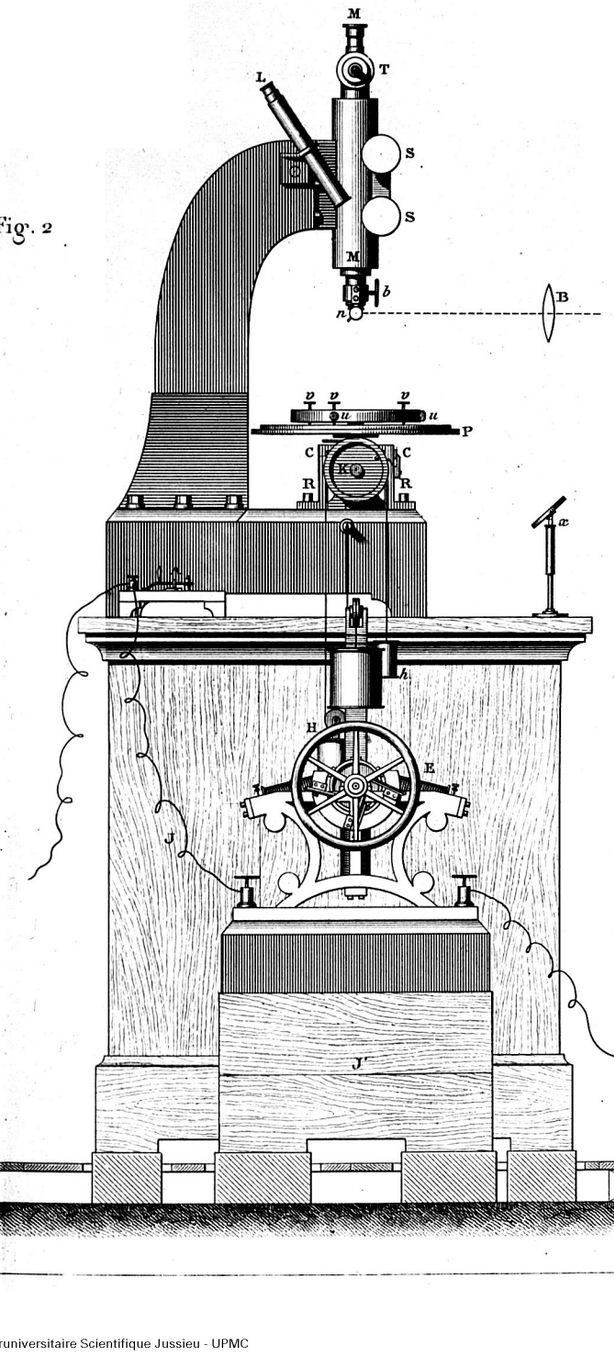


Fig. 2



Echelle $\frac{1}{8}$

Fig. 3

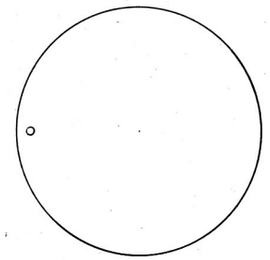


Fig. 4

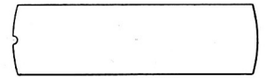
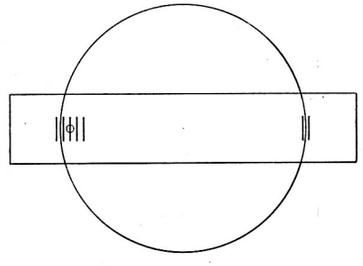


Fig. 5



Dessiné et Gravé par C. Legros

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

SYNCHRONISATION DES PENDULES

(SYSTÈME DE M. A. CORNU),

Par M. A. PRIM,

ASTRONOME A L'OBSERVATOIRE DE NICE.

OBSERVATOIRE DU MONT MOUNIER.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

SYNCHRONISATION DES PENDULES.

Un système de synchronisation que l'on doit à M. Cornu (¹) fonctionne à l'Observatoire depuis le 29 avril 1891 (*fig.* 1).

Un grand balancier battant la double seconde est installé dans le sous-sol du grand équatorial. En passant aux extrémités de sa course, il ferme, pendant un intervalle de $0^s,7$ environ, un circuit dont le courant (courant synchronisant) règle simultanément toutes les pendules à l'aide du dispositif suivant.

La tige du balancier de chaque pendule synchronisée P porte, au-dessous de la lentille et dans le plan d'oscillation, un barreau aimanté courbé suivant une circonférence concentrique à la suspension. Pendant l'oscillation, les pôles de ce barreau pénètrent alternativement, d'un côté dans une bobine constituée par un grand nombre de spires conductrices et isolées et, de l'autre, dans un cylindre de cuivre, symétrique de la bobine. La bobine reçoit le courant synchronisant et fonctionne par attraction sur le pôle d'aimant qu'elle enveloppe. Le cylindre de cuivre (amortisseur) produit l'amortissement nécessaire à la synchronisation.

Le courant synchronisant traverse en même temps un téléphone T placé près de chaque pendule à synchroniser. L'addition de ce téléphone facilite beaucoup la mise en marche et, surtout, la surveillance du système; il importe donc d'en décrire l'usage avec quelques détails.

Grâce au crépitement dû au passage du courant dans le téléphone, l'observateur reconnait sans ambiguïté l'époque du début et celle de la fin du courant; il peut alors vérifier, et c'est là le premier point à constater, que le courant agit bien par attraction sur l'aimant et non par répulsion; la répulsion tendrait à modifier la distribution magnétique de l'aimant et, par suite, à altérer l'action régulatrice; au contraire, l'attraction maintient et consolide la distribution primitive de l'aimantation du barreau, ce qui assure la constance de la force synchronisante.

En second lieu, l'observateur peut à chaque instant constater que le réglage *apériodique* se conserve sans altération : ce mode de réglage, dit *apériodique* (²),

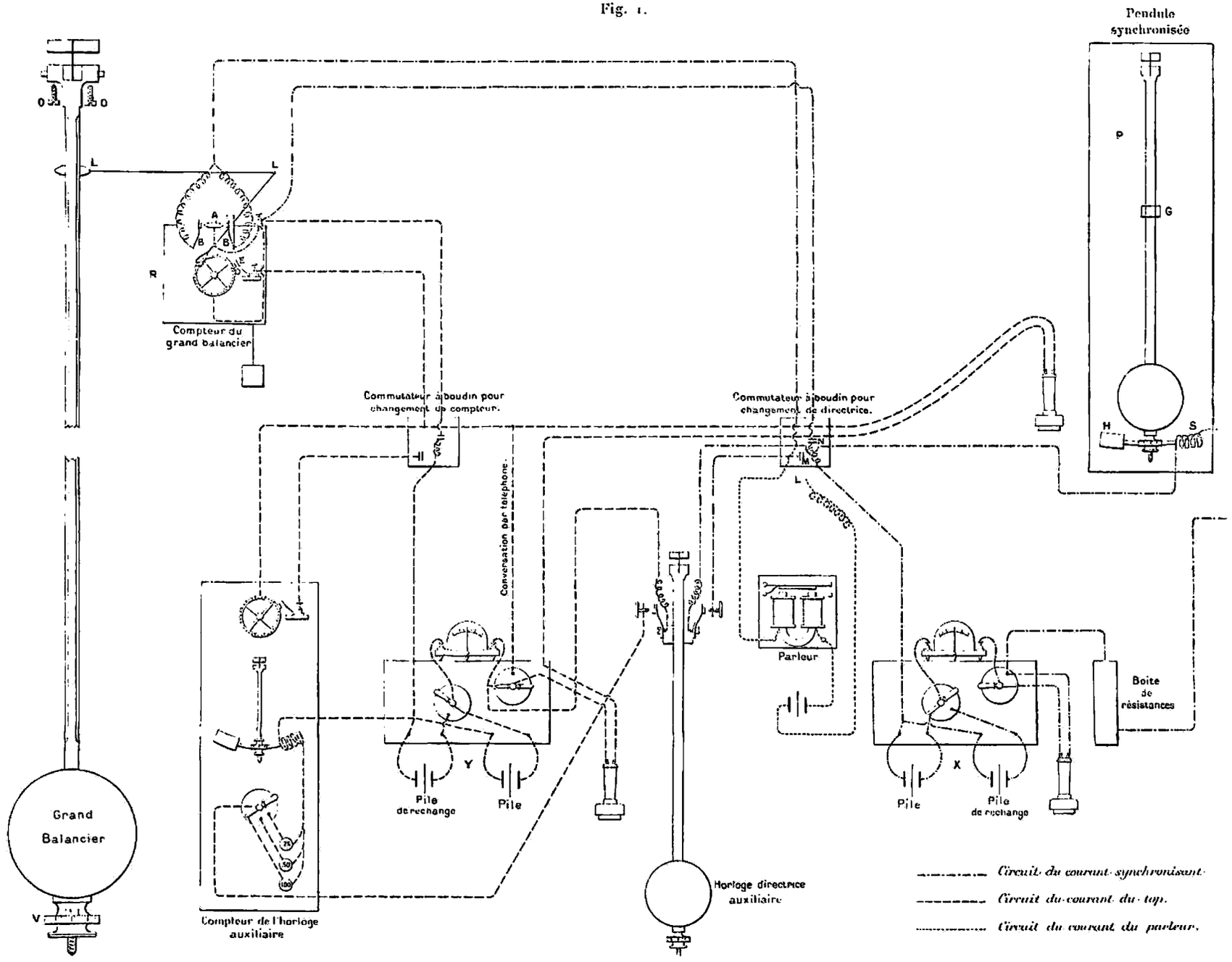
---

(¹) *Voir* la partie théorique, dans le *Journal de Physique théorique et appliquée*, 2ᵉ série, t. VI, année 1887, pages 553 et suivantes.

(²) *Comptes rendus*, t. CVI, p. 1206.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Fig. 1.



Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

correspond au cas où la pendule à synchroniser possède sensiblement la même marche que l'horloge directrice. L'identité de marche n'a pas besoin d'être absolument rigoureuse, puisque la liaison synchronique est capable de la maintenir, même avec des écarts de plusieurs minutes de différence de marche diurne. Mais la stabilité du synchronisme exige que cette condition soit approximativement remplie pour atténuer les variations accidentelles du courant (mauvais contacts, trépidations, influences météorologiques diverses, etc.).

Le réglage est bien apériodique lorsque le début et la fin du courant synchronisant correspondent à deux positions du balancier synchronisé symétriques par rapport à sa position moyenne; autrement dit, le réglage est tel que l'époque moyenne de l'attraction électromagnétique coïncide avec le passage du balancier à sa position d'équilibre. Avec un peu d'exercice, l'œil s'habitue aisément à repérer mentalement sur l'échelle mesurant les élongations du balancier synchronisé les positions de l'index qui correspondent aux deux bruits du téléphone indiquant à l'oreille le commencement et la fin du courant synchronisant; l'observateur a donc ainsi une représentation intuitive de la *différence de phase* existant entre l'oscillation synchronisante et l'oscillation synchronisée.

Il est utile que cette différence soit nulle pour le motif suivant (dont on verra la démonstration dans les Mémoires cités plus haut) : Imaginons qu'une perturbation accidentelle ait plus ou moins changé le régime d'attraction électromagnétique, il en résultera une différence de phase plus ou moins grande entre l'oscillation directrice et l'oscillation synchronisée; mais, le régime redevenant normal, le balancier revient peu à peu à sa différence de phase primitive. La théorie et l'expérience prouvent que, dans le cas général, il y revient par une série d'oscillations (1). En effet, il commence par la dépasser pour atteindre une valeur maximum dans un sens, puis retourne en arrière en la dépassant encore une fois, et ainsi de suite, suivant une progression géométrique décroissante qui rappelle les élongations d'un galvanomètre à oscillations amorties.

Mais, lorsque la différence de phase est sensiblement nulle (réglage apériodique), le balancier, supposé accidentellement dérangé dans sa phase, revient à cette valeur nulle sans la dépasser; c'est un phénomène analogue à celui que présente l'amplitude dans le cas de l'*amortissement critique* des galvanomètres précités.

Pour maintenir ce réglage apériodique, il suffit donc de maintenir l'égalité approchée entre la période du courant synchronisant et celle du balancier synchronisé; or, rien n'est plus facile que de reconnaître si l'horloge à synchroniser a une tendance à l'avance ou une tendance au retard. Pour y parvenir, il n'est nullement besoin de supprimer le courant synchronisant; on peut faire l'obser-

(1) *Journal de Physique*, *loc. cit.*, p. 457. — *Comptes rendus*, t. CVI, p. 1206.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

vation *en marche :* il suffit d'apprécier au téléphone l'époque moyenne de l'attraction électromagnétique. Si elle a lieu *avant* le passage du balancier à sa position d'équilibre, c'est que le balancier *retarde;* si elle a lieu *après*, c'est qu'il *avance.* Des poids additionnels placés dans une cassolette G fixée au milieu de la tige du balancier permettent alors d'effectuer empiriquement la correction : dans le premier cas (retard), on ajoute quelques grammes à la cassolette; dans le second (avance), on les ôte; jusqu'à ce que la coïncidence de l'époque moyenne de l'attraction avec celle du passage du balancier au zéro soit obtenue. L'effet n'est pas absolument immédiat, mais il se fait sentir au bout de quelques minutes; au voisinage du réglage apériodique, le régime limite est rapidement atteint.

Une disposition des plus simples permet, en outre, d'exercer un contrôle constant de la synchronisation. La roue d'échappement du rouage moteur du grand balancier ferme pendant une petite fraction de seconde un circuit auxiliaire dont le courant (courant du top), distinct du courant synchronisant, actionne un second téléphone (1) placé près de chaque pendule. On a ainsi un signal téléphonique compteur des périodes de l'horloge directrice qui permet non seulement de constater que pour chacune d'elles la synchronisation n'est pas troublée, mais encore de comparer entre elles les pendules synchronisées.

La *fig.* 1 donne le schéma de toutes les dispositions principales du système, et suffit à faire comprendre les connexions électriques.

On voit comment l'une quelconque des pendules synchronisées P est actionnée par le grand balancier OOLV.

Le circuit du courant synchronisant (·——·——·) est fermé toutes les deux secondes en A, dans le rouage R, par la pièce oscillante (décrite plus loin *fig.* 3); les deux fils se séparent au commutateur : l'un amène le courant à la bobine S de la pendule synchronisée et au téléphone T qui sert au contrôle et au réglage apériodique; l'autre ramène le courant au commutateur par une boîte de résistance, un téléphone placé près de la pile X et un galvanomètre. Ce commutateur est simplement formé de fils tordus en boudins, que l'on attache à des bornes convenables pour compléter le circuit, soit du rouage R du grand balancier, soit de l'horloge directrice auxiliaire. On suivrait de la même manière le courant synchronisant émis par cette horloge, qui vient aboutir au commutateur précité.

Le courant du top (———) peut émaner soit du rouage R (*voir* le détail, *fig.* 4), soit du compteur de l'horloge auxiliaire.

Cette dernière disposition, un peu complexe, est un reste des essais préliminaires

(1) Il est évident que le même téléphone pourrait servir aux deux observations avec un commutateur et des résistances compensatrices convenables.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

naires; on n'avait pas prévu ce signal (top) dans la construction de la première directrice; c'est pour l'obtenir que l'on a ajouté une petite horloge synchronisée (compteur) uniquement chargée de fournir ce signal.]

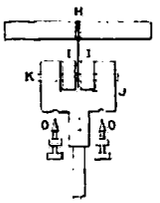
Voici maintenant quelques détails relatifs à la disposition des pièces et à leur installation.

Le grand balancier est enfermé dans une chambre en bois, sorte d'armoire à doubles parois renfermant entre elles des matières peu conductrices.

La tige du grand balancier est en fer, elle a une longueur totale de $4^{m},30$; le poids total du balancier est de 108^{kg} environ; le coefficient de dilatation du fer ayant pour valeur 0,000011560, on voit aisément qu'une variation de 1°C. produit une marche d'une demi-seconde par jour.

La suspension, qui est à ressorts, comprend deux lames flexibles, parallèles dans un même plan perpendiculaire à celui de l'oscillation. Ces lames, en acier (1), sont fixées par leurs extrémités supérieures dans une pince de serrage H à arêtes vives et sont serrées par leurs extrémités libres entre les surfaces de deux plaques métalliques I, I (*fig.* 2), et maintenues à l'aide de goupilles.

Fig. 2.



Par mesure de précaution, à cause du grand poids de ce balancier, qui pèse près de 108^{kg}, à l'extrémité supérieure de la tige est rivée une fourchette J dont les branches sont, à l'aide d'une goupille K, maintenues à cheval sur la double plaque. C'est par cette fourchette que l'on soulève le balancier à l'aide de deux pointes O, O, placées à l'extrémité d'un levier dont la position et le mouvement sont réglés par une vis qui lui sert de point d'appui. En cas de rupture des lames de suspension, cette fourchette viendrait reposer sur ces deux pointes. Dans le même but, outre ce levier de sûreté, on a disposé, au-dessous de la lentille, un chevalet destiné à recevoir celle-ci en cas d'accident.

La lentille en fonte, qui, à elle seule, pèse 93^{kg}, est limitée par des faces sphériques, de rayon tel que son diamètre de $0^{m},40$ est le double de son épaisseur : c'est la condition reconnue nécessaire, dans une étude préalable, pour rendre minimum la résistance de l'air.

Cette lentille repose sur un écrou engagé sur le pas de vis qui termine la tige;

(1) Elles ont $0^{mm},3$ d'épaisseur sur 30^{mm} de largeur; l'intervalle III est de 50^{mm}.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

cet écrou, monté sur un tambour gradué V muni d'un repère, permet de déplacer la lentille dans le sens de la hauteur. Le tambour est gradué en dix parties égales, un tour de vis correspond à une variation d'une seconde dans la marche diurne.

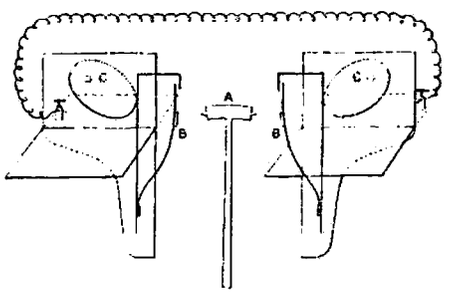
Le balancier porte en outre une cassolette située en son milieu, c'est-à-dire à $2^{m},00$ de la suspension; dans cette cassolette on dépose les poids de réglage destinés à corriger l'effet de la température à raison de 5^{gr} environ par degré centigrade.

La tige porte encore un index recourbé dont les déplacements linéaires devant une échelle graduée en doubles millimètres permettent d'estimer l'amplitude à raison de 1″ par millimètre.

Une tige d'aluminium, isolée électriquement à ses points d'attache, relie mécaniquement le grand balancier à un mouvement d'horlogerie R dont le poids moteur produit la restitution de force; c'est dans ce rouage que se produisent les contacts électriques du courant synchronisant et du courant du top. Cette tige est située au-dessous de la suspension et à une distance de celle-ci qui est environ le $\frac{1}{7}$ de la longueur du balancier. Le poids moteur est de $2^{kg},5$ et descend de $0^{m},16$ par jour. L'échappement est *à chevilles*.

Une tige A à double pointe de platine (*fig.* 3) portée par l'axe des becs de l'échappement vient alternativement en contact avec deux lames flexibles B, B,

Fig. 3.



dont les positions sont susceptibles de réglage à l'aide de deux petits excentriques C, C. Ces contacts sont ceux du courant synchronisant.

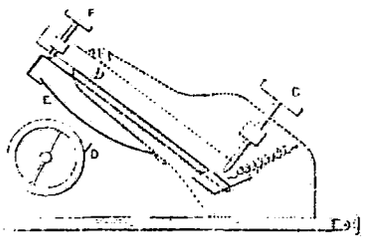
La *fig.* 4 montre en D la saillie en platine que porte la roue d'échappement: elle produit le signal téléphonique (top) en frôlant au passage une lame flexible E, dont la vis F permet de faire varier la distance à cette roue et par conséquent de modifier la durée du contact. La pièce qui porte cette lame peut tourner, à l'aide d'une seconde vis G, autour d'un axe K, de façon à changer la portion de cette lame où se font le contact et par conséquent l'époque de celui-ci.

Le mouvement d'horlogerie est isolé électriquement; il repose sur deux potences sur lesquelles il peut recevoir de petits mouvements de réglage dans deux directions rectangulaires au moyen de vis placées latéralement.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Les courants sont fournis par des piles Callaud à raison de quatre pour le courant synchronisant et de deux pour le courant du top. Ces piles peuvent fonctionner pendant deux mois au moins en leur faisant subir de temps en temps un nettoyage qui consiste à faire tomber le cuivre grimpant le long des zincs.

Fig. 4.



Des commutateurs permettent de leur substituer rapidement des piles de rechange.

Quatre pendules sidérales sont synchronisées; seule celle du grand méridien est hors du circuit; mais toutes reçoivent le signal téléphonique (top) qui sert à leur comparaison mutuelle.

La température est indiquée en centièmes de degré par deux thermomètres à alcool à long réservoir, placés près de la tige dans le voisinage de ses extrémités. Les résultats qu'ils donnent sont rendus comparables entre eux au moyen d'un troisième thermomètre que l'on place alternativement tous les huit jours à côté des précédents pour rester dans chacune de ses positions pendant une semaine.

On corrige l'effet produit sur la marche du grand balancier par des variations de la température, au moyen des poids de réglage, en se conformant aux indications d'un tableau qui a pour argument cette température (1).

Un baromètre enregistreur permet de faire entrer en ligne de compte l'influence de la pression atmosphérique.

On arrive ainsi, avec la plus grande facilité, à maintenir la correction sidérale entre deux limites très voisines, et au besoin à la déterminer avec une précision suffisante avec le seul concours du thermomètre et du baromètre.

Les fils conducteurs sont aériens; ils s'étendent sur une longueur de 330^{m} environ, distance des pendules extrêmes.

Pour éviter toute interruption dans le fonctionnement du système, il existe, à côté du grand balancier, une horloge auxiliaire pouvant, le cas échéant,

(1) Dans le projet primitif, le grand balancier devait être installé dans une chambre souterraine à température constante; des difficultés particulières ont empêché de réaliser cette partie du projet. On s'est contenté d'utiliser le sous-sol du grand équatorial, où la température varie en général d'environ 10° de l'hiver à l'été (ou plutôt du printemps à l'automne) à cause de la faible épaisseur du plafond.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

être utilisée comme directrice. Cette horloge auxiliaire produit aussi (*voir* ci-dessus, p. 304) le signal ou top téléphonique à l'aide d'un petit compteur synchronisé battant la demi-seconde, dont la roue d'échappement porte un contact électrique.

L'horloge directrice auxiliaire est une pendule ordinaire qui a fonctionné comme directrice jusqu'au 3 mai 1895; cette date correspond à l'installation du grand balancier qui, depuis lors, fonctionne comme pendule synchronisant.

Deux commutateurs permettent d'opérer instantanément le changement de directrices et de compteurs. Ce changement se fait sans aucune espèce de trouble lorsqu'on l'opère au moment où les deux directrices ont leurs battements en exacte coïncidence. Pour obtenir et observer facilement cette condition, c'est-à-dire la coïncidence des instants milieux des durées de contact pour ces deux horloges directrices, on dispose d'un téléphone qui rend sensible à l'oreille le passage du courant synchronisant, c'est-à-dire les contacts de l'horloge actionnant actuellement le circuit; et d'un parleur actionné par une pile auxiliaire, qui, lorsque l'on fixe l'extrémité L dans l'une des bornes convenables M ou N, reproduit les contacts de l'horloge que l'on veut substituer à la précédente (1). Lorsque la coïncidence est bien établie, le jeu des commutateurs permet la substitution de la seconde horloge directrice à la première.

L'Observatoire tire les plus grands avantages de cet ingénieux système qui fonctionne sans interruption depuis plus de sept ans; il se distingue des systèmes similaires par une facilité extrême de mise en train et une sécurité absolue dans le fonctionnement.

(1) L'existence de cette horloge auxiliaire et de son compteur n'est pas indispensable : c'est par mesure de précaution que cette horloge (qui, comme on l'a vu plus haut, a fonctionné dans les premiers temps comme directrice) a été conservée. Grâce à cette disposition, s'il y avait quelque réparation à faire au grand balancier ou à son moteur, la synchronisation des horloges de l'Observatoire continuerait sans la moindre interruption.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

OBSERVATOIRE DU MONT MOUNIER.

(2741 MÈTRES D'ALTITUDE.)

L'Observatoire du mont Mounier, succursale de celui de Nice, dont il a été question dans l'*Avant-Propos* de ce Volume, comprend (*Pl. XLVI*, vue d'ensemble) :

1° Des instruments à lecture directe, pour la pression, la température et l'état hygrométrique de l'air (baromètre Fortin et thermomètres divers), des enregistreurs Richard pour l'étude de la variation de ces éléments, notamment deux baromètres, modèle moyen et grand modèle; un abri météorologique semblable à ceux qui sont généralement adoptés dans les stations de ce genre.

2° Un équatorial de 14 pouces ($0^m,38$) d'ouverture, de 7^m de distance focale, avec mouvement d'horlogerie et rappel en ascension droite et en déclinaison, abrité sous une coupole sphérique roulante de 8^m de diamètre.

Comme nous l'avons déjà dit dans l'*Introduction*, la monture qui distingue cet équatorial est tout à fait spéciale. Il est vrai qu'elle ne permet pas l'observation de tout le ciel et qu'elle exclut une zone, assez limitée d'ailleurs, de la partie Nord; mais, outre qu'il est extrêmement rare que l'on ait affaire à cette région du ciel, elle offre dans la partie mécanique une légèreté et une facilité de mouvements qui rendent cette disposition des plus précieuses. Nous avons dit en quoi elle consiste (voir *Pl. XLVII*) :

L'axe horaire se termine à la partie supérieure par une fourche munie à ses extrémités de coussinets dans lesquels roulent deux tourillons fixés au milieu de la lunette, normalement au tube et dans le prolongement l'un de l'autre. Ces deux tourillons constituent à eux seuls l'axe même de déclinaison.

Un tel arrangement réduit cet axe au strict nécessaire et supprime les parties qui sont d'ordinaire les plus lourdes dans les équatoriaux : les contrepoids, celui de la déclinaison entre autres.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

C'est en cela surtout que consiste l'avantage de cette disposition qui, par sa simplicité et les frais minimes qu'elle comporte, se recommande aux observatoires qui ne posséderaient pas de crédits suffisants pour se procurer certains aménagements mécaniques qui, en somme, sont le plus souvent superflus.

Au besoin, on peut faire bénéficier les dimensions de l'objectif des économies que l'on réalise de la sorte sur le prix de la monture.

L'équatorial porte un micromètre à fil de platine, avec vis micrométrique. Il peut recevoir les grossissements suivants : 140, 190 et 270 fois.

C'est avec cet instrument qu'ont été faites nos dernières observations de la planète Vénus (*Comptes rendus* du 24 février 1896).

Ajoutons, pour terminer, que la garde de l'observatoire du mont Mounier et le service météorologique sont confiés à M. Maynard qui communique chaque jour au Bureau Central de Paris, grâce au téléphone qui relie la station avec le télégraphe de Beuil, les observations faites à 7 heures du matin et à 6 heures du soir.

(Extrait de l'*Observatoire de Nice*, t. I.)

2493 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

SUR LA NÉCESSITÉ D'INTRODUIRE

DIVERSES PRÉCAUTIONS ADDITIONNELLES

DANS LES

OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES DE HAUTE PRÉCISION

PAR

M. A. CORNU

Tirage à part des Comptes-Rendus de la dixième Conférence générale de l'Association géodésique internationale.

NEUCHATEL

IMPRIMERIE ATTINGER FRÈRES

1893

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Sur la nécessité d'introduire diverses précautions additionnelles dans les observations astronomiques de haute précision.

PAR M. A. CORNU

Il ne m'appartient pas de discuter au point de vue astronomique la question de savoir si la *variation de latitude* observée en différentes stations avec un soin si remarquable est *réelle* ou seulement *apparente*.

Mais je demande, comme physicien, à faire quelques remarques suggérées par l'observation de phénomènes tout à fait analogues observés dans nos laboratoires, en vue d'éclairer la discussion du problème astronomique.

Voici l'un de ces phénomènes et le plus significatif :

En étudiant depuis bien des années le fonctionnement de la *Balance de Cavendish* pour la mesure de la densité moyenne de la Terre, nous avons remarqué, mon collaborateur M. J.-B. Baille et moi, que le résultat de la mesure offre une variation périodique annuelle : l'attraction newtonienne *paraît* être un peu plus forte au printemps qu'en automne. La différence est, il est vrai, fort petite, mais elle est *systématique*, car elle s'est constamment représentée dans les séries successives faites depuis plusieurs années.

C'est donc un phénomène absolument semblable à celui qu'on observe dans la mesure des latitudes.

L'examen minutieux des conditions expérimentales nous a montré que cette anomalie périodique est simplement apparente et qu'elle a sa cause dans la variation annuelle de la température de la salle où l'appareil est installé.

La température y varie en effet de 6° à 16° C, suivant une loi extrêmement lente et régulière : le minimum ayant lieu au printemps, le maximum en automne, c'est-à-dire avec un retard de trois mois environ sur le maximum et le minimum annuels de la température extérieure. Ce retard est un phénomène bien connu; il est dû, comme on sait, à la conductibilité imparfaite et à la grande chaleur spécifique du sol et des matériaux de construction.

Il est impossible de ne pas être frappé de l'analogie complète de nos résultats avec

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ceux qui concernent la latitude : ainsi, dans les deux cas, 1° la *période* est sensiblement annuelle ; 2° les maxima ou minima correspondent au printemps et à l'automne. C'est ce qui m'enhardit à présenter quelques considérations générales qui me paraissent devoir être prises en considération par les astronomes dans la question de la variabilité des latitudes.

La précision qu'on demande aujourd'hui aux observations astronomiques et géodésiques est devenue si grande que toutes les opérations, considérées autrefois comme *purement géométriques*, sont devenues actuellement de véritables expériences de physique : il suffit de citer la mesure des bases, l'observation du pendule, les études de la réfraction et de l'aberration, etc.; on sait que ces opérations exigent tantôt les appareils métrologiques les plus précis, tantôt les déterminations thermométriques les plus délicates.

Il est vrai que toutes les observations astronomiques ou géodésiques ne sont pas dans ce cas : les mesures angulaires, par exemple, obtenues avec des cercles divisés, donnent des résultats d'une précision remarquable parce qu'on a recours à des précautions particulières; mais cette précision résulte de compensations géométriques dérivant de la forme des cercles, de l'emploi de *cycles fermés* dans les lectures et de la répartition régulière de ces lectures sur la circonférence divisée : grâce à ces conditions spéciales, les mesures angulaires relevées sur les cercles ont conservé leur caractère géométrique.

Mais ce caractère *exclusivement géométrique* des mesures angulaires s'évanouit lorsqu'on abandonne les cercles pour faire intervenir (comme dans la méthode de Talcott) un appareil de physique complexe, le niveau à bulle d'air.

Si l'on analyse alors la série des causes d'erreurs *physiques* qui peuvent troubler les indications d'un appareil comme le niveau, on demeure d'une part effrayé de la grandeur possible des anomalies et d'autre part émerveillé de la compensation habituelle de ces erreurs.

Mais le sentiment qui doit subsister, c'est la crainte de voir ces anomalies revêtir la forme d'erreurs systématiques si difficiles à mettre sûrement en évidence. En effet, ces erreurs n'empêchent nullement la concordance des groupes de mesures obtenues dans des conditions identiques : la petitesse de l'erreur moyenne de chaque détermination isolée donne l'illusion d'une précision extrême en valeur absolue, précision à laquelle on s'accoutume et qu'on finit par considérer comme rigoureusement établie. Il résulte de cette sécurité trompeuse que, quand des groupes de déterminations obtenues dans des conditions diverses ne donnent pas des résultats identiques, les discordances d'allure régulière apparaissent comme l'expression d'une loi réelle, tandis qu'elles sont simplement le résidu des erreurs systématiques négligées, résidu dégagé par la compensation réciproque des erreurs fortuites.

Aussi, lorsqu'on voit apparaître des variations systématiques très petites, doit-on en discuter soigneusement l'origine; car si ces variations peuvent révéler une loi importante, elles peuvent tout aussi bien ne représenter que la trace d'une cause perturbatrice sans intérêt dont on n'a pas su complétement écarter l'influence.

Telle est l'alternative qui se présente inévitablement dans l'interprétation des résultats qui décèlent une variabilité de latitude : comme l'amplitude de ces variations est extrêmement faible, environ $\pm 0''{,}25$, il est nécessaire de se demander si le phénomène correspond

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

réellement à une oscillation du pôle terrestre ou s'il est dû à quelque résidu périodique d'erreurs systématiques affectant les observations.

Il y a même lieu de se poser une question préalable et de se demander si, à cet ordre de précision extrême, les appareils usités en astronomie sont employés dans la pratique des Observatoires de manière à éliminer rigoureusement toute influence pouvant produire des erreurs systématiques de même ordre.

Or, comme on va le voir, la comparaison des conditions où se font les observations astronomiques et de celles que les physiciens considèrent comme nécessaires à l'élimination des influences perturbatrices dangereuses, montre que cette approximation de $0''{,}1$ à $0''{,}2$ est loin d'être certaine.

C'est cette discussion expérimentale que je voudrais brièvement soumettre à l'appréciation des astronomes.

Commençons par l'examen des mesures obtenues avec les *cercles divisés*. C'est à ces grands cercles de 1^m de rayon tout au plus qu'on demande dans les Observatoires de premier ordre la détermination absolue de la déclinaison des étoiles utilisées pour la mesure des latitudes. Quelle longueur représente sur un cercle de 1^m de rayon l'arc de $\frac{1}{10}$ de seconde? En chiffre rond, c'est le $\frac{1}{2000000}$ de 1^m ou $0^{mm}{,}0005$, soit un demi-micron.

Mais les nombreux travaux de métrologie ont montré que dans les conditions les plus favorables, le demi-micron est précisément la limite de précision des *mesures linéaires différentielles* pour des règles de 1 mètre; encore faut-il, pour atteindre cette limite, mettre les règles côte à côte dans un bain liquide constamment agité et maintenu longtemps à une température uniforme.

Or, les cercles divisés des appareils méridiens sont bien loin de remplir ces conditions nécessaires : rien n'assure l'uniformité de température des divers arcs à comparer.

On peut même dire que la température des différentes parties du cercle est certainement et systématiquement variable par suite du rayonnement des parois de l'enceinte, du ciel, des lampes, de l'observateur, des courants d'air, etc.

On voit donc que l'approximation de $0''{,}1$ est très discutable : les remarques précédentes montrent en outre qu'il serait illusoire de donner comme preuve de la réalité de cette approximation la concordance d'un groupe de mesures faites pendant une série de quelques soirées consécutives.

Si nous passons maintenant à l'examen du *niveau à bulle d'air* (qui joue un rôle capital dans la méthode Talcott), on reconnaît que le phénomène physique corrélatif du $\frac{1}{10}$ de seconde d'arc est d'une délicatesse véritablement effrayante.

On remarquera d'abord la difficulté que présente le rodage de la surface intérieure de la fiole : il faut en effet réaliser avec une perfection extrême une portion de surface torique dont la section longitudinale présente un rayon de courbure de *400 mètres* (ce qui correspond à 2^{mm} de déplacement de la bulle pour $1''$, disposition courante des fioles). Or, l'outillage pour obtenir ce résultat est très grossier et ne présente aucune garantie pour l'uniformité du *grain* du verre rodé.

Examinons maintenant la force qui doit contrebalancer les actions capillaires dans le

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

tube : la bulle ayant un volume de 10 à 12 centimètres cubes, la poussée verticale hydrostatique est d'environ dix grammes : c'est la composante tangentielle de cette force qui sollicite la bulle : or, cette force d'un déplacement de 0″.1 est $\frac{10\text{ gr.}}{2000000} = \frac{1}{200}$ de milligramme.

C'est cet effort minuscule qui doit vaincre les forces de frottement, de viscosité, d'adhérence au tube ! Mais ce n'est pas tout ; la bulle est fort gênée dans sa marche, car elle présente un mouvement amorti à un tel degré qu'il est *apériodique* : en effet, la bulle n'oscille pas autour de sa position d'équilibre ; elle y tend sans la dépasser et ne l'atteint *théoriquement* qu'au bout d'un *temps infini*. On n'est donc jamais sûr que la bulle soit arrivée à sa position limite ; on n'a même aucun moyen de contrôler (comme par les oscillations isochrones du fil à plomb ou de la balance) le degré de liberté de son mouvement.

Si maintenant on fait intervenir les inégalités inévitables de température, on reconnaît que quelques centièmes de degré de différence entre les deux extrémités de la bulle la déplacent de plusieurs dixièmes de seconde [1].

Le niveau à bulle d'air est donc un appareil très dangereux lorsqu'il est soumis à des influences systématiques de rayonnement calorifique. Or, l'inégalité de distribution de la température autour d'un instrument astronomique, dans les conditions adoptées ordinairement dans les Observatoires, n'est pas une exception, c'est la règle générale : les murs exposés au midi sont plus chauds que ceux du nord et la différence de température se maintient bien avant dans la nuit : la disposition dissymétrique des lampes, des fenêtres, des portes, des appareils auxiliaires introduit des inégalités de même ordre.

D'où il résulte que le retournement bout pour bout d'un niveau *n'élimine pas* d'une *manière nécessaire* l'erreur occasionnée par la dissymétrie de la température de l'enceinte.

Et qu'on ne vienne pas encore ici invoquer la concordance des moyennes de séries de lectures alternées, comme une preuve de l'élimination de l'erreur thermique : cette concordance prouve simplement que les conditions d'observation sont restées identiques pendant ces séries : mais la lecture moyenne n'en demeure pas moins entachée d'une erreur systématique, qui représente sur le niveau l'effet moyen de la différence de rayonnement des points opposés de l'enceinte.

Après le niveau, c'est *la lunette et son micromètre* qui sont les organes essentiels de l'observation. Il n'est pas inutile de faire remarquer que dans la méthode Talcott, où la lunette est de petite dimension (1 mètre), le dixième de seconde d'arc est inférieur au demi-micron, *quantité invisible* avec les oculaires grossissant quinze à vingt fois, usités dans les instruments d'observation.

Le dixième de seconde résulte donc exclusivement de moyennes et sa valeur est entachée de toutes les erreurs systématiques résultant des aberrations de l'oculaire et de l'objectif.

En outre, la perfection du pointé est liée à la stabilité du micromètre à fil, que la

[1] C'est ce qui résulte d'expériences entreprises sous ma direction au laboratoire de l'École polytechnique par M. Maurice Hamy, astronome adjoint à l'Observatoire.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

proximité du visage et le contact de la main de l'observateur dilatent nécessairement d'une quantité sensible et variable avec la saison, car la température du corps humain est constante et celle de l'instrument varie dans nos climats de près de 30°. Voilà donc une source d'erreur périodique presque irréductible à moins de précautions toutes spéciales.

Enfin, pour terminer, nous examinerons l'influence de la température de l'air au voisinage des lunettes tant à l'intérieur qu'à l'extérieur.

Tant qu'on s'est contenté d'une approximation voisine de la demi-seconde d'arc dans la mesure des déclinaisons d'étoiles, la loi de la répartition de la température de l'air au voisinage de l'objectif de la lunette a pu être négligée : la réfraction de l'air se calcule en effet en partant de l'hypothèse des couches homogènes et horizontales, représentant à la fois les surfaces *isobares* et *isothermes :* dans ces conditions la connaissance de la température à l'entrée du faisceau lumineux dans la lunette suffit pour le calcul de la correction de réfraction. Mais lorsqu'on veut atteindre les petites fractions de seconde qui figurent dans la discussion de la variabilité des latitudes, le problème de la réfraction se complique singulièrement : toutes les inégalités calorifiques qui modifient l'homogénéité des couches et l'horizontalité des surfaces isothermes interviennent pour altérer la correction moyenne de réfraction. Le calcul dans un cas particulier très simple donne immédiatement une idée de l'ordre de grandeur de l'erreur à craindre.

Imaginons que sur le trajet des rayons lumineux, soit à l'intérieur de la lunette, soit à l'extérieur, la température d'une couche d'air diffère d'un nombre de degrés égal à θ de celle des couches voisines : admettons pour simplifier que la surface de séparation soit formée par deux plans formant un angle A.

On trouve aisément que la déviation Δ produite par ce prisme d'air est représentée par

$$\Delta = A\ (n_0 - 1)\ \alpha\ \theta$$

$n_0 = 1{,}000294$ étant l'indice moyen et $\alpha = \frac{1}{273}$ le coefficient de dilatation de l'air.

La substitution de ces valeurs numériques donne :

$$\Delta = A\,\theta.\ \frac{0{,}000294}{273} = 0{,}000001077\ A\,\theta = 0''{,}22\ A\,\theta.$$

Cette expression montre que si le produit de l'angle A du prisme d'air par la différence de température θ est égal à l'unité, la déviation atteint près d'*un quart de seconde d'arc* c'est-à-dire la demi-amplitude des variations observées pour les latitudes. Or, le produit $A\theta$ est égal à l'unité dans des conditions très réalisables.

Pour 1° centigrade l'angle du prisme est de 60°,
pour 2° l'angle A = 30°,
pour 5° l'angle A = 12°.

Mais des différences de 3,4 et 5 degrés dans les couches d'air d'une salle méridienne ne sont pas rares; il suffirait donc que l'obliquité des couches isothermes fût appréciable pour produire une déviation sensible. Et comme ce genre de différence de température varie

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

avec la saison, on retrouve encore là une nouvelle source d'erreur systématique ayant une période annuelle, et du même ordre de grandeur que la variation en question.

Cette influence de la répartition des couches inégalement chaudes est bien connue des astronomes : il est peu d'Observatoires où l'on n'ait pas observé des différences de plusieurs dixièmes de seconde dans une même soirée, en calculant la latitude du lieu suivant qu'on choisit les étoiles au nord ou les étoiles au sud.

Il en résulte que tous les catalogues de déclinaisons et d'ascensions droites renferment dans leurs erreurs périodiques une trace de l'influence variable de l'atmosphère suivant les saisons.

En résumé, il ressort de ces exemples (qu'on pourrait multiplier en poussant plus loin l'analyse des perturbations que les inégalités de température, les retards de conductibilité ou d'élasticité peuvent produire sur les divers instruments astronomiques), que, dans l'état actuel des méthodes d'observation, les précautions prises pour assurer l'approximation du dixième de seconde d'arc sont insuffisantes.

L'expérience acquise par les physiciens (en particulier dans les études métrologiques) a prouvé que l'*uniformité de température maintenue pendant longtemps* est une condition nécessaire pour éviter des erreurs systématiques graves : or, cette condition, bien que recherchée avec soin par les astronomes dans la disposition des salles d'observation, est rarement remplie avec assez de rigueur.

Pour préciser l'indication de quelques précautions additionnelles, on peut conseiller :

1° De déterminer fréquemment et en des points nombreux la loi de répartition de température autour des instruments et jusque dans leur intérieur, en vue de corriger la réfraction et aussi de chercher des moyens d'uniformiser cette température.

2° D'augmenter la conductibilité des matières constituant les instruments : le laiton en tubes minces offre de mauvaises conditions à l'égale répartition de la température : de là des flexions et des torsions systématiques produites par la dissymétrie des sources de chaleur. L'usage d'enveloppes épaisses de cuivre rouge, indiqué il y a déjà bien longtemps par M. Fizeau, devrait se généraliser, en particulier pour la protection des cercles et des niveaux.

3° De diminuer dans de grandes proportions la quantité de chaleur versée par les appareils d'éclairage [1], qui dans presque tous les Observatoires est fort exagérée. C'est dans la proportion de un à cent qu'on pourrait souvent opérer cette réduction, soit par un aménagement convenable de la lumière d'une faible source, soit par l'emploi discontinu de lampes électriques.

4° De chercher à uniformiser la température de l'air à l'extérieur comme à l'intérieur des lunettes par une ventilation artificielle énergique pour éviter les erreurs systématiques de réfraction [2].

C'est seulement en ayant recours à des précautions de ce genre qu'on pourra obtenir

[1] Divers essais faits dans cette voie à l'Observatoire de Paris et à celui de Greenwich ont donné les meilleurs résultats.

[2] C'est ce qui a été réalisé déjà en 1874, sur le conseil de M. Fizeau, dans les lunettes photographiques de l'expédition française du passage de Vénus.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

des résultats définitifs sur la question de la variabilité des latitudes : car dans l'état actuel des observations, il subsiste contre la réalité du phénomène deux objections en quelque sorte *purement physiques*, qu'on peut formuler ainsi :

1° *Est-on certain que les observations de latitude par la méthode Talcott soient affranchies d'erreurs périodiques annuelles dues à des influences météorologiques, particulièrement à la variation de la température aux diverses saisons ?*

2° *Peut-on démontrer que les données astronomiques empruntées aux catalogues d'étoiles employées à ces observations sont également affranchies de ces erreurs ?*

D'après les remarques précédentes, la réfutation de ces objections est actuellement impossible parce que les instruments ne permettent pas, sans emploi des précautions précitées, de répondre avec certitude de l'approximation exigée.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

SUR

L'HORLOGE A GRAND BALANCIER

DE L'OBSERVATOIRE DE NICE,

PAR

M. A. CORNU.

Sur la proposition de M. Perrotin, directeur de l'Observatoire de Nice, M. R. Bischoffsheim a bien voulu me charger d'organiser le système de synchronisation électromagnétique que j'ai décrit sommairement en 1889 au Congrès international de Chronométrie (*voir* les *Comptes rendus* de ce Congrès, p. 179 et suivantes) pour régler synchroniquement les horloges des trois équatoriaux et du petit méridien.

Cette installation a été décrite en détail par M. A. Prim, astronome à l'Observatoire de Nice (*Annales de l'Observatoire de Nice*, t. I, p. 301); elle a fonctionné aussitôt et sans interruption depuis le début (29 avril 1891) de la manière la plus régulière et a donné lieu à des études intéressantes, en dehors des simplifications considérables qu'elle a apportées dans le service de l'heure, si important dans un grand observatoire.

L'horloge directrice a été établie sur un plan différent de celui qui est généralement adopté : après avoir reconnu les conditions susceptibles de donner les résultats les plus précis, j'ai cherché à les réaliser en réduisant au minimum la part du travail de précision et d'élégance qu'on exige d'ordinaire pour le mécanisme des horloges astronomiques et à obtenir, au moyen des lois connues de la Mécanique et de la Physique, la rigueur qui, suivant l'usage, résulte de l'habileté de l'artiste.

Au lieu d'organes délicats et de rouages soignés, j'ai voulu essayer, au contraire, des pièces massives et robustes : comme la précision des horloges repose essentiellement sur l'isochronisme des petites oscillations, j'ai pensé que la pièce principale était le balancier et que c'était la régularité théorique du mouvement oscillatoire qu'il fallait avant tout assurer. J'ai donc songé à employer un pendule beaucoup plus long et beaucoup plus lourd que ceux dont on fait ordinairement usage et, d'autre part, j'ai cherché à réduire au minimum les résistances passives du mouvement de ce pendule : dans ces conditions, le travail mécanique de restitution est extrêmement petit et influence aussi peu que possible la régularité de

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

la période oscillatoire. En conséquence, le balancier est formé d'une barre de fer de 5^m de longueur soutenant une lentille de fonte de $0^m,40$ de diamètre ; le poids total du système est de 108^{kg} environ; ce balancier est suspendu par une double lame de ressort d'acier à une potence en fer solidement encastrée dans un gros mur, il bat la double seconde sidérale avec une amplitude de $\pm$ 35′ à 38′, soit 1°, $\frac{1}{4}$ d'arc *total*. J'aurais préféré la suspension sur couteau, qui absorbe moins de travail que les ressorts, si je n'avais redouté les accidents pouvant survenir au tranchant du couteau dans le maniement et le réglage d'une masse si considérable. Mais, d'autre part, j'ai réduit la résistance de l'air au minimum par le choix de la forme de la lentille et du plan d'oscillation du balancier : cette forme, dont on paraît peu se préoccuper en général, est très importante; on s'imagine volontiers que la forme de lentille aplatie est la plus favorable : il n'en est rien; une lentille plate éprouve dans l'air ambiant une grande résistance, ce qui force à augmenter le poids moteur du rouage, par suite les chances d'irrégularité par l'accroissement des frottements dans le rouage. Des essais méthodiques m'ont conduit à adopter pour cette lentille une épaisseur moitié de celle du diamètre : c'est celle qui donne le minimum de résistance de l'air; de plus, j'ai écarté autant que possible le balancier de la paroi devant laquelle il oscille, pour diminuer le frottement de l'air, qui est considérable lorsque la distance à la paroi est faible.

Il résulte de toutes ces dispositions que le travail de restitution nécessaire à l'entretien de la faible amplitude précitée est extrêmement petit : aussi le poids moteur du rouage est-il seulement de $2^{kg},5$ avec une chute diurne de $0^m,16$, soit de $\frac{1}{10}$ de kilogrammètre par jour. J'aurais pu réduire encore dans une grande proportion le travail de restitution en attelant ce balancier à un rouage de précision absorbant très peu de force motrice : mais j'ai cru utile d'essayer un rouage grossier (celui d'une horloge commune, dite *comtoise*, à échappement à chevilles) pour constater que, conformément aux prévisions, l'imperfection du mécanisme n'influe pas d'une manière appréciable sur la régularité de la période oscillatoire d'un balancier offrant un si grand moment d'inertie.

Effectivement, l'amplitude des oscillations du balancier relevée tous les jours est sensiblement constante (1), les variations accidentelles sont de l'ordre des erreurs d'observations ou des variations de la résistance de l'air causée par les fluctuations de la pression barométrique.

En résumé, la grossièreté du rouage n'a jusqu'à présent laissé apercevoir aucune influence fâcheuse, de sorte que l'horloge directrice est, en réalité, constituée par des pièces qui pourraient être prises, les unes dans l'atelier d'un serrurier, les autres dans le magasin d'une fabrique d'horlogerie commune (2) : toute la préci-

(1) La régularité de cette amplitude est même assez grande pour mettre en évidence de petites variations systématiques s'élevant à $\pm$ 3′ à 4′, introduites par le régime périodique des températures, conformément à une loi générale dont il sera question plus loin (forme cyclique de la loi des erreurs résiduelles).

(2) C'est la conclusion à laquelle on arrive après les études très soignées faites dans les ateliers de M. P. Gautier, l'habile constructeur, membre du Bureau des Longitudes, qui a été chargé de la construction de ce balancier. On voit maintenant que, à part la suspension à ressort exigeant une certaine délicatesse, toutes les pièces accessoires finement travaillées en vue des essais méthodiques sont devenues inutiles et pourraient être remplacées par des pièces ordinaires.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

sion est due à l'emploi d'un pendule invariable ayant un grand moment d'inertie et exécutant des oscillations de très faible amplitude avec le minimum de résistance de la part du milieu ambiant.

Correction de la marche diurne par l'observation du thermomètre et du baromètre. — Contrairement à l'usage adopté dans les horloges de précision, ce balancier n'est pas compensé pour la température; j'ai préféré obtenir la correction par un calcul fondé sur l'observation directe de la température de la tige du balancier plutôt que d'avoir recours aux dispositifs ordinaires de compensation automatique. C'est que j'adresse à ces systèmes des critiques qui eussent été particulièrement applicables aux conditions où fonctionne le grand balancier : je les indiquerai plus loin.

Il faut dire d'ailleurs que, dans le projet primitif, l'horloge directrice devait être installée dans le rocher, chambre creusée dans le roc sur lequel repose le grand équatorial où la température aurait peu varié : la correction diurne prévue devait donc être très faible et très sûre, car le fer qui constitue le balancier est l'un des métaux dont la dilatation est la plus régulière et dont le coefficient est le mieux connu; l'accroissement de 1°C. de température produit une demi-seconde de retard par jour (exactement $0^s,449$). Il aurait donc suffi d'ajouter de temps à autre, sur le milieu de la tige du balancier, la charge additionnelle (1) corrigeant l'effet de la température moyenne de la saison : l'observation de la différence diurne entre la température moyenne et la température réelle permettant d'achever la correction.

Mais, au dernier moment, la construction de cette chambre fut repoussée par l'architecte dans la crainte de compromettre la solidité de l'édifice : force fut donc d'installer le grand balancier dans le sous-sol du grand équatorial, dont la température varie de 10° à 12° de l'hiver à l'été, ou plutôt du printemps à l'automne.

Bien que fort contrarié par cette détermination subite, je n'hésitai pas à persister dans la méthode de correction projetée et, en définitive, l'expérience a prouvé qu'elle s'applique encore très aisément, même dans ces conditions défavorables : on en est quitte pour modifier plus souvent la charge additionnelle du balancier.

On serait tenté, au premier abord, de considérer la suppression de la *compensation* comme un pas en arrière dans la voie du progrès de la mesure du temps : mais, lorsqu'on y regarde de plus près, on reconnaît que, dans un observatoire où un astronome est chargé du service de l'heure, la complication due au calcul quotidien de la correction diurne est insignifiante et qu'on y gagne une sécurité que la compensation automatique n'assure pas au même degré.

D'abord le calcul est d'une simplicité extrême. Voici la formule que j'ai déduite de plusieurs années d'observations pour calculer la correction diurne ΔC.

$$\Delta C = [6^s,5374 - 0,11313p + \tfrac{1}{2}\theta + 0,02(h - 700)],$$

(1) Le poids total du balancier avait été fixé aux environs de 100^{kg}. Le choix de $108^{kg},5$ a été déterminé par la condition que la charge additionnelle placée au milieu de la tige du balancier, nécessaire pour produire une avance de 1 seconde sexagésimale par jour, fût de 10^{gr}.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

p étant la charge additionnelle du balancier exprimée en grammes;
θ la température moyenne de la tige du balancier en degrés centigrades;
h la pression barométrique en millimètres de mercure.

La charge p étant en général un multiple exact de 5^{gr}, une petite table auxiliaire donne le binome $6^s,5374 - 0,11313p$. Le retard diurne pour 1° d'élévation de température étant $0^s,499$, il suffit d'ajouter la moitié de la température moyenne du balancier; quant à l'effet de la pression atmosphérique, pour lequel on n'a pas trouvé de bon dispositif compensateur, on en calcule la correction en doublant l'excès de la hauteur barométrique diurne moyenne sur 700^m et reculant la virgule de deux rangs.

Le calcul de la correction diurne se fait donc à vue. L'erreur (obs.-calc.), obtenue d'après la détermination astronomique de l'heure, n'est jamais que de quelques centièmes de seconde (1).

Il reste à montrer que, dans les conditions où se trouve ce grand balancier, l'un ou l'autre des deux dispositifs compensateurs eût introduit des incertitudes au moins aussi grandes.

Compensation au mercure. — Outre le prix de la difficulté de maniement d'une centaine de kilogrammes de mercure, ce dispositif a le grand inconvénient de ne pas remplir la condition théorique qui le caractérise. La correction, pour être parfaite, exige que la température de la tige et celle du mercure soient égales à tout instant : or, il n'en est jamais ainsi; il s'établit inévitablement, dans l'espace clos où se meut le balancier, une différence de température entre le haut et le bas; le plus souvent, c'est la disposition des couches d'air par ordre de densité qui fait que le mercure est plus froid que la tige; mais l'inverse peut également se présenter lorsque le refroidissement a lieu par la partie supérieure : c'est ce qui arrive pendant l'hiver dans le sous-sol du grand équatorial où l'appareil est installé. La différence peut atteindre jusqu'à 1° ; l'erreur de compensation pourrait donc s'élever au demi-degré, ce qui correspond à $0^s,25$ par jour : ainsi la compensation au mercure ne dispenserait ni de l'observation des températures ni du calcul de correction.

Aussi ai-je considéré comme indispensable de mesurer aussi exactement que possible la température moyenne des couches d'air sur toute la hauteur du balancier : ce qu'on réalise par l'observation de thermomètres à alcool permettant d'estimer le $\frac{1}{100}$ de degré, dont les réservoirs ont $0^m,80$ de longueur; à l'aide de deux, et plus récemment de trois semblables thermomètres, on obtient avec une grande approximation la température moyenne θ de la tige qui entre dans la formule précitée.

Compensation par un gril. — La disposition en gril n'est pas au même degré sujette à l'objection précédente, mais elle offre un autre genre d'inconvénients provenant des articulations, au nombre de 17, et des guidages, au nombre de 12, nécessaires lorsqu'on emploie le laiton comme compensateur du fer. On est alors

(1) Déduction faite de l'erreur périodique annuelle ou saisonnière dont il a déjà été question plus haut.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

placé entre deux dangers : celui de laisser trop de jeu aux attaches et au guidage des 9 tiges, ce qui altère la stabilité de la forme du balancier, ou, au contraire, celui de rendre le système trop invariable en gênant les dilatations relatives des diverses tiges qui composent le gril.

Si le système n'est pas entièrement libre de se dilater, on a à redouter des erreurs d'une grandeur indéterminée.

Supposons que, dans le jeu imparfait des articulations des tiges et de leurs guidages, il se produise un coincement altérant de $\frac{1}{100}$ de millimètre la longueur du balancier; l'erreur relative sur la longueur du pendule synchrone sera ici de $\frac{1}{800000}$; ce qui, d'après la formule

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{2}\frac{dl}{l}; \qquad dT = \frac{T}{2}\frac{dl}{l} = \frac{86400}{800000} = 0^s,108,$$

donnera une erreur diurne de plus d'un dixième de seconde, avec un signe qu'on ne peut pas prévoir.

On voit, d'après cet exemple, les dangers inhérents à l'emploi d'un pendule à gril.

Sur l'existence constante de causes d'erreurs suivant une loi cyclique. — L'analyse des phénomènes mécaniques qui se passent dans le pendule à gril au contact des pièces inégalement dilatables m'a fourni l'explication d'un genre d'erreurs que j'ai rencontrées dans diverses observations chronométriques : la cause de ce type d'erreurs est si générale qu'elle me paraît exister non seulement dans les appareils compensateurs fondés sur le même principe, mais encore dans tous les systèmes où l'effet d'une variation de température éprouve, pour un motif quelconque, un retard systématique.

Le cas le plus simple à considérer est celui où l'appareil est formé de pièces de dilatabilité différente accolées par une pression plus ou moins forte : dans ces conditions, la dilatation ne peut pas s'effectuer librement, puisque les surfaces en contact ne varient pas en tous leurs points de la même quantité; de là une déformation inévitable. Cette déformation est parfois utile, comme dans les lames bimétalliques des balanciers de chronomètre; mais elle est fâcheuse dans tous les cas où les surfaces ne sont pas forcées, par une soudure solide, de conserver un contact permanent sur toute leur étendue; c'est ce qui se présente dans le pendule à gril aux points de clavetage des tiges longitudinales ou aux surfaces de guidage dans les barres transversales: il en est de même aux surfaces de contact des vis d'acier pénétrant dans du laiton ou de vis de laiton dans des pièces d'acier, ou encore aux points d'attache du spiral d'acier dans la platine de laiton, etc., en un mot, à toutes les jonctions similaires des pièces bimétalliques.

Il résulte de cette disposition que la dilatation inégale des surfaces met en jeu l'élasticité des deux pièces en contact : la pièce plus dilatable est arrêtée dans son expansion et se contracte; l'autre, au contraire, est dilatée par extension. De là un état d'équilibre forcé maintenu par le frottement des surfaces pressées l'une contre l'autre. La compensation calculée dans l'hypothèse d'une libre expansion n'est donc pas réalisée; mais, ce qui est beaucoup plus grave, c'est que la loi résultant

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

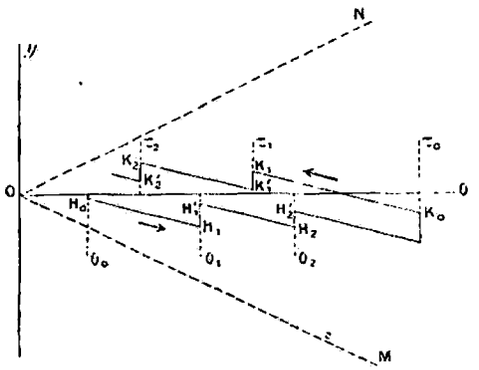
de dilatation ne peut pas être régulière : en effet, elle demeure bien continue tant que le frottement équilibre les réactions, mais il arrive un moment où le frottement est vaincu; de là un saut brusque dans la position relative des pièces en contact et un nouvel état d'équilibre également forcé. La loi de la dilatation résultante est donc non seulement altérée, mais remplacée par une série de variations discontinues dépendant de circonstances fortuites.

En résumé, la compensation, au lieu de s'effectuer suivant la régularité prévue, se produit par soubresauts et se trouve toujours plus ou moins en *retard* sur ce qu'elle devrait être à la température correspondante.

Un tracé graphique représentant l'allure du phénomène montrera que la série des discontinuités est finalement l'origine d'une erreur systématique provenant de l'*irréversibilité* des déplacements entre chaque position relative d'équilibre.

Soit $O\theta$ l'axe des températures (*fig.* 1) et Oy l'axe de la variation résultante de la longueur du balancier ou du pendule synchrone. Si l'appareil bimétallique

Fig. 1.



n'était sensible qu'à l'action de la pièce la plus dilatable (pièce compensatrice), la variation de longueur Oy (contraction) serait proportionnelle à la variation de température et serait représentée par la droite OM; si, au contraire, il n'était sensible qu'à l'action de la pièce la moins dilatable (allongement), la droite représentative serait ON symétrique de OM.

L'appareil étant, en réalité, sensible aux deux actions et les deux dilatations calculées de manière à être égales et de signe contraire, la variation résultante de longueur aurait été nulle, c'est-à-dire représentée pour toutes les températures par l'axe $O\theta$.

Supposons maintenant que les dilatations ne puissent pas s'effectuer librement et que ce soit la pièce la plus dilatable qui ait l'influence prédominante; la variation de longueur pour une élévation de température de θ_0 à θ_1 sera comprise entre l'axe $O\theta$ et la droite OM, puisque la compensation est imparfaite. La loi de variation sera représentée par un élément sensiblement rectiligne, tel que H_0H_1, jusqu'au moment où, la température s'élevant à θ_1, la rupture de l'équilibre élastique s'effectue brusquement. La variation de longueur est représentée par la droite

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$H_1H'_1$, parallèle à l'axe Oy, dirigée vers l'axe $O\theta$; le point représentatif H'_1 du nouvel état d'équilibre reste en dessous de cet axe, car le frottement des surfaces en contact empêchera évidemment les pièces d'arriver exactement à la longueur qui correspond à une libre dilatation.

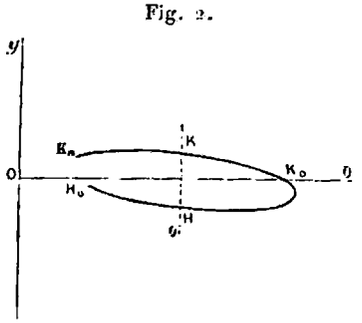
Si la température continue à s'élever, un nouvel élément H'_1H_2 figurera la loi de dilatation résultante jusqu'à la rupture de l'équilibre élastique à la température θ_2; l'élément rectiligne $H_2H'_2$ représentera la variation brusque qui amène la longueur du système à une valeur voisine de la valeur compensée, mais toujours en dessous de l'axe $O\theta$, et ainsi de suite.

La même loi discontinue se prolongera tant que la température ira en croissant; la compensation sera toujours incomplète et la longueur du balancier inférieure à ce qu'elle devrait être si la dilatation avait été libre.

Lorsque la température sera décroissante, une série de phénomènes analogues se produira : elle sera représentée par une série de dentelures analogues mais situées au-dessus de l'axe $O\theta$. En effet, la prédominance de l'action de la pièce la plus dilatable aura pour effet de produire une contraction compensatrice insuffisante; la longueur du balancier ira donc en croissant avec l'abaissement de température de τ_0 à τ_1, suivant une direction comprise entre celle de OM et celle de l'axe $O\theta$, soit K_0K_1. Un ressaut brusque $K_1K'_1$ à la température τ_1 ramènera, après rupture de l'équilibre forcé, à un autre équilibre K'_1 des forces élastiques, mais qui ne correspondra pas tout à fait à la longueur compensée; le point K'_1 sera donc au-dessus de l'axe $O\theta$. La continuation de la température décroissante donnera lieu à une série de dentelures $K_1K'_1$, $K_2K'_2$, etc., correspondant à une compensation moyenne incomplète, et la longueur du balancier sera supérieure à ce qu'elle serait si la dilatation était libre.

Ces dentelures que la figure représente en petit nombre mais avec une grande amplitude seront, en réalité, très fines et très nombreuses; elles seront, en général, inobservables directement (1); elles se traduisent par une trajectoire moyenne $H_0H\,K_0KK_n$ (*fig.* 2) qui consiste en une courbe continue composée d'un arc

Fig. 2.



$H_0H\,K_0$ situé au-dessous de l'axe $O\theta$ lors de la température croissante et d'un arc

(1) Regnault les a pourtant observés en examinant le déplacement de la colonne capillaire des thermomètres à mercure qui s'opérait par soubresauts : le frottement de la colonne et l'élasticité du réservoir réalisent les conditions mécaniques auxquelles j'attribue les phénomènes décrits ci-dessus.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$K_0 K K_n$ situé au-dessus lorsque la température est décroissante. Il n'est pas certain que cette courbe se ferme rigoureusement lorsque la température reviendra à sa valeur primitive ; en effet, d'après la configuration de cette ligne, on voit qu'en général la longueur du balancier ne dépend pas seulement de la température *0*, mais du sens dans lequel cette température varie.

De là une loi d'erreur systématique qu'on peut appeler *cyclique*, puisqu'elle est représentée par une sorte de cycle qui caractérise le retard moyen de l'effet de la température sur la longueur du balancier.

Le même mode de raisonnement s'applique à des dispositifs très différents de celui qui vient d'être analysé.

On voit, en effet, que, quelle que soit l'origine de ce retard (frottements, réactions élastiques, irréversibilité des déplacements, conductibilité inégale des diverses pièces, etc.), la loi de l'erreur systématique sera de la même forme; le signe de l'erreur dépendra, toutes choses égales d'ailleurs, du sens de description du cycle, sens qui dépendra lui-même de la prédominance de l'une des causes en présence.

On reconnaîtra, par exemple, que l'inégalité de température le long d'un balancier compensé au mercure amène successivement une loi cyclique d'erreur. On verra aussi que les balanciers de chronomètres, par différents détails, entraînant des contacts bimétalliques, sont susceptibles de présenter des anomalies cycliques irrégulières; aussi me paraît-il nécessaire d'attirer l'attention des observateurs qui surveillent la compensation des chronomètres en les portant alternativement de l'étuve à la caisse froide, sur la possibilité de ces erreurs cycliques, c'est-à-dire sur l'existence inévitable d'une différence de marche à une même température, selon qu'on y arrive par une variation ascendante ou descendante.

De là résulterait un classement des systèmes de balanciers compensés et une voie nouvelle dans les précautions à prendre dans l'emploi des métaux de nature diverse. Ainsi l'on devra, en particulier, éviter autant que possible la juxtaposition des pièces inégalement dilatables dont l'invariabilité de contact ne serait pas absolue; on trouvera peut-être dans la discussion de ces dispositifs l'origine et le moyen d'éliminer les petites anomalies brusques dont l'apparition inopinée déconcerte les artistes les plus habiles.

Je sortirais de mon rôle et de ma compétence si je voulais aller plus loin dans les conseils à donner sur cette matière; mais l'examen des résultats obtenus à l'occasion des études relatives à l'installation des appareils de l'Observatoire de Nice m'ont conduit à ces remarques que les membres du Congrès ont écoutées avec une bienveillance dont je leur suis très reconnaissant.

31233 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

SUR LES OBSTACLES QUI S'OPPOSENT À L'ADOPTION DE L'HEURE COMME UNITÉ DE TEMPS.

Le choix comme unité de temps de l'*heure*, ou vingt-quatrième partie du jour, qui paraît au premier abord, par subdivision décimale, concilier si simplement le commun usage d'une part et de l'autre la facilité des calculs, conduit au contraire à des difficultés dont il sera probablement impossible d'avoir raison.

L'intérêt en jeu est exclusivement celui des personnes qui *calculent*, car le public ordinaire n'a nul souci d'un changement quelconque : il ne verra que des inconvénients à changer ses habitudes. Il faudrait donc démontrer que le calculateur, homme de science ou d'industrie, trouvera un bénéfice réel à la réforme proposée, malgré les complications de toute nature que cette innovation entraînera inévitablement.

En effet le changement de l'unité de temps est beaucoup plus grave que ne paraissent le supposer les promoteurs de semblables innovations : il entraîne en effet le changement corrélatif des unités de mesure de toutes les grandeurs dérivées du temps : il faut appliquer à chacune d'elles une correction par l'application d'un facteur numérique; ce facteur est nécessairement complexe (sans quoi la réforme n'aurait pas raison d'être) et de plus il est variable suivant l'exposant de la puissance à laquelle le temps entre dans l'expression de la mesure : il est en effet égal à la même puissance du rapport ρ des deux unités interchangées. Dans le cas présent ce rapport ρ est le quotient du nombre de secondes sexagésimales contenues dans une heure (3,600) au nombre de secondes décimales (10,000) contenues dans le même temps.

Le facteur à employer sera donc une puissance positive ou négative entière ou fractionnée de $\frac{36}{100}$.

L'exemple le plus simple des perturbations qui interviendraient par l'effet de la réforme proposée est tiré de l'étude de la pesanteur.

I. — On sait, d'après la loi de la chute des corps, que l'espace e parcouru pendant le temps t est donné par la formule

$$e = \frac{1}{2} g t^2,$$

g étant la *gravité*, c'est-à-dire le coefficient spécifique de l'action terrestre, égal à Paris à 9 mètres 81, correspondant à une seconde sexagésimale. D'après l'expression ci-dessus on voit que la gravité ou *accélération* de la pesanteur est le quotient d'une longueur par la moitié du carré du temps employé à la parcourir. Lorsqu'on prend, comme d'ordinaire, le mètre et la seconde sexagésimale pour unités on a

$$e = 4^m\,905\, t^2.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Si l'on adoptait la seconde décimale ou dix-millième d'heure, le coefficient g changerait de valeur : il en serait de même pour tous les nombres dans lesquels entre la gravité et auxquels on est accoutumé depuis l'adoption du système métrique : ainsi nous sommes habitués à dire que l'espace parcouru par un corps dans la première seconde de chute libre est $4^m 905$.

Avec la seconde décimale précitée qui est les $\frac{36}{100}$ de la seconde sexagésimale, l'espace parcouru pendant la nouvelle unité de temps serait réduit dans le rapport de 1 à $(0.36)^2$ ou de 1 à 0.1296 :

$$e_1 = 0^m\ 635688.$$

Il serait ainsi près de huit fois moindre.

La valeur de la gravité, devenue γ d'après la formule

$$e = \frac{1}{2}\gamma t'^2,$$

serait égale au double de e_1 :

$$\gamma = 1^m\ 271376$$

Le facteur de réduction est ici le carré e^2 du rapport précité $e = 0.36$.

Ainsi la valeur $g = 9^m 81$ de la gravité qui entre dans tant de formules théoriques ou pratiques de la mécanique devrait être remplacée par

$$\gamma = 1^m 271.$$

II. — La longueur du pendule simple battant la seconde sexagésimale est à Paris

$$l = 0^m\ 9939.$$

La longueur du pendule qui battrait le dix-millième d'heure en serait les $\frac{36}{100}$:

$$l_1 = 0^m\ 3578.$$

Le facteur de réduction n'est ici que la première puissance du rapport $e = 0.36$, parce que la gravité n'entre dans la formule bien connue du pendule que par la racine carrée de l'accélération.

III. — La petitesse de la dix-millième partie de l'heure, considérée comme *unité pratique de temps*, est elle-même un obstacle presque insurmontable à son adoption : elle ne représente que les $\frac{36}{100}$ ou un peu plus du tiers de la seconde sexagésimale.

Or la seconde sexagésimale est une durée particulièrement bien adaptée à notre organisme, une sorte de *constante physiologique* en harmonie avec les impressions directes ou reflexes de notre système nerveux : c'est sensiblement la période de battement du pouls normal (60 à 70 pulsations par minute sexagésimale).

A l'oreille on la subdivise aisément en dix parties égales : et le dixième de seconde représente la limite infranchissable de la perception rétinienne.

Le tiers de cette durée est un intervalle trop petit pour être aisément subdivisé. D'autre part, il

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

faut numéroter, au moins par la pensée, les battements successifs du chronomètre qui les fournit : cette opération, même mentale, exige un temps matériel : en un tiers de seconde la numération s'effectue sans trop de difficulté lorsque les noms de nombres sont monosyllabiques (de 1 à 13), mais quand ils deviennent dissyllabiques ou trisyllabiques (à partir de quarante en français, plus tôt dans d'autres langues) la numération devient extrêmement pénible. Il y a encore des difficultés d'un autre ordre lorsqu'on a égard à la durée de la perception visuelle et des retards divers qui conduisent à l'explication des équations personnelles; et leur ordre de grandeur est précisément du tiers ou du quart de seconde.

En effet, pour une observation précise de temps il faut établir la concordance initiale entre la numération des battements et la position de l'aiguille indicatrice sur le cadran chronométrique.

Dans le cas de la seconde décimale, dix-millième partie de l'heure, l'aiguille, toutes choses égales d'ailleurs, irait trois fois plus vite sur des divisions environ deux fois plus étroites : l'œil et l'oreille seront évidemment dans des conditions beaucoup moins favorables qu'avec les cadrans sexagésimaux. Toutes ces difficultés réunies, bien que d'un ordre secondaire, dégoûteront certainement les observateurs sérieux et arrêteront tout essai prolongé dans cette voie.

Nous avons choisi un exemple des perturbations qu'introduirait le changement d'unité de temps parmi les phénomènes les plus simples relatifs à la pesanteur; nous trouverions les mêmes difficultés avec les expressions de la vitesse du son, de la lumière, des périodes vibratoires, etc. Mais si nous arrivons aux unités physiques dans lesquelles le temps entre à des puissances fractionnaires très diverses, la perturbation apportée sera si considérable qu'elle rendra la réforme proposée absolument rédhibitoire. On sait effectivement que les unités électriques magnétiques, électro-magnétiques, etc., sont fondées sur le système C. G. S. dans lequel l'unité de temps est la seconde sexagésimale de temps moyen. La simple inspection du tableau des dimensions de ces unités montre que les physiciens, les électriciens en particulier, en un mot les savants sur l'appui desquels on devait compter pour l'adoption d'une simplification théorique, seront absolument réfractaires à la réforme proposée.

Le système d'unités précitées si bien lié aux principes de la mécanique est maintenant universellement adopté : il rend tant de services à la science comme à l'industrie qu'il ne sera modifié qu'en échange d'avantages incontestables.

Or quel est l'inconvénient du système actuel de numération du temps au point de vue des calculs? C'est la relation duodécimale de l'heure, de la minute et de la seconde : la simplification consisterait à rendre décimale l'expression numérique du temps, c'est-à-dire à faire un calcul de conversion.

La question se pose alors dans les termes suivants :

Peut-on mettre en balance le petit surcroit de travail employé à la conversion des données numériques de temps en unités décimales avec les perturbations de toute nature qu'entraînerait l'adoption d'une nouvelle unité de temps qui ne se recommande d'ailleurs par aucune considération scientifique ?

Or il est facile de vérifier qu'avec les tables ci-jointes (voir ci-après), permettant la conversion du temps (heures, minutes, secondes sexagésimales) en ares décimaux (grades et fractions décimales), le calcul de conversion n'exige pas une minute de travail : ce calcul auxiliaire ne constitue en général qu'une fraction insignifiante du temps nécessaire aux opérations principales à effectuer sur les données proposées.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Je me range donc à l'avis de nos collègues qui concluent de la manière suivante :

1° Il y a lieu de repousser l'heure ou $\frac{1}{24}$ de jour comme unité de temps;

2° La subdivision décimale de la circonférence en 400 grades adoptée depuis un siècle suffit avec les tables de conversion à obtenir la concordance désirable des arcs et des temps.

3° L'adoption de la division décimale de la circonférence est suffisante pour préparer l'adoption ultérieure de la division décimale du jour.

USAGE DES TABLES DE CONVERSION.

PREMIÈRE TABLE.

