H. F. u.f. 166. (14)

N° D'ORDRE
459.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. L'ABBÉ D'ESCLAIBES,
Ancien Élève de l'École Polytechnique.

1re THÈSE. — SUR LES APPLICATIONS DES FONCTIONS ELLIPTIQUES A L'ÉTUDE DES COURBES DU PREMIER GENRE.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues, le 21 mai 1880, devant la Commission d'Examen.

MM. PUISEUX, *Président.*
HERMITE, }
BOUQUET, } *Examinateurs.*

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1880

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	MILNE EDWARDS, Professeur.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
PROFESSEURS HONORAIRES	DUMAS.	
	PASTEUR.	
PROFESSEURS	CHASLES	Géométrie supérieure.
	P. DESAINS	Physique.
	LIOUVILLE	Mécanique rationnelle.
	PUISEUX	Astronomie.
	HÉBERT	Géologie.
	DUCHARTRE	Botanique.
	JAMIN	Physique.
	SERRET	Calcul différentiel et intégral.
	H. Ste-CLAIRE DEVILLE	Chimie.
	DE LACAZE-DUTHIERS	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BERT	Physiologie.
	HERMITE	Algèbre supérieure.
	BRIOT	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	BOUQUET	Mécanique physique et expérimentale.
	TROOST	Chimie.
	WURTZ	Chimie organique.
	FRIEDEL	Minéralogie.
	O. BONNET	Astronomie.
AGRÉGÉS	BERTRAND, J. VIEILLE	Sciences mathématiques.
	PELIGOT	Sciences physiques.
SECRÉTAIRE	PHILIPPON.	

6027 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

A. M. D. G.

A MON PÈRE, A MA MÈRE.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

THÈSE D'ANALYSE.

SUR LES APPLICATIONS

DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES

A L'ÉTUDE

DES COURBES DU PREMIER GENRE.

INTRODUCTION.

Le genre d'une courbe algébrique C d'ordre n est la différence entre le nombre maximum des points doubles et des points de rebroussement que peut avoir une courbe de même degré, et le nombre effectif de ceux que possède la courbe C. Cette différence p est donnée par la formule suivante, où d désigne le nombre des points doubles et r celui des points de rebroussement :

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r.$$

L'importance de cet élément dans l'étude de la fonction algébrique définie par l'équation de la courbe ressort principalement des découvertes faites par les géomètres allemands au sujet des intégrales abéliennes. Riemann a démontré, en effet, que le nombre des fonctions de première espèce auxquelles peut se ramener l'intégrale $\int f(x, y)\, dx$, où

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

x et y sont les coordonnées des points de la courbe, est précisément égal à p. C'est en partant de ce fait que Clebsch a été conduit à des résultats très remarquables sur les propriétés des courbes algébriques, et son Mémoire sur les applications des fonctions abéliennes (1) a ouvert une voie nouvelle aux travaux des géomètres de notre époque.

Deux cas particuliers donnent lieu aux recherches les plus intéressantes. C'est d'abord celui des courbes de genre zéro ou unicursales, dont les coordonnées s'expriment rationnellement en fonction d'un paramètre variable. C'est ensuite le cas où $p=1$; la courbe admet alors $\frac{n(n-3)}{2}$ points doubles, et les coordonnées de ses points s'expriment en fonction rationnelle d'un paramètre et d'un radical carré portant sur un polynôme du troisième ou du quatrième degré. L'intégrale abélienne se ramène, dans ce cas, aux intégrales elliptiques.

L'étude analytique des courbes du premier genre, ou courbes elliptiques, forme l'objet de ce travail. Leurs propriétés ont été étudiées par Clebsch, soit dans les deux Mémoires publiés au *Journal de Crelle* (t. LXIII et LXIV), soit dans l'Ouvrage intitulé *Vorlesungen über Geometrie*, complété par M. Lindemann. Les travaux récents de MM. Harnack et Westphal (2) sur les cubiques planes et sur la courbe gauche qui résulte de l'intersection de deux surfaces du second ordre méritent également d'être cités.

Dans les Chapitres I, II et III, nous avons reproduit, en essayant de les compléter sous certains rapports, et avec un mode d'exposition que nous croyons plus simple, la plupart des résultats obtenus par Clebsch. La démonstration relative au degré du polynôme placé sous le radical qui figure dans l'expression des coordonnées nous appartient, ainsi que certains calculs qui se rapportent aux points doubles et aux points de rebroussement. En outre, après avoir introduit dans l'expression des coordonnées les transcendantes $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, nous montrons comment on peut leur substituer les fonctions $p(u)$, $p'(u)$, souvent employées par M. Weierstrass, et exprimer $p'(u)$ en fonction de $p(u)$ et des invariants de la forme biquadratique placée sous le radical pri-

(1) *Journal de Crelle*, t. LXIII.

(2) *Mathematische Annalen*, t. IX, XII et XIII.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

mitif. Cette transformation permet d'appliquer aux problèmes dans lesquels intervient la multiplication de l'argument la formule remarquable due à M. Kiepert (1).

Nous avons rappelé, en y ajoutant une courte explication, les expressions des coordonnées obtenues par M. Hermite au moyen des fonctions $Z(\iota)$.

Dans les Chapitres IV et V, nous nous sommes assez longuement étendu sur les courbes planes du troisième ordre et sur la courbe gauche intersection de deux surfaces du second ordre. En ne nous servant que des propriétés les plus élémentaires de ces courbes, et sans recourir aux procédés du calcul symbolique, nous avons retrouvé les formules qu'Aronhold et M. Westphal ont déduites de considérations différentes. L'emploi de la fonction $p(u)$ nous a conduit très simplement, dans le cas des cubiques, à certains résultats, dont plusieurs nous paraissent nouveaux, spécialement au sujet des points sextatiques et des courbes de sixième classe enveloppées par les droites qui joignent deux points dont la différence des arguments est constante.

Signalons encore la méthode directe par laquelle nous exprimons, en fonction des invariants de la courbe et des coordonnées d'un point, les racines de l'équation du neuvième degré qui détermine les points d'inflexion, et la discussion qui s'y rapporte.

A l'égard de la biquadratique gauche, nous avons obtenu la relation qui existe entre les paramètres relatifs à un même point, dans deux modes de représentation différents.

Enfin la condition que doivent remplir les arguments de quatre points situés dans un même plan nous permet de démontrer aisément un certain nombre de propriétés de cette courbe.

---

(1) *Journal de Crelle*, t. LXXVI.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE I.

EXPRESSION DES COORDONNÉES D'UN POINT DE LA COURBE A L'AIDE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

§ I. — Théorème fondamental.

1. Soit

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

une courbe de degré n admettant $\frac{n(n-3)}{2}$ points doubles. En adjoignant à ceux-ci $2(n-1)$ points ordinaires de la courbe, on détermine un faisceau d'ordre $(n-1)$

$$u + \lambda v = 0, \tag{2}$$

u et v représentant deux courbes du faisceau. Parmi les $n(n-1)$ points d'intersection de la courbe d'ordre n avec une courbe du faisceau, le nombre de ceux qui varient avec λ sera

$$n(n-1) - n(n-3) - 2(n-1) = 2.$$

Exprimons les coordonnées (ξ, η), (ξ', η') de ces deux points en fonction du paramètre λ.

A cet effet, supposons qu'entre les équations (1), (2), et celle d'une droite indéterminée

$$Ax + By + C = 0,$$

on élimine x et y; le résultant sera un produit de $n(n-1)$ facteurs linéaires par rapport à A, B, C et correspondant à chacun des points d'intersection. En supprimant les $n(n-1) - 2$ facteurs indépendants de λ, on aura une équation de la forme

$$pA^2 + p'B^2 + p''C^2 + 2qBC + 2q'CA + 2q''AB = 0, \tag{3}$$

où les coefficients $p, p', \ldots, q''$ sont des fonctions entières de degré n

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

par rapport à λ. En identifiant le premier membre avec le produit $p''(A\xi+B\eta+C)(A\xi'+B\eta'+C)$, on aura

$$(4)\qquad \begin{cases} p''\xi\xi' = p, \\ p''\eta\eta' = p', \\ p''(\eta+\eta') = 2q, \\ p''(\xi+\xi') = 2q', \\ p''(\xi\eta'+\xi'\eta) = 2q'', \end{cases}$$

d'où

$$(4)'\qquad \begin{cases} p''^2(\xi-\xi')^2 = 4(q'^2-pp''), \\ p''^2(\eta-\eta')^2 = 4(q^2-p'p''). \end{cases}$$

D'ailleurs, l'expression (3), considérée comme une forme quadratique par rapport à A, B, C, étant un produit de deux facteurs linéaires, la forme adjointe est un carré parfait, et l'on peut poser identiquement

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} p & q'' & q' & x \\ q'' & p' & q & y \\ q' & q & p'' & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = H(lx+l'y+l''z)^2,$$

où l, l', l'' sont, ainsi que H, des polynômes entiers en λ, dont le degré sera fixé ultérieurement. On peut toujours supposer que l, l', l'' n'ont aucun facteur commun.

On aura donc

$$(6)\qquad \begin{cases} q^2 - p'p'' = l^2H, \\ q'^2 - p''p = l'^2H, \\ q''^2 - pp' = l''^2H, \\ pq - q'q'' = l'l''H, \\ p'q' - q''q = l''lH, \\ p''q'' - qq' = ll'H, \end{cases}$$

et, en vertu des équations (4)',

$$(7)\qquad \begin{cases} \xi-\xi' = \pm\dfrac{2l'\sqrt{H}}{p''}, \\ \eta-\eta' = \pm\dfrac{2l\sqrt{H}}{p''}. \end{cases}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Il est facile de prouver que les signes ne sont pas indépendants dans ces deux formules et qu'au signe $\pm$ dans la première doit correspondre le signe $\mp$ dans la seconde. On déduit effectivement des équations (4),

$$p''^2(\xi-\xi')(\eta-\eta')=p''^2[(\eta+\eta')(\xi+\xi')-2(\xi\eta'+\xi'\eta)]=4(qq'-p''q'')=-4ll'\mathrm{H}.$$

Cela posé, on tire des équations (4) et (7)

$$(8)\qquad \begin{cases} \xi=\dfrac{q'\pm l'\sqrt{\mathrm{H}}}{p''}, \\ \eta=\dfrac{q\mp l\sqrt{\mathrm{H}}}{p''}, \end{cases}$$

et, si l'on regarde le radical comme affecté successivement des deux signes supérieurs, puis des deux signes inférieurs, on obtiendra ainsi les coordonnées des deux points considérés.

En regardant A, B, C comme des coordonnées tangentielles, l'équation (3) représente ces deux points; par suite, l'équation provenant de la forme adjointe

$$lx+l'y+l''=0$$

représente la droite qui les unit.

2. La méthode employée par Clebsch pour évaluer le degré de H, ou, ce qui revient au même, le nombre des courbes du faisceau qui sont tangentes à la courbe proposée par la coïncidence des deux points (ξ,η), (ξ',η'), repose sur certaines propriétés du jacobien des trois courbes f, u, v, dont la démonstration présente quelque complication. Ces propriétés sont contenues dans les théorèmes suivants :

1° *Le jacobien de trois courbes f, u, v d'ordre quelconque passe par tous leurs points communs.*

2° *Si les deux courbes u, v sont de même degré, en chaque point commun aux trois courbes le jacobien est tangent à la courbe f.*

3° *Tout point double de f par lequel passent les deux courbes de même degré u, v est un point double du jacobien, et les tangentes en ce point sont les mêmes pour la courbe f et pour le jacobien.*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Clebsch en conclut que le nombre des courbes du faisceau qui touchent la courbe proposée est égal à quatre.

La méthode suivante nous semble plus directe et plus algébrique. Elle consiste à calculer le degré des fonctions l, l', l'' par rapport à λ, ce qui revient à déterminer combien on peut, par un point quelconque P, mener de droites telles que $lx+l'y+l''=0$, joignant deux points de la courbe fournis par une même valeur de λ.

A cet effet, menons par P une droite quelconque

$$ax+by+c+\mu(a'x+b'y+c')=0.$$

Elle rencontre la courbe en n points, et il résulte de ce qui a été dit dès le début de cette théorie que les n valeurs correspondantes de λ sont données par l'équation (3), où l'on remplace A, B, C par $a+\mu a'$, $b+\mu b'$, $c+\mu c'$.

Soit donc

$$\Phi(\lambda,\mu)=\mathrm{M}\mu^2+2\mathrm{N}\mu+\mathrm{P}=0$$

cette équation, en posant, pour abréger,

$$\mathrm{M}=pa^2+p'b^2+p''c^2+2qbc+2q'ca+2q''ab,$$
$$\mathrm{N}=paa'+p'bb'+p''cc'+q(bc'+cb')+q'(ca'+ac')+q''(ab'+ba'),$$
$$\mathrm{P}=pa'^2+p'b'^2+p''c'^2+2qb'c'+2q'c'a'+2q''a'b'.$$

Si la droite considérée joint deux points relatifs à une même valeur de λ, on a simultanément

$$\Phi(\lambda,\mu)=0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}=0.$$

Je dis qu'on a en même temps $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\mu}=0$, car l'équation $\Phi(\lambda,\mu)=0$, si l'on y regarde λ comme connu, fournit deux valeurs de μ, et, par suite, détermine les deux droites qui joignent le point P aux deux points correspondant à cette valeur de λ. Or, dans le cas actuel, ces deux points sont en ligne droite avec P; les deux valeurs de μ se confondent donc, et l'on a $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\mu}=0$.

On le vérifie d'ailleurs en calculant le discriminant de la fonction Φ, regardée comme fonction de μ. Ce discriminant, en effet, a pour valeur

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$N^2 - MP$ ou, en remplaçant M, N, P par leurs valeurs,

$$\begin{vmatrix} p & q'' & q' & (bc'-cb') \\ q'' & p' & q & (ca'-ac') \\ q' & q & p'' & (ab'-ba') \\ (bc'-cb') & (ca'-ac') & (ab'-ba') & 0 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire, en vertu de l'identité (5),

$$H \begin{vmatrix} l & l' & l'' \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}^2;$$

il admet donc comme racines doubles les valeurs de λ pour lesquelles les deux points correspondants (ξ, η), (ξ', η') sont en ligne droite avec P.

Il résulte de ce qui précède que les valeurs de μ relatives au cas dont il s'agit sont racines doubles de l'équation obtenue en éliminant λ entre les équations $\Phi = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0$. Or, ce second discriminant est d'ordre $2(n-1)$ par rapport aux coefficients de Φ, et, par suite, d'ordre $4(n-1)$ en μ. Outre les valeurs de μ dont on vient de parler, il admet encore pour racines : 1° celles qui correspondent aux tangentes menées du point P à la courbe f, car alors deux valeurs de λ se confondent pour une même valeur de μ; le nombre de ces tangentes est

$$n(n-1) - 2d - 3r = 2n - r,$$

d'après la formule de Plücker; 2° les r valeurs qui correspondent aux droites joignant P aux points de rebroussement, puisque alors encore deux valeurs de λ deviennent égales. En défalquant ces deux espèces de valeurs, il reste $4(n-1) - 2n = 2(n-2)$ racines égales deux à deux. Le facteur correspondant

$$\begin{vmatrix} l & l' & l'' \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix},$$

dans le premier discriminant, est donc d'ordre $n-2$, et, en vertu de l'identité (5), on en conclut que H est du quatrième degré.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

3. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Les coordonnées des points d'une courbe d'ordre n et du premier genre peuvent s'exprimer rationnellement à l'aide d'un paramètre λ *et de la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré en* λ.

On voit en même temps qu'il existe quatre courbes du faisceau $u + \lambda v$, tangentes à la courbe proposée en leur point variable d'intersection.

La droite qui joint les deux points variables d'intersection des courbes du faisceau avec la proposée enveloppe une courbe de $(n-2)^{ième}$ *classe.*

Enfin les équations (8) montrent que le point milieu du segment déterminé par ces deux points décrit une courbe unicursale d'ordre n.

4. Au lieu d'un faisceau d'ordre $n-1$, on aurait pu faire usage d'un faisceau d'ordre $n-2$, en adjoignant aux $\frac{n(n-3)}{2}$ points doubles $n-2$ points simples de la courbe. Le nombre des points variables d'intersection est encore égal à 2.

5. L'analyse précédente donne le moyen de calculer les valeurs de λ relatives aux points de rebroussement de la courbe, dans le cas où elle en possède, et de reconnaître si cette circonstance se présente, lorsque la courbe est donnée directement par les formules (8). Entre les équations

$$\Phi(\lambda, \mu) = \mathrm{M}\mu^2 + 2\mathrm{N}\mu + \mathrm{P} = 0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} = \frac{d\mathrm{M}}{d\lambda}\mu^2 + 2\frac{d\mathrm{N}}{d\lambda}\mu + \frac{d\mathrm{P}}{d\lambda} = 0$$

éliminons μ; l'équation résultante

$$\left(\mathrm{P}\frac{d\mathrm{M}}{d\lambda} - \mathrm{M}\frac{d\mathrm{P}}{d\lambda}\right)^2 - 4\left(\mathrm{N}\frac{d\mathrm{P}}{d\lambda} - \mathrm{P}\frac{d\mathrm{N}}{d\lambda}\right)\left(\mathrm{M}\frac{d\mathrm{N}}{d\lambda} - \mathrm{N}\frac{d\mathrm{M}}{d\lambda}\right) = 0$$

est du degré $4(n-1)$ en λ et admet pour racines doubles les valeurs de λ dont nous avons parlé, c'est-à-dire celles qui annulent le déterminant

$$\begin{vmatrix} l & l' & l'' \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

que nous désignerons par D. On peut, d'ailleurs, mettre le facteur D^2 en évidence dans le premier membre, au moyen de l'identité établie ci-dessus (page 8) :

$$N^2 - MP = HD^2.$$

Effectivement, l'équation considérée pourra s'écrire

$$\left[\frac{d(MP)}{d\lambda}\right]^2 - 4N\frac{dN}{d\lambda}\frac{d(MP)}{d\lambda} + 4HD^2\frac{dM}{d\lambda}\frac{dP}{d\lambda} + 4(N^2 - HD^2)\left(\frac{dN}{d\lambda}\right)^2 = 0$$

ou, en réduisant,

$$\left[\frac{d(MP)}{d\lambda} - \frac{d(N^2)}{d\lambda}\right]^2 + 4HD^2\left[\frac{dM}{d\lambda}\frac{dP}{d\lambda} - \left(\frac{dN}{d\lambda}\right)^2\right] = 0,$$

c'est-à-dire

$$D^2\left\{\left(2H\frac{dD}{d\lambda} + D\frac{dH}{d\lambda}\right)^2 + 4H\left[\frac{dM}{d\lambda}\frac{dP}{d\lambda} - \left(\frac{dN}{d\lambda}\right)^2\right]\right\} = 0.$$

Après la suppression du facteur D^2, l'équation, comme on l'a prouvé, est de degré $2n$, bien qu'elle semble être de degré $2n+2$. Elle détermine les valeurs de λ correspondant au point de contact des tangentes menées du point fixe P, et celles qui se rapportent aux points de rebroussement, s'il y en a. Dans cette équation, l'expression $\frac{dM}{d\lambda}\frac{dP}{d\lambda} - \left(\frac{dN}{d\lambda}\right)^2$ pourra être mise sous la forme suivante :

$$-\begin{vmatrix} \frac{dp}{d\lambda} & \frac{dq''}{d\lambda} & \frac{dq'}{d\lambda} & (bc' - cb') \\ \frac{dq''}{d\lambda} & \frac{dp'}{d\lambda} & \frac{dq}{d\lambda} & (ca' - ac') \\ \frac{dq'}{d\lambda} & \frac{dq}{d\lambda} & \frac{dp''}{d\lambda} & (ab' - ba') \\ (bc' - cb') & (ca' - ac') & (ab' - ba') & 0 \end{vmatrix}.$$

Il suffit, pour le voir, de se reporter à la transformation analogue de $MP - N^2$.

Dans le cas des points de rebroussement, les valeurs de λ doivent être indépendantes des quantités a, b, c, a', b', c'; on pourra donc les calculer en donnant à ces dernières deux systèmes de valeurs arbi-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

traires et en cherchant les racines communes aux deux équations ainsi obtenues.

Supposons, par exemple, le point fixe P à l'infini sur l'axe des x, c'est-à-dire $a=1$, $b=0$, $c=0$, $a'=0$, $b'=0$, $c'=1$. L'équation $\Phi(\lambda, \mu)=0$ devient

$$p''\mu^2+2q'\mu+p=0,$$

le déterminant D se réduit à l', et l'équation en λ devient

$$\left(2H\frac{dl'}{d\lambda}+l'\frac{dH}{d\lambda}\right)^2+4H\left[\frac{dp}{d\lambda}\frac{dp''}{d\lambda}-\left(\frac{dq'}{d\lambda}\right)^2\right]=0.$$

On aura de même, en prenant le point à l'infini sur l'axe des x,

$$\left(2H\frac{dl}{d\lambda}+l\frac{dH}{d\lambda}\right)^2+4H\left[\frac{dp'}{d\lambda}\frac{dp''}{d\lambda}-\left(\frac{dq}{d\lambda}\right)^2\right]=0,$$

et *la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe ait des points de rebroussement est que ces deux équations aient des racines communes.*

§ II. — Réciproque. Calculs relatifs aux points doubles.

6. Réciproquement, soit une courbe représentée par des équations de la forme obtenue précédemment,

$$x=\frac{q'\pm l'\sqrt{H}}{p''},$$

$$y=\frac{q\mp l\sqrt{H}}{p''},$$

où les signes sont associés comme ci-dessus et où les fonctions entières p'', q, q' sont d'ordre n, l, l' d'ordre $n-2$, H du quatrième. Je suppose, en outre, que ces divers polynômes soient liés entre eux par les relations (6), lesquelles, comme on le voit aisément, peuvent se réduire aux suivantes,

$$q^2-p'p''=l^2H,$$

$$q'^2-pp''=l'^2H,$$

$$p''q''-qq'=ll'H,$$

$$lq'+l'q+l''p''=0,$$

q'', p, p' étant des fonctions entières d'ordre n, l'' d'ordre $n-2$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Cela posé :

1° *La courbe est de degré n.* — On le vérifie en cherchant le nombre de ses points d'intersection avec une droite quelconque $\alpha x+\beta y+\gamma=0$. L'équation en λ qui résulte de la substitution des valeurs de x et de y, rendue rationnelle, sera

$$\frac{1}{p''^2}[\alpha^2(q'^2-l'^2\mathrm{H})+\beta^2(q^2-l^2\mathrm{H})+2\alpha\beta(qq'+\mathrm{H}ll')+\gamma p''(2\alpha q'+2\beta q+\gamma p'')]=0,$$

d'où, en vertu des relations précédentes,

$$\alpha^2 p+\beta^2 p'+\gamma^2 p''+2\beta\gamma q+2\gamma\alpha q'+2\alpha\beta q''=0.$$

Cette équation est bien du degré n en λ.