Convertir en grades et fractions décimales du grade $17^h\,28^m\,31^s\,72^s$:

17^h	$283^G\ 3333''\ 333$
28^m	$7\ 7777\ 777$
31^s	$0\ 1435\ 185$
$0\,72$	$0\ 0033\ 333$
	$291\ 2579\ 629$

DEUXIÈME TABLE.

Convertir en heures, minutes, secondes sexagésimales et fractions décimales de la seconde, $291^G\ 25'\ 79''\ 629$:

200^G	12^h
91	$7\ 27^m\ 36^s$
$0\,25'$	$54\ 00$
$0\,0079''$	$1\ 7064$
$0''\,62$	$0\ 0133\ 92$
$0''\,0090$	$0\ 0001\ 945$
	$17^h\ 27^m\ 31^s\ 7199\ 865$

A. CORNU.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CONVERSION DES HEURES, MINUTES ET SECONDES SEXAGÉSIMALES EN GRADES ET FRACTIONS DÉCIMALES DU GRADE.

HEURES.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0^h	0g 0000″000	16g 6666″667	33g 3333″333	50g 0000″000	66g 6666″667	83g 3333″333	100g 0000″000	116g 6666″667	133g 3333″333	150g 0000″000	0^h
1	166 6666 667	183 3333 333	200 0000 000	216 6666 667	233 3333 333	250 0000 000	266 6666 667	283 3333 333	3000 000 000	316 6666 667	1
2	333 3333 333	350 0000 000	383 3333 333	366 6666 667	400 0000 000						2

MINUTES SEXAGÉSIMALES.

0^m	0g 0000″000	0g 2777 778	0g 5555″556	0g 8333″333	1g 1111″111	1g 3888″889	1g 6666″667	1g 9444″444	2g 2222″222	2g 5000″000	0^m
1	2 7777 778	3 0555 556	3 3333 333	3 6111 111	3 8888 889	4 1666 667	4 4444 444	1 4722 222	5 0000 000	5 2777 778	1
2	5 5555 556	5 8333 333	6 1111 111	6 3888 889	6 6666 667	6 9444 444	7 2222 222	7 5000 000	7 7777 778	8 0555 556	2
3	8 3333 333	8 6111 111	8 8888 889	9 1666 667	9 4444 444	9 7222 222	10 0000 000	10 2777 778	10 5555 556	10 8333 333	3
4	11 1111 111	11 3888 889	11 6666 667	11 9444 444	12 2222 222	12 5000 000	12 7777 778	13 0555 556	13 3333 333	13 6111 111	4
5	13 8888 889	14 1666 667	14 4444 444	14 7222 222	15 0000 000	15 5555 556	15 2777 778	16 8333 333	16 1111 111	16 3888 889	5

SECONDES SEXAGÉSIMALES.

0^s	0g 0000″000	0g 0046″296	0g 0092″593	0g 0138″889	0g 0185″185	0g 0231″481	0g 0277″778	0g 0324″074	0g 0370″370	0g 0416″667	0^s
1	0 0462 963	0 0509 259	0 0555 556	0 0601 852	0 0648 148	0 0694 441	0 0740 741	0 0787 037	0 0833 333	0 0879 630	1
2	0 0925 926	0 0972 222	0 1018 518	0 1064 815	0 1111 111	0 1157 407	0 1203 704	0 1250 000	0 1296 296	0 1342 592	2
3	0 1388 889	0 1435 185	0 1481 481	0 1527 778	0 1574 074	0 1620 370	0 1666 667	0 1712 963	0 1759 259	0 1805 556	3
4	0 1851 852	0 1898 148	0 1944 444	0 1990 740	0 2037 037	0 2083 333	0 2129 629	0 2175 926	0 2222 222	0 2263 518	4
5	0 2314 815	0 2361 111	0 2407 407	0 2463 703	0 2500 000	0 2546 296	0 2592 592	0 2638 889	0 2685 185	0 2231 481	5

CENTIÈMES DE SECONDE SEXAGÉSIMALE.

0	0g 0000″000	0g 0000″463	0g 0000″926	0g 0001″389	0g 0001″852	0g 0002″315	0g 0002″778	0g 0003″241	0g 0003″704	0g 0004″167	0
1	0 0004 630	0 0005 093	0 0005 556	0 0006 019	0 0006 481	0 0006 941	0 0007 407	0 0007 870	0 0003 333	0 0008 796	1
2	0 0009 259	0 0009 722	0 0010 185	0 0010 648	0 0011 119	0 0011 571	0 0012 037	0 0012 500	0 0012 963	0 0013 426	2
3	0 0013 889	0 0014 352	0 0014 815	0 0015 278	0 0015 741	0 0016 204	0 0016 667	0 0017 130	0 0017 593	0 0018 056	3
4	0 0018 519	0 0018 981	0 0019 444	0 0019 907	0 0020 370	0 0020 833	0 0021 296	0 0021 759	0 0022 222	0 0022 685	4
5	0 0023 148	0 0023 611	0 0024 074	0 0024 637	0 0025 000	0 0025 463	0 0025 926	0 0026 389	0 0026 852	0 0027 315	5
6	0 0027 778	0 0028 241	0 0028 704	0 0029 167	0 0029 630	0 0030 093	0 0030 556	0 0031 019	0 0031 481	0 0031 944	6
7	0 0032 407	0 0032 870	0 0033 333	0 0033 796	0 0034 259	0 0034 722	0 0035 185	0 0035 648	0 0036 111	0 0036 574	7
8	0 0037 037	0 0037 500	0 0037 963	0 0038 426	0 0038 889	0 0039 352	0 0039 815	0 0040 278	0 0040 741	0 0041 204	8
9	0 0041 667	0 0042 130	0 0042 593	0 0043 056	0 0043 519	0 0043 981	0 0044 441	0 0044 907	0 0045 370	0 0045 833	9

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

100 = 9h
200 = 12
300 = 18
400 = 24

CONVERSION DES GRADES ET FRACTIONS DÉCIMALES DU GRADE EN HEURES, MINUTES, SECONDES ET FRACTIONS DÉCIMALES DE LA SECONDE.

GRADES.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0	0m 0s	3m36s	7m12s	10m48s	14m24s	18m 0s	21m36s	25m12s	28m48s	32m24s	0
1	36 0	39 36	43 12	46 48	50 24	54 0	57 36	1h 1 12	1h 4 48	1h 8 24	1
2	1h12 0	1h15 36	1h19 12	1h22 48	1h26 24	1h30 0	1h33 36	1 37 12	1 40 48	1 44 24	2
3	1 48 0	1 51 36	1 55 12	1 58 48	2 2 24	2 6 0	2 9 36	2 13 12	2 16 48	2 20 24	3
4	2 24 0	2 27 36	2 31 12	2 34 48	2 38 24	2 42 0	2 45 36	2 49 12	2 52 48	2 56 24	4
5	3 0 0	3 3 36	3 7 12	3 10 48	3 14 24	3 18 0	3 21 36	3 25 12	3 28 48	3 32 24	5
6	3 36 0	3 39 36	3 43 12	3 46 48	3 50 24	3 54 0	3 57 36	4 1 12	4 4 48	4 8 24	6
7	4 12 0	4 15 36	4 19 12	4 22 48	4 26 24	4 30 0	4 33 36	4 37 12	4 40 48	4 44 24	7
8	4 48 0	4 51 36	4 55 12	4 58 48	5 2 24	5 6 0	5 9 36	5 13 12	5 16 48	5 20 24	8
9	5 24 0	5 27 36	5 31 12	5 34 48	5 38 24	5 42 0	5 45 36	5 49 12	5 52 48	5 56 24	9

MINUTES DÉCIMALES

0	0'00	2'16	4'32	6'48	8'64	10'80	12'96	15'12	17'28	19'44	0
1	21,60	23,76	25,92	28,08	30,24	32,40	34,56	36,72	38,88	41,04	1
2	43,20	45,36	47,52	49,68	51,84	54,00	56,16	58,32	1m 0,48	1m 2 64	2
3	1m 4,80	1m 6,96	1m 9,12	1m11,28	1m13,44	1m15,60	1m17,76	1m19,92	1 22,08	1 24,24	3
4	1 26,40	1 28,56	1 30,72	1 32,88	1 35,04	1 37,20	1 39,36	1 41,52	1 43,68	1 45,84	4
5	1 48,00	1 50,16	1 52,32	1 54,48	1 56,64	1 58,80	2 0,96	2 3,12	2 5,28	2 7,44	5
6	2 9,60	2 11,76	2 13,92	2 16,08	2 18,24	2 20,40	2 22,56	2 24,72	2 26,88	2 29,04	6
7	2 31,20	2 33,36	2 35,52	2 37,68	2 39,84	2 42,00	2 44,16	2 46,32	2 48,48	2 50,64	7
8	2 52,80	2 54,96	2 57,12	2 59,28	3 1,44	3 3,60	3 5,76	3 7,92	3 10,08	3 12,24	8
9	3 14,40	3 16,56	3 18,72	3 20,88	3 23,04	2 25,20	3 27,36	3 29,52	3 31,68	3 33,84	9

SECONDES DÉCIMALES.

0	0'00 00	0'02 16	0'04 32	0'06 48	0'08 64	0'10 80	0,12 96	0'15 12	0'17 28	0'19 44	0
1	0,21 60	0,23 76	0,25 92	0,28 08	0,30 24	0,32 40	0,34 56	0,36 72	0,38 88	0,41 04	1
2	0,43 20	0,45 36	0,47 52	0,49 68	0,51 84	0,54 00	0,56 16	0,58 32	0,60 48	0,62 64	2
3	0,64 80	0,66 96	0,69 12	0,71 28	0,73 44	0,75 60	0,77 76	0,79 92	0,82 08	0,84 24	3
4	0,86 40	0,88 56	0,90 72	0,92 88	0,95 04	0,97 20	0,99 36	1,01 52	1,03 68	1,05 84	4
5	1,08 00	1,10 16	1,12 32	1,14 48	1,16 64	1,18 80	1,20 96	1,23 12	1,25 28	1,27 44	5
6	1,29 60	1,31 16	1,33 92	1,36 08	1,38 24	1,40 40	1,42 56	1,44 72	1,46 88	1,49 04	6
7	1,51 20	1,53 36	1,55 52	1,57 68	1,59 84	1,62 00	1,64 16	1,66 32	1,68 48	1,70 64	7
8	1,72 80	1,74 96	1,77 12	1,79 28	1,81 44	1,83 60	1,85 76	1,87 92	1,90 08	1,92 24	8
9	1,94 50	1,96 56	1,98 72	2,00 88	2,03 04	2,05 20	2,07 36	2,09 52	2,11 68	2,13 84	9

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

LA

DÉCIMALISATION

DE L'HEURE ET DE LA CIRCONFÉRENCE

PAR

A. CORNU

MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES

(Extrait de *L'Éclairage Électrique* du 22 mai 1897.)

PARIS

GEORGES CARRÉ ET C. NAUD, ÉDITEURS

3, RUE RACINE, 3

1897

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

quelconque aboutisse? C'est d'abord qu'elle soit nettement réclamée par l'opinion, qu'elle favorise un groupe considérable, sinon comme nombre, du moins comme importance sociale; enfin qu'elle n'apporte au groupe non intéressé condamné à la subir, que des inconvénients négligeables ou temporaires.

Cette triple condition s'est trouvée remplie, depuis un siècle, dans la réforme et l'unification des mesures de longueur et de masse. Tout le monde souffrait autrefois de la diversité des unités qui changeaient aux frontières des nations, aux limites des provinces et même des communes : les transactions dont l'importance grandissait avec le progrès et la rapidité des transports, offraient de ce chef des difficultés inextricables : c'était la vie sociale elle-même qui était troublée dans le jeu des échanges, par l'incertitude des mesures, l'incohérence des multiples ou des sous-multiples des unités principales. De là, le succès comme réforme universelle, du système métrique, dont les unités cohérentes dans leur dérivation et la simplicité du mécanisme de formation des multiples et des subdivisions ont fini par réunir l'adhésion universelle.

Le système métrique décimal appliqué à la mesure des longueurs et des masses fut donc un véritable soulagement pour l'humanité.

La réforme devait s'étendre à la troisième unité irréductible de la mécanique : à la mesure du temps : Comment se fait-il qu'elle ait échoué, tandis que les deux autres ont réussi? Les promoteurs du nouveau système l'avaient pourtant préparée avec la même logique, avec le même esprit scientifique, peut-être même avec un sentiment encore plus délicat des conditions à remplir; l'unité de temps était le jour [1], période commune à tous les points de notre planète. C'était un choix excellent à tous les points de vue, car les subdivisions du jour forment des unités dérivées fort commodes qui n'auraient guère troublé les usages de la vie ordinaire : le centième de jour représente presque exactement le quart d'heure $\left(\frac{1}{100}\text{ au lieu de }\frac{1}{96}\text{ de jour}\right)$; le millième du jour, une minute et demie; et le cent millième de jour reproduit à peu près la seconde (0, 864 seconde) : c'est même à fort peu près la durée du battement du pouls normal de l'homme (69 à 70 battements par minute sexagésimale) l'unité physiologique naturelle des petits intervalles de temps.

Voilà donc un système établi sur une base scientifique, à la fois très simple et très pratique : pourquoi n'a-t-il pas prévalu? Il n'a pas prévalu parce qu'il n'était réclamé par aucune majorité influente; il n'avait pour lui que la logique : or, en ce monde, pour qu'une réforme logique réussisse, il faut qu'elle s'accorde avec l'intérêt : l'intérêt prime la logique. Les nations civilisées n'offraient aucune divergence dans leur manière de compter le temps : elles s'accordaient à diviser le jour en 24 heures; la réforme proposée ne répondait donc à aucun besoin : l'unification existait de fait.

La subdivision sexagésimale de l'heure en minutes et secondes était, il est vrai, moins simple que la subdivision décimale; mais les esprits étaient encore accoutumés aux opérations duodécimales et cette complexité ne gênait personne. Voilà pourquoi la réforme décimale du temps a échoué, malgré les efforts des promoteurs, malgré l'exemple de savants illustres : On sait, en effet, que Laplace adopta le jour comme unité dans son admirable *Traité de Mécanique céleste*.

Aussi, après plus d'un siècle, l'ancien système de mesure du temps reste-t-il toujours en usage : il offre cependant des inconvénients graves et même des incohérences fâcheuses. Ainsi le jour (la période naturelle) y est divisé d'abord en 24 heures, puis la loi de subdivision change : l'heure se subdivise en soixante minutes, la minute en soixante secondes; enfin, au lieu de se poursuivre logiquement, la loi sexagésimale fait place à

[1] Le jour solaire moyen ou le sidéral, suivant les besoins de la vie civile ou de l'astronomie.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

la loi décimale pour la subdivision de la seconde!

Quelles singulières anomalies et comment peut-on s'expliquer qu'un pareil système se soit perpétué si longtemps parmi les hommes de science, champions naturels de la logique et de la simplicité, devant les avantages, aujourd'hui vulgaires, de la division décimale?

A cette question, il y a une première réponse bien simple. Dans toutes les opérations où ce système est acceptable on le conserve : lorsqu'il devient gênant, on le remplace (à l'aide de barèmes ou tables de conversion) par un système décimal approprié : on choisit dans chaque cas l'unité dérivée la plus favorable à l'expression du résultat cherché. Ainsi, on réduit une durée quelconque exprimée par un nombre d'heures, de minutes ou de secondes, soit en jours et en fraction décimale de jour, soit en heures et fraction décimale d'heure, etc. Dans les Compagnies de chemins de fer, par exemple, beaucoup de calculs relatifs à la marche des trains, réglés par la vitesse à l'heure, se font en divisant l'heure en parties décimales; on réduit ensuite les résultats en minutes pour l'horaire usuel.

Cela constitue pour le calculateur un petit surcroit de travail, mais ce surcroit est en général une fraction insignifiante de celui que comporte l'opération complète.

La seconde réponse est celle-ci : si l'on se décidait à changer le système, il faudrait choisir celui qui satisfait le mieux aux conditions générales de toute réforme, afin que son adoption puisse devenir universelle. Existe-t-il un semblable système réclamé par l'opinion? S'est-il formé, depuis un siècle que le système décimal est en vigueur, un courant d'opinion assez net, un groupe d'intéressés assez compact pour imposer aux indifférents la réforme en question? Rien de semblable n'apparait, et, sauf quelques manifestations isolées, aucun symptôme général ne se manifeste dans cette voie. Il suffit d'ailleurs de faire le dénombrement de ceux qui ont intérêt à rendre décimales les subdivisions de l'unité de temps pour voir que leur nombre est pour ainsi dire négligeable.

Considérons d'abord la vie ordinaire : dans les usages domestiques, l'unité usuelle, l'heure, n'a nul besoin d'être subdivisée plus loin que le quart, le sixième ou tout au plus le douzième de sa valeur. Voilà donc l'immense majorité du corps social pour qui le cadran de la montre divisé en douze parties suffit amplement : cette majorité est effrayante comme masse à mettre en mouvement, car il faut y comprendre les gens de la campagne dont l'horloge du clocher n'a longtemps porté au cadran que l'aiguille des heures : pas plus que les citadins, ils ne réclament la division décimale du temps. Et ce n'est pas par indifférence pour la précision des mesures que l'homme des champs néglige les minutes quand il compte les heures; car il sait fort bien, quand son intérêt est en jeu, apprécier des fractions délicates : par exemple, discuter le chiffre des centiares dans la vente d'un gros lopin de terre, ou réclamer les centimes dans l'appoint de plusieurs milliers de francs.

La diffusion des voies ferrées, avec leurs horaires fixés à la minute, commence cependant à répandre le besoin d'une plus grande précision : l'aiguille des minutes n'est plus inutile.

Mais c'est à cette limite que s'arrête, dans la vie ordinaire, l'ordre de délicatesse demandée par le public à la subdivision du temps.

Il ne reste donc comme catégorie de personnes réclamant une précision supérieure qu'une minorité, imposante comme valeur intrinsèque, mais infime comme valeur numérique : ce sont les astronomes, les navigateurs, les physiciens, électriciens, mécaniciens et tous les hommes de science dont les spéculations se traduisent par des calculs de précision.

La division décimale du temps logique et complète leur serait éminemment favorable : elle leur épargnerait ces conversions nécessaires pour traduire en unités usuelles les résultats de leurs calculs : en outre, elle sup-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

primerait les chances d'erreur inhérentes à ces opérations auxiliaires.

Pour eux, la vraie réforme serait l'adoption du jour comme unité, mais ils ne peuvent pas l'imposer actuellement : il est inutile de recommencer l'expérience tentée au commencement du siècle : les difficultés demeurent les mêmes, le même échec l'attendrait.

Les promoteurs actuels de la réforme décimale, pour la mesure du temps, ont pensé trouver un moyen terme entre le système ancien et leurs aspirations légitimes : la division décimale de l'heure prise comme unité de temps et adoptée par la commission ministérielle leur paraît une solution mixte qui concilie tous les intérêts.

Il est facile de montrer que cette conciliation n'est qu'apparente, qu'elle ne satisfait que des besoins très particuliers et que le système précité, s'il était proposé sérieusement à l'examen des véritables intéressés, rencontrerait des obstacles insurmontables.

Ces obstacles sont de nature diverse : les uns résident dans l'application immédiate du système, les autres dans les conséquences plus ou moins directes du changement de l'unité de temps.

Examinons d'abord les conséquences immédiates de la subdivision décimale de l'heure relativement au mode d'observation pour les déterminations précises du temps.

Les fractions décimales à considérer seraient les suivantes :

Le centième d'heure, qui vaut 36 secondes sexagésimales ;

Le millième d'heure, qui vaut 3,6 secondes sexagésimales ;

Le dix-millième d'heure, qui vaut 0,36 de seconde sexagésimale.

Le balancier de l'horloge astronomique devrait battre le millième ou le dix-millième d'heure : or, le millième (3,6 secondes) est un intervalle trop grand, l'oreille estimerait fort mal les fractions de cette durée ; le dix-millième (0,36) est trop petit, l'observateur n'aurait pas le temps matériel de compter, même mentalement, le numéro d'ordre des battements.

Voilà déjà des difficultés imprévues, fatales à la précision des mesures et capables de rebuter les observateurs soigneux.

Il n'est pas inutile de remarquer à ce propos que si la pratique a consacré l'usage de la seconde sexagésimale, c'est que cette durée représente une sorte de constante physiologique appropriée à la durée de nos impressions de l'ouïe et de la vue.

L'estime du temps, à l'oreille, chez les observateurs exercés, est de l'ordre du $\frac{1}{10}$ de seconde ; la durée de la persistance des impressions rétiniennes est de même ordre. L'intervalle d'une seconde est donc une grandeur privilégiée en harmonie avec l'organisme humain : on ne peut point s'en écarter beaucoup sans perdre cette précision qui donne aux mesures du temps une valeur si considérable.

Il résulte de cette analyse que les astronomes, les navigateurs et les physiciens qui sont certainement les plus intéressés aussi bien à la division décimale du temps qu'à la précision des mesures n'ont pas d'intérêt à adopter l'heure comme unité par cette considération physiologique qu'aucun sous-multiple décimal ne leur serait d'un usage commode. Et comme d'autre part l'adoption de l'heure comme unité introduirait dans les calculs le facteur compliqué 24 pour passer à l'unité naturelle, le jour, leur conclusion définitive serait le rejet du système.

Nous avons dit plus haut que ce système ne donnait satisfaction qu'à des besoins particuliers ; il est juste d'en citer quelques exemples.

Ce sont les opérations où la précision est médiocre et ne dépasse pas l'ordre de grandeur de la minute sexagésimale ; ainsi la cartographie serait simplifiée si les longitudes étaient représentées en heures et fraction décimale de l'heure, les calculs relatifs à la marche des trains, ainsi qu'on l'a vu plus haut, bénéficieraient aussi certainement de

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ette subdivision. C'est ce qui explique les œux de plusieurs Sociétés de Géographie : la pleine adhésion des Compagnies de hemins de fer, à la décimalisation de heure.

Mais cette satisfaction donnée à des intéêts si particuliers par cette solution mixte eut-elle être mise en balance avec les graves ıconvénients indiqués ci-dessus et avec ceux ue nous allons décrire ? Passons en effet ıaintenant à l'examen des conséquences de réforme proposée en ce qui concerne, non lus le mode d'observation, mais les résultats umériques qui dérivent du changement de unité de temps : on va voir que la perturbaon apportée par cette réforme n'est nullement ı rapport avec le faible bénéfice que cerıins calculs peuvent en tirer.

Tous les coefficients numériques qui dépenent de l'unité du temps seraient modifiés, ar ils devraient être multipliés par un facur complexe représentant le rapport de unité nouvelle à l'unité ancienne élevé à puissance définie par la *dimension* suivant ıquelle le temps entre dans le coefficient ınsidéré. Tous les nombres auxquels on st accoutumé depuis l'introduction du sysme métrique seraient altérés ; ainsi les itesses par seconde, les accélérations (comme gravité) seraient, du fait de la substitution u dix-millième d'heure (0,36 seconde) à la econde sexagésimale, multipliées respectiement par

$$0{,}36 \qquad 0{,}36^2 = 0{,}1296.$$

Non seulement les données scientifiques, ıais les coefficients employés dans les rts mécaniques, dans les calculs des ingéieurs, pour lesquels l'unité est la seconde ou minute, devraient être modifiés; ce serait la evision forcée de toutes les tables indusielles, de tous les aide-mémoires, en un ıot une véritable perturbation industrielle.

Mais ceux qui auraient le plus à souffrir u changement d'unité ce seraient sans contreit les électriciens : toutes les unités éleciques du système CGS seraient bouleversées, car l'unité de temps figure dans leur expression suivant des exposants variés, ainsi que le rappelle le tableau bien connu que nous reproduisons ici :

	DIMENSIONS DANS LE SYSTÈME		RAPPORT
	Électrostatique.	Électro-magnétique.	Dimensions en É. S. / Dimensions en É.M.
Quantité . .	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$	LT^{-1}
Intensité . .	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	LT^{-1}
Capacité . .	L	$L^{-1} T^2$	$L^2 T^{-2}$
Potentiel. .	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$M^{\frac{1}{3}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}$	$L^{-1} T$
Résistance .	$L^{-1} T$	LT^{-1}	$L^{-2} T^2$

A toutes les unités (sauf à l'unité électrostatique de capacité et à l'unité électromagnétique de quantité) il faudrait appliquer l'une des puissances $1, -1, -2, 2$ du facteur $0,36$, car la seconde sexagésimale est l'unité de temps dans le système CGS.

Ces perturbations sont fâcheuses, pourrait-on dire, mais elles sont la conséquence nécessaire de toute réforme; ce sont les inconvénients inhérents à tout état transitoire : une ou deux générations auront à en souffrir : mais quand le nouvel état de choses sera établi le souvenir même de ces inconvénients aura disparu.

Cette consolation serait acceptable si le réforme était un progrès réel, si la nouvelle unité de temps devait être définitive : mais on a vu qu'elle n'est qu'un simple expédient sans aucune base scientifique, un compromis qui ne donnera satisfaction qu'à des besoins très particuliers : on est donc loin de pouvoir envisager la réforme comme un sacrifice pénible pour le présent, mais profitable aux générations futures.

Dans ces conditions, en présence de la diffusion toujours croissante de la science électrique et de ses applications, en présence des avantages si précieux que le système CGS a apportés dans toutes les branches de la philosophie naturelle, il est évident que les électriciens, chaque jour plus nombreux, doivent comme les physiciens et les mécani-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ciens opposer la plus grande résistance à la réforme proposée : elle ne leur apporterait aucun bénéfice appréciable ; elle ne ferait que jeter la confusion dans un domaine où l'entente universelle a été si rapide et si profitable à l'œuvre commune.

On a déjà prévu cette objection et on a dit : « Mais il n'est pas nécessaire de changer la définition théorique des unités électriques : les électriciens garderont leurs étalons de mesure, tout en adoptant la subdivision décimale de l'heure dans une foule de déterminations ; ils le font d'ailleurs en mainte occasion puisqu'ils se servent couramment d'ampères-heures, de watts-heures, etc... »

Parler ainsi c'est conseiller la multiplicité des unités, la confusion dans les principes ; c'est marcher au rebours de tout ce grand mouvement si fructueux d'unification qui sera l'honneur et la récompense des physiciens de notre époque.

Tel est l'état de la question en ce qui concerne les chances d'adoption de l'heure décimalisée comme unité de temps. La réforme corrélative de la division de la circonférence en 240 degrés, conséquence logique de la précédente, est encore plus critiquable puisqu'elle tend à augmenter la confusion en ajoutant un nouveau système pour la mesure des angles aux deux qui existent déjà.

La commission ministérielle a vu le péril et a reculé devant cette innovation dangereuse : elle s'est bornée à recommander la division de la circonférence en 400 grades. Cette décision enlève, comme on le voit, beaucoup d'importance à celle qui concerne l'unité de temps puisque la corrélation nécessaire des deux mesures se trouve abolie.

En résumé, la seule solution à la fois simple et scientifique d'une division décimale, c'est le choix du jour et celui de la circonférence comme unités, car ce sont là les vraies *périodes*.

Le rôle des hommes de science doit être d'en préparer l'avènement non pas par des compromis, mais par l'adoption progressive de ce double système dans le domaine où ils sont maîtres des conventions (1). La réforme est en bonne voie en ce qui touche la circonférence, car beaucoup d'instituts géodésiques à l'exemple du service géographique de l'armée française ont adopté la division en 400 grades. Celle qui concerne le temps est plus difficile à diriger à cause de la nécessité de traduire en unités usuelles les résultats des calculs. On doit donc rendre hommage aux efforts tentés dans ce but, en particulier à ceux de la Société de Géographie de Toulouse, qui, sous l'impulsion de M. Rey-Pailhade, recommande franchement la division décimale du jour. Mais ce qu'il faut éviter avant tout, c'est de faire miroiter aux yeux de l'opinion incompétente des solutions, dites transitoires, qui n'ont aucune chance de devenir universelles : ces systèmes incomplets, tout en pouvant satisfaire certaines exigences, sont condamnés d'avance à un échec car ils augmentent la confusion des idées et les difficultés de calculs que leurs promoteurs ont le louable désir de faire disparaître.

(1) On voit que si les promoteurs du système C. G. S. avaient adopté pour unité le cent millième de jour (0,864 secondes) au lieu de la seconde sexagésimale, les unités n'auraient pas été très différentes comme grandeur de ce qu'elles sont actuellement et un grand pas aurait été fait dans la voie de l'unification décimale.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

SUR L'OBSERVATION ET L'INTERPRÉTATION CINÉMATIQUE

DE

Phénomènes découverts par M. le Dr Zeeman

PAR

A. CORNU

MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES

(Extrait de *L'Éclairage Électrique* du 6 novembre 1897.)

PARIS

GEORGES CARRÉ ET C. NAUD, ÉDITEURS

3, RUE RACINE, 3

1897

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

(Extrait de *L'Éclairage Électrique* du 6 novembre 1897.)

SUR L'OBSERVATION ET L'INTERPRÉTATION CINÉMATIQUE DE Phénomènes découverts par M. le Dr Zeeman

PAR

A. CORNU

MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES

Les phénomènes découverts par M. le Dr Zeeman, relatifs à l'action d'un champ magnétique sur les radiations émises par diverses sources lumineuses, ont donné lieu à quelques confusions qui me paraissent résulter de l'imperfection optique des modes d'observation. Les dispositifs suivants donnent une grande netteté à ces phénomènes et ne laissent aucun doute sur les conclusions définitives énoncées par l'auteur de la découverte (1).

La source lumineuse est la flamme d'un chalumeau oxhydrique léchant un fragment d'amiante imbibé de chlorure de sodium fondu, ou bien l'étincelle d'induction jaillissant entre deux électrodes métalliques; elle est placée entre les deux pôles d'un électro-aimant produisant un champ magnétique intense.

Une fente verticale placée près de la source lumineuse, ou dans le plan d'une image focale de cette source, dirige le faisceau sur un réseau concave Rowland de dix pieds de foyer, qui résout en raies brillantes le spectre de la source. Ce sont les raies spontanément renversables qui paraissent surtout déceler le phénomène.

(1) Dr P. ZEEMAN, Doublets and triplets in the spectrum produced by External Magnetic Forces, *Philos. Magazine*, vol. XLIV, juillet et septembre 1897, p. 55 et 255.

PREMIER DISPOSITIF

L'observation de l'une de ces raies se fait dans le plan focal d'un oculaire où l'on fixe une aiguille d'acier normalement aux raies spectrales. En arrière de l'oculaire est placé un prisme biréfringent de Wollaston (1) qui dédouble l'image de l'aiguille : le diamètre de cette aiguille, d'ailleurs légèrement conique, est choisi de manière que les deux images aient un bord commun. On obtient ainsi deux plages contiguës polarisées, l'une parallèlement, l'autre perpendiculairement aux raies spectrales.

1° *Le faisceau est observé normalement aux lignes de force magnétiques.*

Les deux pôles de l'électro-aimant (bobines de Faraday, modèle ordinaire de Ruhmkorff), terminés par deux cônes arrondis, peuvent être rapprochés à 8 mm ou 10 mm, et l'on observe dans un plan perpendiculaire à la droite horizontale qui les joint.

On règle le prisme biréfringent de manière que les raies spectrales n'éprouvent aucune discontinuité sur la ligne de séparation des deux plages lorsque le champ magnétique est nul.

(1) Un rhomboïde de spath pourrait à la rigueur remplacer le prisme de Wollaston ; mais il y aurait quelques précautions à prendre pour éviter l'effet de *parallaxe* provenant de l'inégalité de distance des plans de vision des deux images.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Dès qu'on excite l'électro-aimant on voit la raie s'élargir; mais dans les deux plages polarisées l'aspect de la raie est modifié.

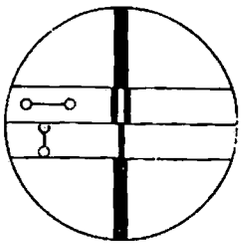


Fig. 1.

Dans la plage polarisée parallèlement aux lignes de force (ligne des pôles) la raie est dédoublée, c'est-à-dire présente une ligne sombre en son milieu; dans l'autre elle est, au contraire, amincie et se trouve exactement sur le prolongement de la ligne sombre précitée (1).

L'inversion des pôles magnétiques ne change en rien l'aspect du phénomène.

On en conclut que chaque raie simple primitive, non polarisée, est transformée en un triplet dont les composantes extérieures sont complètement polarisées parallèlement aux lignes de force et dont la composante intérieure est complètement polarisée dans un plan perpendiculaire. Le champ magnétique produit donc deux altérations de la période primitive, respectivement égales et de signe contraire, pour constituer les deux vibrations normales aux lignes de force sans modifier celle de la vibration parallèle à ces lignes.

2° *Le faisceau est observé parallèlement aux lignes de force.*

L'une des armatures polaires est percée, suivant la ligne des pôles, pour livrer passage à la lumière suivant la direction des lignes de force.

Pour faire l'observation on introduit, entre l'oculaire et le prisme biréfringent, une lame de mica quart-d'onde dont les sections principales sont à 45° de celles du prisme. Dès que le champ magnétique est excité on voit sur les deux plages la raie s'amincir et se briser sur la ligne de séparation (fig. 2).

Si l'on tourne la lame quart-d'onde d'un angle droit, la brisure se fait en sens inverse (fig. 3).

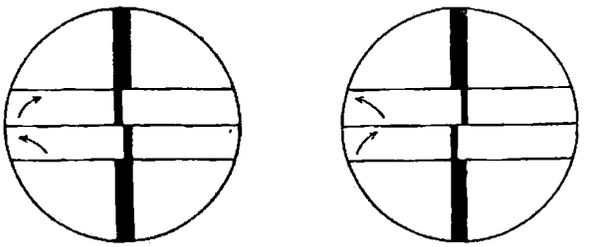


Fig. 2 et 3.

L'inversion des pôles intervertit le sens de la brisure. On reconnait en outre que le milieu des deux raies ainsi produites occupe sensiblement la position de la raie primitive : les deux altérations de la période sont donc égales et de signe contraire.

On rend le phénomène encore plus visible en fixant côte à côte, sur une même glace, deux lames quart-d'onde à sections homologues rectangulaires; un petit mouvement alternatif de translation imprimé à ces lames donne alternativement les deux apparences précitées. Un rythme convenable accroit encore la sensibilité de la méthode; car, lorsque l'œil fixe la raie de l'une des plages, le déplacement relatif de la raie correspondante de l'autre plage se trouve *physiologiquement* doublé.

Ces apparences prouvent que l'action du champ magnétique dédouble chaque radiation en deux faisceaux polarisés circulairement de sens inverse, le renversement des pôles renversant le sens de la rotation des vibrations circulaires.

En déterminant le sens de la rotation de chacun de ces faisceaux (1) on parvient à ré-

(1) Lorsqu'on opère avec la lumière de la soude chaque raie D_1, D_2 peut être plus ou moins *renversée*, c'est-à-dire plus ou moins dédoublée : il en résulte une complication apparente, mais qui ne change pas le caractère essentiel du phénomène.

(1) Cette détermination correcte n'est pas aussi facile qu'on pourrait le supposer : on risque de commettre des erreurs dont M. le Dr Zeeman lui-même a connu le danger (*loc. cit.*, p. 58). Dans l'Appendice qui suit j'indique diverses méthodes optiques qui permettent d'effectuer pratiquement et de vérifier ce genre de détermination.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

sumer l'ensemble des résultats dans l'énoncé très simple que nous donnons plus loin.

SECOND DISPOSITIF

Au lieu d'un long prisme biréfringent de Wollaston (nécessaire pour obtenir deux plages suffisamment larges) on peut utiliser un simple prisme de Nicol : le double champ s'obtient alors avec des lames de mica convenablement choisies et orientées.

1° *Faisceau observé normalement aux lignes de force.*

Dans le plan de l'oculaire on place deux lames *demi-onde* réglées sur la réfrangibilité de la raie brillante employée (1).

La lame supérieure a ses sections principales parallèles ou perpendiculaires à la direction des raies spectrales, la lame inférieure à $\pm 45°$ de ces raies. Si la section principale du prisme de Nicol est parallèle ou perpendiculaire à cette direction on obtient la même apparence (fig. 1) qu'avec le premier dispositif, parce que la seconde lame demi-onde fait tourner d'un angle droit les plans de polarisation des faisceaux qu'elle transmet.

2° *Faisceau observé parallèlement aux lignes de force.*

Dans le plan focal de l'oculaire on place deux lames *quart-d'onde :* la lame supérieure a ses sections principales à $+45°$, l'inférieure à $-45°$ de la direction des raies ; le prisme de Nicol étant réglé comme précédemment, on obtient la même apparence (fig. 2) qu'avec le premier dispositif.

Si l'on veut produire le balancement rythmé on dispose un second système en ordre inverse qu'on fixe à côté du premier dans l'ordre figuré comme il suit :

$+45°$	$-45°$
$-45°$	$+45°$

La translation alternative de ce système à droite et à gauche produit l'inversion et la duplication apparente si favorable à l'observation du phénomène.

INTERPRÉTATION CINÉMATIQUE DES PHÉNOMÈNES

L'ensemble des phénomènes peut se résumer en un énoncé conforme aux règles de Fresnel et d'Ampère.

Voici d'abord les règles auxquelles il est fait allusion :

1° Un faisceau de lumière ordinaire est la superposition de deux faisceaux indépendants égaux en intensité et polarisés à angle droit (Fresnel) ;

2° Un faisceau polarisé rectilignement est la superposition de deux faisceaux égaux en intensité et polarisés circulairement en sens inverses (Fresnel) ;

3° Une ligne de force magnétique équivaut à l'axe d'un solénoïde dont le pôle austral est à la gauche du courant (Ampère).

L'action du champ magnétique sur l'émission d'une radiation tend à décomposer les composantes rectilignes vibratoires susceptibles de se propager par ondes suivant des vibrations circulaires parallèles aux courants du solénoïde.

Les vibrations qui tournent dans le sens du courant du solénoïde sont accélérées, celles qui tournent en sens inverse sont retardées.

On reconnaît immédiatement le doublet observé dans le sens des lignes de force.

Dans le sens perpendiculaire à ces lignes, cet énoncé montre que la composante parallèle aux lignes de force (onde polarisée perpendiculairement à cette direction) est inaltérée : c'est la raie médiane du triplet ; les deux raies extérieures polarisées à angle droit de celle-ci sont plus difficiles à reconnaître. Cependant on aperçoit géométriquement leur existence : en effet, c'est ce qui subsiste des deux vibrations circulaires, l'une accélérée, l'autre retardée, en lesquelles le champ magnétique dédoublait la composante normale aux lignes de force : il y a extinction ou compensation mutuelle des deux compo-

(1) Le réglage correct de la biréfringence des lames de mica exige aussi des soins particuliers qui sont l'objet de quelques développements dans l'Appendice annoncé.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

santes longitudinales qui ne peuvent pas se propager (les deux ondes polarisées rectilignement sont produites par les vibrations circulaires de sens inverses, vues de *tranche*).

Cette interprétation purement cinématique, quoique un peu superficielle, montre que le phénomène découvert par M. le Dr Zeeman peut être expliqué par des considérations tout à fait indépendantes des idées électrochimiques de M. le professeur Lorentz, qui en sont l'origine, et se rapproche beaucoup des théories tourbillonnaires récemment remises en honneur.

Elle montre en outre la différence essentielle qui existe entre ce phénomène et celui du pouvoir rotatoire magnétique découvert par Faraday.

L'action du champ magnétique sur les sources où les ondes sont pour ainsi dire à l'*état naissant* s'exerce sur la *période vibratoire*, tandis que, dans l'expérience de Faraday, elle s'exerce sur la *vitesse de propagation* d'ondes lumineuses ayant déjà acquis leur régime permanent.

Je me suis assuré, avec les mêmes dispositifs, que la rotation magnétique du plan de polarisation n'est accompagnée d'aucune variation sensible de la période vibratoire de la lumière monochromatique employée, tandis que j'ai démontré autrefois (1) que la vitesse de propagation des deux ondes circulaires est modifiée : l'une est accélérée, l'autre est retardée de quantités sensiblement égales dans le sens correspondant à la règle d'Ampère.

APPENDICE

MÉTHODES OPTIQUES RELATIVES A L'OBSERVATION ET A LA DISTINCTION DES FAISCEAUX POLARISÉS CIRCULAIREMENT.

La distinction du sens de la rotation des faisceaux polarisés circulairement exige la construction d'un polariscope spécial comportant une lame mince cristallisée ayant une biréfringence particulière et des directions vibratoires déterminées. La question se ramène donc théoriquement à celle-ci : Étant donnée une lame mince cristallisée (mica, gypse, quartz, etc.), 1° déterminer les directions des sections principales, c'est-à-dire la trace des plans de polarisation des deux ondes doublement réfractées ; 2° distinguer celle qui est parallèle à la vibration de l'onde la plus rapide et celle qui est parallèle à la vibration de l'onde la moins rapide ; 3° déterminer la valeur de son pouvoir biréfringent.

La première détermination est extrêmement facile et bien connue ; elle s'effectue avec l'appareil de Norremberg ou tout autre appareil équivalent composé d'un analyseur et d'un polariseur croisés ; ce sont les directions qui ramènent l'extinction.

La seconde et la troisième opération sont beaucoup plus délicates : il existe en optique un grand nombre de procédés simples pour les exécuter ; la plupart sont fondés sur une détermination préalable pour laquelle on est obligé de s'en rapporter aux indications de l'opticien qui livre l'appareil (lames de quartz, micas, bilames diverses, compensateurs, etc.).

Il est donc nécessaire, si l'on veut éviter les méprises fâcheuses, d'employer une méthode qui ne laisse rien à une appréciation étrangère et qui permette à l'expérimentateur de ne s'appuyer que sur ses propres observations. La méthode des franges d'Arago et Fresnel, l'emploi d'un prisme de gypse (dont on peut cliver des lamelles), etc., fournissent aux physiciens rompus aux expériences délicates, des moyens de déterminer la biréfringence et de distinguer la vibration de l'onde la plus rapide ou la plus lente ; les opérations sont relativement simples, mais elles exigent une grande attention pour éviter les erreurs. Ces méthodes ne sont donc pas à conseiller aux personnes qui n'ont pas l'habitude de ce genre d'observations. Heureusement, par un choix convenable du phénomène pris comme point de départ, on peut éviter les opérations préliminaires du repérage de la lame cristalline et arriver à déterminer directement le sens de la rotation de la vibration circulaire transmise ou éteinte par un polariscope donné.

Voici la méthode qui me paraît conduire le plus facilement au but proposé.

(1) *Comptes rendus*, t. XCII, p. 1365. Les phénomènes découverts par M. le Dr Zeeman permettent d'étendre aux variations des périodes la loi conjecturale énoncée (*loc. cit.*, p. 1370) pour les variations des vitesses des deux ondes circulaires provenant du dédoublement d'une onde à vibration rectiligne.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Construction d'un polariscope pour les rayons polarisés circulairement.

Le polariscope se compose d'un prisme de nicol et de deux lames de mica quart d'onde fixés sur une glace et dont les sections principales homologues sont perpendiculaires entre elles; elles sont dirigées à ± 45° de leur bord commun.

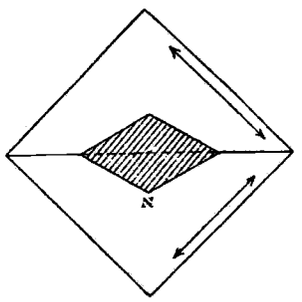


Fig. 4.

Le prisme de nicol N a l'une de ses diagonales parallèle à ce bord. — On reconnaît le deuxième dispositif employé ci-dessus (p. 243), l'oculaire peut être placé soit en avant, soit en arrière du polariscope, soit même interposé entre le nicol et les micas, suivant le mode d'observation adopté.

Si avec cet appareil on vise une image polarisée circulairement dans un certain sens, la partie de cette image qui tombe sur l'un des micas est éteinte, l'autre n'est pas altérée. Si l'image focale est polarisée circulairement en sens inverse, les parties éteintes et conservées sont interverties.

Il suffit donc, pour distinguer les deux champs, d'observer une fois pour toutes un faisceau polarisé circulairement de sens connu et de marquer la lame de mica qui le transmet sans altération.

Production d'images polarisées circulairement de sens connu.

On réalise deux images polarisées circulairement de sens connu à l'aide d'un prisme de quartz BAC (fig. 5) de rotation connue, par exemple dextrogyre, dont le plan bissecteur AP est normal à l'axe optique.

Rappelons qu'on appelle *dextrogyre* le quartz qui, transmettant un faisceau polarisé suivant l'axe, fait tourner le plan de polarisation de gauche à droite (c'est-à-dire dans le sens ordinaire du mouvement des aiguilles d'une montre) pour un observateur recevant directement dans l'œil, en DG, faisceau émergent.

D'après l'explication cinématique due à Fresnel du pouvoir rotatoire, le quartz dextrogyre est celui qui propage suivant l'axe les ondes à vibrations *circulaires droites* avec la plus grande vitesse. D'où il résulte que si l'on place sur un goniomètre de Babinet le prisme BAC au minimum de déviation, on observera deux faisceaux émergents ED, FG, correspondant à un seul faisceau incident, et le *moins dévié* sera polarisé circulairement *à droite*, le plus dévié, polarisé circulairement *à gauche* (fig. 5). Telle est l'observation qui permet de régler le polariscope; voilà donc le problème pratiquement résolu.

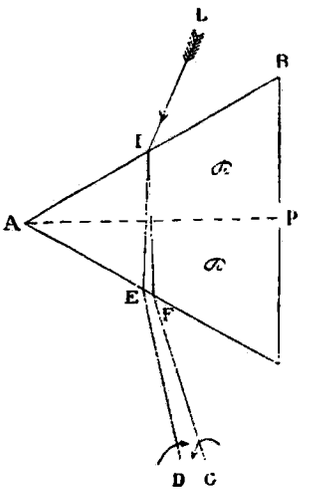


Fig. 5.

Mais il y a quelques difficultés secondaires. D'abord les deux faisceaux sont extrêmement rapprochés : ils font entre eux un angle d'environ 27" pour un prisme de 60°. Il est donc nécessaire d'avoir un prisme à faces bien planes et une lunette d'un fort grossissement (environ 40 à 50) pour dédoubler deux images si rapprochées. De plus il faut employer une lumière monochromatique : l'une des plus commodes est la raie verte du thallium (1) (sels thalliques dans l'alcool, ou étincelle d'induction entre deux pôles de thallium métallique).

(1) La lumière jaune de la soude peut également servir ; mais comme elle donne deux raies très rapprochées, elle peut amener au premier abord une certaine confusion; cependant comme l'écartement des deux faisceaux circulaires est environ 3 fois plus grand que celui des deux raies, il n'y a pas d'erreur définitive à craindre : le polariscope, d'ailleurs, enlève tout doute.

*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Toutes ces conditions sont d'ailleurs facilement réalisables.

Toutefois il sera plus commode d'observer des faisceaux plus écartés et d'éviter l'emploi de lumières monochromatiques : voici alors le dispositif à conseiller.

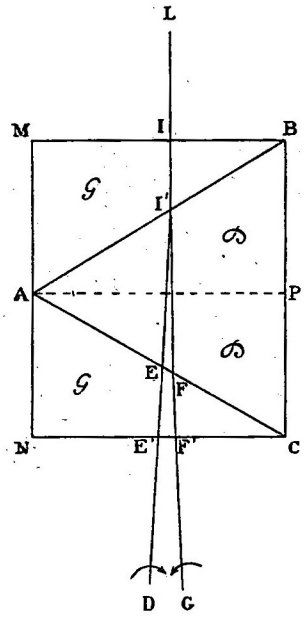


Fig. 6.

On ajoutera au prisme dextrogyre BAC, deux demi-prismes levogyres MBA, NCA, dont les faces MB et NC sont perpendiculaires à l'axe : ces prismes compensent par réfraction la déviation moyenne des faisceaux circulaires émergents, mais doublent leur divergence sans changer leur disposition relative par rapport à la base du prisme intérieur BAC. On opère avec de la lumière blanche.

Ce bloc rectangulaire de quartz, n'est autre chose que le célèbre *triprisme* à l'aide duquel Fresnel a vérifié son explication du pouvoir rotatoire. Ce triprisme classique est donc véritablement l'appareil fondamental de repère que doit posséder tout laboratoire où l'on utilise la polarisation circulaire.

Détermination du sens du pouvoir rotatoire d'un bloc de quartz épais présentant deux faces perpendiculaires à l'axe.

Nous avons admis que le sens du pouvoir rotatoire du prisme BAC employé était connu ainsi que celui des demi-prismes additionnels : il semble qu'on soit obligé de s'en rapporter à l'opticien sur ce point ; mais les vérifications sont faciles.

On peut d'abord vérifier que le triprisme est correctement construit; placé entre deux nicols *croisés* en lumière blanche parallèle, il donne un magnifique système de franges irisées parallèles aux arêtes des prismes : la frange centrale est *noire*, suivant le plan où les épaisseurs de quartz droit et gauche sont égales. On a ainsi la preuve que les deux systèmes de prismes sont de rotation contraire.

Reste à déterminer le sens de l'un d'eux. Si l'on accole les deux demi-prismes par leur face oblique AB AC, on constitue (fig. 7) un bloc à faces parallèles MB NC normales à l'axe optique, qui équivaut à un bloc unique, car le plan de séparation AB AC ne change en rien la marche des faisceaux transmis normalement à ces faces. L'épaisseur de ce bloc est trop grande pour que les colorations soient vives et que leur succession par rotation de l'analyseur soient caractéristique du sens de la rotation du quartz (1). Mais à l'aide d'un artifice très simple on tourne la difficulté. On place le bloc entre un polariseur et un analyseur; le faisceau de lumière blanche qui a traversé ces trois cristaux est projeté sur la fente d'un spectroscope : le spectre est alors sillonné de cannelures parallèles à la fente du collimateur, alternativement sombres et brillantes : c'est le phénomène décrit pour la première fois par Fizeau et Foucault. L'observateur fait alors tourner l'analyseur d'un mouvement uniforme, les cannelures se déplacent ; le sens de la rotation du bloc de quartz est alors défini d'après le sens du déplacement par la règle suivante qu'on déduit aisément de la loi de Biot (2) :

Le sens de la rotation du quartz est celui de la rotation de l'analyseur qui déplace les cannelures du rouge vers le violet.

Il n'y a aucune ambiguïté sur le sens de rotation de l'analyseur, c'est celui que verrait l'obser-

(1) Au Norremberg, avec la lumière monochromatique de la soude, les opticiens déterminent le sens du bloc de quartz à l'aide des spirales d'Airy ; mais il faut *admettre* le résultat géométrique relatif à la forme des courbes. Nous cherchons au contraire, ici, une méthode qui dispense d'admettre autre chose que les définitions de Fresnel.

(2) L'angle de rotation du plan de polarisation du quartz est proportionnel à l'épaisseur traversée et sensiblement en raison inverse du carré de la longueur d'onde.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

rateur s'il recevait directement le faisceau avant on entrée au spectroscope.

Ainsi on peut déterminer le nom du quartz qui onstitue les deux demi-prismes : le prisme en- ier BAC étant de nom contraire, se trouve ainsi léfini. Du reste on pourrait le déterminer direc- ement (1) en constituant ce prisme par deux lemi-prismes BAP, PAC obtenus par le sciage l'un bloc dextrogyre. C'est même sous cette forme ju'on doit recommander la construction du tri-

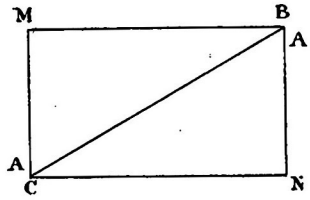


Fig. 7.

risme de Fresnel, parce qu'elle permet un grand nombre de combinaisons symétriques intéres- antes, en particulier celle que nous venons d'in- liquer et qui sert à la détermination directe du ens du pouvoir rotatoire du prisme BAC par econstitution du bloc primitif.

Le problème pratique est donc entièrement ésolu et permet même des vérifications nom- reuses auxquelles nous ne nous arrêterons pas.

Remarque. — Dans les expériences de M. le r Zeemann où l'on emploie un réseau Rowland ur métal, il ne faut pas oublier que la réflexion ui précède la diffraction renverse le sens de rota- ion des faisceaux polarisés circulairement.

Mesure de la biréfringence.

Vérification des lames quart-d'onde et demi-onde. – Il n'est pas superflu d'ajouter quelques mots sur e choix et la vérification des lames de mica *quart- onde* et *demi-onde*. On les obtient en clivant du nica ; parmi les lamelles les plus minces celles qui donnent la teinte gris bleuâtre sur la plate-forme supérieure du Norremberg et le jaune paille sur le miroir inférieur correspondent à une différence de marche de un quart de longueur d'onde du jaune moyen du spectre (1) : c'est la lame quart-d'onde correspondant à la lumière blanche moyenne. Les lamelles plus épaisses qui donnent le jaune paille en haut et en bas violet sombre (pourpre, violet, indigo) correspondent à la demi-onde moyenne. Mais l'appréciation de ces teintes est assez délicate ; de plus elle ne s'applique qu'à la lumière blanche prise en bloc. Il est donc nécessaire d'employer une méthode qui permette d'obtenir avec une ap- proximation mesurable la biréfringence corres- pondant à une couleur de réfrangibilité donné.

La méthode suivante s'applique à toutes les radiations visibles et même invisibles, soit ultra- violettes (à l'aide de la photographie), soit infra- rouges (à l'aide des procédés thermométriques ou bolométriques).

Elle est fondé sur l'emploi des spectres canne- lés : la théorie en est si simple qu'il est inutile de la rappeler ici.

1° *Quarts-d'Onde.* — Etant donnée une lamelle approximativement réglée d'épaisseur, il s'agit de déterminer quelle est la valeur de sa biréfringence correspondant à une radiation choisie ; cette biré- fringence se mesure par la fraction de longueur d'onde de cette radiation qui représente la diffé- rence de marche entre les deux ondes transmises. Voici comment on peut opérer :

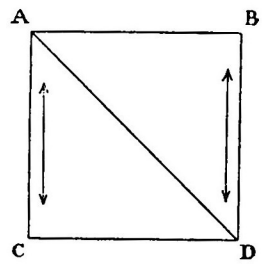


Fig. 8.

On découpe dans la lamelle à déterminer un carré ABCD (fig. 8) dont les côtés soient parallèles aux sections principales. On trace sur deux côtés opposés deux traits parallèles qui vont servir de repè- res, puis on coupe la lamelle en diagonale et on re- tourne l'une des moitiés de manière à reconstituer un carré (fig. 9). Dans cette seconde position les

(1) Avec un peu d'habitude des expériences d'optique, on eut très bien apercevoir les cannelures mobiles sans spec- oscope auxiliaire, avec le spectre même que fournit le risme BAC, lorsqu'il est sur le goniomètre au minimum de éviation. Le collimateur étant éclairé avec de la lumière lanche polarisée, on place un analyseur derrière l'oculaire e la lunette ; en réduisant la largeur du prisme à quelques illimètres pour ne mettre en jeu qu'une épaisseur bien défi- ie de ce prisme, on voit très nettement les cannelures et e sens de leur déplacement.

(1) Voir le *Traité d'optique physique* de BILLET, t. II, p. 13.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

traits repères, au lieu d'être parallèles sont perpendiculaires entre eux ; on fixe les lames ainsi placées avec des bandes gommées sur une lame de glace. On reconnait la disposition recommandée (fig. 9) pour le polariscope précédemment décrit.

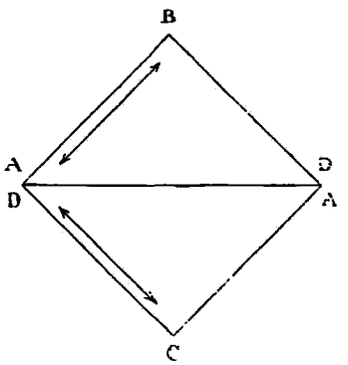


Fig. 9.

D'autre part on produit dans un spectroscope, un spectre cannelé en projetant sur la fente d'un collimateur un faisceau ayant traversé une lame de gypse ou de quartz parallèle à l'axe d'environ 1 mm d'épaisseur [1] placée entre deux nicols croisés. Les plans de polarisation de ces nicols doivent être l'un parallèle, l'autre perpendiculaire à la fente : la lame de gypse ou de quartz ayant ses sections principales à 45° de ces directions, donne le maximum d'éclat aux cannelures. Si l'on superpose l'une des lamelles de mica à cette lame de gypse (ou de quartz) de manière que les sections principales des deux cristaux soient parallèles, toutes les cannelures se déplacent dans un certain sens : si l'on substitue la seconde lamelle à la première (en élevant ou abaissant le système des deux lamelles) toutes les cannelures se déplacent en sens inverse, parce que les sections principales se trouvent alors croisées ; on obtient ainsi le double de l'effet de chaque lamelle.

Lorsqu'on relève, avec un micromètre, d'une part la position des cannelures, de l'autre le déplacement de chacune d'elles à droite ou à gauche par l'effet des deux lamelles, on reconnait que le double déplacement est plus petit dans la région du rouge que dans la région du violet même en tenant compte de l'écartement croissant des cannelures du rouge au violet. Cela montre qu'une lame de mica donnée ne peut être un *quart-d'onde* exact que pour une couleur particulière. On trouve aisément cette couleur : c'est la région du spectre où le double déplacement est égal à la moitié de la distance entre deux bandes noires ou deux bandes claires successives, car cette distance correspond à une différence de marche égale à la longueur d'onde moyenne de la région considérée ; le quotient du demi-déplacement par la distance des deux bandes voisines donne en fraction de longueur d'onde la mesure de la biréfringence de la lamelle.

Si l'on n'a pas besoin d'une précision très grande on peut se dispenser de toute mesure et de tout calcul : il suffit de disposer une petite lentille de projection de 8 à 10 cm de distance focale, qui projette l'image des lames de mica sur la fente du collimateur, la ligne de séparation des deux lamelles coupant transversalement la fente. En opérant avec soin cette mise au point, on voit le champ du spectre cannelé se diviser en deux parties, par une ligne sombre horizontale, image des bords contigus des deux lamelles ; au-dessus on a la *somme* des biréfringences du cristal (gypse ou quartz) et de la lame de mica ; au-dessous, la *différence* [1] (fig. 10).

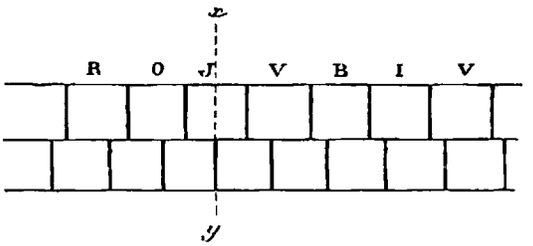


Fig. 10.

Avec ce système de cannelures on voit immédiatement pour quelle couleur la lame de mica est quart-d'onde : c'est celle où la bande supérieure et la bande inférieure sont distantes d'un demi-intervalle de bandes. On le constate avec précision en plaçant le réticule *xy* sur la bande sombre

[1] On choisit l'épaisseur de 0,75 mm à 1 mm pour avoir dans le spectre 8 à 10 bandes qui séparent le spectre en régions colorées, représentant à peu près les dénominations en usage ; c'est d'ailleurs un nombre suffisant pour permettre l'interpolation proportionnelle dans les mesures.

[1] Il ne faut pas s'inquiéter des franges pâles et serrées qui se superposent aux cannelures principales : ce sont les *anneaux transmis* des lames minces causés par l'interférence des faisceaux réfléchis aux deux surfaces de chaque lame. Elles apparaissent sur le spectre en l'absence de toute polarisation ; on les voit même en interposant une lame mince entre l'œil et l'oculaire ; elles augmentent de netteté et de largeur par l'inclinaison sur le rayon visuel.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

du bas, elle tombe sur le milieu de la bande claire du haut, ou inversement.

On classe ainsi les lamelles qu'on a clivées, suivant la couleur pour laquelle elles sont quart d'onde, et on choisit celle qui convient à l'expérience projetée.

2° *Demi-ondes.* — Les mêmes opérations s'appliquent exactement à la recherche de la couleur pour laquelle une lamelle donnée est *demi-onde :* le double déplacement produit alors une frange entière, c'est-à-dire que les cannelures du champ supérieur et inférieur se correspondent dans la région cherchée.

Remarque. — Il est nécessaire de présenter les lames de mica bien normalement aux faisceaux qui les traversent, sans quoi on s'expose à commettre des erreurs assez graves dans l'appréciation de leur biréfringence.

Autre dispositif. — Le dispositif précédent a l'avantage d'être facile à établir et même à improviser, puisqu'il ne comporte que l'emploi d'une lame de gypse d'environ 1 millimètre d'épaisseur, si facile à cliver. L'inconvénient (si c'en est un) est la nécessité de couper la lamelle à étudier suivant la forme représentée figure 9. Mais on peut renverser les rôles du cristal et de la lamelle et obtenir un mode d'observation encore plus commode. On fait tailler par un opticien une lame carrée de quartz parallèle à l'axe (fig. 8), de 0,75 mm à 1 mm d'épaisseur, l'axe optique étant parallèle à l'un des côtés ; sciée suivant la diagonale et disposée comme dans la figure 9 pour reconstituer un carré, elle forme un biquartz qui, placé comme précédemment entre deux nicols croisés, permet d'obtenir un spectre cannelé. Les cannelures se prolongent sans brisure de part et d'autre de la ligne sombre, projection de la ligne de séparation AD des deux moitiés du biquartz. Mais si l'on superpose la lamelle de mica à étudier de manière que ses sections principales soient parallèles à celles du quartz, les cannelures sont brisées et reproduisent la disposition de la figure 10 : l'interprétation en est la même.

Cette méthode d'observation exige la taille d'un cristal de quartz, mais elle a l'avantage très grand de n'exiger aucune taille des lamelles qu'on superpose au biquartz sans autre précaution que de les tourner progressivement dans leur plan, afin de chercher par tâtonnement la coïncidence des sections principales. Dans ce mouvement les franges se balancent de chaque côté de leur position primitive ; les élongations maximum correspondent à ces deux positions rectangulaires de coïncidence. Il suffirait d'ailleurs pour éviter tout tâtonnement de tracer, au Norremberg, sur la lame, la direction de l'une des sections principales.

Remarque. — Ce biquartz est particulièrement utile lorsqu'on veut opérer sur des radiations violettes ou ultra-violettes par la photographie ; l'appareil réglé une fois pour toutes donne en un seul cliché la mesure de la biréfringence de la lamelle superposée au biquartz, dans toute l'étendue du spectre photographié.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

SUR QUELQUES RÉSULTATS NOUVEAUX

RELATIFS AU

Phénomène découvert par M. le Dr Zeeman

PAR

A. CORNU

MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES

Extrait de *L'Éclairage Électrique* du 29 janvier 1898.

PARIS

GEORGES CARRÉ ET C. NAUD, ÉDITEURS

3, RUE RACINE, 3

—

1898

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

(Extrait de *L'Éclairage Électrique* du 29 janvier 1898.)

SUR QUELQUES RÉSULTATS NOUVEAUX

RELATIFS AU

Phénomène découvert par M. le Dr Zeeman

PAR

A. CORNU

MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES

Des perfectionnements successifs apportés à l'observation du phénomène découvert par M. le Dr Zeeman m'ont conduit à quelques résultats en désaccord avec les observations primitives et susceptibles de modifier les idées émises sur le mécanisme de ce phénomène.

La disposition générale de l'expérience est celle que j'ai décrite précédemment : la source lumineuse (flamme oxhydrique chargée de vapeurs salines, étincelle d'induction, etc.) est placée entre les deux pôles d'un fort électro-aimant, et l'image de cette source est projetée sur la fente d'un appareil spectral à grande dispersion muni des dispositifs biréfringents nécessaires.

I. Observation dans le sens des lignes de force

Les conclusions primitives relatives au dédoublement du faisceau de lumière naturelle en deux faisceaux circulaires subsistent entièrement [1].

Mais les mesures micrométriques ont montré que l'amplitude de ce dédoublement ne dépend pas exclusivement de la longueur d'onde de la radiation observée ; on peut résumer ainsi l'ensemble des observations :

L'action du champ magnétique sur la période vibratoire des radiations d'une source lumineuse paraît dépendre non seulement de la nature chimique de la source, mais aussi de la nature du groupe de raies spectrales auquel appartient chaque radiation et du rôle qu'elle joue dans ce groupe.

Il reste donc peu d'espoir d'exprimer la grandeur du dédoublement magnétique des raies d'un même spectre par une simple fonction de la longueur d'onde, ainsi qu'on avait pu l'espérer au début [1].

C'est d'ailleurs ce point de vue de l'existence de différences essentielles existant parmi les raies d'un même spectre, différences reconnues déjà dans diverses circonstances (raies spontanément renversables [2], groupes

(1) A. Cornu, *L'Éclairage Électrique*, t. XIII, p. 241, 6 novembre 1897.

(1) H. Becquerel, *L'Éclairage Électrique*, t. XIII, p. 419, 27 novembre 1897.

(2) A. Cornu, *Comptes rendus*, t. LXXIII, p. 332.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

hydrogéniques (1), etc.), qui m'a engagé à poursuivre l'étude minutieuse du phénomène de Zeeman comme offrant une voie nouvelle susceptible de mettre en évidence ces familles de raies que les apparences optiques font déjà soupçonner.

Effectivement l'observation de groupes bien connus par leur succession géométrique régulière révèle, sous l'action du magnétisme, des anomalies analogues à leur inégale facilité de renversement spontané.

Ainsi le groupe *b* du magnésium observé par vision directe, le groupe des trois raies bleues du zinc enregistré par clichés photographiques montrent que le dédoublement magnétique de leurs composantes va en augmentant suivant une loi rapide avec la réfrangibilité, bien que la longueur d'onde varie d'une quantité insignifiante de l'une à l'autre.

Contrairement à ce que les expériences de MM. Egoroff et Georgiewski pouvaient faire présumer, c'est la raie la plus facilement renversable qui donne ici le moindre dédoublement.

II. Observations dans la direction normale aux lignes de force

Le résultat principal, obtenu dans ce cas, modifie profondément sur un point important les conclusions primitives de MM. Zeeman et Lorentz.

1° *Sous l'influence du champ magnétique dans la direction normale aux lignes de force, une raie spectrale unique devient* QUADRUPLE (et non TRIPLE *comme* on l'avait annoncé primitivement). *Les deux raies extrêmes sont polarisées parallèlement aux lignes de force, les deux raies intermédiaires perpendiculairement à cette direction.*

2° *Le quadruplet ainsi formé est symétrique par rapport à la raie primitive et l'écart des deux raies de même polarisation est sensiblement proportionnel à l'intensité du champ magnétique* (1).

C'est le perfectionnement de l'appareil optique, bien plutôt que l'accroissement du champ magnétique, qui m'a permis d'effectuer le dédoublement de la raie médiane du *triplet* de Zeeman : ce dédoublement a dû déjà être aperçu par divers observateurs ; mais l'imperfection des images l'aura fait confondre avec un simple *renversement*.

D'ailleurs, il est le plus souvent très petit et en tout cas très inégal suivant les radiations choisies, même dans des groupes très serrés.

L'exemple le plus frappant et le plus facile à observer est celui que fournit le groupe D_1 D_2 du sodium.

La raie D_1 (fig. 1), la plus fine et la moins

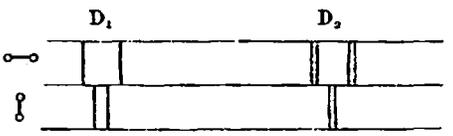


Fig. 1.

réfrangible des deux, se transforme en un *quadruplet* bien visible, car les deux raies médianes offrent un écartement moitié de celui des deux extrêmes. La raie D_2, plus large, plus facilement renversable, devient un triplet, parce que la raie médiane reste simple ; cette composante médiane laisse, il est vrai, supposer l'existence d'une légère ligne noire au milieu de sa largeur ; mais comme les deux autres composantes, de polarisation inverse, offrent la même apparence, le dédoublement reste indécis. Ainsi la différence essentielle de nature entre D_1 et D_2, décelée depuis longtemps par leur inégale facilité de renversement spontané, est accusée ici par un caractère singulièrement net, à

(1) A. Cornu, *Comptes rendus*, t. C, p. 1181.

(1) J'ai constaté également que, pour les champs magnétiques égaux, la distance des deux raies polarisées parallèlement aux lignes de force est sensiblement égale à la distance des raies polarisées circulairement ; mais la précision des mesures optiques ou magnétiques est encore trop imparfaite pour pouvoir démontrer cette égalité avec certitude.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

savoir l'inégale séparation des seules composantes médianes : cette séparation est très grande dans D_1, très faible dans D_2 ; au contraire, la distance des composantes extérieures est sensiblement la même dans les deux. N'est-on pas en droit de penser que l'action du champ magnétique atteint une particularité des plus intimes du mécanisme de la genèse des radiations ?

Le groupe *b* du magnésium composé de trois raies b_1, b_2, b_4 (1), est également instructif : on s'attendait à voir la raie la plus fine se transformer en quadruplet ; il n'en est rien, elle devient un simple triplet ; l'intermédiaire b_2, au contraire, se divise nettement en quatre : la première b_1, la plus facilement renversable, se sépare également en un quadruplet, mais elle est trop diffuse pour que le phénomène soit aussi net.

La raie verte du thallium est aussi trop large pour bien montrer le dédoublement de la raie médiane.

La raie verte (n° 4) du cadmium se divise également en quatre, mais il faut un champ magnétique intense pour bien voir cette subdivision.

Si l'on pouvait douter, d'après les seules observations effectuées dans la direction des lignes de force de l'action spécifique du champ magnétique sur les radiations émises, les résultats précités obtenus dans la direction normale à ces lignes lèvent tous les doutes. Il n'y a d'ailleurs à craindre aucune erreur provenant d'un imparfait réglage du dispositif optique ; en effet, dans la direction normale aux lignes de force, on n'utilise, comme appareil séparateur, qu'un simple rhomboïde de spath d'Islande. Quant au champ magnétique dont l'uniformité n'est jamais parfaite, je me suis assuré (en donnant aux pièces polaires les formes les plus diverses) que si l'intensité moyenne du champ varie suivant la configuration de ces pièces, la distance relative des composantes du *quadruplet* reste inaltérée ; le phénomène ne dépend donc pas d'une disposition particulière des surfaces équipotentielles du champ (1).

On pourrait enfin objecter, non sans quelque raison, que la faiblesse des déviations obtenues jusqu'ici rend très incertaine l'interprétation des images. Mais, dans mes expériences, cette objection n'est pas applicable ; grâce à diverses précautions résultant d'essais successifs, j'obtiens des images extrêmement lumineuses et fines séparées par des intervalles obscurs bien délimités (2).

J'arrive à ce resultat par l'emploi de l'excellent réseau plan qui m'a servi aux études de spectroscopie solaire (3) et que je dois à l'amabilité de M. le professeur Rowland ; j'ai pu constituer un spectroscope à grande

(1) Dans le groupe *b* du spectre solaire la raie b_3 appartient au nickel.

(1) A cette occasion, j'ai trouvé une méthode très curieuse pour rendre *visibles* les surfaces équipotentielles magnétiques au voisinage des pièces polaires dans les champs très intenses ; je ne sais si elle est connue, elle est en tout cas fort commode. Elle consiste à faire éclater, dans le champ à explorer, l'étincelle (non condensée) d'une forte bobine d'induction entre deux électrodes métalliques assez écartées ; le trait de feu n'est pas dévié, mais l'auréole violette est *soufflée ;* elle s'épanouit d'un côté seulement, suivant une nappe lumineuse striée en courbes concentriques, qui épouse sensiblement la forme de la surface équipotentielle passant par le point où se fait la décharge, et elle offre une aire d'autant plus grande que l'intensité du champ y est plus grande.

Cette nappe change de côté lorsqu'on inverse le sens du courant inducteur ou celui des lignes de force.

Avec des électrodes facilement volatilisables (thallium, sodium métallique, etc.) le phénomène est particulièrement brillant.

Si l'on rapproche beaucoup les électrodes, une seconde nappe, symétrique mais plus étroite, apparaît de l'autre côté, l'ensemble formant un papillon à ailes inégales ; elle est due évidemment à la décharge du courant induit direct, à basse tension.

(2) En particulier les raies D_1 D_2 de la soude s'obtiennent en réglant la proportion et la pression des gaz oxhydriques sur un globule de verre à la soude : avec un peu d'habitude on arrive à obtenir à volonté toutes les apparences spectrales connues, raies pâles et diffuses, raies brillantes et nettes, avec ou sans renversement.

Dans l'étincelle d'induction jaillissant entre deux pôles de sodium métallique, le métal ne s'enflamme pas, même avec une forte décharge condensée, mais les raies sont larges et renversées et l'on peut voir le quadruplet sombre sur fond brillant.

(3) *Ann. de Chimie et de Physique*, 6e série, t. VII, p. 5.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

dispersion (1) où le spectre du troisième ordre est particulièrement brillant, de sorte que les déviations atteignent une amplitude relativement considérable. Voici les nombres obtenus dans une observation faite dans un champ magnétique d'environ 13 000 unités C. G. S. :

Distances des raies extérieures du quadruplet D_1.	0,54 du micromètre oculaire.
Distances des raies intérieures du quadruplet D_1.	0,26 du micromètre oculaire.
Distances des raies D_1, D_2 à l'état naturel.	3,61 du micromètre oculaire.

Le pas de vis du micromètre est d'un demi-millimètre.

La plus grande distance des composantes séparées par l'action magnétique atteint donc presque $\frac{1}{6}$ de la distance des raies D_1 D_2.

Remarque. — Ce quadruplement inattendu de la période vibratoire d'une source monochromatique, normalement aux lignes de force, contrarie au premier abord la simplicité de l'interprétation cinématique si élégante de formation du triplet, qui conduisait à conclure que l'amplitude vibratoire des radiations n'était pas modifiée dans le sens des lignes de force. Mais, à la réflexion, je me suis convaincu que la nouvelle donnée expérimentale, devant laquelle il faut s'incliner, s'accorde néanmoins parfaitement avec l'idée qu'on doit se faire d'une ligne de force magnétique, laquelle est définie par un *vecteur* ou *quantité dirigée;* les propriétés du système complexe qu'elle représente dépendent donc du sens dans lequel elle est portée. Or, l'amplitude vibratoire est aussi une quantité dirigée ; il est donc naturel que l'influence réciproque de deux éléments parallèles, caractérisés tous deux par des vecteurs, puisse être de deux sortes suivant que les vecteurs en jeu sont de même signe ou de signe contraire. C'est évidemment un argument un peu abstrait, mais qui n'en impose pas moins une condition nécessaire. L'effet résultant peut être nul ; c'est ce qui résultait des observations imparfaites du début ; mais, n'étant pas nul, il a nécessairement deux valeurs égales et de signe contraire ; c'est justement ce que constatent les nouvelles observations, à savoir une variation de période symétrique de part et d'autre de la période primitive.

Si l'interprétation cinématique du phénomène devient un peu complexe, elle acquiert une symétrie très suggestive relativement à la constitution mécanique du champ magnétique.

Comme les composantes vibratoires normales aux lignes de forces, la composante parallèle à cette direction est dédoublée, et les périodes des deux parties sont altérées respectivement de quantités égales, de signe contraire et proportionnelles à l'intensité du champ.

En résumé, on voit combien de questions importantes, au point de vue des relations de l'électricité avec la lumière, soulèvent ces nouvelles expériences. Bien que les observations soient très délicates et encore fort incomplètes, j'ai cru devoir les faire connaître, me réservant de les poursuivre lorsque les moyens d'action dont j'espère disposer me permettront d'accroître encore la grandeur des effets, et par suite la précision des mesures.

III. — Description succincte de l'appareil spectral

L'appareil spectral est constitué par le spectroscope à grande dispersion que j'ai décrit autrefois au *Journal de Physique* (2e série, t. II, p. 53). La dispersion est produite par un prisme de flint à travers lequel, grâce à des réflexions convenables, les faisceaux passent quatre fois. La disposition de l'appareil présente un grand avantage sur celle de la plupart des spectroscopes employés : le même objectif servant à la fois

(1) *Journal de Physique*, 2e série, t. II, p. 53. Le spectroscope décrit dans cet article donnait déjà de très bons résultats ; mais, en remplaçant le prisme de flint par le réseau, la netteté s'est considérablement accrue. (Voir plus loin.)