2° *La courbe admet* $\frac{n(n-3)}{2}$ *points doubles.* — En effet, en un point double, chacune des coordonnées x, y prend la même valeur pour deux valeurs λ, λ_1 du paramètre variable. On aura donc, en affectant d'un indice les expressions qui se rapportent à la valeur λ_1,

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{q'\pm l'\sqrt{\mathrm{H}}}{p''}=\dfrac{q'_1\pm l'_1\sqrt{\mathrm{H}_1}}{p''_1}, \\ \dfrac{q\mp l\sqrt{\mathrm{H}}}{p''}=\dfrac{q_1\mp l'_1\sqrt{\mathrm{H}_1}}{p''_1}. \end{cases}$$

On en déduit

$$\pm l'p''_1\sqrt{\mathrm{H}}\pm l'_1p''\sqrt{\mathrm{H}_1}+q'p''_1-q'_1p''=0,$$
$$\mp lp''_1\sqrt{\mathrm{H}}\mp l_1p''\sqrt{\mathrm{H}_1}+qp''_1-q_1p''=0,$$

en supposant toujours que l'on fasse correspondre les signes dans les deux équations de la manière indiquée.

En éliminant successivement $\sqrt{\mathrm{H}}$ et $\sqrt{\mathrm{H}_1}$, en élevant au carré et ayant égard aux relations

$$lq'+l'q+l''p''=0,$$
$$l_1q'_1+l'_1q_1+l''_1p''_1=0,$$

il viendra

$$(10)\qquad \begin{cases} \mathrm{H}(l_1l'-l'_1l)^2=(l_1q'+l'_1q+l''_1p'')^2, \\ \mathrm{H}_1(ll'_1-l'l_1)^2=(lq'_1+l'q_1+l''p''_1)^2. \end{cases}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Ces deux équations peuvent encore être simplifiées à l'aide des autres relations qui existent entre $p, p', \ldots, q'', l, l', l'', \mathrm{H}$. On trouvera ainsi, après la suppression du facteur p'', qui fournit évidemment des solutions étrangères,

$$(10)' \qquad \begin{cases} pl_1^2 + p' l_1'^2 + p'' l_1''^2 + 2q l_1' l_1'' + 2q' l_1'' l_1 + 2q'' l_1 l_1' = 0, \\ p_1 l^2 + p_1' l'^2 + p_1'' l''^2 + 2q_1 l' l'' + 2q_1' l'' l + 2q_1'' l l' = 0. \end{cases}$$

Ces deux équations, débarrassées du facteur $(\lambda - \lambda_1)^2$, dont la présence est évidente si l'on se reporte aux équations (10), prendront la forme

$$(11) \qquad \begin{cases} \Omega(\lambda, \lambda_1) = 0, \\ \Omega(\lambda_1, \lambda) = 0. \end{cases}$$

Elles ne diffèrent que par l'échange de λ et de λ_1, et sont de degrés respectifs $n-2$, $2n-6$ par rapport à λ, $2n-6$, $n-2$ par rapport à λ_1.

Si l'on élimine λ_1 par exemple, le résultant sera de degré $(n-2)^2 + (2n-6)^2$ par rapport à λ; d'ailleurs, il contient alors le facteur $\Omega(\lambda, \lambda)$ de degré $3n-8$; on l'abaissera donc au degré

$$(n-2)^2 + (2n-6)^2 - (3n-8) = (5n-16)(n-3).$$

Alors encore il s'annule pour certaines valeurs étrangères à la question. Effectivement, si l'on a à la fois

$$\begin{aligned} l_1 l' - l_1' l &= 0, \\ l_1 q' + l_1' q + l_1'' p'' &= 0, \\ l q_1' + l' q_1 + l'' p_1'' &= 0, \end{aligned}$$

les équations (10) seront encore satisfaites, mais on ne peut pas de ces équations remonter aux équations (9). En supposant l'', l_1'' différents de zéro, ce système étranger peut être remplacé par le suivant :

$$\begin{aligned} l_1 l' - l_1' l &= 0, \\ (l_1 l'' - l_1'' l) q' + (l_1' l'' - l' l_1'') q &= 0, \\ (l_1 l'' - l_1'' l) q_1' + (l_1' l'' - l' l_1'') q_1 &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, les couples de valeurs de λ et λ_1 qui satisfont aux

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

équations

$$\frac{l l_1' - l' l_1}{\lambda - \lambda_1'} = 0, \quad \frac{l' l_1' - l_1 l'}{\lambda - \lambda_1} = 0$$

et n'annulent pas l', l_1' se présenteront comme solutions étrangères du système (11). Mais ces couples ne sont autres que ceux qui déterminent les points doubles de la courbe unicursale d'ordre $n-2$,

$$x = \frac{l}{l'}, \quad y = \frac{l'}{l'}$$

ou, ce qui revient au même, les tangentes doubles de la courbe de $(n-2)^{\text{ième}}$ classe enveloppée par la droite $lx + l'y + l' = 0$. Leur nombre est donc $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$, et, puisque l'équation finale fournit aussi bien les valeurs de λ que celles de λ_1, le nombre des solutions étrangères dont il s'agit sera $(n-3)(n-4)$. Enfin chacune d'elles comptera pour quatre, car, si dans les équations (10) on regarde λ, λ_1 comme deux coordonnées, les valeurs dont il s'agit correspondent à des points doubles communs aux deux courbes représentées par ces équations.

Le degré de l'équation finale sera donc

$$(5n-16)(n-3) - 4(n-3)(n-4) = n(n-3),$$

et, en associant par couples les racines de cette équation, on voit que la courbe possède $\frac{n(n-3)}{2}$ points doubles.

Un ou plusieurs d'entre eux pourraient d'ailleurs dégénérer en points de rebroussement; dans ce cas, les valeurs correspondantes de λ et λ_1 deviennent égales; nous avons indiqué dans le paragraphe précédent un moyen plus simple de les calculer directement.

7. Les équations (11), qui déterminent les points doubles, et les solutions étrangères dont nous venons de parler peuvent être retrouvées immédiatement par une considération géométrique très simple.

A chaque valeur de λ correspondent deux points de la courbe, situés sur la droite $lx + l'y + l' = 0$. Un point double étant déterminé à la fois par deux valeurs λ, λ_1, il arrive, dans ce cas, que la droite qui joint

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

les deux points (λ) va passer par un des deux points (λ_1), et inversement. On a donc, en appliquant la formule établie à la page 12, pour déterminer l'intersection de la courbe avec une droite,

$$pl_1^2 + p'l_1'^2 + p''l_1''^2 + 2q'l_1'l_1'' + 2q''l_1''l_1 + 2q''l_1l_1' = 0,$$
$$p_1l^2 + p_1'l'^2 + p_1''l''^2 + 2q_1l'l'' + 2q_1'l''l + 2q_1''ll' = 0.$$

Toutefois, les deux droites (λ) et (λ_1) pourraient se confondre; dans ce cas, chacune d'elles passant par les points situés sur l'autre, les deux équations précédentes seraient encore satisfaites, mais il n'en résulterait plus qu'un des points (λ) se confond avec un des points (λ_1). Ce cas se présente lorsqu'on a $\frac{l}{l_1} = \frac{l'}{l_1'} = \frac{l''}{l_1''}$, et l'on retrouve ainsi les $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ couples de valeurs qui correspondent aux tangentes doubles de la courbe de $(n-2)^{\text{ième}}$ classe mentionnée ci-dessus.

8. L'équation finale d'ordre $n(n-3)$, obtenue après la suppression des facteurs étrangers, peut être ramenée à une équation de degré moitié moindre, accompagnée de $\frac{n(n-3)}{2}$ équations du second degré.

En effet, en vertu des équations (11), toute racine λ est une fonction rationnelle de la valeur λ_1 correspondante, et λ_1 la même fonction de λ. Soient donc $\lambda = f(\lambda_1)$, $\lambda_1 = f(\lambda)$; posons

$$u = \lambda f(\lambda) = \lambda_1 f(\lambda_1);$$

l'équation aux valeurs de u s'abaisse au degré $\frac{n(n-3)}{2}$, et à chacune d'elles correspond un couple de valeurs λ, λ_1. Elles seront données par une équation du second degré.

9. La formation des coefficients de l'équation finale en fonction de ceux des polynômes $p, p', \ldots q'', l, l', l''$, H présentant une certaine complication, nous nous bornerons à calculer les facteurs étrangers. Le premier, $\Omega(\lambda, \lambda)$, s'obtient en faisant $\lambda_1 = \lambda$ dans une des équations (10), après avoir supprimé le facteur $(\lambda - \lambda_1)^2$. On trouve ainsi

$$\mathrm{H}\left(l\frac{dl'}{d\lambda} - l'\frac{dl}{d\lambda}\right)^2 - \left(q'\frac{dl}{d\lambda} + q\frac{dl'}{d\lambda} + p''\frac{dl''}{d\lambda}\right)^2$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ou, en développant et supprimant p'', qui ne doit pas figurer dans Ω,

$$\Omega(\lambda,\lambda)=p\left(\frac{dl'}{d\lambda}\right)^2+p'\left(\frac{dl''}{d\lambda}\right)^2+p''\left(\frac{dl'''}{d\lambda}\right)^2+2q\frac{dl'}{d\lambda}\frac{dl''}{d\lambda}+2q'\frac{dl''}{d\lambda}\frac{dl}{d\lambda}+2q''\frac{dl'}{d\lambda}\frac{dl''}{d\lambda}.$$

Le second facteur fournira les valeurs de λ qui déterminent les tangentes doubles de la courbe de $(n-2)^{\text{ième}}$ classe dont on a parlé. Pour l'obtenir, éliminons λ_1 entre les équations

$$\frac{ll''_1-l_1l''}{\lambda-\lambda_1}=0,\quad \frac{l'l''_1-l'_1l''}{\lambda-\lambda_1}=0.$$

Soient

$$l=l_0+l_1\lambda+l_2\lambda^2+\ldots+l_{n-2}\lambda^{n-2},$$
$$l'=l'_0+l'_1\lambda+l'_2\lambda^2+\ldots+l'_{n-2}\lambda^{n-2},$$
$$l''=l''_0+l''_1\lambda+l''_2\lambda^2+\ldots+l''_{n-2}\lambda^{n-2}.$$

Les deux équations peuvent s'écrire :

$$\frac{l(l''_1-l'')}{\lambda-\lambda_1}-\frac{l''(l_1-l)}{\lambda-\lambda_1}=0,\quad \frac{l'(l''_1-l'')}{\lambda-\lambda_1}-\frac{l''(l'_1-l')}{\lambda-\lambda_1}=0,$$

et les coefficients de λ_1^i dans ces deux équations sont respectivement

$$l''(l_{n-2}\lambda^{n-i-3}+l_{n-3}\lambda^{n-i-4}+\ldots+l_{i+1})-l(l''_{n-2}\lambda^{n-i-3}+l''_{n-3}\lambda^{n-i-4}+\ldots+l''_{i+1}),$$
$$l''(l'_{n-2}\lambda^{n-i-3}+l'_{n-3}\lambda^{n-i-4}+\ldots+l'_{i+1})-l'(l''_{n-2}\lambda^{n-i-3}+l''_{n-3}\lambda^{n-i-4}+\ldots+l''_{i+1}),$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\lambda^{i+1}}[l(l''_i\lambda^i+l''_{i-1}\lambda^{i-1}+\ldots+l''_0)-l''(l_i\lambda^i+l_{i-1}\lambda^{i-1}+\ldots+l_0)]=\frac{\alpha_i}{\lambda^{i+1}},$$

$$\frac{1}{\lambda^{i+1}}[l'(l''_i\lambda^i+l''_{i-1}\lambda^{i-1}+\ldots+l''_0)-l''(l'_i\lambda^i+l'_{i-1}\lambda^{i-1}+\ldots+l'_0)]=\frac{\beta_i}{\lambda^{i+1}}.$$