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

pour le collimateur et pour la lunette, et le prisme toujours au minimum de déviation, le spectre est toujours au point dans toute son étendue sans autre manœuvre que celle d'un tambour divisé. Je renvoie à l'article précité pour la description de cet appareil qui donne à partir de la région de *b* une dispersion à peu près identique à celle du premier spectre d'un réseau Rowland concave de 10 pieds de foyer; pour les radiations plus réfrangibles, la supériorité dispersive du prisme sur le premier spectre du réseau devient de plus en plus grande, car dans le prisme, la dispersion grandit comme l'inverse du carré de la longueur d'onde, tandis que dans le réseau elle diminue proportionnellement à cette longueur d'onde.

J'aurais adopté définitivement ce spectroscope si le prisme de flint quoique assez pur n'avait pas quelques petits défauts; ces imperfections (qu'on pourrait d'ailleurs éliminer par une retouche des faces) enlevaient de la netteté aux images et obligeaient à diaphragmer beaucoup l'ouverture de l'objectif.

Description de l'appareil transformé. — Avant de me résoudre à reprendre cet ancien appareil (ce qui semblait un pas en arrière), j'avais essayé les spectres d'ordre supérieur du réseau concave : mais outre la faiblesse accidentelle de ces spectres dans les réseaux dont je disposais, l'*astigmatisme* inévitable du réseau concave, qui allonge démesurément les images dans le sens des traits, diminue beaucoup la clarté des images focales lorsque la source est très petite parallèlement à la fente. On verra plus loin qu'en effet on ne peut guère supposer à la source plus de 2 mm de hauteur. Pour bénéficier de tout le pouvoir dispersif des spectres d'ordre élevé des réseaux, il faudrait détruire cet astigmatisme si fâcheux; il est difficile d'y parvenir autrement qu'en adoptant un réseau plan. C'est ce à quoi je me suis arrêté et j'ai remplacé le prisme de flint par un réseau plan R (fig. 2).

Le collimateur est constitué par une fente F portée par un tube latéral dont l'axe est horizontal.

Le faisceau lumineux, concentré par une lentille achromatique L, traverse la fente et se réfléchit horizontalement sur un prisme R à réflexion totale qui l'amène sur l'objectif O, et sur le réseau R. La fente étant au foyer principal de l'objectif, le faisceau émergent

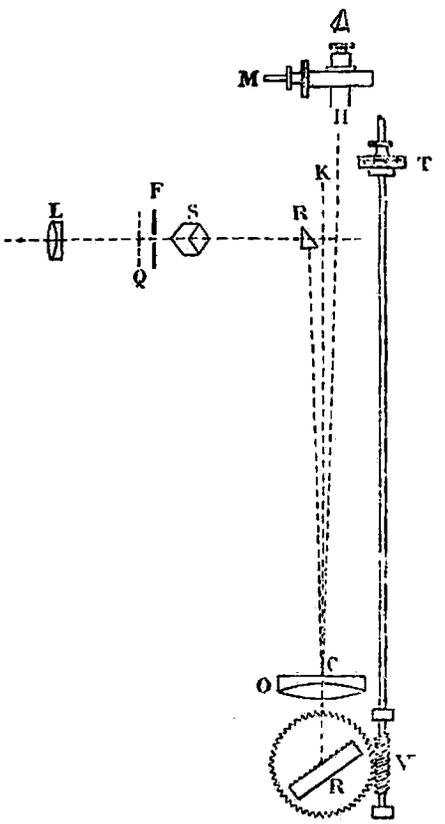


Fig. 2.

arrive parallèlement et se diffracte sur le réseau dont l'inclinaison est réglée de manière à renvoyer le faisceau diffracté choisi sur l'objectif dans la direction incidente. Une très légère inclinaison permet de diriger le faisceau devenu convergent *à côté* du prisme R (en réalité un peu au-dessus) dans la direction CH : l'image focale se fait dans le plan des fils du micromètre M.

L'observateur peut donc faire défiler les spectres successifs de droite ou de gauche en manœuvrant la vis tangente TV et choisir

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

celui des spectres qui donne à la fois la plus grande dispersion et plus grand éclat.

L'un des spectres du troisième ordre est celui qui m'a fourni les meilleures images. Comme l'objectif a 80 mm d'ouverture, il utilise toute la surface striée du réseau, et sa grande longueur focale (1,25 m) transforme la dispersion angulaire en une dispersion linéaire relativement considérable.

Mode d'observation. — Pour faire une observation on projette l'image de la source, formée par la lentille L, sur la fente F réduite à 2 mm de hauteur : un rhomboïde de spath d'Islande S, dont les faces d'entrée et de sortie sont normales au faisceau incident, produit deux images de la fente, polarisées à angle droit et placées l'une au-dessus de l'autre. L'appareil ainsi disposé est prêt pour les observations du phénomène de Zeeman dans le sens perpendiculaire aux lignes de force. On obtient alors l'effet reproduit (fig. 1) qui n'a pas besoin d'autre explication. Si l'on veut opérer dans le sens des lignes de force, on place en avant de la fente en Q (fig. 2) un double mica (enfermé entre deux lames de clinquant convenablement percées) dont les sections principales sont rectangulaires entre elles et à 45° de la section principale du spath d'Islande.

La ligne de séparation, qui doit être très fine, coupe normalement la fente à moitié de sa hauteur.

La figure 3 donne une idée de l'effet produit par le dispositif :

a est l'image de la fente du collimateur sans addition ni du spath S ni des quarts d'onde Q.

b représente l'ouverture de la lame de clinquant et la ligne de séparation des deux micas.

c est l'image de la raie spectrale avec l'ombre de la ligne de séparation des deux micas, située au milieu de sa longueur.

d est l'image précédente, dédoublée par l'adjonction du rhomboïde de spath d'Islande.

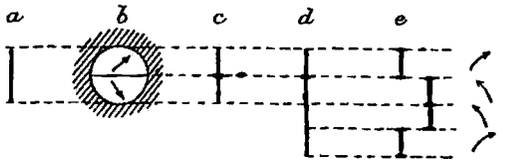


Fig. 3.

e est l'aspect de la raie spectrale de la source placée dans le champ magnétique et observée dans le sens des lignes de force. Les deux rayons circulaires de sens contraire sont alternativement éteints et l'on obtient une ligne brisée très favorable à l'observation.

C'est à l'aide de ce dispositif qu'on peut mesurer au micromètre à fil les déviations des raies spectrales. S'il s'agissait seulement de les observer qualitativement sans faire de mesures, on remplacerait l'ensemble du dispositif placé sur le collimateur par l'un de ceux que j'ai décrits précédemment (t. XIII, p. 241), et qui se mettent à l'oculaire.

L'un des avantages de l'appareil ainsi constitué c'est que le réglage de l'image focale effectué sur une raie choisie sert pour toutes les autres raies : en un mot, l'appareil est toujours *au point* aussi bien pour les radiations visibles que pour les radiations photographiques. Il est vrai que pour obtenir l'extrême perfection il faut tenir compte des légères aberrations d'achromatisme de l'objectif ; mais on y arrive aisément en manœuvrant le tube de tirage du collimateur qui est gradué en millimètres et mû par une crémaillère.

A. Cornu,
de l'Institut.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

LA

SYNCHRONISATION ÉLECTROMAGNÉTIQUE.

CONFÉRENCE FAITE DEVANT LA SOCIÉTÉ INTERNATIONALE DES ÉLECTRICIENS LE 24 JANVIER 1894,

PAR M. A. CORNU,

Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes.

Préambule.

« 1. L'étude de la synchronisation d'un système oscillant paraît au premier abord rentrer dans le domaine de la Mécanique plutôt que dans le cercle des sujets intéressant les électriciens; mais l'analyse de l'action périodique de forces empruntées le plus souvent au courant électrique, l'emploi constant de réactions électromagnétiques et surtout l'analogie des problèmes que soulève la synchronisation avec ceux qui s'imposent dans l'utilisation des courants alternatifs, constituent un lien immédiat très réel; ce lien, qui devient de plus en plus intime, à mesure qu'on pénètre plus avant dans l'étude des phénomènes similaires, finit, on le verra dans la suite, par relier les phénomènes en apparence les plus éloignés.

» 2. *Synchroniser* un système oscillant, c'est lui imposer une période d'oscillation différente de celle qu'il prendrait s'il était libre de toute perturbation extérieure.

» Pour la clarté de l'exposition (1), nous supposerons que le système oscillant est purement mécanique; nous verrons bientôt que les démonstrations sont indépendantes de cette hypothèse, et que les résultats s'étendent à des systèmes d'une nature toute différente.

» L'analyse du mécanisme de la synchronisation est fondée sur les propriétés des mouvements oscillatoires que nous allons brièvement rappeler.

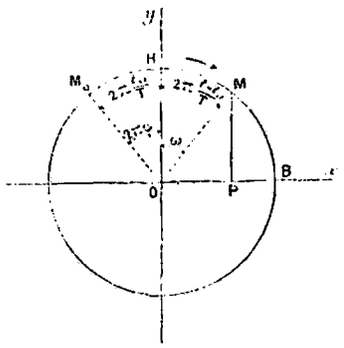
(1) Voir *Table des matières* du Mémoire, p. 63.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

1° OSCILLATION PENDULAIRE SIMPLE.

» 3. *Représentation géométrique du déplacement et de la vitesse.* — L'oscillation pendulaire simple est le mouvement que prend un point matériel P (*fig.* 1) qui se déplace sur une droite OB, lorsqu'il est attiré par un centre fixe O par une force proportionnelle à l'écart OP.

Fig. 1.



» La relation entre l'écart $OP = x$ et le temps t est définie par

$$x = A \sin 2\pi \frac{t - t_0}{T}. \tag{1}$$

» La vitesse à la même époque t est donnée par la dérivée

$$\frac{dx}{dt} = A \frac{2\pi}{T} \cos 2\pi \frac{t - t_0}{T}; \tag{2}$$

t_0 définit le temps écoulé depuis l'origine du temps jusqu'à l'époque où le point passe par sa position d'équilibre $x = 0$ avec une vitesse positive.

» Il est souvent plus commode de raisonner sur la représentation géométrique de ces deux éléments, déplacement et vitesse, que sur leur expression analytique. Voici cette représentation :

» *Si l'on considère un point décrivant une circonférence d'un mouvement uniforme, les coordonnées de ce point, rapporté à deux diamètres rectangulaires fixes, sont proportionnelles l'une au déplacement, l'autre à la vitesse.*

» En effet, les coordonnées du point M, tel que $HOM = \omega$, sont

$$x = R \sin\omega, \qquad y = R \cos\omega,$$

expression de même forme que x et $\frac{dx}{dt}$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

» Pour identifier la représentation géométrique avec les formules, il suffit de choisir :

» 1° Le rayon R du cercle HMB égal à l'*amplitude* A.

» 2° La vitesse angulaire de description égale à $\frac{2\pi}{T}$, correspondant au parcours de la circonférence en une *période* T.

» 3° La direction du diamètre OH, telle que l'arc M_0H soit l'espace parcouru pendant le temps t_0; M_0 la position du point descripteur à l'origine du temps $t = 0$. L'angle $\omega = HOM$, à une époque t, sera donc égal à $2\pi\frac{t - t_0}{T}$.

» D'où l'on conclut :

» *L'abscisse* OP *représente le déplacement à l'époque t.*

» *L'ordonnée* MP *multipliée par* $\frac{2\pi}{T}$ *représente la vitesse.*

» 4. *Phase.* — On remplace souvent le rapport numérique $\frac{t_0}{T}$ par la fraction φ, comprise entre *zéro* et *un*, qu'on nomme la *phase initiale* de l'oscillation, et l'on écrit

$$x = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \varphi\right). \tag{3}$$

» *La phase initiale est la fraction de période qui s'est écoulée depuis l'origine du temps jusqu'à l'époque du passage du point oscillant à sa position moyenne avec vitesse positive.*

» φ est précédé du signe —, si l'origine du temps précède le passage (*oscillation retardée*), et du signe + si elle le suit (*oscillation avancée*).

» L'origine du temps est, en général, choisie d'après un phénomène en relation avec la cause de l'oscillation : dans ce cas, la considération de la *phase* est de la plus haute importance. Elle correspond à l'angle de *décalage* (expression figurée, en usage parmi les électriciens), c'est-à-dire à l'*avance* ou au *retard angulaire* qu'une pièce rotative doit éprouver pour se mettre en coïncidence d'action avec un autre organe concentrique.

» 5. *Équation différentielle du mouvement.* — La fonction (1), qui représente l'oscillation pendulaire simple, est l'intégrale de

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

l'équation différentielle obtenue en écrivant que l'accélération du point matériel est proportionnelle à la force qui le sollicite.

» Dans le cas plus complexe du mouvement d'un corps solide autour d'un axe, on arrive à une équation différentielle de même forme, lorsque le déplacement angulaire θ est supposé très petit, la force (couple de torsion) restant toujours proportionnelle à l'écart. Appelant μ le moment d'inertie et r le coefficient de torsion, on a

$$\mu \frac{d^2\theta}{dt^2} = -r\theta, \tag{4}$$

dont l'intégrale est exprimée, comme (1), par

$$\theta = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \varphi\right),$$

en posant

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{r}{\mu}. \tag{5}$$

» A et φ sont les deux constantes arbitraires qui se déterminent par les valeurs initiales ($t = 0$) de l'amplitude A et de la vitesse $\frac{d\theta}{dt}$.

2° OSCILLATION AMORTIE.

» 6. *Équation différentielle.* — Lorsque le système matériel, oscillant autour d'un axe et sollicité par une force proportionnelle à l'écart angulaire, éprouve en même temps une résistance proportionnelle à la vitesse $\frac{d\theta}{dt}$ (due à la viscosité du milieu ambiant, au frottement intérieur du fil de torsion, à des réactions électromagnéiques, etc.), l'oscillation prend un caractère particulier.

» L'équation différentielle de ce mouvement devient, en effet,

$$\mu \frac{d^2\theta}{dt^2} = -r\theta - q\frac{d\theta}{dt}, \tag{6}$$

et l'intégrale, représentant l'écart angulaire à l'époque t, prend la forme

$$\theta = A e^{-\alpha t} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \varphi\right), \tag{7}$$

e étant la base des logarithmes népériens.

» La vitesse, dérivée de θ par rapport à t, peut s'écrire

$$\frac{d\theta}{dt} = -A e^{-\alpha t} \frac{2\pi}{T}\left[\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \varphi\right) - \frac{\alpha T}{2\pi} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \varphi\right)\right], \tag{8}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

en posant, pour abréger,

$$(9) \qquad \alpha = \frac{q}{2\mu}, \qquad \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{r}{\mu} - \left(\frac{q}{2\mu}\right)^2;$$

$\mathcal{A}_0$ et φ sont les deux constantes arbitraires déterminées par les conditions initiales.

» Ce mouvement, qui représente une *oscillation amortie*, contient un nouveau paramètre α, nommé *coefficient d'amortissement* : T et φ (période et phase) ont la même signification que précédemment. On voit que la période T n'est réelle que quand le coefficient d'amortissement ne dépasse pas une certaine limite (¹).

» La constante $\mathcal{A}_0$ n'a plus une définition aussi simple : à une époque quelconque t, le déplacement oscillatoire peut être assimilé, pendant un très petit intervalle de temps, à un mouvement pendulaire simple, dont l'amplitude serait $\mathcal{A}_0 e^{-\alpha t}$; de sorte qu'on peut définir l'*amplitude à l'époque t d'une oscillation amortie* par l'expression

$$a = \mathcal{A}_0 e^{-\alpha t}.$$

» *Cette amplitude décroît en progression géométrique lorsque le temps varie en progression arithmétique.* $\mathcal{A}_0$ représente donc, dans cette assimilation, l'amplitude à l'origine du temps.

» Après chaque période T, l'amplitude moyenne de l'oscillation diminue dans le rapport de $\mathcal{A}_0 e^{-\alpha t}$ à $\mathcal{A}_0 e^{-\alpha(t+T)}$ ou de 1 à $e^{-\alpha T}$: la quantité αT (qui est purement numérique) définit donc la rapidité de décroissance de l'amplitude oscillatoire.

» 7. *Représentation géométrique du déplacement et de la vitesse.* — La représentation géométrique de l'oscillation amortie, calquée sur celle de la projection d'un mouvement circulaire, résulte de la propriété suivante :

» *Si l'on considère un point décrivant une spirale logarithmique de telle sorte que le rayon vecteur qui le joint au pôle de la spirale tourne d'un mouvement angulaire uniforme, les coordonnées de ce point, rapporté à deux rayons vecteurs fixes faisant entre eux l'angle caractéris-*

(¹) Lorsque T est imaginaire, le mouvement n'est plus oscillatoire; à la limite, qui correspond à une valeur réelle, mais infinie, le mouvement est dit *apériodique*.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

tique de la spirale, sont proportionnelles l'une au déplacement, l'autre à la vitesse.

» (On sait que la propriété caractéristique de la spirale logarithmique est de couper son rayon vecteur sous un angle constant.)

» En effet, on a dans le triangle OMP (*fig.* 2), en posant $OP = x$, $MP = y$, $OM = \rho$,

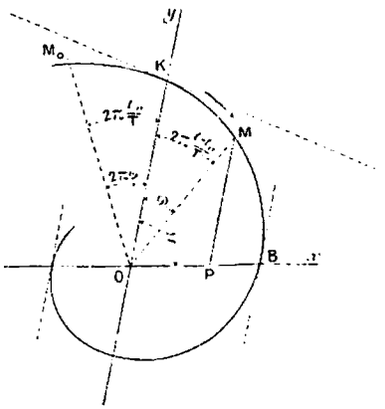
$$\frac{x}{\sin\omega} = \frac{y}{\sin(\zeta - \omega)} = \frac{\rho}{\sin\zeta},$$

d'où

(10) et (11) $$x = \frac{\rho}{\sin\zeta}\sin\omega, \qquad y = \frac{\rho}{\sin\zeta}(\sin\zeta\cos\omega - \cos\zeta\sin\omega),$$

expressions de même forme que θ et $\frac{d\theta}{dt}$.

Fig. 2.



» 8. Pour identifier cette représentation géométrique avec les formules (7) et (8), on poursuit l'analogie avec les éléments correspondants de la figure circulaire :

» 1° L'angle ω du rayon vecteur OM avec l'axe OK représente $2\pi\left(\frac{t}{T} - \varphi\right)$, comme dans le cercle, car la vitesse angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ de OM doit être égale à $\frac{2\pi}{T}$ puisqu'il accomplit une révolution par période T,

(12) $$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2\pi}{T}, \qquad \text{d'où} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}t + C.$$

» 2° La constante C est donc égale à $-2\pi\varphi$: on vérifie que $2\pi\varphi$ ou $2\pi\frac{t_0}{T}$ représente l'angle, avec l'axe OK, du rayon vecteur OM_0 à l'origine du temps.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

» 3° L'angle ζ des axes se détermine par identification de y et $\frac{d\vartheta}{dt}$, c'est-à-dire des parenthèses de (8) et (11).

» On en tire

$$\cot\zeta = \frac{\alpha T}{2\pi}. \tag{13}$$

» 4° L'équation d'une spirale logarithmique est de la forme

$$\rho = R e^{-\beta(\omega-\omega_0)}; \tag{14}$$

l'exponentielle se détermine en l'identifiant avec celle de la formule (7). Substituant, en effet, dans l'exposant la valeur de ω (12), il vient

$$\beta\left(2\pi\frac{t}{T} + C - \omega_0\right) = \alpha t, \tag{15}$$

d'où

$$C = \omega_0, \qquad \beta = +\frac{\alpha T}{2\pi}.$$

» On reconnaît que $\beta = \operatorname{tang}\zeta$; or ζ est l'angle caractéristique de la spirale ou l'angle aigu que fait la courbe avec le rayon vecteur, car cet angle a pour tangente trigonométrique

$$-\frac{d\rho}{\rho\, d\omega} = \frac{\beta R e^{-\beta(\omega-\omega_0)}}{R\beta e^{-(\beta\omega-\omega_0)}} = +\frac{1}{\beta} = \operatorname{tang}\zeta. \tag{16}$$

» Il doit en être ainsi, car la tangente parallèle à l'axe des y doit avoir son point de contact B sur l'axe des x pour que l'ordonnée correspondante qui représente la vitesse soit nulle quand le déplacement est maximum.

» 5° Enfin la constante R de l'équation de la spirale est

$$R = b\sin\zeta. \tag{17}$$

» En résumé :

L'abscisse OP *représente le déplacement* 0 *à l'époque t.*

L'ordonnée MP *multipliée par* $\frac{2\pi}{T}$ *représente la vitesse angulaire* $\frac{d\vartheta}{dt}$.

» *Remarque.* — L'angle ζ tend vers un angle droit à mesure que le produit αT tend vers zéro : ainsi, pour $\alpha T = \frac{1}{100}$, on trouve

$$\operatorname{tang}\zeta = 2\pi \times 100, \qquad \zeta = 89^\circ 49' = 90^\circ 11',$$

angle qu'on distingue à peine, à la vue, d'un angle droit.

» Les spires sont alors extrêmement resserrées et presque rigoureusement circulaires.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

PREMIÈRE PARTIE. — Régime permanent.

LA FORCE PÉRIODIQUE SYNCHRONISANTE EST QUELCONQUE.

» 9. *Équation différentielle du mouvement modifié par une force périodique.* — Aux deux groupes des forces déjà considérées (forces proportionnelles à l'écart et à la vitesse) supposons qu'il s'ajoute une troisième force périodique dont le moment est F et la période Θ, Θ étant différent de T, période propre du système supposé affranchi de toute action périodique. Le système oscillant va prendre alors un mouvement très complexe que nous allons déterminer. L'équation différentielle de ce mouvement sera

$$\mu\frac{d^2\theta}{dt^2}+q\frac{d\theta}{dt}+r\theta=F. \tag{18}$$

» Toute fonction périodique, finie et continue, étant développable par la série de Fourier, on aura le développement suivant, qu'on peut mettre sous l'une ou l'autre des deux formes

$$F=\sum_{n=1}^{n=\infty}S_n\sin 2\pi\frac{nt}{\Theta}+\sum_{n=1}^{n=\infty}C_n\cos 2\pi\frac{nt}{\Theta}=\sum_{n=1}^{n=\infty}B_n\sin 2\pi\left(\frac{nt}{\Theta}-\varphi_n\right). \tag{19}$$

» 10. *Intégrale générale de l'équation.* — L'intégrale de cette équation est représentée par

$$\theta=\mathfrak{A}e^{-\alpha t}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\varphi\right)+\sum_{n=1}^{n=\infty}\mathfrak{B}_n\sin 2\pi\left(\frac{nt}{\Theta}-\psi_n\right). \tag{20}$$

» On démontre aisément ce résultat en remarquant que chaque terme du second membre de l'équation (18), considéré isolément, conduit immédiatement à une solution particulière : ainsi, en posant pour le terme général d'ordre n

$$\theta=\mathfrak{B}_n\sin 2\pi\left(\frac{nt}{\Theta}-\psi_n\right),$$

et substituant dans le premier membre, on obtient la condition

$$\mathfrak{B}_n\left[\left(-\mu\frac{4\pi^2n^2}{\Theta^2}+r\right)\sin 2\pi\left(\frac{nt}{\Theta}-\psi_n\right)+q\frac{2\pi n}{\Theta}\cos 2\pi\left(\frac{nt}{\Theta}-\psi_n\right)\right]=B_n\sin 2\pi\left(\frac{nt}{\Theta}-\Phi_n\right).$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

qui se décompose évidemment en deux lorsqu'on égale à zéro les coefficients de $\sin 2\pi\frac{nt}{\Theta}$ et de $\cos 2\pi\frac{nt}{\Theta}$. En ayant égard aux équations (9), on les met aisément sous la forme

$$\mu\,\mathfrak{V}_n\left\{\left[\alpha^2+4\pi^2\left(\frac{1}{T^2}-\frac{n^2}{\Theta^2}\right)\right]\cos 2\pi\psi_n-2\alpha\,\frac{2\pi n}{\Theta}\sin 2\pi\psi_n\right\}=B_n\cos 2\pi\Phi_n,$$

$$\mu\,\mathfrak{V}_n\left\{2\alpha\,\frac{2\pi n}{\Theta}\cos 2\pi\psi_n+\left[\alpha^2+4\pi^2\left(\frac{1}{T^2}-\frac{n^2}{\Theta^2}\right)\right]\sin 2\pi\psi_n\right\}=B_n\sin 2\pi\Phi_n.$$

D'où l'on tire

$$(21)\qquad \mathfrak{V}_n=\frac{B_n}{\mu\sqrt{\left[\alpha^2+4\pi^2\left(\frac{1}{T^2}-\frac{n^2}{\Theta^2}\right)\right]^2+4\alpha^2\frac{4\pi^2n^2}{\Theta^2}}},$$

$$(22)\qquad \begin{cases} \sin 2\pi(\Phi_n-\psi_n)=2\alpha\,\dfrac{2\pi n}{\Theta}\,\dfrac{\mu\mathfrak{V}_n}{B_n}, \\ \cos 2\pi(\Phi_n-\psi_n)=\left[\alpha^2+4\pi^2\left(\dfrac{1}{T^2}-\dfrac{n^2}{\Theta^2}\right)\right]\dfrac{\mu\mathfrak{V}_n}{B_n}, \\ \operatorname{tang} 2\pi(\Phi_n-\psi_n)=\dfrac{2\alpha\,\dfrac{2\pi n}{\Theta}}{\alpha^2+4\pi^2\left(\dfrac{1}{T^2}-\dfrac{n^2}{\Theta^2}\right)}. \end{cases}$$

» L'intégrale complète se compose ainsi de la solution (7) relative au premier membre, avec ses deux constantes arbitraires, augmentée de la somme des solutions particulières correspondant à chacun des termes du second membre.

» 11. *Influence décroissante des termes d'ordre croissant.* — L'écart 0 est donc la superposition de l'oscillation amortie *libre* et d'une somme d'oscillations pendulaires simples de périodes décroissant comme l'inverse de la série des nombres entiers

$$\frac{\Theta}{1},\quad \frac{\Theta}{2},\quad \frac{\Theta}{3},\quad \ldots,\quad \frac{\Theta}{n},\quad \ldots,$$

chacune ayant respectivement une amplitude $\mathfrak{V}_n$ et une phase ψ_n dérivant uniquement du terme correspondant B_n et Φ_n de F suivant les formules (21) et (22).

» La présence des facteurs n^2 et n^4, au dénominateur des expressions (21) et (22), montre que les termes d'ordre élevé ont une influence rapidement décroissante, ce qui donne une importance

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

relative très grande aux premiers termes $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, ... de la série dans l'intégrale du mouvement (20).

» 12. *Condition de synchronisation.* — La simple inspection de l'intégrale (20) établit immédiatement la proposition suivante, qui montre dans quelle condition la synchronisation s'établit en *régime permanent*.

» *Pour qu'un système oscillant puisse être synchronisé, il faut et il suffit que le mouvement libre du système soit une oscillation amortie : le régime stable est d'autant plus rapidement atteint que le coefficient d'amortissement est plus grand.*

» En effet, le premier terme de l'intégrale (20), qui représente l'oscillation libre amortie dont l'amplitude est $\mathfrak{A}e^{-\alpha t}$, décroît avec le temps d'autant plus vite que α est plus grand; les autres termes, au contraire, sont des oscillations pendulaires simples, dont l'amplitude est constante et indépendante du temps. Il en résulte que ces termes, dont la période est Θ ou un sous-multiple de Θ, ont une grandeur permanente, tandis que le premier, dont la période est T, s'annule forcément au bout d'un temps suffisant : la force synchronisante finit donc par imposer sa période, quelque différente quelle soit de la période propre au système, c'est-à-dire par synchroniser le système oscillant, sans autre condition que celle de l'existence d'un coefficient d'amortissement appréciable ($\alpha > 0$). On peut exprimer brièvement la proposition ci-dessus en disant :

» *Il n'y a pas de synchronisation sans amortissement.*

» 13. *Objection apparente.* — Il semble cependant que la synchronisation ne soit jamais atteinte, puisque l'exponentielle $e^{-\alpha t}$ ne devient rigoureusement nulle que quand le temps est infini. Cette condition d'extinction complète, exacte au point de vue théorique, est pratiquement remplie après un temps qui peut être relativement très court. Quelques exemples numériques le feront comprendre. Prenons pour unité de temps la durée d'une oscillation T du système libre et calculons le nombre N d'oscillations nécessaires pour réduire l'amplitude à la fraction $\frac{1}{m}$ de sa valeur initiale (correspon-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

dant à N = 0); l'équation de condition sera

$$\mathcal{A}e^{-\alpha NT} = \frac{1}{m}\mathcal{A} \qquad \text{ou} \qquad me^{-\alpha NT} = 1,$$

ou encore

$$\log m - \alpha NT \log e = 0, \qquad \text{d'où} \qquad N = \frac{\log m}{\log e}\frac{1}{\alpha T}.$$

Si l'on adopte $m = 1000$ qui correspond à la réduction au millième de l'amplitude initiale (ce qui pratiquement équivaudra le plus souvent à l'extinction complète), il vient

$$N = \frac{3}{0,4343}\frac{1}{\alpha T} = \frac{6,908}{\alpha T},$$

ce qui veut dire que, si αT était égal à l'unité, l'amplitude de l'oscillation libre serait réduite au millième de sa valeur initiale, après 6,9, soit sept périodes.

» 14. *Exemples montrant la petitesse ordinaire du produit* αT. — Cet exemple montre en même temps que la condition $\alpha T = 1$ représente un amortissement énorme, car l'oscillation serait pratiquement éteinte, après sept périodes : aussi, dans la plupart des cas expérimentaux, trouvera-t-on pour αT des valeurs très petites de l'ordre de $\frac{1}{100}$ ou $\frac{1}{1000}$, sans que l'extinction cesse pour cela d'être assez rapide.

» En voici quelques exemples : un balancier d'horloge astronomique battant la seconde ($T = 2^s$), dégagé de l'action du rouage moteur, et abandonné à lui-même après avoir été écarté de la verticale, offre, dans l'extinction graduelle de l'amplitude, la loi exponentielle de l'oscillation amortie. Supposons (ce qui est déjà une rapidité d'extinction supérieure à la moyenne) que l'amplitude soit réduite à moitié, en une heure ($N = 1800$); on aura pour calculer αT la relation

$$e^{-\alpha T.1800} = \frac{1}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha T = 0,00256 = \frac{1}{391}.$$

Ainsi αT, pour les balanciers d'horloge, est de l'ordre de $\frac{1}{500}$.

» Les diapasons employés en acoustique offrent, pour αT, des valeurs de même ordre, malgré la rapidité apparente avec laquelle les oscillations s'éteignent; la petitesse de la fraction de seconde que représente T compense la grandeur du coefficient α qui peut

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

être assez grand sans que αT cesse d'être très petit. Ainsi un électrodiapason de cent périodes par seconde perdant la moitié de son amplitude en dix secondes ($N = 1000$) donnerait

$$\alpha T = \frac{\log 2}{1000 \log e} = 0,000693 1 = \frac{1}{1443}.$$

» Inversement, on peut se demander au bout de combien de périodes serait réduite à moitié l'amplitude de ce diapason, si le produit αT n'était que $\frac{1}{100}$; on aurait la condition

$$N = 100 \frac{\log 2}{\log e} = 69,31 = 0^s,6931,$$

ce qui ferait $\frac{2}{3}$ de seconde. On voit que la valeur $\alpha T = \frac{1}{100}$, quoique très petite, donnerait une rapidité d'extinction énorme.

» Les défauts de construction, particulièrement l'insuffisance des encastrements lorsque l'oscillation est produite par l'élasticité, accroissent beaucoup la valeur de αT; citons comme exemple le trembleur-inducteur qui sera décrit plus loin (22), formé d'un ressort large, court et très médiocrement encastré; son amplitude se réduit à moitié en cinq secondes; comme sa période $T = \frac{1}{6}$ de seconde, on a

$$\alpha T = \frac{\log 2}{30 \log e} = 0,0231 = \frac{1}{43,3}.$$

» La consolidation de l'encastrement du ressort rendrait facilement ce produit quatre à cinq fois moindre.

» Mais αT cesse d'être très petit dans certains dispositifs où l'on s'efforce d'accroître l'amortissement, soit par la viscosité du milieu, soit par les réactions électromagnétiques. Ainsi, dans les galvanomètres qu'on cherche à rendre *apériodiques*, comme la valeur de la période T grandit jusqu'à l'infini, par suite de l'accroissement de α, le produit αT peut atteindre toute grandeur donnée. Il est vrai que le système, n'étant plus oscillatoire, ne rentre plus directement dans le genre d'appareils qu'on se propose de synchroniser.

» 15. *Définition de l'amortissement : il est le plus souvent très petit.* — En résumé, dans les problèmes relatifs aux oscillations amorties, c'est moins le coefficient d'amortissement que le nombre αT (produit de ce coefficient par la période) qui joue le rôle principal

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

comme constante caractéristique; et cette constante est le plus souvent très petite par rapport à l'unité; nous appellerons, pour abréger, *amortissement* ce produit αT.

» On en peut calculer *a priori* la valeur numérique dans un système dont on connaît les coefficients μ, q, r, d'après les relations (9) : elle est donnée par une formule très simple, lorsqu'on peut négliger le carré de $\alpha = \frac{q}{2\mu}$ dans la valeur de $\frac{4\pi^2}{T^2}$; on a alors

$$\alpha T = \pi \frac{q}{\sqrt{r\mu}}. \tag{23}$$

expression qui montre clairement pourquoi, dans les systèmes dont le moment d'inertie μ et le couple de torsion r sont grands, le nombre αT est petit, à moins que le moment q de la résistance proportionnelle à la vitesse ne soit intentionnellement exagéré.

» On verra plus loin (60), à propos du problème corrélatif des oscillations électriques, que le produit αT est également très petit dans les conditions ordinaires des expériences.

LA FORCE SYNCHRONISANTE EST SINUSOÏDALE.

16. *L'oscillation synchronisée est également sinusoïdale.* — Si le développement de la série de Fourier (19), qui exprime le moment de la force synchronisante, se réduit aux termes du premier ordre ($n=1$) sous l'une ou l'autre des deux formes équivalentes

$$F = S_1 \sin 2\pi \frac{t}{\Theta} + C_1 \cos 2\pi \frac{t}{\Theta} = B_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{\Theta} - \Phi_1\right), \tag{24}$$

la force est dite *sinusoïdale*. Elle représente un type de forces réalisé d'une manière très approchée dans des conditions fort diverses.

» La loi du mouvement du système oscillant est donnée toujours par l'intégrale (20) qui se réduit alors à

$$\theta = \mathfrak{a} e^{-\alpha t} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \varphi\right) + \mathfrak{B}_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \psi_1\right). \tag{25}$$

La valeur de $\mathfrak{B}_1$ et celle de ψ_1 s'obtiennent en faisant $n = 1$ dans les expressions (21) et (22) :

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{B_1}{\mu \sqrt{\left[\alpha^2 + 4\pi^2 \left(\frac{1}{T^2} - \frac{1}{\Theta^2}\right)\right]^2 + 4\alpha^2 \frac{4\pi^2}{\Theta^2}}}, \tag{26}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et

$$(27)\quad \begin{cases} \sin 2\pi(\Phi_1-\psi_1) = 2\alpha\dfrac{2\pi}{\Theta}\dfrac{\mu\mathfrak{B}_1}{B_1}, \\ \cos 2\pi(\Phi_1-\psi_1) = \left[\alpha^2+4\pi^2\left(\dfrac{1}{T^2}-\dfrac{1}{\Theta^2}\right)\right]\dfrac{\mu\mathfrak{B}_1}{B_1}, \\ \operatorname{tang} 2\pi(\Phi_1-\psi_1) = \dfrac{2\alpha\dfrac{2\pi}{\Theta}}{\alpha^2+4\pi^2\left(\dfrac{1}{T^2}-\dfrac{1}{\Theta^2}\right)}. \end{cases}$$

» On en conclut donc :

» *Lorsque la force synchronisante est sinusoïdale, l'oscillation synchronisée devient également sinusoïdale (ou pendulaire simple) avec une amplitude proportionnelle à celle de la force synchronisante.*

» En effet, l'équation (25), après un temps suffisamment long, si l'amortissement n'est pas nul ($\alpha > 0$), se réduit à son second terme.

» 17. *L'oscillation synchronisée est toujours en avance sur la force synchronisante* (¹). — Ce résultat s'obtient en discutant l'expression de $\Phi_1 - \psi_1$; on peut l'énoncer ainsi :

» *L'oscillation synchronisée et la force synchronisante présentent toujours une différence de phase causée par l'existence de l'amortissement : cette différence de phase (mesurée par la fraction de période qui s'écoule entre les époques où l'oscillation et la force atteignent leur maximum de même signe) correspond toujours à une avance de l'oscillation synchronisée sur la force synchronisante.*

» On remarque d'abord que $\Phi_1 - \psi_1$ représente bien avec son signe la différence de phase définie ci-dessus : soit en effet τ l'époque à laquelle la *force* passe par son maximum positif : B_n étant essentiellement positif, on aura, en se bornant aux valeurs de l'argument comprises entre zéro et 2π,

$$\sin 2\pi\left(\frac{\tau}{\Theta}-\Phi_1\right) = 1 \qquad \text{ou} \qquad 2\pi\left(\frac{\tau}{\Theta}-\Phi_1\right) = \frac{\pi}{2};$$

de même, pour $\mathfrak{B}_1$ soit τ' l'époque correspondante :

$$\sin 2\pi\left(\frac{\tau'}{\Theta}-\psi_1\right) = 1 \qquad \text{ou} \qquad 2\pi\left(\frac{\tau'}{\Theta}-\psi_1\right) = \frac{\pi}{2}.$$

(¹) Par suite d'une erreur, la Note des *Comptes rendus* (t. CIV, p. 1465) porte le mot *retard* au lieu d'*avance*.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

» On aura donc, en retranchant membre à membre,

$$\frac{\tau - \tau'}{\Theta} = \Phi_1 - \psi_1. \tag{28}$$

» Pour que $\Phi_1 - \psi_1$ soit positif, il faut que τ' soit plus petit que τ, c'est-à-dire que l'époque du passage de l'oscillation à son maximum soit *antérieure* à l'époque correspondante de la force : on va voir que telle est la relation entre l'oscillation synchronisée et la force synchronisante.

» La valeur (27) de $\Phi_1 - \psi_1$ donnée par la tangente laissant une indétermination de $\pm \frac{1}{2}$, il est nécessaire de recourir aux deux équations dont elle dérive et qui donnent le sinus et le cosinus de $\Phi_1 - \psi_1$.

» L'expression du sinus étant essentiellement positive, $\Phi_1 - \psi_1$ est comprise dans tous les cas entre o et $+\frac{1}{2}$: *l'avance* de l'oscillation sur la force est donc démontrée.

» 18. *Influence du signe de* $T - \Theta$ *sur la grandeur de la différence de phase.* — L'expression du cosinus est également toujours positive, si la différence

$$\frac{1}{T^2} - \frac{1}{\Theta^2} > 0 \qquad \text{ou} \qquad \Theta > T.$$

» D'où l'on conclut que *l'avance est toujours moindre que* $\frac{1}{4}$ *de période, lorsque la période de la force synchronisante est plus grande que celle de l'oscillation libre du système synchronisé.*

» L'expression (27) de la tangente, qui élimine la variable $\mathfrak{v}_1$, montre que $\Phi_1 - \psi_1$, nulle pour $\alpha = 0$, est nulle aussi pour $\alpha = \infty$: *l'avance passe donc par un maximum* qu'on trouve aisément : il correspond à

$$\alpha^2 = 4\pi^2 \left(\frac{1}{T^2} - \frac{1}{\Theta^2} \right), \qquad \text{d'où} \qquad \operatorname{tang} 2\pi (\Phi_1 - \psi_1)_{\max} = \frac{T}{\sqrt{\Theta^2 - T^2}}; \tag{29}$$

ce maximum approche beaucoup de $\frac{1}{4}$ de période, lorsque Θ diffère de peu de T, mais ne l'atteint pas.

» Le cosinus ne change de signe que dans le cas où la différence ci-dessus est négative

$$\frac{1}{T^2} - \frac{1}{\Theta^2} < 0 \qquad \text{ou} \qquad \Theta < T.$$

» D'où l'on conclut que *l'avance peut prendre toutes les valeurs*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

comprises entre zéro et une demi-période, lorsque la période de la force synchronisante est plus petite que celle de l'oscillation libre synchronisée.

» *Elle est égale à* $\frac{1}{4}$ *de période lorsque*

$$\alpha^2 = 4\pi^2\left(\frac{1}{\Theta^2} - \frac{1}{T^2}\right); \tag{30}$$

elle tend vers zéro pour un amortissement très grand et vers $\frac{1}{2}$ *pour un amortissement voisin de zéro.*

» *Remarque.* — Si, au lieu de compter les différences de phase toujours dans le même sens, on convenait de les compter de $-\frac{1}{4}$ à $+\frac{1}{4}$ en passant par zéro, on trouverait que, dans le cas où Θ est moindre que T, $\Phi_1 - \psi_1$ est négatif pour les valeurs de l'amortissement comprises entre zéro et la valeur ci-dessus. L'oscillation présenterait donc un *retard croissant*, allant de zéro jusqu'à $\frac{1}{4}$ de période, puis, brusquement, ce retard de $\frac{1}{4}$ deviendrait une *avance décroissante* de $\frac{1}{4}$, lorsque l'amortissement irait en croissant depuis cette valeur singulière jusqu'à l'infini.

» Cette manière de compter le sens de différence de la phase, avantageuse dans certains cas, a l'inconvénient d'offrir une discontinuité apparente qui peut amener quelque confusion.

» 19. *Égalité rigoureuse de deux périodes* $T = \Theta$. — Le cas limite $T = \Theta$ d'égalité des deux périodes simplifie les expressions (26) et (27), qui deviennent

$$B_1 = \frac{B_1\Theta}{\mu\alpha\sqrt{\alpha^2\Theta^2 + 16\pi^2}}, \tag{31}$$

$$\begin{cases} \sin 2\pi(\Phi_1 - \psi_1) = 2\alpha\dfrac{2\pi}{\Theta}\dfrac{\mu\beta_1}{B_1}, \\ \cos 2\pi(\Phi_1 - \psi_1) = \alpha^2\mu\dfrac{\beta_1}{B_1}, \\ \operatorname{tang} 2\pi(\Phi_1 - \psi_1) = \dfrac{4\pi}{\alpha\Theta}. \end{cases} \tag{32}$$

» On reconnait que $\sin 2\pi(\Phi_1 - \psi_1)$ et $\cos 2\pi(\Phi_1 - \psi_1)$ sont toujours positifs : donc l'avance est toujours comprise entre o et $\frac{1}{4}$; d'après la valeur de $\operatorname{tang} 2\pi(\Phi_1 - \psi_1)$, on voit qu'elle tend vers zéro à mesure que l'amortissement grandit, et vers $\frac{1}{4}$ à mesure que

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

l'amortissement diminue. Ce résultat se retrouvera plus loin (55), lors de l'étude du réglage *apériodique*.

» D'après une remarque précédente (14), $\alpha\Theta$ est toujours pratiquement très petit; d'où il résulterait que $\Phi - \psi_1$ serait, en général, plus voisin de $\frac{1}{4}$ que de zéro. Mais la condition $\Theta = T$ est supposée rigoureusement remplie; or, lorsqu'on cherche à l'obtenir, on n'y arrive pratiquement jamais, et l'on se trouve dans l'un des deux cas précédents ($\Theta \lessgtr T$), de sorte que, en réalité, cette valeur de $\Phi_1 - \psi_1 = \frac{1}{4}$ n'est nullement une limite infranchissable, comme les équations (32) pourraient le faire supposer.

VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE DU RÉGIME OSCILLATOIRE PERMANENT (SYNCHRONISATION) SOUS L'ACTION D'UNE FORCE SINUSOÏDALE.

» 20. *Description du système oscillant. Galvanomètre double.* — On peut réaliser aisément, et de bien des manières, un appareil remplissant toutes les conditions du système oscillant considéré et soumis à tous les genres de force dont l'action a été précédemment analysée. Voici l'une des dispositions les plus simples : elle permet une vérification rapide et, le plus souvent, intuitive des points essentiels de la théorie précédente relative à l'établissement d'un régime stable de synchronisation.

» Le système oscillant est constitué par l'équipage mobile d'un galvanomètre du type Deprez-d'Arsonval, modifié en ce sens qu'il est formé de deux cadres $C_1 C_2$ au lieu d'un seul (*fig.* 3). Ces cadres, liés par une tige d'aluminium portant un miroir concave (1^m de rayon de courbure), sont soutenus ou maintenus par deux fils de torsion (platine de $0^{cm},025$) $A_1 C_1$, $A_2 C_2$. Chaque cadre C est enroulé d'un fil de cuivre fin et isolé : l'une des extrémités de ce fil est soudée au fil de torsion A fixé au cadre; l'autre extrémité a un petit anneau *a* isolé par du papier entourant la tige d'aluminium; de là, une spirale très élastique établit la communication avec la borne B sans ajouter de couple notable à celui du fil de torsion.

» Chaque cadre oscille autour de l'axe vertical $A_1 A_2$ (défini par les fils de torsion) dans un champ magnétique intense (700 à 800 unités électromagnétiques C. G. S.), constitué par cinq lames d'acier en fer à cheval et par un cylindre intérieur au cadre.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

» On réalise donc ainsi un système matériel dont le moment d'inertie peut varier dans d'assez grandes limites, car la lame qui porte le miroir présente deux crochets capables de soutenir une tige LL d'aluminium, de laiton ou de platine.

Fig. 3.

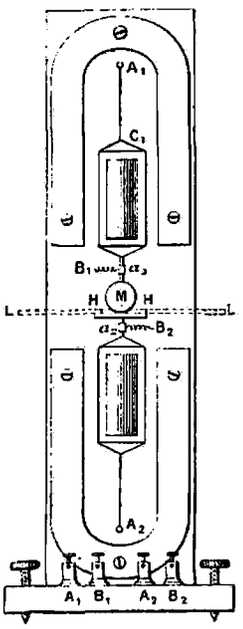
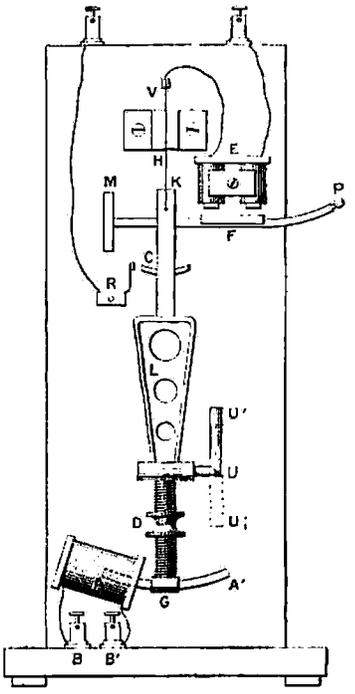


Fig. 4.



» Ce système est soumis :

» 1° A un couple de torsion proportionnel à l'écart $r\theta$;

» 2° A une résistance proportionnelle à la vitesse $q\frac{d\theta}{dt}$, due à la viscosité de l'air, à celle des fils de torsion et surtout aux réactions électromagnétiques des courants d'induction, développés dans les cadres lorsque leur circuit est fermé ;

» 3° A une force extérieure périodique F, par l'action d'un courant périodique amené dans l'un des cadres.

» 21. *L'appareil réalise l'indépendance des trois forces en jeu.* — Ce galvanomètre double, qui, à première vue, paraît une complication du galvanomètre Deprez-d'Arsonval, est, au contraire, particulièrement simple au point de vue théorique comme au point de vue pratique : il réalise l'indépendance des trois forces en jeu :

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

» D'abord celle du couple de torsion, qui est déterminé par le diamètre des fils de suspension.

» Ensuite, le dédoublement du cadre permet de rendre indépendantes les deux autres espèces de forces, l'*amortissement* et la *force synchronisante*, qui jouent le rôle principal dans l'étude de la synchronisation, et entre lesquelles le galvanomètre ordinaire établit une relation nécessaire. En effet, l'*amortissement* est produit avec l'un des cadres en le fermant sur une résistance extérieure plus ou moins grande. On démontre, en effet, aisément que le coefficient d'amortissement α a pour expression

$$\alpha = \frac{1}{\mu}\left(q_0 + \frac{\mathcal{F}^2 n^2 s^2}{R}\right), \tag{33}$$

q_0 étant la partie constante et fixe dépendant de la viscosité de l'air et des fils de torsion :

$\mathcal{F}$ l'intensité du champ magnétique;
s la surface d'une spire du fil enroulé;
n le nombre de spires.

» On voit que le *coefficient* α (lorsqu'on néglige la partie fixe q_0 très petite) est *en raison inverse de la résistance totale du circuit*.

» Enfin, *la force synchronisante* périodique sinusoïdale est produite, d'une manière tout à fait indépendante, par l'action sur le second cadre d'un courant induit par un appareil spécial, que nous appellerons *trembleur*, pour abréger. Le courant est amené par l'intermédiaire d'une boîte de résistance qui permet de régler l'amplitude; comme la résistance totale du circuit est grande, l'amortissement additionnel que le cadre imprime au système est négligeable et rentre dans la partie fixe q_0.

» 22. *Description de l'inducteur sinusoïdal* (*trembleur*). — L'inducteur est formé d'un pôle d'aimant oscillant dans l'axe d'une bobine ou solénoïde. Une lame vibrante entretenue électriquement par une pile auxiliaire lui imprime l'oscillation pendulaire.

» La *fig.* 4 donne le détail de l'appareil (*trembleur*). La lame vibrante HK, encastrée dans une mâchoire métallique, se prolonge par un système rigide KLDG, portant à son extrémité le petit barreau d'acier aimanté AA'. Une tige filetée DG permet de régler déli-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

catement par l'écrou et contre-écrou D la durée vibratoire du système dont la période est Θ. Le réglage approximatif se fait d'abord par la longueur HK du ressort, laquelle peut varier dans d'assez grandes limites; ensuite, par des lames de plomb trapézoïdales, que l'on coince dans l'espace L, entre les saillies latérales de cette pièce.

» Enfin, on se réserve de modifier rapidement et d'une manière continue le moment d'inertie entre deux limites assez étendues en manœuvrant la tige UU', qui tourne à frottement autour d'un axe horizontal U; la partie UU' étant en plomb et pouvant tourner de 180° de UU' en UU'$_1$, on obtient un réglage très commode, sans arrêter l'oscillation.

» Si l'on se rappelle, d'autre part, que le moment d'inertie de l'équipage galvanométrique peut être modifié à volonté par l'addition d'une tige transversale (20), on reconnaîtra qu'on peut donner à Θ et à T des valeurs relatives très différentes.

» L'entretien électrique se fait par l'électro-aimant E, qui attire un fer doux F, porté par le bras transversal (muni d'une boule d'acier poli P formant *point brillant*) lorsque le contact C touche le ressort R.

» Si l'on veut projeter le mouvement du trembleur, un miroir plan M permet de recevoir et de réfléchir le rayon incident.

» 23. *Expression de la force synchronisante.* — Le déplacement angulaire η du trembleur étant représenté par l'oscillation pendulaire simple

$$\eta = \mathrm{H} \sin 2\pi \frac{t}{\Theta}$$

(en prenant pour origine du temps l'époque où le trembleur passe par la position moyenne avec une vitesse positive), la force électromotrice du courant induit sera proportionnelle à la vitesse angulaire de l'aimant, c'est-à-dire à $\frac{d\eta}{dt}$; par suite, l'intensité i sera

$$(34) \qquad ri = \mathrm{K} \cos 2\pi \frac{t}{\Theta} = \mathrm{K} \sin 2\pi \left(\frac{t}{\Theta} + \frac{1}{4} \right),$$

r étant la résistance totale du circuit dont la self-induction est supposée négligeable; la *force synchronisante* aura donc pour moment

$$\mathrm{F} = \mathrm{B}_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{\mathrm{T}} - \Phi_1 \right), \qquad \Phi_1 = -\frac{1}{4}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La force synchronisante est donc sinusoïdale et d'un quart de période en avance sur l'oscillation du trembleur.

» 24. *Composition optique des oscillations synchronisante et synchronisée.* — La vérification expérimentale des résultats représentés par les formules (26) et (27) devient intuitive si l'on a recours à la *composition optique* des oscillations rectangulaires du trembleur et du galvanomètre. A cet effet, on observe avec une loupe l'image réelle du point brillant (porté par le bras transversal du trembleur), formée au centre de courbure du miroir concave du galvanomètre. On obtient ainsi une ligne lumineuse dont chaque point a pour abscisse verticale le déplacement pendulaire de l'inducteur et pour ordonnée horizontale la déviation du galvanomètre. Le choix des durées d'oscillation, au voisinage de $\frac{1}{6}$ de seconde, permet une persistance visuelle suffisante pour donner l'impression d'une ligne continue, sans empêcher cependant de reconnaître le sens de la description de la courbe.

» Au lieu d'observer par vision directe, on peut opérer par projection; on projette alors sur le miroir du galvanomètre un faisceau lumineux issu d'un trou vivement éclairé, et l'on dirige le faisceau réfléchi sur le miroir M du trembleur; en réglant les distances mutuelles de la source lumineuse et des deux appareils, on modifie à volonté le rapport des deux amplitudes, de manière à inscrire la courbe dans le rectangle convenable; à l'aide d'une lentille de projection, on projette sur le tableau l'image conjuguée de la source produite par le miroir concave et réfléchie sur le miroir plan (1).

» 25. *Caractère des courbes suivant le régime variable ou permanent.* — Quel que soit le mode opératoire, on reconnaît qu'après

(1) C'est dans cet ordre qu'il faut opérer les réflexions pour pouvoir, d'une part, amplifier la déviation du galvanomètre (toujours un peu faible, à cause de la faiblesse du courant induit), et d'autre part éliminer une image parasite du miroir concave (dont les deux surfaces sont généralement obliques). Le faisceau réfléchi sur le miroir concave étant double, trace, pendant l'oscillation, deux traînées horizontales sur le miroir plan. On donne le maximum d'écartement à ces deux traînées en tournant le miroir concave dans sa monture. On intercepte alors le faisceau gênant à l'aide d'un écran étroit horizontal : une bande de papier noir collé sur le miroir plan suffit le plus souvent. Ces précautions sont importantes lorsqu'on doit photographier les images (49) en employant les miroirs concaves du commerce, argentés à la surface intérieure.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

un temps relativement assez court, malgré l'inégalité des périodes vibratoires T et Θ, la courbe résultante devient une *ellipse stable*, comme dans les expériences de Lissajous; d'où l'on conclut que les deux mouvements composants sont des oscillations pendulaires simples, de même période : car l'un d'eux, celui qui correspond au tremblеur, est, par construction, un mouvement sinusoïdal; par conséquent l'autre, celui qui correspond au déplacement angulaire du galvanomètre, est donc aussi sinusoïdal ou pendulaire simple. C'est la vérification du résultat démontré plus haut (16), à savoir que l'oscillation synchronisée est sinusoïdale et de même période que la force synchronisante.

» Le phénomène est bien conforme à la théorie : le régime stable est précédé d'un régime variable, où l'ellipse se déforme comme dans les courbes de Lissajous, la différence de période des deux vibrations produisant la même apparence qu'une différence de phase variant proportionnellement au temps (*voir* plus loin 26 et 31). Ce régime variable se prolonge pendant un grand nombre d'oscillations, si le second cadre du galvanomètre est ouvert, par conséquent lorsque l'amortissement est très faible; mais ce régime variable s'évanouit rapidement pour faire place au régime stable et définitif, lorsque le cadre du galvanomètre est fermé sur lui-même ou sur une résistance très petite.

» On vérifie donc la conclusion énoncée plus haut (12), à savoir que, le régime de synchronisation parfaite est d'autant plus rapidement atteint que le coefficient d'amortissement du système oscillant est plus considérable.

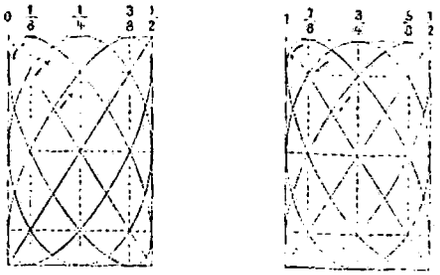
» 26. *Vérification intuitive de la différence de phase par la forme des ellipses.* — Cette vérification, purement qualitative, peut devenir presque quantitative, si l'on a égard à la forme de l'ellipse relativement aux côtés du rectangle idéal circonscrit, forme qui définit la différence de phase des deux mouvements vibratoires composants.

» Sans avoir besoin de rappeler en détail la construction des ellipses de Lissajous, il suffira de donner la succession des variétés d'ellipses qu'on obtient en faisant varier par degrés égaux de $\frac{1}{8}$ en $\frac{1}{8}$ la différence de phase entre les deux vibrations rectangulaires composantes (*fig.* 5).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

» On voit par cette série de formes, relativement au rectangle circonscrit, que la simple inspection de la courbe caractérise la différence de phase des deux oscillations : toutefois, la forme ne suffit pas à elle seule, il faut en outre avoir égard au sens de la description indiquée (*fig.* 5) par des flèches; c'est pour permettre cette observation très importante qu'on a choisi des durées d'oscillations assez lentes pour permettre d'apercevoir le sens de la description (24), tout en conservant l'apparence d'une courbe continue.

Fig. 5.



» *Remarque.* — Les expressions (27) discutées précédemment (17), particulièrement celle de $\operatorname{tang} 2\pi(\Phi - \psi)$, donnent la différence de phase entre la force synchronisante et la vibration synchronisée. Mais cette formule n'est pas ici immédiatement applicable, parce que ce n'est pas la force synchronisante elle-même que l'on compare avec la vibration du système synchronisé, mais bien l'oscillation du trembleur dont la phase est en avance de $\frac{1}{4}$ (23).

» D'où il résulte qu'on doit substituer $\Phi = \frac{1}{4}$ dans la formule (17) pour rendre directe la comparaison de cette formule avec l'expérience : elle deviendra

$$\operatorname{tang} 2\pi\psi = -\frac{\alpha^2 + 4\pi^2\left(\frac{1}{T^2} - \frac{1}{\Theta^2}\right)}{2\alpha\frac{2\pi}{\Theta}}. \qquad (35)$$

» Elle représente alors la différence de phase ψ de l'oscillation du galvanomètre avec celle du trembleur, l'origine du temps correspondant au passage du trembleur par sa position d'équilibre avec vitesse positive.

» 27 *Cas singuliers. Différence de phase égale à* $\frac{1}{4}$. *Amplitude maximum.* — La discussion ayant été faite précédemment (17), il

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

n'y a pas lieu de la reprendre; il suffit de signaler d'abord le cas critique où le numérateur de $\operatorname{tang} 2\pi\psi$ s'annule en changeant de signe : cette particularité exige que la période synchronisante Θ (trembleur) soit plus petite que celle du système oscillant T (galvanomètre). Elle satisfait à la condition

$$\alpha^2 = 4\pi^2\left(\frac{1}{T^2} - \frac{1}{\Theta^2}\right).$$

Lorsqu'on fait grandir progressivement la valeur de Θ à l'aide des réglages décrits ci-dessus (22), on atteint, puis on dépasse la valeur de $\frac{1}{T^2} - \frac{1}{\Theta^2}$ qui annule le numérateur de $\operatorname{tang} 2\pi\psi$. On voit alors l'ellipse s'aplatir peu à peu suivant une diagonale du rectangle, se réduire à une droite, puis reprendre en ordre inverse la succession des formes précédentes; en passant par la variété rectiligne, le sens de la description change, conformément à la série des figures de Lissajous représentées ci-dessus (*fig.* 5).

» Une autre vérification des formules précitées se présente dans cette expérience relativement à l'amplitude $\mathfrak{a}_1$ de la vibration synchronisée (26), laquelle passe par un maximum pour une valeur de Θ très voisine de celle qui donne la variété rectiligne de l'ellipse : l'ellipse s'allonge en même temps qu'elle s'aplatit. Le minimum de la quantité sous le radical de l'expression (26) pris par rapport à $\frac{4\pi^2}{\Theta^2}$ considéré comme variable correspond à la condition

$$\alpha^2 = 4\pi^2\left(\frac{1}{T^2} - \frac{1}{\Theta^2}\right);$$

c'est l'équation (29) ou celle qui donne le maximum de différence de phase lorsque Θ est devenu plus grand que T : elle exige que Θ soit plus grand que T.

» 28. *L'ellipse transformée en cercle.* — Parmi les autres formes d'ellipses qu'on doit signaler, il faut citer la *forme circulaire* dont l'importance apparaîtra plus loin (48). On l'obtient : 1° en rendant l'amplitude de l'oscillation galvanométrique égale à celle de l'oscillation du trembleur par l'intercalation de résistances convenables; 2° en donnant la valeur $\frac{1}{4}$ à la différence de phase ψ.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

» Rigoureusement parlant, cette seconde condition est impossible, car $\operatorname{tang} 2\pi\psi$ ne peut pas devenir infinie à moins de rendre α nul, ce qui supprime l'amortissement, par suite la synchronisation.

» Mais il est facile de voir que, sans rendre l'amortissement nul, on s'approche de la condition $\psi = \frac{1}{4}$ avec une approximation aussi grande qu'on le désire : il suffit d'augmenter la différence $\Theta - T$ à mesure qu'on prend α plus petit. Il convient alors de rapprocher T d'un sous-multiple de Θ pour remplir les conditions qui seront énoncées plus loin (31).

» Le produit αT ou $\alpha\Theta$ reste alors très petit; on peut donc négliger $\alpha^2 T^2$ ou $\alpha^2\Theta^2$ devant l'unité ou devant un nombre du même ordre de grandeur. L'expression de $\operatorname{tang} 2\pi\psi$ (35) se simplifie et devient

$$\operatorname{tang} 2\pi\psi = \frac{\pi}{\alpha\Theta}\left(1 - \frac{\Theta^2}{T^2}\right). \tag{36}$$

En supposant, par exemple, $\alpha\Theta = \frac{1}{100}$ (11) et $2T = \Theta$, on aurait

$$\operatorname{tang} 2\pi\psi = -3{,}1415 \times 100 \times 3$$

ou

$$2\pi\psi = 90^\circ 3' 39'' \qquad \text{et} \qquad \psi = 0{,}2502.$$

Donc, à moins d'un millième près,

$$2\pi\psi = 90^\circ \qquad \text{et} \qquad \psi = 0{,}25.$$

» Ainsi, par le choix des périodes T ou Θ, on atteint avec facilité (sans cesser pour cela de conserver un coefficient d'amortissement très appréciable) la forme circulaire pratiquement parfaite et décrite d'un mouvement sensiblement uniforme.

» Si l'on compare ce mode de description d'un cercle, obtenu par la combinaison de deux mouvements sinusoïdaux différant de $\frac{1}{4}$ comme phase, à la représentation géométrique de l'oscillation pendulaire simple (3), on reconnaîtra que le dispositif expérimental employé réalise le cercle décrit d'un mouvement uniforme dont l'abscisse représente le déplacement oscillatoire du trembleur et l'ordonnée sa vitesse.

» Nous aurons plus loin (48) l'occasion d'utiliser la réduction de l'ellipse au cercle pour un autre genre de vérifications.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

LA FORCE SYNCHRONISANTE PÉRIODIQUE EST QUELCONQUE, MAIS RELATIVEMENT TRÈS PETITE : ELLE AGIT SUR UN SYSTÈME OSCILLANT FAIBLEMENT AMORTI ET DE PÉRIODE PEU DIFFÉRENTE.

» 29. *Définition des conditions restrictives.* — Les résultats obtenus jusqu'ici sont indépendants de la grandeur relative des forces en jeu ou de la différence de périodes des systèmes synchronisant et synchronisé : ils constituent donc une théorie générale dont les formules (21) et (22) sont l'expression analytique ; ces formules fournissent d'ailleurs la solution de tous les problèmes qu'on peut se poser sur la synchronisation, en ce qui concerne le régime définitif aussi bien que le régime variable.

» Mais, à propos de quelques applications numériques (13), on a pu remarquer que les conditions ordinairement réalisées dans la pratique apportent des simplifications imprévues; il importe donc d'examiner jusqu'à quel degré on peut simplifier ces formules sans altérer les conditions essentielles de tous les phénomènes que cette théorie peut comprendre.

» En passant en revue les divers problèmes qui se sont présentés en Physique ou en Mécanique, on est conduit à adopter les simplifications que voici :

» 1° *La force synchronisante est très petite.*

» 2° *L'amortissement de l'oscillation libre du système est faible.*

» On appellera *force très petite* celle qui, agissant sur le système au repos, produit un écart statique très petit relativement à l'amplitude moyenne des oscillations.

» On appellera *amortissement faible* un amortissement tel que le produit αT ait un carré $\alpha^2 T^2$ négligeable devant l'unité. Cette restriction permet de réduire l'expression (9) de la période libre T du système à la formule simple

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{r}{\mu}, \tag{5}$$

qui fournit la valeur du couple de torsion r et par suite l'écart statique θ_0, sous l'action d'une force dont le couple est $C = r\theta_0$: on a donc

$$C = \frac{4\pi^2}{T^2}\mu\theta_0 \qquad \text{ou} \qquad \theta_0 = C\,\frac{T^2}{4\pi^2\mu}. \tag{36}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

» Cette expression de θ_n donne la mesure de C et définit la force *très petite*.

» Enfin, nous ajouterons une autre condition.

» 3° *La période* Θ *de cette force diffère peu de la période* T *d'oscillation libre du système* (*ou d'un multiple de cette période*).

» 30. *Simplification correspondante dans l'intégrale générale.* — Ces restrictions introduites dans les expressions générales $\mathfrak{B}_n$ et ψ_n (21) et (22) simplifient considérablement ces formules, mettent en évidence l'écart statique θ_n correspondant à la composante d'ordre n et les réduisent à

$$\mathfrak{B}_n = \frac{B_n T^2}{4\pi^2 \mu} \frac{1}{1-n^2} = \frac{\theta_n}{1-n^2}, \tag{37}$$

$$\operatorname{tang} 2\pi (\Phi_n - \psi_n) = \frac{\alpha T}{2\pi} \frac{2n}{1-n^2}. \tag{38}$$

» Si l'on se rappelle (10) que B_n est le terme général du développement du moment de la force synchronisante F suivant la série de Fourier, laquelle est ici, par hypothèse, très petite, on reconnaîtra que le terme correspondant $\mathfrak{B}_n$ de l'amplitude finale est une fraction $\frac{1}{1-n^2}$ de l'écart statique θ_n déjà très petit, que produirait la composante B_n sur le système au repos. En outre, cette fraction décroît rapidement avec l'ordre des termes : les termes d'ordre élevé sont donc négligeables.

» Au contraire, le premier terme $\mathfrak{B}_1$ (pour $n = 1$), bien que l'écart statique θ_1 soit aussi très petit, prend une importance prédominante, car θ_1 est multiplié par un facteur considérable : ce terme $\mathfrak{B}_1$ (26), en effet, ne contient au dénominateur que des quantités très petites de même ordre, lesquelles empêchent toutes les réductions faites sur les autres termes. C'est donc uniquement à la composante B_1 qu'est due la synchronisation : les autres n'ont pas d'influence appréciable.

» *Remarque.* — La démonstration serait la même, si la période Θ était voisine d'un multiple mT de la période T; ce serait le terme $\mathfrak{B}_m$ qui aurait l'influence prédominante.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

» 31. *Théorème de l'équivalence des forces très petites à une force sinusoïdale.* — D'où l'on conclut ce théorème :

» *Une force périodique très petite, variable avec le temps suivant une loi quelconque développable par la série de Fourier, équivaut dans son action sur un système vibrant, faiblement amorti et de période peu différente, à la force pendulaire simple représentée par les termes du premier ordre de la série.*

» (*Si la période synchronisante était peu différente du multiple m de la période du système, la force équivalente serait représentée par les termes du $m^{ième}$ ordre de la série.*)

» Ce théorème, très important au point de vue théorique, est fort utile au point de vue des applications où les restrictions énoncées sont le plus souvent réalisées; il ramène immédiatement au cas particulier où la force synchronisante est sinusoïdale (16); c'est en vue de cette importance que nous venons de l'examiner en détail.

» En outre, il justifie *a priori* l'équivalence de tous les genres de forces synchronisantes, quelle que soit leur loi de variation avec le temps, appliquées à un système oscillant quelconque pourvu que les conditions ci-dessus soient réalisées.

» Or, parmi les genres de force périodique qu'on rencontre dans la pratique ou qui rendent la théorie particulièrement simple, il en est deux que l'on doit distinguer :

» 1° *La force constante périodiquement interrompue,*

» 2° *La force périodique instantanée.*

» Le théorème précédent démontre que ces forces équivalent respectivement à des forces sinusoïdales, dont le moment se met sous les deux formes

$$F_1 = S_1 \sin 2\pi \frac{t}{\Theta} + C_1 \cos 2\pi \frac{t}{\Theta} \quad - B_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{\Theta} - \Phi_1 \right).$$

» Ce sont, en effet, les deux termes du premier ordre de la série de Fourier (19). On calculera les coefficients S_1 et C_1 par la méthode connue, qui consiste à multiplier les deux membres par $\sin 2\pi \frac{t}{\Theta} dt$ pour avoir S_1, ou par $\cos 2\pi \frac{t}{T} dt$ pour avoir C_1, et à intégrer dans l'étendue d'une période.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

» 32. *Force constante périodiquement interrompue.* — Soit G le moment de cette force, supposé constant entre les époques t_1 et t_2, et nul le reste de la période, on aura

$$\int_{t_1}^{t_2} G \sin 2\pi \frac{t}{\Theta}\, dt = S_1 \int_{t_1}^{t_1+\Theta} \sin^2 2\pi \frac{t}{\Theta}\, dt + C_1 \int_{t_1}^{t_1+\Theta} \cos 2\pi \frac{t}{\Theta} \sin 2\pi \frac{t}{\Theta}\, dt,$$

le coefficient de C_1 est évidemment nul; il viendra, pour S_1 et par le calcul analogue pour C_1, les expressions

$$(39)\qquad \begin{cases} S_1 = \dfrac{2G}{\pi} \sin \dfrac{2\pi}{\Theta} \dfrac{t_2 - t_1}{2} \sin \dfrac{2\pi}{\Theta} \dfrac{t_1 + t_2}{2}, \\ C_1 = \dfrac{2G}{\pi} \cos \dfrac{2\pi}{\Theta} \dfrac{t_2 - t_1}{2} \cos \dfrac{2\pi}{\Theta} \dfrac{t_1 + t_2}{2}. \end{cases}$$

» Identifiant avec la seconde forme

$$B_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{\Theta} - \Phi_1 \right),$$

on en déduit

$$(40)\qquad \begin{cases} B_1 = \dfrac{2G}{\pi} \sin \dfrac{2\pi}{\Theta} \dfrac{t_2 - t_1}{2}, \\ \Phi_1 = \dfrac{t_1 + t_2}{2} - \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

» D'où l'on conclut :

» *Une force constante positive (ou négative) dont le moment est* G, *agissant pendant le temps* $t_2 - t_1 < \Theta$, *équivaut à une force pendulaire simple, dont l'amplitude est*

$$(41)\qquad B_1 = \frac{2G}{\pi} \sin \frac{2\pi}{\Theta} \frac{t_1 - t_2}{2},$$

et dont l'époque du maximum positif (ou négatif) coïncide avec l'époque moyenne d'action de la force G.

33. *Force périodique instantanée.* — Si l'intervalle $t_2 - t_1$ va en diminuant indéfiniment, on arrive à la force instantanée; on obtient, sans nouveau calcul, l'énoncé suivant :

» *Une force instantanée positive (ou négative), dont l'impulsion a pour moment* $P = \int G\, dt$, *équivaut à une force pendulaire simple dont l'amplitude est* $B_1 = \frac{2P}{\Theta}$, *et dont l'époque du maximum positif (ou négatif) coïncide avec l'époque de la percussion.*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

» La proposition réciproque est évidente :

» *Le moment* P *de la percussion positive (ou négative), équivalant à une force sinusoïdale de moment* B_1, *est* $P = \frac{B_1 \Theta}{2}$, *et l'époque de cette percussion coïncide avec celle du maximum positif (ou négatif) de la force.*

» Cette équivalence d'une force périodique instantanée à une force sinusoïdale, et même à une force périodique quelconque (dans les conditions énoncées), permet de réduire à une extrême simplicité l'analyse des phénomènes de synchronisation; nous allons en donner bientôt plusieurs exemples.

VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE DE L'ÉQUIVALENCE, AU POINT DE VUE DE LA SYNCHRONISATION, DES FORCES PÉRIODIQUES TRÈS PETITES VARIABLES AVEC LE TEMPS.

» 34. *Types de forces périodiques simples.* — L'appareil précédemment décrit permet de faire la vérification expérimentale des résultats établis ci-dessus : elle consiste à constater que tous les types de force périodique variable avec le temps, suivant une loi quelconque, finissent, même lorsque l'amortissement est faible, par produire la synchronisation du système oscillant. Les cas les plus favorables sont ceux où la période synchronisante est très voisine de celle du système; mais l'expérience réussit également bien avec une période très différente, seulement l'amplitude de l'oscillation synchronisée devient très petite; mais elle reprend une valeur très notable lorsque la période d'oscillation libre devient voisine d'un multiple de la période synchronisante : c'est ce qu'on réalise aisément pour les premiers multiples en ralentissant beaucoup l'oscillation du trembleur; celle du galvanomètre restant très rapide par la suppression de la tige transversale (20).

» Voici les types de force qui ont été expérimentés sous les yeux de la Société.

» *Force pendulaire simple.* — Elle est fournie par le courant alternatif induit par le petit aimant lié au trembleur et oscillant dans la bobine fixe : c'est l'expérience décrite ci-dessus (25); elle réussit, suivant les lois indiquées, en variant les périodes du trembleur et du galvanomètre.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

» *Force constante interrompue.* — La vibration du trembleur étant entretenue par une pile auxiliaire (22), on obtient une force interrompue périodiquement, en faisant passer dans le galvanomètre une dérivation du courant du trembleur.

» *Force instantanée.* — En réduisant de plus en plus la durée de contact de l'entretien du trembleur, et, d'autre part, en augmentant l'intensité de la dérivation, on arrive à une force sensiblement instantanée.

» *Forces instantanées alternativement de signe contraire.* — L'intercalation du fil primaire d'une petite bobine d'induction dans le circuit du trembleur (¹) fournit, dans le fil secondaire relié au galvanomètre, deux courants induits instantanés qui réalisent deux percussions de signe contraire, séparées par une fraction arbitraire de la période Θ.

» Quel que soit le genre de force employée, si l'amortissement est nul (circuit du cadre amortisseur ouvert), l'ellipse se déforme en passant par toutes les variétés de l'expérience des battements optiques de Lissajous, ce qui prouve que les périodes du trembleur et du galvanomètre n'ont aucune dépendance mutuelle; mais, dès qu'on ferme le circuit du cadre amortisseur, les déformations s'arrêtent progressivement : l'ellipse devient stable et d'autant plus vite que l'amortissement est plus énergique.

» 35. *Type de force périodique complexe.* — Enfin, voici une expérience très instructive qui démontre bien la généralité du théorème (31).

» Si l'on coupe toute communication électrique du galvanomètre avec le trembleur, le galvanomètre reste au repos : mais, si l'on établit entre eux un lien purement mécanique en appuyant une barre rigide et lourde sur les socles des deux appareils, les trépidations du trembleur impriment au galvanomètre des mouvements complexes qui se composent optiquement avec l'oscillation pendulaire de la lame vibrante.

» Lorsque l'amortissement est nul, la courbe résultante est une

(¹) Avec dérivation aux armatures du condensateur Fizeau, pour obtenir toute la netteté désirable dans l'ouverture et la fermeture du courant.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ellipse irrégulière, dentelée, incessamment variable, témoignant l'indépendance presque complète des deux oscillations et l'inégalité de leurs périodes : dès qu'on rétablit l'amortissement, les mouvements désordonnés se régularisent, les dentelures s'effacent et la courbe prend la forme d'une ellipse stable, démontrant l'égalité des périodes et la synchronisation parfaite.

» Comme contre-épreuve, si l'on ouvre le circuit amortisseur, l'ellipse, après quelques instants d'hésitation, commence à se déformer et reprend bientôt l'allure désordonnée qu'elle avait d'abord ; l'amortissement enlevé, la synchronisation cesse.

» 36. *Types de forces à période multiple ou quelconque.* — Les appareils à courte période oscillatoire que nous venons d'utiliser sont, à proprement parler, des appareils de démonstration : ils se recommandent surtout par la rapidité avec laquelle ils parviennent au régime stable et par la clarté avec laquelle la composition optique des oscillations fournit une vérification de la loi sinusoïdale.

» Mais les appareils à période lente, qui seront décrits plus loin soit pour réaliser diverses relations géométriques (47-50), soit dans les applications à l'horlogerie, nous fourniront des vérifications non moins précieuses : l'une des plus importantes (37) se rapporte à la synchronisation d'un balancier faiblement amorti par une force synchronisante relativement très petite dont la période était un multiple considérable de celle du balancier ($\Theta = 12T$).

» On peut encore citer une expérience d'un autre genre, facile à répéter dans les laboratoires ; c'est la synchronisation d'un galvanomètre amorti à barreau très lourd (boussole de Weber) par un courant alternatif ou interrompu produit avec un trembleur quelconque. Si la période du trembleur est assez longue (3 à 4 par seconde) pour qu'on puisse compter les vibrations, on reconnaît que le barreau du galvanomètre finit par vibrer synchroniquement, mais avec une amplitude très petite. On reconnaît même, dans la superposition de ce mouvement vibratoire avec les lentes oscillations du galvanomètre (lorsque commence l'expérience avant que le barreau soit au repos), le régime variable exprimé par l'intégrale (20).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

DEUXIÈME PARTIE. — Régime variable.

» 37. *Restriction au cas des forces synchronisantes très petites agissant sur un système oscillant faiblement amorti et de période peu différente.* — Le problème général de la synchronisation est résolu dans tous ses détails par l'équation (20) qui donne la loi du mouvement du système avec le temps : la solution est donc complète et il semble qu'il n'y ait rien à y ajouter.

» Cela est absolument vrai au point de vue du calcul analytique et même du calcul numérique, car on peut à chaque instant calculer la grandeur de l'inconnue (l'écart), ce qui est le caractère d'un problème de Mécanique complètement résolu. Mais, comme l'a remarqué Poinsot depuis longtemps, les formules de l'Analyse ne suffisent pas pour donner une idée claire des vérités qu'elles contiennent; il est toujours bon de considérer les choses en elles-mêmes.

» Dans le problème qui nous occupe, l'Analyse nous a démontré que l'oscillation atteignait toujours un régime stable que nous avons étudié en détail; mais l'esprit demande à voir clairement, par une image, s'il se peut, comment s'opère la transition entre le mouvement initial du système libre à ce régime stable imposé finalement par la force synchronisante : cette transition ou régime variable doit présenter, pour le physicien, des particularités intéressantes que l'intégrale générale (20) contient certainement, mais qui restent cachées sous les formules et qu'il faut dégager en suivant une autre voie; on vérifiera ensuite qu'elles s'y trouvent lorsqu'on les aura découvertes.

» Nous allons donc étudier le régime variable de la synchronisation d'un système oscillant, par une méthode géométrique directe, en profitant des résultats précédemment obtenus.

» Nous nous bornerons, toutefois, au cas restreint étudié en dernier lieu, où la force synchronisante est très petite et l'amortissement faible, parce que c'est celui qu'on rencontre le plus fréquemment dans les applications. L'image à laquelle on arrive, rigoureuse dans les conditions adoptées, n'est plus qu'approximative lorsqu'on

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

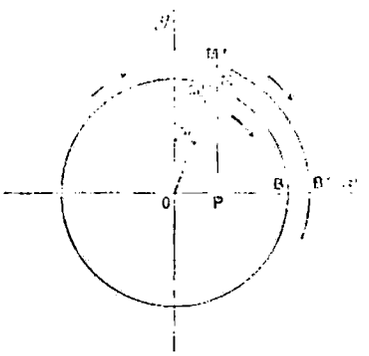
s'écarte de ces conditions; mais elle suffit encore pour donner l'allure générale des phénomènes dans les cas plus complexes.

» Les restrictions adoptées permettent de substituer à la force synchronisante périodique, variable suivant une loi quelconque, une force instantanée ou *percussion* (33). La simplification devient assez grande pour que l'analyse du phénomène et la démonstration des résultats deviennent en quelque sorte intuitives.

» 38. *Effet d'une force instantanée périodique appliquée à une oscillation pendulaire simple.* — La méthode est fondée sur la représentation géométrique d'une oscillation par le mouvement sur une courbe d'un point dont l'abscisse représente à chaque instant le déplacement et l'ordonnée la vitesse.

» Nous commencerons par le cas de l'oscillation pendulaire simple (3); la courbe représentative est un cercle (*fig.* 6) dont

Fig. 6.



le rayon OB est égal à l'*amplitude*. A l'époque t, l'écart étant représenté par l'abscisse OP du point M, la vitesse est égale à l'ordonnée MP multipliée par $\frac{2\pi}{T}$.

» L'application d'une force instantanée dans le sens du mouvement a pour effet d'accroître brusquement la vitesse sans modifier le déplacement OP, c'est-à-dire d'ajouter à l'ordonnée une longueur MM'. L'action étant supposée instantanée, l'abscisse OP n'est pas altérée, et le mouvement oscillatoire libre continuera à être représenté par le mouvement du point mobile M' sur un cercle : ce sera toujours une oscillation pendulaire simple, mais avec une amplitude et une phase légèrement différentes.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

» L'amplitude nouvelle est donnée par le rayon OM′ et la nouvelle phase se déduit de l'angle yOM'; car l'angle $yOM = \omega$, qui représentait $2\pi\frac{t-t_0}{T}$, devient

$$yOM' = 2\pi\frac{t-t'_0}{T}.$$

La variation de la phase initiale $\varphi = \frac{t-t_0}{T}$ devient donc égale à M′OM ou à $2\pi\frac{t'_0-t_0}{T}$.

» Le triangle infinitésimal MM′M″ donne les variations simultanées de l'amplitude ρ et de la phase φ correspondant à l'accroissement $MM' = u$ de l'ordonnée. Comme on a supposé u très petit, on a

$$(42)\qquad \begin{cases} M'M'' = MM'\cos\omega & \text{ou} \quad \Delta\rho = u\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\varphi\right), \\ MM'' = MM'\sin\omega & \text{»} \quad \rho\Delta\varphi = u\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\varphi\right). \end{cases}$$

» On remarquera que cette variation de la phase correspond ici à un *retard :* elle aurait produit une *avance* si la percussion avait eu lieu (également dans le sens de la vitesse) avant que le point P fût passé par le milieu O de l'oscillation.

» (*Remarque.* — La droite $MM' = u$ ne mesure la *vitesse* ou mieux la quantité de mouvement v cédée par la *percussion* $\int F\,dt$ que si elle est multipliée par $\frac{2\pi}{T}$; on aura donc

$$(43)\qquad v = \frac{2\pi}{T}u \qquad \text{ou} \qquad u = \frac{T}{2\pi}v).$$

» Si la percussion ne se renouvelle pas, les éléments de l'oscillation restent invariables; le point descripteur M′ parcourt la circonférence M′B′ et, à chaque période T écoulée, repasse en M′.

39. *Répétition périodique de la percussion.* — Supposons maintenant que la percussion se reproduise périodiquement au bout du temps Θ (la *fig.* 7 correspond à $\Theta > T$), le point M′ parcourt la circonférence entière, revient en M′ et le dépasse parce que Θ est plus grand que T; mais alors, arrivé en M_1, une nouvelle percussion a lieu qui ajoute à l'ordonnée de M_1 l'accroissement constant

$$M_1M'_1 = u,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et ainsi de suite. On voit que, à chaque percussion, l'amplitude OM et la phase sont modifiées de quantités différentes suivant l'angle ω, ce qui constitue un régime variable pour le mouvement oscillatoire du système.

» Ce régime variable serait entièrement défini si l'on connaissait la loi de variation avec le temps de l'amplitude et de la phase. Le mode actuel de représentation, qui peint si bien les altérations élémentaires dues à chaque percussion, fournit aussi une image très simple du régime variable. En effet, cherchons le lieu du point M et

Fig. 7.

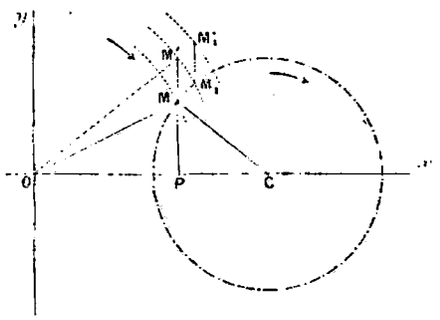
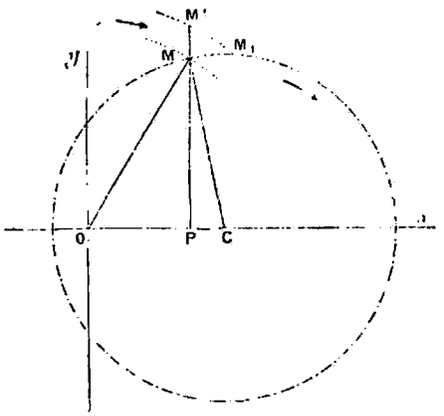


Fig. 8.



la vitesse moyenne avec laquelle ce point s'y déplace; grâce aux hypothèses admises sur la petitesse relative de l'accroissement de la vitesse et de la différence des périodes, on peut traiter les longueurs $MM' = u$ et $M'M_1 = \rho\frac{2\pi}{T}(\Theta - T)$ comme des différentielles, l'élément de temps étant la période Θ. Joignant MM_1, on forme un triangle infinitésimal dont les côtés MM' et $M'M_1$ sont respectivement perpendiculaires à OP et OM; si l'on mène la droite MC perpendiculaire au troisième côté MM_1, on obtient un triangle fini COM, qui reste toujours semblable au premier; les relations de similitude donnent

$$(41)\qquad \frac{M'M_1}{OM} = \frac{\rho\frac{2\pi}{T}(\Theta - T)}{\rho} \qquad \frac{M'M}{OC} = \frac{u}{MC} = \frac{MM_1}{MC},$$

d'où

$$OC = \frac{uT}{2\pi(\Theta - T)}, \qquad \frac{MM_1}{MC} = \frac{2\pi(\Theta - T)}{T\Theta}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

» Ainsi le côté OC est constant; la normale à l'élément MM_1 passe donc toujours par un point fixe; le lieu cherché est donc un cercle. Le rayon MC est par suite constant, et, comme le rapport de MM_1 à MC est aussi constant, l'arc MM_1 se reproduit avec la même grandeur à chaque nouvelle percussion.

» 40. *Représentation géométrique du régime variable : l'indicatrice de synchronisation est un cercle.* — Si, pour abréger, on désigne sous le nom d'*indicatrice de synchronisation* le lieu du point M, qui définit la loi de variation avec le temps de l'amplitude OM et de la phase yOM (époque relative de la percussion) pendant le régime variable, on en conclura :

» *Dans le cas de l'oscillation pendulaire simple de période* T, *modifiée par une percussion périodique u très petite de période* Θ, *peu différente de* T, *l'indicatrice de synchronisation est un cercle dont le centre, situé sur l'axe représentatif des déplacements à une distance de l'origine égale à* $\frac{u'}{2\pi}\frac{T}{\Theta - T}$, *et qui est décrit avec une vitesse angulaire uniforme*

$$\frac{2\pi}{\varpi} = 2\pi\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{\Theta}\right).$$

Le rayon du cercle dépend de l'amplitude et de la phase initiales.

» On reconnaît que l'amplitude varie périodiquement avec le temps comme les rayons vecteurs de l'origine menés à ce cercle et que la période est ϖ. Le système oscillant exécute donc de véritables *battements :* le régime variable subsiste indéfiniment et le régime stable ne peut jamais s'établir. Nous retrouvons ici le résultat prévu par la théorie générale, à savoir que le régime stable ne peut s'établir qu'avec une oscillation amortie.

» La phase varie aussi périodiquement, mais de deux manières très différentes, suivant le rayon du cercle indicateur. Si l'origine O est extérieure au cercle (*fig.* 7), la variation de cette phase, mesurée par l'angle du *vecteur* OM avec la ligne du centre, oscille entre les valeurs angulaires correspondant aux tangentes menées de l'origine au cercle; il y a donc une sorte de synchronisation périodique avec une erreur alternativement positive et négative.

» Si, au contraire, l'origine est intérieure au cercle indicateur (*fig.* 8), la phase varie d'une manière continue avec le temps, le

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

système *avance* ou *retarde* d'une période T à chaque période ϖ, suivant le sens de la description du cercle indicateur, c'est-à-dire suivant que Θ est plus grand ou plus petit que T. Le système échappe donc à la liaison synchronique, et la synchronisation, même imparfaite, du cas précédent, est impossible.

» 41. *Influence des conditions initiales.* — Il importe de remarquer cette circonstance curieuse que, l'impulsion synchronisante restant la même, le choix des conditions initiales peut conduire à l'une ou l'autre de ces deux espèces de régimes périodiques; la valeur de la percussion u et sa période Θ définissent, en effet, le centre du cercle indicateur, sa vitesse angulaire de description, mais nullement son rayon; ce rayon est déterminé par la position du point représentatif M de l'oscillation, au moment de l'application initiale de la force synchronisante.

» Parmi les conditions initiales, donnant lieu à un régime singulier, on peut citer le cas où le système part du repos; il est facile de voir que le cercle indicateur passe alors par l'origine. L'oscillation offre donc cette particularité singulière de partir de zéro avec une amplitude croissante pendant la durée $\frac{1}{2}\varpi$ jusqu'au double de la longueur OC; puis cette amplitude décroît pendant $\frac{1}{2}\varpi$ jusqu'à devenir nulle, comme si le système revenait au repos; puis le même phénomène recommence et se reproduit périodiquement de ϖ en ϖ.

» On obtiendrait évidemment le même régime en imprimant d'abord à l'oscillation libre l'amplitude $2\overline{OC}$, puis en faisant commencer la percussion périodique au moment de l'élongation.

» 42. *Représentation d'une oscillation par un* VECTEUR. — L'indicatrice de synchronisation définie ci-dessus peut être considérée comme dérivant du mode de représentation symbolique d'une oscillation par un *vecteur*, c'est-à-dire par une droite définie en grandeur, direction et sens.

» En effet, une oscillation est déterminée par deux éléments caractéristiques, l'*amplitude* et la *phase*. Donc une oscillation sera représentée en *coordonnées polaires* par un point M du plan, le rayon vecteur ou *vecteur* OM mené de l'origine à ce point donnant en gran-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

deur l'*amplitude*, l'angle de ce vecteur avec une direction fixe (Oy par exemple), donnant la *phase* exprimée en fraction de circonférence.

» La définition de la phase (4) se trouve, il est vrai, légèrement modifiée, parce qu'on prend pour origine du temps l'époque d'une première percussion dont la période est Θ; l'angle du vecteur représentatif de la phase définit alors la fraction de période Θ qui s'écoule entre l'époque de la première percussion et celle de l'écart nul avec vitesse positive.

» Quoi qu'il en soit, la connaissance d'un point représentatif M ou du vecteur OM permet de reconstituer la construction géométrique donnée plus haut (3), à savoir le cercle, le point mobile d'un mouvement uniforme et la position de ce point à l'origine du temps. Mais, comme cette construction est inutile, on peut supprimer ces cercles qui compliqueraient les épures et dont on n'a dessiné que les amorces sur les figures (7) et (8).

» 13. *Force instantanée périodique appliquée à une oscillation faiblement amortie.* — D'après la remarque faite plus haut (8), l'amortissement très petit correspond à une valeur très faible de αT. Or, dans ce cas, l'angle que fait la spirale logarithmique MB (*fig.* 2), avec son rayon vecteur OM, diffère très peu d'un angle droit, car cet angle ζ a pour expression

$$\text{tang}\zeta = \frac{2\pi}{\alpha T}. \tag{13}$$

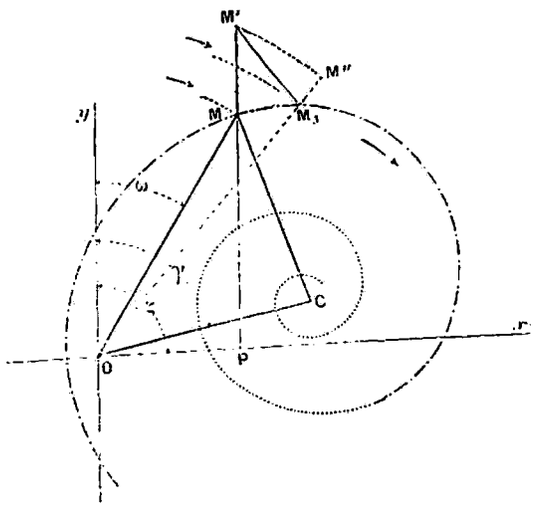
» Il en résulte que l'angle $\frac{\pi}{2} - \zeta$ pourra être considéré comme négligeable devant des angles variables entre de grandes limites, avec d'autant plus d'approximation que αT sera plus petit.

» Cette remarque va nous permettre d'étendre au diagramme représentatif de l'oscillation amortie (spirale logarithmique) l'analyse géométrique de l'effet d'une percussion, si claire avec le cercle représentatif de l'oscillation pendulaire simple. L'assimilation est d'autant plus naturelle que la petitesse de αT rend les spires très voisines de cercles concentriques; elles sont même si serrées, qu'il serait impossible de les séparer à l'échelle des figures ci-jointes si l'on voulait représenter une spirale logarithmique dans laquelle le produit αT aurait la valeur déjà considérable de $\frac{1}{100}$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

» 14. *L'indicatrice de synchronisation est une spirale logarithmique.* — La *fig.* 9 représente en M l'amorce d'un arc de spirale rapporté à des coordonnées obliques (7), l'angle $\gamma O x$ étant égal à ζ comme celui du rayon vecteur OM avec la tangente à la spirale au point M. Mais, ces

Fig. 9.



angles étant très voisins d'un droit, il est presque impossible de montrer graphiquement leur défaut de rectangularité. L'angle $\omega = 2\pi \frac{t - t_0}{T}$ croît proportionnellement au temps jusqu'à l'époque t, où la percussion accroît de la quantité MM' la vitesse représentée par l'ordonnée MP.

» Le déplacement de M', représentatif de l'oscillation subséquente, s'effectue, non sur un arc de cercle dirigé comme M'M'', mais sur un arc de spirale logarithmique $\rho = \lambda e^{-\alpha t}$, qui, au bout du temps Θ, aboutit en M_1; joignons $M'M_1$. L'amortissement très petit produit la diminution $M''M_1$ du rayon vecteur, diminution qu'on regardera comme une différentielle, et qu'on calculera en développant l'exponentielle et négligeant les termes en $\alpha^2\Theta^2$,

$$M''M_1 = -\rho\alpha\Theta.$$

» On obtient ainsi un triangle infinitésimal $MM'M_1$, et l'on construit aisément un triangle fini qui lui reste semblable OMC, dont les côtés sont respectivement inclinés sur ceux du premier d'un même angle $\gamma = M'M_1M''$. Cet angle est d'ailleurs invariable, car il

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

a pour expression

$$(45)\quad \operatorname{tang}\gamma = \frac{M'M''}{M_1M''} = \frac{2\pi\dfrac{\Theta - T}{T}}{\alpha\Theta}, \qquad \sin\gamma = \frac{2\pi\dfrac{\Theta - T}{T}}{\sqrt{\alpha^2\Theta^2 + 4\pi^2\left(\dfrac{\Theta - T}{T}\right)^2}}.$$

» Les relations de similitude donnent

$$(46)\quad \frac{M'M_1 = \dfrac{2\pi\rho}{\sin\gamma}\dfrac{\Theta - T}{T}}{OM = \rho} = \frac{MM' = a}{OC} = \frac{MM_1}{MC};$$

d'où

$$OC = \frac{aT}{2\pi(\Theta - T)}\sin\gamma,$$

$$\frac{1}{\Theta}\frac{MM_1}{MC}\sin\gamma = 2\pi\frac{\Theta - T}{T\Theta} = \frac{2\pi}{\mathfrak{C}}.$$

» Ainsi le côté OC est constant; de plus, il est fixe en direction, car il fait avec l'élément MM′ (ou avec l'ordonnée PM) l'angle invariable γ; le point C est donc fixe.

» D'autre part, le rayon vecteur CM fait l'angle γ avec l'élément MM_1; le lieu du point M, coupant CM sous un angle constant, est donc une spirale logarithmique dont C est le pôle et γ l'angle caractéristique. D'où l'on conclut :

» *Dans le cas de l'oscillation faiblement amortie de période* T, *modifiée par une percussion périodique u très petite, de période* Θ, *peu différente de* T, *l'indicatrice de synchronisation est une spirale logarithmique dont le point asymptotique est situé sur une droite passant par l'origine, faisant* γ *avec l'axe des vitesses l'angle* γ,

$$(47)\quad \operatorname{tang}\gamma = \frac{2\pi}{\alpha}\frac{\Theta - T}{\Theta T} = \frac{2\pi}{\alpha\mathfrak{C}},$$

à une distance de l'origine égale à

$$(48)\quad \mathfrak{ab} = \frac{aT}{2\pi(\Theta - T)}\sin\gamma = \frac{u}{\sqrt{\alpha^2\Theta^2 + 4\pi^2\left(\dfrac{\Theta - T}{T}\right)^2}}.$$

» *La spirale coupe le rayon vecteur issu du point asymptotique sous l'angle* γ;

» *Elle est décrite par ce rayon vecteur avec une vitesse angulaire constante* $\frac{2\pi}{\mathfrak{C}}$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

» 45. *Concordance des résultats avec ceux de la méthode précédente.* — L'existence du point asymptotique démontre intuitivement que le mouvement tend vers un régime stable, c'est-à-dire vers une oscillation pendulaire simple, représentée par le vecteur $OC = \mathfrak{A}$ du point asymptotique; l'amplitude limite est donc $\mathfrak{A}$ et la phase limite $2\pi\Phi = \gamma$, expressions (47) et (48).

» Ces valeurs limites concordent d'ailleurs avec celles que donne la théorie générale relative à l'action d'une force périodique sinusoïdale. Il suffit, dans les expressions (26) et (27), de négliger $\alpha^2 T^2$ ou $\alpha^2 \Theta^2$ devant $4\pi^2$, $\Theta - T$ devant T ou Θ et de remplacer ψ_1 par $\frac{1}{4}$.

» Cette identification prouve directement que la percussion instantanée équivaut ici à une force pendulaire (33).

» La discussion de la spirale indicatrice montre que, pendant le régime variable, il peut se présenter deux cas différents, suivant que les volutes de la spirale, parcourues par le point représentatif, embrassent ou non l'origine; le système oscillant peut donc, pour certaines conditions initiales, échapper d'abord à la liaison synchronique; mais la synchronisation parvient toujours à s'établir, d'abord imparfaite et périodique, finalement parfaite et stable.

» Bien que cette représentation géométrique élégante du régime variable ait été établie dans l'hypothèse très spéciale d'une percussion périodique, le résultat n'en est pas moins fort important, grâce au théorème démontré ci-dessus (31), car il s'étend immédiatement au cas général où la force synchronisante, très petite, varie suivant une loi quelconque avec le temps. On doit donc conclure :

» *Dans le cas de l'oscillation faiblement amortie de période* T, *modifiée par une force périodique très petite, variable suivant une loi quelconque avec le temps, l'indicatrice de synchronisation est la spirale logarithmique correspondant à la percussion équivalente* (33).

» 46. *Équation de l'indicatrice de synchronisation déduite de l'intégrale générale.* — Le théorème, qui démontre l'équivalence d'une force instantanée et d'une force sinusoïdale très petite, nous permet d'affirmer que l'indicatrice de synchronisation, bien que cachée profondément sous les formules, doit s'y retrouver sans trop de difficultés maintenant que le résultat est connu.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

» En effet, dans l'intégrale générale

$$\theta = \mathfrak{A}\, e^{-\alpha t} \sin 2\pi\left(\frac{t}{\mathrm{T}} - \varphi\right) + \mathfrak{B}_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{\Theta} - \psi_1\right),$$

l'introduction des deux conditions restrictives ($\alpha^2 \mathrm{T}^2$ négligeable et T peu différent de Θ) permet d'appliquer l'artifice employé dans la théorie des battements sonores, et de considérer, pendant l'intervalle Θ d'une période, le premier terme de l'intégrale comme une oscillation pendulaire simple, de même période que le second terme; il suffit de poser

$$\frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{1+\varepsilon}{\Theta}, \qquad \chi = \varphi - \frac{\varepsilon t}{\Theta}, \qquad a = \mathfrak{A}\, e^{-\alpha t},$$

ε étant une quantité très petite. L'écart angulaire θ devient alors la résultante de deux mouvements pendulaires simples, ayant respectivement pour amplitude a et $\mathfrak{B}_1$, et pour phase χ et ψ_1,

$$\theta = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{\Theta} - \chi\right) + \mathfrak{B}_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{\Theta} - \psi_1\right).$$

» C'est donc aussi un mouvement pendulaire simple, mais dont l'amplitude et la phase varient avec le temps. Si l'on représente chaque oscillation par un vecteur (42), dont la longueur figure l'amplitude et la direction la phase, on conclut immédiatement que l'oscillation θ a pour vecteur OM (*fig.* 9), résultante du vecteur fixe OC ($\mathfrak{B}_1$, ψ_1) et du vecteur mobile CM (a, χ). La courbe décrite par l'extrémité M du vecteur mobile a pour coordonnées polaires $\mathrm{CM} = r = a$, $\omega = -2\pi\chi$ (ω compté dans le sens de $2\pi\frac{t}{\mathrm{T}}$), d'où

$$r = \mathfrak{A}\, e^{-\alpha t}, \qquad \omega = 2\pi\left(\frac{\varepsilon t}{\Theta} - \varphi\right). \tag{49}$$

» On voit qu'elle est décrite d'un mouvement uniforme.

» L'équation polaire de cette courbe s'obtient en éliminant t

$$r = \mathfrak{A}\, e^{-\frac{\alpha\Theta}{2\pi}(\omega - \varphi)}, \tag{50}$$

en posant comme ci-devant

$$\frac{\varepsilon}{\Theta} = \frac{1}{\mathrm{T}} - \frac{1}{\Theta} = \frac{1}{\mathfrak{C}}.$$

» C'est bien là la spirale logarithmique ayant pour pôle le point

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

C représentatif du régime stable et que nous avons appelée *indicatrice de synchronisation*.

VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE DE L'INDICATRICE DE SYNCHRONISATION.

» 47. *Construction automatique de l'indicatrice.* — En raison de la généralité et de la simplicité de cette représentation du régime variable, j'ai cherché une vérification expérimentale décisive; j'ai pensé qu'elle ne laisserait rien à désirer, si le système oscillant, soumis à une force périodique additionnelle, enregistrait lui-même son indicatrice de synchronisation.

» L'application de la méthode optique et des phénomènes décrits précédemment, jointe à l'emploi de la Photographie, m'ont permis d'atteindre ce résultat.

» Le système oscillant choisi est un lourd pendule battant à peu près la seconde ($T = 2^s \pm \varepsilon$); les oscillations sont amorties par un barreau aimanté fixé transversalement à la tige, dont l'un des pôles oscille dans l'axe d'un tube de cuivre rouge, ou mieux d'un solénoïde à circuit fermé : cette dernière disposition permet de faire varier le coefficient d'amortissement (d'ailleurs toujours très faible) entre de grandes limites par l'intercalation de résistances extérieures.

» La force synchronisante est produite par l'action d'un courant électrique qu'envoie toutes les deux secondes ($\Theta = 2^s$) une horloge astronomique. Ce courant traverse un solénoïde enveloppant l'autre pôle de l'aimant précité et l'attire périodiquement pendant une fraction de seconde (environ $0^s,70$). Un miroir plan, fixé au couteau de suspension, permet de faire réfléchir un rayon lumineux dans le plan vertical et de lui imprimer une déviation proportionnelle au déplacement angulaire θ du pendule; il reste à produire, à l'aide d'un dispositif auxiliaire, une déviation horizontale proportionnelle à la vitesse $\frac{d\theta}{dt}$ et à composer les déviations.

» 48. *Composition optique du déplacement et de la vitesse de l'oscillation.* — Ce dispositif consiste en un galvanomètre à miroir du type Deprez-d'Arsonval, à cadre très léger, recevant le courant induit par les pôles de deux longues aiguilles d'acier aimanté, fixées transversa-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

lement au bas du pendule et oscillant dans l'axe de quatre longs solénoïdes. Les éléments de ce galvanomètre ont été choisis de manière que le régime stable d'oscillation reproduise aussi fidèlement que possible, à chaque instant, la vitesse d'oscillation du pendule.

» La reproduction rigoureuse est théoriquement impossible, puisqu'il existe inévitablement une différence de phase entre la force synchronisante et le mouvement synchronisé (16); mais, par un choix convenable de la durée d'oscillation propre du galvanomètre ($\frac{1}{2}$ seconde) et l'affaiblissement suffisant de son coefficient d'amortissement (1), on peut réduire la différence de phase à une fraction négligeable. Ce problème a d'ailleurs été discuté plus haut (28), à un point de vue un peu différent, à propos de la réduction de l'ellipse de Lissajous à la forme circulaire, et on a montré qu'on peut s'approcher autant qu'on le veut de la solution rigoureuse.

» Dans l'appareil ainsi combiné, le régime stable est atteint en cinq ou six secondes, et la déviation du galvanomètre est à chaque instant sensiblement proportionnelle à la vitesse angulaire du pendule.

» L'image d'une étincelle d'induction condensée éclatant entre deux pôles de magnésium, réfléchie sur les deux miroirs, se déplace suivant une ellipse qu'on ramène aisément à un cercle en intercalant une résistance convenable dans le circuit du galvanomètre.

» 49. *Enregistrement photographique de l'indicatrice.* — Une plaque photographique au gélatinobromure d'argent, placée au foyer de la lunette d'observation, garde la trace de ces impressions successives; comme l'amplitude varie sans cesse, on obtient non pas des cercles mathématiques, mais des spires très serrées; la forme sensiblement circulaire de ces courbes est une vérification très délicate du réglage de l'appareil (2). Pour obtenir le tracé automatique de l'indicatrice, il suffit d'ajouter devant la source un obturateur manœuvré par un électro-aimant qui ne découvre la source lumineuse qu'au

---

(1) Le galvanomètre a une résistance propre de 55 ohms, les quatre solénoïdes de 15 ohms : on ajoute 30 ohms environ pour réduire l'ellipse à un cercle, ce qui fait 100 ohms de résistance totale; dans ces conditions, le coefficient d'amortissement et du galvanomètre est 0,06; le tube de fer intérieur au cadre a été supprimé.

(2) Ces spires en pointillé sont bien visibles sur la *fig.* 11 ci-après; on a évité de les produire sur le cliché reproduit *fig.* 10.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

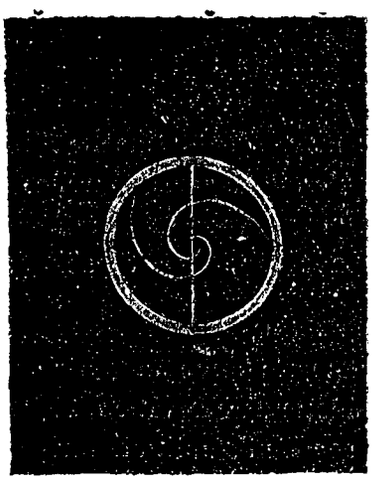
moment de l'émission du courant. Il en résulte que le tracé de chaque cercle se réduit à un point, si le courant est instantané, et ce point est justement celui dont on veut déterminer le lieu.

» La juxtaposition de tous ces points forme une courbe en apparence continue qui réalise la définition de *l'indicatrice de synchronisation.*

» La *fig.* 10 est la reproduction en négatif, *sans aucune* retouche, d'un de ces clichés par les procédés de M. Dujardin; la droite verticale a été obtenue en faisant osciller le pendule seul, galvanomètre en repos hors circuit; l'horizontale en faisant osciller le galvanomètre par une impulsion auxiliaire, le pendule étant au repos; ce sont les axes des déplacements et des vitesses; ils sont sensiblement rectangulaires ($\zeta = 90^\circ$ à fort peu près).

Fig. 10.

Fig. 11.



» La spirale indicatrice a été obtenue de la manière suivante : le pendule étant au repos, on lance le courant synchronisant qui met le pendule en oscillation : lorsque l'amplitude est devenue suffisante, on commence l'enregistrement photographique. Il a été poursuivi pendant vingt minutes environ, ce qui correspond à deux périodes $\mathfrak{T}$ ou à deux spires de l'indicatrice (ici $T > \Theta$); en prolongeant l'expérience, on finirait par atteindre le point asymptotique.

» La spirale est double sur la *fig.* 10, parce que l'émission de la lumière était double; cela tient à ce que l'attraction synchronisante,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

au lieu d'être instantanée, durait environ $\frac{2}{3}$ de seconde : l'obturateur percé d'une fente livrait passage deux fois à la lumière, à l'aller et au retour, c'est-à-dire au début et à la fin du courant.

» La vérification n'en est pas moins précise; car, d'après le théorème déjà cité (31), une action constante, périodiquement interrompue (32 et 33), équivaut à une impulsion instantanée, car toutes deux équivalent à une force sinusoïdale : la double spirale de la *fig.* 10 équivaut donc à une spirale unique, qui correspondrait à l'époque moyenne du courant conformément à l'équivalence démontrée.

» 50. *Génération cinématique de la spirale indicatrice.* — La *fig.* 11 offre un autre genre de vérification. Cette courbe a été obtenue avec le même dispositif que la précédente, seulement le courant synchronisant n'agissait plus sur le pendule qui oscillait librement suivant une amplitude ρ décroissant de $d\rho = -\rho\alpha\Theta$ à chaque période du courant manœuvrant l'obturateur. La différence des périodes ($\Theta > T$) fait que l'impression photographique s'exécute un temps $\Theta - T$ plus tard, par suite en retard de l'angle

$$d\omega = 2\pi\frac{\Theta - T}{T} = \frac{2\pi\Theta}{\tilde{\omega}}.$$

» L'équation du lieu des traces photographiques (lieu des extrémités du vecteur aux époques $\Theta, 2\Theta, \ldots, n\Theta$, de l'oscillation amortie de période T) a donc pour équation différentielle

$$\frac{d\rho}{d\omega} = -\rho\frac{\alpha\tilde{\omega}}{2\pi} = -\rho\cot\gamma;$$

par suite, l'équation en coordonnées polaires est

$$\rho = Ce^{-\frac{\alpha\tilde{\omega}}{2\pi}\omega}.$$

C'est donc *une spirale logarithmique concentrique à l'origine* ayant le même paramètre γ que l'*indicatrice de synchronisation* (46). Les cercles qui l'encadrent sont les cercles décrits ci-dessus (49) lorsque l'obturateur est écarté (le pointillé est dû à la succession rapide des étincelles; il donne la période de l'interrupteur de la bobine d'induction) (1).

» L'identité expérimentale des deux spirales (elles sont rigoureu-

(1) Les clichés originaux ont été projetés devant la Société.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

sement superposables) est une vérification importante parce que, la première, ou indicatrice, nécessite la rigueur des effets dynamiques de la force synchronisante sur le pendule, tandis que la seconde (spirale concentrique) est une construction purement cinématique où la force additionnelle n'intervient plus. Le tracé de la seconde réussit toujours; celui de la première exige une grande régularité dans la durée et l'intensité de la force synchronisante. A chaque variation accidentelle d'intensité, il se forme un point anguleux sur l'indicatrice parce qu'il se greffe sur l'arc déjà décrit un arc d'une nouvelle spirale [de même paramètre, il est vrai, situé sur la même droite OC (*fig.* 9)], mais dont le point asymptotique est à une distance différente de l'origine.

TROISIÈME PARTIE. — Applications diverses.

» 51. *Avantage de l'amortissement électromagnétique.* — Les effets variés produits par l'amortissement sur le régime des oscillations peuvent être réalisés dans la pratique de bien des manières en appliquant aux systèmes oscillants des résistances passives, fonctions de la vitesse, telles que la viscosité des milieux, certains frottements intérieurs, comme on les observe par flexion ou extension dans les métaux plus ou moins recuits ou écrouis, etc. Mais aucun de ces artifices ne réalise une résistance proportionnelle à la vitesse avec autant de perfection que l'amortissement électromagnétique : le déplacement d'un pôle d'aimant dans l'axe d'un solénoïde, fermé sur des résistances convenables, est le type des dispositifs simples qui permettent de graduer avec une extrême facilité la grandeur du coefficient d'amortissement sans crainte d'altérer la loi de proportionnalité à la vitesse, comme peut le faire l'emploi de la viscosité ou du frottement. Si donc on veut utiliser les lois théoriques obtenues précédemment, c'est à l'amortissement électromagnétique qu'il est nécessaire de recourir.

Synchronisation électromagnétique appliquée a l'horlogerie.

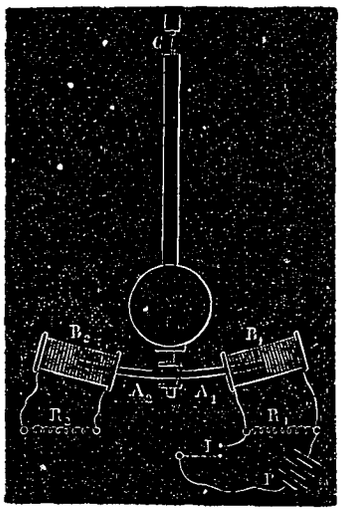
» 52. *Dispositif général : amortisseur et récepteur.* — Le dispositif décrit précédemment pour la vérification de la spirale indica-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

trice (47) s'applique immédiatement à la synchronisation des horloges à balancier et à la distribution de l'heure dans des conditions de haute précision.

» On fixe transversalement à la tige du balancier à synchroniser (*fig.* 12), au-dessous (ou au-dessus) de la lentille et dans le plan

Fig. 12.



d'oscillation, un barreau aimanté $A_1 A_2$ courbé suivant une circonférence concentrique à la suspension C : deux bobines B_1, B_2 en bois ou en ébonite, couvertes de fils de cuivre isolés, enveloppent respectivement les extrémités de ce barreau ; leurs axes coïncident avec la direction moyenne du déplacement du pôle correspondant. L'une des bobines B_1 (*récepteur*) reçoit le courant électrique synchronisant et fonctionne par *attraction* (1) sur le pôle d'aimant qu'elle enveloppe ; l'autre B_2 (*amortisseur*), fermé sur une résistance convenable R_2, produit, par l'action inductrice de l'autre pôle, l'amortissement nécessaire à la synchronisation (2).

» Si la longueur du barreau et celle des bobines sont suffisamment grandes relativement à l'amplitude du déplacement des pôles,

(1) Afin de conserver une distribution stable du magnétisme du barreau, lequel pourrait se désaimanter partiellement, si l'action électromagnétique était répulsive.

(2) Ce dispositif, en apparence identique à celui de Jones et à d'autres plus récents, en diffère par l'utilisation d'une bobine comme amortisseur ; condition essentielle, dont l'importance n'avait pas encore été signalée.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

les portions utilisées du champ magnétique des bobines ont une intensité sensiblement uniforme : on réalise ainsi d'une manière pratiquement rigoureuse les trois forces considérées dans la théorie développée ci-dessus (9).

» 53. *Éléments de réglage.* — Le courant synchronisant lancé à chaque période Θ par l'horloge directrice (figurée ici par le contact distributeur I dans le circuit de la pile P) peut être réglé de plusieurs manières :

» 1° Par le nombre et la grandeur des couples de la pile;

» 2° Par la durée de l'émission du courant;

» 3° Par la dérivation R_1 reliant les extrémités des fils de la bobine B_1.

» La pile n'a pas besoin d'être très énergique; l'action électromagnétique de la bobine, étant tangentielle et s'exerçant à l'extrémité d'un long bras de levier, est très puissante : en outre, comme elle est proportionnelle à la masse magnétique du pôle d'aimant, on dispose donc par le choix du barreau aimanté d'un facteur qui permet de multiplier la force électromagnétique par un nombre considérable.

» La durée de l'émission du courant qu'on peut étendre presque à une demi-période apporte une nouvelle ressource, si bien qu'on peut se contenter, pour des balanciers pesant de 5^{kg} à 10^{kg}, d'un courant de 3 à 8 milliampères.

» 54. *Choix de l'amortissement.* — C'est la grandeur de l'amortissement qui détermine finalement l'intensité du courant à employer : en effet, plus l'amortissement est faible, moins la force synchronisante a besoin d'être énergique. Il semble donc qu'on ait intérêt à employer un amortissement et un courant aussi faibles que possible pour économiser les piles et ménager les contacts du distributeur. Mais, d'un autre côté, plus l'amortissement est grand, plus la durée du régime variable est courte (12); par conséquent, plus la synchronisation est rapide, parfaite et indépendante des variations inévitables, soit du mécanisme d'horlogerie, soit du courant synchronisant.

» C'est donc, en définitive, d'une part, la perfection mécanique

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de l'horloge à synchroniser, d'autre part, le soin qu'on mettra à maintenir constant le courant synchronisant qui réglera le degré d'amortissement à donner au balancier.

» L'intérêt s'applique surtout à la synchronisation d'horloges médiocres. Dans ce cas, un amortissement un peu énergique (1) est utile : on prend alors un barreau fortement aimanté et on remplace la bobine B_2 par un simple tube de cuivre de 2^{mm} à 3^{mm} d'épaisseur; le courant se règle par la grandeur de l'amplitude qu'on veut conserver au balancier.

» 55. *Réglage apériodique.* — La discussion de l'influence des causes accidentelles pouvant faire varier le régime de synchronisation, discussion qui ne saurait trouver place ici (2), permet de fonder sur l'observation de l'amplitude du balancier et sur la phase relative de l'impulsion synchronisante un mode de réglage extrêmement sûr, qui s'appliquerait à beaucoup de problèmes analogues.

» On peut, comme il suit, en abréger la théorie. Il importe pour la régularité de la synchronisation, surtout pendant les régimes variables causés par les variations inévitables des forces en jeu (spécialement de l'attraction électromagnétique), que les oscillations d'*amplitude* et surtout de *phase* du balancier soient réduites à leur minimum : or les oscillations de la *phase* sont représentées (*fig.* 9) par les oscillations angulaires du rayon vecteur OM de la spirale indicatrice, lesquelles sont d'autant moindres que l'angle γ caractéristique de la spirale est plus voisin de zéro. On a donc intérêt à rendre cet angle aussi aigu que possible afin de réduire le nombre et le rayon des spires.

» La condition limite est que $\gamma = 0$. Or, comme

$$\tan\gamma = \frac{2\pi(\Theta - T)}{\alpha T \Theta}, \tag{45}$$

on doit avoir

$$T = \Theta.$$

---

(1) On a vu plus haut (14) que, malgré cette dénomination, le produit αT reste très notablement inférieur à $\frac{1}{10\pi}$.

(2) *Voir* les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CVI, p. 1206, et le *Journal de Physique*, 2e série, t. VIII, p. 101.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Il faut donc chercher à rendre la période du balancier égale à celle de l'impulsion synchronisante.

56. *Contrôle de la stabilité du régime de synchronisation.* — Il semble que cette condition soit la négation du problème de la synchronisation et même qu'elle constitue un cercle vicieux; mais il n'en est rien, grâce aux remarques suivantes :

» *Quand le régime stable est établi, on peut reconnaître immédiatement si* Θ *est plus grand ou plus petit que* T. Il suffit, en effet, d'observer au chronographe ou simplement au téléphone l'époque de la percussion équivalente, c'est-à-dire l'*époque moyenne* du courant synchronisant; si elle a lieu *après* le passage du balancier à la position d'équilibre (le sens du mouvement étant le sens de l'attraction de la bobine), comme l'indique la *fig.* 13, Θ est plus grand que T, le balancier *avance*; si elle a lieu *après* (*fig.* 14), Θ est moindre que T, le balancier *retarde*. On voit, en effet, que la percussion MM′ (*fig.* 13), en même temps qu'elle compense la perte $\frac{1}{2}\alpha\Theta$ d'amplitude, diminue l'angle $\omega = yOM$, en faisant reculer angulairement le vecteur OM, tandis que la percussion NN′ (*fig.* 14) fait avancer le vecteur ON.

Fig. 13.

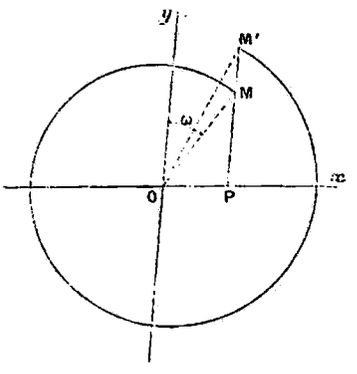
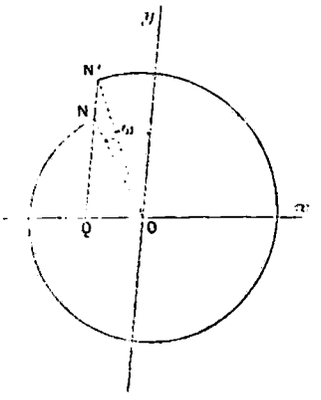


Fig. 14.



» A l'aide de cette règle, on corrige aisément *en marche* ce retard ou cette avance au moyen de poids additionnels placés au milieu de la tige du balancier (¹); on arrive ainsi, après quelques essais mé-

(¹) On sait que l'addition d'un poids dans ces conditions fait *avancer* le balancier, c'est-à-dire diminue la période T.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

thodiques, à la phase nulle $\gamma = 0$, lorsque l'époque moyenne de l'attraction coïncide avec le passage à la verticale.

» Il suffit de répéter de temps en temps cette observation pour maintenir le réglage, en modifiant, au besoin, les poids additionnels; d'autre part, la grandeur de l'amplitude donnant la mesure de l'intensité du courant, le balancier devient ainsi le meilleur galvanomètre pour conserver l'égalité parfaite du régime de synchronisation.

» Ce système, employé dans diverses expériences (École Polytechnique, Service géographique de l'armée, ateliers Borrel (1), gare du Nord, à Paris), fonctionne d'une manière courante depuis près de trois ans à l'observatoire de Nice pour synchroniser les horloges astronomiques des trois équatoriaux et du petit méridien.

» Ce mode de réglage se nomme *apériodique* parce qu'à chaque variation de la force synchronisante, l'amplitude et la phase atteignent leur valeur limite sans la dépasser. L'indicatrice de synchronisation devient rectiligne : la spirale, en effet, s'est *déroulée* suivant une droite limitée à un point qu'elle atteint *asymptotiquement* (2).

» 57. *Synchronisation par une impulsion de période multiple de celle du balancier.* — Le même dispositif peut servir à entretenir synchroniquement l'oscillation d'un balancier de période autre que celle du courant impulsif. J'ai réalisé l'expérience avec un balancier pesant 27^{kg}, battant les $\frac{5}{4}$ de seconde (comme celui de l'horloge de la Bourse de Paris, construite par la maison Henry Lepaute qui m'a obligeamment prêté ce balancier); un barreau aimanté d'environ $0^{m},25$ de longueur et pesant 250^{gr} a été fixé transversalement au-dessous de la lentille; il s'engageait d'un côté dans l'axe d'un solénoïde, de l'autre dans un tube de cuivre de 3^{mm} d'épaisseur et de $0^{m},08$ de longueur. Un courant de 8 à 10 milliampères, agissant pen-

(1) M. Borrel a obligeamment installé et fait fonctionner sous les yeux de la Société divers appareils synchronisés suivant la méthode présentement décrite. L'un deux était particulièrement intéressant : c'était une horloge à secondes sans mécanisme moteur. Le courant suffit non seulement à synchroniser le balancier, mais encore à restituer le faible travail dépensé dans le rouage de la minuterie. Il est difficile de réduire à une plus grande simplicité l'appareil de distribution de l'heure à haute précision.

(2) Voir, pour plus de détail, le *Journal de Physique*, 2e série, t. VIII, p. 113.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

dant $\frac{2}{3}$ de seconde, envoyé toutes les $\frac{1}{2}$ minutes par une double came électrique fixée sur la roue d'échappement de l'horloge directrice, suffisait pour mettre en oscillation le balancier partant du repos et à le maintenir à l'amplitude de $\pm 0^{o}5o'$. La période avait été réglée approximativement par enregistrement sur un chronographe; le réglage, à une fraction de seconde par heure, est parfaitement suffisant. Le rapport de la période synchronisante à la période synchronisée était donc de 30 à $\frac{5}{2}$ ou de 12 à 1. L'expérience a si bien réussi que je n'hésiterais pas à conseiller l'emploi de rapports beaucoup plus élevés, par exemple de 30 à 1 ($\Theta =$ minute pour $T = 2^{s}$), mais il faudrait augmenter l'amortissement et la force synchronisante si l'on craignait des inégalités accidentelles dans la marche des appareils à synchroniser ou dans l'intensité du courant.

» La méthode de contrôle indiquée précédemment dans la description du réglage apériodique permettrait de surveiller *en marche* la régularité du synchronisme des appareils par la mesure de l'amplitude et de la phase : l'enregistrement électrique serait tout indiqué pour le contrôle (¹).

» Il est inutile d'insister sur les applications qu'on pourrait faire de ce mode général de *liaison synchronique* à des appareils très différents de ceux de l'horlogerie.

SYNCHRONISATION ÉLECTROMAGNÉTIQUE D'UN COURANT ÉLECTRIQUE.

» 58. *Équation différentielle du régime de la charge d'un condensateur.* — Nous avons jusqu'ici considéré comme système oscillant un corps matériel soumis à des forces *ponderomotrices;* mais les mêmes considérations s'appliquent, sans y rien changer, à des éléments d'une nature toute différente, susceptibles de prendre un régime oscillatoire sous l'influence de *forces électromotrices.*

» Le phénomène des charges et décharges oscillantes d'un condensateur est l'exemple qui offre l'identification la plus directe avec les phénomènes purement mécaniques étudiés précédemment.

» Considérons un condensateur de capacité C, dont les armatures sont réunies par un conducteur de résistance R, doué d'une self-

(¹) *Voir,* pour la mesure de la phase, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. CVI, p. 100, et *Journal de Physique,* 2ᵉ série, t. VIII, p. 105.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

induction dont le coefficient est L et siège d'une force électromotrice e variable périodiquement avec le temps, suivant une période Θ.

» Soient V la différence de potentiel des deux armatures du condensateur, et i l'intensité du courant dans la résistance R à l'époque t.

» On sait, d'après le théorème de Kirchhoff, que le produit Ri est égal à la somme algébrique des forces électromotrices et de la différence de potentiel aux extrémités de cette résistance R.

» Les deux forces électromotrices en jeu sont d'abord la force e, supposée indépendante des phénomènes électriques du circuit, et la force électromotrice de self-induction $-L\frac{di}{dt}$; on aura donc

$$Ri = e - L\frac{di}{dt} - V. \tag{52}$$

(les deux signes négatifs expriment que l'effet de ces deux forces est toujours de s'opposer à l'accroissement de l'intensité).

» Si l'on désigne par q la charge du condensateur correspondant à la différence de potentiel V, on a les deux relations

$$q = CV \qquad \text{avec} \qquad \frac{dq}{dt} = i = C\frac{dV}{dt}. \tag{53}$$

» Substituant et ordonnant, il vient

$$LC\frac{d^2V}{dt^2} + RC\frac{dV}{dt} + V = e, \tag{54}$$

équation différentielle qui détermine à chaque instant la différence de potentiel entre les armatures du condensateur, sous l'influence de la force électromotrice e.

» 59. *Identification avec l'équation différentielle d'un système matériel oscillant.* — On reconnaît immédiatement que cette équation différentielle est de même forme que l'équation (18), qui détermine à chaque instant l'écart d'un système oscillant, soumis à une force dont le moment est F.

» C'est que, en effet, la différence de potentiel aux armatures d'un condensateur est susceptible d'osciller lorsqu'on réunit les armatures par un fil résistant doué de self-induction. Pour obtenir les lois de ces oscillations, il n'est pas besoin de recommencer les calculs :

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

il suffit d'identifier les coefficients et de substituer les valeurs correspondantes dans les relations aux systèmes matériels.

» On calculera d'abord la période et le coefficient d'amortissement propre au système électrique supposé libre, c'est-à-dire non influencé par une force électromotrice périodique, en faisant $e = 0$ comme on a fait précédemment $F = 0$; on obtiendra par identification

$$\frac{L}{\mu} = \frac{R}{q} = \frac{\frac{1}{C}}{r} = H, \tag{55}$$

en appelant H le quotient commun.

» Cette identification se traduit comme il suit, en langage vulgaire :

Le coefficient de self-induction joue le rôle du moment d'inertie.
La résistance électrique » du moment de viscosité.
L'inverse de la capacité » du couple de torsion.

» Substituant ces coefficients dans les expressions de α et de T, il vient

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \qquad \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{1}{CL} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2, \tag{56}$$

qui donnent le coefficient d'amortissement et la période propre du système libre figurant dans l'intégrale de l'équation différentielle sans second membre.

$$V = \mathfrak{A}_0 e^{-\alpha t} \sin 2\pi \frac{t - t_3}{T}. \tag{57}$$

» La charge et la décharge d'un condensateur s'effectuent donc suivant une oscillation amortie dont les éléments caractéristiques sont indépendants de la grandeur de la charge et ne dépendent que de la capacité du condensateur et de la constitution du conducteur réunissant les armatures.

» 60. *Lois des regimes permanent et variable étendues aux oscillations électriques.* — L'addition dans le conducteur d'une force électromotrice périodique de période Θ, développée suivant la série de Fourier (19), est de modifier le régime de charge ou de décharge de manière à satisfaire à l'équation différentielle avec second membre, et l'intégrale (20) en donne l'expression.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

» La discussion faite au début (12) permet d'établir, sans nouvelle démonstration, que la différence oscillatoire du potentiel aux armatures du condensateur cessera de varier suivant la période propre T, et qu'elle adoptera finalement la période Θ de la force électromotrice e. Le *régime oscillatoire de charge et décharge sera donc synchronisé, grâce à l'induction électromagnétique dont le terme* $-L\frac{di}{dt}$ *caractérise la grandeur*, et qui, avec la résistance R, détermine le *coefficient d'amortissement*. Il y a donc une véritable *synchronisation électromagnétique* des oscillations du potentiel et du courant électrique dans le système donné : et, comme dans le cas des oscillations des systèmes matériels, le régime permanent de synchronisation sera atteint d'autant plus vite que le coefficient d'amortissement sera plus grand.

» L'identification si directe pour la différence de potentiel n'est pas moins évidente pour l'intensité qui en est la dérivée, en tenant compte de la différence de phase inhérente aux deux expressions.

» On reconnaîtrait de même que, dans les conditions ordinaires, le produit αT est très petit. Ainsi, en admettant que le circuit considéré ait pour résistance 1 ohm, pour coefficient de self-induction 10 henrys et soit fermé par un condensateur ayant pour capacité 10 microfarads, on obtiendrait (1), pour α, T et αT,

$$\alpha = \frac{1}{20}, \qquad T = \frac{1}{50,33} \text{ de seconde}, \qquad \alpha T = \frac{1}{1066}.$$

» Dans l'industrie électrique, un alternateur ayant pour résistance 1 ohm présente une self-induction d'environ $\frac{1}{20}$ de henry et une capacité voisine de $\frac{1}{30}$ de microfarad ; on en déduit

$$\alpha = 10, \qquad T = \frac{1}{5000} \text{ de seconde}, \qquad \alpha T = \frac{1}{500}.$$

---

(1) D'une manière générale, si l'on a :

$R = \rho$ ohms,	1 ohm	$= 10^9$ unités de résistance C.G.S.,
$L = \lambda$ henrys,	1 henry (ou quadrant)	$= 10^9$ de self-induction C.G.S.,
$C = \varkappa$ microfarads,	1 microfarad	$= 10^{-15}$ de capacité C.G.S.,

On aura, en substituant les nombres ρ, λ, $\varkappa$, les valeurs numériques

$$\alpha = \frac{\rho}{2\lambda}, \qquad \frac{4\pi^2}{T^2} - \frac{10^6}{\varkappa\lambda} - \left(\frac{\rho}{2\lambda}\right)^2,$$

et approximativement

$$T = 2\pi\sqrt{\varkappa\lambda}\,10^{-3}, \qquad \alpha T = \pi\rho\sqrt{\frac{\varkappa}{\lambda}}\,10^{-3}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

» Dans un genre d'appareils très différents, on peut citer les résonateurs employés par M. Blondlot pour l'application de la méthode de Hertz (¹). Les données publiées suffisent pour fournir l'*ordre de grandeur* des coefficients.

» La résistance du fil de cuivre est d'environ $\frac{1}{500}$ d'ohm, soit 2.10^6 unités C.G.S, le coefficient de self-induction de 250^{cm} unités C.G.S., le temps T de 10^{-7} secondes : donc

$$\alpha = 4.10^3, \qquad T = 10^{-7}, \qquad \alpha T = \frac{1}{2500}.$$

» Ainsi, ces dispositifs électriques si variés offrent des valeurs de αT du même ordre de petitesse que celles des systèmes mécaniques étudiés ci-dessus (15).

» 61. *Synchronisation par force sinusoidale : cas singuliers.* — Nous ne nous étendrons pas sur l'identification relative au cas général où la force électromotrice périodique est quelconque : le cas particulier où elle est *sinusoïdale*, $e = E \sin 2\pi\left(\frac{t}{\Theta} - \Phi\right)$, offre beaucoup plus d'intérêt, car il correspond à la production des *courants alternatifs sinusoïdaux* qui forment le type auquel on rapporte le plus souvent les phénomènes utilisés dans la pratique.

» Grâce aux formules de transformation (55) et (56), les expressions (26) et (27) nous donneront, sans avoir besoin de les traduire, l'amplitude $\mathfrak{B}_1$ et la phase relative $\Phi_1 - \psi_1$ de l'oscillation synchronisée (16), en fonction de l'amplitude B_1 (qu'on devra remplacer par $\frac{E}{C}$), car

$$HB_1 = \frac{E}{C}, \tag{58}$$

de la force synchronisante $E \sin 2\pi\left(\frac{t}{\Theta} - \Phi_1\right)$.

» Sans reprendre la discussion générale, nous nous bornerons à rappeler les cas singuliers : le premier est celui pour lequel la différence de phase est égale à $\frac{1}{4}$; il correspond à la valeur Θ, satisfaisant à la condition

$$\alpha^2 - 4\pi^2\left(\frac{1}{T^2} - \frac{1}{\Theta'^2}\right) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{4\pi^2}{\Theta'^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} + \alpha^2;$$

(¹) *Comptes rendus*, t. CXIII, p. 628.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

substituant la valeur de α (56), il vient

$$(59) \qquad \frac{4\pi^2}{\Theta^2} = \frac{1}{CL} \qquad \text{ou} \qquad \Theta' = 2\pi\sqrt{CL}.$$

» Telle est la valeur de la période de la force électromotrice qui donne à la différence de potentiel aux armatures du condensateur une avance de $\frac{1}{4}$ de période ; on voit que $\Theta' < T$.

» D'autre part, l'amplitude maximum de l'oscillation correspond à la valeur Θ'' satisfaisant à la relation

$$\alpha^2 = 4\pi^2\left(\frac{1}{T^2} - \frac{1}{\Theta''^2}\right) \qquad \text{ou} \qquad \frac{4\pi^2}{\Theta''^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} - \alpha^2,$$

d'où

$$(60) \qquad \frac{4\pi^2}{\Theta''^2} = \frac{1}{CL} - \frac{2R^2}{4L^2} \qquad \text{ou} \qquad \Theta'' = 2\pi \frac{\sqrt{CL}}{\sqrt{1 - \frac{R^2C}{2L}}}.$$

Dans ce cas $\Theta > T$.

» La première valeur Θ' est toujours réelle ; la seconde Θ'' ne l'est pas toujours ; elle est imaginaire lorsque $2L < R^2C$ ou bien $\frac{4\pi^2}{T^2} < \alpha^2$, ou enfin $\alpha T > 2\pi$, ce qui suppose un amortissement considérable. Mais, lorsque α n'est pas très grand, Θ'' est réel et diffère peu de Θ', car en retranchant ou en ajoutant les deux équations de condition pour éliminer soit T^2, soit α^2, on a les relations

$$(61) \qquad \frac{1}{\Theta'^2} - \frac{1}{\Theta''^2} = 2\alpha^2, \qquad \frac{1}{\Theta'^2} + \frac{1}{\Theta''^2} = \frac{2}{T^2}.$$

» On reconnaît, dans l'expression (59), la valeur théorique qu'on attribue d'ordinaire à la période propre d'un système à oscillations électriques.

» Cette période propre est, en réalité, d'après la formule (56),

$$(62) \qquad T = 2\pi \frac{\sqrt{CL}}{\sqrt{1 - \frac{R^2C}{4L}}}.$$

» Il est vrai qu'on admet la première comme valeur approchée, particulièrement lorsque la résistance R du conducteur est faible ; mais ces différences montrent combien il est nécessaire de connaître avec certitude les coefficients C, L et R pour calculer T. Les phénomènes découverts par Hertz et si bien analysés déjà par MM. Sarasin, De la Rive, Blondlot, Poincaré et Bjerknes, permettront, lorsqu'ils seront plus profondément connus, de juger laquelle de ces for-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

mules doit convenir et dans quelles conditions s'effectue l'excitation, la résonance ou la synchronisation dans les conducteurs employés.

» 62. *Extension probable des lois de la synchronisation au couplage des alternateurs.* — Les machines dynamo-alternatrices employées dans l'industrie électrique et les circuits qu'elles alimentent offrent des phénomènes très analogues à ceux dont il vient d'être question ; on reconnaît en effet, dans ces circuits, les éléments R, L, C et e qui figurent dans l'équation différentielle, de sorte que le régime d'un alternateur est nécessairement un régime permanent dont l'intensité est *synchronisée* suivant la période imposée, en dernière analyse, par la vitesse de rotation.

» Mais les phénomènes deviennent beaucoup plus complexes lorsqu'on couple deux alternateurs en *quantité* sur le même circuit; l'expérience ayant prouvé que, dans certaines conditions, le synchronisme parfait peut s'établir et persister ensuite indéfiniment, il est naturel de penser que la règle démontrée ci-dessus (12), « *il n'y a pas de synchronisation sans amortissement* », doit se vérifier dans le système complexe comme dans les cas plus simples.

» Ici, en effet, le problème se complique beaucoup parce qu'il y a superposition d'une synchronisation purement électrique de l'intensité dans les circuits et d'une synchronisation mécanique de la masse matérielle des alternateurs (¹) : les forces pondéromotrices et électromotrices sont liées par des réactions réciproques de nature très diverse, mais très puissantes. Un examen superficiel de la question montre que parmi les réactions électromagnétiques qui sont la cause même des courants produits par les alternateurs se trouvent les éléments essentiels de la synchronisation ; mais la mise en équation du problème est tellement complexe qu'il est difficile d'en tirer une démonstration satisfaisante.

» Nous devons donc nous borner à signaler ce point de vue et à engager les observateurs et les théoriciens à démêler quelque loi partielle permettant de ramener, au moins dans les cas les plus simples, l'explication du synchronisme des alternateurs aux lois générales de la synchronisation.

(¹) Plus exactement, des variations périodiques de leur mouvement uniforme.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

EXTENSION DU MÉCANISME DE LA SYNCHRONISATION A DES PHÉNOMÈNES EXTRÊMEMENT DIVERS.

» 63. *Résumé et Conclusions générales.* — Nous avons examiné quelques applications de la théorie de la synchronisation à des appareils mécaniques ou à des phénomènes électriques; mais, lorsqu'on passe en revue les phénomènes périodiques excités ou entretenus par des causes naturelles ou artificielles, on est frappé de l'analogie qu'ils présentent avec les phénomènes mécaniques simples adoptés comme points de départ. L'assimilation devient plus probable encore lorsque, conformément au théorème précité (31) et aux expériences confirmatives de cet énoncé, on est assuré que c'est la régularité périodique de la force additionnelle qui est l'élément décisif de la synchronisation; en effet, la loi de variation avec le temps, quelque complexe qu'elle soit, n'intervient pas, ou du moins équivaut à une loi sinusoïdale lorsque la force synchronisante est très petite, ce qui est le cas le plus ordinaire.

» Que les oscillations soient lentes comme dans les systèmes à grande masse de la Mécanique terrestre ou céleste, ou rapides comme dans les résonances acoustiques ou électriques, le caractère du régime synchronisé reste le même; on retrouve l'accroissement progressif de l'amplitude à mesure que la période synchronisante se rapproche de la période propre du système oscillant; la différence de phase corrélative plus ou moins voisine de $\frac{1}{4}$ de période, et enfin l'existence d'un amortissement qu'on aperçoit toujours parmi les conditions essentielles du mouvement.

» Nous résumerons donc en rappelant brièvement les résultats établis et en citant une foule de phénomènes qui établissent entre eux une transition complète.

» En Mécanique, les dispositifs synchronisants décrits ci-dessus et l'oscillographe de M. Blondel (1) représentent l'application directe de la théorie; on peut citer ensuite le petit pendule renversé (*Noddy*), contrôle de la stabilité des horloges; puis les oscillations des navires par la houle, oscillations que les ingénieurs s'efforcent de contrarier ainsi que les effets synchronisants de toutes les vibrations (machines, charges roulantes, etc.) sur les parties élastiques des constructions (coques des navires, poutres, etc.).

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXVI, p. 300.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

» En Mécanique céleste, le phénomène des marées et celui des inégalités à longue période s'expliquent par les mêmes principes. Ces phénomènes représentent même les deux types opposés (40-44) : le premier offrant le cas d'un régime stable, conséquence d'un amortissement énergique; le second, celui d'un régime périodique indéfiniment prolongé faute d'un amortissement appréciable.

» En Acoustique, les procédés d'excitation de régimes vibratoires sont de véritables synchronisations où l'on retrouve des vérifications très délicates (tuyaux à anches, résonateurs de Helmholtz, membranes de Bourget, monotéléphones de M. Mercadier, etc.).

» En Électricité, l'établissement d'un courant excité par une force électromotrice périodique dans un circuit résistant doué de capacité et de self-induction est régi, comme on l'a vu, par l'équation différentielle étudiée plus haut (9); le courant est donc réellement synchronisé par la force électromotrice : l'identification des coefficients mécaniques et électriques de l'équation et celle des résultats est des plus intéressantes.

» Les phénomènes observés dans l'excitateur et le résonateur de Hertz rentrent aussi dans la catégorie des mouvements synchronisés.

» En Optique, plusieurs propriétés de la matière pondérable provoquées par les ondes lumineuses (absorption, émission, fluorescence, etc.) paraissent avoir un lien très direct avec les mêmes phénomènes.

» Enfin, il n'est pas jusqu'aux impressions physiologiques dont l'excitation et la persistance ne soient attribuables à un mécanisme analogue.

» Si ces assimilations sont correctes (et leur rapprochement en rend l'exactitude fort probable), le mécanisme de la synchronisation serait d'une extrême généralité : cette conclusion entraînerait l'existence constante d'un amortissement, c'est-à-dire d'une force perturbatrice identifiable à une résistance proportionnelle à la vitesse. Cette sorte de forces ne rentre pas dans la catégorie des actions ordinairement considérées dans la Physique moléculaire : elle devrait donc, au contraire, y être toujours introduite comme partie essentielle des actions élémentaires à l'aide desquelles on cherche à expliquer les phénomènes naturels. »

(Extrait du *Bulletin de la Société internationale des Électriciens*, n° 107, avril 1894.)

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

TABLE DES MATIÈRES.

Pages

Préambule 1
Définition de la synchronisation 1

Oscillation pendulaire simple.

Représentation du déplacement et de la vitesse 2
Phase 3
Équation différentielle 3

Oscillation amortie.

Équation différentielle 4
Représentation du déplacement et de la vitesse 5

PREMIÈRE PARTIE. — Régime permanent (synchronisation).

Équation différentielle du mouvement modifié par une force périodique 8

La force périodique est quelconque.

Intégrale générale de l'équation 8
Influence décroissante des termes d'ordre croissant 9
Condition de synchronisation 10
Objection apparente 10
Exemples montrant la petitesse ordinaire du produit αT 11
Définition de l'*amortissement* : il est le plus souvent très petit 12

La force synchronisante est sinusoïdale.

L'oscillation synchronisée est également sinusoïdale 13
L'oscillation synchronisée est toujours en avance sur la force synchronisante 14
Influence du signe $T - \Theta$ sur la grandeur de la différence de phase 15
Égalité rigoureuse des deux périodes 16

Vérification expérimentale du régime permanent (synchronisation) sous l'action d'une force sinusoïdale.

Description d'un système oscillant : galvanomètre double 17
L'appareil réalise l'indépendance des trois forces en jeu 18
Description de l'inducteur sinusoïdal ou trembleur 19
Expression de la force synchronisante 20
Composition optique des oscillations synchronisante et synchronisée 21
Caractère des courbes suivant le régime variable ou permanent 21
Vérification intuitive de la différence de phase par la forme des ellipses 22
Cas singuliers. Différence de phase égale à $\frac{1}{4}$. Amplitude maximum 23
L'ellipse transformée en cercle 24

La force synchronisante est quelconque, mais très petite.

Elle agit sur un système oscillant faiblement amorti et de période peu différente.

Définition des conditions restrictives 26
Simplifications correspondantes dans l'intégrale générale 27
Théorème de l'équivalence des forces très petites à une force sinusoïdale 28
Force constante périodiquement interrompue 29
Force périodique instantanée 29

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Vérification expérimentale de l'équivalence au point de vue de la synchronisation par des forces périodiques très petites.

Pages

Types de forces périodiques simples 30
Type de force périodique complexe 31
Types de forces à période multiple ou quelconque 32

DEUXIÈME PARTIE. — Régime variable.

Restriction au cas des forces synchronisantes très petites agissant sur un système faiblement amorti et de période peu différente 33
Effet d'une force instantanée appliquée à une oscillation pendulaire simple 34
Répétition périodique de la percussion 35
Représentation géométrique du régime variable : l'indicatrice de synchronisation est un cercle 37
Influence des conditions initiales 38
Représentation d'une oscillation par un vecteur 38
Force instantanée périodique appliquée à une oscillation faiblement amortie 39
L'indicatrice de synchronisation est une spirale logarithmique 40
Concordance des résultats avec ceux de la méthode précédente 41
Équation de l'indicatrice déduite de l'intégrale générale 42

Vérification expérimentale de l'indicatrice de synchronisation.

Construction automatique de l'indicatrice 43
Composition optique du déplacement et de la vitesse de l'oscillation 44
Enregistrement photographique de l'indicatrice 45
Génération cinématique de la spirale indicatrice 47

TROISIÈME PARTIE. — Applications diverses.

Avantage de l'amortissement électromagnétique 48

Synchronisation électromagnétique appliquée à l'horlogerie.

Dispositif général : amortisseur et récepteur 48
Éléments de réglage 50
Choix de l'amortissement 50
Réglage apériodique 51
Contrôle de la stabilité du régime de synchronisation 52
Synchronisation par une impulsion de période multiple de celle du balancier 53

Synchronisation électromagnétique d'un courant électrique.

Équation différentielle du régime de charge d'un condensateur 54
Identification avec l'équation différentielle d'un système matériel oscillant 55
Lois des régimes permanent et variable étendues aux oscillations électriques 56
Synchronisation par force sinusoïdale. Cas singuliers 58
Extension probable des lois de la synchronisation au couplage des alternateurs 60

Extension du mécanisme de la synchronisation à des phénomènes divers.

Résumé et conclusions générales 61

20944 Paris. — Imprimerie Gauthier-Villars et fils, quai des Grands-Augustins, 55.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ERRATA.

MÉMOIRE DE M. A. CORNU : **La Synchronisation électromagnétique.**

[(Conférence du 24 janvier 1894). *Bulletin* d'avril 1894, t. XI, n° 107.]

Pagination du *Bulletin*. Pages.	Pagination du tirage à part. Pages.	
163	7	*Septième ligne à partir du bas :* rétablir le facteur $\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}$. *Lire : L'ordonnée* MP *multipliée par* $\frac{2\pi}{T} \times \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}$. . . ,
165	9	Formules (22), le signe de l'argument $2\pi(\Phi_n - \Psi_n)$ doit être changé. *Au lieu de :* $\sin 2\pi(\Phi_n - \Psi_n)$, *lire :* $\sin 2\pi(\Psi_n - \Phi_n)$, de même pour cos et tang.
169	13	L'argument du sinus du second terme de la formule (25) doit contenir $\frac{1}{\omega}$ et non $\frac{1}{T}$.
170	14	Formules (27), même correction que dans les formules (22) d'où elles dérivent. *Au lieu de :* $\sin 2\pi(\Phi_1 - \Psi_1)$, *lire :* $\sin 2\pi(\Psi_1 - \Phi_1)$, de même pour cos et tang.
170, 171 et 172	14, 15 et 16	Il résulte de cette erreur de signe que, dans ces trois pages, partout où il y a *avance*, il faut mettre *retard* et réciproquement. La note du bas de la page 14 doit être effacée, car l'énoncé publié aux *Comptes rendus* (t. CIV, p. 1465) est exact.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ÉTUDE DU MOUVEMENT DES MACHINES A VAPEUR ET ACCOUPLEMENT DES ALTERNATEURS EN PARALLÈLE.

MÉTHODE OPTIQUE PERMETTANT DE DÉTERMINER LA LOI DE VARIATION PÉRIODIQUE DE LA VITESSE D'UN MOBILE EN ROTATION;

PAR M. A. CORNU.

« On utilise depuis longtemps les dispositifs appelés *stroboscopiques* pour régler ou contrôler la période, c'est-à-dire la vitesse angulaire moyenne des mouvements de rotation. Mais la méthode est capable de donner davantage, c'est-à-dire de fournir avec une approximation qu'on peut accroître à volonté la loi de variation de la vitesse angulaire d'un mobile en rotation pendant chaque période.

» *Principe de la méthode.* — Les dispositifs destinés à atteindre ce but peuvent être variés à l'infini; le principe général consiste à disposer sur une circonférence rigoureusement concentrique à l'axe de rotation une série de points lumineux équidistants, c'est-à-dire qui sous-tendent des arcs égaux vus du centre de la circonférence sur laquelle ils sont distribués.

» Si l'on examine cette série de points lumineux à travers un disque percé de fenêtres équidistantes tournant d'un mouvement uniforme (1), on obtient une scintillation plus ou moins complexe qui se simplifie jusqu'à donner l'apparence de points équidistants en repos lorsque les vitesses linéaires des points lumineux et des fenêtres sont égales et de sens contraire.

« Le repos absolu apparent des images résultantes implique l'uni-

---

(1) On obtiendrait un effet analogue avec un diapason; mais le disque rotatif a le double avantage de donner à la fenêtre un mouvement de translation continu et de s'accommoder à toutes les vitesses.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

formité parfaite des deux mouvements : si l'un des axes présente une inégalité périodique dans sa vitesse, chacun des points lumineux, au lieu de rester fixe, se balance de part et d'autre de sa position moyenne d'une quantité qui mesure l'amplitude moyenne de cette inégalité de rotation.

» *Simplification pratique.* — La difficulté est évidemment de donner au disque analyseur un mouvement de rotation rigoureusement uniforme, sans quoi les inégalités périodiques des deux vitesses se composent et le balancement apparent des images devient une fonction complexe de ces deux inégalités. Il semble que cette condition rende la méthode presque inapplicable.

» Lorsqu'on étudie de plus près le problème, on s'aperçoit que cette condition d'uniformité n'a pas besoin d'être réalisée avec une rigueur absolue : ce qu'il faut redouter, c'est une variation de courte période dans la vitesse du disque; une légère accélération positive ou négative dans la vitesse angulaire du disque n'a aucune influence fâcheuse, la détermination de l'inégalité périodique de l'autre mobile n'offre plus alors de difficulté spéciale.

» Or, ce résultat peut s'obtenir aisément; il suffit de monter le disque sur un solide de révolution bien homogène, soigneusement centré, doué d'un grand moment d'inertie, muni de fenêtres étroites et nombreuses forées régulièrement sur une circonférence de grand rayon concentrique à l'axe de révolution. Si l'on est obligé d'opérer à distance, à l'aide d'une lentille de foyer convenable on projette sur la circonférence des fenêtres l'image de la circonférence des points lumineux; comme on est maître du rapport de l'image à l'objet, on choisit la distance focale de la lentille de manière à donner à la vitesse des images une valeur voisine de celle qu'on imprime au disque.