Nous poserons, pour i supérieur à h,

$$L_{h,i}=l_i\lambda^{i-h}+l_{i-1}\lambda^{i-h-1}+\ldots+l_h,$$
$$L'_{h,i}=l'_i\lambda^{i-h}+l'_{i-1}\lambda^{i-h-1}+\ldots+l'_h,$$
$$L''_{h,i}=l''_i\lambda^{i-h}+l''_{i-1}\lambda^{i-h-1}+\ldots+l''_h,$$

d'où

$$\alpha_i=L''_{0,i}l-L_{0,i}l'',$$
$$\beta_i=L''_{0,i}l'-L'_{0,i}l''.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Cela posé, le résultant cherché prend la forme d'un déterminant dont les éléments sont formés linéairement d'expressions $\frac{\alpha_i\beta_k - \alpha_k\beta_i}{\lambda^{i+k+2}}$. Or on a, en remplaçant les α et les β par leurs valeurs,

$$\alpha_i\beta_k - \alpha_k\beta_i = l'' \begin{vmatrix} L_{0i} & L'_{0i} & L''_{0i} \\ L_{0k} & L'_{0k} & L''_{0k} \\ l & l' & l'' \end{vmatrix},$$

et, en vertu des identités suivantes, faciles à vérifier, i étant supposé $< k$,

$$\begin{aligned} l - L_{0k} &= \lambda^{k+1} L_{k+1,n-2}, \\ l' - L'_{0k} &= \lambda^{k+1} L'_{k+1,n-2}, \\ l'' - L''_{0k} &= \lambda^{k+1} L''_{k+1,n-2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{0k} - L_{0i} &= \lambda^{i+1} L_{i+1,k}, \\ L'_{0k} - L'_{0i} &= \lambda^{i+1} L'_{i+1,k}, \\ L''_{0k} - L''_{0i} &= \lambda^{i+1} L''_{i+1,k}, \end{aligned}$$

on aura, en supprimant le facteur l'', que nous devons négliger,

$$\frac{\alpha_i\beta_k - \alpha_k\beta_i}{l''} = \lambda^{i+k+2} \begin{vmatrix} L_{0i} & L'_{0i} & L''_{0i} \\ L_{i+1,k} & L'_{i+1,k} & L''_{i+1,k} \\ L_{k+1,n-2} & L'_{k+1,n-2} & L''_{k+1,n-2} \end{vmatrix} = \lambda^{i+k+2} \rho_{ik}.$$

Enfin, en posant, pour $i < k$,

$$c_{i,k} = \rho_{0,i+k+1} + \rho_{1,i+k} + \ldots + \rho_{i,k+1},$$

où l'on supprime dans le second membre tous les termes dont un indice surpasse $n-3$, le facteur cherché sera (1)

$$\begin{vmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & c_{0,2} & \ldots & c_{0,n-4} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \ldots & \ldots & c_{1,n-4} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-4,0} & \ldots & \ldots & \ldots & c_{n-4,n-4} \end{vmatrix}.$$

(1) Nous appliquons ici la règle formulée par M. Rouché pour obtenir le résultant de deux équations (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, mars 1877).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Chacun des termes ρ_{ik} est d'ordre $i+k-i-1+n-2-k-1=n-4$; le degré du déterminant est donc $(n-3)(n-4)$. Ce facteur, égalé à 0, donne les tangentes doubles dont on a parlé.

10. Le cas général où les fonctions q, q', p'', l, l', H, qui figurent dans l'expression des coordonnées de la courbe, ne seraient liées par aucune relation, peut se ramener au précédent en multipliant les deux termes des expressions $\frac{q' \pm l'\sqrt{\mathrm{H}}}{p''}$, $\frac{q \mp l\sqrt{\mathrm{H}}}{p''}$ par leur dénominateur commun p''. On verra ainsi que la courbe est encore du premier genre, mais généralement d'ordre $2n$.

§ III. — Introduction des fonctions elliptiques. Module.

11. Pour introduire les fonctions elliptiques dans l'expression des coordonnées de la courbe fournie par les formules (8), nous ferons usage de la substitution linéaire

$$\rho = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2}\frac{\lambda_2 - \lambda_2}{\lambda_4 - \lambda_1}, \tag{12}$$

en désignant par λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 les racines de l'équation $\mathrm{H} = 0$. On trouve ainsi

$$1 - \rho = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2}\frac{\lambda - \lambda_3}{\lambda - \lambda_1},$$

$$1 - k^2\rho = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_4 - \lambda_2}\frac{\lambda - \lambda_4}{\lambda - \lambda_1},$$

en posant

$$k^2 = \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_1}\frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_2},$$

et les valeurs des coordonnées prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} x = \dfrac{f_n(\rho) + \varphi_{n-2}(\rho)\sqrt{\rho(1-\rho)(1-k^2\rho)}}{\psi_n(\rho)}, \\ y = \dfrac{\mathrm{F}_n(\rho) + \Phi_{n-2}(\rho)\sqrt{\rho(1-\rho)(1-k^2\rho)}}{\psi_n(\rho)}, \end{cases} \tag{13}$$

où f, φ, ψ, F, Φ sont des polynômes de degré marqué par leur indice.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On serait arrivé directement à ces formules en prenant pour u et v deux des quatre courbes du faisceau qui sont tangentes à la proposée, puisque, alors, parmi les quatre valeurs de λ, figurent o et ∞.

Soient enfin

$$\rho = \mathrm{sn}^2 t, \quad 1 - \rho = \mathrm{cn}^2 t, \quad 1 - k^2\rho = \mathrm{dn}^2 t;$$

on aura

$$(14)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{f_n(\mathrm{sn}^2 t) + \frac{1}{2}\varphi_{n-2}(\mathrm{sn}^2 t)\dfrac{d\,\mathrm{sn}^2 t}{dt}}{\psi_n(\mathrm{sn}^2 t)}, \\ y = \dfrac{\mathrm{F}_n(\mathrm{sn}^2 t) + \frac{1}{2}\Phi_{n-2}(\mathrm{sn}^2 t)\dfrac{d\,\mathrm{sn}^2 t}{dt}}{\psi_n(\mathrm{sn}^2 t)}. \end{cases}$$

Dans ces formules, l'ambiguïté qui provenait du double signe du radical a disparu; en donnant à t deux valeurs égales et de signes contraires, on obtiendra les coordonnées des deux points variables provenant d'une même courbe du faisceau.

12. Ces expressions définissent des fonctions de t, admettant les deux périodes $2\mathrm{K}$, $2i\mathrm{K}'$. Chacune d'elles admet n zéros et n infinis; en effet, le dénominateur commun ψ_n admet $2n$ zéros égaux et de signes contraires, et chacun des numérateurs admet également $2n$ zéros. Or, en vertu des relations initiales

$$q^2 - l^2\mathrm{H} = p'p'',$$
$$q'^2 - l'^2\mathrm{H} = pp'',$$
$$p''q'' - qq' = ll'\mathrm{H},$$

on voit que toute valeur de λ qui annule p'' annule un des deux numérateurs $q' \pm l'\sqrt{\mathrm{H}}$ de x et le numérateur correspondant $q' \mp l'\sqrt{\mathrm{H}}$ de y; si donc t_1 et $-t_1$ sont deux valeurs de t qui annulent ψ_n, l'une d'elles annulera à la fois les numérateurs de x et de y dans les formules (14). Donc x et y n'ont réellement que n infinis et n zéros.

13. Le module k des transcendantes elliptiques introduites dans le calcul précédent garde une valeur constante lorsqu'on change les $2(n-1)$ points fixes du faisceau. Soient, en effet, k' la nouvelle

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

valeur du module, ρ' celle du paramètre. On voit sans peine, en se reportant aux formules (2), (12) et (13), que ρ' peut s'exprimer rationnellement en fonction de x, y, et par suite en fonction de ρ et de $\sqrt{\rho(1-\rho)(1-k^2\rho)}$; il en est de même de $\sqrt{\rho'(1-\rho')(1-k'^2\rho')}$. Inversement, ρ et $\sqrt{\rho(1-\rho)(1-k^2\rho)}$ sont fonctions rationnelles de ρ' et de $\sqrt{\rho'(1-\rho')(1-k'^2\rho')}$. Les deux systèmes

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} \mathrm{X} = \rho, \\ \mathrm{Y} = \sqrt{\rho(1-\rho)(1-k^2\rho)}, \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{cases} \mathrm{X}' = \rho, \\ \mathrm{Y}' = \sqrt{\rho'(1-\rho')(1-k'^2\rho')} \end{cases}$$

représentent donc deux courbes du troisième ordre qui se correspondent point par point.

Cela posé, soit un faisceau de droites issues d'un point fixe P situé sur la première de ces courbes et la rencontrant en deux points variables :

$$\mathrm{AX} + \mathrm{BY} + \mathrm{C} + \mu(\mathrm{A'X} + \mathrm{B'Y} + \mathrm{C'}) = 0.$$

Il lui correspond un faisceau de courbes d'ordre ν, par exemple,

$$\varphi_\nu(\mathrm{X}', \mathrm{Y}') + \mu\,\psi_\nu(\mathrm{X}', \mathrm{Y}') = 0,$$

passant par le point Q de la cubique (II), corrélatif du point P, par deux points variables et par $3\nu - 3$ autres points fixes de cette cubique. En particulier, aux quatre tangentes menées de P à la cubique (I) correspondent quatre courbes d'ordre ν passant par Q, par les $3\nu - 3$ autres points fixes, et tangentes à la cubique (II).

D'ailleurs, on peut choisir le point P de telle sorte que le point corrélatif Q forme avec $3\nu - 4$ des autres points fixes le système des points d'intersection d'une courbe d'ordre $\nu - 1$ avec la cubique (II), car $3\nu - 4$ points de rencontre d'une telle courbe avec une cubique déterminent le $(3\nu - 3)^{\text{ième}}$. On ne changera pas alors les points communs à la cubique et aux courbes d'ordre ν, si l'on remplace celles-ci par une courbe fixe d'ordre $\nu - 1$ comprenant le point Q et les $3\nu - 4$ autres points en question, et si on lui adjoint un faisceau de droites issues du point fixe négligé. Mais un tel faisceau correspond linéairement à celui

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

des droites issues de P. En particulier, aux quatre tangentes menées de P à la cubique (I) correspondent les quatre tangentes menées à la cubique (II) par le point fixe négligé. Le rapport anharmonique des quatre premières droites est donc égal à celui des quatre autres, et, puisque ce rapport, invariable, comme on sait, pour tous les points d'une même cubique, est égal à k^2 ou à une des valeurs conjuguées $\frac{1}{k^2}$, $1-k^2$, ..., on en conclut que k'^2 est égal à k^2 ou à une des valeurs conjuguées. Par un échange convenable des quatre valeurs de λ dont k^2 est le rapport anharmonique, on pourra toujours faire en sorte qu'on ait $k^2 = k'^2$.