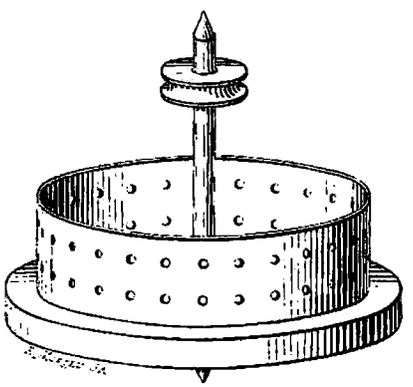
» On arrive donc aisément à l'égalité des vitesses linéaires nécessaire pour obtenir l'immobilité des apparences. D'ailleurs, cette immobilité n'a pas besoin d'être parfaite; elle se change en un déplacement progressif très lent, dans un sens ou dans l'autre, suivant que la vitesse du disque est inférieure ou supérieure à celle des images. Ce déplacement progressif n'empêche nullement d'apercevoir et même de mesurer l'amplitude du balancement, ainsi qu'on le verra plus loin.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

» *Expériences de démonstration.* — On peut, à l'aide d'appareils très simples, observer directement ou par projection les diverses apparences dont il a été question (¹). Le mobile relatif est un plateau circulaire horizontal tournant autour d'un axe vertical passant par son centre et portant une bague cylindrique concentrique à l'axe, percée d'une série de trous bien équidistants (*fig.* 1). Si l'on fait passer un faisceau de rayons parallèles horizontal, ce faisceau traversera la bague de part en part, lorsque les trous seront dans une position relative convenable, ou, au contraire, sera obturé pour les positions intermédiaires.

» Ce mobile étant animé d'un mouvement de rotation, l'ombre de ce mobile reçue sur un écran blanc produit le phénomène stroboscopique type, à savoir l'apparence de taches lumineuses un peu estompées, mais équidistantes et immobiles. On réalise, en effet, la condition requise : les vitesses des deux systèmes de trous (l'un sur la surface antérieure de la bague, l'autre sur la surface postérieure)

Fig. 1.



sont rigoureusement égales et de signe contraire : l'un des systèmes joue le rôle de points lumineux, l'autre celui des fenêtres de l'écran analyseur; leur vitesse linéaire est bien la même puisqu'ils sont entraînés par le même mouvement angulaire.

(¹) Ces projections ont été faites devant la Société, avec des appareils improvisés ; le mouvement de rotation des deux systèmes était donné à la main, faute de moteurs, ce qui rendait un peu courte la durée d'observation du phénomène utilisable.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

» On réalise le balancement de ces images en perçant sur la même bague une série de trous excentriques. A cet effet, le mobile, qui a été d'abord travaillé et foré sur un tour, a été excentré d'une petite quantité; la bague alors ne *tournait plus rond;* une nouvelle série de trous ont été percés à des intervalles égaux angulairement autour du nouvel axe; de sorte qu'ils ne sous-tendent plus des angles égaux relativement à l'axe de révolution du mobile et, par suite, ne sont plus équidistants sur la bague.

» Il en résulte que, dans la rotation uniforme de ce solide autour de son axe de révolution, tout se passe comme si la vitesse angulaire n'était pas uniforme si on la juge par le passage des trous successifs devant le faisceau lumineux; le balancement est même doublé, ainsi qu'on s'en rend aisément compte. L'inégalité d'équidistance des trous est évidemment une loi sinusoïdale, c'est-à-dire telle que chaque trou, au lieu d'occuper sur la circonférence de la bague une position définie par

$$x_m = x_0 + m\frac{C}{N},$$

C étant la longueur de la circonférence développée;
N le nombre des trous qui y sont répartis;
m le numéro d'ordre du trou considéré;
x_0 la distance du trou d'ordre o à l'origine des mesures,

occupe la position

$$x_m = x_0 + m\frac{C}{N} + a\sin 2\pi\frac{(m - m_0)}{N},$$

a étant le décentrement linéaire; m_0 le numéro d'ordre du trou qui définit le diamètre suivant lequel le décentrement a été opéré.

» On voit que deux trous situés le plus près possible d'un même diamètre présentent des altérations de position égales et de signes contraires, puisque leurs numéros d'ordre m et m' diffèrent de $\frac{N}{2}$, ce qui introduit une différence de $\frac{2\pi}{N}\times\frac{N}{2} = \pi$ dans l'argument du sinus.

» Il en résulte que le faisceau lumineux passant par ces deux trous au moment le plus favorable paraîtra osciller à chaque tour de $+a$ à $-a$; a représentant l'amplitude de l'inégalité de position

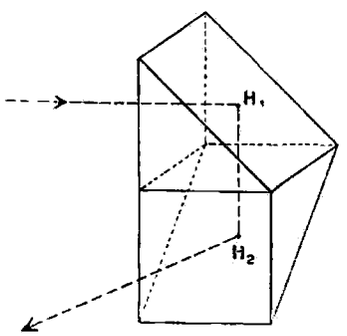
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

des trous, relativement à leur répartition uniforme. Cette distance $2a$ mesure donc la grandeur totale du balancement; inversement, l'amplitude du balancement observé mesure le double du décentrement. Comme le faisceau lumineux est assez large pour couvrir les deux circonférences, on voit simultanément la série des images fixes équidistantes et à côté la série des images offrant le balancement périodique.

» ***Dispositif pratique.*** — Avec le même dispositif et un disque tournant, on peut faire une troisième expérience qui représente la disposition pratique applicable à la mesure de l'inégalité périodique d'une vitesse de rotation.

» A l'aide d'un double miroir (formé par deux prismes hypoténuses accolés par une de leurs faces carrées) on peut n'utiliser que

Fig. 2.



la moitié des trous de la bague précédente : à cet effet, le faisceau lumineux arrive latéralement au-dessus de la bague (*fig.* 2), se réfléchit sur l'hypoténuse H_1, plonge vers l'hypoténuse H_2 et s'y réfléchit horizontalement à angle droit (HK, *fig.* 3) de la direction primitive GH. Le faisceau traverse donc seulement les trous qui passent sur la portion PQ du pourtour de la bague.

» Lorsque le mobile est mis en rotation, la persistance des impressions visuelles mêle toutes les ombres : on ne voit alors qu'une bande claire perpendiculaire à l'axe de rotation. Mais si l'on interpose le disque tournant de manière que l'ombre de la série des fenêtres se projette sur cette bande, on voit apparaître la scintillation complexe dont il a été parlé plus haut, laquelle se résout en images

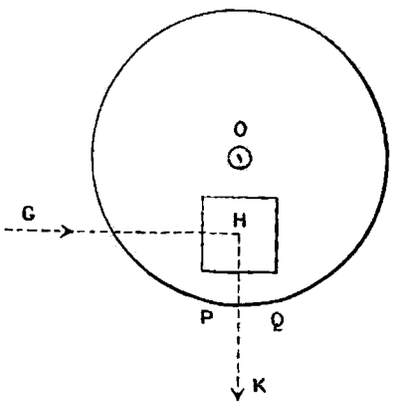
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

claires équidistantes lorsque la vitesse du disque est convenablement réglée.

» Si l'on utilise la série centrée des trous, ces images équidistantes sont immobiles ou animées seulement d'un mouvement progressif très lent; c'est le phénomène qui correspond à l'uniformité parfaite de la vitesse de rotation.

» Si l'on utilise la série décentrée, les images paraissent encore

Fig. 3.



équidistantes, mais elles se balancent sur place ou en suivant la même translation lente : c'est le phénomène qui correspond à l'inégalité périodique de la vitesse.

» Comme le faisceau lumineux est assez large pour comprendre les deux séries de trous, on voit l'un au-dessus de l'autre les défilés des deux séries d'images; l'un paraît tranquille et uniforme, l'autre agité et oscillant.

» L'estime de l'amplitude de ce balancement exige que le mouvement de progression soit très lent : on y parvient en abandonnant le disque à son inertie après l'avoir lancé à une vitesse supérieure à la vitesse requise pour l'immobilité des images. Le mouvement de progression a lieu d'abord dans le sens de celui du disque, il diminue peu à peu, s'arrête pendant un instant puis change de sens. Si, par un artifice quelconque (par le jeu d'un frein délicat), on prolonge ce temps d'arrêt, on a le temps d'estimer l'amplitude du balancement en fonction de la distance de deux images successives. Le rapport

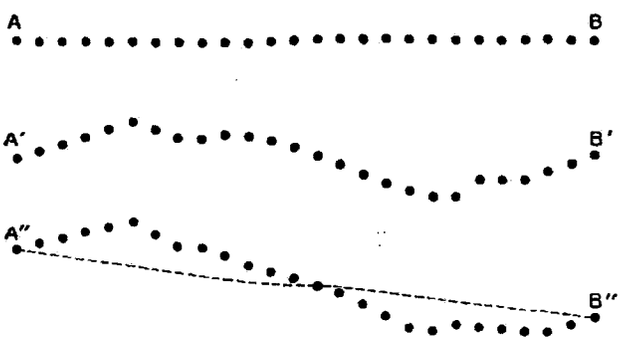
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de ces deux longueurs donne la valeur relative du décentrement, c'est-à-dire de l'inégalité de distribution des trous.

» *Expression de l'amplitude du balancement.* — En effet, il est aisé de voir que la distance moyenne des images successives est égale à la moitié de la distance moyenne des trous sur leur circonférence : la vitesse des trous et celle des fenêtres du disque étant égales et de sens contraire, chacun de ces éléments parcourt la moitié du chemin à la rencontre de l'autre entre deux coïncidences. Cette distance moyenne D est donc égale à $\frac{1}{2}\frac{C}{N}$ (cette valeur de D devrait subir une légère correction si la distance angulaire des fenêtres était notable).

» D'autre part, l'altération maxima ou minima d'équidistance des trous étant $\pm a$, on voit, par le même raisonnement, que la coïnci-

Fig. 4.



dence sera altérée de $\pm \frac{1}{2}a$: l'amplitude totale du balancement sera donc de a. Le rapport ρ sera donc égal à

$$\rho = \frac{a}{D} = \frac{2aN}{C}.$$

Mais

$$C = 2\pi R,$$

R étant le rayon de la circonférence des trous; donc

$$\rho = \frac{2aN}{2\pi R}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Par suite,

$$\frac{a}{R} = \frac{2\pi}{2N}\rho,$$

» Cette expression fournit l'*angle de décentrement* car $\pm \frac{a}{R}$, lorsque a est très petit, mesure la tangente trigonométrique de l'amplitude angulaire de l'inégalité, et, par conséquent, cette amplitude exprimée en arc. En multipliant cette fraction par $\frac{360}{2\pi}$,

$$\frac{a}{R} = \frac{360}{2N}\rho,$$

cette amplitude est exprimée en degrés sexagésimaux.

» L'approximation de la mesure de a croît comme le rayon R de la circonférence des points lumineux : elle peut donc atteindre la précision qu'on a besoin d'obtenir.

» *Équivalence de l'angle de décentrement et de l'angle de décalage.* — On démontre aisément que le phénomène obtenu avec une série de trous équidistants, répartis sur une circonférence excentrée entraînée d'un mouvement uniforme, est identique à celui que produirait une série de trous équidistants répartis sur une circonférence centrée entraînée d'un mouvement périodique ; l'inégalité est sinusoïdale dans les deux cas et donne lieu à une détermination analogue. Il en résulte que l'*angle de décentrement* de l'expérience précédente est égal à l'*angle de décalage* considéré par les mécaniciens pour l'évaluation de l'inégalité périodique de la vitesse.

» *Enregistrement photographique de la loi périodique d'inégalité.* — On rendra très facile la mesure du balancement décrit plus haut en recourant à la photographie à l'aide d'un artifice très simple qu'on peut exposer comme il suit : Supposons qu'on braque un appareil photographique sur la fenêtre moyenne du disque tournant et qu'on fasse basculer d'un mouvement régulier cet appareil autour d'un axe parallèle à la série des images et passant par le centre optique de l'objectif. Comme le phénomène est en réalité discontinu, on enregistrera une série discontinue de points lumineux disposés en quinconce suivant des droites perpendiculaires à la ligne des points lumineux, si les images sont, à vue, rigoureusement immobiles. Lorsque les images sont fixes, elles se disposent en files parfaitement rectilignes AB (*fig.* 4) ; lorsqu'elles se balancent, elles s'enregistrent

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

suivant des sinusoïdes telles que A'B' dont les ordonnées transversales figurent la loi périodique de l'inégalité cherchée (1). Il suffit donc, sur le cliché, de tracer une droite telle que A'B' joignant deux points correspondant à un tour complet du mobile rotatif et de mesurer les distances à cette droite des diverses images enregistrées.

» On reconnaît aisément, conformément à ce qui a été dit au début, qu'une légère accélération d'ensemble n'empêche nullement d'effectuer les mesures; la direction moyenne de la courbe est légèrement oblique, A"B", ce qui revient à considérer la sinusoïde observée comme rapportée à des axes obliques.

» *Généralisation.* — En poursuivant l'analyse de ce mode d'observation, on reconnaît que la loi des inégalités en fonction du temps peut être quelconque, c'est-à-dire différente d'une sinusoïde, comme on l'a supposé jusqu'ici pour simplifier; l'enregistrement photographique fournit autant de valeurs de la fonction qu'il y a de points lumineux répartis sur la circonférence mobile. La méthode est donc entièrement générale.

» Au lieu de faire basculer l'appareil photographique, on peut le laisser fixe et réfléchir l'image du phénomène sur un miroir tournant avec une vitesse convenable, placé devant l'objectif.

» *Application industrielle.* — Pour appliquer cette méthode à des machines industrielles, on aura recours à des dispositifs plus ou moins différents : ainsi on pourra souvent disposer une large bague forée de trous équidistants concentriquement à l'axe d'un arbre dont l'extrémité est libre et opérer suivant le mode décrit ci-dessus, disposition qui permettra de vérifier, au préalable, l'équidistance angulaire des trous.

» Dans d'autres cas il serait plus avantageux de disposer sur le volant de la machine à étudier une série de points brillants équidistants (par exemple des boules d'acier poli éclairées par une lampe électrique); une lentille de foyer convenable projettera la circonférence de ces points lumineux sur la circonférence des fenêtres du disque rotatif, et l'on se trouvera dans les conditions décrites précédemment.

---

(1) En donnant à l'un des trous un diamètre différent des autres on reconnaît aisément son passage, ce qui fixe la *phase* de la fonction sinusoïdale.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

» Sans entrer dans de plus amples détails, il suffit de dire qu'avec un peu d'habitude de ces phénomènes, on découvre une foule de ressources inattendues qui facilitent singulièrement la mise en œuvre de la méthode.

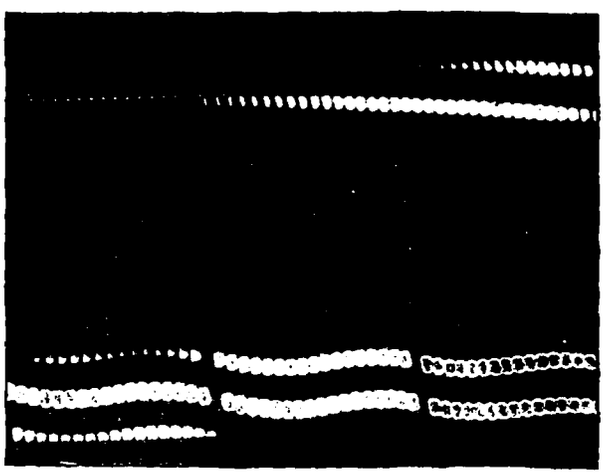
» Je ne doute pas que la nécessité croissante de connaître la loi d'irrégularité des vitesses, dans les machines motrices des usines électriques, ne conduise à appliquer couramment ce mode d'observation.

» La méthode a l'avantage d'être entièrement cinématique, c'est-à-dire indépendante de la connaissance des forces mises en jeu et de l'inertie des pièces du mécanisme : elle permet donc de contrôler les résultats qu'on demande aujourd'hui à des calculs difficiles fondés sur des données un peu incertaines empruntées aux diagrammes de pression.

» Lorsque cette méthode sera entrée dans la pratique courante, elle paraîtra si simple qu'on se demandera comment elle n'a pas été plus tôt employée.

» La *fig.* 5 est la reproduction en similigravure d'un cliché photogra-

Fig. 5.



phique obtenu avec l'appareil qui a fonctionné devant la Société.

» La bague (*fig.* 1) de 80^{mm} de diamètre est percée de 18 trous de 2^{mm} : le disque analysé est percé de 18 fenêtres. Deux petites dynamos en dérivation sur le même courant imprimaient aux deux mobiles la vitesse convenable : un frein très léger, frottant sur le pourtour du disque, permettait de maintenir pendant quelques secondes la fixité des images.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

» Un appareil photographique à axe vertical recevait le faisceau lumineux (arc électrique) par l'intermédiaire d'un miroir tournant placé immédiatement sous l'objectif. Le faisceau lumineux horizontal (image du charbon positif) traversait le prisme (*fig.* 2), la base perforée (*fig.* 3), le disque, se réfléchissait sur le miroir et arrivait à la plaque sensible à une certaine phase de la rotation du miroir. Ce miroir, simple glace argentée extérieurement, est mobile autour d'un axe horizontal : il est entraîné par une poulie à l'aide d'un cordon portant deux poids inégaux dont l'un plonge dans un tube de glycérine étendue d'eau.

» Lorsque l'immobilité des images est atteinte on déclenche le miroir : le cliché (*fig.* 5) reproduit la série rectiligne de points lumineux des 18 trous de la circonférence centrée (indiquée schématiquement par AB, *fig.* 4), et en outre la série ondulée correspondant à la circonférence décentrée de 2^{mm} (A'B' et A''B'', *fig.* 4). Dans cette ligne ondulée il y a des lacunes de 17 en 17 images : en effet, l'un des trous a été bouché; c'est celui qui est situé sur le diamètre d'excentrement. On reconnaît, en effet, que la trace qui manque est à un point d'inflexion de la sinusoïde moyenne : la phase est donc *zéro* si l'on prend ce point comme origine du temps.

» Le présent cliché est relativement grossier; les points lumineux sont trop larges; mais il suffit pour montrer que l'image même réduite (dans le rapport approximatif de 3 à 2) montre très bien un décentrement de 2^{mm} qui correspond ici à un *angle de décalage* de $\pm 3^{o}$. Mais on aurait la *même flèche*, quel que soit le diamètre de la couronne de points lumineux : avec une couronne de $0^{m},80$ de diamètre et correspondant à un angle de décalage égal à $\pm 0^{o},3$ ou $18'$; avec un volant de 4^{m} de diamètre la même flèche correspondrait à $0^{o},06$ ou $3'3''$.

» La méthode appliquée avec des dispositifs soignés peut donc atteindre la plus haute précision requise pour ce genre de mesures. »

M. le Président. — « Je remercie M. Cornu de sa Communication improvisée, et que nous eussions regretté de ne pas connaître.

» La méthode stroboscopique de M. Cornu, pratique et facile à mettre en œuvre, nous intéresse d'autant plus qu'aucun procédé analogue n'a été proposé à la première section dans le cours de ses études. Aussi serions-nous reconnaissants à M. Cornu de bien vouloir venir nous aider de ses conseils à la reprise de nos travaux. »

(Extrait du *Bulletin de la Société internationale des Électriciens*, novembre 1901.)

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

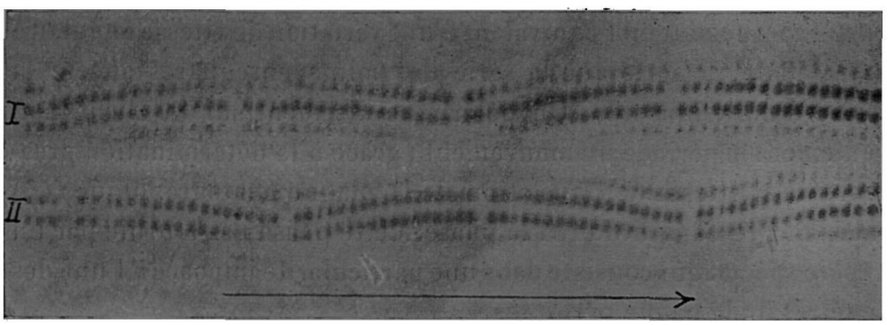
ÉTUDE DES VARIATIONS DE LA VITESSE ANGULAIRE DU VOLANT D'UNE MACHINE A GAZ OTTO A L'AIDE DE LA MÉTHODE STROBOSCOPIQUE. — PROJECTION DES CLICHÉS OBTENUS;

PAR M. A. CORNU.

« J'ai appliqué la méthode stroboscospique décrite dans la séance du 6 novembre 1901 à l'étude des variations de la vitesse angulaire du volant de la machine Otto du laboratoire de l'École Polytechnique. A cet effet, à la bague rotative perforée (*voir* le *Bulletin*, p. 521) j'ai substitué le volant de cette machine sur lequel dix-huit points brillants ont été répartis uniformément sur une circonférence d'environ $1^m,80$ de diamètre concentrique à l'axe : cette circonférence a été tracée à l'aide d'une pointe sur une couche de vernis mat déposée au pinceau sur la jante du volant.

» Ces points brillants ont été, dans une première série d'essais,

Fig. 1.



constitués par des disques de papier d'étain d'environ $0^m,022$ de diamètre; on leur donne un grand éclat en projetant, à leur passage sur le segment supérieur du volant, le faisceau divergeant d'une lanterne de projection illuminée par une lampe à arc.

» Une lentille simple de $0^m,15$ de foyer, située à $2^m,10$ du volant, en projette l'image sur le disque rotatif décrit précédemment, de manière que le segment illuminé du volant coïncide avec une portion de la circonférence du disque percé de trente-six fenêtres circulaires. Dans une première série (*fig.* 1), le disque est mû par un moteur électrique; dans une seconde série (*fig.* 3), un disque de plus grand

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

diamètre ($0^m,185$) est mû par un mécanisme d'horlogerie; un frein plus ou moins délicat permet de régler à volonté la vitesse de rotation des disques de manière que la période rotative soit égale à celle du volant, moitié ou double ou multiple de celle-ci. Le balancement stroboscopique se produit alors dans le plan du disque et on l'enregistre au foyer d'un appareil photographique sur une plaque sensible au gélatinobromure. Pour obtenir la loi de balancement avec le temps, l'image est étalée proportionnellement au temps à l'aide d'un miroir tournant autour d'un axe horizontal placé immédiatement devant l'objectif. La rotation du miroir est très lente, grâce à l'artifice du tube de glycérine (¹) décrit précédemment (*loc. cit.*, p. 527). Le balancement transversal des images stroboscopiques successives étant normal à la direction d'entraînement du faisceau, donne lieu aux courbes ondulées dont un spécimen a été reproduit à la page 528.

» Pour montrer à la Société la transition entre les phénomènes produits avec l'appareil de démonstration (p. 520) on a commencé par projeter quelques clichés obtenus avec la bague présentant une circonférence de trous excentrés (clichés analogues à celui de la page 528); on obtient l'équivalent d'une variation de vitesse angulaire sinusoïdale, de sorte que la série des points enregistrés affecte la forme d'une sinusoïde. On détermine aisément sur le cliché non seulement la période du mouvement (grâce à la détermination préalable de la vitesse de translation de la plaque photographique) (²) mais encore l'amplitude et la phase. Cette phase est fournie par un repère spécial qui consiste dans une particularité imposée à l'une des fenêtres de la bague perforée.

» Ensuite, on a projeté une série de clichés se rapportant à l'étude du volant de la machine Otto (*fig.* 1 et 3). L'image des trous successifs de la bague est remplacée par celle des dix-huit disques d'étain collés au volant; l'un d'eux a été couvert de papier noir : c'est celui qui est situé sur le prolongement de la manivelle. Il en résulte

---

(¹) Dans l'appareil définitif actuellement à l'étude, la glace photographique est portée par un chariot sur rails entraîné d'un mouvement uniforme.

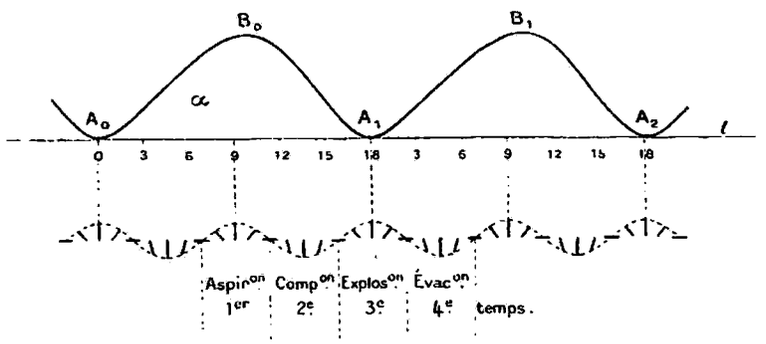
(²) Sur le cliché IV reproduit plus loin et qui a été relevé au micromètre, la vitesse est de $0^m,010$ par seconde : le double tour du volant occupant $0^m,041$ on voit que la machine fait à peu près 120 tours par minute en pleine charge.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

une interruption périodique de la succession des images : cette interruption correspond au passage du disque obscur au haut du diamètre vertical du volant, c'est-à-dire au moment où la manivelle est verticale et dirigée vers le haut.

» La configuration de la courbe est celle d'une série d'arceaux se coupant précisément au point où l'image manque. En outre, on reconnaît que chaque arceau présente encore une interruption en son milieu (¹). L'interprétation de cette figure concorde avec le fonctionnement bien connu d'une machine à gaz à quatre temps et le précise. On sait que c'est l'explosion du mélange tonnant qui fournit l'impulsion motrice et restitue la vitesse usée par les résistances que le moteur doit vaincre. Cette explosion, qui se produit tous les deux tours du volant, n'est pas instantanée, son effet moyen, d'après le cliché, a lieu au moment où la manivelle est verticale, c'est-à-dire où le piston est au milieu de sa course.

Fig. 2.



» La vitesse augmente par cette sorte de percussion, puis elle diminue peu à peu jusqu'à ce qu'une nouvelle explosion restitue la vitesse, c'est-à-dire la force vive qui doit être dépensée en travail utile ou passif par la machine.

» La *fig.* 2 représente schématiquement la courbe $A_0B_0A_1B_1A_2\ldots$ enregistrée par l'appareil. Les ordonnées de cette courbe déterminent à chaque instant l'*angle de décalage*, c'est-à-dire l'angle de la mani-

(¹) On aperçoit en outre une image plus faible que les autres; c'est celle d'un disque plus étroit, destiné à indiquer le sens du mouvement du volant; car ce disque est disposé de manière à passer $\frac{1}{18}$ de circonférence *après* le disque obscur. La flèche, tracée après coup, d'après d'autres repères inscrits sur le cliché, confirme ce sens.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

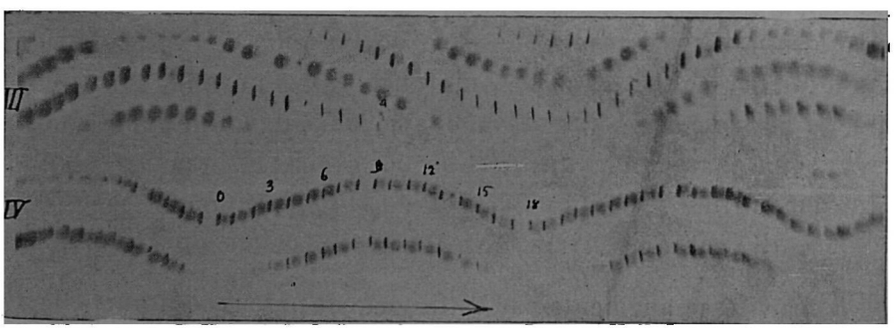
velle réelle avec la direction de la manivelle idéale qui tournerait d'un mouvement uniforme; on reconnaît que la *période* de cette machine à quatre temps comprend deux tours du volant, puisque le nombre des passages du disque obscur est double du nombre des explosions.

» On peut ainsi repérer les positions de la manivelle; par suite, les positions extrêmes de la course du piston, et reconstituer les époques des quatre temps. (Aspiration, compression, explosion, évacuation.)

» Le cliché reproduit dans la *fig.* 1 montre très bien ces courbes en arceaux; mais les disques d'étain qui servent de points brillants ont l'inconvénient de manquer d'éclat et de donner des images floues.

» J'ai donc remplacé de deux en deux ces disques par des boutons d'acier poli légèrement convexes, qui donnent des points brillants très vifs et, par conséquent, des traits excessivement nets par la photographie (*fig.* 3); le milieu de ces traits fournit des pointés

Fig. 3.



micrométriques très exacts et en nombre suffisant, bien que réduits à 9 sur la circonférence du volant; ils alternent avec les taches floues des images des disques d'étain. On y retrouve d'ailleurs l'absence de l'un de ces signaux flous provenant du disque noirci servant de repère (direction de la manivelle).

» *Détermination numérique de la loi de variation de vitesse du volant.* — Le Tableau suivant donne les résultats de mesures effectuées sur la courbe n° IV (*fig.* 3) avec une machine micrométrique de Bianchi. Cette machine est constituée par un chariot armé d'un microscope vertical et

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

mû par deux vis micrométriques rectangulaires dont les tambours donnent directement le centième de millimètre. On peut donc relever les coordonnées rectangulaires exprimées en millimètres et centièmes de millimètre de tous les points d'une figure plane.

» Les mesures se rapportent aux milieux des traits et expriment leurs distances y à une droite joignant sensiblement le milieu du trait 0 à celui du trait 18. Les abscisses étant sensiblement équidistantes, puisqu'elles correspondent à des temps à fort peu près égaux, il est inutile d'en reproduire le relevé (1).

N° des traits.	y.	$y_0 - y$.	Décalage θ.
	mm	mm	°
0	22,15	0,03	0,08
1	22,07	0,11	0,28
2	21,24	0,94	2,41
3	20,30	1,88	4,82
4	19,85	2,33	5,98
5	19,16	3,02	7,75
6	18,46	3,72	9,55
7	17,69	4,49	11,52
8	17,27	4,91	12,60
9	17,10	5,08	13,04
10	17,16	5,02	12,88
11	17,08	5,10	13,09
12	17,33	4,85	12,45
13	18,37	3,81	9,78
14	19,07	3,11	7,98
15	20,10	2,08	5,34
16	21,32	0,86	2,21
17	22,12	0,06	0,15
18	22,20	—0,02	—0,05

» La colonne $y_0 - y$ est obtenue en retranchant le nombre y de la lecture moyenne y_0 des points 0 et 18, soit $y_0 = 22,18$. Lorsqu'on trace la courbe des valeurs $y_0 - y$ correspondant à des abscisses équidistantes, on obtient une courbe aussi régulière que le permet l'appareil provisoire dont j'ai fait usage. On reconnaît que le maximum a lieu au point n° 10, soit un peu au delà du milieu de la période, ce qui indique que l'accélération négative initiale de la vitesse est moindre que l'accélération finale.

» Les arceaux ne se coupent pas à angle vif, mais se raccordent par une

(1) D'ailleurs l'imperfection du mode de déplacement de l'image par le miroir tournant un peu trop simplifié introduit de petites perturbations accidentelles qui disparaîtront dans l'appareil définitif.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

courbe de petit rayon. C'est sur ces données numériques qu'ont été tracés les arceaux de la *fig.* 2 à l'échelle de 1^{mm} par degré.

» On peut, du relevé de cette courbe et de la distance moyenne δ de la courbe parallèle (interrompue aux points anguleux par insuffisance du champ photographique), déterminer la loi de variation de vitesse exprimée en valeurs angulaires absolues. En effet, le cliché se suffit à lui-même. La distance moyenne δ en détermine l'échelle; elle se déduit de cinq pointés effectués perpendiculairement aux traits 4, 7, 9, 12, 15 :

$$8^{mm},17 \quad 8,03 \quad 7,49 \quad 7,73 \quad 7,55 \quad \text{Moyenne} : 7,792 = \delta.$$

» Je démontrerai dans une Communication ultérieure les formules rigoureuses qui permettent de calculer le résultat. Ici, les conditions expérimentales ont été assez simplifiées (1) pour que l'on puisse admettre que la distance δ des deux courbes représente la moitié de la valeur angulaire commune $\frac{360^o}{18} = 20^o$ sous-tendue par les points brillants; le balancement $y_0 - y$ étant représenté aussi en demi-grandeur, on en conclura la valeur absolue des écarts en écrivant

$$\theta = 20^o \frac{y_0 - y}{\delta} = 20^o \frac{y_0 - y}{7,792} = 2^o,5667\,(y_0 - y).$$

C'est avec cette formule qu'on a calculé la colonne θ qui exprime l'*angle de décalage* pour chaque $\frac{1}{5}$ de tour du volant pendant deux tours compris entre deux explosions. L'unité est le degré sexagésimal.

» On voit que le décalage, compté à partir de la position de la manivelle à l'instant moyen de l'explosion, atteint 13° après un tour du volant pour revenir à 0 à l'explosion suivante.

» Ces chiffres n'ont rien d'absolu, ils varient beaucoup en plus ou en moins suivant le travail mécanique imposé à la machine et suivant le fonctionnement des soupapes d'admission du gaz. Mais ces résultats donnent une idée très exacte de l'utilité de la méthode pour le contrôle du bon fonctionnement de la machine : lorsque tel ou tel accident se produit dans l'un des quatre temps, la courbe, au lieu de former un arceau régulier, s'altère et se déforme; j'en ai obtenu plusieurs exemples parmi le grand nombre de clichés que j'ai obtenus avec cette machine, laquelle est loin d'offrir un type de marche régulière.

» *Variété des apparences stroboscopiques sur les clichés.* — Il reste à dire quelques mots sur la variété des apparences que présente le

(1) En effet, l'image de l'intervalle de deux signaux consécutifs du volant a été choisie égale sensiblement à celle des fenêtres du disque analyseur et la période de rotation du disque égale à celle de l'explosion.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

phénomène stroboscopique suivant la vitesse relative du disque analyseur et du volant. L'une de celles qui ont été projetées devant la Société se trouve reproduite (*fig.* 3, n° III) : elle a été obtenue à une époque où la vitesse du disque était sensiblement moitié de celle du volant (toujours de signe contraire). L'aspect est très singulier parce que les images des disques et des points brillants forment deux courbes séparées.

» Cette circonstance se présente lorsque certaines conditions numériques sont remplies par les vitesses linéaires des éléments en jeu. J'aurai bientôt l'occasion de développer la théorie de ces apparences qui mettent en jeu des théorèmes très simples de géométrie et d'arithmétique; elles sont toutes aisément utilisables pour la détermination de la loi des vitesses du mobile étudié, mais elles ne sont pas sans présenter quelques complications lorsqu'on ne possède pas la clef de ces combinaisons.

» En tout cas on ne rencontre aucune difficulté, je dirai même que la simplicité est extrême, ainsi qu'on l'a vu plus haut, lorsqu'on choisit, pour la distance des points lumineux mobiles, sensiblement la même valeur que celle des fenêtres du disque analyseur et qu'on donne à celles-ci une vitesse égale et contraire à la vitesse des points lumineux. »

(Extrait du *Bulletin de la Société internationale des Électriciens*; janvier 1901.)

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Estratto dalle **Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani**, Vol. XX, 1891.

SUR LA LIMITE ULTRA-VIOLETTE DU SPECTRE SOLAIRE

D'APRÈS LES CLICHÉS OBTENUS PAR M. LE D.r O. SIMONY

AU SOMMET DU PIC DE TÉNÉRIFFE

Par **M. A. CORNU.**

« Depuis plusieurs années, j'ai cherché, à diverses reprises, à reculer la limite du spectre solaire ultra-violet observable avec la photographie; mais l'absorption par l'atmosphère terrestre croît, avec la réfrangibilité des radiations, suivant une loi si rapide, que tous les artifices, optiques ou photographiques, essayés jusqu'ici, ne m'ont apporté que des résultats insignifiants (1). Au premier abord, cette conclusion négative semble en contradiction avec les résultats obtenus dans diverses voies, notamment en Astronomie physique; on sait, en effet, qu'avec des plaques sèches très sensibles, on parvient à photographier des astres extrêmement faibles, et même les spectres de ces astres. Il semble donc qu'en augmentant la durée d'exposition on doive pénétrer de plus en plus avant dans la région du spectre solaire que l'atmosphère terrestre affaiblit par absorption.

« Théoriquement cette conséquence est exacte et l'expérience n'est point en désaccord avec elle: en augmentant méthodiquement le temps de pose, on voit, en effet, la limite du spectre reculer peu à peu; mais la progression de ce recul se ralentit bientôt tellement qu'elle parait indiquer une limite infranchissable, correspondant à une durée d'exposition infinie.

« C'est aussi à cette conclusion que conduisent les déterminations numériques suivantes: si l'on mesure sur ces clichés la longueur d'onde λ de la dernière trace visible

(1) La principale difficulté qu'on rencontre est le voile du cliché, surtout aux longues poses; optiquement, on l'atténue par l'accroissement de la dispersion et la diminution de la hauteur de la fente du collimateur; photographiquement, par l'interposition d'une substance absorbant les radiations bleues et violettes. Le voile, en effet, provient généralement de ces radiations, douées d'une puissance photochimique considérable: leur diffusion s'effectue par suite de l'illumination de la surface des prismes et des lentilles dont le poli n'est jamais absolu; avec la surface striée des réseaux, cette diffusion devient tout à fait gênante.

Parmi les substances absorbantes, on peut employer la chrysoïdine suffisamment étendue, les vapeurs hypoazotiques, et particulièrement la vapeur de brome, qui parait d'une transparence complète pour la région ultra-violette du spectre solaire; à cet effet, on interpose sur le trajet du faisceau incident un tube de verre de 4 cm. à 5 cm. de diamètre et de 20 cm. de longueur, fermé par deux lames de quartz, dans lequelle on verse quelques gouttes de brome par une tubulure latérale.

Avec toutes ces précautions réunies, ont peut amener sur la fente du collimateur l'image solaire d'une lentille collectrice de quartz, sans avoir à redouter le voile du cliché au voisinage de la limite du spectre.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

obtenue, avec un temps de pose t progressivement croissant, on trouve que les observations sont assez bien représentées par la formule (1)

$$\lambda = b + \frac{A}{\sqrt{t}};$$

b et a étant deux constantes. b représente alors la *limite infranchissable* et A la *sensibilité* de la plaque photographique.

« L'examen des clichés longuement exposés fait ressortir le caractère particulier de l'absorption atmosphérique; le spectre photographié, très intense et même empâté, s'arrête brusquement comme intercepté par un écran opaque qui ne laisserait subsister qu'une pénombre étroite: c'est cette pénombre, où les détails sont d'ailleurs confus, qui constitue le bénéfice de l'accroissement du temps de pose; si l'on exagère encore cette durée, le cliché s'empâte davantage, la pénombre diminue de largeur sans gagner notablement ni en netteté, ni en réfrangibilité.

« La seule voie qui reste ouverte pour étendre nos connaissances sur la constitution du spectre solaire au delà de cette limite ultra-violette est la diminution de l'épaisseur atmosphérique, c'est-à-dire l'observation à de hautes altitudes. De ce côté encore le bénéfice, quoique certain, paraît peu en rapport avec les difficultés matérielles nécessitées par l'installation d'un spectrographe sur le sommet de hautes montagnes; il résulte, en effet, de mes observations dans les Alpes en 1879 (2) qu'on ne gagne guère qu'une unité de l'échelle des longueurs d'onde d'Ångström (un millionième de millimètre) pour une élévation de 868^{m}. J'ai donc jusqu'à présent reculé devant l'emploi de cette dernière ressource en songeant aux difficultés d'une expédition dans laquelle il faudrait dépasser notablement l'altitude de 2570^{m} atteinte pour mes observations de 1879. Mais j'ai toujours pensé que l'étude de la limite ultra-violette du spectre solaire mériterait d'être, sinon l'objet principal, du moins le complément d'un voyage d'exploration à de hautes altitudes.

« C'est justement dans ces conditions que M. le Dr Oskar Simony, de Vienne, a entrepris en 1888 un voyage scientifique aux îles Canaries, duquel il a rapporté, outre de précieuses collections zoologiques, une série étendue de clichés photographiques du spectre solaire obtenus sur le pic de Ténériffe (3). Ayant eu connaissance de ces résultats, je me suis adressé au savant explorateur, lui demandant de me faire connaître le résumé de ses observations spectrales: avec une générosité scientifique qu'on ne saurait trop louer et dont je lui exprime ici toute ma gratitude, M. le Dr Simony a bien voulu me confier ses clichés originaux et en faire don au cabinet de Physique de l'École Polytechnique.

« Plusieurs de ces clichés, obtenus en août 1888, aux environs de midi, soit à la station d'Alta-Vista (altitude 3200^{m}), soit au sommet du pic (pic de Teyde, altitude 3700^{m}) répondent exactement aux conditions requises pour l'observation de la limite ultra-violette du spectre solaire et sont admirablement réussis; je me suis donc fait un devoir d'exa-

---

(1) *Association française pour l'avancement des sciences*, 1884. — *Congrès de Blois*, p. 103. — Cette formule empirique conduirait, pour la variation du coefficient d'absorption de l'atmosphère avec la longueur d'onde, à une loi approximative différente de celle qui a été conclue de la variation de la limite du spectre avec la hauteur du Soleil (*Comptes rendus*, t. LXXXVIII, p. 1287). Mais, si la forme analytique n'est pas la même, les valeurs numériques du coefficient, dans l'intervalle considérée, sont équivalentes.

(2) *Comptes rendus*, t. LXXXIX, p. 808.

(3) *Anzeiger der K. Akademie der Wissenschaften, Wien;* 1889. — *Mathem. naturwissenschaftliche Classe*, p. 37.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

miner avec soin cette belle collection et d'en tirer tout le parti possible, en vue de compléter et de prolonger la Carte du spectre normal ultra-violet du Soleil que j'ai déduite, il y a quelques années, d'observations à de basses altitudes [Courtenay (Loiret), altitude 170^{m}] (1).

« La concordance des raies de ces clichés avec celles de la planche gravée de mon Mémoire s'aperçoit à première vue; j'ai même constaté avec satisfaction que, jusqu'au delà de la raie *t*, les détails les plus délicats fournis par le spectroscope de M. le Dr Simony (bien qu'environ deux fois plus dispersif que le mien) figurent sur cette planche (2); mais, au delà, les clichés de Ténériffe acquièrent une supériorité croissante avec la réfrangibilité, autant par la finesse des détails que par l'extension de la limite: c'est l'effet prévu de l'accroissement de la transparence ultra-violette de l'air due à la diminution de l'épaisseur atmosphérique. Il devenait alors possible de compléter les détails de la région comprise entre les raies *t* et *U*, restée confuse sur mes clichés, et de prolonger la carte au delà de *U* jusqu'à la limite observable sur le cliché de Ténériffe le plus étendu.

« Mais, outre l'utilité de cette représentation qualitative du spectre solaire ultra-violet, l'étude de ces clichés offrait encore un point de vue intéressant, à savoir la possibilité de déterminer le coefficient caractéristique du gain produit par l'accroissement d'altitude et le contrôle de la valeur déjà citée de ce coefficient.

« Grâce à la comparabilité des clichés de Ténériffe (altitude 3700^{m}) et des miens (altitude 170^{m}), je trouvais les éléments d'une observation différentielle, analogue à celle que j'avais réalisée dans les Alpes, avec une altitude supérieure de 1130^{m}.

« Pour obtenir ce double résultat, il fallait au préalable ramener à l'échelle des longueurs d'onde la partie nouvelle du spectre prolongé: ce problème pouvait paraître insoluble, car les clichés de Ténériffe ne portent ni repères, ni raies de comparaison. Heureusement, l'étude antérieure de cette région spectrale m'avait démontré que les raies du fer et celles du Soleil offrent beaucoup de coïncidences, non seulement comme position, mais comme intensité relative: il en résulte que le spectre du fer volatilisé dans l'arc électrique est un véritable canevas du spectre solaire.

« J'ai donc commencé par déterminer avec un réseau la longueur d'onde des raies du fer, comprises entre $\lambda = 280$ et $\lambda = 310$, certain d'avance d'y rencontrer des groupes identifiables avec les raies solaires et, par conséquent, d'obtenir des repères en nombre suffisant: une série d'épreuves a fourni des valeurs très concordantes relatives à vingt-cinq raies comprises dans cet intervalle.

« Une seconde série de clichés du spectre du fer, obtenus avec deux prismes de quartz, m'a permis de constater une fois de plus que la formule homographique

$$(\Delta - a)(\lambda - b) = c^2$$

est excellente comme formule d'interpolation (Δ représente ici la déviation linéaire mesuré sur le cliché).

---

(1) *Comptes rendus*, t. LXXXVIII, p. 1101. Le Mémoire détaillé, avec deux planches gravées, a été publié en 1880 dans les *Annales de l'école normale*, 2me série, t. IX, p. 21.

(2) Ce spectroscope est composé de 3 prismes de quartz (6 demi-prismes de rotation contraire collés deux à deux à la glycérine) et d'objectifs de quartz de 60 cm. environ de distance focale: mon appareil comprenait un prisme de spath d'Islande et deux objectifs de quartz de 25 cm. de foyer.

La compensation dans les détails est due, en grande partie, à la perfection optique de mon prisme unique, mais aussi à l'emploi du collodion humide qui donne aux clichés une finesse de grain bien supérieure à celles des plaques sèches à la gélatine.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

« La substitution des longueurs d'onde de trois raies

$$[299,45\ (l),\ 297,33,\ 294,79\ (U)]$$

a suffi pour retrouver exactement les valeurs des longueurs d'onde de toute les raies déterminées dans la première série.

« Enfin, parmi les clichés de M. le Dr Simony, j'ai choisi, pour les mesures définitives, celui qui présente la plus grande extension (du 23 août 1888, midi 15m; pic de Teyde, deux minutes de pose); l'identification des trois raies précédentes dans le spectre du Soleil et celui du fer a été immédiate et la formule ci-dessus a permis de calculer la longueur d'onde de toutes les raies solaires relevées au micromètre.

« Comme la loi de dispersion du cliché solaire s'est trouvée sensiblement la même que celle des clichés prismatiques ci-dessus, l'emploi de la formule homographique est pleinement justifié; d'ailleurs les vérifications ont été multiples; en dehors des trois raies de repères, plusieurs autres raies, dont l'identification était évidente, d'après leur aspect, avec celle du fer, ont fourni comme longueurs d'onde des chiffres identiques.

« Il ne peut donc, malgré l'absence de repères directs, rester aucun doute sur l'exactitude de ces déterminations. Elles ont été reportées sur un dessin où sont figurées toutes les raies rangées suivant l'échelle des longueurs d'onde: *la mise à l'effet* a été obtenue par diverses teintes de l'encre et par le lavis au pinceau.

« J'ai l'honneur de mettre sous les yeux de la Société le dessin à grande échelle de la région ultra-violette du spectre normal du Soleil, comprise entre la raie *l* ($\lambda = 299,45$) et la limite ($\lambda = 292,2$) déduite de l'étude du cliché de Ténériffe: la réduction ci-jointe, à une échelle moitié moindre (double de celle d'Angström), en reproduit les caractères principaux (1); on y reconnait la coïncidence d'un grand nombre de raies du fer, ainsi que celles de deux raies importantes du magnésium.

« La comparaison de la Carte gravée de mon Mémoire avec le présent dessin donne la mesure de l'influence de l'altitude sur la position de la limite ultra-violette.

« On peut estimer cette limite soit d'après la dernière trace visible, soit, ce qui vaut mieux, d'après le groupe de raies à partir duquel on voit le spectre se dépouiller de ses détails: ces deux évaluations, pour des raisons diverses, comportent une assez grande part d'incertitude, mais, après discussion, leurs valeurs s'accordent à peu près.

Clichés obtenus à	*Altitude*	*Longueur d'onde*	
		de la dernière trace visible	*du début de l'effacement des détails*
Ténériffe	3,700m	292,2	293,7
Courtenay	170	294,8 (raie *U*)	295,0
Différence . . .	3,530	— 2,6	— 1,3

(1) J'aurais voulu donner une épreuve phototyphique agrandie du cliché original ayant servi de base aux mesures; malheureusement l'agrandissement efface tous les détails: j'ai même dû, dans le relevé micrométrique, n'employer que de très faibles grossissements, en y joignant certaines conditions d'éclairage, pour apercevoir les raies faibles voisines de la limite du spectre.

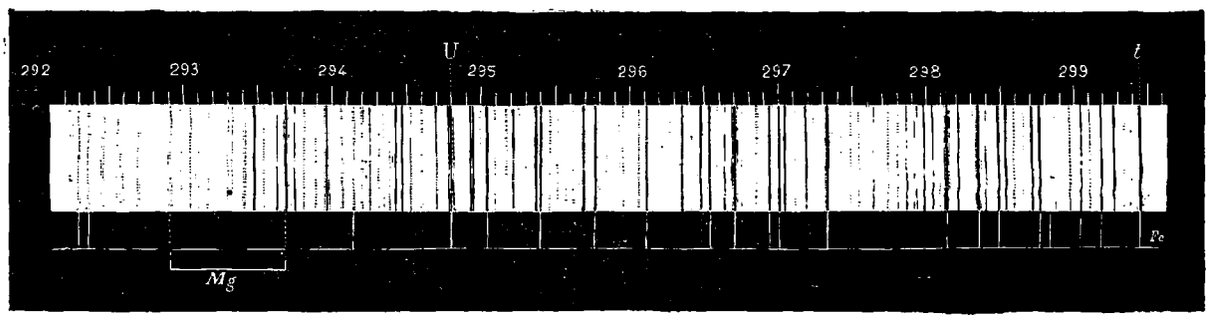
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

« On en conclut que pour prolonger le spectre solaire ultra-violet d'une unité (millionième de millimètre) il faut s'élever de 1358^{m} d'après le premier mode d'évaluation, de 821^{m} d'après le second.

« Mais le premier chiffre (1358^{m}) est certainement trop élevé: en effet, la limite spectrale adoptée par la basse altitude (294,8) est le résultat extrême recueilli parmi un grand nombre d'observations durant plusieurs étés: on doit donc la considérer comme un peu trop faible; celle de la haute altitude est au contraire trop forte, car elle ne résulte que de deux jours d'observations et au mois d'août seulement. Le second chiffre, 821^{m}, doit se rapprocher davantage de la vérité parce qu'il correspond à une sorte d'absorption moyenne et qu'il dépend moins de la présence fortuite de raies sombres au voisinage de la limite.

« Le nombre déduit des observations dans les Alpes est 868^{m}; il est compris entre les deux chiffres précédents et très voisin de ce dernier: la concordance est donc satisfaisante, eu égard aux incertitudes inhérentes à un phénomène si délicat. Conformément au résultat annoncé dès 1879 (1), on gagne donc bien peu en transportant le spectrographe sur les hautes montagnes; le taux de ce gain paraît même s'amoindrir à mesure qu'on s'élève. Ainsi au sommet du mont Blanc (alt. 4810^{m}), la surélévation de 1110^{m} au-dessus du pic de Teyde donnerait à peine une unité et demie, c'est-à-dire ne reculerait la limite des *détails nets* du spectre solaire que jusqu'à $\lambda = 292$. Malgré ce faible bénéfice,

Spectre normal du Soleil au voisinage de la limite ultra-violette.



l'intérêt qui s'attache à la connaissance approfondie des radiations solaires rend fort désirable la détermination directe de cette limite: l'installation projetée d'une station au sommet du mont Blanc permettrait de réaliser l'expérience, surtout si le séjour à cette grande altitude pouvait se prolonger suffisamment.

« L'expédition de M. le Dr Simony a donc servi à étendre nos connaissances sur un point important de la Physique solaire et à confirmer des résultats qui guideront les observateurs pour aller plus avant dans la même voie. »

---

(1) *Comptes rendus*, t. XXXVIII, p. 1108.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

DÉTERMINATION

DE

L'ÉTALON PROVISOIRE INTERNATIONAL.

RAPPORT

PRÉSENTÉ AU COMITÉ INTERNATIONAL DES POIDS ET MESURES

AU NOM DE LA COMMISSION MIXTE COMPOSÉE DE

MM. BROCH, FOERSTER ET STAS, MEMBRES DU COMITÉ INTERNATIONAL, ET MM. DUMAS, TRESCA ET CORNU,
MEMBRES DE LA SECTION FRANÇAISE DE LA COMMISSION INTERNATIONALE DU MÈTRE;

Par M. A. CORNU, Rapporteur,

AVEC LA COOPÉRATION DE

M. J.-René BENOIT.

EXTRAIT DU TOME X

DES

TRAVAUX ET MÉMOIRES DU BUREAU INTERNATIONAL DES POIDS ET MESURES.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU INTERNATIONAL DES POIDS ET MESURES,

Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1893

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

DÉTERMINATION
DE
L'ÉTALON PROVISOIRE INTERNATIONAL.

RAPPORT [1]

PRÉSENTÉ AU COMITÉ INTERNATIONAL DES POIDS ET MESURES

AU NOM DE LA COMMISSION MIXTE COMPOSÉE DE

MM. BROCH, FOERSTER ET STAS, MEMBRES DU COMITÉ INTERNATIONAL,

ET

MM. DUMAS, TRESCA ET CORNU, MEMBRES DE LA SECTION FRANÇAISE DE LA COMMISSION INTERNATIONALE DU MÈTRE.

La règle qui a servi d'Étalon provisoire international est celle qui a été remise officiellement par la Section française, en même temps que le kilogramme, au Comité international des Poids et Mesures, en l'hôtel du Ministre du Commerce, à Paris, en présence de M. Tirard, Ministre du Commerce, le 26 avril 1882, conformément au procès-verbal inséré dans le *Journal officiel* du 30 avril et dans le Recueil des *Procès-Verbaux des séances de la Section française de* 1882,

(1) A l'occasion de l'impression de ce Rapport et du Journal détaillé des observations qu'on trouvera ci-après, une nouvelle et très minutieuse revision des données numériques a été faite par MM. Benoît et G. Tresca; tous les chiffres relatifs aux observations ont été collationnés sur les registres originaux conservés dans les Archives de la Section française au Conservatoire des Arts et Métiers; en outre, tous les calculs ont été refaits indépendamment par deux calculateurs différents, et également collationnés avec le plus grand soin : c'est à M. le Dr René Benoît, Directeur du Bureau international des Poids et Mesures, qu'on doit d'avoir mené à bonne fin ce grand travail de revision et les nombreux calculs supplémentaires destinés à contrôler les méthodes employées dans les réductions.

Cette revision nouvelle des données numériques a fait retrouver trois erreurs de copie et une dizaine de fautes de calcul qui avaient échappé aux précédentes revisions : la liste de ces erreurs, donnée plus loin (p. XVII), justifiera les petites divergences qui existent entre quelques-uns des chiffres du présent Rapport et les résultats publiés antérieurement dans les *Procès-Verbaux* de la Section française (*a*), dans ceux du Comité international des Poids et Mesures (*b*) et dans le Rapport présenté par le Comité international à la Conférence générale de septembre 1889 (*c*).

La correction de ces erreurs n'entraîne d'ailleurs aucun changement dans le nombre définitif adopté en 1882 comme représentant l'équation, par rapport au Mètre des Archives, de l'Étalon provisoire, point de départ des nouveaux prototypes.

(*a*) Commission internationale du Mètre, Section française (*Procès-verbaux;* 1878-1882, p. 82).

(*b*) *Procès-Verbaux du Comité international,* 1882 (Rapport de M. Foerster), p. 69.

(*c*) *Rapport sur la construction, les comparaisons,* etc., présenté par le Comité international des Poids et Mesures à la Conférence générale. Septembre 1889, p. 9 et suivantes.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

p. 82. Elle est désignée, dans toutes les publications de la Commission du Mètre et du Comité international des Poids et Mesures rappelées ci-contre, (*a*), (*b*), (*c*), par la notation I_2. Cette règle est en platine iridié, à 10 pour 100 d'iridium, et présente la section dite en X, à *fibre neutre apparente*, adoptée en 1872 par la Commission internationale, sur la proposition de M. H. Tresca (*Procès-Verbaux des réunions générales de* 1872, p. 67). Elle a été fondue et façonnée par la maison Johnson Matthey et Cie, de Londres, dressée par MM. Brunner frères, de Paris, polie et tracée par les soins de la Section française au Conservatoire des Arts et Métiers : le fond de la rainure portant les traits fixant la longueur du Mètre a été simplement poli au charbon. Cette règle porte, tracée à la pointe sur une face latérale, la signature des Membres de la Section française qui ont participé à sa construction (H. Tresca, A. Cornu), ainsi que celle de M. G. Tresca, qui, à titre d'Ingénieur du Conservatoire national des Arts et Métiers, prit la plus grande part à toutes les opérations de la Section française.

Un échantillon a été prélevé à l'une des extrémités de cette règle pour en déterminer le coefficient de dilatation par la méthode Fizeau.

L'analyse de l'alliage qui a servi à construire cette règle, en même temps que les règles désignées par les symboles I_1 et I_3, et qu'une autre règle livrée à la même époque au Bureau international, a été exécutée par MM. Sainte-Claire Deville et Stas.

Les résultats de cette analyse ont été publiés dans les *Procès-Verbaux du Comité international des Poids et Mesures*; 1879 (Annexe n° II, *De la Règle type en forme de* X *et en platine iridié pur à* 10 *pour* 100 *d'iridium*, par MM. Broch, Sainte-Claire Deville et Stas). En voici le résumé (1) :

Platine	89,692
Iridium	10,153
Fer	0,038
Ruthénium	0,017
Rhodium	0,038
	99,938

La longueur de cette Règle I_2 est définie par deux traits transversaux, encadrés chacun par deux traits auxiliaires tracés à $0^{mm},5$ de part et d'autre du trait principal; ces trois traits sont recoupés par deux traits longitudinaux, à $\frac{1}{10}$ de millimètre l'un de l'autre, qui déterminent l'axe de la Règle.

Le tracé des traits transversaux a été effectué, comme celui de tous les nouveaux prototypes, au moyen du *comparateur à mouvement longitudinal*, installé par la Section française au Conservatoire des Arts et Métiers.

Le tracé définitif de la Règle I_2 a été effectué le 13 mai 1881, à une tempéra-

(1) Moyenne des deux analyses données, *loc. cit.* p. 168.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ture moyenne de 13°,5o, par M. H. Tresca, aidé de M. G. Tresca, d'après la Règle n° 23 (1) de l'alliage de 1874 (gros bloc, fondu au Conservatoire), en adoptant une correction estimée à -5^{μ} d'après un ensemble d'études antérieures.

La comparaison de la Règle I_2 avec le Mètre des Archives a été effectuée au moyen du comparateur à mouvement transversal, également installé au Conservatoire sous la direction de la Commission mixte précitée.

On se bornera ici à indiquer sommairement le principe et le fonctionnement de ces comparateurs (2), réservant à une publication ultérieure la description détaillée de ces appareils. Il est juste de mentionner le concours empressé apporté par MM. Brunner, Dumoulin-Froment et Nachet, à la construction, à l'installation et aux perfectionnements successifs de ces instruments, qui devaient être à la fois précis et robustes.

DESCRIPTION SUCCINCTE DES COMPARATEURS.

1° Comparateur a mouvement longitudinal employé pour le tracé de tous les prototypes internationaux.

Ce comparateur, dont le principe et la disposition générale sont dus à M. Fizeau (3), se compose d'un banc de fonte de $2^{m},40$ de longueur, sur lequel se meut horizontalement un long chariot (par glissement sur deux rails), à l'aide d'une chaîne sans fin et d'une manivelle; ce chariot porte deux tables parallèles, sur lesquelles on dispose les deux règles à une distance de $0^{m},045$ l'une de l'autre, d'axe en axe. Ces tables reposent sur trois vis calantes permettant de régler l'horizontalité des règles.

Deux longs microscopes fixes, dont les axes sont verticaux et placés au milieu du comparateur, dans un plan perpendiculaire aux règles, servent à viser simultanément les extrémités similaires de ces deux règles : un micromètre à fil mobile, placé à l'oculaire de chaque microscope, permet de mesurer leur différence de longueur. En effet, en donnant au chariot un mouvement longitudinal, on entraîne les deux règles d'une égale quantité, de manière à substituer les deux autres extrémités aux deux premières. Si les règles étaient rigoureusement égales, la différence des pointés de chaque microscope, dans les deux positions du chariot, serait la même; sinon la variation de cette différence, multipliée par un facteur convenable (tare des micromètres), mesure la différence de longueur cherchée.

(1) Cette règle n° 23 avait elle-même été tracée, dans la nuit du 31 décembre 1878 au 1er janvier 1879 (par les mêmes opérateurs), par copie directe du Mètre des Archives, à la température de zéro, en faisant usage, conformément à la méthode de M. Fizeau, de l'image réfléchie de pointes sur les faces terminales du mètre à bout : la correction de 5^{μ} qu'on a été obligé de lui appliquer montre que la condition d'amener à zéro le comparateur longitudinal n'a pas donné l'identité qu'on espérait. Aussi a-t-on renoncé pour les prototypes ultérieurs à cette condition dispendieuse et pénible : toutes les copies ont été tracées, par la suite, à la température ambiante, comme la Règle I_2.

(2) Consulter l'*Exposé de la situation des travaux de la Section française* au 1er octobre 1876, p. 16; au 1er septembre 1877, p. 4; au 22 septembre 1879, p. 1.

(3) *Procès-Verbaux* des séances du Comité des recherches préparatoires, séance du 4 avril 1872.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Tel est le principe de la méthode de comparaison : elle repose sur l'égalité absolue du déplacement longitudinal des deux règles parallèles. Diverses précautions sont prises pour assurer la rectilignité parfaite du mouvement de translation du chariot, le parallélisme et l'invariabilité de position relative des deux règles dans le transport commun.

Bien que la réalisation de ce principe par l'appareil, en ce qui concerne la translation rectiligne du chariot, ait été vérifiée avec précision (à l'aide du collimateur à réflexions multiples de M. Fizeau), ce comparateur à mouvement longitudinal n'a pas été employé pour les comparaisons citées et discutées dans le présent Rapport, à cause de certaines anomalies dont l'origine n'a pas été complètement élucidée : le comparateur à mouvement transversal décrit plus loin a toujours été préféré (1).

Mais cet appareil a été exclusivement employé au tracé des règles; il jouit, en effet (grâce au déplacement longitudinal de la règle à tracer), d'une propriété précieuse, celle de n'exiger qu'un seul tracelet : cette condition assure aux deux traits qui définissent l'extrémité de la règle une identité aussi parfaite que possible.

Opération d'un tracé. — L'opération d'un tracé, c'est-à-dire la copie d'une règle, est toute semblable à celle d'une comparaison; la seule différence consiste dans la substitution du tracelet mobile (pointe de diamant) à l'un des microscopes. A cet effet, le microscope correspondant à la règle à tracer, après avoir servi à déterminer la position des points de la règle où les traits doivent être exécutés, est soulevé verticalement dans sa douille, à quelques centimètres de hauteur, pour permettre d'amener l'équipage du tracelet. Tout le système traçant, assez délicat d'ailleurs, est monté sur un chariot à coulisse, qui vient buter sur une vis réglant le tracé exactement dans l'axe du microscope. Cette rectification opérée, une forte vis de pression fixe invariablement le chariot dans cette position.

On amène alors l'extrémité de la règle à copier sous le fil du microscope correspondant, et, par un système de renvois appropriés, le tracelet, mû par le déroulement d'un cordon tendu par un poids, trace sur la règle à construire le trait à la place désignée avec une régularité remarquable.

On déplace alors le comparateur, de manière à amener le second trait de la règle à copier sous le fil du microscope; la même manœuvre du tracelet fait tracer le second trait sur l'autre règle dans des conditions absolument identiques.

Généralement, la règle à copier doit subir une certaine correction : le fil du microscope est, lors du second pointé, déplacé dans le sens voulu, de la quantité nécessaire pour opérer cette correction, calculée d'avance, et exprimée en parties du tambour du micromètre.

Pour maintenir l'égalité de température non seulement des deux règles, mais de toutes les parties de l'instrument d'une manière aussi complète que possible, le comparateur tout entier est enfermé dans une cloche ou boîte de cuivre rouge de 3^{mm} d'épaisseur, qui forme une enceinte extrêmement conductrice, maintenant l'uniformité de température. La salle elle-même, où l'appareil est installé, est capitonnée et revêtue de bois pour atténuer la transmission des variations caloriliques extérieures.

Enfin, conformément au désir de la Commission internationale, la température de

(1) *Voir* les intéressantes discussions préliminaires, séance du 6 avril 1872 (*Procès-Verbaux* des séances du Comité des recherches préparatoires, p. 29 et suiv.).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

cette chambre pouvait être amenée au voisinage de zéro par une circulation continue d'un liquide incongelable (solution de chlorure de magnésium) amené dans quatre grands cylindres d'une capacité totale de 1500^{lit} et entretenue par une machine frigorifique installée dans une salle voisine (1). C'est ce qu'on a résumé, dans les diverses publications, en disant que l'appareil est installé dans une *chambre froide*.

2° Comparateur a mouvement transversal employé pour la comparaison de la Règle I_2 avec le Mètre des Archives.

On a vu plus haut que le comparateur à mouvement longitudinal n'avait pas donné, pour la comparaison même des règles à traits, la précision qu'on aurait pu en attendre. Aussi les comparaisons n'ont-elles présenté la régularité indispensable à la sécurité des résultats qu'avec l'emploi du comparateur à mouvement transversal, installé par les soins de la Section française au Conservatoire des Arts et Métiers dans une chambre froide et capitonnée, symétrique de celle du comparateur à mouvement longitudinal.

Voici la description succincte de ce second comparateur, qui offre plusieurs dispositifs dont l'intelligence est nécessaire pour l'établissement de certaines corrections dont il sera parlé plus loin.

Le principe de l'appareil est la constitution d'une sorte de compas optique invariable formé par deux microscopes fixes dont les axes géométriques sont distants de la longueur des règles à comparer. Un chariot horizontal, guidé sur un banc de fonte, et mû par une vis à gros filet, transporte successivement chaque règle sous les microscopes par un mouvement transversal, de manière à mettre les images des extrémités de chaque règle en coïncidence avec les réticules mobiles des deux microscopes. Si les règles sont égales, la coïncidence établie avec la première règle doit se retrouver lorsqu'on amène la seconde; si les règles sont inégales, les différences des pointés permettent de calculer la différence de longueur.

Le chariot à mouvement transversal porte deux tables sur lesquelles reposent les règles, par l'intermédiaire de galets situés à la distance de moindre flexion; ces tables portent toutes les rectifications nécessaires, que des transmissions appropriées permettent d'effectuer du dehors de la cloche de cuivre enveloppant l'appareil.

Ces transmissions manœuvrent les organes suivants :

1° L'engrenage conique monté sur l'arbre de la vis motrice du chariot; une manivelle placée sous la main de l'observateur permet d'effectuer les grands mouvements; les petits mouvements s'effectuent aussi très simplement par un bouton spécial, lorsqu'une pince de serrage, manœuvrée par un double cordon, a saisi l'axe moteur.

2° Les trois mouvements de rectification des tables ou des règles.

(1) Cette disposition qui, au début, avait paru extrêmement importante, a offert divers inconvénients dans le détail desquels il serait trop long d'entrer ici : le plus grand, celui qui a fait rejeter finalement l'emploi des réfrigérants, est l'incertitude de la température du bloc de pierre sur lequel repose le comparateur. On a craint, non sans quelques bonnes raisons, que, si l'enveloppe de cuivre assurait sur cinq des faces du parallélépipède une température uniforme à l'état permanent, la faible conductibilité de la pierre sur la sixième face (ou face inférieure de l'enceinte) modifiât profondément les conditions de l'équilibre thermométrique, et rendit très incertaine la loi de répartition des températures aux diverses parties de l'appareil dans un régime que l'on n'a jamais réussi à *maintenir permanent*.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

A cet effet, près de chaque microscope (distingué ultérieurement sous le nom de *microscope de droite* ou *microscope de gauche*, d'après la situation à droite ou à gauche de l'observateur) se trouvent trois boutons, reliés par des tiges d'acier (1) aux têtes des vis produisant les rectifications suivantes :

a mouvement d'inclinaison des tables;

b mouvement de déclinaison;

c mouvement longitudinal des règles.

Le premier de ces mouvements, *a*, est seul utile à retenir pour la discussion numérique des résultats, en vue des corrections optiques auxquelles il peut donner lieu; les deux autres ont pour objet d'amener, une fois pour toutes, les règles dans la position moyenne d'observation.

3° La mise au point des microscopes : ces microscopes verticaux peuvent glisser dans leurs douilles, pour les grands mouvements, suivant leur axe; quant aux mouvements délicats du réglage de la mise au point, une vis portant un bouton à tête divisée (dont il sera parlé plus loin sous le nom de *bouton du microscope de droite* ou *de gauche*) permet de les obtenir.

COMPARAISON DE LA RÈGLE I_2 AVEC LE MÈTRE DES ARCHIVES.

La comparaison de deux règles à traits est une opération relativement facile; mais celle d'une règle à traits avec une règle à bouts, comme le Mètre des Archives, offre, au contraire, des difficultés toutes particulières qui ont apparu dès les premiers essais.

Il ne s'agit pas ici de la difficulté fondamentale, à savoir la substitution de repères optiques aux limites matérielles représentées par les bouts de la règle : elle avait été résolue par l'emploi de la méthode de M. Fizeau, adoptée après un minutieux examen dès l'année 1872. Cette méthode consiste, comme on sait, dans l'emploi de l'image réfléchie sur chaque face terminale d'une pointe opaque, amenée presque au contact de la surface; l'observation simultanée, dans le champ des microscopes, de la pointe et de son image, dont on estime aisément le milieu, définit géométriquement la position de la surface moyenne des bouts de la règle.

On est ainsi amené à comparer la distance des traits de la *règle à traits* avec la distance des milieux des deux images symétriques formées aux extrémités de la *règle à bouts :* l'exactitude de ces derniers pointés sera évidemment d'autant plus grande que l'intervalle entre la pointe et son image sera plus petite, de manière à réduire autant que possible l'erreur de bissection.

La première difficulté, dans l'application de cette méthode, s'est présentée

(1) La flexibilité des tiges d'acier, grâce à leur longueur d'environ $0^m,80$, permet d'effectuer les rectifications dans toutes les positions du chariot, comprises, d'ailleurs, dans un intervalle de quelques centimètres. Ces tiges, à cause de leur torsion, laissent évidemment, au point de vue de l'élégance mécanique, quelque chose à désirer; mais, en pratique, on arrivait aisément à amener, malgré la torsion de la tige, le bouton divisé à la division voulue.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

sous forme d'un manque de stabilité des pointes : les moindres trépidations, les petites variations de température modifiaient incessamment la distance des pointes à leur image et par suite la longueur apparente du Mètre des Archives.

Après divers essais, on s'est arrêté au dispositif suivant, qui a paru remplir toutes les conditions requises pour un bon fonctionnement : les pointes très fines sont découpées dans une feuille mince de platine et pincées sur un about de même métal; cet about repose directement sur l'extrémité du Mètre des Archives. A partir de l'emploi de ces abouts, les pointes ont présenté une stabilité très satisfaisante, que ne troublaient ni les différences de température ni les trépidations inévitables de l'appareil.

Mais il restait un autre genre d'erreur qui embarrassa longtemps les observateurs de la Section française (MM. Fizeau et Tresca) et ceux de la Commission néerlandaise (MM. Bosscha et Oudemans), occupés à cette époque à la comparaison directe des deux prototypes de la Hollande avec le Mètre des Archives; des anomalies singulières et à première vue incompréhensibles se présentèrent dans des séries successives faites avec le plus grand soin. L'examen des résultats fit soupçonner que ces anomalies provenaient de l'incertitude de la mise au point sur le Mètre des Archives : effectivement, des pointés spéciaux, exécutés par M. Oudemans, en faisant varier méthodiquement cette mise au point, montrèrent une corrélation directe entre les variations dans la longueur apparente de ce mètre et le tirage du microscope (1).

M. Fizeau en donna aussitôt l'explication : ces anomalies ont pour cause la dissymétrie des faisceaux pénétrant dans l'objectif du microscope, dissymétrie due à l'ombre portée par le bout du mètre; nous reviendrons en détail sur cette explication; en tout cas la discussion des chiffres observés en confirma immédiatement l'exactitude (2).

En résumé, les études préliminaires faites par la Section française et les Commissaires néerlandais, en 1879, avaient résolu à peu près complètement les difficultés inhérentes à la comparaison d'une règle à bouts avec une règle à traits; il ne restait plus qu'à trouver une méthode qui permit d'obtenir à *coup sûr* la mise au point exacte sur le mètre à bouts, condition indispensable pour pouvoir considérer comme rigoureuse la mesure optique d'une semblable règle, car l'appréciation instinctive d'un œil, même exercé, laisse une incertitude trop grande dans ces mesures de haute précision.

C'est le problème qui fut résolu dès les premières opérations de la Commission

(1) Voir l'*Exposé de la situation des travaux de la Section française* au 22 septembre 1879, p. 10.

(2) Toutes ces études ont été faites avec le comparateur à mouvement longitudinal, qui ne comporte qu'un seul microscope pour chaque règle.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

mixte chargée d'établir l'équation du Mètre des Archives et de l'Étalon provisoire I_2.

OPÉRATIONS DE COMPARAISON DU MÈTRE DES ARCHIVES ET DE LA RÈGLE I_2,

Par MM. R. BENOIT et G. TRESCA,

Sous la direction de la Commission mixte

(MM. Broch, Foerster et Stas, Membres du Comité international;
Dumas, Tresca et Cornu, Membres de la Section française).

Description du mode opératoire.

La Règle I_2 et le Mètre des Archives furent posés respectivement sur les deux tables du comparateur à mouvement transversal (1); la Règle I_2, par l'intermédiaire de deux galets situés à la distance de flexion minimum et maintenue par une pince permettant un déplacement longitudinal délicat (*voir* ci-dessus, p. 5, la description du comparateur); le Mètre des Archives, muni de ses abouts en même métal, par l'intermédiaire d'une gouttière de platine. Une vis de butée, à pas très fin, permet d'amener et de maintenir les pointes à une très petite distance des surfaces terminales.

Première série. — La première série de comparaisons (du 1er au 16 septembre 1881) forme un premier type : elle a été faite sans opération spéciale pour le réglage de la mise au point, autre que l'estime du maximum de netteté, aussi bien pour les pointes du Mètre des Archives que pour les traits de la Règle I_2. Aussi cette série a-t-elle été considérée comme une série d'essai n'ayant pas bénéficié de la méthode perfectionnée de mise au point employée dans les séries suivantes. Néanmoins il a paru nécessaire de la donner en détail pour montrer l'amélioration ultérieure apportée par l'emploi de cette méthode.

On comprendra facilement le mode opératoire suivi, ainsi que l'arrangement des Tableaux, en prenant comme exemple la première observation de la série, celle du 1er septembre 1881 (*voir* plus loin le *Journal des Observations*, p. XXI).

Les règles étant en place et approximativement réglées depuis plusieurs jours, on a mis au point aussi bien que possible à la manière ordinaire, c'est-à-dire par l'estime du maximum de netteté (nous n'insisterons pas ici sur la marche méthodique à suivre pour obtenir le réglage simultané des quatre extrémités des règles, une description très complète devant en être donnée ci-après quand on parlera des séries suivantes).

(1) C'est ce comparateur qui servit exclusivement aux mesures depuis l'époque de son installation, en juin 1879.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La comparaison a commencé à $9^h 18^m$ du soir par la lecture des thermomètres placés sur chaque règle (19,52; 19,51).

Ensuite on a amené le Mètre des Archives sous les deux microscopes; la première lecture a été faite au microscope de droite, avec le micromètre duquel on a effectué deux pointés consécutifs 22,6 et 22,0 (divisions du tambour); puis on a passé au microscope de gauche, où l'on a lu 56,1 et 57,2; enfin on est revenu au microscope de droite, où l'on a obtenu 22,2 et 22,2.

Déplaçant le chariot du comparateur, on a exécuté les mêmes opérations sur la Règle I_2, mais en commençant cette fois par le microscope de gauche; et ainsi de suite alternativement, de manière à terminer, en cinq opérations, par la même règle par laquelle on avait commencé.

On finissait le groupe de mesures à $9^h 40^m$ par une seconde lecture des thermomètres (19,52; 19,51).