Ce rapport étant d'ailleurs égal à celui des quatre tangentes menées en un quelconque de leurs points communs aux courbes du faisceau (2) tangentes à la proposée, on en conclut que le rapport anharmonique de ces quatre droites est indépendant des $2(n-1)$ points fixes du faisceau (1).

§ IV. — Introduction de la fonction $p(u)$.

14. Il peut être avantageux, comme on le verra plus loin, d'exprimer les coordonnées x, y en fonction des transcendantes $p(u)$, $p'(u)$ employées par M. Weierstrass. A cet effet, reprenons les formules (8), et transformons H en un polynôme du troisième degré privé de second terme, par une substitution de la forme

$$\lambda = \lambda_1 + \frac{m}{z-n},$$

où λ_1 désigne une des racines de l'équation $H = 0$.

Soit

$$H = F(\lambda) = A_0(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_4);$$

il viendra

$$H = \frac{mA_0}{(z-n)^3}[(\lambda_1-\lambda_2)(z-n+m)][(\lambda_1-\lambda_3)(z-n+m)][(\lambda_1-\lambda_4)(z-n+m)].$$

---

(1) La démonstration précédente, due à M. Cayley, est citée dans le *Traité des fonctions abéliennes* de Clebsch et Gordan; nous avons élucidé quelques points de détail.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

En posant alors, pour annuler le coefficient de z^2,

$$m = 3gA_0(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4) = 3gF'(\lambda_1),$$
$$n = gA_0[(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)+(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)+(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_2)] = \frac{gF''(\lambda_1)}{2},$$

g désignant un simple coefficient numérique, le terme constant devient

$$\begin{aligned} &g^3A_0^3(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)\\ &\times[(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)-(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_2)]\\ &\times[(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_4)-(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_3)]\\ &\times[(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)-(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)], \end{aligned}$$

ou, en appelant J l'invariant du troisième ordre de la forme biquadratique H, et en se reportant à l'expression connue de cet invariant en fonction des racines,

$$-2^4.3^3.g^3(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)J.$$

Le coefficient de z aura de même pour valeur

$$\begin{aligned} &g^2A_0^2(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)\\ &\times\{[(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_4)-(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_3)][(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)-(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)]\\ &+[(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)-(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_2)][(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_2)-(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_4)]\\ &+[(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_3)-(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_2)][(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_2)-(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)]\}, \end{aligned}$$

ou, en réduisant et désignant par I l'invariant du second ordre de H,

$$\begin{aligned} &-\tfrac{3}{2}g^2A_0^2(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)\Sigma(\lambda_1-\lambda_2)^2(\lambda_3-\lambda_4)^2\\ &=-36g^2(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)I, \end{aligned}$$

d'où, en prenant $g=\frac{1}{12}$,

$$H = \frac{F'^2(\lambda_1)}{16\left[z-\frac{F''(\lambda_1)}{24}\right]^3}(4z^3-Iz-J),$$

et l'expression des coordonnées prendra la forme

$$\frac{f_n(z)+\varphi_{n-2}(z)\sqrt{4z^3-Iz-J}}{\psi_n(z)},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

où f, φ, ψ sont des fonctions entières de degré marqué par leur indice.

La relation qui existe entre λ et z est donnée par la formule

$$\lambda = \lambda_1 + \frac{6F'(\lambda_1)}{24z - F''(\lambda_1)}.$$

Soit alors

$$u = -\int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{H}}.$$

Par le changement de variables indiqué, cette intégrale devient, on le voit aussitôt,

$$u = \int_{\infty}^{z} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - Iz - J}}.$$

Soit donc $z = p(u)$ la fonction transcendante qui résulte de l'inversion de cette intégrale; on aura

$$\sqrt{4z^3 - Iz - J} = p'(u),$$

et les coordonnées x et y seront exprimées en fonction rationnelle de $p(u)$ et $p'(u)$.

15. La fonction $p(u)$ admet deux périodes 2ω, $2\omega'$ liées aux racines de l'équation $4z^3 - Iz - J = 0$ par les relations suivantes, où z', z'', z''' désignent ces trois racines :

$$z' = p(\omega),$$
$$z'' = p(\omega'),$$
$$z''' = p(\omega + \omega').$$

Si dans la relation entre λ et u on remplace λ_1 par une autre racine de l'équation $\Delta = 0$, l'argument u qui correspond à une valeur donnée de λ se change en $u + \omega$, $u + \omega'$ ou $u + \omega + \omega'$.

On sait qu'en posant

$$\sigma(u) = u \Pi' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2}},$$

où le signe du produit Π' se rapporte à toutes les valeurs $w = 2m\omega + 2n\omega'$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

sauf la valeur o, m et n étant des entiers positifs ou négatifs, on démontre la relation suivante (¹) :

$$p(u) = -\frac{d^2 \log \sigma(u)}{du^2} = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right].$$

Un des avantages que présente la considération de la transcendante $p(u)$ consiste dans l'emploi de la formule suivante (²), applicable à tous les problèmes où intervient la multiplication de l'argument,

$$p(nu) = p(u) - \frac{\psi_{n-1}(u)\,\psi_{n+1}(u)}{\psi_n{}^2(u)},$$

en posant, pour abréger,

$$\psi_\rho = \frac{(-1)^{\rho-1}}{[2!\,3!\ldots(\rho-1)!]^2} \begin{vmatrix} p' & p'' & \ldots & p^{(\rho-1)} \\ p'' & p''' & \ldots & p^{(\rho)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p^{(\rho-1)} & p^{(\rho)} & \ldots & p^{(2\rho-3)} \end{vmatrix}.$$

Le calcul des dérivées successives de $p(u)$ se fait très simplement au moyen de la formule $p''' = 12pp'$.

§ V. — Expression de x et de y au moyen des fonctions Z.

16. L'expression des coordonnées x, y peut encore être obtenue sous une autre forme par une méthode synthétique dont l'idée est due à M. Hermite (³).

En partant de la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples, on peut, en général, représenter une courbe unicursale par des équations telles que celles-ci :

$$x = x_0 + \frac{A}{t-a} + \frac{B}{t-b} + \ldots + \frac{L}{t-l},$$

$$y = y_0 + \frac{A'}{t-a} + \frac{B'}{t-b} + \ldots + \frac{L'}{t-l}.$$

(¹) KIEPERT, *Journal de Crelle*, t. 76.
(²) *Id.*, *ibid.*
(³) *Journal de Crelle*, t. 82.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Si n est le nombre des valeurs $a, b, \ldots, l$, la courbe est de degré n et admet $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles.

On est amené à chercher un mode de représentation analogue dans le cas des courbes elliptiques, en s'appuyant sur ce théorème fondamental de la théorie des fonctions doublement périodiques :

Toute fonction uniforme ayant pour périodes $2\,\mathrm{K}$, $2i\mathrm{K}'$ *peut être décomposée en éléments simples ainsi qu'il suit :*

$$\begin{aligned} &\mathrm{G} + \mathrm{A}\mathrm{Z}(t-a) + \mathrm{A}_1\mathrm{Z}'(t-a) + \mathrm{A}_2\mathrm{Z}''(t-a) + \ldots \\ &\quad + \mathrm{B}\mathrm{Z}(t-b) + \ldots \\ &\quad + \mathrm{C}\mathrm{Z}(t-c) + \ldots, \end{aligned}$$

où $\mathrm{Z}(t)$ *est la dérivée logarithmique de la fonction* $\mathrm{H}(t)$ *de Jacobi et où les résidus* A, B, C, ... *ont pour somme zéro.*

Nous poserons donc, $a, b, \ldots, l$ étant les n infinis simples communs aux deux coordonnées,

$$15) \qquad \begin{cases} x = x_0 + \mathrm{A}\mathrm{Z}(t-a) + \mathrm{B}\mathrm{Z}(t-b) + \ldots + \mathrm{L}\mathrm{Z}(t-l), \\ y = y_0 + \mathrm{A}'\mathrm{Z}(t-a) + \mathrm{B}'\mathrm{Z}(t-b) + \ldots + \mathrm{L}'\mathrm{Z}(t-l). \end{cases}$$

En supposant les deux relations $\Sigma \mathrm{A} = 0$, $\Sigma \mathrm{A}' = 0$, on voit que les paramètres qui entrent dans ces équations sont au nombre de $3n$: ce sont x_0, y_0, le module de la transcendante, $2n-2$ résidus, puis enfin, en prenant $t-a$ pour variable, les $n-1$ différences $b-a$, $c-a$, ..., $l-a$. Ce nombre de constantes est bien celui qui correspond à une courbe de degré n ayant $\frac{n(n-3)}{2}$ points doubles.

17. Pour vérifier que la courbe représentée par les équations précédentes est de degré n, formons l'équation qui détermine ses points de rencontre avec une droite quelconque. Le premier membre étant une fonction doublement périodique admettant n infinis et par suite n zéros, on en conclut que tel est le nombre des points d'intersection de la droite et de la courbe.

On voit de plus que la somme des arguments de n points de la courbe situés en ligne droite est constante, à des multiples près des périodes.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

18. Évaluons maintenant la classe de la courbe, pour en déduire le nombre de ses points doubles. Les arguments des points de contact des tangentes menées par un point quelconque α, β vérifient l'équation

$$\alpha y' - \beta x' - xy' + yx' = 0,$$

où x, y sont les fonctions de t définies ci-dessus; x', y' leurs dérivées par rapport à t. Or on a

$$x' = \sum A\left[\frac{H''(t-a)}{H(t-a)} - \frac{H'^2(t-a)}{H^2(t-a)}\right],$$

$$y' = \sum A'\left[\frac{H''(t-a)}{H(t-a)} - \frac{H'^2(t-a)}{H^2(t-a)}\right];$$

donc les termes en $\frac{1}{H^3(t-a)}$, $\frac{1}{H^3(t-b)}$, ... disparaissent dans $yx' - xy'$, et l'équation précédente admet n infinis doubles a, b, ..., l, et par suite $2n$ zéros. Toutefois, on doit écarter comme étrangères à la question les valeurs qui annuleraient à la fois x' et y', car elles correspondraient à des points de rebroussement. En effet, les valeurs de t qui annulent x' sont celles pour lesquelles à une même valeur de x correspondent deux valeurs égales de t, ce qui a lieu soit aux points de contact des tangentes parallèles à l'axe des y, soit aux points de rebroussement. Ce dernier cas est seul possible, si ces valeurs annulent en même temps y'.

Soit donc r le nombre de ces points. La classe de la courbe sera, d'après ce qui précède, égale à $2n - r$; on a donc, suivant la formule de Plücker,

$$2n - r = n(n-1) - 2d - 3r,$$

d'où

$$d + r = \frac{n(n-3)}{2}.$$

19. On arrive encore à la même conclusion en calculant le nombre des points d'inflexion i au moyen de l'équation

$$x'y'' - y'x'' = 0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On a

$$x'' = \sum A\left[\frac{H'''(t-a)}{H(t-a)} - 3\frac{H'(t-a)H''(t-a)}{H^2(t-a)} + 2\frac{H'^3(t-a)}{H^3(t-a)}\right],$$

$$y'' = \sum A'\left[\frac{H'''(t-a)}{H(t-a)} - 3\frac{H'(t-a)H''(t-a)}{H^2(t-a)} + 2\frac{H'^3(t-a)}{H^3(t-a)}\right],$$

et, par suite, dans $x'y'' - y'x''$, les termes en AA', BB', ... se détruisent, et ceux qui contiennent $(AB' - BA')$ ont pour dénominateur $H^3(t-a)H^3(t-b)$. L'équation admet donc $3n$ zéros; mais ici encore il faut écarter les arguments des points de rebroussement, et chacun d'eux, vérifiant à la fois les deux équations

$$x'y'' - y'x'' = 0,$$

$$x'y''' - y'x''' = 0,$$

doit être compté deux fois. Le nombre i est donc égal à $3n - 2r$, et, en appliquant les formules de Plücker, on a

$$3n - 2r = 3n(n-2) - 6d - 8r$$

ou

$$d + r = \frac{n(n-3)}{2}.$$

En même temps, on voit que r ne peut dépasser $\frac{3n}{2}$.

Le nombre des tangentes doubles se déduira de la formule générale

$$2t = m(m-1) - 3i - n,$$

et l'on trouvera

$$t = \frac{(2n-r)^2 - 12n + 7r}{2}.$$

§ VI. — Transformation des expressions précédentes.

20. En partant des diverses expressions obtenues pour les coordonnées x, y d'un point de la courbe, on peut mettre celles-ci sous une nouvelle forme, très importante au point de vue des applications.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ les zéros respectifs de x et de y considérées comme fonctions doublement périodiques de t à l'aide des

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

formules établies ci-dessus; soient $a, b, c, \ldots, l$ les n infinis communs de ces deux fonctions.

D'après un théorème dû à M. Liouville, h, h', h_1, h'_1 désignant des entiers, on a

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - (a + b + \ldots + l) = 2h\mathrm{K} + 2h'i\mathrm{K}',$$
$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n - (a + b + \ldots + l) = 2h_1\mathrm{K} + 2h'_1 i\mathrm{K}'.$$

Cela posé, l'expression

$$\frac{\mathrm{H}(t-\alpha_1)\mathrm{H}(t-\alpha_2)\ldots\mathrm{H}(t-\alpha_n)}{\mathrm{H}(t-a)\mathrm{H}(t-b)\ldots\mathrm{H}(t-l)}$$

admet la période $2\mathrm{K}$ et, lorsqu'on y change t en $t + 2i\mathrm{K}'$, est multipliée par $e^{-\frac{2h'\pi\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}}$. Si donc on la multiplie par $e^{-\frac{i\pi h't}{\mathrm{K}}}$, le produit admettra les deux périodes $2\mathrm{K}$, $2i\mathrm{K}'$; d'ailleurs il a mêmes zéros et mêmes infinis que x. Donc on peut poser

$$(16) \qquad x = \mathfrak{A}\, e^{-\frac{i\pi h't}{\mathrm{K}}} \frac{\mathrm{H}(t-\alpha_1)\mathrm{H}(t-\alpha_2)\ldots\mathrm{H}(t-\alpha_n)}{\mathrm{H}(t-a)\mathrm{H}(t-b)\ldots\mathrm{H}(t-l)}$$

et de même

$$y = \mathfrak{B}\, e^{-\frac{i\pi h'_1 t}{\mathrm{K}}} \frac{\mathrm{H}(t-\beta_1)\mathrm{H}(t-\beta_2)\ldots\mathrm{H}(t-\beta_n)}{\mathrm{H}(t-a)\mathrm{H}(t-b)\ldots\mathrm{H}(t-l)},$$

$\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ désignant deux facteurs constants.

21. Au moyen de ces formules, on peut transformer x et y en quotients d'expressions algébriques de degré moindre que celles qui ont été obtenues primitivement au § I.

Soit, pour abréger,

$$a + b + \ldots + l = \sigma.$$

Considérons, dans le cas où n est pair, la fonction

$$e^{-\frac{i\pi h't}{\mathrm{K}}} \frac{\mathrm{H}(t-\alpha_1)\ldots\mathrm{H}(t-\alpha_n)}{\Theta^n\left(t-\frac{\sigma}{n}\right)},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et, dans le cas de n impair, celle-ci :

$$e^{-\frac{i\pi h't}{K}}\frac{H\left(t-\frac{\sigma}{n}\right)H(t-\alpha_1)\dots H(t-\alpha_n)}{\Theta^{n+1}\left(t-\frac{\sigma}{n}\right)}.$$

Elles admettent les deux périodes $2K$, $2iK'$.

Posons $\varepsilon=\operatorname{sn}^2\frac{\sigma}{n}$,

$$\rho'=\operatorname{sn}^2\left(t-\frac{\sigma}{n}\right)=\frac{\left[\sqrt{\rho(1-\varepsilon)(1-k^2\varepsilon)}-\sqrt{\varepsilon(1-\rho)(1-k^2\rho)}\right]^2}{(1-k^2\varepsilon\rho)^2}.$$

Si n est pair, on pourra poser

$$e^{-\frac{i\pi h't}{K}}\frac{H(t-\alpha_1)\dots H(t-\alpha_n)}{\Theta^n\left(t-\frac{\sigma}{n}\right)}=F_{\frac{n}{2}}(\rho')+\sqrt{\rho'(1-\rho')(1-k^2\rho')}\,F_{\frac{n-4}{2}}(\rho'),$$

où $F_{\frac{n}{2}}$, $F_{\frac{n-4}{2}}$ sont des fonctions entières d'un degré égal à leur indice, car les deux membres de cette égalité admettent les périodes $2K$, $2iK'$ et les mêmes infinis; d'ailleurs, on peut déterminer dans le second membre $(n-1)$ coefficients par la condition qu'il s'annule pour les valeurs α_1, α_2, ..., α_{n-1}, et par suite pour α_n.

Dans le second cas, on aura de même, en supprimant le facteur $\frac{H\left(t-\frac{\sigma}{n}\right)}{\Theta\left(t-\frac{\sigma}{n}\right)}$,

$$e^{-\frac{i\pi h't}{K}}\frac{H(t-\alpha_1)\dots H(t-\alpha_n)}{\Theta^n\left(t-\frac{\sigma}{n}\right)}=\sqrt{\rho'}\,F_{\frac{n-1}{2}}(\rho')+\sqrt{(1-\rho')(1-k^2\rho')}\,F_{\frac{n-3}{2}}(\rho'),$$

et, en considérant d'une manière analogue les expressions

$$e^{-\frac{i\pi h_1't}{K}}\frac{H(t-\beta_1)\dots H(t-\beta_n)}{\Theta^n\left(t-\frac{\sigma}{n}\right)},\qquad\frac{H(t-\alpha)\dots H(t-l)}{\Theta^n\left(t-\frac{\sigma}{n}\right)},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

on mettra chacune des coordonnées sous la forme suivante, si n est pair,

$$\frac{F_{\frac{n}{2}}(\rho') + \sqrt{\rho'(1-\rho')(1-k^2\rho')}\,F_{\frac{n-4}{2}}(\rho')}{\Psi_{\frac{n}{2}}(\rho') + \sqrt{\rho'(1-\rho')(1-k^2\rho')}\,\Psi_{\frac{n-4}{2}}(\rho')},$$

et si n est impair, sous la forme

$$\frac{\sqrt{\rho'}F_{\frac{n-1}{2}} + \sqrt{(1-\rho')(1-k^2\rho')}\,F_{\frac{n-3}{2}}(\rho')}{\sqrt{\rho'}\Psi_{\frac{n-1}{2}} + \sqrt{(1-\rho')(1-k^2\rho')}\,\Psi_{\frac{n-3}{2}}(\rho')}.$$

A l'aide d'une substitution linéaire $\rho' = \frac{\alpha+\beta z}{\gamma+\delta z}$, on aura enfin

$$x = \frac{F(z)\sqrt{M} + F_1(z)\sqrt{N}}{\Psi(z)\sqrt{M} + \Psi_1(z)\sqrt{N}},$$

$$y = \frac{\Phi(z)\sqrt{M} + \Phi_1(z)\sqrt{N}}{\Psi(z)\sqrt{M} + \Psi_1(z)\sqrt{N}}.$$

Ces formules conviennent aux deux cas considérés. Si n est pair, M et N sont des fonctions entières de degrés respectifs 0 et 4; F, Φ, Ψ sont de degré $\frac{n}{2}$; F_1, Φ_1, Ψ_1 sont de degré $\frac{n-4}{2}$. Si n est impair, les degrés de ces fonctions sont 1, 3, $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n-3}{2}$. En toute hypothèse, MN est du quatrième degré.

Clebsch a démontré que de telles équations caractérisent une courbe d'ordre n et du premier genre. Nous n'avons pas à le prouver ici, car il nous suffit de multiplier les deux termes de ces fractions par l'expression conjuguée du dénominateur pour les ramener à la forme

$$x = \frac{q' + l'\sqrt{H}}{p''},$$

$$y = \frac{q - l\sqrt{H}}{p''},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

étudiée au § II de ce Chapitre. On a, dans le cas actuel,

$$\begin{aligned} H &= MN, \\ p'' &= \Psi^2 M - \Psi_1^2 N, \\ q &= \Phi\Psi M - \Phi_1\Psi_1 N, \\ q' &= F\Psi M - F_1\Psi_1 N, \\ l &= -\Phi_1\Psi + \Phi\Psi_1, \\ l' &= F_1\Psi - F\Psi_1, \end{aligned}$$

et il est très facile de constater que les relations supposées plus haut (§ II) sont ici toutes vérifiées.

CHAPITRE II.

INTERSECTION D'UNE COURBE DU PREMIER GENRE ET D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE QUELCONQUE.

§ I. — Relations entre les arguments des points de rencontre.

22. Supposons x et y exprimés en fonction de t par les formules (16) du dernier paragraphe. A chacun des points doubles correspondent deux arguments donnant mêmes valeurs respectives de x et de y. Désignons ces couples par θ_1, θ'_1; θ_2, θ'_2; ..., $\theta_\delta, \theta'_\delta$, en posant

$$\delta = \frac{n(n-3)}{2}.$$

L'équation qui détermine les arguments des points de rencontre de la courbe avec une courbe quelconque d'ordre m, $F(x, y) = 0$, sera de la forme $\Omega(t) = 0$, Ω étant une fonction doublement périodique de t, admettant les infinis a, b, ..., l, chacun au degré m de multiplicité.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Soient $t_1, t_2, \ldots, t_{mn}$ les mn zéros de cette fonction; soit encore

$$a + b + \ldots + l = \sigma;$$

le théorème de M. Liouville donne la relation

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{i=mn} t_i - m\sigma = 2hK + 2h'iK'.$$

En appliquant le même raisonnement qu'au § VI du dernier Chapitre, on pourra donc poser

$$\Omega(t) = Ce^{-\frac{i\pi h' t}{K}} \frac{\prod_{i=1}^{i=mn} H(t - t_i)}{H^m(t-a)H^m(t-b)\ldots H^m(t-l)}.$$

En donnant successivement à t les valeurs θ_ν, θ'_ν, chaque coordonnée reprenant la même valeur, on aura

$$\Omega(\theta_\nu) = \Omega(\theta'_\nu),$$

c'est-à-dire

$$(2) \qquad \frac{\prod_{i=1}^{i=mn} H(\theta_\nu - t_i)}{\prod_{i=1}^{i=mn} H(\theta'_\nu - t_i)} = \gamma_\nu^m e^{\frac{i\pi h'}{K}(\theta_\nu - \theta'_\nu)},$$

en posant

$$\gamma_\nu = \frac{H(\theta_\nu - a)H(\theta_\nu - b)\ldots H(\theta_\nu - l)}{H(\theta'_\nu - a)H(\theta'_\nu - b)\ldots H(\theta'_\nu - l)};$$

la valeur de cette constante est donc indépendante de la courbe de degré m.