Toutes les comparaisons ont été conduites de la même manière; toutefois on a varié les conditions d'expérience, en alternant soit l'ordre des deux règles, soit l'ordre des deux microscopes, afin de compenser la dissymétrie que présente ce mode opératoire au point de vue du nombre de pointés effectués sur chaque règle.

On a ainsi obtenu, pour chaque comparaison, cinq groupes de six pointés, que l'on traite séparément comme des observations croisées, en prenant la moyenne des quatre lectures obtenues avec l'un des microscopes et la moyenne des deux lectures intermédiaires obtenues avec l'autre. Le résultat final se compose donc de dix moyennes

$$a_1, b_1, \quad a_2, b_2, \quad a_3, b_3, \quad a_4, b_4, \quad a_5, b_5,$$

les a représentant les lectures du microscope de gauche, les b celles du microscope de droite. Nous verrons plus loin, lors de la réduction des mesures, comment de ces dix nombres on conclut la différence de longueur des deux règles, connaissant la *tare des micromètres*, c'est-à-dire le facteur qui réduit en unités métriques (*microns*) les divisions du tambour.

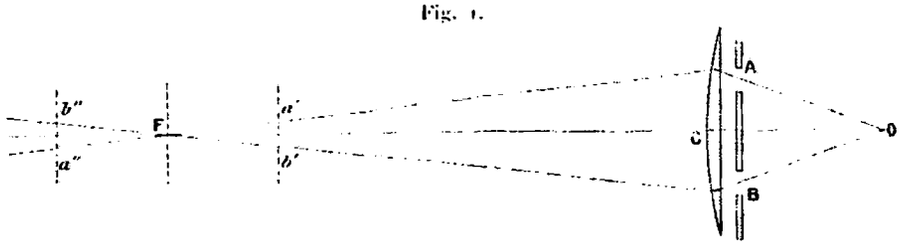
Deuxième, troisième, quatrième et cinquième séries. — Les quatre dernières séries constituent le type définitif des opérations de comparaison; elles se distinguent de la première série par l'adjonction d'opérations préliminaires destinées à assurer une mise au point du Mètre des Archives très voisine de la position exacte, et d'un ensemble de mesures destinées à calculer la correction à apporter au résultat final d'après la petite erreur pouvant encore subsister dans la mise au point adoptée.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La méthode employée pour arriver à ce résultat, due à M. Cornu, repose sur les remarques suivantes, empruntées à la théorie géométrique des lentilles.

1° Au foyer F (*fig.* 1) conjugué d'un point O, produit par un objectif aplané-

Fig. 1.



tique C, vont converger tous les rayons émanés du point O, quel que soit le point A ou B d'incidence sur la surface de la lentille.

2° Dans le plan $a'b'$, situé en deçà du foyer, le point d'intersection a' d'un faisceau étroit (ou foyer apparent du point O), émanant d'une ouverture A d'un diaphragme, se déplace dans le même sens que cette ouverture;

3° Dans un plan $a''b''$, situé au delà du foyer, le point d'intersection, ou foyer apparent, se déplace en sens inverse du mouvement de cette ouverture.

D'où il résulte que si l'on place devant l'objectif un écran percé d'une ouverture susceptible de prendre alternativement, et toujours dans le même ordre, les deux positions fixes A et B, la mesure en grandeur et en signe du déplacement correspondant $a'b'$ du foyer permet de déterminer la grandeur et le sens de l'erreur de mise au point, c'est-à-dire de la distance du plan de visée $a'b'$ au plan focal exact F.

On remplace ainsi l'appréciation instinctive et vague du *maximum de netteté* par une *mesure géométrique;* l'œil intervient toujours; mais il intervient par la *perception d'une coïncidence* d'un fil avec une image et non par l'estime de la netteté maximum d'un contour.

On réalise très simplement cette condition théorique en faisant, d'une part, mouvoir devant l'objectif du microscope un écran opaque percé d'une ouverture et mobile entre deux repères fixes, et, d'autre part, en mesurant avec le micromètre le déplacement apparent de l'image focale (image de la pointe directe et réfléchie sur le bout du Mètre des Archives).

Il suffit alors de répéter cette mesure en faisant varier méthodiquement le plan de visée, ou, ce qui revient au même, la position de l'objet visé, pour obtenir le changement de signe du déplacement observé.

A l'aide d'une *courbe d'erreur,* on calcule la position pour laquelle le déplacement serait nul : c'est la position exacte du foyer cherché, c'est-à-dire la position de la mise au point rigoureuse.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La construction du triangle $a'Fb'$ permet, d'ailleurs, de calculer $a'b'$ (ou le double de l'erreur de pointé), si l'on connait la distance de F à $a'b'$; par suite, de corriger cette erreur de pointé, si l'on connait l'erreur de mise au point.

Les observations préliminaires, dans chaque comparaison, ont donc pour but de déterminer la loi de variation du déplacement du foyer apparent $a'b'$ en fonction de la variation de distance du microscope aux pointes de platine.

Pratiquement, il se présente une circonstance qui complique un peu la description du mode opératoire, c'est que la variation de distance des pointes de platine de la Règle des Archives au microscope s'obtient de deux manières différentes, suivant qu'on observe à l'extrémité de droite ou à l'extrémité de gauche : d'un côté, c'est le microscope qui s'élève, le Mètre et sa table restant fixes; de l'autre, c'est, au contraire, le microscope qui reste fixe et la table qui s'abaisse.

Le motif de cette dissymétrie est le suivant : pour assurer la stabilité parfaite des tables soutenant ces règles, chacune de ces tables n'est susceptible de rectification dans le sens vertical qu'à une seule extrémité, et ces deux extrémités sont naturellement de nom contraire : l'axe horizontal autour duquel s'effectue le pivotement utile rencontre la verticale de l'axe de l'un des microscopes.

Il en résulte que la mise au point simultanée des quatre extrémités des deux règles ne peut s'obtenir sans tâtonnements qu'en suivant une marche méthodique; cette marche consiste à régler d'abord chaque microscope sur l'extrémité fixe de la règle correspondante, et ensuite à amener les extrémités mobiles au foyer des microscopes ainsi réglés. De là deux marches symétriques, suivant qu'on commence par l'un ou l'autre des deux microscopes : on a adopté celle qui consiste à commencer par régler le microscope de gauche sur l'extrémité fixe de la Règle I_2.

Voici d'abord quelques termes destinés à abréger la description : les positions des quatre extrémités des règles sont définies par la lecture des têtes de vis, ou *boutons* divisés, qui gouvernent les quatre mouvements verticaux : deux de ces boutons manœuvrent respectivement les microscopes, les deux autres les tables.

Les *boutons des microscopes* sont divisés en dix parties, numérotées de 0 à 10, avec subdivision par moitié, en sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre; les lectures se font de 0 à 100, en subdivisant à l'estime chaque division en cinq parties. Le microscope *monte* lorsque les lectures des divisions devant l'index fixe *décroissent* : c'est le sens du mouvement toujours adopté.

Les *boutons des tables* sont divisés en quarante parties, numérotées de cinq en cinq, également en sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre : la

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

table *s'abaisse* quand les lectures *décroissent* : c'est le sens du mouvement toujours adopté.

(D'où il résulte que le sens adopté pour ces quatre mouvements est celui qui *écarte* les microscopes relativement aux règles.)

On procède à la mise au point des quatre extrémités en suivant la marche méthodique que voici :

Pour rendre la description plus claire, nous prendrons comme exemple la première observation de la deuxième série, désignée sous le n° XXV (24 septembre 1881. *Voir* le *Journal des Observations*, p. XXIX.)

a. On commence par régler le *microscope de gauche* sur la Règle I_2 par cinq épreuves successives, dans lesquelles on s'efforce d'amener l'image du trait au maximum de netteté; on prend la moyenne (98) des cinq lectures correspondantes sur le bouton du microscope.

Alors on déplace le chariot et l'on amène le Mètre des Archives dans le champ des microscopes.

b. On met au point le *microscope de droite* sur le Mètre des Archives par l'opération spéciale décrite ci-après : on en conclut le chiffre 43 pour la lecture du microscope dans la position la plus probable.

c. En répétant l'opération analogue, on met au point l'extrémité de gauche du Mètre des Archives par déplacement vertical *de la table de gauche;* on en conclut le chiffre 24 pour la lecture du bouton de la table.

d. On ramène la Règle I_2 sous les microscopes, et l'on met au point son extrémité mobile sous le microscope de droite par le déplacement vertical de *la table de droite*. On fait cinq lectures du bouton de la table et l'on adopte la moyenne 30,7.

Il reste à décrire l'opération spéciale de la mise au point sur le Mètre des Archives. Elle consiste, conformément aux principes géométriques rappelés précédemment, à déplacer verticalement le microscope (ou la table) de façon à lui faire occuper cinq positions équidistantes, comprenant celle qui correspond à la mise au point exacte, déjà connue approximativement. Ces déplacements s'obtiennent en tournant d'angles égaux, et toujours dans le même sens, les boutons précités. D'après la théorie de cette méthode, on a vu qu'on peut déterminer dans chaque position une quantité proportionnelle à l'erreur de mise au point et construire une véritable courbe d'erreurs, de laquelle on déduit la position où l'erreur devient nulle.

Cette détermination s'effectue en déplaçant devant l'objectif du microscope, entre deux limites fixes, une lame métallique percée d'une fente parallèle à la direction du fil du micromètre; cette fente livre alternativement passage à deux portions du faisceau de lumière qui forme l'image dans le plan du réticule. Si

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

le plan du réticule est exactement au foyer, les deux images correspondantes coïncident; sinon, elles sont séparées par un intervalle positif ou négatif, suivant que le foyer du microscope est en dessus ou en dessous du plan visé. Cet intervalle se mesure, pour chacune des cinq positions indiquées, en pointant avec le réticule les deux positions de l'image correspondant aux deux positions de l'écran.

Pour abréger la durée du séjour de l'observateur au voisinage de l'instrument, on traçait rapidement, sur un papier quadrillé, cette courbe d'erreurs (les cinq lectures du bouton en abscisses et les déplacements correspondants de l'image en ordonnées), et l'on en déduisait l'ordonnée nulle, c'est-à-dire la lecture du bouton du microscope (ou de la table) donnant la mise au point exacte. Ce procédé expéditif devait, il est vrai, laisser subsister une petite erreur; mais la discussion ultérieure de ces cinq observations permet, comme on le verra plus loin, d'en corriger l'influence sur le résultat final.

Pour faire la comparaison, la fente était ramenée à sa position moyenne, réglée d'avance par la condition de donner un anneau oculaire uniformément éclairé et symétrique.

Nous transcrivons ci-dessous le détail des opérations de la mise au point effectuée dans l'observation n° XXV, la première de la seconde série qui ait été faite conformément à la méthode de M. Cornu (24 septembre 1881. Voir *Journal des Observations*, p. XXIX).

Sous le titre *Opérations préliminaires*, nous trouvons d'abord les lectures correspondant aux opérations désignées ci-dessus par *a* et *b* (p. 14) :

	a.	*b*.		
	Mètre L.	Mètre des Archives.		
	Bouton du micr. G.	Bouton du micr. D.	Pointés. fente à gauche.	Pointés. fente à droite.
	98	100	72,6	60,3
	96	75	73,7	69,0
	92	50	84,2	82,2
	101	25	89,55	96,7
	103	0	98,3	105,9
Tirages adoptés	98	$m = 43$		

La première colonne donne les cinq lectures consécutives du bouton du microscope de gauche correspondant au maximum de netteté du trait de l'extrémité de gauche de la Règle L_2, ainsi que le tirage moyen adopté (98).

La colonne suivante donne les lectures du bouton du microscope de droite correspondant aux cinq positions équidistantes choisies en vue de la recherche méthodique de la mise au point sur l'extrémité de droite du Mètre des Archives; les deux colonnes qui suivent reproduisent les couples des pointés faits avec le

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

réticule sur les images de ce mètre à bouts (milieu de la pointe et de son image réfléchie), dans les deux positions *gauche* et *droite* de la fente.

Les différences de ces couples de pointés sont respectivement

$$12{,}3,\quad 4{,}7,\quad 2{,}0,\quad -7{,}15,\quad -7{,}6.$$

En portant ces différences comme ordonnées correspondant aux abscisses

$$100,\quad 75,\quad 50,\quad 25,\quad 0,$$

on obtient, comme courbe d'erreur, une ligne brisée, d'après laquelle on a estimé *graphiquement* à $m = 43$ la lecture du bouton correspondant au déplacement nul de l'image (mise au point exacte).

Le Tableau ci-dessous reproduit de même les résultats des opérations *c* et *d* :

	c. Mètre des Archives. Pointés.		*d*. Mètre I_2.
	Bouton de la Table G.	fente à gauche.	fente à droite.	Bouton de la Table D.
	35	78,3	71,8	31,2
	30	45,0	40,0	30,8
	25	21,1	20,6	31,0
	20	4,1	6,6	29,8
	15	81,0	87,0	30,7
Tirages adoptés..	$p = 24$			30,7

Les chiffres de la première colonne reproduisent les cinq positions équidistantes de l'extrémité *gauche* du Mètre des Archives.

En faisant les mêmes mesures et la même construction graphique que dans l'opération *b*, on a défini le tirage adopté ($p = 24$) en déterminant l'abscisse correspondant à l'ordonnée nulle dans la courbe déterminée par les ordonnées (différences des deux lectures du microscope G)

$$6{,}5,\quad 5{,}0,\quad 0{,}5,\quad -2{,}2,\quad -6{,}0,$$

correspondant aux cinq abscisses

$$35,\quad 30,\quad 25,\quad 20,\quad 15.$$

Enfin, le tirage 30,7 de l'extrémité droite de la table portant la Règle I_2 est la moyenne des cinq lectures du bouton correspondant à la netteté maximum de l'image du trait : c'est celui qui a été adopté pour pointer le Mètre I_2.

A la suite de ces Tableaux figure la série des cinq groupes de pointés de comparaison entre le Mètre des Archives et la Règle I_2, sous la forme précédemment indiquée dans la description de la première série (p. 11).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Enfin les températures prises au commencement et à la fin des opérations sont marquées, avec les heures correspondantes, en tête des Tableaux. D'après un certain nombre de vérifications du zéro de ces thermomètres (très soigneusement construits par Baudin suivant sa méthode de compensation), on a adopté la correction $-0^{\circ},30$, qu'on applique à la moyenne des observations.

Ces deux thermomètres portaient les nos 4895 et 4897. Ils étaient placés, le premier sur le Mètre des Archives, le second sur la Règle I_2, symétriquement, les divisions dirigées en sens inverses, et les réservoirs situés sensiblement au quart de la longueur de chacune des règles.

RÉDUCTION DES OBSERVATIONS.

Elle comprend deux parties principales :

1° Le calcul de la différence de longueur des deux règles déduite des pointés micrométriques, que nous appellerons *équation brute*.

2° Le calcul de la *correction de l'erreur de mise au point*.

I. — Calcul de l'équation brute.

Sans insister sur le détail de ces réductions, qui sont aujourd'hui classiques, il suffira de rappeler que l'équation cherchée s'obtient en combinant avec les signes convenables les différences des pointés faits sur les deux règles avec chacun des microscopes, ces différences étant ramenées à la même unité à l'aide de facteurs résultant d'un tarage préliminaire des micromètres.

Ces facteurs sont, pour les deux microscopes du comparateur à mouvement transversal,

$\alpha = 0^{\mu},380$ microscope de gauche (1 division du tambour $= 0^{\mu},380$),
$\beta = 0^{\mu},369$ » de droite (» » $= 0^{\mu},369$).

[On trouvera plus loin dans l'*Annexe I* (p. III) le détail des opérations qui ont fourni ces facteurs.]

On se rappellera que la division est le $\frac{1}{100}$ de tour de vis du micromètre et que, d'après le sens du numérotage des tambours, les lectures *croissent* quand le fil du réticule se *déplace de la droite vers la gauche* (←) : c'est l'inverse du sens généralement adopté.

Mode de combinaison des lectures adopté par la Commission mixte. — Pour répondre aux préoccupations de plusieurs membres de la Commission internationale sur le degré de stabilité des microscopes du comparateur, la Commission a adopté un mode de combinaison qui présente l'avantage d'éliminer les *erreurs fonctions du temps* provenant d'un déplacement longitudinal continu des diverses

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

pièces du comparateur. Cette combinaison est une généralisation des observations croisées, employée dans chacun des cinq groupes de pointés, et qui permet d'éliminer, dans un très petit intervalle de temps, une variation commune aux deux pointés à définir, supposée proportionnelle au temps : au lieu de deux pointés a' et b' exécutés aux microscopes de gauche (a') et de droite (b') on en fait trois a', b', a'', à des intervalles de temps égaux et la moyenne $\frac{a' + a''}{2}$ équivaut à une observation faite simultanément avec b'. Nous rappellerons que c'est ainsi que l'on obtient les cinq paires de chiffres

$$a_1, b_1, \quad a_2, b_2, \quad a_3, b_3, \quad a_4, b_4, \quad a_5, b_5$$

(avec cette seule différence que chaque pointé, au lieu d'être simple, est répété deux fois).

En résumé, chaque paire de pointés peut être considérée comme une paire de *pointés simultanés*, grâce à ce qu'ils ont été effectués dans un très court espace de temps et à trois époques moyennes équidistantes.

Le même raisonnement s'appliquerait à trois paires de pointés consécutifs, effectués aussi à trois époques moyennes équidistantes ; ainsi on peut considérer la moyenne de a_1 et a_3 comme simultanée avec a_2 ; et, comme les mesures des deux règles sont faites alternativement au même microscope, la différence

$$\frac{a_1 + a_3}{2} - a_2 \qquad \text{ou} \qquad \tfrac{1}{2}(a_1 - 2a_2 + a_3)$$

représentera la différence des pointés du microscope de gauche sur les deux règles, comme si ces pointés avaient été simultanés : on remarquera que cette combinaison est la *moitié de la différence seconde* des trois pointés consécutifs a_1, a_2, a_3 au même microscope.

Il est évident que l'élimination des erreurs est ici moins parfaite, théoriquement, à cause de la plus grande durée de l'intervalle écoulé entre la première et la dernière observation : il est donc nécessaire de supposer que l'erreur dépend, non seulement de la première, mais aussi de la seconde puissance du temps. L'élimination exige alors la combinaison de quatre paires d'observations : on trouve aisément, d'après la théorie élémentaire des différences, que la combinaison à adopter est *le sixième de la différence troisième*, c'est-à-dire l'expression

$$\tfrac{1}{6}(a_1 - 3a_2 + 3a_3 - a_4).$$

Il était donc naturel, puisqu'on disposait de cinq paires de pointés, d'adopter *le huitième de la différence quatrième*, qui a la propriété d'éliminer l'influence des erreurs fonctions du temps jusqu'à la troisième puissance inclusivement.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On en conclut l'expression de la différence de position des deux extrémités gauches des deux règles, en *microns* (en substituant $\alpha = 0^{\mu},380$),

$$\mathfrak{a} = \tfrac{1}{8}(a_1 - 4a_2 + 6a_3 - 4a_4 + a_5)\alpha.$$

De même, au microscope de droite (en substituant $\beta = 0^{\mu},369$),

$$\mathfrak{b} = \tfrac{1}{8}(b_1 - 4b_2 + 6b_3 - 4b_4 + b_5)\beta.$$

D'après le sens du déplacement positif des réticules (lectures croissantes de droite à gauche), la différence de longueur *entre la première règle visée et la seconde* est $\mathfrak{b} - \mathfrak{a}$.

On aura donc $\mathfrak{b} - \mathfrak{a} = I_2 - A$, si la première règle visée est la Règle I_2, comme dans l'observation n° XXV, que nous avons choisie pour exemple; on aurait au contraire $\mathfrak{b} - \mathfrak{a} = A - I_2$ dans les observations où le premier pointé a_1 aurait eu lieu sur le Mètre des Archives.

Remarque. — Ce mode de combinaison $\frac{1}{8}\Delta^4$, qui avait surtout pour but d'affranchir le résultat final de l'erreur résultant d'une instabilité présumée (heureusement presque insensible) du comparateur, jouit aussi de la propriété d'éliminer d'autres variations, ou plutôt de les rapporter à l'époque moyenne de la comparaison. Le calcul suivant achèvera d'éclaircir ce que l'exposé précédent peut encore laisser d'indécis.

Considérons les cinq pointés moyens a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, faits au microscope de gauche, par exemple, à des époques en progression arithmétique $t_1, t_2, \ldots, t_5$; supposons qu'ils soient erronés, par suite d'une influence quelconque, de telle sorte qu'il faille les affecter respectivement des corrections $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_5$.

Les pointés corrigés seraient donc

$$\begin{array}{ll} a_1 + \varepsilon_1 & \\ & a_2 + \varepsilon_2 \\ a_3 + \varepsilon_3 & \\ & a_4 + \varepsilon_4 \\ a_5 + \varepsilon_5 & \end{array}$$

en rappelant par leur disposition typographique qu'ils se rapportent alternativement à deux règles différentes.

La combinaison $\frac{1}{8}\Delta^4$ donnera évidemment le résultat $\mathfrak{a}$ (au facteur α près), augmenté de la correction

$$\tfrac{1}{8}(\varepsilon_1 - 4\varepsilon_2 + 6\varepsilon_3 - 4\varepsilon_4 + \varepsilon_5).$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On voit que, si la cause perturbatrice *est une fonction du temps développable jusqu'à la troisième puissance et la même pour tous les pointés* faits avec le microscope de gauche (ce qui se présentera si le microscope se déplace, si le chariot ou le banc portant les règles varie de position d'une manière continue, soit par des retards d'élasticité, soit par l'effet de la température, etc.), l'expression de la *correction se réduira à zéro* parce que la différence quatrième d'une fonction entière du troisième degré est nulle.

C'est la démonstration, sous une autre forme, de l'emploi de l'expression $\frac{1}{8}\Delta^4$.

Mais il peut se faire que les erreurs ε_1, ε_3, ε_5 et les erreurs ε_2, ε_4, correspondant à des pointés sur des règles différentes, ne soient pas représentées par la même fonction; ainsi, supposons que ε_1, ε_3, ε_5 satisfassent à la loi

$$\varepsilon' = m' + n' t + p' t^2 + \dots,$$

et ε_2, ε_4 à une loi différente (1)

$$\varepsilon'' = m'' + n'' t + p'' t^2 + \dots.$$

L'élimination jusqu'à la troisième ni même jusqu'à la seconde puissance du temps n'aura plus lieu d'elle-même comme dans le cas précédent, car l'expression $\frac{1}{8}\Delta^4\varepsilon$ ne contient plus les différences requises pour ces éliminations. Mais il est facile de calculer la valeur de cette correction en substituant, dans l'expression ci-dessus $\frac{1}{8}\Delta^4\varepsilon$, les valeurs des époques $t_1, t_2, \dots, t_5$ dans les développements ε' et ε'' :

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{8}\Delta^4\varepsilon &= \tfrac{1}{8}(\varepsilon_1 + 6\varepsilon_3 + \varepsilon_5) - \tfrac{1}{8}(\varepsilon_2 + \varepsilon_4)\\
\tfrac{1}{8}\Delta^4\varepsilon &= \tfrac{1}{8}[8m' + n'(t_1 + 6t_3 + t_5) + p'(t_1^2 + 6t_3^2 + t_5^2)]\\
&\quad - \tfrac{1}{2}[2m'' + n''(t_2 + t_4) + p''(t_2^2 + t_4^2)].
\end{aligned}$$

Écrivons maintenant que $t_1, t_2, \dots, t_5$ sont en progression arithmétique dont la raison est τ : on aura évidemment

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= t_3 - 2\tau\\ t_2 &= t_3 - \tau\\ t_3 &= t_3\\ t_4 &= t_3 + \tau\\ t_5 &= t_3 + 2\tau \end{aligned}\right\}, \quad \text{d'où} \quad \left\{\begin{aligned} t_1 + t_5 &= 2t_3\\ t_2 + t_4 &= 2t_3 \end{aligned}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{aligned} t_1^2 + t_5^2 &= 2t_3^2 + 8\tau^2,\\ t_2^2 + t_4^2 &= 2t_3^2 + 2\tau^2. \end{aligned}\right.$$

(1) Ces développements renferment comme cas particuliers ceux où les règles à comparer différeraient aussi bien par le pouvoir émissif que par le coefficient de dilatation.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

substituant

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{8}\Delta^4\varepsilon &= m' + n' t_3 + p'(t_3^2+\tau^2) - m'' - n'' t_3 - p''(t_3^2+\tau^2)\\ &= m' + n' t_3 + p' t_3^2 - (m'' + n'' t_3 + p'' t_3^2) + (p'-p'')\tau^2,\\ \tfrac{1}{8}\Delta^4\varepsilon &= \varepsilon'_3 - \varepsilon''_3 + (p'-p'')\tau^2,\end{aligned}$$

où ε'_3 et ε''_3 représentent le résultat de la substitution de $t = t_3$ dans les développements de ε' et ε''.

D'où il résulte que la combinaison $\frac{1}{8}\Delta^4$ des pointés comporte comme correction la différence des corrections des pointés des deux règles à l'époque t_3, si l'erreur ne contient que la première puissance du temps (cas où $p' = p'' = 0$) : en un mot, la *comparaison se rapporte à la température moyenne*.

Si l'erreur contient la seconde puissance du temps, la correction à apporter n'est plus susceptible d'une définition simple; mais on voit que la combinaison de deux observations faites sur les deux règles, prises en *ordre inverse* et *aux mêmes* intervalles de temps, pourra éliminer cette erreur; car elle aura dans les deux cas les expressions suivantes

$$(p'-p'')\tau^2, \qquad (p''-p')\tau^2,$$

égales et de signe contraire : le terme en t^2 pourra donc aussi s'éliminer.

C'est en cela qu'il a été très utile d'alterner l'ordre des règles dans les comparaisons successives.

Les mêmes calculs s'appliqueraient aux données $b_1, b_2, \ldots, b_5$ du microscope de droite et conduiraient aux mêmes conclusions.

En résumé, le mode de combinaison $\frac{1}{8}\Delta_4$ des cinq résultats partiels affranchit les observations faites à chaque microscope des erreurs développables suivant les puissances du temps, soit *inhérentes au microscope, soit communes aux deux règles*, jusqu'à la troisième puissance du temps, et aussi des erreurs *particulières à chaque règle* jusqu'à la seconde puissance, par une opération en ordre inverse (¹). Les résultats se rapportent alors rigoureusement à la température de l'observation moyenne.

(¹) Ce mode de combinaison a été adopté par la Commission sur la proposition de M. Cornu, qui, dans ses expériences en collaboration avec M. J.-B. Baille sur la densité moyenne de la Terre, a été amené depuis longtemps à reconnaître les avantages de ce mode de calcul.

Il est utile d'ajouter qu'on peut trouver d'autres combinaisons des cinq groupes de pointés donnant des résultats définitifs très rapprochés de la combinaison adoptée ci-dessus. Nous en donnerons des exemples plus loin. La concordance très approchée des résultats provient de ce fait que les erreurs dépendant du temps sont très petites, qu'elles varient suivant une fonction presque linéaire et surtout de ce qu'elles sont masquées par des erreurs accidentelles qui exercent une influence prédominante

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

EXEMPLE DE CALCUL DE L'ÉQUATION BRUTE.

Observation n° XXV. — 24 *septembre* 1881.

Nous transcrivons ici les pointés individuels des microscopes dans les opérations de la comparaison proprement dite. (Voir *Journal des Observations*, p. XXIX.)

I_2.		Arch.		I_2.		Arch.		I_2.	
G.	D.	G.	D.	G.	D.	G.	D.	G.	D.
51,8			78,5	51,0			79,3	52,8	
50,9	105,0	19,4	78,3	52,0	106,9	23,0	80,1	53,0	107,8
50,8	104,8	20,4	78,0	51,6	106,4	22,0	78,0	53,1	108,0
50,7			77,0	52,0			77,2	53,0	
$a_1 = 51,050$		$a_2 = 19,900$		$a_3 = 51,650$		$a_4 = 22,500$		$a_5 = 52,975$	
	$b_1 = 104,900$		$b_2 = 77,950$		$b_3 = 106,650$		$b_4 = 78,650$		$b_5 = 107,900$

Calculons séparément $\frac{1}{8}\Delta^4 a$ et $\frac{1}{8}\Delta^4 b$ (1) :

	Δ^1.	Δ^2.	Δ^3.	Δ^4.
$a_1 = 51,050$	$+31,150$	$+62,900$	$+123,800$	$+244,325$
$a_2 = 19,900$	$-31,750$	$-60,900$	$-120,525$	
$a_3 = 51,650$	$+29,150$	$+59,625$		
$a_4 = 22,500$	$-30,475$			
$a_5 = 52,975$		$\frac{1}{8}\Delta^4 a = +30,541$		

	Δ^1.	Δ^2.	Δ^3.	Δ^4.
$b_1 = 104,900$	$+26,950$	$+55,650$	$+112,350$	$+226,300$
$b_2 = 77,950$	$-28,700$	$-56,700$	$-113,950$	
$b_3 = 106,650$	$+28,000$	$+57,250$		
$b_4 = 78,650$	$-29,250$			
$b_5 = 107,900$		$\frac{1}{8}\Delta^4 b = +28,287$		

Multipliant $\frac{1}{8}\Delta^4 a$ par $\alpha = 0^\mu,380$, et $\frac{1}{8}\Delta^4 b$ par $\beta = 0^\mu,369$, on en déduit

$$\mathfrak{a} = +11^\mu,606, \qquad \mathfrak{b} = +10^\mu,438.$$

La différence des deux règles étant toujours $\mathfrak{b} - \mathfrak{a}$, la première pointée (ici I_2), ayant le signe $+$, on a

$$I_2 - \text{Arch.} = -1^\mu,168.$$

Telle est la valeur de l'*équation brute*.

---

principalement quand les comparaisons sont peu nombreuses. Les raisons théoriques de l'adoption de la combinaison adoptée ne perdent d'ailleurs rien de leur valeur, quand bien même on démontrerait (ce qui est à peu près impossible) que les lois des erreurs avec le temps ne sont pas aussi complexes qu'on l'a supposé dans les calculs ci-dessus.

(1) L'expression de ces différences $\frac{1}{8}(a_1 - 4a_2 + 6a_3 - 4a_4 + a_5)$ peut aussi se calculer directement et servir ainsi de vérification.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

II. — Calcul de la correction due à l'erreur de mise au point.

La mise au point adoptée comme la meilleure, d'après le tracé graphique rapide effectué au moment de la comparaison, aurait pu être améliorée par une discussion des chiffres obtenus dans les *opérations préliminaires* (*voir* ci-dessus, p. 15). Mais, comme les pointés ont été effectués avec cette mise au point un peu défectueuse, il s'agit d'en corriger les moyennes d'après le résultat de cette discussion, qu'il était impossible de faire avant de commencer les mesures.

Reportons-nous aux cinq points qui définissent la courbe d'erreurs dont il a été question plus haut (p. 14) : de ces cinq points, on rejette, en général, les deux points extrêmes comme trop éloignés du meilleur réglage; le calcul a donc toujours été basé sur les trois points moyens (1).

On pourrait par ces trois points, s'ils étaient rigoureusement exacts en position, faire passer une parabole du deuxième degré; mais, comme ils sont certainement entachés d'erreurs accidentelles, il a paru logique de remplacer cette courbe d'erreurs parabolique par une *droite moyenne*, définie par la condition que la somme des carrés des différences des ordonnées soit minimum (2).

Le calcul se simplifie beaucoup, parce que les abscisses x_1, x_2, x_3 de ces points (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) sont en progression arithmétique; effectivement, on démontre aisément, dans ce cas, que la droite cherchée passe par le centre de gravité des trois points et est parallèle à la droite qui joint les points extrêmes.

Or les coordonnées (X, Y) du centre de gravité sont évidemment

$$X = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \qquad Y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3};$$

par suite, l'équation de la droite s'écrit immédiatement

$$\frac{x - X}{y - Y} = \frac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1}.$$

(1) Après les réductions définitives on a reconnu que le meilleur réglage était dans quelques cas plus voisin de l'un des deux extrêmes des trois points conservés : il aurait donc été plus naturel de conserver, non pas les trois points du milieu, mais les trois points les plus voisins. Ce calcul a été fait, comme on le verra plus loin; il ne change pas sensiblement le résultat final.

(2) La théorie montre effectivement que la courbe d'erreur est une droite, au voisinage de la mise au point correcte par l'objectif; la forme de cette courbe se complique théoriquement, si l'on fait intervenir en plus l'effet d'un réglage défectueux de l'oculaire sur les fils du réticule. Toutefois, dans les conditions des expériences dont il s'agit ici, cette dernière cause d'erreur paraît n'avoir qu'une influence absolument insensible. Outre qu'il n'existe comparativement aucune difficulté à mettre au point exactement l'oculaire sur le réticule, quelques essais, effectués sur ces mêmes microscopes, avec des dépointements intentionnellement exagérés, n'ont permis de mettre nettement en évidence ni la grandeur, ni même le signe de cette correction.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Or on cherche l'abscisse $x = \xi$ correspondant à l'ordonnée nulle $y = 0$, d'où l'on tire

$$\xi = X - Y\frac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1}.$$

Cette abscisse donne la lecture *calculée* du bouton fournissant la *mise au point la plus probable.*

Exemple numérique.

(*Même observation* n° XXV. — 24 *septembre* 1881.)

Transcrivons une seconde fois les chiffres à utiliser, en les extrayant du Tableau *c* (p. 16) des *opérations préliminaires;* nous les écrirons dans l'ordre suivant (valeurs croissantes de x) :

Bouton de la Table G.	Différences des pointés au microscope de G.
$x_1 = 20$	$y_1 = 4{,}4 - 6{,}6 = -2{,}2$
$x_2 = 25$	$y_2 = 21{,}1 - 20{,}6 = +0{,}5$
$x_3 = 30$	$y_3 = 45{,}0 - 40{,}0 = +5{,}0$

on en conclut

$$X = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = 25, \qquad Y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = 1{,}100.$$

$$x_3 - x_1 = 10, \qquad y_3 - y_1 = 7{,}2.$$

et, par suite,

$$\xi = X - Y\frac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1} = 25 - 1{,}100\,\frac{10}{7{,}2} = 23{,}472.$$

Ainsi, au lieu de la lecture $p = 24$, adoptée d'après le tracé graphique rapide pour le bouton de la Table G, il eût fallu prendre

$$p_0 = 23{,}472.$$

La petite erreur de mise au point est donc $p - p_0 = +0{,}528$, exprimée en parties de la tête du bouton.

Des mesures spéciales, dont on rendra compte plus loin (*voir* l'*Annexe II*, p. VII), ont montré que, dans les présentes conditions, une erreur de mise au point de $+1$ division du bouton de la table correspond à une variation de $-0^{\mu},8794$ dans la longueur apparente du Mètre des Archives.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La correction cherchée est donc, pour les pointés faits au *microscope de gauche*,

$$\gamma = -0,528 \times 0,8794 = -0^{\mu},464.$$

Les opérations similaires effectuées sur le *microscope de droite*, en agissant sur le bouton qui lui correspond, conduisent aux calculs suivants (chiffres extraits du Tableau *b*, p. 15) :

Bouton du microscope de D.	Différences des lectures au microscope de D.
$x_1 = 25$	$y_1 = 89,55 - 96,7 = -7,15$
$x_2 = 50$	$y_2 = 84,2 - 82,2 = +2,0$
$x_3 = 75$	$y_3 = 73,7 - 69,0 = +4,7$

d'où

$$X = 50, \qquad Y = 0,150,$$

$$x_3 - x_1 = 50, \qquad y_3 - y_1 = +11,85,$$

$$\xi = 50 + 0,150\,\frac{50}{11,85} = 50,633.$$

Ainsi, au lieu de la lecture $m = 43$, adoptée pour le bouton du microscope de droite, il eût fallu prendre $m_0 = 50,633$. L'erreur de mise au point est donc $m - m_0 = -7,633$, exprimée en parties du bouton.

Ici le facteur de réduction est $-0^{\mu},1720$.

La correction cherchée est donc, pour les pointés du *microscope de droite*,

$$\delta = -7,633 \times 0,1720 = +1^{\mu},313.$$

La correction totale est

$$\gamma - \delta = +0^{\mu},849,$$

qu'il faut ajouter à l'*équation brute* obtenue ci-dessus par le calcul des différences.

Le résultat final est

$$I_2 - A = -1^{\mu},168 + 0^{\mu},849 = -0^{\mu},319.$$

La température correspondant à l'observation moyenne n'a pas été observée directement : on lui substitue la moyenne des températures prises avant la première observation et après la dernière

$$\theta = 18^{\circ},217.$$

Ces deux derniers nombres constituent le résultat final de la comparaison du 24 septembre 1881.

On trouvera, dans le *Journal d'observations*, toutes les données pour calculer $m - m_0$, γ, δ, et finalement l'équation $I_2 - A$ à la température moyenne θ.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

RÉSUMÉ DES COMPARAISONS ET DISCUSSION DES RÉSULTATS (1).

Les résultats des comparaisons faites entre le Mètre I_2 et le Mètre des Archives, indiqués plus haut, sont reproduits dans les Tableaux suivants. Afin de permettre de comparer entre eux les résultats fournis par les diverses observations individuelles, on a, dans l'avant-dernière colonne de chaque Tableau, ramené chacun de ces résultats à la température moyenne de la série correspondante. On s'est servi pour cela du facteur de réduction — 0,387, qui est, comme on va le voir, celui qui résulte du calcul de toutes les expériences.

Tous les calculs ont été faits à trois décimales. On a supprimé ici la dernière, qui ne présente aucun intérêt; le $\frac{1}{100}$ de micron même ne répond à rien qui soit réellement mesurable dans des observations de ce genre.

Série I.

Observation.	Date.	Température.	$I_2 - A.$	$I_2 - A.$ réduit à 18°,00.	ε. obs.—calc.
			μ	μ	μ
I	1881. 1 sept.....	19°,215	+ 0,13	+ 0,43	+ 0,21
II	2 »	19,141	+ 1,11	+ 1,38	+ 1,16
III	3 »	18,980	— 1,03	— 0,82	— 1,05
IV	4 »	18,817	— 3,12	— 2,98	— 3,20
V	5 »	18,676	— 1,69	— 1,60	— 1,82
VI	6 »	18,532	— 1,57	+ 1,60	— 1,37
VII	6 »	18,510	— 1,25	+ 1,27	+ 1,05
VIII	6 »	18,515	— 2,46	— 2,44	— 2,66
IX	7 »	18,515	— 2,52	— 2,50	— 2,72
X	7 »	18,530	+ 2,17	+ 2,20	+ 1,97
XI	8 »	18,459	— 0,77	— 0,76	— 0,99
XII	8 »	18,480	— 1,05	+ 1,06	+ 0,84
XIII	9 »	18,404	+ 3,49	+ 3,48	+ 3,25
XIV	9 »	18,504	+ 0,79	+ 0,81	+ 0,59
XV	10 »	18,381	+ 0,89	+ 0,86	+ 0,64
XVI	11 »	18,257	— 2,77	— 2,84	— 3,06
XVII	11 »	18,216	+ 1,11	+ 1,02	+ 0,80
XVIII	12 »	18,232	+ 1,18	+ 1,10	+ 0,88
XIX	12 »	18,217	+ 2,22	+ 2,13	+ 1,90
XX	13 »	18,169	+ 0,25	+ 0,14	— 0,08
XXI	13 »	18,122	+ 1,45	+ 1,32	+ 1,10
XXII	14 »	18,085	+ 1,09	+ 0,95	+ 0,72
XXIII	15 »	17,980	— 0,01	— 0,19	— 0,41
XXIV	16 »	17,887	— 0,03	— 0,25	— 0,47
	Moyenne.....	18,451	+ 0,22	+ 0,22	$[\varepsilon^2] = 66,988$
				± 0,24	

(1) Tous les calculs ont été refaits en double, indépendamment, par MM. Benoît, Directeur, et Ozenne, Aide au Bureau international des Poids et Mesures; toutes les données avaient été soigneusement collationnées, ainsi qu'on l'a déjà dit, par MM. G. Tresca et Benoît sur les originaux des observations conservés au Conservatoire des Arts et Métiers.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Série II.

Observation.	Date.	Température.	$I_2 - A$.	$I_2 - A$. réduit à 17°,821.	ε. obs.—calc.
			μ	μ	μ
XXV	1881. 24 sept.	18°,217	— 0,32	— 0,17	+ 0,28
XXVI	25 »	18,139	— 1,20	— 1,08	— 0,63
XXVII	26 »	18,049	+ 0,22	+ 0,31	+ 0,76
XXVIII	26 »	18,094	— 0,54	— 0,41	+ 0,01
XXIX	27 »	18,089	— 1,02	— 0,92	— 0,47
XXX	27 »	18,096	— 1,22	— 1,12	— 0,67
XXXI	28 »	18,072	+ 0,26	+ 0,36	+ 0,80
XXXII	29 »	17,927	— 0,14	+ 0,18	+ 0,63
XXXIII	30 »	17,802	— 0,47	— 0,48	— 0,03
XXXIV	1 oct.	17,624	— 1,04	— 1,11	— 0,67
XXXV	4 »	16,982	— 0,45	— 0,77	— 0,33
XXXVI	5 »	16,795	+ 0,26	— 0,14	+ 0,31
	Moyenne.....	17,824	— 0,45	— 0,45	$[\varepsilon^2] = 3,406$
				± 0,11	

Série III.

Observation.	Date.	Température.	$I_2 - A$.	$I_2 - A$. réduit à 15°,060.	ε. obs.—calc.
			μ	μ	μ
XXXVII	1881. 7 oct.	15°,897	— 0,01	+ 0,31	+ 0,23
XXXVIII	10 »	15,465	— 0,03	+ 0,12	+ 0,04
XXXIX	11 »	15,336	— 1,19	— 1,08	— 1,16
XL	12 »	15,216	— 0,68	— 0,62	— 0,70
XLI	13 »	15,105	+ 0,35	+ 0,37	+ 0,29
XLII	14 »	15,104	— 1,03	+ 1,05	+ 0,97
XLIII	15 »	14,967	+ 1,15	+ 1,11	+ 1,03
XLIV	16 »	14,900	— 1,38	— 1,44	— 1,52
XLV	17 »	14,784	— 0,58	— 0,69	— 0,77
XLVI	17 »	14,767	+ 0,66	+ 0,54	+ 0,46
XLVII	18 »	14,712	— 0,71	— 0,85	— 0,93
XLVIII	19 »	14,471	+ 2,38	+ 2,15	+ 2,07
	Moyenne.....	15,060	+ 0,08	+ 0,08	$[\varepsilon^2] = 12,260$
				± 0,21	

Série IV.

Observation.	Date.	Température.	$I_2 - A$.	$I_2 - A$. réduit à 4°,665.	ε. obs.—calc.
			μ	μ	μ
XLIX	1882. 6 févr.	5°,270	— 1,10	+ 4,33	— 0,14
L	8 »	4,202	+ 4,23	+ 4,06	— 0,41
LI	9 »	4,890	+ 5,38	— 5,47	+ 1,06
LII	9 »	4,735	+ 4,48	+ 4,50	+ 0,03
LIII	10 »	4,227	— 4,16	+ 3,99	— 0,48
	Moyenne.....	4,665	— 1,17	— 4,17	$[\varepsilon^2] = 1,410$
				± 0,18	

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

SÉRIE V.

Observation.	Date.	Température.	$l_2 - A$.	$l_2 - A$. réduit à 10°,000.	ε. obs. — calc.
			μ	μ	μ
LIV	1882. 16 févr.....	11°,095	+ 1,96	+ 2,34	+ 0,05
LV	18 »	10,066	+ 2,79	+ 2,78	+ 0,49
LVI	18 »	10,234	+ 2,32	+ 2,36	+ 0,08
LVII	20 »	9,720	+ 2,88	+ 2,73	0,15
LVIII	21 »	9,770	+ 1,68	+ 1,55	0,74
LIX	22 »	9,775	+ 2,09	+ 1,96	— 0,34
	Moyenne.....	10,110	+ 2,29	2,29	$[\varepsilon^2] = 1,099$
				± 0,13	

Un coup d'œil jeté sur les Tableaux qui précèdent permet de constater immédiatement l'amélioration très notable dans la concordance des résultats qui s'est produite à partir du moment où l'on a mis en œuvre, pour la mise au point du Mètre des Archives, la méthode proposée par M. Cornu (*voir* ci-dessus, p. 12). On voit dans la série I des discordances considérables, qui ne sont plus reproduites dans les séries suivantes : les écarts des résultats individuels y atteignent et dépassent même 6$^\mu$, et, par rapport à la moyenne déduite des vingt-quatre observations de la série, on trouve plusieurs écarts de 3$^\mu$ environ. Dans les séries suivantes, deux erreurs résiduelles, de grandeur exceptionnelle, atteignent 2$^\mu$,1 et 1$^\mu$,5. Le calcul de l'erreur moyenne d'une observation, dans les cinq séries, donne :

SÉRIE I.....	24 observations	$m = \sqrt{\frac{66,988}{23}}$	$= 1,71.$
SÉRIE II.....	12 »	$m = \sqrt{\frac{3,306}{11}}$	$= 0,56.$
SÉRIE III.....	12 »	$m = \sqrt{\frac{12,266}{11}}$	$= 1,06.$
SÉRIE IV.....	5 »	$m = \sqrt{\frac{1,410}{4}}$	$= 0,59.$
SÉRIE V.....	6 »	$m = \sqrt{\frac{1,099}{5}}$	$= 0,47.$

Ainsi, en moyenne, l'erreur moyenne d'une observation, dans les séries faites après l'adoption du procédé Cornu, peut être évaluée à

$$\frac{0,56 \times 12 + 1,06 \times 12 + 0,59 \times 5 + 0,47 \times 6}{35} = 0,72.$$

Le rapport des erreurs moyennes dans les comparaisons faites avant et après

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

l'introduction de ce procédé est donc

$$\frac{1,71}{0,72} = 2,38.$$

Le rapport des poids à attribuer respectivement à ces deux sortes d'observations, en les réunissant dans un calcul d'ensemble, serait

$$\left(\frac{0,72}{1,71}\right)^2 = \frac{0,18}{1,00}.$$

Si l'on considère les résultats des séries IV et V comme peu probants, à cause du moindre nombre d'observations qu'elles contiennent, et qu'on les supprime du calcul précédent, on trouve encore les rapports peu différents

$$\frac{1,71}{0,81} = 2,11 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{0,81}{1,71}\right)^2 = \frac{0,22}{1,00}.$$

Mais on peut remarquer que la valeur relativement assez élevée de l'erreur moyenne, dans la série III, est due principalement à une seule observation, la dernière de la série, qui, à elle seule, contribue pour plus du tiers (4,285 sur 12,260) à la somme $[\varepsilon^2]$ des carrés des résidus. En supprimant cette observation anormalement écartée, ce qui ne modifierait le résultat final que d'une quantité extrêmement petite (quelques centièmes de micron), ces rapports se rapprochent des premières valeurs données.

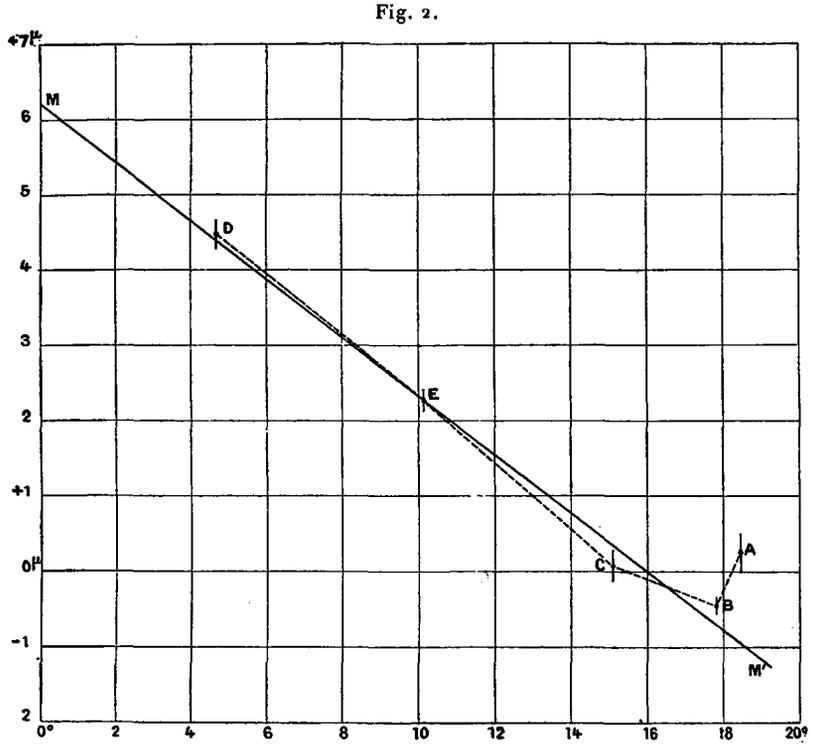
Quoi qu'il en soit, il est évident, d'après ces résultats, que la précision des observations de la série I a été inférieure à la moitié de celle des suivantes, et que le poids qui serait à leur attribuer serait environ $\frac{1}{5}$, celui des autres étant égal à 1. L'amélioration introduite à partir de la série II non seulement n'est pas douteuse, mais elle a été considérable, et, de ce chef, il existe une différence marquée à établir entre les comparaisons de la série I et les comparaisons des séries II-V. Que cette différence soit due à l'emploi du procédé Cornu, c'est ce qui ne paraît point douteux, puisque, *à tous autres égards*, observateurs, règles comparées, schéma et nombre d'observations par comparaison, les conditions ont été *identiques* de part et d'autre.

Mais il y a encore une différence importante à signaler entre la série I et les suivantes. Ces dernières ont été faites après avoir retourné face pour face le Mètre des Archives. Or on remarque que la série I a fourni pour l'équation $I_2 - A$ une valeur sensiblement plus élevée que les séries II et III, faites cependant à des températures plus basses. Cet écart, qui saute aux yeux, si l'on

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

représente graphiquement les résultats des cinq séries (*voir* ci-dessous, *fig.* 2), est assez grand pour laisser soupçonner que le retournement du Mètre des Archives et un nouveau réglage des pointes, qui en est la conséquence obligée, ont eu pour effet de donner lieu à une variation systématique sensible dans la longueur apparente du Mètre des Archives. La probabilité de cette hypothèse, des plus vraisemblables si l'on considère l'état des surfaces terminales du Mètre des Archives, devait nécessairement entrer en ligne de compte dans la discussion des résultats, et dans la fixation de la méthode à suivre pour déduire

Fig. 2.



des observations l'équation définitive du Mètre I_2. Il est visible, en effet, que, suivant que l'on considère la première série de comparaisons comme ayant indiqué, par rapport aux autres, une différence systématique ou comme simplement affectée d'erreurs accidentelles, son adjonction aux séries suivantes aura pour effet, soit de relever l'équation initiale des deux règles en rapprochant le point M (*fig.* 2) d'une parallèle menée par A à la droite MM′, soit au contraire de l'abaisser, en inclinant cette ligne MM′ d'une quantité d'autant plus grande qu'on attribuera au résultat A un poids plus considérable.

Pour cette double raison : — infériorité notable de l'exactitude dans les observations de la série I, et différence systématique produite par le retournement du Mètre des Archives, — la Commission a décidé de ne comprendre dans un calcul

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'ensemble, pour la détermination du résultat définitif, que les observations des séries II-IV, faites dans une même position du Mètre des Archives, et exactement par les mêmes méthodes. On a donc fait abstraction de la série I, et l'on a déduit l'équation du Mètre I_2 des résultats moyens des quatre dernières séries, que l'on a considérées comme ayant sensiblement la même valeur. Les équations de condition, dans cette manière de voir, sont donc

$$(1)\qquad \begin{cases} x + 17,824\,y = -0,15, \\ x + 15,060\,y = +0,08, \\ x + 4,665\,y = +4,47, \\ x + 10,110\,y = +2,29, \end{cases}$$

dans lesquelles x représente l'équation $(I_2 - A)_0$ à zéro des deux mètres comparés, et y leur différence de dilatation pour 1 degré. En les combinant à égalité de poids, on en déduit les valeurs

$$(2)\qquad \begin{cases} x = +6,31, \\ y = -0,387. \end{cases}$$

La substitution de ces valeurs dans les trente-cinq observations individuelles conduit aux erreurs résiduelles suivantes :

Série II.	Série III.	Série IV.	Série V.
μ	μ	μ	μ
+ 0,52	— 0,07	— 0,07	+ 0,04
— 0,39	— 0,26	— 0,35	— 0,48
+ 1,00	— 1,16	+ 1,06	— 0,07
— 0,25	+ 1,00	— 0,10	+ 0,41
— 0,23	— 0,01	— 0,41	— 0,75
— 0,43	+ 0,67		— 0,33
— 1,04	+ 0,73		
— 0,87	— 1,82		
— 0,21	— 1,07		
— 0,43	+ 0,16		
— 0,09	+ 1,23		
+ 0,55	+ 1,77		

On en déduit :

Erreur probable d'une observation. $r = \pm 0,525$,

» de x..... $r_x = \pm 0,23$,

» de y..... $r_y = \pm 0,018$.

Enfin l'erreur probable de la fonction $X = x - \theta y$, c'est-à-dire de la différence de longueur des deux règles à une température θ, peut se mettre, en appli-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

quant des formules connues, sous la forme

$$r_X = \pm 0,525 \sqrt{\frac{1}{35} + \frac{(11,92 - 0)^2}{886}}.$$

Elle est, naturellement, fonction de 0, et prend une valeur minima égale à $\pm 0^{\mu},09$ pour $0 = 11^{\circ},92$, moyenne des quatre températures du système (1).

Toutes ces valeurs d'erreurs probables ne doivent être acceptées qu'avec toutes les réserves que comportent toutes les erreurs probables calculées par les règles ordinaires. Elles constituent un moyen abrégé de représenter la concordance générale des observations entre elles, et permettraient de la comparer à la concordance d'autres observations similaires; mais elle donnent sans aucun doute, comme presque toujours d'ailleurs, une évaluation beaucoup trop avantageuse de l'exactitude réelle des résultats.

La Commission mixte, considérant que, dans l'équation de la Règle I_2, le chiffre correspondant au dixième de micron est incertain de toute sa valeur, et qu'il n'y a aucun intérêt à le conserver, l'a supprimé, et, arrondissant l'équation au micron, a admis finalement à zéro

$$I_2 = A + 6^{\mu}.$$

C'est cette équation qui a servi de point de départ pour les tracés des nouveaux prototypes (1).

Le diagramme ci-dessus (*fig.* 2) représente les résultats de ces déterminations; les températures y sont portées en abscisses, et les valeurs $I_2 - A$. moyennes des cinq séries, en ordonnées. Les points A, B, C, D, E figurent respectivement les résultats des séries I, II, III, IV, V. Les longueurs des lignes verticales, qui accompagnent chacun d'eux sur le dessin, figurent les valeurs com-

(1) Les valeurs qui résultaient du calcul de MM. H. Tresca et Broch et qui ont été données dans le Rapport du Comité à la Conférence de 1889 étaient

$$\begin{cases} x = 6,13, \\ y = -0,382. \end{cases}$$

La correction des quelques erreurs qu'ils avaient laissées dans leur calcul ne change donc absolument rien au résultat admis par la Commission mixte. Ces erreurs, comme on peut le voir ci-après, p. XVII, sont presque toutes extrêmement petites, et ne modifiaient les résultats des comparaisons correspondantes que de quantités inférieures aux incertitudes inévitables de ces comparaisons. Deux seulement, dans les première et cinquième observations de la série II, présentent une certaine importance : elles se trouvent être de signes inverses et disparaissent presque complètement dans le résultat moyen de la série. Seulement ces deux erreurs augmentaient notablement les écarts de ces deux observations par rapport à ce résultat moyen, et forçaient par suite sensiblement l'erreur moyenne d'une observation dans cette série.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

prises dans les limites de leurs erreurs probables, telles qu'elles ont été calculées ci-dessus. Le point A (série I) étant laissé en dehors, le calcul des quatre autres points a fourni la droite MM'.

La Commission mixte s'était d'abord proposé de poursuivre les comparaisons d'une même série jusqu'à ce que l'erreur probable du résultat moyen eût atteint une valeur donnée, toujours à peu près la même, et égale à celle du résultat de la série I. Ceci explique la diminution du nombre des observations, dès la série II, par suite de l'amélioration introduite par le procédé Cornu. Toutefois, ce programme n'a pas été suivi rigoureusement (¹). Les réductions immédiates, effectuées au fur et à mesure des observations, étaient d'ailleurs faites par d'autres méthodes que celles qui ont été adoptées définitivement, et les erreurs probables calculées d'une façon différente. Les résultats moyens des quatre séries n'en ont pas moins été considérés comme ayant mêmes valeurs et combinés à égalité de poids. Il est facile de vérifier que cela n'avait aucune importance.

En effet, les équations (1) peuvent être combinées en attribuant à chacune un poids égal au nombre des observations dont elle résulte, soit respectivement les poids 12, 12, 5, 6. Leur résolution donne alors

$$(3)\qquad \begin{cases} x = +6,12, \\ y = -0,381. \end{cases}$$

On peut également attribuer à chacune d'elles un poids déduit de l'erreur probable calculée du résultat moyen qu'elle résume. La résolution du système ainsi formé conduit aux valeurs

$$(4)\qquad \begin{cases} x = +6,10, \\ y = -0,373. \end{cases}$$

On peut encore considérer chaque comparaison isolée comme fournissant une équation de condition. La résolution du système de trente-cinq équations ainsi obtenues, et considérées comme ayant même poids, donne

$$(5)\qquad \begin{cases} x = +6,115, \\ y = -0,381, \end{cases}$$

(¹) Une autre cause, indépendante de la volonté des observateurs, est intervenue : la Commission ayant décidé de faire les comparaisons exclusivement à la température ambiante, comme assurant un *régime permanent* de température que le refroidissement artificiel ne pouvait guère donner, le nombre de comparaisons aux basses températures a dû être subordonné aux conditions météorologiques : le froid ne s'étant pas maintenu, la IVe série n'a pu être prolongée, ni aussi longtemps, ni à une température aussi basse qu'on l'eût désiré. C'est alors qu'on a songé à compléter les séries déjà obtenues par une dernière (la Ve) à la température intermédiaire de 10°.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ANNEXES

ET

JOURNAL DES OBSERVATIONS.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ANNEXES.

On trouvera dans les pages qui suivent les Tableaux renfermant le détail de toutes les comparaisons dont les résultats ont été donnés ci-dessus; c'est la reproduction du journal des observations, dans la forme qui a été indiquée dans les pages 10 et suivantes.

On rappelle que ces comparaisons, au nombre de 59, sont partagées en 5 groupes ou séries, de la manière suivante :

Série I.....	Observations	I-XXIV
Série II.....	»	XXV-XXXVI
Série III (1).....	»	XXXVII-XLVIII
Série IV.....	»	XLIX-LIII
Série V.....	»	LIV-LIX.

Dans la série I, le Mètre des Archives présentait sa face la mieux polie tournée en haut; dans les séries suivantes, ce Mètre avait été retourné, comme on l'a dit, face pour face.

Les Tableaux contiennent d'abord la succession des pointés sur les règles à comparer, et, au-dessous, l'équation brute des deux règles; à partir de la deuxième série, on y a ajouté les corrections de mise au point (*voir* p. 12).

L'établissement de ces valeurs numériques exigeait les déterminations de la tare des micromètres et des coefficients de mise au point. Les détails des opérations exécutées dans ce double but sont d'abord donnés, en tête des Tableaux (Annexes I et II).

L'Annexe III, que l'on trouvera immédiatement après, contient les résultats obtenus par quelques modifications introduites dans les modes de calcul adoptés par la Commission mixte.

ANNEXE I.

TARAGE DES MICROMÈTRES DES DEUX MICROSCOPES DU COMPARATEUR A MOUVEMENT TRANSVERSAL.

Cette opération consiste à déterminer, pour chaque microscope, le facteur par lequel on doit multiplier le déplacement du fil micrométrique, exprimé en divisions du tam-

(1) La Règle I_2 a été retournée bout pour bout.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

bour (centièmes de tour de vis), pour obtenir le déplacement correspondant de l'objet visé, exprimé en millièmes de millimètre ou *microns*.

Soient a et a' les pointés effectués successivement sur les deux extrémités de gauche des deux règles à comparer R et R′ avec le microscope de gauche, dont la tare est α. Soient b, b' et β les éléments analogues de droite : la différence de longueur entre R et R′ sera donnée par une expression de la forme

$$R \quad R' = \alpha(a - a') \quad \beta(b - b').$$

On remarque que, suivant la position apparente dans le champ des microscopes des deux extrémités de même nom, les différences $a - a'$, $b - b'$ pourront représenter individuellement des nombres de divisions assez considérables : d'où il résulterait la nécessité de connaître α et β avec une très grande précision. Mais, d'autre part, si l'on songe que les règles à comparer sont presque toujours égales à quelques microns près, la différence de ces deux grands nombres se réduira à un nombre très petit ; écrivons donc cette équation sous l'une des formes

$$R - R' = \alpha\left[(a - a') - \frac{\beta}{\alpha}(b - b')\right] \quad \beta\left[\frac{\alpha}{\beta}(a - a') - (b - b')\right].$$

Sous ces formes, on voit que c'est le rapport des deux coefficients α et β qui doit surtout être connu avec précision ; quant à la valeur individuelle de chacun d'eux, elle peut n'être connue qu'avec une assez large approximation, la parenthèse représentant généralement un nombre très petit.

Cette conclusion est importante : s'il fallait, en effet, déterminer α et β avec une grande précision en valeur absolue, il serait nécessaire de posséder un étalon représentant une petite fraction de millimètre construit très exactement ; grâce à la remarque précédente, on voit que cette condition n'est pas indispensable, et qu'après avoir déterminé soigneusement le rapport des deux coefficients α et β, il suffira d'obtenir une valeur approchée de l'un d'eux.

Pour obtenir le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$, on a utilisé la Règle I_2 ; posée sur le chariot du comparateur à mouvement transversal, on la déplaçait longitudinalement après chaque groupe de pointés croisés effectués avec les deux microscopes : les deux extrémités se déplaçant de quantités égales, les déplacements des fils des deux micromètres étaient eux-mêmes égaux et le rapport des différences des lectures donnait le rapport cherché. Pour éliminer l'influence de la petite marche (ordinairement ascendante) de la température pendant l'opération, on a répété la série d'observations en déplaçant la règle en sens inverse.

On s'est borné à comparer les quatre tours de vis du milieu du champ ; les tours extrêmes n'étant jamais employés.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Observations du 28 février 1882. Observateur : M. Cornu.

Microscopes.		DÉPLACEMENTS DANS LE SENS DIRECT.								DÉPLACEMENTS DANS LE SENS INVERSE.							
		G_1.	D_1.	G_2.	D_2.	G_3.	D_3.	G_4.	D_4.	G_5.	D_5.	G_6.	D_6.	G_7.	D_7.	G_8.	D_8.
			312,3	456.0			511,1	653,0			709,4	652.0			509,0	451,0			310,4
		362,8	311,8	456,0	410,1	554,8	511,9	652.4	612,2	746,3	709,2	651,0	611,9	551,0	508,0	451,0	407,0	356,6	310,0
		361,8	312,0	456,0	410,6	551,8	512,0	652,0	612,5	747,0	709,4	651,0	612,9	550,5	509,4	451,0	406,6	357,0	310,3
			312,0	456.4			511,8	652,8			709,6	651,0			509,0	451.0			310,1
Moy.	a...	362,30		456,10		554,80		652,55		746,65		651,25		550,75		451,00		356,80	
	b...		312,025		410,35		511,775		612,35		709.40		612,40		508,85		406,80		310,20
	Δa....		93,80		98,70		97,75		91,10		95,40		100,50		99,75		94,20		
	Δb....		98,325		101,425		100,575		97,05		97,00		103,55		102,05		96,60		

D'où l'on conclut les rapports

$\frac{\Delta a}{\Delta b}$...	1,0482	1,0276	1,0289	1,0313	1,0168	1,0303	1,0231	1,0255

Prenant la moyenne des rapports correspondant aux mêmes tours de vis.

De 3 à 4..... 1,0369
De 4 à 5..... 1,0254
De 5 à 6..... 1,0296
De 6 à 7..... 1,0241

Moyenne générale..... $1,0290 = \frac{\alpha}{\beta}$.

Pour obtenir une valeur approchée de α et de β, on a pointé successivement à chaque microscope trois traits distants de $\frac{1}{10}$ de millimètre ou de 100$^{\mu}$, faisant partie d'un réseau de traits tracé par MM. Brunner : on a choisi les traits n°s 14, 15, 16 qui occupent toute l'étendue utilisable du champ.

MICROSCOPE DE GAUCHE.			MICROSCOPE DE DROITE.		
Trait n° 16.	Trait n° 15.	Trait n° 14.	Trait n° 16.	Trait n° 15.	Trait n° 14.
		236,0			240,0
	499,5	235,0		509,4	240,2
763,8	499,0		780,7	510,6	
764,8			780,8		
763,5			780,6		
763,2	498,6		780,5	511,2	
	500,8	234,9		510,1	241,1
		235,6			240,2
Moy... 763,825	499,475	235,375	Moy... 780,650	510,400	240,150

Distance..... (16-15) = 264,350.
Distance..... (15-14) = 264,100.

Distance..... (16-15) = 270,250.
Distance..... (15-14) = 269,950.

Le rapport des évaluations des distances homologues est très voisin du rapport trouvé précédemment

(1,0233; 1,0221. Moy... 1,0222).

Mais nous donnerons la préférence au chiffre trouvé ci-dessus $\frac{\alpha}{\beta} = 1,0290$ comme

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

représentant une opération tout à fait analogue à celle des comparaisons. Ces deux derniers résultats donneraient directement α et β par deux couples de valeurs

$$100\mu = 264,350\alpha, \qquad 100\mu = 269,950\beta,$$
$$100\mu = 264,100\alpha, \qquad 100\mu = 270,250\beta.$$

Vu l'incertitude qui règne sur la valeur exacte des deux intervalles mesurés, nous prendrons d'abord la moyenne de chaque couple

$$100\mu = 264,225\alpha, \qquad 100\mu = 270,100\beta,$$

d'où nous concluons un premier système de valeurs

$$\alpha_1 = \frac{100}{264,225} = 0^{\mu},3784, \qquad \beta_1 = \frac{100}{270,100} = 0^{\mu},37023.$$

Mais, comme nous avons trouvé $\frac{\alpha}{\beta} = 1,0290$, nous pouvons de chacune de ces valeurs déduire l'autre par multiplication ou division; on trouve alors le second système

$$\alpha_2 = \beta_1 \times \frac{\alpha}{\beta} = 0^{\mu},38097, \qquad \beta_2 = \alpha_1 \times \frac{\beta}{\alpha} = 0^{\mu},36780.$$

La différence entre les deux systèmes est très petite; nous en adopterons la moyenne, en nous bornant à trois chiffres significatifs : d'où nous concluons

Microscope de gauche..... $\alpha = 0^{\mu},380$
Microscope de droite..... $\beta = 0,369$

Ce sont les valeurs qui ont servi à toutes les réductions des pointés des microscopes du comparateur à mouvement transversal.

Remarque. — On trouverait les mêmes résultats d'une manière plus conforme à la discussion du début en raisonnant de la manière suivante : les trois équations ci-dessous

$$\frac{\alpha}{\beta} = 1,0290, \qquad \alpha = 0^{\mu},3784, \qquad \beta = 0^{\mu},37023$$

sont incompatibles, puisque le rapport des deux dernières n'est pas exactement égal à la première.

Comme il importe de conserver le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$, établi par une opération très sûre, altérons α et β d'une petite quantité ε, de manière à satisfaire à ce rapport; nous ajoutons ainsi une troisième inconnue qui rendra les trois équations compatibles; écrivons ainsi

$$\alpha = 0^{\mu},3784 + \varepsilon, \qquad \beta = 0^{\mu},37023 - \varepsilon.$$

Résolvons maintenant ces trois équations : éliminons d'abord ε par addition, il viendra

$$\alpha + \beta = 0,74870 \qquad \text{et} \qquad \frac{\alpha}{\beta} = 1,0290,$$

d'où l'on tire finalement

$$\alpha = 0^{\mu},37970, \qquad \beta = 0^{\mu},36900, \qquad \varepsilon = 0^{\mu},00123.$$

On voit qu'on retrouve exactement les valeurs obtenues ci-dessus.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Quant à l'altération $\pm\varepsilon = 0{,}00123$, elle n'est que le $\frac{1}{300}$ environ des valeurs α ou β : elle n'aura aucune influence dans l'application, puisque ces coefficients ne conduiront jamais qu'à un très petit nombre de microns, dont la $\frac{1}{300}$ partie sera toujours absolument négligeable.

ANNEXE II.

Détermination des coefficients relatifs a la mise au point du Mètre des Archives.

On a vu que la variation dans la hauteur du microscope de droite (définie par la lecture m de son bouton divisé) ou dans la hauteur de l'extrémité gauche de la table (définie aussi par la lecture p de son bouton divisé) entraînait une variation dans la longueur apparente du Mètre des Archives.

Or, dans le voisinage de la mise au point exacte (définie par les lectures m_0 ou p_0), cette variation de longueur apparente est sensiblement proportionnelle aux différences de hauteur $m - m_0$ et $p - p_0$.

La correction de l'erreur de mise au point dépendra donc de la connaissance de ces deux coefficients de proportionnalité.

Voici le détail de ces deux déterminations (observateur : M. A. Cornu).

1° *Coefficient relatif au microscope de droite.*

Les observations ont été faites le 17 février 1882 : la Règle I_2 et le Mètre des Archives avaient été comparés la veille et les quatre réglages de meilleure mise au point avaient été conservés.

L'opération a consisté à soulever méthodiquement le microscope de droite (dont la hauteur avait été réglée la veille à la lecture $m_0 = 60$ du bouton divisé) en mettant le bouton successivement aux divisions

$$m = 100,\quad 75,\quad 50,\quad 25,\quad 0.$$

Dans chacune de ces positions du microscope, on a comparé le Mètre des Archives avec la Règle I_2, dont on soulevait l'extrémité droite (par le bouton de la table) de manière que le trait de droite fût toujours aussi net que possible, le défaut de netteté ne devant porter que sur l'extrémité de droite du Mètre des Archives laissé absolument fixe.

Quant aux extrémités de gauche, aucun réglage n'avait besoin de leur être appliqué : on verra seulement que les pivotements successifs de la table de I_2 modifiaient légèrement la position du trait de gauche, mais sans en altérer sensiblement la mise au point.

Les Tableaux suivants comprennent donc les cinq groupes de pointés de comparaison des deux règles : chaque groupe débute par la mise en place du bouton du microscope dans l'une des positions $m = 100, 75, \ldots, 0$, et par la manœuvre du bouton de la table fournissant par cinq lectures, mises entre parenthèses avec leur moyenne, le maximum de netteté de la Règle I_2.

Puis viennent les lectures alternatives des microscopes de gauche et de droite croisées de manière que les moyennes correspondent à une même époque, pour éliminer les petites marches proportionnelles au temps.

(Les variations à observer étant relativement considérables, il n'était pas nécessaire de chercher des modes de combinaison plus complexes.)

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Enfin les différences de lecture à chaque microscope sont réduites en microns de manière à fournir les différences apparentes successives des deux règles $[I_2 - A]$.

Bouton du microscope de droite.

PREMIER GROUPE : $m = 100$.
Réglage de la table de I_2.
(27,8; 26,0; 27,2; 28,0; 26,9. Moyenne : 27,18).

Lectures au microscope de gauche.		de droite.	
I_2.	Arch.	I_2.	Arch.
			390,2
	417,4		389,2
	417,3		389,0
367,0			388,7
367,3		353,0	
368,1		351,6	
368,0			389,0
	417,2		389,3
	417,1		389,1
			389,0
Moy..... 367,60	417,25	353,80	389,212
Différ.....	49,65		— 35,418
Mult. par α ou β	18$^{\mu}$,867		— 13$^{\mu}$,067

$\Delta = 5^{\mu},800$

DEUXIÈME GROUPE : $m = 75$.
Réglage de la table de I_2.
(30,0; 30,2; 29,5; 30,4; 30,4. Moy. : 30,50).

Lectures au microscope de gauche.		de droite.	
I_2.	Arch.	I_2.	Arch.
			396,8
	419,0		396,7
	419,0		398,0
376,0			396,3
375,8		364,0	
377,3		364,9	
378,0			395,0
	419,3		396,0
	418,1		395,2
			395,2
Moy..... 376,775	418,90	364,45	396,175
Différ.....	42,125		— 31,725
Mult. par α ou β	16$^{\mu}$,008		— 11$^{\mu}$,707

$\Delta = 4^{\mu},301$

TROISIÈME GROUPE : $m = 50$.
Table I_1
(34,5; 34,0; 34,2; 34,5; 34,2. Moy. : 34,28).

Gauche.		Droite.	
I_2.	Arch.	I_2.	Arch.
			409,0
	420,8		408,8
	419,6		409,1
399,0			409,0
400,3		389,0	
401,0		389,5	
401,1			409,1
	420,0		409,1
	419,2		410,0
			410,6
400,350	419,900	389,250	409,375
	19,550		— 20,125
	7$^{\mu}$,429		— 7$^{\mu}$,426

$\Delta = 0^{\mu},003$

QUATRIÈME GROUPE : $m = 25$.
Table I_1
(37,6; 37,3; 36,5; 37,5; 38,2. Moy. : 37,42).

Gauche.		Droite.	
I_2.	Arch.	I_2.	Arch.
			421,2
	418,7		420,8
	418,1		421,8
414,2			420,9
413,2		406,6	
415,0		406,5	
415,0			423,0
	421,5		423,6
	420,2		423,5
			423,7
414,350	419,645	406,550	422,312
	5,275		— 15,762
	2$^{\mu}$,005		— 5$^{\mu}$,816

$\Delta = -3^{\mu},811$

CINQUIÈME GROUPE : $m = 0$
Table I_1
(39,5; 39,0; 39,9; 40,0; 40,2. Moy. : 39,72).

Gauche.		Droite.	
I_2.	Arch.	I_2.	Arch.
			428,5
	421,0		429,7
	418,6		428,9
419,5			431,0
421,2		412,5	
420,5		412,9	
422,5			428,0
	421,0		430,0
	420,8		429,0
			428,0
420,925	420,350	412,700	429,137
	— 0,575		— 16,437
	— 0$^{\mu}$,219		— 6$^{\mu}$,065

$\Delta = -6^{\mu},284$

En construisant une courbe dont les ordonnées sont Δ (variations apparentes de longueur du Mètre des Archives) et les abscisses sont les valeurs correspondantes de m, on trouve une ligne présentant un point d'inflexion.

Or la meilleure mise au point était, d'après les observations de la veille, voisine de $m_0 = 60$ à 62, c'est-à-dire sensiblement au milieu des deux abscisses $m = 75$ et $m = 50$. D'où il résulte que l'on sera très près de la vérité en remplaçant l'inclinaison de l'arc de courbe, presque rectiligne dans cette région, par le coefficient angulaire de la corde joignant les points dont les abscisses sont $m = 75$ et $m = 50$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Donc

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4,30}{25} = 0,1720.$$

Tel est, en valeur absolue, le coefficient cherché : il faut lui donner le signe —, parce que, lorsque m croît, la différence apparente $\Delta = l_2 - A$ augmente; la correction δ doit donc être négative; par suite, la *correction* doit être négative pour $m - m_0 > 0$.

La correction δ de l'erreur de mise au point $(m - m_0)$ du microscope de droite sera donc

$$\delta = -0,1720(m - m_0),$$

m et m_0 étant exprimés en centièmes de tour du bouton du microscope de droite.

Telle est la détermination du premier coefficient.

2° *Coefficient relatif à la mise au point par le bouton de la table (à gauche).*

Des opérations toutes semblables ont été effectuées le 19 février 1882, en abaissant méthodiquement l'extrémité gauche de la table portant le Mètre des Archives (dont la hauteur de meilleure mise au point avait été réglée la veille à la lecture $p_0 = 29,5$), en mettant le bouton de cette table successivement aux divisions

$$p = 40,\ 35,\ 30,\ 25,\ 20.$$

Dans ces conditions, inverses sous quelques rapports de celles des opérations précédentes, c'est le Mètre des Archives que l'on incline un peu tandis que la Règle I_2 reste absolument fixe comme les deux microscopes.