L'équation (1) et les $\frac{n(n-3)}{2}$ équations telles que (2) définissent ainsi $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ relations entre les mn arguments des points de rencontre des deux courbes. Effectivement, on sait que, pour $m \geq n-2$, $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points sont déterminés par les $\left[mn - \frac{(n-1)(n-2)}{2}\right]$ autres points.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Si l'on a $m < n-2$, il y en a seulement $\left[mn - \frac{m(m+3)}{2}\right]$ déterminés par les autres points. Dans ce cas, les équations qui précèdent ne sont plus toutes distinctes, mais elles sont toujours satisfaites.

23. Soit $m = n-3$; si la courbe d'ordre $n-3$ est assujettie à passer par tous les points doubles, ce qui la détermine complètement, on voit que les équations (2) sont toutes vérifiées d'elles-mêmes, et l'équation (1) devient

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\delta} (\theta_\nu + \theta'_\nu) = (n-3)\sigma + 2h_0\mathrm{K} + 2h'_0\mathrm{K}'.$$

La somme des couples d'arguments relatifs aux points doubles ne diffère donc de $(n-3)\sigma$ que par des multiples des périodes. Nous pouvons supposer ces arguments choisis de telle sorte que l'on ait

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\delta} (\theta_\nu + \theta'_\nu) = (n-3)\sigma.$$

Soit encore $m = n-3$, la courbe étant assujettie à comprendre tous les points doubles excepté un $(\theta_\rho, \theta'_\rho)$, et en outre à toucher la courbe proposée en un point. L'argument u du point de contact sera donné par la formule

$$u = \frac{\theta_\rho + \theta'_\rho}{2} + h\mathrm{K} + h'i\mathrm{K}',$$

d'où les quatre valeurs

$$\frac{\theta_\rho + \theta'_\rho}{2},\ \frac{\theta_\rho + \theta'_\rho}{2} + \mathrm{K},\ \frac{\theta_\rho + \theta'_\rho}{2} + i\mathrm{K}',\ \frac{\theta_\rho + \theta'_\rho}{2} + \mathrm{K} + i\mathrm{K}'.$$

Les équations (2) sont alors identiquement vérifiées, excepté celle qui se rapporte à $\nu = \rho$. Cette équation sera

$$\frac{\mathrm{H}^2(\theta_\rho - u)}{\mathrm{H}^2(\theta'_\rho - u)} \dot{\prod} \frac{\mathrm{H}(\theta_\rho - \theta_i)\,\mathrm{H}(\theta_\rho - \theta'_i)}{\mathrm{H}(\theta'_\rho - \theta_i)\,\mathrm{H}(\theta'_\rho - \theta'_i)} = \gamma_\rho^{n-3} e^{\frac{i\pi h'}{\mathrm{K}}(\theta_\rho - \theta'_\rho)},$$

où le produit $\dot{\prod}$ s'étend à toutes les valeurs $i = 1, 2, \ldots, \delta$, excepté la valeur ρ.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

En faisant alors $h'=0$, $u=\frac{\theta_\rho+\theta'_\rho}{2}$, on obtient la valeur de la constante γ_ρ^{n-3} en fonction des arguments des points doubles :

$$\gamma_\rho^{n-3}=\dot{\prod}\frac{\mathrm{H}(\theta_\rho-\theta_i)\,\mathrm{H}(\theta_\rho-\theta'_i)}{\mathrm{H}(\theta'_\rho-\theta_i)\,\mathrm{H}(\theta'_\rho-\theta'_i)}.$$

Les δ équations (2) deviennent alors, en faisant successivement $\nu=1, 2, \ldots, \delta$,

$$(2') \qquad \prod_{i=1}^{i=mn}\frac{\mathrm{H}(\theta_\nu-t_i)}{\mathrm{H}(\theta'_\nu-t_i)}=e^{\frac{i\pi h'}{\mathrm{K}}(\theta_\nu-\theta'_\nu)}\left[\dot{\prod}\frac{\mathrm{H}(\theta_\nu-\theta_i)\,\mathrm{H}(\theta_\nu-\theta'_i)}{\mathrm{H}(\theta'_\nu-\theta_i)\,\mathrm{H}(\theta'_\nu-\theta'_i)}\right]^{\frac{m}{n-3}},$$

et le signe $\dot{\prod}$ se rapportant aux valeurs $i=1, 2, \ldots, \delta$, excepté $i=\nu$.

24. Cette équation doit être modifiée lorsque parmi les δ points doubles il y en a qui deviennent des points de rebroussement. Supposons qu'il s'agisse du point $(\theta_\nu, \theta'_\nu)$; posons $\theta_\nu=\theta'_\nu+\varepsilon$, et faisons tendre ε vers zéro. L'équation (2') devient alors, comme on le voit en appliquant aux deux membres la formule de Taylor,

$$\sum_{i=1}^{i=mn}\frac{\mathrm{H}'(\theta_\nu-t_i)}{\mathrm{H}(\theta_\nu-t_i)}=\frac{i\pi h'}{\mathrm{K}}+\frac{m}{n-3}\dot{\sum}\left[\frac{\mathrm{H}'(\theta_\nu-\theta_i)}{\mathrm{H}(\theta_\nu-\theta_i)}+\frac{\mathrm{H}'(\theta_\nu-\theta'_i)}{\mathrm{H}(\theta_\nu-\theta'_i)}\right];$$

le signe $\dot{\sum}$ s'étend aux valeurs $i=1, 2, \ldots, \delta$, excepté $i=\nu$.

§ II. — Cas où la courbe d'ordre m contient des points doubles de la proposée.

25. Supposons que la courbe d'ordre m passe par $(\delta-\mu)$ points doubles, dont les couples d'arguments soient $\theta_{\mu+1}, \theta'_{\mu+1}$; $\theta_{\mu+2}, \theta'_{\mu+2}$; $\ldots$, $\theta_\delta, \theta'_\delta$. Le nombre des points où elle rencontre encore la courbe est alors $k=mn-n(n-3)+2\mu$. Soient $t_1, t_2, \ldots, t_k$ leurs arguments.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

L'équation (1) devient

$$\sum_{i=1}^{i=k} t_i = \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} (\theta_\nu + \theta'_\nu) + (m - n + 3)\sigma + 2h\mathrm{K} + 2h'i\mathrm{K}',$$

et les équations (2) peuvent s'écrire, pour $\nu = 1, 2, \ldots, \mu$,

$$\frac{\mathrm{H}(\theta_\nu - \theta_{\mu+1})\,\mathrm{H}(\theta_\nu - \theta'_{\nu+1})\ldots\mathrm{H}(\theta_\nu - \theta_\delta)\,\mathrm{H}(\theta_\nu - \theta'_\delta)}{\mathrm{H}(\theta'_\nu - \theta_{\mu+1})\,\mathrm{H}(\theta'_\nu - \theta'_{\nu+1})\ldots\mathrm{H}(\theta'_\nu - \theta_\delta)\,\mathrm{H}(\theta'_\nu - \theta'_\delta)} \prod_{i=1}^{i=k} \frac{\mathrm{H}(\theta_\nu - t_i)}{\mathrm{H}(\theta'_\nu - t_i)} = \gamma_\nu^m e^{\frac{i\pi h'}{\mathrm{K}}(\theta_\nu - \theta'_\nu)}$$

ou, en multipliant et divisant le second membre par γ_ν^{n-3} et se reportant à la valeur de cette constante,

$$\prod_{i=1}^{i=k} \frac{\mathrm{H}(\theta_\nu - t_i)}{\mathrm{H}(\theta'_\nu - t_i)} = \gamma_\nu^{m-n+3} e^{\frac{i\pi h'}{\mathrm{K}}(\theta_\nu - \theta'_\nu)} \dot{\prod_{i=1}^{i=\mu}} \frac{\mathrm{H}(\theta_\nu - \theta_i)\,\mathrm{H}(\theta_\nu - \theta'_i)}{\mathrm{H}(\theta'_\nu - \theta_i)\,\mathrm{H}(\theta'_\nu - \theta'_i)},$$

le signe $\dot{\prod}$ indiquant toujours qu'on excepte la valeur $i = \nu$.

Pour $\nu = \mu + 1, \ldots, \delta$, les équations (2) sont vérifiées d'elles-mêmes. Si l'un des points doubles $(\theta_\nu, \theta'_\nu)$, non situé sur la courbe d'ordre m, dégénère en rebroussement, l'équation correspondante devient

$$\sum_{i=1}^{i=k} \frac{\mathrm{H}'(\theta_\nu - t_i)}{\mathrm{H}(\theta_\nu - t_i)} = \frac{i\pi h'}{\mathrm{K}} + \frac{m-n+3}{n-3} \dot{\sum_{i=1}^{i=\delta}} \left[\frac{\mathrm{H}'(\theta_\nu - \theta_i)}{\mathrm{H}(\theta_\nu - \theta_i)} + \frac{\mathrm{H}'(\theta_\nu - \theta'_i)}{\mathrm{H}(\theta_\nu - \theta'_i)}\right]$$
$$+ \dot{\sum_{i=1}^{i=\mu}} \left[\frac{\mathrm{H}'(\theta_\nu - \theta_i)}{\mathrm{H}(\theta_\nu - \theta_i)} + \frac{\mathrm{H}'(\theta_\nu - \theta'_i)}{\mathrm{H}(\theta_\nu - \theta'_i)}\right].$$

26. A l'aide de ces équations, on peut résoudre le problème suivant :

Étant donnés $k - (\mu + 1)$ *des points communs aux deux courbes, calculer les arguments* $t_1, t_2, \ldots, t_{\mu+1}$ *des autres points par une équation de degré* $\mu + 1$, *admettant pour racines les quantités* $\mathrm{sn}^2 t_1, \mathrm{sn}^2 t_2, \ldots, \mathrm{sn}^2 t_{\mu+1}$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

A cet effet, soient

$$v = \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} (\theta_\nu + \theta'_\nu) + (m - n + 3)\sigma + 2hK + 2h'iK' - t_{\mu+2} - t_{\mu+3} - \ldots - t_k,$$

$$e^{v_\nu} = \gamma_\nu^{m-n+3} e^{\frac{i\pi h'}{K}(\theta_\nu - \theta'_\nu)} \left[\prod_{i=1}^{i=\mu} \frac{\mathrm{H}(\theta_\nu - \theta_i)\,\mathrm{H}(\theta_\nu - \theta'_i)}{\mathrm{H}(\theta'_\nu - \theta_i)\,\mathrm{H}(\theta'_\nu - \theta'_i)} \right] \frac{\mathrm{H}(\theta'_\nu - t_{\mu+2}) \ldots \mathrm{H}(\theta'_\nu - t_k)}{\mathrm{H}(\theta_\nu - t_{\mu+2}) \ldots \mathrm{H}(\theta_\nu - t_k)}.$$

Les équations du problème prennent alors la forme suivante, où les seconds membres sont des quantités connues :

$$\sum_{i=1}^{i=\mu+1} t_i = v,$$

$$\prod_{i=1}^{i=\mu+1} \frac{\mathrm{H}(\theta_\nu - t_i)}{\mathrm{H}(\theta'_\nu - t_i)} = e^{v_\nu}.$$

Considérons les fonctions doublement périodiques

$$\frac{\prod_{i=1}^{i=\mu+1} \mathrm{H}(t - t_i)}{\Theta^{\mu+1}\left(t - \frac{v}{\mu+1}\right)},$$

$$\frac{\mathrm{H}\left(t - \frac{v}{\mu+1}\right) \prod_{i=1}^{i=\mu+1} \mathrm{H}(t - t_i)}{\Theta^{\mu+2}\left(t - \frac{v}{\mu+1}\right)},$$

la première dans le cas de μ impair, la seconde dans le cas contraire.

Soit, en outre,

$$x = \mathrm{sn}\left(t - \frac{v}{\mu+1}\right), \quad y = \mathrm{cn}\left(t - \frac{v}{\mu+1}\right), \quad z = \mathrm{dn}\left(t - \frac{v}{\mu+1}\right).$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La première fonction, si μ est impair, peut être mise sous la forme

$$\frac{\prod_{i=1}^{i=\mu+1} \mathrm{H}(t-t_i)}{\Theta^{\mu+1}\left(t-\frac{v}{\mu+1}\right)} = \mathrm{F}_{\frac{\mu+1}{2}}(x^2) + xyz\,\mathrm{F}_{\frac{\mu-3}{2}}(x^2) = \varphi(t),$$

et de même, si μ est pair, on aura

$$\prod_{i=1}^{i=\mu+1} \frac{\mathrm{H}(t-t_i)}{\Theta^{\mu+1}\left(t-\frac{v}{\mu+1}\right)} = x\,\mathrm{F}_{\frac{\mu}{2}}(x^2) + yz\,\mathrm{F}_{\frac{\mu}{2}-1}(x^2) = \varphi(t),$$

les fonctions entières F étant d'un degré égal à leur indice.

Dans les deux cas, l'équation $\varphi(t)=0$, rendue rationnelle, admettra pour racines $\mathrm{sn}^2\left(t_1-\frac{v}{\mu+1}\right)$, $\mathrm{sn}^2\left(t_2-\frac{v}{\mu+1}\right)$, ..., $\mathrm{sn}^2\left(t_{\mu+1}-\frac{v}{\mu+1}\right)$; on en déduira, au moyen de l'équation non rationnelle, le produit $\mathrm{sn}\left(t_\nu-\frac{v}{\mu+1}\right)\mathrm{cn}\left(t_\nu-\frac{v}{\mu+1}\right)\mathrm{dn}\left(t_\nu-\frac{v}{\mu+1}\right)$, et, par le théorème d'addition, $\mathrm{sn}t_\nu$ pour $\nu=1, 2, \ldots, \mu+1$.

Pour former l'équation $\varphi(t)=0$, éliminons les $\mu+1$ coefficients indéterminés au moyen des équations de condition :

$$\varphi(\theta_\nu)\,\Theta^{\mu+1}\left(\theta_\nu-\frac{v}{\mu+1}\right) - e^{\nu_\nu}\varphi(\theta'_\nu)\,\Theta^{\mu+1}\left(\theta'_\nu-\frac{v}{\mu+1}\right) = 0$$

pour $\nu=1, 2, \ldots, \mu$. Posons, pour abréger,

$$x_i = \mathrm{sn}\left(\theta_i-\frac{v}{\mu+1}\right),\quad y_i = \mathrm{cn}\left(\theta_i-\frac{v}{\mu+1}\right),\quad z_i = \mathrm{dn}\left(\theta_i-\frac{v}{\mu+1}\right),$$

$$\rho_i = \Theta^{\mu+1}\left(\theta_i-\frac{v}{\mu+1}\right),$$

et affectons d'un accent les mêmes expressions où θ_i est remplacé par θ'_i.

Le premier membre de l'équation cherchée prendra la forme d'un

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

déterminant à $(\mu+1)^2$ éléments; si μ est impair, les éléments de la première ligne seront

$$1,\ x^2,\ \ldots,\ x^{\mu+1},\ xyz,\ x^3yz,\ \ldots,\ x^{\mu-2}yz,$$

et ceux de la ligne d'ordre $(i+1)$

$$(\rho_i - e^{v_i}\rho'_i),\quad (\rho_i x_i^2 - e^{v_i}\rho'_i x_i'^2),\quad \ldots,\quad (\rho_i x_i^{\mu+1} - e^{v_i}\rho'_i x_i'^{\mu+1}),$$
$$\rho_i x_i y_i z_i - e^{v_i}\rho'_i x'_i y'_i z'_i),\quad \ldots,\quad (\rho_i x_i^{\mu-2} y_i z_i - e^{v_i}\rho'_i x_i'^{\mu-2} y'_i z'_i).$$

Si μ est pair, la première ligne sera

$$x,\ x^3,\ \ldots,\ x^{\mu+1},\ yz,\ x^2yz,\ \ldots,\ x^{\mu-2}yz,$$

et la ligne d'ordre $i+1$

$$(\rho_i x_i - e^{v_i}\rho'_i x'_i),\quad (\rho_i x_i^3 - e^{v_i}\rho'_i x_i'^3),\quad \ldots,\quad (\rho_i x_i^{\mu+1} - e^{v_i}\rho'_i x_i'^{\mu+1},$$
$$\rho_i y_i z_i - e^{v_i}\rho'_i y'_i z'_i),\quad \ldots,\quad (\rho_i x_i^{\mu-2} y_i z_i - e^{v_i}\rho'_i x_i'^{\mu-2} y'_i z'_i).$$

En toute hypothèse, l'équation peut être mise sous la forme symbolique

$$(\rho_1\theta_1 - e^{v_1}\rho'_1\theta'_1)(\rho_2\theta_2 - e^{v_2}\rho'_2\theta'_2)\ldots(\rho_\mu\theta_\mu - e^{v_\mu}\rho'_\mu\theta'_\mu),$$

où chaque produit $\theta'_1\theta'_2\ldots\theta'_r\theta_{r+1}\ldots\theta_\mu$ se déduit du premier $\theta_1\theta_2\ldots\theta_\mu$ en remplaçant les θ par les θ' de même indice. On peut transformer ces produits comme il suit. Soit $\Delta_{\mu+1}$ le premier produit dont nous déduisons tous les autres : c'est le déterminant à $(\mu+1)^2$ éléments dont les lignes d'ordre 1 et $i+1$ sont respectivement, si μ est impair,

$$1,\ x^2,\ \ldots,\ x^{\mu+1},\ xyz,\quad x^3yz,\quad \ldots,\ x^{\mu-2}yz,$$
$$1,\ x_i^2,\ \ldots,\ x_i^{\mu+1},\ x_i y_i z_i,\ x_i^3 y_i z_i,\ \ldots,\ x_i^{\mu-2} y_i z_i,$$

et, si μ est pair,

$$x,\ x^3,\ \ldots,\ x^{\mu+1},\ yz,\quad x^2yz,\quad \ldots,\ x^{\mu-2}yz,$$
$$x_i,\ x_i^3,\ \ldots,\ x_i^{\mu+1},\ y_i z_i,\ x_i^2 y_i z_i,\ \ldots,\ x_i^{\mu-2} y_i z_i.$$

Considéré comme fonction d'un quelconque des arguments $\left(t - \frac{v}{\mu+1}\right)$, $\left(\theta_1 - \frac{v}{\mu+1}\right),\ \ldots,\ \left(\theta_\mu - \frac{v}{\mu+1}\right)$, $\Delta_{\mu+1}$ admet dans le premier cas les pé-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

riodes $2K$, $2iK'$. Il en est de même du produit $xx_1x_2\ldots x_\mu\Delta_{\mu-1}$ dans le second. On peut donc toujours poser

$$\Delta_{\mu+1} = C_{\mu+1}\frac{\Phi(t,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_\mu)\,H(t+\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_\mu-v)}{\Theta^{\mu+1}\left(t-\frac{v}{\mu+1}\right)\rho_1\rho_2\ldots\rho_\mu},$$

$C_{\mu+1}$ désignant une constante et $\Phi(t,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_\mu)$ le produit

$$H(t-\theta_1)\,H(t-\theta_2)\ldots H(t-\theta_\mu)\,H(\theta_1-\theta_2)\,H(\theta_1-\theta_3)\ldots H(\theta_{\mu-1}-\theta_\mu).$$

On peut faire abstraction du dénominateur, car $\Theta^{\mu+1}\left(t-\frac{v}{\mu+1}\right)$ figure dans tous les termes de l'équation, et le produit $\rho_1\rho_2\ldots\rho_\mu$ est précisément égal au coefficient de $\Delta_{\mu+1}$ dans le produit symbolique qui forme le premier membre de cette équation. Celle-ci pourra donc s'écrire

$$\prod_{\nu=1}^{\nu=\mu}(\theta_\nu - e^{\omega_\nu}\theta'_\nu) = \Omega(t) = 0,$$

en convenant que, dans ce produit, le terme $\theta_1\theta_2\ldots\theta_\mu$ soit remplacé par

$$\Phi(t,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_\mu)\,H(t+\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_\mu-v),$$

et en général le terme $\theta'_1\theta'_2\ldots\theta'_r\theta_{r+1}\ldots\theta_\mu$ par

$$\Phi(t,\theta'_1,\theta'_2,\ldots,\theta'_r,\theta_{r+1},\ldots,\theta_\mu)\,H(t+\theta'_1+\ldots+\theta'_r+\theta_{r+1}+\ldots+\theta_\mu-v).$$

27. La transformation précédente permet d'arriver par une voie nouvelle à l'équation qui fournit les valeurs de $\mathrm{sn}^2t_1,\ldots,\mathrm{sn}^2t_\mu$. En effet, on a, par un raisonnement souvent appliqué,

$$\frac{\Omega(t)}{\left[\Theta\left(t-\frac{v}{\mu+1}\right)\right]^{\mu+1}} = C\frac{\prod_{i=1}^{i=\mu+1}H(t-t_i)}{\left[\Theta\left(t-\frac{v}{\mu+1}\right)\right]^{\mu+1}},$$

et, en donnant à t une valeur particulière pour faire disparaître la

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

constante,

$$\frac{\Omega(t)}{\Omega(t_0)} = \frac{\prod_{i=1}^{i=\mu+1} \mathrm{H}(t-t_i)}{\prod_{i=1}^{i=\mu+1} \mathrm{H}(t_0-t_i)},$$

d'où, faisant $t=0$, $t_0 = i\mathrm{K}'$,

$$\operatorname{sn} t_1 \operatorname{sn} t_2 \ldots \operatorname{sn} t_{\mu+1} = \frac{1}{(i\sqrt{k}\sqrt[4]{q})^{\mu+1}} e^{\frac{i\pi v}{2\mathrm{K}}} \frac{\Omega(0)}{\Omega(i\mathrm{K}')}.$$

Changeons t, t_0 en $-t$, $-t_0$; la formule connue

$$\frac{\mathrm{H}(t-u)\,\mathrm{H}(t+u)}{\mathrm{H}(t_0-u)\,\mathrm{H}(t_0+u)} = \frac{\Theta^2(t)}{\Theta^2(t_0)} \frac{\operatorname{sn}^2 t - \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 t_0 - \operatorname{sn}^2 u}$$

donnera

$$\frac{\prod_{i=1}^{i=\mu+1} (\operatorname{sn}^2 t - \operatorname{sn}^2 t_i)}{\prod_{i=1}^{i=\mu+1} (\operatorname{sn}^2 t_0 - \operatorname{sn}^2 t_i)} = \frac{\Omega(t)\,\Omega(-t)}{\Omega(t_0)\,\Omega(-t_0)} \left[\frac{\Theta(t_0)}{\Theta(t)}\right]^{2\mu+2}.$$

Si l'on donne à t et t_0 une série de valeurs particulières, on obtiendra des équations linéaires propres à déterminer les fonctions symétriques de $\operatorname{sn}^2 t_1$, $\operatorname{sn}^2 t_2$, ..., $\operatorname{sn}^2 t_\mu$, et par suite l'équation de degré $\mu+1$ dont ces quantités sont les racines.

Le second membre de la dernière égalité