D'où il résulte qu'on n'a plus besoin, avant chaque comparaison, de chercher le maximum de netteté des traits de I_2, pas plus au microscope de gauche qu'à celui de droite. Le Mètre des Archives pivote, il est vrai, autour d'un axe horizontal placé sous le microscope de droite; cela déplace son extrémité droite à chaque groupe de comparaisons, mais, de ce côté, sa distance, comme sa mise au point au microscope, n'est pas altérée.

Les Tableaux suivants résument d'une manière condensée les groupes de comparaisons similaires de ceux de la série précédente et fournissent les différences successives des deux règles.

Observations du 19 février 1882. — *Bouton de la table à gauche.* — Observateur : M. A. Cornu.

Premier groupe : $p = 40$.

G.		D.	
I_2.	Arch.	I_2.	Arch.
	529,5		
	530,0		468,8
	531,0		468,8
	532,0	344,0	
379,0		342,6	
380,2		343,3	
	532,0	344,6	
	530,0		467,8
	528,2		467,2
	528,0		
379,600	530,087	343,625	468,150
150,487		—124,525	
57,185		— 45,950	

$\Gamma = 11^{\mu},235$

Deuxième groupe : $p = 35$.

G.		D.	
I_2.	Arch.	I_2.	Arch.
	481,5		
	481,2		
	480,0		428,4
	480,0	342,0	429,0
380,0		343,8	
380,0		344,0	
	479,2	345,0	
	480,2		428,0
	479,0		425,6
	480,2		
380,000	480,162	343,700	427,750
100,162		— 84,050	
38,062		— 31,014	

$\Gamma = 7^{\mu},048$

Troisième groupe : $p = 30$.

G.		D.	
I_2.	Arch.	I_2.	Arch.
	446,8		
	445,7		404,0
	445,0		404,2
	445,2	347,0	
383,0		347,6	
384,0		348,8	
	443,0	348,9	
	444,0		403,2
	444,2		402,5
	443,2		
383,500	444,637	348,075	403,475
61,137		— 55,400	
23,232		— 20,443	

$\Gamma = 2^{\mu},789$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Quatrième groupe : $p = 25$.

G.		D.	
l_2.	Arch.	l_2.	Arch.
	419,0		
	419,5		390,0
	418,8		389,0
	419,0	350,6	
386,2		351,3	
386,4		350,8	
	419,3	351,6	
	419,0		390,4
	419,7		389,2
	419,0		
386,300	419,162	351,075	389,650
	32,862	— 38,575	
	12,488	— 14,234	
	$\Gamma = -1^{\mu},746$		

Cinquième groupe : $p = 20$.

G.		D.	
l_2.	Arch.	l_2.	Arch.
	397,0		
	398,0		382,4
	397,0		381,6
	398,2	357,8	
394,0		359,0	
395,0		360,2	
	398,2	360,0	
	399,6		382,5
	399,0		382,8
	399,5		
394,500	398,312	359,250	382,325
	3,812	— 23,075	
	1,149	— 8,515	
	$\Gamma = -7^{\mu},066$		

La courbe construite avec p comme abscisse et Γ comme ordonnée est presque rectiligne, surtout aux environs de $p_0 = 29,5$, lecture de la meilleure mise au point de la veille.

On peut donc adopter comme direction générale de l'arc de courbe, aux environs de $p = 30$, la corde qui joint les deux points dont les abscisses sont $p = 35$ et $p = 25$

$$\frac{\Delta r}{\Delta x} = \frac{7^{\mu},048 + 1^{\mu},746}{10} = 0^{\mu},8794.$$

On aura donc pour la correction γ de l'erreur de mise au point $p - p_0$ (bouton de la table, à gauche) l'expression

$$\gamma = -0,8794(p - p_0),$$

$p - p_0$ étant exprimé en $\frac{1}{10}$ de tour du bouton de gauche de la table.

Remarque. — Les discussions numériques ultérieures ont montré qu'il eût été avantageux d'obtenir ces coefficients avec un peu plus de précision, à l'aide d'opérations plus nombreuses et répétées à chaque série nouvelle de comparaison des deux règles.

Mais, à l'époque où ce mode de correction a été établi, l'approximation donnée par ce calcul simple avait paru bien suffisante, eu égard à la petitesse de la correction à déterminer.

On doit remarquer d'ailleurs que les erreurs à corriger ne sont que les *résidus* d'une mise au point déjà perfectionnée par la méthode de M. Cornu; elles peuvent donc être vraiment considérées comme des erreurs *fortuites* se compensant d'elles-mêmes sans correction.

L'introduction de la correction a eu surtout pour but de montrer que l'erreur moyenne diminue notablement par l'emploi de la mise au point méthodique : la plus ou moins grande précision des coefficients n'a pour effet que de diminuer plus ou moins l'erreur moyenne, mais sans agir beaucoup sur le résultat final, lequel devient indépendant de ces coefficients dès que le nombre d'observations est un peu considérable.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ANNEXE III.

I. — Expressions diverses de la moyenne des pointés. — Variantes diverses dans les modes de calcul employés aux réductions.

Si, au lieu de faire le calcul de l'équation brute, dans chaque observation, par la formule

$$R_1 - R_2 = \tfrac{1}{8}(\mu_1 - 4\mu_2 + 6\mu_3 - 4\mu_4 + \mu_5),$$

on avait employé la formule

$$R_1 - R_2 = \tfrac{1}{3}(\mu_1 + \mu_3 + \mu_5) - \tfrac{1}{2}(\mu_2 + \mu_4),$$

fondée sur l'hypothèse d'une marche proportionnelle au temps de toutes les causes perturbatrices (avec équidistance des observations successives), les résultats moyens des cinq séries seraient devenus :

	μ
Série I.....	+ 0,22
Série II.....	— 0,46
Série III.....	+ 0,06
Série IV.....	+ 4,44
Série V.....	+ 2,24

La plus grande différence entre ces valeurs et celles qui sont entrées dans le calcul de la Commission est de $0^{\mu},05$. Leur substitution pourrait changer l'équation $(I_2 - A)_0$, au maximum, d'environ $0^{\mu},04$, quantité absolument insensible et qui échappe à toute mesure.

Elle donnerait plutôt un peu plus de concordance aux observations individuelles entre elles, pour les quatre séries ayant servi au calcul.

M. le Dr Broch avait essayé, de son côté, la formule

$$R_1 - R_2 = \tfrac{1}{6}(\mu_1 - 3\mu_2 + 4\mu_3 - 3\mu_4 + \mu_5),$$

à laquelle on est conduit lorsque l'on combine chaque mesure sur une règle avec la moyenne des deux mesures sur l'autre règle entre lesquelles elle est comprise; les résultats moyens des cinq séries seraient :

	μ
Série I.....	+ 0,22
Série II.....	— 0,45
Série III.....	+ 0,08
Série IV.....	+ 4,46
Série V.....	+ 2,28

On voit que les résultats ne changent pas d'une façon appréciable.

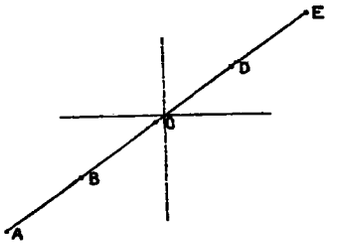
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

II. — Manières diverses d'effectuer la correction de mise au point.

a. Mode de calcul adopté par la Commission.

Les corrections sont calculées au moyen de la droite qui passe par les trois points B,

Fig. 3.



C, D (*fig.* 3) moyens de la courbe, quelle que soit la position correspondante à la bonne mise au point.

Série II.

	Table G. p_0.	Table G. γ.	Microscope D. m_0.	Microscope D. δ.	$\gamma+\delta$.
	d	μ	d	μ	μ
	23,47	−0,46	50,63	+1,31	+0,85
	22,15	−0,75	50,57	−0,76	−1,51
	23,44	−0,05	48,20	+0,21	+0,15[1]
	22,92	−0,51	47,73	−0,05	−0,56
	21,09	+0,08	51,92	+0,33	+0,41
	23,15	−0,74	48,96	−0,35	−1,10
	24,93	−0,06	50,00	+0,69	+0,63
	25,83	+0,73	45,97	−0,18	+0,56
	25,91	−0,08	42,19	−1,34	−1,42
	23,50	−1,32	46,15	−0,66	−1,98
	23,92	−0,07	47,22	+0,04	−0,03
	24,56	+0,23	51,25	+0,73	+0,96
Moy..	23,74	−0,25	48,40	0,00	−0,25

Série III.

	Table G. p_0.	Table G. γ.	Microscope D. m_0.	Microscope D. δ.	$\gamma+\delta$.
	d	μ	d	μ	μ
	25,89	+1,22	48,75	+0,22	+1,44
	27,55	+1,36	46,70	+0,29	+1,66
	25,04	−0,84	50,13	−0,32	−1,16
	26,16	+0,05	48,49	−0,26	−0,21
	27,22	+1,34	52,10	+0,36	+1,70
	26,95	+0,40	54,53	+0,09	+0,49
	26,75	+0,75	56,25	+0,04	+0,79
	25,31	−0,25	50,00	−0,52	−0,77
	26,34	+0,56	49,81	−0,72	−0,16
	26,75	+0,66	53,03	−0,34	+0,32
	25,52	−0,42	51,64	−0,41	−0,83
	28,58	+0,51	57,02	−0,17	+0,34
Moy..	26,51	+0,44	51,54	−0,14	+0,30

Série IV.

	Table G. p_0.	Table G. γ.	Microscope D. m_0.	Microscope D. δ.	$\gamma+\delta$.
	d	μ	d	μ	μ
	29,52	+0,64	76,67	+0,29	+0,92
	28,12	−0,07	71,33	−0,29	−0,35
	30,08	−0,81	73,70	+0,29	−0,52
	30,08	−0,81	73,70	+0,29	−0,52
	30,43	−0,15	71,47	−0,09	−0,24
Moy..	29,65	−0,24	73,37	+0,10	−0,14

Série V.

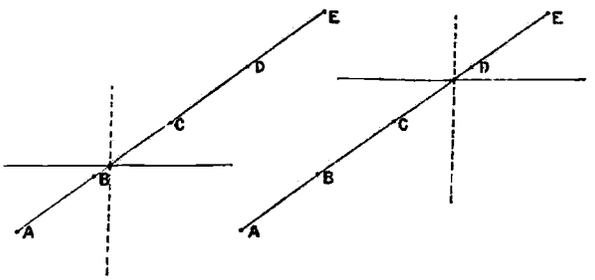
	Table G. p_0.	Table G. γ.	Microscope D. m_0.	Microscope D. δ.	$\gamma+\delta$.
	d	μ	d	μ	μ
	30,10	+0,26	56,52	+1,12	+1,38
	29,56	+0,32	65,51	+0,09	+0,40
	29,20	+0,18	64,57	+0,10	+0,28
	29,74	+0,65	68,12	−0,15	+0,50
	29,39	−0,53	60,26	−0,30	−0,83
	30,09	+0,08	63,13	+0,02	+0,10
Moy..	29,68	+0,16	63,02	+0,15	+0,31

(1) La suppression dans tous les résultats, tels qu'ils sont donnés dans ce Rapport, de la décimale supérieure, qui avait été conservée dans tous les calculs, explique, ici et dans un certain nombre d'autres cas, une erreur apparente d'une unité sur la dernière décimale conservée.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

En examinant les résultats ci-dessus, on voit que, dans un certain nombre de cas, à droite aussi bien qu'à gauche, la position de bonne mise au point s'est trouvée plus rapprochée du point B ou du point D (*fig.* 4) que du point C. Il paraît donc évident que la règle uniforme qui a été suivie dans le calcul précédent est défectueuse; il est naturel de prendre toujours pour *point moyen*, dans le calcul, celui dont la bonne mise au point est le plus rapprochée. Dans le premier cas, on devrait donc calculer par les

Fig. 4.



points A, B, C; dans le second, par les points C, D, E. En modifiant ainsi le calcul, on est conduit au Tableau suivant :

b. Deuxième calcul.

Série II.

	Table G. p_o.	Table G. γ.	Microscope D. m_o.	Microscope D. δ.	$\gamma + \delta$.
	d	μ	d	μ	μ
	23,47	−0,46	50,63	+1,31	+0,85
	*22,15	−0,75	50,57	−0,76	−1,51
	23,44	−0,05	48,20	+0,21	+0,15
	22,92	−0,51	47,73	−0,05	−0,56
	21,75	+0,66	51,92	+0,33	+0,99
	23,15	−0,74	48,96	−0,35	−1,10
	24,93	−0,06	50,00	+0,69	+0,63
	25,83	+0,73	45,97	−0,18	+0,56
	25,91	−0,08	42,19	−1,34	−1,42
	23,50	−1,32	46,15	−0,66	−1,98
	23,92	−0,07	47,22	+0,04	−0,03
	24,56	+0,23	51,25	−0,73	+0,96
Moy..	23,79	−0,20	48,40	0,00	−0,21

Série III.

	Table G. p_o.	Table G. γ.	Microscope D. m_o.	Microscope D. δ.	$\gamma + \delta$.
	d	μ	d	μ	μ
	25,89	−1,22	48,75	+0,22	−1,44
	*27,55	+1,36	46,70	+0,29	+1,66
	25,04	−0,84	50,13	−0,32	−1,16
	26,16	+0,05	48,49	−0,26	−0,21
	27,22	+1,34	52,10	+0,36	+1,70
	26,95	+0,40	54,53	+0,09	+0,49
	26,75	+0,75	56,25	+0,04	+0,79
	25,31	−0,25	50,00	−0,52	−0,77
	26,34	+0,56	49,81	−0,72	−0,16
	26,75	+0,66	53,03	−0,34	+0,32
	25,52	−0,42	51,64	−0,41	−0,83
	28,44	+0,39	57,02	−0,17	+0,22
Moy..	26,49	+0,43	51,54	−0,14	+0,29

Série IV.

	Table G. p_o.	Table G. γ.	Microscope D. m_o.	Microscope D. δ.	$\gamma + \delta$.
	d	μ	d	μ	μ
	29,52	+0,64	70,83	−0,72	−0,08
	28,12	−0,07	70,65	−0,40	−0,47
	30,08	−0,81	73,00	−0,17	−0,64
	30,08	−0,81	73,00	−0,17	−0,64
	30,43	−0,15	71,55	+0,44	−0,29
Moy..	29,65	−0,24	72,41	−0,07	−0,31

Série V.

	Table G. p_o.	Table G. γ.	Microscope D. m_o.	Microscope D. δ.	$\gamma + \delta$.
	d	μ	d	μ	μ
	30,10	+0,26	56,52	+1,12	+1,38
	29,56	+0,32	66,97	+0,34	+0,66
	29,20	+0,18	62,94	−0,18	0,00
	29,74	+0,65	69,24	+0,04	−0,70
	29,39	−0,53	60,26	−0,30	−0,83
	30,09	+0,08	*63,13	+0,02	+0,10
Moy..	29,68	+0,16	63,18	+0,17	+0,33

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Dans les trois séries marquées d'un *, il y a ambiguïté sur le choix des trois points à prendre. Les valeurs de p_0 ou m_0 données ci-dessus (premier Tableau) indiqueraient le changement du point milieu comme nécessaire; mais, si l'on fait ce changement, la bonne mise au point indiquée par le calcul se rapproche précisément de la position correspondante à la combinaison qu'on a abandonnée, et il faudrait, par suite, y revenir. D'une manière générale, d'ailleurs, il y a un certain nombre de cas dans lesquels la position de bonne mise au point s'est trouvée intermédiaire entre deux des points donnés par la courbe de correction, et à peu près aussi éloignée de l'un que de l'autre. Dans ces cas-là, il y a évidemment ambiguïté, et l'on pourrait, à volonté, calculer la correction soit par les trois points inférieurs A, B, C (ou B, C, D), soit par les trois points supérieurs B, C, D (ou C, D, E); ou bien encore la calculer par la droite qui passe le mieux possible par les quatre points consécutifs A, B, C, D (ou B, C, D, E). Comme il faut nécessairement se donner une limite de passage d'un cas à l'autre, on a, dans le calcul qui suit, supposé chaque intervalle AB, BC, ... divisé en trois parties égales. Si la bonne mise au point tombe *en dessous* ou *en dessus* du tiers moyen d'un intervalle, elle est calculée par trois points seulement, celui du milieu étant le plus rapproché de la bonne mise au point. Si elle tombe dans le tiers moyen, elle est calculée par quatre points. Ce calcul a lui-même été fait de deux façons : 1° en faisant séparément le calcul par les trois points inférieurs (A, B, C) et par les trois points supérieurs (B, C, D), et acceptant le résultat moyen comme le plus probable; 2° en réunissant les quatre points successifs A, B, C, D dans un seul calcul et déterminant la droite qui les représente le mieux possible.

Les résultats de ces deux modes de calcul sont reproduits dans les Tableaux ci-après :

c. Troisième calcul.

1° Calcul par les trois points inférieurs A, B, C (ou B, C, D)
2° » supérieurs B, C, D (ou C, D, E) } Moyennes.

Série II.

	Table G.		Microscope D.		
	p_0.	γ.	m_0.	δ.	$\gamma + \delta$.
	d	μ	d	μ	μ
	23,47	−0,16	50,63	+1,31	+0,85
	22,60	−0,35	50,57	−0,76	−1,11
	23,44	−0,05	48,20	+0,21	+0,15
	23,12	−0,33	47,73	−0,05	−0,38
	21,42	+0,37	51,92	−0,33	+0,69
	23,47	−0,46	48,96	−0,35	−0,81
	24,93	−0,06	50,00	+0,69	+0,63
	25,83	+0,73	45,97	−0,18	+0,56
	25,91	−0,08	42,19	−1,34	−1,42
	23,50	−1,32	46,15	−0,66	−1,98
	23,92	−0,07	47,22	+0,04	−0,03
	24,56	+0,23	51,25	−0,73	+0,96
Moy..	23,85	−0,16	48,40	0,00	−0,16

Série III.

	Table G.		Microscope D.		
	p_0.	γ.	m_0.	δ.	$\gamma + \delta$.
	d	μ	d	μ	μ
	25,89	+1,22	48,75	+0,22	+1,44
	27,23	+1,08	46,70	+0,29	+1,37
	25,04	−0,84	50,13	−0,32	−1,16
	26,16	+0,05	48,49	−0,26	−0,21
	26,80	+0,97	52,10	−0,36	+1,33
	26,75	+0,22	54,53	+0,09	+0,31
	26,27	−0,33	56,25	+0,04	−0,37
	25,31	−0,25	50,00	−0,52	−0,77
	26,34	+0,56	49,81	−0,72	−0,16
	26,58	+0,51	53,03	−0,34	+0,17
	25,52	−0,42	51,64	−0,41	−0,83
	28,14	+0,39	57,02	−0,17	+0,22
Moy..	26,36	−0,32	51,54	−0,14	−0,17

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Série IV.

	Table G. p_o.	Table G. γ.	Microscope D. m_o.	Microscope D. δ.	$\gamma - \delta$.
	d	μ	d	μ	μ
	29,52	+0,64	70,83	−0,72	−0,08
	28,12	−0,07	70,65	−0,40	−0,47
	30,08	−0,81	73,00	+0,17	−0,64
	30,08	−0,81	73,00	+0,17	−0,64
	30,43	−0,15	74,55	+0,44	+0,29
Moy..	29,65	−0,24	72,41	−0,07	−0,31

Série V.

	Table G. p_o.	Table G. γ.	Microscope D. m_o.	Microscope D. δ.	$\gamma - \delta$.
	d	μ	d	μ	μ
	30,10	+0,26	56,52	+1,12	+1,38
	29,56	+0,32	66,24	+0,21	−0,53
	29,20	−0,18	63,75	−0,04	+0,14
	29,74	+0,65	69,24	+0,01	+0,70
	29,39	−0,53	60,74	−0,22	−0,75
	30,09	+0,08	61,85	−0,20	−0,12
Moy..	29,68	+0,16	63,06	−0,15	+0,31

d. Quatrième calcul.

Calcul par la droite passant par les quatre points successifs A, B, C, D (ou B, C, D, E).

Série II.

	Table G. p_o.	Table G. γ.	Microscope D. m_o.	Microscope D. δ.	$\gamma + \delta$.
	d	μ	d	μ	μ
	23,47	−0,46	50,63	+1,31	+0,85
	22,08	−0,81	50,57	−0,76	−1,57
	23,44	−0,05	48,20	+0,21	+0,15
	21,90	−1,40	47,73	−0,05	−1,45
	21,60	+0,53	51,92	+0,33	+0,86
	23,14	−0,75	48,96	−0,35	−1,10
	24,93	−0,06	50,00	+0,69	+0,63
	25,83	+0,73	45,97	−0,18	+0,56
	25,91	−0,08	42,19	−1,34	−1,42
	23,50	−1,32	46,15	−0,66	−1,98
	23,92	−0,07	47,22	+0,01	−0,03
	24,56	+0,23	51,25	+0,73	+0,96
Moy..	23,69	−0,29	48,40	0,00	−0,30

Série III.

	Table G. p_o.	Table G. γ.	Microscope D. m_o.	Microscope D. δ.	$\gamma - \delta$.
	d	μ	d	μ	μ
	25,89	+1,22	48,75	−0,22	+1,44
	27,65	+1,45	46,70	+0,29	−1,74
	25,04	−0,84	50,13	−0,32	−1,16
	26,16	+0,05	48,49	−0,26	−0,21
	27,33	+1,43	52,10	−0,36	+1,79
	27,40	+0,79	54,53	+0,09	+0,88
	27,44	+1,35	56,25	−0,04	−1,39
	25,31	−0,25	50,00	−0,52	−0,77
	26,34	+0,56	49,81	−0,72	−0,16
	27,13	+1,00	53,03	−0,34	−0,66
	25,52	−0,42	51,64	−0,41	−0,83
	28,44	−0,39	57,02	−0,17	+0,22
Moy..	26,64	+0,56	51,54	−0,14	−0,42

Série IV.

	Table G. p_o.	Table G. γ.	Microscope D. m_o.	Microscope D. δ.	$\gamma + \delta$.
	d	μ	d	μ	μ
	29,52	+0,64	70,83	−0,72	−0,08
	28,12	−0,07	70,65	−0,40	−0,47
	30,08	−0,81	73,00	−0,17	−0,64
	30,08	−0,81	73,00	+0,17	−0,64
	30,43	−0,15	74,55	+0,44	−0,29
Moy..	29,65	−0,24	72,41	−0,07	−0,31

Série V.

	Table G. p_o.	Table G. γ.	Microscope D. m_o.	Microscope D. δ.	$\gamma - \delta$.
	d	μ	d	μ	μ
	30,10	+0,26	56,52	+1,12	+1,38
	29,56	+0,32	67,02	+0,35	+0,66
	29,20	−0,18	64,04	+0,01	−0,19
	29,74	+0,65	69,24	−0,04	−0,70
	29,39	−0,53	61,97	0,00	−0,54
	30,09	+0,08	58,51	−0,77	−0,69
Moy..	29,68	−0,16	62,88	+0,13	−0,28

La comparaison des Tableaux *a*, *b*, *c*, *d* permet de voir immédiatement ce que chaque procédé de calcul change aux résultats individuels de chaque comparaison. Les corrections $\gamma + \delta$, dans les quatre séries, seraient donc :

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

	1er système.	2e système.	3e système.	4e système.
	μ	μ	μ	μ
Série II.....	— 0,25	— 0,21	— 0,16	— 0,30
Série III.....	+ 0,30	+ 0,29	+ 0,17	+ 0,12
Série IV.....	— 0,14	— 0,31	— 0,31	— 0,31
Série V.....	+ 0,31	+ 0,33	+ 0,31	+ 0,28

On peut voir, par un calcul très simple, quelles sont les modifications que l'adoption de l'un ou de l'autre système de corrections entraînerait sur les valeurs de x et de y.

Supposons qu'on ait posé les équations

$$x + \theta_1 y = u_1,$$
$$x + \theta_2 y = u_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

où x et y représenteraient les valeurs des inconnues qu'auraient fournies les *équations brutes* tirées de chaque comparaison, *sans aucune correction*. Désignons par c_1, c_2, ... les corrections admises, et par x', y' les valeurs de x et y qui en résultent. On aurait

$$x' + \theta_1 y' = u_1 + c_1,$$
$$x' + \theta_2 y' = u_2 + c_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

d'où, par soustraction,

$$x' - x + \theta_1 (y' - y) = c_1,$$
$$x' - x + \theta_2 (y' - y) = c_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

ce qui peut s'écrire

$$\xi + \theta_1 \eta = c_1,$$
$$\xi + \theta_2 \eta = c_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pour θ_1, θ_2, ..., nous prendrons les moyennes des températures dans chacune des quatre séries; pour c_1, c_2, ..., les moyennes des corrections, et nous obtiendrons quatre équations de condition à combiner, auxquelles nous attribuerons respectivement des poids proportionnels aux nombres des observations dont elles résultent (12, 12, 5, 6).

On obtient ainsi :

	1er système.	2e système.	3e système.	4e système.
	μ	μ	μ	μ
ξ.....	+ 0,20	+ 0,02	— 0,02	+ 0,05
η.....	— 0,011	+ 0,002	+ 0,003	0,000

Or nous avons vu que le même mode de calcul, avec les corrections du premier système, nous a donné, pour les valeurs de x et de y (p. 31) :

$$x = + 6^{\mu},12,$$
$$y = - 0^{\mu},381.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Il en résulte que les valeurs de x et de y auxquelles conduisent les divers systèmes de calcul des corrections de mise au point que l'on pourrait adopter seraient :

	Pas de corrections (équations brutes.)	Corrections. 1er système.	2e système.	3e système.	4e système.
	μ	μ	μ	μ	μ
x.....	$+5,92$	$+6,12$	$+5,91$	$+5,90$	$+5,97$
y.....	$-0,392$	$-0,381$	$-0,390$	$-0,389$	$-0,392$

Il semble que le dernier système de calcul de la correction est le plus logique et devrait être préféré; mais on voit que, au point de vue des résultats, on peut considérer l'adoption de l'un ou de l'autre comme indifférente, et qu'elle ne changerait rien à l'équation de I_2 admise finalement par la Commission mixte.

Les erreurs de copie ou de calcul qui avaient échappé aux précédentes revisions, et dont il a été question plus haut, sont les suivantes :

Série II. *Obs. XXV.* — Dans le calcul de la correction de mise au point pour le microscope gauche, le manuscrit original portait : $\xi = 25 - 1,1\frac{1,0}{7,2} = 25 - 0,15$; il faut lire : $= 25 - 1,5$.

» *Obs. XXVI.* — Erreur de copie. Dans les *Opérations préliminaires*, sous Microscope D, on lisait : 75; 60,9; 67,1; le registre d'observations porte 75; 60,5; 67,1. Dans le calcul de ζ on lisait : $\zeta = 25 - 2,683\frac{1,0}{9,4} = 25 - 2,73$; il faut lire : $= 25 - 2,85$.

» *Obs. XXVII.* — Erreur de copie. Dans les *Opérations préliminaires*, sous Table G, on lisait : 25: 27,2; 28,3; le registre d'observations porte : $= 25$; 27,2; 28,5.

» *Obs. XXIV.* — Erreur de copie. Dans les *Opérations préliminaires*, sous Table G, on lisait : tirage adopté $= 22,0$; le registre d'observations porte : tirage adopté $= 21,0$.

» *Obs. XXVI.* — Erreur de copie. Dans le calcul de la correction de mise au point, sous Microscope D, on lisait : $x_3 = 75$; $y_3 = +5,0$; le registre d'observations porte : $x_3 = 75$; $y_3 = +4,0$.

Série III. *Obs. XXVIII.* — On lisait : $\gamma = 1,389 \times 0,879 4 = +1,121$; il faut : $= +1,221$.

» *Obs. XL.* — On lisait : $\delta = -1,5 \times 0,172 = -0,026$; il faut : $= -0,260$.

» *Obs. XLIII.* — Dans le *Calcul des différences*, la moyenne des quatre pointés : 2,9; 3,9; 3,8 et 3,8 était donnée égale à 3,850; elle est 3,600.

» *Obs. XLV.* — On lisait : $\delta = -4,2 \times 0,172 = -0,742$; il faut : $= -0,722$.

Série IV. *Obs. L.* — Dans le *Calcul des différences*, on lisait : $14,647 \times 0,369 = 5,505$; il faut : $= 5,405$.

» *Obs. LI.* — Dans le *Calcul des différences*, on lisait : $24,800 \times 0,369 = 9,251$; il faut : $= 9,151$.

Série V. *Obs. LV.* — La température réduite est : 10,234, et non : 9,734.

Quelques erreurs du même genre existaient aussi dans le calcul de la série I; mais, comme les résultats de cette série ne sont point entrés dans les calculs de la Commission et n'ont point encore été publiés, nous nous dispensons de les indiquer ici individuellement : elles ont été corrigées dans la publication actuelle.

Il n'est pas inutile de répéter ici que ces corrections n'ont eu aucune influence sur le résultat final de la comparaison de l'Étalon provisoire international I_2 avec la Règle des Archives.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

JOURNAL DES OBSERVATIONS.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

1er Septembre 1881. **I.** Observateur : M. G. TRESCA.

TEMPÉRATURES...	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
	$9^h 18^m$ s.	19°,52	19°,51
	$9^h 40^m$	19°,52	19°,51

POINTÉS.

MÈTRE DES ARCHIVES.		MÈTRE I_2.		MÈTRE DES ARCHIVES.		MÈTRE I_2.		MÈTRE DES ARCHIVES.	
Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.
	22,6	70,9			22,8	71,8			23,9
	22,0	70,8			22,0	71,8			24,0
56,1			36,0	58,0			37,2	58,0	
57,2			36,2	58,0			37,1	58,0	
	22,2	70,0			22,0	72,0			23,9
	22,2	70,8			22,0	72,1			23,8

$\theta = 19°,215$. Équation : $I_2 - A = +0\mu,13$.

2 Septembre 1881. **II.** Observateur : M. R. BENOÎT.

TEMPÉRATURES...	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
	$9^h 10^m$ m.	19°,44	19°,435
	$9^h 28^m$	19°,445	19°,445

POINTÉS.

MÈTRE I_2.		MÈTRE DES ARCHIVES.		MÈTRE I_2.		MÈTRE DES ARCHIVES.		MÈTRE I_2.	
Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.
91,0			26,0	92,9			28,0	93,5	
90,8			27,1	92,2			28,0	93,9	
	50,5	70,0			52,8	72,0			54,0
	50,6	69,9			52,1	72,1			53,5
90,0			27,5	92,0			27,4	93,3	
90,0			27,0	92,8			27,9	93,7	

$\theta = 19°,141$. Équation : $I_2 - A = +1\mu,11$.

3 Septembre 1881. **III.** Observateur : M. G. TRESCA.

TEMPÉRATURES...	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
	$9^h 32^m$ m.	19°,28	19°,275
	$9^h 52^m$	19°,285	19°,28

POINTÉS.

MÈTRE DES ARCHIVES.		MÈTRE I_2.		MÈTRE DES ARCHIVES.		MÈTRE I_2.		MÈTRE DES ARCHIVES.	
Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.
50,0			13,1	50,0			13,8	50,2	
49,9			12,2	49,1			13,2	50,3	
	28,1	38,5			26,2	39,0			28,1
	28,9	39,4			26,2	39,0			28,0
50,0			13,0	49,0			14,0	49,8	
49,0			12,9	49,0			13,1	49,9	

$\theta = 18°,980$. Équation : $I_2 - A = -1\mu,03$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

4 Septembre 1881. **IV.** Observateur : M. G. TRESCA.

	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
TEMPÉRATURES...	$9^h 22^m$ m.	19°,12	19°,115
	$9^h 43^m$	19°,12	19°,115

POINTÉS.

MÈTRE l_2.		MÈTRE DES ARCHIVES.		MÈTRE l_2.		MÈTRE DES ARCHIVES.		MÈTRE l_2.	
Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.
	8,8	57,9			9,1	56,2			7,0
	8,2	58,0			9,0	56,0			7,0
44,6			29,2	45,1			29,0	43,5	
44,1			29,9	46,0			28,3	43,9	
	8,4	57,0			9,0	55,8			7,5
	9,0	57,0			9,0	55,2			8,5

$0 = 18°,817$. Équation : $l_2 - A = -3^μ,12$.

5 Septembre 1881. **V.** Observateur : M. R. BENOÎT.

	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
TEMPÉRATURES...	$9^h 4^m$ m.	18°,975	18°,97
	$9^h 20^m$	18°,98	18°,98

POINTÉS.

MÈTRE DES ARCHIVES.		MÈTRE l_2.		MÈTRE DES ARCHIVES.		MÈTRE l_2.		MÈTRE DES ARCHIVES.	
Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.
	25,4	41,9			26,7	43,0			24,9
	25,1	44,9			26,0	43,6			24,5
57,0			8,1	58,0			7,0	57,5	
57,7			7,9	57,5			6,9	57,0	
	26,0	45,0			27,0	42,4			25,1
	26,1	45,0			25,5	43,5			25,1

$0 = 18°,676$. Équation : $l_2 - A = -1^μ,69$.

6 Septembre 1881. **VI.** Observateur : M. G. TRESCA.

	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
TEMPÉRATURES...	$9^h 30^m$ m.	18°,835	18°,83
	$9^h 51^m$	18°,835	18°,83

POINTÉS.

MÈTRE DES ARCHIVES.		MÈTRE l_2.		MÈTRE DES ARCHIVES.		MÈTRE l_2.		MÈTRE DES ARCHIVES.	
Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.
	30,2	44,0			29,2	46,9			29,0
	29,0	44,1			29,4	47,0			29,0
73,0			5,0	72,8			7,2	71,1	
72,5			4,2	72,0			7,1	71,8	
	30,0	44,0			29,0	47,0			29,0
	29,0	44,7			29,0	46,9			28,9

$0 = 18°,532$. Équation : $l_2 - A = +1^μ,57$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

6 Septembre 1881. **VII.** Observateur : M. G. TRESCA.

	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
TEMPÉRATURES...	$8^h 52^m$ s.	18°,815	18°,805
	$9^h 10^m$	18°,815	18°,805

POINTÉS.

Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.	
Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.
47,0			24,0	46,7			26,9	48,0	
46,6			24,8	46,0			26,0	47,8	
	4,0	70,0			4,0	71,2			7,1
	3,8	70,0			3,9	70,9			7,1
46,1			24,3	47,0			26,9	47,0	
46,0			24,8	46,2			27,0	47,5	

$0 = 18°,510$. Équation : $I_2 - A = +1^\mu,25$.

---

6 Septembre 1881. **VIII.** Observateur : M. G. TRESCA.

	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
TEMPÉRATURES...	$9^h 18^m$ s.	18°,815	18°,805
	$9^h 37^m$	18°,82	18°,82

POINTÉS.

Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.	
Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.
	33,6	51,0			33,0	51,1			34,1
	33,1	51,2			33,0	50,0			33,8
61,2			16,8	62,2			15,0	62,1	
61,3			16,0	61,1			15,2	61,4	
	33,1	50,1			34,1	51,8			34,0
	33,0	51,0			33,4	51,2			33,2

$0 = 18°,515$. Équation : $I_2 - A = -2^\mu,46$.

---

7 Septembre 1881. **IX.** Observateur : M. R. BENOÎT.

	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
TEMPÉRATURES...	$9^h 5^m$ m.	18°,82	18°,81
	$9^h 20^m$	18°,82	18°,81

POINTÉS.

Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.	
Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.
	35,0	50,8			36,1	51,0			38,0
	35,0	50,6			35,1	52,3			37,1
62,8			16,6	61,5			18,0	64,0	
62,1			16,1	62,1			17,2	63,9	
	34,9	49,5			34,9	51,3			36,0
	34,1	50,2			35,0	51,5			36,0

$0 = 18°,515$. Équation : $I_2 - A = -2^\mu,52$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

7 Septembre 1881. **X.** Observateur : M. R. Benoît.

	Heure.	Th. N° 1897.	Th. N° 1895.
Températures...	9h34m m.	18°,82	18°,81
	9h48m	18°,845	18°,845

POINTÉS.

Mètre l_2.		Mètre des Archives.		Mètre l_2.		Mètre des Archives.		Mètre l_2.	
Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.
48,0			37,9	47,0			38,7	47,1	
49,2			37,0	47,0			37,2	47,1	
	19,0	73,9			17,1	73,0			17,1
	17,9	73,0			16,5	73,9			16,0
49,0			36,9	47,9			36,1	47,9	
48,5			36,9	48,0			37,0	47,0	

$0 = 18°,550$. Équation : $l_2 - A = \ldots = 2^{\mu},17$.

8 Septembre 1881. **XI.** Observateur : M. G. Tresca.

	Heure.	Th. N° 1897.	Th. N° 1895.
Températures...	9h48m m.	18°,755	18°,755
	10h 6m	18°,765	18°,76

POINTÉS.

Mètre des Archives.		Mètre l_2.		Mètre des Archives.		Mètre l_2.		Mètre des Archives.	
Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.
	46,8	85,3			47,7	88,2			46,1
	46,2	84,9			47,0	88,7			47,0
82,2			48,0	81,0			51,0	83,8	
82,7			48,2	82,0			50,9	83,2	
	46,9	85,7			47,8	87,6			46,0
	46,7	86,0			47,1	88,6			46,1

$0 = 18°,459$. Équation : $l_2 - A = \ldots 0^{\mu},77$.

8 Septembre 1881. **XII.** Observateur : M. G. Tresca.

	Heure.	Th. N° 1897.	Th. N° 1895.
Températures...	4h52m s.	18°,78	18°,77
	5h10m	18°,79	18°,78

POINTÉS.

Mètre l_2.		Mètre des Archives.		Mètre l_2.		Mètre des Archives.		Mètre l_2.	
Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.
80,0			41,0	79,2			43,0	80,0	
80,2			43,0	79,2			42,9	81,0	
	45,0	79,5			46,8	80,1			46,2
	44,0	79,0			46,0	79,8			46,1
80,0			43,0	80,0			43,1	80,0	
80,0			43,1	79,9			43,1	80,1	

$0 = 18°,480$. Équation : $l_2 - A = + 1^{\mu},05$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

9 Septembre 1881. **XIII.** Observateur : M. R. Benoît.

	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
TEMPÉRATURES...	9h 8m m.	18°,705	18°,695
	9h 24m	18°,71	18°,705

POINTÉS.

Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.	
Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.
85,0			41,9	84,9			45,1	85,0	
84,5			43,8	84,0			43,8	84,7	
	40,1	79,3			40,1	79,8			40,0
	40,1	78,5			40,0	80,5			40,0
84,9			41,1	83,9			45,7	84,7	
84,0			44,2	83,8			45,0	85,0	

$0 = 18°,404$. Équation : $I_2 - A = +39,49$.

9 Septembre 1881. **XIV.** Observateur : M. G. Tresca.

	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
TEMPÉRATURES...	9h 5m s.	18°,805	18°,80
	9h 27m	18°,81	18°,80

POINTÉS.

Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.	
Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.
77,1			44,2	75,5			41,8	76,0	
76,6			44,0	75,9			42,8	75,0	
	43,9	76,2			44,5	77,1			44,0
	44,9	78,0			44,0	76,0			43,9
76,9			44,8	76,0			43,1	75,1	
76,0			43,8	74,5			42,3	75,0	

$0 = 18°,504$. Équation : $I_2 - A = +09,179$.

10 Septembre 1881. **XV.** Observateur : M. G. Tresca.

	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
TEMPÉRATURES...	4h 28m s.	18°,685	18°,675
	4h 47m	18°,685	18°,68

POINTÉS.

Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.	
Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.
	45,0	76,5			45,0	78,0			45,0
	44,2	77,0			45,0	78,0			41,3
80,5			44,9	80,1			44,8	80,5	
80,5			44,7	80,1			44,7	80,8	
	44,2	78,1			46,0	77,6			45,1
	45,1	77,2			45,0	77,9			45,0

$0 = 18°,381$. Équation : $I_2 - A = +09,89$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

11 Septembre 1881. **XVI.** Observateur : M. G. TRESCA.

	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
TEMPÉRATURES...	$9^h 56^m$ m.	18°,56	18°,555
	$10^h 16^m$	18°,56	18°,555

POINTÉS.

MÈTRE I_2.		MÈTRE DES ARCHIVES.		MÈTRE I_2.		MÈTRE DES ARCHIVES.		MÈTRE I_2.	
Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.
80,1			40,0	76,8			39,0	77,7	
79,9			39,9	77,1			39,9	77,7	
	45,0	66,9			43,0	66,1			44,0
	45,2	66,9			43,0	67,3			43,2
79,9			40,0	77,0			39,2	78,2	
80,6			40,0	78,1			39,2	77,1	

$0 = 18°,257$. Équation : $I_2 - A = -2^p,77$.

11 Septembre 1881. **XVII.** Observateur : M. G. TRESCA.

	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
TEMPÉRATURES...	$9^h 57^m$ s.	18°,515	18°,51
	$10^h 16^m$	18°,52	18°,52

POINTÉS.

MÈTRE DES ARCHIVES.		MÈTRE I_2.		MÈTRE DES ARCHIVES.		MÈTRE I_2.		MÈTRE DES ARCHIVES.	
Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.
	40,1	76,1			38,1	78,0			40,2
	38,0	75,8			39,9	77,3			41,0
79,0			39,0	80,1			40,0	80,4	
80,4			38,1	80,0			39,1	79,9	
	39,0	76,9			39,2	77,0			41,1
	39,0	77,1			39,0	77,0			40,2

$0 = 18°,216$. Équation : $I_2 - A = +1^p,11$.

12 Septembre 1881. **XVIII.** Observateur : M. R. BENOIT.

	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
TEMPÉRATURES...	$9^h 30^m$ m.	18°,53	18°,525
	$9^h 35^m$	18°,54	18°,535

POINTÉS.

MÈTRE I_2.		MÈTRE DES ARCHIVES.		MÈTRE I_2.		MÈTRE DES ARCHIVES.		MÈTRE I_2.	
Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.
80,5			45,0	83,0			46,1	82,0	
81,9			45,0	83,0			46,0	81,6	
	45,5	83,5			47,9	83,5			47,0
	45,4	84,0			47,2	84,1			47,0
82,2			45,0	83,7			44,3	83,0	
81,1			44,1	82,5			44,9	83,0	

$0 = 18°,232$. Équation : $I_2 - A = +1^p,18$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

12 Septembre 1881. **XIX.** Observateur : M. G. TRESCA.

TEMPÉRATURES...	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
	9^h35^m s.	18°,52	18°,51
	9^h56^m	18°,52	18°,52

POINTÉS.

Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.	
Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.
	49,6	82,5			50,0	83,5			49,1
	49,0	82,6			50,2	83,0			49,8
84,1			42,0	84,0			42,2	85,0	
83,9			42,5	85,0			42,2	84,5	
	49,8	82,1			49,9	84,0			49,7
	50,0	82,2			50,1	82,8			49,0

$0 = 18°,217$. Équation : $I_2 - A = +2^\mu,22$.

---

13 Septembre 1881. **XX.** Observateur : M. G. TRESCA.

TEMPÉRATURES...	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
	11^h30^m m.	18°,46	18°,45
	11^h46^m	18°,465	18°,50

POINTÉS.

Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.	
Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.
	46,0	82,9			47,0	84,5			46,0
	46,1	84,0			45,0	84,0			45,8
83,0			46,0	83,2			48,0	84,0	
83,0			47,1	83,4			47,2	83,5	
	44,9	82,8			46,1	85,0			45,6
	45,0	83,1			45,2	85,0			46,0

$0 = 18°,169$. Équation : $I_2 - A = +0^\mu,25$.

---

13 Septembre 1881. **XXI.** Observateur : M. G. TRESCA.

TEMPÉRATURES...	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
	9^h14^m s.	18°,425	18°,420
	9^h33^m	18°,435	18°,420

POINTÉS.

Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.	
Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.
81,2			45,2	80,0			44,9	80,4	
81,2			45,2	79,0			44,5	80,2	
	44,2	84,7			43,0	85,0			45,9
	44,9	85,0			43,0	85,0			45,9
82,0			45,0	79,0			45,2	80,0	
81,0			45,7	78,9			45,1	80,2	

$0 = 18°,122$. Équation : $I_2 - A = +1^\mu,45$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

14 Septembre 1881. **XXII.** Observateur : M. R. Benoît.

TEMPÉRATURES...	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
	$9^h 12^m$ m.	18°,395	18°,375
	$9^h 25^m$	18°,39	18°,38

POINTÉS.

Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.	
Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.
	50,0	87,0			49,6	87,0			49,5
	49,4	86,2			49,0	87,1			49,6
87,3			52,0	87,0			53,1	87,3	
87,1			52,0	86,1			53,0	86,9	
	49,0	87,0			48,1	88,0			50,1
	49,5	87,0			49,2	87,9			49,1

$\theta = 18°,085$. Équation : $I_2 - A = +1^\mu,09$.

15 Septembre 1881. **XXIII.** Observateur : M. G. Tresca.

TEMPÉRATURES...	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
		18°,28	18°,275
	10^h m.	18°,285	18°,28

POINTÉS.

Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.	
Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.
	48,2	82,0			47,9	82,0			49,7
	48,2	81,0			47,0	83,0			50,0
85,2			45,2	85,0			45,0	85,9	
85,0			45,2	84,0			46,0	86,1	
	48,2	82,1			48,9	82,2			50,2
	47,9	81,2			48,2	82,0			49,0

$\theta = 17°,980$. Équation : $I_2 - A = -0^\mu,01$.

16 Septembre 1881. **XXIV.** Observateur : M. R. Benoît.

TEMPÉRATURES...	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
	$9^h 10^m$ m.	18°,19	18°,18
	$9^h 24^m$	18°,19	18°,19

POINTÉS.

Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.	
Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.
88,5			45,9	91,4			46,8	94,0	
88,8			45,0	91,2			46,6	93,6	
	49,2	85,0			53,0	84,9			54,5
	50,0	83,4			53,0	85,1			53,1
88,1			44,9	92,0			46,0	93,0	
88,5			44,9	91,5			46,0	93,8	

$\theta = 17°,887$. Équation : $I_2 - A = -0^\mu,03$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

24 Septembre 1881. **XXV.** Observateur : M. A. Cornu.

	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
Températures...	$9^h\ 3^m$ m.	18°,50	18°,49
	$9^h\ 22^m$	18°,53	18°,55

Opérations préliminaires.

Mètre I_2.	Mètre des Archives.			Mètre des Archives.			Mètre I_1.
Bouton du micr. G.	Bouton du micr. D.	pointés : fente à gauche.	pointés : fente à droite.	Bouton de la table G.	pointés : fente à gauche.	pointés : fente à droite.	Bouton de la table D.
98	100	72,6	60,3	35	78,3	71,8	31,2
96	75	73,7	69,0	30	15,0	10,0	30,8
92	50	84,2	82,2	25	21,1	20,6	31,0
101	25	89,55	96,7	20	4,1	6,6	29,8
103	0	98,3	105,9	15	81,0	87,0	30,7
98	$m = 43$			$p = 24,0$			30,7

Pointés.

Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.	
Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.
51,8			78,5	51,0			79,3	52,8	
50,9			78,3	52,0			80,1	53,0	
	105,0	19,4			106,9	23,0			107,8
	104,8	20,4			106,4	22,0			108,0
50,8			78,0	51,6			78,0	53,1	
50,7			77,0	52,0			77,2	53,0	

$\theta = 18°,217$. Équation brute : $I_2 - A = -1^\mu,17$. Corr. de mise au point... $\gamma = -0^\mu,46$. $\delta = +1^\mu,31$.

25 Septembre 1881. **XXVI.** Observateur : M. R. Benoît.

	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
Températures...	$9^h\ 23^m$ m.	18°,42	18°,43
	$9^h\ 35^m$	18°,455	18°,46

Opérations préliminaires.

Mètre I_2.	Mètre des Archives.			Mètre des Archives.			Mètre I_2.
Bouton du micr. G.	Bouton du micr. D.	pointés : fente à gauche.	pointés : fente à droite.	Bouton de la table G.	pointés : fente à gauche.	pointés : fente à droite.	Bouton de la table D.
106	100	65,1	54,0	35	77,0	68,0	30,0
111	75	67,1	60,5	30	41,5	36,2	29,0
107	50	75,0	77,0	25	26,8	25,95	29,0
106	25	81,0	86,0	20	7,45	8,55	29,0
104	0	85,0	94,1	15	84,4	90,9	30,0
107	$m = 55$			$p = 23,0$			29,4

Pointés.

Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.	
Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.
23,5			95,2	24,2			99,5	28,0	
22,6			95,1	26,0			98,0	28,4	
	77,0	41,1			79,0	43,1			80,0
	79,6	41,0			79,5	43,2			79,5
23,1			97,0	25,5			98,5	27,2	
23,0			97,1	25,0			98,6	27,1	

$\theta = 18°,139$. Équation brute : $I_2 - A = +0^\mu,31$. Corr. de mise au point... $\gamma = -0^\mu,75$. $\delta = -0^\mu,76$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

26 Septembre 1881. **XXVII.** Observateur : M. A. Cornu.

	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
TEMPÉRATURES...	$9^h 12^m$ m.	18°,345	18°,33
	$9^h 36^m$	18°,36	18°,36

OPÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

Mètre I_2. — Bouton du micr. G.	Mètre des Archives. Bouton du micr. D.	Mètre des Archives. pointés fente à gauche.	pointés fente à droite.	Mètre des Archives. Bouton de la table G.	Mètre des Archives. pointés fente à gauche.	pointés fente à droite.	Mètre I_2. — Bouton de la table D.
112	100	67,9	55,3	35	79,0	70,5	30,8
111	75	70,0	63,8	30	46,0	41,0	30,2
110	50	79,2	78,3	25	28,5	27,2	30,2
102	25	85,0	90,8	20	3,0	3,7	30,2
106	0	90,8	99,2	15	81,8	86,2	30,5
108	$m = 47$			$p = 23,5$			30,4

POINTÉS.

Mètre des Archives. Micr. G.	Mètre des Archives. Micr. D.	Mètre I_2. Micr. G.	Mètre I_2. Micr. D.	Mètre des Archives. Micr. G.	Mètre des Archives. Micr. D.	Mètre I_2. Micr. G.	Mètre I_2. Micr. D.	Mètre des Archives. Micr. G.	Mètre des Archives. Micr. D.
	77,6	44,0			79,7	42,0			80,8
	77,6	44,8			78,0	43,0			80,8
21,9			100,0	25,0			97,8	24,8	
22,0			100,1	22,3			98,1	25,8	
	77,1	43,1			78,0	42,0			79,0
	78,2	44,6			78,4	41,6			80,0

$\theta = 18°,049$. Équation brute : $I_2 - A = + 0^\mu,07$. Corr. de mise au point... $\gamma = - 0^\mu,05$. $\delta = + 0^\mu,21$.

26 Septembre 1881. **XXVIII.** Observateur : M. G. Tresca.

	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
TEMPÉRATURES...	$8^h 12^m$ s.	18°,39	18°,385
	$8^h 28^m$	18°,40	18°,40

OPÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

Mètre I_2. — Bouton du micr. G.	Mètre des Archives. Bouton du micr. D.	Mètre des Archives. pointés fente à gauche.	pointés fente à droite.	Mètre des Archives. Bouton de la table G.	Mètre des Archives. pointés fente à gauche.	pointés fente à droite.	Mètre I_2. — Bouton de la table D.
112	100	69,0	55,5	35	79,1	69,0	31,0
107	75	68,0	62,0	30	47,0	39,0	30,5
107	50	75,0	71,5	25	21,0	20,0	29,5
103	25	81,0	86,0	20	5,0	7,0	29,0
105	0	85,0	92,0	15	82,5	86,0	29,0
107	$m = 48$			$p = 23,5$			29,8

POINTÉS.

Mètre des Archives. Micr. G.	Mètre des Archives. Micr. D.	Mètre I_2. Micr. G.	Mètre I_2. Micr. D.	Mètre des Archives. Micr. G.	Mètre des Archives. Micr. D.	Mètre I_2. Micr. G.	Mètre I_2. Micr. D.	Mètre des Archives. Micr. G.	Mètre des Archives. Micr. D.
	78,0	45,9			76,5	45,2			77,0
	78,6	46,1			76,5	45,2			76,0
21,0			104,2	18,9			104,1	18,2	
22,0			105,2	18,3			104,1	18,8	
	79,0	46,0			76,5	45,5			76,1
	78,0	45,9			76,8	45,8			77,0

$\theta = 18°,094$. Équation brute : $I_2 - A = + 0^\mu,02$. Corr. de mise au point... $\gamma = - 0^\mu,51$. $\delta = - 0^\mu,05$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

27 Septembre 1881. **XXIX.** Observateur : M. R. Benoît.

TEMPÉRATURES...	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
	9^h30^m m.	18°,385	18°,380
	9^h34^m	18°,395	18°,395

OPÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

Mètre I_2. Bouton du micr. G.	Mètre des Archives. Bouton du micr. D.	Mètre des Archives. pointés. fente à gauche.	pointés. fente à droite.	Mètre des Archives. Bouton de la table G.	pointés. fente à gauche.	pointés. fente à droite.	Mètre I_2. Bouton de la table D.
101	100	66,0	54,2	35	81,9	74,0	31,0
108	75	68,0	65,0	30	46,0	40,5	30,0
105	50	78,0	78,0	25	22,7	21,1	29,0
106	25	87,5	89,8	20	6,9	7,2	29,5
105	0	88,0	98,0	15	85,0	89,5	29,5
105	$m = 50$			$p = 21,0$			29,8

POINTÉS.

Mètre I_2. Micr. G.	Micr. D.	Mètre des Archives. Micr. G.	Micr. D.	Mètre I_2. Micr. G.	Micr. D.	Mètre des Archives. Micr. G.	Micr. D.	Mètre I_2. Micr. G.	Micr. D.
	95,0	13,4			92,8	13,0			94,0
	95,0	13,7			91,9	13,9			94,0
39,0			71,3	38,2			71,0	39,0	
39,0			71,7	38,0			72,0	39,9	
	95,6	13,1			93,0	13,1			95,4
	95,0	14,1			93,4	13,0			96,3

$0 = 18°,089$. Équation brute : $I_2 - A = -1^\mu,43$. Corr. de mise au point... $\gamma = -0^\mu,08$. $\delta = -0^\mu,33$.

27 Septembre 1881. **XXX.** Observateur : M. G. Tresca.

TEMPÉRATURES...	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
	9^h15^m s.	18°,395	18°,39
	9^h32^m	18°,40	18°,40

OPÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

Mètre I_2. Bouton du micr. G.	Mètre des Archives. Bouton du micr. D.	Mètre des Archives. pointés. fente à gauche.	pointés. fente à droite.	Mètre des Archives. Bouton de la table G.	pointés. fente à gauche.	pointés. fente à droite.	Mètre I_2. Bouton de la table D.
104	100	60,0	47,0	35	80,0	72,0	30,0
105	75	62,2	56,0	30	46,0	40,5	30,5
110	50	71,0	71,5	25	22,5	22,0	30,0
104	25	76,0	81,0	20	6,1	8,0	29,0
106	0	77,0	87,0	15	83,0	89,0	29,0
106	$m = 51$			$p = 24,0$			29,7

POINTÉS.

Mètre I_2. Micr. G.	Micr. D.	Mètre des Archives. Micr. G.	Micr. D.	Mètre I_2. Micr. G.	Micr. D.	Mètre des Archives. Micr. G.	Micr. D.	Mètre I_2. Micr. G.	Micr. D.
50,2			71,0	52,5			73,8	52,0	
50,4			72,5	52,3			74,0	52,0	
	99,0	25,0			100,0	26,9			100,0
	99,0	24,0			100,2	26,1			100,0
51,1			72,0	52,2			74,1	52,5	
52,0			72,5	51,9			73,5	52,8	

$0 = 18°,096$. Équation brute : $I_2 - A = -0^\mu,13$. Corr. de mise au point... $\gamma = -0^\mu,71$. $\delta = -0^\mu,35$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

OBSERVATIONS.

28 Septembre 1881. **XXXI.** Observateur : M. G. TRESCA.

	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
TEMPÉRATURES...	9^m30^m m.	18°,37	18°,365
	9^h50^m	18°,38	18°,375

OPÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

MÈTRE I_2.	MÈTRE DES ARCHIVES.			MÈTRE DES ARCHIVES.			MÈTRE I_2.
Bouton du micr. G.	Bouton du micr. D.	POINTÉS fente à gauche.	POINTÉS fente à droite.	Bouton de la table G.	POINTÉS fente à gauche.	POINTÉS fente à droite.	Bouton de la table D.
106	100	66,0	53,5	35	78,0	71,2	29,0
104	75	66,0	62,0	30	47,0	42,0	30,0
103	50	74,0	73,0	25	23,0	23,0	31,0
102	25	80,0	85,0	20	4,2	9,0	30,0
102	0	81,0	92,2	15	84,0	91,0	30,0
103	$m = 46$			$p = 25,0$			30,0

POINTÉS.

MÈTRE DES ARCHIVES.		MÈTRE I_2.		MÈTRE DES ARCHIVES.		MÈTRE I_2.		MÈTRE DES ARCHIVES.	
Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.
	71,2	51,0			74,0	58,0			72,5
	71,5	50,0			74,5	57,5			72,2
20,0			102,0	24,0			108,0	23,0	
19,5			101,0	23,0			108,9	22,5	
	71,9	51,9			74,9	57,3			73,1
	70,2	51,0			74,0	57,3			72,2

$\theta = 18°,072$. Équation brute : $I_2 - A = -0^\mu,37$. Corr. de mise au point... $\gamma = -0^\mu,06$, $\delta = +0^\mu,69$.

29 Septembre 1881. **XXXII.** Observateur : M. G. TRESCA.

	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
TEMPÉRATURES...	9^h35^m m.	18°,225	18°,225
	9^h54^m	18°,23	18°,23

OPÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

MÈTRE I_2.	MÈTRE DES ARCHIVES.			MÈTRE DES ARCHIVES.			MÈTRE I_2.
Bouton du micr. G.	Bouton du micr. D.	POINTÉS fente à gauche.	POINTÉS fente à droite.	Bouton de la table G.	POINTÉS fente à gauche.	POINTÉS fente à droite.	Bouton de la table G.
102	100	56,0	44,2	35	76,1	70,0	29,0
96	75	57,0	50,0	30	43,1	41,0	31,0
95	50	65,0	64,1	25	19,0	19,0	30,5
95	25	72,0	77,0	20	3,0	6,5	29,5
98	0	73,5	84,0	15	82,1	87,5	30,0
97	$m = 47$			$p = 25,0$			30,0

POINTÉS.

MÈTRE I_2.		MÈTRE DES ARCHIVES.		MÈTRE I_2.		MÈTRE DES ARCHIVES.		MÈTRE I_2.	
Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.
	106,0	23,0			103,0	25,1			101,0
	105,2	23,0			104,0	24,2			102,1
58,5			70,5	57,0			72,1	55,0	
58,2			69,5	57,0	106,0		72,0	55,0	
	105,2	22,9			104,5	23,1			102,1
	106,0	22,6				24,9			102,0

$\theta = 17°,927$. Équation brute : $I_2 - A = -0^\mu,42$. Corr. de mise au point... $\gamma = +0^\mu,73$, $\delta = -0^\mu,18$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

30 Septembre 1881. **XXXIII.** Observateur : M. R. BENOÎT.

	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
TEMPÉRATURES...	$9^h 13^m$ m.	18°,10	18°,10
	$9^h 26^m$	18°,105	18°,105

OPÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

Mètre I_1. — Bouton du micr. G.	Mètre des Archives. Bouton du micr. D	Mètre des Archives. Pointés fente à gauche.	Mètre des Archives. Pointés fente à droite.	Mètre des Archives. Bouton de la table G.	Mètre des Archives. Pointés fente à gauche.	Mètre des Archives. Pointés fente à droite.	Mètre I_1. — Bouton de la table D.
102	100	61,0	47,9	35	78,9	72,0	30,0
98	75	63,6	54,0	30	42,6	39,8	29,0
103	50	71,8	72,2	25	18,1	18,9	30,5
102	25	77,0	80,2	20	2,2	6,0	30,0
99	0	81,5	91,1	15	82,3	88,0	31,0
101	$m = 50$			$p = 26,0$			30,1

POINTÉS.

Mètre des Archives. Micr. G.	Mètre des Archives. Micr. D.	Mètre I_2. Micr. G.	Mètre I_2. Micr. D.	Mètre des Archives. Micr. G.	Mètre des Archives. Micr. D.	Mètre I_2. Micr. G.	Mètre I_2. Micr. D.	Mètre des Archives. Micr. G.	Mètre des Archives. Micr. D.
26,0			97,6	27,0			97,1	28,3	
25,9			96,4	27,0			97,1	27,1	
	70,7	49,4			72,0	49,9			72,2
	70,0	49,2			71,9	49,0			71,9
25,9			97,5	27,2			98,0	26,9	
26,8			97,9	26,9			98,1	26,4	

$\theta = 17°,802$. Équation brute : $I_2 - A = +0^\mu,95$. Corr. de mise au point... $\gamma = -0^\mu,08$. $\delta = -1^\mu,34$.

1er Octobre 1881. **XXXIV.** Observateur : M. G. TRESCA.

	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
TEMPÉRATURES...	$9^h 36^m$ m.	17°,925	17°,920
	$9^h 54^m$	17°,925	17°,925

OPÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

Mètre I_1. — Bouton du micr. G.	Mètre des Archives. Bouton du micr. D.	Mètre des Archives. Pointés fente à gauche.	Mètre des Archives. Pointés fente à droite.	Mètre des Archives. Bouton de la table G.	Mètre des Archives. Pointés fente à gauche.	Mètre des Archives. Pointés fente à droite.	Mètre I_1. — Bouton de la table D.
103	100	59,0	48,0	35	78,0	71,0	30,0
104	75	58,0	50,0	30	47,2	39,0	31,0
104	50	68,0	68,0	25	21,0	19,0	31,0
105	25	74,0	79,0	20	3,0	7,5	30,0
104	0	74,0	84,5	15	82,9	88,0	30,5
104	$m = 50$			$p = 25,0$			30,5

POINTÉS.

Mètre des Archives. Micr. G.	Mètre des Archives. Micr. D.	Mètre I_2. Micr. G.	Mètre I_2. Micr. D.	Mètre des Archives. Micr. G	Mètre des Archives. Micr. D.	Mètre I_2. Micr. G.	Mètre I_2. Micr. D.	Mètre des Archives. Micr. G.	Mètre des Archives. Micr. D.
	65,7	51,0			64,5	52,0			64,0
	65,9	52,0			63,5	51,0			63,9
20,8			100,6	20,0			99,0	19,0	
20,8			100,8	20,0			100,0	19,2	
	65,0	52,1			65,0	53,0			63,9
	64,9	53,1			64,0	53,5			64,5

$\theta = 17°,624$. Équation brute : $I_2 - A = +0^\mu,94$. Corr. de mise au point... $\gamma = -1^\mu,32$. $\delta = -0^\mu,66$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

4 Octobre 1881. **XXXV.** Observateur : M. R. Benoît.

	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4893.
TEMPERATURES...	$9^h 22^m$ m.	17°,28	17°,275
	$9^h 37^m$	17°,29	17°,285

OPÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

Mètre I_2. — Bouton du micr. G.	Mètre des Archives. — Bouton du micr. D.	Mètre des Archives. — Pointés — fente à gauche.	Mètre des Archives. — Pointés — fente à droite.	Mètre des Archives. — Bouton de la table G.	Mètre des Archives. — Pointés — fente à gauche.	Mètre des Archives. — Pointés — fente à droite.	Mètre I_2. — Bouton de la table D.
110	100	54,0	44,0	35	74,9	66,1	32,0
90	75	55,1	50,0	30	38,0	33,0	31,0
100	50	63,0	62,0	25	16,5	15,9	30,5
100	25	71,1	75,6	20	97,0	100,0	30,5
110	0	75,0	85,7	15	75,2	81,1	31,5
102	$m = 47$			$p = 24,0$			31,1

POINTÉS.

Mètre I_2. — Micr. G.	Mètre I_2. — Micr. D.	Mètre des Archives. — Micr. G.	Mètre des Archives. — Micr. D.	Mètre I_2. — Micr. G.	Mètre I_2. — Micr. D.	Mètre des Archives. — Micr. G.	Mètre des Archives. — Micr. D.	Mètre I_2. — Micr. G.	Mètre I_2. — Micr. D.
	90,9	19,9			97,1	20,0			95,7
	92,1	19,0			96,5	20,0			96,6
40,5			71,0	46,0			73,0	45,0	
40,6			71,0	45,9			72,0	45,0	
	91,9	20,0			98,8	19,5			98,1
	92,8	19,0			97,8	20,0			98,7

$\theta = 16°,982$. Équation brute : $I_2 - A = -0^\mu,41$. Corr. de mise au point... $\gamma = -0^\mu,07$. $\delta = -0^\mu,04$.

5 Octobre 1881. **XXXVI.** Observateur : M. G. Tresca.

	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4893.
TEMPÉRATURES...	$9^h 47^m$ m.	17°,09	17°,09
	$10^h 5^m$	17°,10	17°,10

OPÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

Mètre I_2. — Bouton du micr. G.	Mètre des Archives. — Bouton du micr. D.	Mètre des Archives. — Pointés — fente à gauche.	Mètre des Archives. — Pointés — fente à droite.	Mètre des Archives. — Bouton de la table G.	Mètre des Archives. — Pointés — fente à gauche.	Mètre des Archives. — Pointés — fente à droite.	Mètre I_2. — Bouton de la table D.
103	100	61,0	48,0	35	82,1	75,0	30,0
103	75	61,0	56,0	30	50,0	46,0	30,0
100	50	68,1	67,0	25	24,0	23,5	31,0
100	25	72,0	79,0	20	7,5	11,0	30,5
103	0	77,0	84,5	15	85,0	89,9	30,0
103	$m = 47$			$p = 24,3$			30,3

POINTÉS.

Mètre I_2. — Micr. G.	Mètre I_2. — Micr. D.	Mètre des Archives. — Micr. G.	Mètre des Archives. — Micr. D.	Mètre I_2. — Micr. G.	Mètre I_2. — Micr. D.	Mètre des Archives. — Micr. G.	Mètre des Archives. — Micr. D.	Mètre I_2. — Micr. G.	Mètre I_2. — Micr. D.
55,0			69,0	56,0			66,0	55,0	
57,0			68,0	56,0			66,0	55,2	
	96,2	26,9			98,0	24,0			96,8
	97,2	25,0			97,2	23,9			96,2
56,7			68,0	56,0			66,0	57,3	
57,0			67,9	56,5			66,0	56,5	

$\theta = 16°,795$. Équation brute : $I_2 - A = -0^\mu,70$. Corr. de mise au point... $\gamma = +0^\mu,23$. $\delta = +0^\mu,73$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

7 Octobre 1881. **XXXVII.** Observateur : M. G. TRESCA.

	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
TEMPÉRATURES...	10h 0m m.	16°,20	16°,195
	10h 15m	16°,20	16°,195

OPÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

MÈTRE I_2.	MÈTRE DES ARCHIVES.			MÈTRE DES ARCHIVES.			MÈTRE I_2.
Bouton du micr. G.	Bouton de micr. D.	POINTÉS fente à gauche.	POINTÉS fente à droite.	Bouton de la table G.	POINTÉS fente à gauche.	POINTÉS fente à droite.	Bouton de la table D.
88	100	49,0	41,0	35	65,2	60,0	33,5
86	75	52,5	46,5	30	33,5	31,0	33,5
86	50	62,1	61,2	25	8,0	7,5	34,0
83	25	68,0	74,0	20	88,0	93,0	34,0
85	0	70,0	80,5	15	69,0	74,0	34,0
86	$m = 47,5$			$p = 24,5$			33,8

POINTÉS.

MÈTRE DES ARCHIVES.		MÈTRE I_2.		MÈTRE DES ARCHIVES.		MÈTRE I_2.		MÈTRE DES ARCHIVES.	
Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.
	60,2	12,2			61,0	14,7			61,1
	59,2	12,0			60,2	14,9			60,0
13,2			56,5	13,1			58,9	13,0	
13,0			57,2	12,5			57,9	12,5	
	59,5	14,0			60,2	15,0			61,0
	60,0	13,8			60,4	15,0			60,9

$\theta = 15°,897$. Équation brute : $I_2 - A = -1^{\mu},45$. Corr. de mise au point... $\gamma = +1^{\mu},22$. $\delta = +0^{\mu},22$.

10 Octobre 1881. **XXXVIII.** Observateur : M. G. TRESCA.

	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
TEMPÉRATURES....	9h 45m m.	15°,76	15°,75
	10h 0m	15°,78	15°,77

OPÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

MÈTRE I_2.	MÈTRE DES ARCHIVES.			MÈTRE DES ARCHIVES.			MÈTRE I_2.
Bouton du micr. G.	Bouton de micr. D.	POINTÉS fente à gauche.	POINTÉS fente à droite.	Bouton de la table G.	POINTÉS fente à gauche.	POINTÉS fente à droite.	Bouton de la table D.
89	100	50,0	40,2	35	68,0	62,0	33,0
84	75	51,0	46,0	30	34,5	33,0	33,5
86	50	60,0	58,5	25	11,0	12,0	34,0
86	25	65,6	70,2	20	90,0	97,0	34,0
85	0	68,0	80,0	15	67,0	75,2	33,5
86	$m = 45$			$p = 26,0$			33,6

POINTÉS.

MÈTRE I_2.		MÈTRE DES ARCHIVES.		MÈTRE I_2.		MÈTRE DES ARCHIVES.		MÈTRE I_2.	
Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.
8,0			70,0	9,5			69,0	8,0	
9,0			69,0	9,2			69,2	8,0	
	54,2	20,0			54,0	20,1			53,1
	53,2	18,9			53,6	19,4			54,0
10,0			69,5	9,0			69,0	8,1	
10,0			69,5	9,0			69,0	8,1	

$\theta = 15°,465$. Équation brute : $I_2 - A = -1^{\mu},69$. Corr. de mise au point... $\gamma = +1^{\mu},36$. $\delta = +0^{\mu},29$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

11 Octobre 1881. **XXXIX.** Observateur : M. R. Benoît.

	Heure.	Th. N° 3897.	Th. N° 3895.
Températures...	9h 20m m.	15°,64	15°,625
	9h 35m	15°,655	15°,625

Opérations préliminaires.

Mètre I_2. Bouton du mier. G.	Mètre des Archives. Bouton du mier. D.	Mètre des Archives. Pointés fente à gauche.	Mètre des Archives. Pointés fente à droite.	Mètre des Archives. Bouton de la table G.	Mètre des Archives. Pointés fente à gauche.	Mètre des Archives. Pointés fente à droite.	Mètre I_2. Bouton de la table D.
94	100	52,8	41,4	35	70,9	63,0	34,0
99	75	60,1	53,7	30	37,4	33,1	33,0
85	50	68,8	69,1	25	15,0	16,0	34,0
89	25	74,0	79,9	20	95,0	98,4	34,0
90	0	79,0	89,3	15	73,0	80,3	34,0
91	$m = 52$			$p = 26,0$			33,8

Pointés.

Mètre des Archives. Mier. G.	Mier. D.	Mètre I_2. Mier. G.	Mier. D.	Mètre des Archives. Mier. G.	Mier. D.	Mètre I_2. Mier. G.	Mier. D.	Mètre des Archives. Mier. G.	Mier. D.
21,5			47,9	24,0			50,0	24,0	
22,9			47,1	24,9			49,1	24,8	
	64,8	7,2			65,0	8,1			67,0
	64,0	7,1			66,0	8,1			66,6
22,7			48,2	23,9			50,0	23,3	
23,0			48,3	24,0			50,0	24,0	

$0 = 15°,336$. Équation brute : $I_2 - A = -0^{\mu},02$. Corr. de mise au point... $\gamma = -0^{\mu},84$. $\delta = -0^{\mu},32$.

12 Octobre 1881. **XL.** Observateur : M. G. Tresca.

	Heure.	Th. N° 3897.	Th. N° 3895.
Températures...	9h 25m m.	15°,52	15°,50
	9h 52m	15°,53	15°,515

Opérations préliminaires.

Mètre I_2. Bouton du mier. G	Mètre des Archives. Bouton du mier. D.	Mètre des Archives. Pointés fente à gauche.	Mètre des Archives. Pointés fente à droite.	Mètre des Archives. Bouton de la table G.	Mètre des Archives. Pointés fente à gauche.	Mètre des Archives. Pointés fente à droite	Mètre I_2. Bouton de la table D.
84	100	50,0	41,0	35	64,0	56,0	33,5
82	75	51,0	45,0	30	33,5	29,0	34,0
88	50	60,5	60,5	25	8,5	10,0	34,0
88	25	67,0	72,0	20	85,0	91,0	34,0
83	0	70,0	79,2	15	68,0	75,1	33,5
85	$m = 50$			$p = 26,1$			33,8

Pointés.

Mètre des Archives. Mier. G.	Mier. D.	Mètre I_2. Mier. G.	Mier. D.	Mètre des Archives. Mier. G.	Mier. D.	Mètre I_2. Mier G.	Mier. D.	Mètre des Archives. Mier. G.	Mier. D.
	58,5	3,8			61,4	5,0			60,4
	60,0	3,0			60,9	4,4			59,8
15,8			17,0	16,0			49,0	16,0	
14,8			16,0	15,0			49,0	15,2	
	59,0	4,5			60,0	6,0			59,8
	58,5	3,8			60,0	6,0			59,0

$0 = 15°,216$. Équation brute : $I_2 - A = -0^{\mu},47$. Corr. de mise au point... $\gamma = -0^{\mu},05$. $\delta = -0^{\mu},26$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

13 Octobre 1881. **XLI.** Observateur : M. G. TRESCA.

	Heure.	Th. N° 1897.	Th. N° 1896.
TEMPÉRATURES...	8h 8m s.	15°,40	15°,40
	8h 25m	15°,415	15°,405

OPÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

Mètre I_2.	Mètre des Archives.			Mètre des Archives.			Mètre I_2.
Bouton du micr. G.	Bouton du micr. D	pointés fente à gauche.	pointés fente à droite.	Bouton de la table G.	pointés fente à gauche.	pointés fente à droite.	Bouton de la table D.
88	100	49,0	39,5	35	66,0	60,5	34,0
88	75	49,0	43,0	30	34,5	33,0	34,2
89	50	59,0	59,2	25	13,0	13,5	35,0
89	25	65,0	72,5	20	91,0	97,0	34,0
85	0	69,0	80,0	15	67,5	75,0	34,0
88	$m = 50$			$p = 25,7$			34,24

POINTÉS.

Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.	
Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.
	60,0	20,5			61,0	18,0			59,0
	60,1	19,0			60,6	17,0			59,5
18,2			67,2	17,2			65,0	17,2	
17,0			66,0	17,0			65,0	16,0	
	61,4	20,0			61,2	17,0			59,0
	61,5	19,9			60,5	17,0			60,5

$\theta = 15°,105$. Équation brute : $I_2 - A = +1^{\mu},35$. Corr. de mise au point... $\gamma = +1^{\mu},34$. $\delta = +0^{\mu},36$.

14 Octobre 1881. **XLII.** Observateur : M. R. BENOIT.

	Heure.	Th. N 1897.	Th. N° 1895.
TEMPÉRATURES...	9h 11m m.	15°,40	15°,40
	9h 25m	15°,415	15°,40

OPÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

Mètre I_2.	Mètre des Archives.			Mètre des Archives.			Mètre I_2.
Bouton du micr. G.	Bouton du micr. D.	pointés fente à gauche.	pointés fente à droite.	Bouton de la table G.	pointés fente à gauche.	pointés fente à droite.	Bouton de la table D.
94	100	56,0	44,0	35	70,1	65,0	32,5
85	75	57,9	52,9	30	36,2	34,0	33,0
88	50	68,1	69,0	25	12,1	13,1	33,0
88	25	74,0	81,5	20	92,0	98,0	34,0
91	0	78,1	89,7	15	70,0	76,0	33,5
89	$m = 54$			$p = 26,5$			33,2

POINTÉS.

Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.	
Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.
	46,1	22,9			48,1	21,0			46,9
	46,9	22,1			49,0	22,4			47,0
5,3			63,0	6,2			65,0	4,1	
6,0			63,6	7,3			64,0	5,0	
	48,3	22,9			50,0	22,6			48,0
	47,7	22,7			50,0	23,1			47,1

$\theta = 15°,104$. Équation brute : $I_2 - A = +0^{\mu},54$. Corr. de mise au point ... $\gamma = -0^{\mu},40$. $\delta = +0^{\mu},09$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

15 Octobre 1881. **XLIII.** Observateur : M. G. TRESCA.

	Heure.	Th. N° 1897.	Th. N° 1895.
TEMPÉRATURES...	5h10m s.	15°,27	15°,25
	5h25m	15°,275	15°,275

OPÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

Mètre I_2.	Mètre des Archives.			Mètre des Archives.			Mètre I_2.
Bouton du mier. G.	Bouton du mier. D.	pointés fente à gauche.	pointés fente à droite.	Bouton de la table G.	pointés fente à gauche.	pointés fente à droite.	Bouton de la table G.
85	100	50,0	40,0	35	68,0	62,8	33,0
88	75	50,0	47,0	30	34,0	31,5	32,5
86	50	61,0	62,0	25	10,5	11,0	32,5
88	25	70,0	75,0	20	89,0	96,0	33,0
85	0	72,0	81,5	15	68,0	75,0	33,0
86	$m = 56$			$p = 25,9$			32,8

POINTÉS.

Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.	
Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.
	57,5	1,2			57,0	2,9			58,9
	58,0	1,2			57,8	3,9			59,0
18,0			42,0	17,2			44,2	17,0	
18,0			42,7	17,9			44,0	18,0	
	57,9	2,2			58,0	3,8			58,9
	58,9	2,0			57,0	3,8			58,2

$\theta = 14°,967$. Équation brute : $I_2 - A = +0^{\mu},35$. Corr. de mise au point... $\gamma = +0^{\mu},75$. $\delta = +0^{\mu},04$.

16 Octobre 1881. **XLIV.** Observateur : M. G. TRESCA.

	Heure.	Th. N° 1897.	Th. N° 1895.
TEMPÉRATURES...	10h17m m.	15°,205	15°,195
	10h37m	15°,205	15°,195

OPÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

Mètre I_2.	Mètre des Archives.			Mètre des Archives.			Mètre I_2.
Bouton du mier. G.	Bouton du mier. D.	pointés fente à gauche.	pointés fente à droite.	Bouton de la table G.	pointés fente à gauche.	pointés fente à droite.	Bouton de la table D.
85	100	46,2	36,0	35	67,0	62,0	33,0
90	75	51,0	44,5	30	35,7	32,0	32,0
92	50	59,5	60,0	25	11,5	12,1	33,0
84	25	66,0	72,0	20	91,2	95,0	33,0
90	0	69,0	79,0	15	68,0	77,0	33,0
88	$m = 53$			$p = 25,6$			32,8

POINTÉS.

Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.	
Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.
6,5			59,0	4,2			58,0	7,0	
6,0			58,6	4,8			57,9	6,9	
	44,0	18,9			43,0	17,0			45,2
	44,8	18,9			43,3	17,2			45,0
6,0			58,7	6,0			58,2	7,0	
5,1			58,0	5,0			57,4	7,0	

$\theta = 14°,900$. Équation brute : $I_2 - A = -0^{\mu},61$. Corr. de mise au point... $\gamma = -0^{\mu},25$. $\delta = -0^{\mu},52$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

17 Octobre 1881. **XLV.** Observateur : M. R. Benoît.

	Heure.	Th. N° 1897.	Th. N° 1893.
Températures...	$9^h 39^m$ m.	15°,085	15°,075
	$9^h 43^m$	15°,095	15°,080

Opérations préliminaires.

Mètre I_2.	Mètre des Archives.			Mètre des Archives.			Mètre I_2.
Bouton du micr. G.	Bouton du micr. D.	pointés : fente à gauche.	pointés : fente à droite.	Bouton de la table G.	pointés : fente à gauche.	pointés : fente à droite.	Bouton de la table D.
86	100	47,1	37,9	35	62,9	56,1	33,0
85	75	51,8	47,0	30	31,1	29,0	33,0
85	50	58,8	59,6	25	6,8	7,0	33,0
90	25	66,1	70,0	20	88,0	92,6	33,5
89	0	71,2	82,9	15	66,5	75,8	33,5
87	$m = 54$			$p = 23,7$			33,2

Pointés.

Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.	
micr. G.	micr. D.	micr. G.	micr. D.	micr. G.	micr. D.	micr. G.	micr. D.	micr. G.	micr. D.
111,5			40,8	112,5			44,5	113,0	
111,1			41,6	112,7			45,0	113,2	
	55,0	101,0			54,9	103,6			54,9
	56,0	99,7			56,0	103,7			55,5
110,8			42,1	112,9			45,0	112,4	
111,0			42,9	113,0			45,0	113,1	

$\theta = 14°,784$. Équation brute : $I_2 - A = -0^\mu,43$. Corr. de mise au point... $\gamma = +0^\mu,56$. $\delta = -0^\mu,72$.

17 Octobre 1881. **XLVI.** Observateur : M. G. Tresca.

	Heure.	Th. N° 1897.	Th. N° 1893.
Températures...	$9^h 55^m$ s.	15°,07	15°,055
	$10^h 14^m$	15°,08	15°,065

Opérations préliminaires.

Mètre I_2.	Mètre des Archives.			Mètre des Archives.			Mètre I_2.
Bouton du micr. G.	Bouton du micr. D.	pointés : fente à gauche.	pointés : fente à droite.	Bouton de la table G.	pointés : fente à gauche.	pointés : fente à droite.	Bouton de la table D.
86	100	38,0	26,2	35	63,0	57,5	33,0
82	75	39,4	34,4	30	29,5	27,0	33,0
88	50	49,0	50,0	25	10,0	11,0	33,0
86	25	57,0	63,0	20	86,1	92,0	32,0
85	0	59,0	70,0	15	66,0	75,0	32,5
85	$m = 55$			$p = 26,0$			32,7

Pointés.

Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.	
micr. G.	micr. D.	micr. G.	micr. D.	micr. G.	micr. D.	micr. G.	micr. D.	micr. G.	micr. D.
	57,9	95,7			58,3	97,0			60,2
	57,3	96,0			58,7	98,1			61,0
113,9			42,1	113,1			45,0	114,2	
113,0			42,0	112,2			44,0	115,0	
	58,1	97,0			58,5	98,2			61,0
	58,1	96,4			58,0	99,0			60,8

$\theta = 14°,767$. Équation brute : $I_2 - A = +0^\mu,34$. Corr. de mise au point... $\gamma = -0^\mu,66$. $\delta = -0^\mu,34$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

OBSERVATIONS.

18 Octobre 1881. **XLVII.** Observateur : M. G. Tresca.

	Heure.	Th. N° 1897.	Th. N° 4895.
TEMPÉRATURES...	9h30m m.	15°,00	15°,00
	9h48m	15°,05	15°,00

OPÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

Mètre I_2. — Bouton du mier. G.	Mètre des Archives. Bouton du mier. D.	Mètre des Archives. Pointés fente à gauche.	Mètre des Archives. Pointés fente à droite.	Mètre des Archives. Bouton de la table G.	Mètre des Archives. Pointés fente à gauche.	Mètre des Archives. Pointés fente à droite.	Mètre I_2. — Bouton de la table D.
88	100	45,0	31,0	35	60,2	56,0	33,0
88	75	45,0	39,0	30	26,2	23,0	33,0
88	50	55,0	56,0	25	2,0	3,0	32,8
86	25	62,0	68,2	20	81,8	85,0	33,0
87	0	66,0	76,2	15	57,0	67,0	33,0
87	$m = 54$			$p = 26,0$			33,0

POINTÉS.

Mètre I_2. Mier. G.	Mètre I_2. Mier. D.	Mètre des Archives. Mier. G.	Mètre des Archives. Mier. D.	Mètre I_2. Mier. G.	Mètre I_2. Mier. D.	Mètre des Archives. Mier. G.	Mètre des Archives. Mier. D.	Mètre I_2. Mier. G.	Mètre I_2. Mier. D.
	42,0	112,2			40,2	112,0			40,0
	42,0	111,4			41,0	111,8			40,2
97,0			57,0	95,5			57,2	94,0	
96,3			58,0	96,5			56,9	94,2	
	42,0	111,0			42,6	111,0			40,0
	42,0	112,1			42,3	111,0			40,0

$\theta = 14°,712$. Équation brute : $I_2 - A = +0^{\mu},12$. Corr. de mise au point... $\gamma = -0^{\mu},12$. $\delta = -0^{\mu},41$.

19 Octobre 1881. **XLVIII.** Observateur : M. R. Benoit.

	Heure.	Th. N° 1897.	Th. N° 4895.
TEMPÉRATURES...	9h18m m.	14°,77	14°,765
	9h37m	14°,785	14°,765

OPÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

Mètre I_2. — Bouton du mier. G.	Mètre des Archives. Bouton du mier. D.	Mètre des Archives. Pointés fente à gauche.	Mètre des Archives. Pointés fente à droite.	Mètre des Archives. Bouton de la table G.	Mètre des Archives. Pointés fente à gauche.	Mètre des Archives. Pointés fente à droite.	Mètre I_2. — Bouton de la table D.
81	100	51,8	40,9	35	65,0	60,0	34,0
90	75	53,1	49,0	30	31,0	30,0	32,3
83	50	61,6	63,9	25	5,0	7,5	33,0
85	25	68,0	74,1	20	85,9	91,7	32,5
84	0	71,0	82,9	15	64,1	72,9	33,0
85	$m = 58$			$p = 28,0$			33,0

POINTÉS.

Mètre I_2. Mier. G.	Mètre I_2. Mier. D.	Mètre des Archives. Mier. G.	Mètre des Archives. Mier. D.	Mètre I_2. Mier. G.	Mètre I_2. Mier. D.	Mètre des Archives. Mier. G.	Mètre des Archives. Mier. D.	Mètre I_2. Mier. G.	Mètre I_2. Mier. D.
	36,7	122,0			38,3	123,5			40,2
	36,6	122,0			38,4	123,0			40,5
96,3			58,3	96,2			59,5	100,0	
96,9			57,9	97,0			60,0	99,0	
	38,0	120,9			38,0	122,0			41,1
	38,1	121,3			38,7	122,8			41,3

$\theta = 14°,471$. Équation brute : $I_2 - A = +0^{\mu},04$. Corr. de mise au point... $\gamma = +0^{\mu},51$. $\delta = -0^{\mu},17$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

6 Février 1882. **XLIX.** Observateur : M. G. Tresca.

	Heure.	Th. N° 3897.	Th. N° 3895.
TEMPÉRATURES...	3h45m s.	5°,10	5°,38
	4h35m	5°,79	5°,71

OPÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

Mètre I_2.	Mètre des Archives.			Mètre des Archives.			Mètre I_2.
Bouton du micr. G.	Bouton du micr. D.	pointés fente à gauche.	pointés fente à droite.	Bouton de la table G.	pointés fente à gauche.	pointés fente à droite.	Bouton de la table D.
63	100	50,0	72,0	40	111,0	93,0	34,0
62	75	50,0	51,0	35	63,0	56,0	34,0
64	50	62,0	66,0	30	20,0	18,0	33,0
58	25	69,0	80,0	25	89,0	96,0	33,0
64	0	72,0	88,0	20	69,0	82,0	33,5
63	$m = 75$			$p = 28,8$			33,5

POINTÉS.

Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.	
Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.
86,0			62,0	82,2			60,5	84,2	
87,2			62,2	86,0			62,0	86,0	
	44,0	111,0			43,0	111,9			45,0
	44,5	111,6			43,0	112,0			45,8
87,2			63,0	87,0			61,5	87,0	
86,9			62,2	85,2			61,0	88,0	

$0 = 5°,270$. Équation brute : $I_2 - A = +3^{\mu},17$. Corr. de mise au point ... $\begin{cases} \gamma = -0^{\mu},64. \\ \delta = -0^{\mu},29. \end{cases}$

8 Février 1882. **L.** Observateur : M. G. Tresca.

	Heure.	Th. N° 3897.	Th. N° 3895.
TEMPÉRATURES...	11h17m m.	4°,42	4°,35
	12h	4°,69	4°,55

OPÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

Mètre I_2.	Mètre des Archives.			Mètre des Archives.			Mètre I_2.
Bouton du micr. G.	Bouton du micr. D.	pointés fente à gauche.	pointés fente à droite.	Bouton de la table G.	pointés fente à gauche.	pointés fente à droite.	Bouton de la table D.
63	100	73,0	66,0	40	26,0	8,0	33,0
67	75	76,5	76,0	35	68,0	57,0	33,0
67	50	88,0	92,5	30	25,0	22,0	33,0
60	25	95,0	107,0	25	96,0	101,0	33,0
70	0	98,0	113,0	20	70,0	83,0	33,0
66	$m = 75$			$p = 28,2$			33,0

POINTÉS.

Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.	
Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.
	85,0	83,0			85,0	87,2			86,2
	85,8	82,6			84,9	88,2			86,2
112,2			68,9	111,2			73,2	114,2	
111,8			68,0	111,6			74,0	113,7	
	85,0	83,0			86,2	89,0			86,7
	85,2	83,0			86,3	88,0			87,0

$0 = 4°,202$. Équation brute : $I_2 - A = +4^{\mu},59$. Corr. de mise au point ... $\begin{cases} \gamma = -0^{\mu},07. \\ \delta = -0^{\mu},29. \end{cases}$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

9 Février 1882. **LI.** Observateur : M. G. TRESCA.

	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
TEMPÉRATURES...	11h 40m m.	5°,08	5°,04
	12h	5°,37	5°,27

OPÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

Mètre I_2. — Bouton du micr. G.	Mètre des Archives. Bouton du micr. D.	Mètre des Archives. Pointés fente à gauche.	Mètre des Archives. Pointés fente à droite.	Mètre des Archives. Bouton de la table G.	Mètre des Archives. Pointés fente à gauche.	Mètre des Archives. Pointés fente à droite.	Mètre I_2. — Bouton de la table D.
55	100	92,3	84,3	40	9,0	0,0	33,2
60	75	94,8	91,0	35	68,0	59,0	33,0
62	50	2,0	9,0	30	25,0	22,5	32,0
58	25	12,0	24,0	25	94,0	106,0	31,5
57	0	22,0	35,2	20	67,0	82,5	31,3
58	$m = 72$			$p = 31,0$			32,2

POINTÉS.

Mètre I_2. Micr. G.	Mètre I_2. Micr. D.	Mètre des Archives. Micr. G.	Mètre des Archives. Micr. D.	Mètre I_2. Micr. G.	Mètre I_2. Micr. D.	Mètre des Archives. Micr. G.	Mètre des Archives. Micr. D.	Mètre I_2. Micr. G.	Mètre I_2. Micr. D.
83,0			103,0	84,0			100,0	80,0	
82,0			102,5	84,0			101,0	81,0	
	76,0	123,0			78,0	122,2			73,5
	75,0	124,0			78,2	123,2			74,5
84,2			103,0	84,0			102,5	83,0	
83,0			103,5	86,0			101,0	84,0	

$\theta = 4°,890$. Équation brute : $I_2 - A = -5^{\mu},89$. Corr. de mise au point... $\gamma = -0^{\mu},81$. $\delta = +0^{\mu},29$.

---

9 Février 1882. **LII.** Observateur : M. G. TRESCA.

	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
TEMPÉRATURES...	5h 0m s.	4°,95	4°,87
	5h 18m	5°,22	5°,10

OPÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

Mètre I_2. — Bouton du micr. G.	Mètre des Archives. Bouton du micr. D.	Mètre des Archives. Pointés fente à gauche.	Mètre des Archives. Pointés fente à droite.	Mètre des Archives. Bouton de la table G.	Mètre des Archives. Pointés fente à gauche.	Mètre des Archives. Pointés fente à droite.	Mètre I_2. — Bouton de la table D.
On a conservé les réglages de l'observation précédente.							
58	$m = 72$			$p = 31,0$			32,2

POINTÉS.

Mètre des Archives. Micr. G.	Mètre des Archives. Micr. D.	Mètre I_2. Micr. G.	Mètre I_2. Micr. D.	Mètre des Archives. Micr. G.	Mètre des Archives. Micr. D.	Mètre I_2. Micr. G.	Mètre I_2. Micr. D.	Mètre des Archives. Micr. G.	Mètre des Archives. Micr. D.
	108,2	71,8			106,2	76,5			106,0
	108,0	71,8			107,0	76,9			106,0
117,0			77,0	116,0			79,2	116,9	
115,0			77,2	115,9			80,0	115,0	
	107,2	73,0			107,5	77,5			106,0
	107,0	76,0			106,5	78,0			106,0

$\theta = 4°,735$. Équation brute : $I_2 - A = +4^{\mu},99$. Corr. de mise au point ... $\gamma = -0^{\mu},81$. $\delta = +0^{\mu},29$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

10 Février 1882. **LIII.** Observateur : M. R. Benoît.

	Heure.	Th. N° 4897.	Th. de 4895.
Températures...	9^h40^m m.	4°,17	4°,50
	9^h55^m	4°,39	4°,55

OPÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

Mètre I_2.	Mètre des Archives.			Mètre des Archives.			Mètre I_2.
Bouton du micr. G.	Bouton du micr. D.	Pointés fente à gauche.	Pointés fente à droite.	Bouton de la table G.	Pointés fente à gauche.	Pointés fente à droite.	Bouton de la table D.
63	100	8,6	3,2	40	102,7	85,5	32,2
63	75	11,8	11,2	35	57,0	49,1	32,3
64	50	25,0	30,7	30	10,9	12,0	32,6
70	25	31,0	46,0	25	84,0	93,0	33,2
60	0	35,0	54,0	20	58,0	75,0	33,0
64	$m = 72$			$p = 30,6$			32,7

POINTÉS.

Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.	
Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.
114,1			78,0	113,7			78,0	113,1	
113,0			77,0	113,0			77,1	113,1	
	114,9	67,0			114,0	66,2			116,0
	114,5	67,0			114,0	66,1			115,6
113,0			79,7	113,9			77,7	114,9	
113,9			77,9	113,9			76,9	113,8	

$0 = 4°,227$. Équation brute : $I_2 - A = +1^\mu,10$. Corr. de mise au point... $\gamma = -0^\mu,15$. $\delta = -0^\mu,09$.

16 Février 1882. **LIV.** Observateur : M. G. Tresca.

	Heure.	Th. N° 1897.	Th. N° 1895.
Températures...	5^h32^m s.	11°,10	11°,36
	5^h50^m	11°,13	11°,39

OPÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

Mètre I_2.	Mètre des Archives.			Mètre des Archives.			Mètre I_2.
Bouton du micr. G.	Bouton du micr. D.	Pointés fente à gauche.	Pointés fente à droite.	Bouton de la table G.	Pointés fente à gauche.	Pointés fente à droite.	Bouton de la table D.
48	100	52,2	44,0	40	11,0	0,0	33,3
53	75	56,0	52,5	35	61,0	53,0	33,2
54	50	67,0	67,0	30	19,5	19,0	33,0
54	25	76,0	84,0	25	90,0	99,0	33,0
56	0	79,0	93,0	20	73,0	84,0	33,9
53	$m = 50$			$p = 29,8$			33,3

POINTÉS.

Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.	
Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.	Micr. G.	Micr. D.
	72,0	88,0			72,0	86,5			73,0
	71,2	88,9			72,2	88,2			72,5
115,0			45,1	116,5			44,2	118,0	
115,0			45,4	117,0			44,0	117,0	
	71,0	90,0			71,2	88,7			72,2
	71,9	89,0			72,1	90,0			72,7

$0 = 11°,095$. Équation brute : $I_2 - A = -0^\mu,57$. Corr. de mise au point... $\gamma = +0^\mu,25$. $\delta = +1^\mu,12$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

18 Février 1882. **LV.** Observateur : M. R. Benoît.

	Heure.	Th. N° 3897.	Th. N° 38.8.
Températures...	9h 20m m.	10°,35	10°,33
	9h 37m	10°,41	10°,375

OPÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

Mètre I2. — Bouton du micr. G.	Mètre des Archives. — Bouton du micr. D.	Mètre des Archives. — Pointes — fente à gauche.	Mètre des Archives. — Pointes — fente à droite.	Mètre des Archives. — Bouton de la table G.	Mètre des Archives. — Pointés — fente à gauche.	Mètre des Archives. — Pointés — fente à droite.	Mètre I2. — Bouton de la table D.
52	100	92,6	84,1	40	21,2	7,4	32,9
57	75	97,0	91,0	35	75,0	65,2	32,0
60	50	8,5	13,5	30	31,8	30,0	32,9
60	25	15,1	26,5	25	2,9	12,0	33,0
62	0	22,2	37,9	20	78,1	94,0	33,3
58	$m = 65$			$p = 29,2$			32,8

POINTES.

Mètre des Archives. — Micr. G.	Mètre des Archives. — Micr. D.	Mètre I2. — Micr. G.	Mètre I2. — Micr. D.	Mètre des Archives. — Micr. G.	Mètre des Archives. — Micr. D.	Mètre I2. — Micr. G.	Mètre I2. — Micr. D.	Mètre des Archives. — Micr. G.	Mètre des Archives. — Micr. D.
126,8			37,0	128,5			36,1	128,9	
127,0			37,2	127,5			36,0	129,7	
	99,1	63,0			98,9	62,1			98,1
	98,1	63,6			97,6	62,0			99,1
127,0			39,0	128,1			38,0	128,4	
127,0			38,5	128,7			37,5	128,9	

$\theta = 10°,066$. Équation brute : $I_2 - A = -2^{\mu},39$. Corr. de mise au point... $\gamma = +0^{\mu},32$. $\delta = +0^{\mu},09$.

18 Février 1882. **LVI.** Observateur : M. G. Tresca.

	Heure.	Th. N° 3897.	Th. N° 3895.
Températures...	5h 35m s.	10°,52	10°,50
	5h 50m	10°,58	10°,535

OPÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

Mètre I2. — Bouton du micr. G.	Mètre des Archives. — Bouton du micr. D.	Mètre des Archives. — Pointes — fente à gauche.	Mètre des Archives. — Pointes — fente à droite.	Mètre des Archives. — Bouton de la table G.	Mètre des Archives. — Pointés — fente à gauche.	Mètre des Archives. — Pointés — fente à droite.	Mètre I2. — Bouton de la table D.
57	100	92,0	82,5	40	46,0	28,0	33,0
57	75	95,2	95,0	35	86,0	77,5	32,2
60	50	9,2	12,0	30	47,2	45,0	32,8
63	25	14,5	25,0	25	15,0	22,0	33,0
58	0	22,0	33,0	20	93,0	108,0	33,0
59	$m = 64$			$p = 29,0$			32,7

POINTES.

Mètre I2. — Micr. G.	Mètre I2. — Micr. D.	Mètre des Archives. — Micr. G.	Mètre des Archives. — Micr. D.	Mètre I2. — Micr. G.	Mètre I2. — Micr. D.	Mètre des Archives. — Micr. G.	Mètre des Archives. — Micr. D.	Mètre I2. — Micr. G.	Mètre I2. — Micr. D.
80,0			100,0	81,0			99,2	85,2	
80,0			99,0	81,9			99,2	85,5	
	49,0	132,3			53,0	134,0			58,0
	50,5	132,2			53,5	133,2			58,2
80,5			100,0	83,5			99,8	87,5	
80,2			100,8	83,5			99,0	88,0	

$\theta = 10°,234$. Équation brute : $I_2 - A = +2^{\mu},04$. Corr. de mise au point... $\gamma = +0^{\mu},18$. $\delta = +0^{\mu},10$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

20 Février 1882. **LVII.** Observateur : M. R. BENOIT.

	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
TEMPÉRATURES...	9h 19m m.	10°,00	10°,00
	9h 37m	10°,06	10°,03

OPÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

Mètre I_2.	Mètre des Archives.			Mètre des Archives.			Mètre I_2.
Bouton du mier. G.	Bouton du mier. D.	pointés fente à gauche.	pointés fente à droite.	Bouton de la table G.	pointés fente à gauche.	pointés fente à droite.	Bouton de la table D.
62	100	94,1	87,7	40	28,0	11,2	32,6
61	75	97,1	95,5	35	82,5	74,0	33,2
52	50	9,1	13,4	30	42,6	39,9	33,7
63	25	16,0	27,0	25	12,1	21,9	33,1
60	0	20,0	36,1	20	89,8	101,5	32,1
60	$m = 69$			$p = 29,0$			32,9

POINTÉS.

Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.	
Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.
	98,0	41,0			96,1	38,6			93,9
	96,3	42,0			95,1	38,0			94,8
37,0			108,9	35,0			106,2	34,0	
36,0			109,7	35,0			105,9	34,1	
	97,0	42,0			95,1	39,0			96,0
	98,0	42,9			95,9	40,0			95,1

$0 = 9°,720$. Équation brute : $I_2 - A = + 2^{\mu},38$. Corr. de mise au point ... $\gamma = + 0^{\mu},65$. $\delta = - 0^{\mu},15$.

21 Février 1882. **LVIII.** Observateur : M. G. TRESCA.

	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
TEMPÉRATURES...	10h 20m m.	10°,06	10°,03
	10h 35m	10°,115	10°,075

OPÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

Mètre I_2.	Mètre des Archives.			Mètre des Archives.			Mètre I_2.
Bouton du mier. G.	Bouton du mier. D.	pointés fente à gauche.	pointés fente à droite.	Bouton de la table G.	pointés fente à gauche.	pointés fente à droite.	Bouton de la table D.
59	100	87,5	79,0	40	54,0	35,0	33,0
62	75	84,0	80,0	35	93,0	82,5	33,2
60	50	96,0	99,0	30	47,5	49,0	33,2
62	25	6,0	15,0	25	23,5	29,5	33,2
61	0	9,0	21,0	20	98,0	112,0	33,8
61	$m = 62$			$p = 30,0$			33,3

POINTÉS.

Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.	
Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.	Mier. G.	Mier. D.
	95,7	56,0			94,1	59,2			93,0
	95,1	56,8			94,1	59,0			92,6
47,8			111,0	46,9			115,2	45,9	
48,1			111,2	46,2			114,9	46,0	
	95,4	57,-			94,8	61,0			93,5
	95,0	56,3			94,5	60,0			93,1

$0 = 9°,770$. Équation brute : $I_2 - A = + 2^{\mu},51$. Corr. de mise au point ... $\gamma = - 0^{\mu},53$. $\delta = - 0^{\mu},30$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

22 Février 1882. **LIX.** Observateur : M. G. TRESCA.

	Heure.	Th. N° 4897.	Th. N° 4895.
TEMPÉRATURES...	12h 0m m.	10°,00	10°,08
	12h17	10°,10	10°,12

OPÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

Mètre I_2.	Mètre des Archives.			Mètre des Archives.			Mètre I_2.
Bouton du micr. G.	Bouton du micr. D.	pointés fente à gauche.	pointés fente à droite.	Bouton de la table G.	pointés fente à gauche.	pointés fente à droite.	Bouton de la table D.
65	100	85,5	72,0	40	41,0	27,5	33,9
62	75	87,8	85,5	35	95,5	87,0	33,1
61	50	99,0	101,2	30	54,5	54,0	33,5
57	25	8,5	17,5	25	23,5	33,0	33,2
56	0	12,5	27,0	20	3,0	15,0	33,2
60	$m = 63$			$p = 30,0$			33,4

POINTÉS.

Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.		Mètre I_2.		Mètre des Archives.	
micr. G.	micr. D.	micr. G.	micr. D.	micr. G.	micr. D.	micr. G.	micr. D.	micr. G.	micr. D.
51,2			100,0	52,0			101,7	52,2	
51,2			100,1	52,2			101,8	52,0	
	89,0	58,0			89,9	59,0			91,0
	90,0	57,2			89,0	59,0			90,0
51,6			102,1	51,0			103,0	53,0	
51,0			102,0	51,2			104,0	52,0	

$\theta = 9°,775$. Équation brute : $I_2 - A = +1^{\mu},99$. Corr. de mise au point... $\gamma = +0^{\mu},08$. $\delta = +0^{\mu},02$.

19851 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

VORTRÄGE UND REDEN.

Die Theorie der Lichtwellen und ihr Einfluss auf die moderne Physik.[1]

Von A. Cornu.[2]

Unser Zeitalter zeichnet sich vor den früheren durch seine erstaunliche Beherrschung der Naturgewalten aus; der Mensch, an sich ein so schwaches, hülfloses Wesen, hat es durch sein Genie verstanden, sich ausserordentliche Macht anzueignen und seinem Dienste Kräfte, bald zart, bald ungestüm, unterthan zu machen, von deren Dasein seine Vorfahren nicht einmal eine Ahnung hatten.

Diese Steigerung der materiellen Macht des Menschen in unserer Zeit ist allein dem emsigen und gründlichen Studium der Naturerscheinungen zu verdanken, der genauen Erforschung ihrer Gesetze und dem zweckmässigen Zusammenschalten ihrer Wirkungen. -- Ganz besonders lehrreich hierfür ist, das Missverhältnis zwischen der ursprünglich beobachteten Erscheinung und den grossartigen Wirkungen zu betrachten, welche die Technik daraus hat entspringen lassen: Jene gewaltigen Maschinen der Elektricität oder des Dampfes leiten ihren Ursprung nicht vom Blitz und nicht von den Vulkanen her; sie sind entstanden aus kaum bemerkbaren Erscheinungen, die dem Auge der Menge immer verborgen geblieben wären, wenn nicht scharfsinnige Beobachter sie zu erkennen und zu würdigen verstanden hätten. Dieser bescheidene Ursprung der meisten grossen Entdeckungen, mit denen die Menschheit beglückt wurde, zeigt deutlich, dass der wissenschaftliche Geist heutzutage der grosse Lebensrückhalt der Nationen ist, und dass das Geheimnis der wachsenden Macht der modernen Welt im Fortschritte der Wissenschaft zu suchen ist. Von diesem Gesichtspunkte aus haben die Fragen ein allgemeines Interesse: Bei welcher Gelegenheit hat sich der Geschmack an der Naturphilosophie, die den Philosophen des Altertums so teuer, dann während Jahrhunderten begraben war, wieder erneuert und entwickelt? Welches waren die Phasen ihrer Entwicklung? Wie entstanden die neuen Begriffe, die unsere Anschauungen von dem Wirken der Naturkräfte so von Grund aus änderten? Welches ist endlich der fruchtbringende Weg, der uns ganz unbemerkt zu so bewunderungswerten Verallgemeinerungen geführt hat, wie sie mit ihrem grossartigen Entwurfe von den Begründern der modernen Physik vorausgeahnt wurden? -- Fragen solcher Art will ich mir gestellt denken und als Physiker zu beantworten suchen: ein etwas abstrakter, ich möchte sagen etwas ernster Gegenstand; aber kein anderer schien mir würdiger, Ihre Aufmerksamkeit heute zu fesseln, an dem Feste, welches die Universität Cambridge feiert, um das 50jährige Professorenjubiläum von Sir Gabriel Stokes zu begehen, eines Mannes, der auf seiner schönen Laufbahn mit seiner Meisterhand gerade solche Probleme bearbeitet hat, die für die Förderung der Naturphilosophie von grösstem Erfolge waren. Dieses Thema ist umsomehr hier am Platze, als sich unter den Namen der grössten Geister der Wissenschaft, die wir zu erwähnen haben, diejenigen befinden, welche die Universität Cambridge am meisten verehrt, ihre Professoren oder ihre Schüler; und die Erinnerung des Ruhmes, der sich durch die Jahrhunderte bis zu uns fortpflanzte, erhöht den Glanz dieses schönen Festes.

I.

Lassen Sie uns also durch einen raschen Rückblick auf die Wiedergeburt der Wissenschaft den geheimnisvollen aber mächtigen Einfluss zu erkennen suchen, welcher der treibende Geist der modernen Physik gewesen ist.

Ich bin zu dem Glauben geneigt, dass das Studium des Lichtes durch die Anziehung, die es auf die grössten Geister ausgeübt hat, eine der wirksamsten Ursachen für die Rückkehr der Ideen zur Naturphilosophie gewesen ist, und

1) „The Rede lecture", gehalten im senate house der Universität Cambridge bei der Jubiläumsfeier des Herrn G. Stokes, am 1. Juni 1899.

2) Veranlasst durch das Interesse, welches ein Augenblick der Rückschau auf die Fortschritte und den Einfluss der Optik beansprucht, stellt dieser Vortrag die Ergebnisse einer Vertiefung in Newtons Optik dar. Man wird sehen, dass die Gedanken des grossen Physikers ausserordentlich entstellt worden sind durch eine ausgedehnte Legendenbildung in den elementaren Lehrbüchern, in denen die Emissionstheorie behandelt worden ist. Um die Theorie der Anwandlungen klarer darzustellen, haben sich die Kommentatoren das Lichtmolekül mit materiellen Eigenschaften vorgestellt, unter der Form eines rotierenden Pfeiles, der sich abwechselnd durch seine Spitze oder durch sein Ende bethätigte. Diese Art der Darstellung hat zu der Meinung viel beigetragen, als sei die ganze Newtonsche Emissionstheorie in diesem etwas kindlichen Bilde umfasst. Das ist sie aber keineswegs. Nirgendwo in seinem Werke giebt Newton eine mechanische Veranschaulichung des Lichtmolekuls: er beschränkt sich vielmehr darauf, die Thatsachen zu beschreiben, und fasst sie dann in einem empirischen Satze zusammen, ohne hypothetische Auseinandersetzungen zu versuchen. Er verteidigt sich sogar gegen den Vorwurf, dass er keinerlei Theorie gebe, obgleich ihm die Annahme von Wellen, die im Äther erregt würden, sehr wahrscheinlich erscheine. Man kann also den allgemeinen Eindruck der Lektüre der „Optica" und insbesondere der im dritten Buche behandelten „Questiones" dahin zusammenfassen, dass Newton keineswegs der Gegner des Descartesschen Systemes war, als der er gewöhnlich gilt, sondern dass er den Grundsätzen dieses Systemes im Gegenteil sehr gewogen war; Hingerissen von den Hülfsmitteln, welche die Undulationstheorie für die Erklärung der Lichterscheinungen bot, würde er sie sich ohne Zweifel angeeignet haben, wenn der schwere, auf die geradlinige Ausbreitung des Lichtes bezügliche Einwand ihn nicht davon abgehalten hätte, der ja erst in unseren Tagen durch Fresnel beseitigt worden ist.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

dass die Optik auf die Entwicklung der Wissenschaft einen Einfluss gehabt hat, den man nicht gross genug veranschlagen kann.

Dieser schon seit der Schöpfung der Experimentalphilosophie durch Galilei bemerkbare Einfluss ist in solchem Masse gewachsen, dass man heute eine ausserordentlich grosse Gruppe physikalischer Kräfte unterscheidet, auf welche die Prinzipien der Lichtwellentheorie Anwendung finden. Vielleicht wird dieser Einfluss verständlich, wenn man bedenkt, dass das Licht der Weg ist, auf dem unser Geist vorwiegend Kenntnis von der Aussenwelt erhält. — Es ist ja in der That der Gesichtssinn, durch den uns die umgebenden Dinge am raschesten und vollständigsten bemerkbar werden; unsere anderen Sinne, das Gehör, das Gefühl, tragen auch ihr Teil zur Belehrung bei, aber das Gesicht giebt uns eine Fülle von Merkmalen gleichzeitig, Form, Glanz, Farbe, wie sie keiner der anderen Sinne geben kann.

Es ist daher nicht merkwürdig, dass das Licht, als das Band, welches uns beständig mit der Aussenwelt in Fühlung hält, immer wieder durch alle die Hülfsmittel seiner feinen Konstitution geholfen hat, die Beobachtung der Naturerscheinungen zu verfeinern. Daher hat auch jede Entdeckung einer neuen Eigenschaft des Lichtes eine direkte Rückwirkung auf alle anderen Zweige des menschlichen Wissens gehabt; oft hat dieselbe sogar das Entstehen einer neuen Wissenschaft veranlasst, indem sie neue Forschungsmittel von ungeahntem Bereiche und unerwarteter Feinheit an die Hand gab.

Die Optik ist eine wahrhaft moderne Wissenschaft; die alten Philosophen haben noch keine Ahnung von der Vielgestaltigkeit dessen gehabt, was man gewöhnlich Licht nennt: sie warfen in demselben Worte das zusammen, was dem Menschen selbst eigentümlich ist, und das, was der Aussenwelt angehört. Sie hatten indessen eine der charakteristischsten Eigentümlichkeiten der Fäden entdeckt, die zwischen der Lichtquelle und dem Auge gespannt sind, welches den Lichteindruck empfängt: Das Licht bewegt sich in geraden Linien. Die alltägliche Erfahrung hatte ihnen diesen Grundsatz offenbart, indem sie die glänzenden Spuren beobachteten, welche die Sonne an dem Himmel zeichnet, wenn sie Nebelwolken durchbricht, oder in einem dunklen Raume, in den sie durch eine Öffnung hineindringt. Hieraus war zweierlei empirische Erkenntnis gewonnen worden: Die Definition der Lichtstrahlen und diejenige der geraden Linie; die erstere wurde die Grundlage der Optik, die andere die der Geometrie.

Es ist fast nichts von den Schriften der Alten über Optik erhalten geblieben; doch wissen wir, dass sie die Reflektion der Lichtstrahlen an glatten Flächen und die Erklärung des durch die Spiegelung hervorgebrachten Bildes kannten.

Man muss lange Jahrhunderte, bis zur Wiedergeburt der Wissenschaften, durchgehen, bis man einem neuen Fortschritt in der Optik begegnet; aber dieser ist ein beträchtlicher und kündet die neue Ära an: es ist die Erfindung des Fernrohrs.

Die neue Ära fängt mit Galilei, Boyle und Descartes an, den Gründern der experimentellen Philosophie; alle drei widmen ihr Leben der Forschung über die Natur des Lichtes, der Farben und der Kräfte. Galilei legt den Grund der Mechanik und, mit dem Fernrohr, denjenigen der physikalischen Astronomie; Boyle vervollkommnet die Experimentierkunst; und was Descartes betrifft, so umfasst er mit durchdringendem Blick die gesamte Naturphilosophie; er wirft alle die verborgenen Ursachen über den Haufen, die von den Scholastikern eingeführt waren; er stellt das Prinzip auf, dass alle Erscheinungen von den Gesetzen der Mechanik beherrscht werden. In seinem Weltsysteme[1]) spielt das Licht eine vorwiegende Rolle; es entsteht durch Wellenbewegung in der feinen Materie, die nach seiner Meinung den ganzen Weltenraum erfüllt. Diese feine Materie (die dasselbe bedeutet, was wir heute den Äther nennen) ist nach seiner Anschauung aus Partikeln gebildet, die in direkter Berührung mit einander sind; sie bildet zu gleicher Zeit den Träger der Kräfte zwischen den materiellen Körpern, welche in sie gleichsam eingetaucht sind. Man erkennt hierin die berühmten Wirbel des Descartes, die so viel bewundert, dann wieder in den letzten Jahrhunderten verhöhnt wurden, denen aber bedeutende zeitgenössische Mathematiker die Gerechtigkeit wiederfahren liessen, die ihnen gebührte.

Welche Meinung man aber auch von der Strenge der Deduktionen des grossen Philosophen haben mag, man muss über die Kühnheit erstaunt sein, mit welcher er Wechselbeziehungen zwischen den grossen kosmischen Vorgängen lehrt, und über den Scharfsinn, mit dem er Entwicklungen voraussagt, denen sich die jetzigen Generationen mehr und mehr nähern.

Für Descartes sind die Mechanismen der Licht- und der Schwerevorgänge untrennbar. Der Sitz der entsprechenden Erscheinungen ist seine feine Materie, die den Weltraum erfüllt, und ihre Ausbreitung muss durch Wellen erfolgen, die von gewissen Wirkungscentren ausgehen.

II.

Diese Auffassung der Natur des Lichtes stiess mit den herrschenden Ideen an einander;

1) Le Monde de M. Descartes ou le traité de la lumière, Paris 1664.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

sie verursachte lebhafte Opposition. Seit dem Altertum war man gewöhnt, sich die Lichtstrahlen als die Bahnen gewisser, von den Lichtquellen aus fortgeschleuderter Teilchen vorzustellen, deren Stoss auf die Augennerven das Sehen hervorrief, ihr Zurückprallen und ihre Geschwindigkeitsänderung erklärte die Reflektion und die Strahlenbrechung.

Die Cartesianische Theorie hatte jedoch verführerische Gesichtspunkte, die ihr Verteidiger zuführten: Die auf der Oberfläche ruhiger Gewässer erregten Wellen bieten ein so klares Bild der Fortpflanzung einer Bewegung um einen Mittelpunkt der Erschütterung. Gelangen nicht andererseits wieder durch Wellen die Schalleindrücke in unser Ohr? Es ist für den Geist sicherlich ein befriedigendes Gefühl, zu denken, dass unsere beiden genauesten und feinsten Organe, das Auge und das Ohr, ihre Eindrücke durch einen gleichartigen Mechanismus empfangen. Indessen besteht ein wichtiger Unterschied. Der Ton bewegt sich nicht unbedingt in geraden Linien wie das Licht; er umgeht die Hindernisse, die man ihm entgegensetzt, und durchläuft die krummsten Wege fast ohne schwächer zu werden.

Die Physiker teilten sich demnach in zwei Lager: Die einen Anhänger der Ausströmungs-, die anderen Anhänger der Wellentheorie. Während jedes der zwei Systeme sich erhaben über das andere dünkte und es in der That in einigen Punkten auch war, versagte jedes wiederum, wenn man andere Erscheinungen heranzog, um zwischen ihnen zu entscheiden. — Mehrere glückliche Entdeckungen wurden gemacht, die zu Gunsten der Wellentheorie hätten entscheiden müssen, wie man es ein Jahrhundert später erkannte; aber die Wahrheit wird niemals ohne lange Arbeit klar erkannt.

Ein seltsames Kompromiss kam unter dem Schutze eines der berühmtesten Namen zwischen den zwei Systemen zu stande, und der Sieg wurde während eines Jahrhunderts der Ausströmungstheorie zugesprochen; hier die eigentümliche Geschichte davon:

Im Jahre 1661 trat ein junger Schüler voll Eifer und Scharfsinn in das Trinity College in Cambridge ein, Isaac Newton. Er hatte schon in seinem Heimatsorte die Optik von Kepler gelesen. Kaum eingetreten studiert er, indem er gleichzeitig die Vorlesungen über Optik von Barrow hört, mit Eifer die Geometrie von Descartes; er kauft sich von seinen Ersparnissen ein Prisma, um die Farben zu studieren, und in der Zwischenzeit denkt er schon andauernd über die Ursachen der Schwerkraft nach. Acht Jahre später finden ihn seine Lehrer würdig, der Nachfolger Barrows auf dem Lucasian-Lehrstuhl zu werden, und er lehrt nun seinerseits Optik. Der Schüler überragt bald den Lehrer und veröffentlicht eine Hauptentdeckung: Das weisse Licht, welches der Typus des reinen Lichtes zu sein schien, ist nicht homogen; es ist von Lichtstrahlen verschiedener Brechbarkeit gebildet. Und er demonstriert das durch das berühmte Experiment des Sonnenspektrums, bei dem ein weisser Lichtstrahl in eine Reihe von Strahlen zerlegt wird von den Farben des Regenbogens; jede dieser Farben ist einfach, denn das Prisma zerlegt sie nicht weiter. Das ist der Ursprung der Spektralanalyse. Diese Analyse des weissen Lichtes führte Newton dazu, die Färbung dünner Blättchen zu erklären, welche man besonders bei Seifenblasen beobachtet; der fundamentale Versuch mit den sogenannten Newtonschen Ringen ist einer der lehrreichsten der Optik, und die Gesetze, die daraus hervorgehen, sind von bewundernswerter Einfachheit. Er veröffentlichte die Theorie derselben in einer Abhandlung an die Royal Society unter dem Titel: Eine neue Hypothese, das Licht und die Farben betreffend. — Diese Abhandlung rief eine lebhafte Reklamation Hookes hervor. Hooke hatte früher auch die Färbungen dünner Blättchen beobachtet und versucht, sie durch die Wellentheorie zu erklären: er hätte das Verdienst gehabt (welches Newton selbst sogleich anerkannte), an Stelle der fortschreitenden Welle des Descartes eine stehende Welle zu setzen, ein neuer und sehr wichtiger Fortschritt; er hatte sogar die Rolle der zwei reflektierenden Oberflächen der dünnen Blättchen erkannt, ebenso die abwechselnde Wirkung der reflektierten Wellen. Hooke würde demnach der eigentliche Vorläufer der modernen Theorie gewesen sein, wenn er, wie Newton, die klare Wahrnehmung der einfachen Strahlen gehabt hätte, aber seine unsicheren Erörterungen, um die Färbung zu erklären, entziehen seiner Theorie jede anschauliche Bedeutung.

Newton war sehr erregt über diesen Prioritätsanspruch; er bekämpft die Argumente seines Gegners, indem er daran erinnert, dass die Theorie der Wellen unzulässig ist, weil sie keine Rechenschaft von der Existenz der Lichtstrahlen und der Schatten giebt. Er weist es zurück, überhaupt eine Theorie aufgestellt zu haben; er erklärt, dass er weder die Hypothese der Wellen, noch die der Ausströmung zulasse; er sei nur verpflichtet, um die Abhandlung abzukürzen und eine Anschauung zu geben, zu der einen oder anderen Hypothese Zuflucht zu nehmen, als wenn er sie zuliesse.

Und in der That, in der 12. „Propositio" im II. Buche seiner Optik,[1]) welche das enthält,

[1]) Prop. XII. — „Jeder Lichtstrahl kommt bei seinem Durchtritt durch eine brechende Fläche in einen gewissen Zustand der Durchdringlichkeit, der mit dem Vorrücken des Strahles in gleichen Intervallen wiederkehrt und bei jeder

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

was man seitdem die Theorie der „Anwandlungen" nennt, bleibt Newton durchaus auf dem Boden der Thatsachen. Er sagt einfach: „Die Erscheinung der dünnen Blättchen beweist, dass der Lichtstrahl abwechselnd in einer Anwandlung leichter Reflexion oder leichter Durchdringung ist." Er fügt indessen hinzu, wenn man eine Erklärung dieser Wechselverhältnisse wünsche, könne man sie den Schwingungen zuschreiben, die durch den Stoss der Lichtteilchen verursacht würden und als Wellen durch den Äther verbreitet würden.[1]) Kurz, trotz seines Wunsches, auf dem festen Boden der Thatsachen zu bleiben, konnte Newton nicht umhin, eine rationelle Erklärung zu versuchen; er hat zuviel die Schriften von Descartes gelesen, um nicht im Grunde wie Huyghens Anhänger des mechanischen Weltsystems zu sein und um nicht in seinem Innern zu wünschen, in den reinen Wellenbewegungen die Erklärung der schönen Erscheinungen zu finden, die er auf so einfache Gesetze zurückgeführt hatte.

Sein bewundernswertes Buch, die „Principia", trägt die Spuren seines tiefen Nachdenkens über die Ausbreitung der Wellen, denn man findet darin zum erstenmal den mathematischen Ausdruck ihrer Schnelligkeit, ebenso für die longitudinalen Schwingungen der kompressiblen Körper, wie für die transversalen Schwingungen flüssiger Oberflächen.

Aber es ist hauptsächlich das dritte Buch seiner Optik, welches am meisten seine Cartesianischen Neigungen und besonders seine Ratlosigkeit bezeugt. Seine berühmten „Questiones" sind eine so vollständige Aufzählung der Beweise für die Theorie der Lichtwellen, dass wir Thomas Young sie später als Beweis für die schliessliche Bekehrung Newtons zu der Wellentheorie anführen sehen. Newton hätte gewiss diesem heimlichen Hange nachgegeben, wenn die unbeugsame Logik seines Geistes es ihm erlaubt hätte; aber nachdem er alle Hülfsquellen aufgezählt hat, über die die Wellentheorie verfügt, um die innerste Natur des Lichtes zu erklären, hält er, bei den letzten Fragen angekommen, wie von plötzlichen Gewissensbissen ergriffen ein und verwirft sie total. Und das einzige Argument, welches er giebt, ist, dass er keine Möglichkeit sieht, sich nach ihr Rechenschaft von den geradlinigen Lichtstrahlen zu geben.[2])

Von diesem Standpunkte aus betrachtet ist das dritte Buch der Optik nicht mehr nur eine unparteiische Diskussion der entgegengesetzten Systeme; es erscheint vielmehr wie die Schilderung der Leiden eines mächtigen Genies,

---

Wiederkehr den Strahl befähigt, leicht die benachbarte brechende *Fläche zu durchdringen, und andererseits zwischen den Zeiten der Wiederkehr leicht von ihr reflektiert zu werden."*

(Sir Isaac Newton Optics or a Treatise of the Reflections, Refractions, Inflexions and Colours of Light, London 1718, second edition, with additions, S. 253.)

1) l. c. S. 255.

2) Ich gebe hier einen Auszug aus den questiones, welcher die Hinneigung der Newtonschen Anschauungen zur Undulationstheorie und zu den Cartesianischen Ideen beweist:

„Questio XII. — Erregen die Lichtstrahlen nicht dadurch, dass sie auf den Boden des Auges aufschlagen, Schwingungen in der tunica retina? Diese Schwingungen verursachen die Lichtempfindung, indem sie längs der steifen optischen Nervenfasern in das Gehirn fortgepflanzt werden . . . ."

„Questio XIII. — Bilden nicht die verschiedenen Strahlenarten Schwingungen von verschiedener Grösse, die, je nach ihrer Grösse, die Empfindung der verschiedenen Farben erregen in derselben Weise, wie die Luftschwingungen je nach ihrer Grösse die Empfindung der verschiedenen Töne? Und sind es nicht insbesondere die brechbarsten Strahlen, welche die kürzesten Schwingungen erregen, um die Empfindung des äussersten Violett hervorzurufen, während die weniger brechbaren die grösseren erregen, um die Empfindung des äussersten Rot hervorzubringen etc. . . . ."

„Questio XVIII. — Wird nicht die Wärme eines erhitzten Raumes in dem Vakuum durch Schwingungen eines Mittels fortgepflanzt, welches weit feiner ist als die Luft, und welches in dem Vakuum bleibt, auch wenn man die Luft daraus entfernt hat?

Und ist dieses Mittel nicht dasselbe wie dasjenige, durch welches das Licht gebrochen und reflektiert wird, durch dessen Schwingungen das Licht den Körpern Wärme mitteilt und in die Anwandlungen leichter Zurückwerfung und leichter Durchdringung versetzt wird?

Und ist dieses Mittel nicht unendlich (exceedingly) viel seltener und feiner verteilt wie Luft, und unendlich elastischer und aktiver als diese? Erfüllt es nicht alle Körper? Und verbreitet es sich nicht (durch seine elastische Kraft) im ganzen Himmelsraume?"

Newton prüft dann die mögliche Rolle dieses Mediums (des Äthers) bei der Gravitation, sowie der Empfindung und Bewegung der lebenden Wesen (qu. XIX—XXIV.) Die unsymmetrischen Eigenschaften der beiden Strahlen des isländischen Doppelspats erregen in gleicher Weise seine Aufmerksamkeit (qu. XXV u. XXVI.)

Dann folgt dieser plötzliche Frontwechsel, eine Art von Gewissensbissen darüber, mit soviel Wohlgefallen die Hülfsmittel der Cartesianischen, auf die Raumausfüllung begründeten Theorie auseinandergesetzt zu haben; er giebt darum in gewisser Weise seine Ehrenrettung und fährt folgendermassen fort:

„Questio XXVII. — Sind nicht bisher alle Hypothesen in die Irre geraten, die man erdacht hat, um die Lichterscheinungen durch neue Modifikationen der Strahlen zu erklären?"

„Questio XXVIII. — Sind nicht alle Hypothesen fehlgeschlagen, in denen das Licht als ein Druck oder eine Bewegung in einem flüssigen Mittel aufgefasst wurde?

Wenn es (das Licht) nur in einem Drucke oder einer sich plötzlich oder allmählich verbreitenden Bewegung bestände, würde es sich in den Schatten hinein krummlinig fortpflanzen. Denn ein Druck oder eine Bewegung in einer Flüssigkeit kann sich hinter einem Hindernis, welches einen Teil der Bewegung aufhält, nicht in gerader Linie ausbreiten; es wird immer eine Umbiegung und Zerstreuung nach allen Seiten in dem ruhenden Medium hinter dem Hindernis auftreten müssen . . . . . Denn eine Glocke oder eine Kanone hört man auch hinter einem Hügel, welcher den Anblick der tönenden Körper verdeckt, und die Töne pflanzen sich ebensogut in gekrümmten, wie in graden Röhren fort; während man das Licht niemals *gekrümmte Bahnen verfolgen, noch auch in den Schatten einbiegen sieht."*

Nach diesem Einwande sieht sich Newton gezwungen auf die corpusculare Theorie zurückzukommen:

„Questio XXIX. — Sind die Lichtstrahlen nicht kleine von den leuchtenden Substanzen ausgeschleuderte Teilchen? . . . ."

„Questio XXX. — Sind nicht die groben Körper und das Licht ineinander verwandelbar? . . . . Die Verwandlung von

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

gequält vom Zweifel, abwechselnd von den verführerischen Suggestionen der Phantasie hingerissen, und zurückgerufen von den zwingenden Forderungen der Logik. Wir wohnen einem Drama bei, dem ewigen Kampfe zwischen Liebe und Pflicht; und die Pflicht war die stärkere von beiden.

Dieses ist, wie ich glaube, die genaue Entstehungsgeschichte der Theorie der Anwandlungen, jenes sonderbaren Gemisches von zwei entgegengesetzten Systemen; sie ist viel bewundert worden wegen der Autorität des grossen Mathematikers, der den Ruhm hatte, die Gesamtheit der Himmelsbewegungen unter das einige Gesetz der allgemeinen Schwerkraft gebracht zu haben.

Heute hat man diese Theorie verlassen; sie ist verurteilt worden durch das Experimentum crucis von Arago, wie es von Fizeau und Foucault ausgeführt wurde; man muss indessen anerkennen, dass sie einen wirklichen Fortschritt gebracht hat durch die genauen und neuen Feststellungen, die sie einschliesst. Der Lichtstrahl war bis dahin nur als die Bahn eines in geradliniger Bewegung befindlichen Teilchens betrachtet worden: der Lichtstrahl, wie ihn Newton beschreibt, besitzt eine regelmässig periodische Struktur, und die Periode oder Dauer der Anwandlung kennzeichnet die Farbe des Strahles: das ist ein Hauptresultat. Es fehlt nichts wie eine passende Deutung, um den Lichtstrahl in eine schwingende Welle zu verwandeln; aber man muss bis dahin noch ein Jahrhundert warten, und zwar ist es Dr. Thomas Young, dem wir sie im Jahre 1801 verdanken.

III.

Thomas Young nahm die Untersuchung der dünnen Blättchen wieder auf und zeigte, dass sich alles mit äusserster Einfachheit erklärt, wenn man voraussetzt, dass der Lichtstrahl mit der Klangwelle analog ist, die durch einen musikalischen Klang hervorgebracht wird; dass sich die Schwingungen des Äthers, wenn sie den Gesetzen der kleinen Bewegungen unterworfen sind, zusammensetzen, d. h. dass sie „interferieren" müssen, nach dem Ausdruck, den er vorschlägt, um die wechselseitige Beeinflussung zu kennzeichnen.

Obgleich Young geschickt die Vorsicht gebrauchte, sich auf Newtons[1]) Autorität zu berufen, fand die Hypothese gar keinen Anklang; sein Prinzip der Interferenz führte zu der merkwürdigen Konsequenz, dass Licht zu Licht gefügt in gewissen Fällen Dunkelheit hervorbringen könne, ein paradoxes Resultat, das durch die tägliche Erfahrung scheinbar widerlegt wird. Die einzige Bestätigung, die Young beibrachte, war die Existenz der dunklen Ringe bei dem Newtonschen Versuch, eine Dunkelheit, die nach ihm von der Interferenz der auf beiden Seiten der Platte reflektierten Wellen herrührt; aber da die Newtonsche Theorie die Thatsache anders erklärte, blieb der Beweis zweifelhaft; es bedurfte eines experimentum crucis und Young gelang es nicht ein solches zu finden. — Die Wellentheorie versank daher noch einmal in die Dunkelheit der Widersprüche, und das schreckliche Argument der geradlinigen Fortpflanzung richtete sich von neuem gegen sie. Die geschicktesten Mathematiker der Zeit, Laplace, Biot, Poisson hatten sich natürlich der Newtonschen Meinung angeschlossen: besonders Laplace, der berühmte Verfasser der Mécanique céleste, war sogar zur Offensive übergegangen; er hatte die Wellentheorie angegriffen bis in ihre festesten Verschanzungen hinein diejenigen, die der berühmte Huyghens aufgerichtet hatte.

Huyghens hatte in der That in seinem Traité de la lumière ein Problem gelöst, vor dem die Emissionstheorie stumm geblieben war, nämlich die Erklärung der Doppelbrechung des isländischen Doppelspats; seine Wellentheorie führte

Körpern in Licht und von Licht in materielle Körper ist dem Laufe der Natur sehr entsprechend, die sich in Umwandlungen sehr gefällt."

Die Logik zwingt ihn, die Hypothesen des leeren Raumes und der Atome zu verfolgen und bei diesem Gegenstande selbst die Autorität der alten Philosophen Griechenlands und Phöniciens anzurufen; man darf sich also nicht wundern, dass er seiner Ratlosigkeit in folgenden Worten Ausdruck giebt:

„Questio XXXI und Schluss. — Haben nicht die kleinsten Teilchen der Körper gewisse Fähigkeiten, Tugenden oder Kräfte, durch welche sie in die Ferne wirken, nicht nur auf die Lichtstrahlen, um sie zurückzuwerfen, zu brechen oder zu beugen, sondern auch auf einander, wodurch sie einen grossen Teil der Naturerscheinungen hervorrufen?"

Aber er merkt, dass er vielleicht ein wenig zu weit geht und dass er im Begriff ist, sich blosszustellen. Darum erscheinen seine heimlichen, in den ersten questiones versteckten Neigungen einen Augenblick wieder:

„Wie diese Anziehungen, Schwerkraft, Magnetismus, Elektricität zustande kommen mögen, dabei will ich hier nicht verweilen. Was ich Anziehung nenne, mag vielleicht durch Stösse oder andere mir unbekannte Hilfsmittel zu Wege kommen . . . ."

Man könnte noch viele interessante Bemerkungen anführen über den Seelenzustand des grossen Physikers, Mathematikers und Philosophen, der sich in diesen questiones so ursprünglich offenbart. Die vorstehenden kurzen Auszüge genügen aber, wie ich glaube, um den Schluss zu rechtfertigen, der in dieser meiner Studie gezogen wird: dass nämlich Newton über den Lichtmechanismus keineswegs die rückständigen Ideen hatte, die man ihm unterschiebt, wenn man ihn als den Begründer der Emissionstheorie hinstellt. In Wirklichkeit schwankt er zwischen den beiden entgegenstehenden Systemen, da er deren Unzulänglichkeit klar bemerkt; und in dieser Hin- und Hererwägung ist er bemüht, sich so wenig wie möglich von dem Boden sicher gestellter Thatsachen zu entfernen; das ist der Grund, warum er keine dogmatische Theorie aufstellt. Es wäre also ungerecht, Newton für das verantwortlich zu machen, was die Anhänger der Emissionstheorie alles mit seiner Autorität gedeckt haben.

[1]) The Bakerian Lekture on the Theorie of Light and Colours, by Thomas Young. Philos. Transactions of Roy. Soc. London. 1802. S. 12.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

zu einer der einfachsten geometrischen Konstruktionen des Ganges der zwei Strahlen, des ordentlichen und ausserordentlichen und die Erfahrung bestätigte in allen Punkten diese Resultate. Es gelang Laplace nun andrerseits mit Hilfe von gewissen Hypothesen über die Konstitution der leuchtenden Atome, den Gang dieser fremdartigen Strahlen zu erklären. Der Sieg der Atomtheorie schien somit vollständig; eine neue Erscheinung wurde gerade rechtzeitig entdeckt, um ihn zu einem glänzenden zu machen.

Malus fand, das ein natürlicher, unter einem bestimmten Winkel reflektierter Lichtstrahl unsymmetrische Eigenschaften annimmt, ähnlich denen der Lichtstrahlen beim isländischen Doppelspat; er erklärt diese Erscheinung durch eine Orientierung des leuchtenden Moleküls und nannte infolgedessen dieses Licht „polarisiert"; das war ein neuer Erfolg für die Emissionstheorie.

Der Triumph war nicht von langer Dauer: im Jahre 1816 vertraute ein junger, kaum aus der polytechnischen Schule ausgetretener Ingenieur, Augustin Fresnel, Arago seine Zweifel über die herrschende Theorie an und kündigte ihm seine Versuche an, die sie umstossen sollten. Sich auf Huyghens Ideen stützend, hatte er die zweifelhafte Frage der Strahlen und Schatten aufgegriffen und sie gelöst; alle Beugungserscheinungen waren auf ein analytisches Problem zurückgeführt und die Beobachtung bewahrheitete in erstaunlicher Weise die Rechnung. Er hatte ohne sie zu kennen die Überlegung Youngs wieder gefunden, ebenso das Prinzip der Interferenz; aber glücklicher wie jener, brachte er das experimentum crucis, den Versuch mit den beiden Spiegeln; hier bringen zwei von derselben Quelle ausgehende Strahlen, frei von jeder Störung, durch ihr Zusammentreffen bald Licht bald Dunkelheit hervor. Der berühmte Young war der erste, der dem Erfolg seines jungen Nebenbuhlers Beifall spendete, und ihm ein Wohlwollen bezeugte, welches sich niemals verleugnete.

So wurde denn Dank dem Experimente mit den zwei Spiegeln die Theorie Youngs, d. h. die vollständige Analogie der Lichtstrahlen und der tönenden Wellen sicher festgestellt.

Ausserdem zeigt die Beugungstheorie von Fresnel auch die Ursache ihrer Verschiedenheit: Das Licht verbreitet sich in geraden Linien, weil die Lichtwellen ausserordentlich klein sind, der Ton breitet sich dagegen aus, weil die Länge der Wellen verhältnismässig sehr gross ist.

So wurde der schreckliche Einwand vernichtet, der den Geist des grossen Newton so sehr gequält hatte.

Aber es blieb noch eine andere wesentliche Verschiedenheit zwischen der leuchtenden und der tönenden Welle zu erklären übrig: diese wird nicht polarisiert. Wie kommt es, dass es die leuchtende Welle wird?

Die Antwort auf diese Frage schien so schwer, dass Young erklärte, auf ihr Suchen zu verzichten. Fresnel arbeitete mehr wie fünf Jahre an ihrer Entdeckung; diese war eben so einfach wie überraschend: die tönende Welle kann nicht polarisiert werden, da ihre Schwingungen longitudinal sind. Das Licht aber wird polarisiert, weil seine Schwingungen transversal, d. h. senkrecht zu den Lichtstrahlen sind.

Von nun an ist die Natur des Lichtes vollkommen aufgehellt; alle Erscheinungen, die als absolute Einwände dagestanden haben, erklären sich mit erstaunlicher Leichtigkeit, bis in ihre kleinsten Einzelheiten.

Ich wollte, ich könnte Ihnen zeigen, durch welch wunderbare Reihe von Experimenten und Schlussfolgerungen Fresnel zu dieser Entdeckung gelangt ist, einer der wichtigsten der modernen Wissenschaft; aber die Zeit drängt. Ich musste mich begnügen, Ihnen zu zeigen, wie gross die Schwierigkeiten waren, die man bis dahin überwinden musste und eile, die Folgerungen daraus durchzugehen.

IV.

Sie haben im Anfang die rein physiologischen Gründe kennen gelernt, die das Studium des Lichtes notwendig zu einem Informationscentrum des menschlichen Geistes machen. Sie können jetzt aus dem Umschwung dieser langen Entwicklung der optischen Theorien sehen, wie sehr dieselben stets mächtige Geister, die sich für die Naturkräfte interessieren, zur Vertiefung anlocken mussten. In der That jede Erscheinung die sich unter unsern Augen vollzieht, enthält eine Übertragung von Kraft oder Bewegung in die Ferne; sei nun die Entfernung unendlich gross, wie im Himmelsraume oder unendlich klein, wie bei den Zwischenräumen zwischen den Molekülen, das Geheimnis bleibt dasselbe. Also das Licht ist der Träger, der uns die Bewegungen der leuchtenden Körper zuführt: den Mechanismus dieser Übertragung zu vertiefen, heisst daher denjenigen von allen andern vertiefen, und Descartes hatte die bewundernswerte Eingebung davon gehabt, als er diese Fragen unter einem einzigen mechanischen Bilde vereinigte: dies ist das heimliche Band, welches die Physiker und Mathematiker zu allen Zeiten zum Studium des Lichtes hinzog.

Von diesem Standpunkte aus betrachtet, erhält die Geschichte der Optik eine grosse philosophische Tragweite; sie wird die Geschichte unserer fortschreitenden Erkenntnis über die Mittel, welche die Natur anwendet, um die Bewegung und die Kraft auf die Entfernung zu übertragen.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Die erste Idee, die dem menschlichen Geiste seit seinem Urzustande kam, um seine Kraft ausserhalb seines Bereiches geltend zu machen, ist der Wurf eines Steines, eines Pfeiles oder sonst eines Geschosses; das ist der Keim der Emissionstheorie. Diese Theorie entspricht dem philosophischen System, welches einen leeren Raum vermutet, wo das Geschoss sich frei bewegt.

Auf einer höheren Stufe hat der Mensch, zum Physiker geworden, eine viel feinere Vorstellung der Bewegungsübertragung durch Wellen, die sich ihm zuerst bei dem Studium der Wogen, dann des Schalles aufdrängte. Diese zweite Anschauung vermutet das Gegenteil, nämlich dass der Raum gefüllt ist; hier giebt es nun keine Übertragung von Materie mehr; die Teilchen schwingen im Sinne der Fortpflanzung, Bewegung und Kraft werden durch Kompression und Dilatation eines stetigen elastischen Mittels übertragen. Das war der Ursprung der Theorie der Lichtwellen; unter dieser Form konnte sie uns nur einen Teil der Erscheinungen darstellen, wie wir vorher gesehen haben; sie war daher ungenügend. Aber die Mathematiker und Physiker vor Fresnel kannten keinen anderen Wellenmechanismus in einem stetigen Medium.

Die grosse Entdeckung Fresnels bestand darin, eine dritte Art der Übertragung zu finden, die ebenso natürlich wie die vorangegangenen war, die aber einen unvergleichlichen Reichtum von Hülfsmitteln darbietet. Es sind die transversalen Wellen, die in einem stetigen inkompressiblen Mittel hervorgerufen, Rechenschaft von allen Eigenschaften des Lichtes geben. Bei dieser Wellenform erweckt die Verrückung der Teilchen eine Elastizität von besonderer Art; es ist das gegenseitige Gleiten der zur Fortpflanzungsrichtung konzentrischen Schichten, welches die Bewegung und Energie übermittelt. Charakteristisch für diese Wellen ist, dass sie keinerlei Dichtigkeitsänderung in dem Medium hervorbringen, wie beim Descartesschen System.

Der oben angekündigte Reichtum von Hilfsquellen rührt daher, dass die Form der Transversalschwingungen unbestimmt bleibt, was den Wellen eine schier unendliche Mannigfaltigkeit verschiedener Eigenschaften verleiht.

Die gradlinigen, zirkulären, elliptischen Formen kennzeichnen genau diese so unerwarteten Polarisationen, welche Fresnel entdeckt hat, und mit Hülfe deren er so bewundernswürdig die schönen Erscheinungen Aragos an Krystallplättchen erklärt hat.

Die Möglichkeit der Existenz von Wellen, die sich ohne Dichtigkeitsänderung verbreiten, hat die mathematische Elasticitätstheorie von Grund aus umgestaltet. Die Mathematiker fanden in ihren Gleichungen diese transversal schwingenden Wellen wieder, welche ihnen bisher unbekannt geblieben waren; sie lernten ausserdem von Fresnel die allgemeinste Konstitution von elastischen Mitteln kennen, an die sie noch nicht gedacht hatten.

In seiner berühmten Abhandlung über die Doppelbrechung stellt der grosse Physiker die Idee auf, dass in den Krystallen die Elasticität des Äthers mit der Richtung veränderlich sein muss, eine unerwartete Annahme von ausserordentlicher Tragweite, welche die festesten Grundlagen der Molekular-Mechanik umkehren musste; die Arbeiten von Cauchy und Green sind schlagende Beweise dafür.

Von diesem Prinzipe aus leitete Fresnel die allgemeinste Gestalt der Wellenoberfläche des Lichtes in Krystallen ab und fand (als besonderen Fall) die Kugel und das Ellipsoïd, welche Huyghens dem isländischen Doppelspat beigelegt hatte.

Diese neue Entdeckung erregte allgemeines Erstaunen bei den Physikern und Mathematikern; als Arago sie vor der Akademie der Wissenschaften auseinandersetzte, erklärte sich Laplace, der so lange feindlich gesinnt war, besiegt. Zwei Jahre später wurde Fresnel, nachdem er schon mit Einstimmigkeit zum Mitglied der französischen Akademie gewählt war, mit derselben Einstimmigkeit zum auswärtigen Mitglied der Royal Society in London gewählt; es war Young selbst, der ihm die Nachricht von dieser Auszeichnung brachte, mit der persönlichen Huldigung seiner aufrichtigsten Bewunderung.

V.

Die endgiltige Anerkennung der Wellentheorie erfordert die Notwendigkeit, die Existenz eines elastischen Mediums anzunehmen, welches die Lichtbewegung übermittelt. Indessen, setzt nicht jede Fernwirkung einer Bewegung oder Kraft dieselbe Bedingung voraus? Faraday hat sich das ehrenvolle Verdienst erworben, als echter Schüler von Descartes und Leibniz, dieses Prinzip aufgestellt und die scheinbare Fernwirkung elektrischer und magnetischer Systeme mit Bestimmtheit auf die Wirkung des zwischenliegenden Mediums zurückgeführt zu haben. Faraday wurde für seinen kühnen Gedanken durch die Entdeckung der Induktion belohnt. Und da die Induktion selbst durch einen von wägbarer Materie freien Raum hindurch stattfindet, ist man gezwungen anzunehmen, dass das wirksame Medium eben dasjenige ist, welches auch die Lichtwellen fortpflanzt, nämlich der Äther.

Die Fortpflanzung einer Bewegung durch ein elastisches Mittel kann keine augenblickliche sein; wenn es in der That der lichttragende Äther ist, der auch die Induktion

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

überträgt, dann muss sich auch diese mit der Schnelligkeit der Lichtwellen ausbreiten.

Die Bestätigung war schwierig; von Helmholtz, welcher diese Schnelligkeit direkt zu messen suchte, fand, wie einst Galilei, für die Schnelligkeit des Lichtes einen praktisch unbegrenzten Wert.

Aber die Aufmerksamkeit der Physiker wurde durch eine eigentümliche zahlenmässige Übereinstimmung angezogen: Das Verhältnis der elektrostatischen zur elektromagnetischen Einheit der Elektricitätsmenge ist durch eine Zahl dargestellt, die genau der Geschwindigkeit des Lichtes gleich kommt.

Der berühmte Clerk Maxwell zögerte nicht, den Ideen Faradays folgend, in diesem Verhältnis ein indirektes Mass der Induktionsgeschwindigkeit zu erkennen, und durch eine Reihe bemerkenswerter Intuitionen gelangte er dazu, jene berühmte elektromagnetische Lichttheorie aufzustellen, welche unter demselben Mechanismus drei Erscheinungen zusammenfasst, die in ihrer Wahrnehmbarkeit vollständig getrennt sind: Licht, Elektricität und Magnetismus.

Aber abstrakte Theorien der Naturerscheinungen bedeuten nichts, ohne die Bestätigung des Experimentes. Die Theorie von Maxwell wurde dieser Probe unterworfen und der Erfolg überstieg alle Erwartungen.

Die Resultate sind zu frisch im Gedächtnisse und zu bekannt, als dass hier dabei zu verweilen notwendig wäre.

Einem jungen deutschen Physiker, Heinrich Hertz, von früh auf begeistert für die Wissenschaft, gelang es, indem er von Helmholtz und Lord Kelvin die schöne Analyse der oscillierenden Entladungen entnahm, elektrische und elektromagnetische Wellen so vollendet zu erzeugen, dass diese Wellen alle Eigenschaften der Lichtwellen besassen; der einzige Unterschied bestand darin, dass ihre Schwingungszahl geringer war, wie die des Lichtes.

Es folgt daraus, dass man mit elektrischen Entladungen die feinsten Experimente der modernen Optik hervorbringen kann: Reflexion, Brechung, Beugung, gradlinige, zirkuläre und elliptische Polarisation.

Aber ich halte mich auf, meine Herren; ich fühle, dass ich eine zu schwere Aufgabe auf mich genommen habe, indem ich versuchte, Ihnen all die Reichtümer aufzuzählen, welche die Wellen mit transversalen Schwingungen heute in unseren Händen vereinigt haben.

Ich habe im Anfang gesagt, dass mir die Optik als die führende Wissenschaft der modernen Physik erscheine.

Wenn irgend welcher Zweifel sich darob in Ihrem Geiste erhob, so hoffe ich, dass dieser Eindruck sich verwischt hat, um einem neuen Gefühl der Überraschung und Bewunderung Platz zu machen, nachdem Sie gesehen haben, was alles das Studium des Lichts an neuen Ideen über den Mechanismus der Naturkräfte zu Tage gefördert hat.

Es hat unvermerkt zu der Cartesianischen Auffassung zurückgeführt, dass ein einziges Medium den Weltraum erfüllt und der Sitz der elektrischen, magnetischen und Lichterscheinungen ist; es lässt durchblicken, dass dieses Medium der Verwalter der in der materiellen Welt verbreiteten Energie ist, der notwendige Träger der Kräfte, ja selbst der Ursprung der allgemeinen Schwerkraft.

Dieses ganze Werk hat die Optik vollbracht; es ist vielleicht das grösste dieses Jahrhunderts!

Das Studium der Eigenschaften der Wellen, von allen Gesichtspunkten aus zu betrachten, ist wohl heutigen Tages ein wirklich fruchtbarer Weg.

Es ist derjenige, den in seiner doppelten Laufbahn als Mathematiker und Physiker Sir George Stokes gegangen ist, dem wir hier eine so ergreifende und wohl verdiente Huldigung darbringen. Alle seine schönen Arbeiten, ebensowohl die hydrodynamischen, wie die theoretischen oder experimentellen der Optik beziehen sich gerade auf die Verwandlungen, welche die verschiedenen Medien auf die Wellen ausüben, die sie durchsetzen. In den vielfältigen Erscheinungen, welche er entdeckt oder analysiert hat, Bewegungen der Flüssigkeiten, Beugung, Interferenz, Fluorescenz, Röntgenstrahlen, in allen ist dieselbe führende Idee erkennbar, welche ich Ihnen bedeutet habe, und sie macht die harmonische Einheit des wissenschaftlichen Lebens von Sir George Stokes aus.

Fürwahr! Die Universität Cambridge mag stolz sein auf ihren Lucasian Lehrstuhl der mathematischen Physik: denn seit Sir Isaac Newton bis zu Sir George Stokes trägt er einen ruhmvollen Anteil zu dem Fortschritt in der Naturphilosophie bei!

(Aus dem Französischen übersetzt von Hermann Th. Simon.)

(Eingegangen 23. Nov. 1899.)

Personalien.

Der nach Leipzig berufene Direktor des physikalischen Institutes an der Wiener Universität, Hofrat Boltzmann ist aus Gesundheitsrücksichten auf die Dauer des laufenden Semesters beurlaubt worden.

Die Privatdozenten Dr. Loeb und Dr. Binz an der Universität Bonn sind als freiwillige Assistenten des chemischen Instituts für physikalische Chemie und für technische Chemie angenommen worden. An demselben Institut wurde der bisherige Hilfsassistent Max Peschkes zum vierten Unterrichtsassistenten für analytische Chemie ernannt.

Honorardozent an der deutschen technischen Hochschule in Prag, Ludwig Storch, wurde zum ausserordentlichen Professor der physikalischen Chemie dort ernannt.

Für die Redaktion verantwortlich: Dr. Simon in Frankfurt a. M. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

BIBLIOTHEQUE
Section Physique

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC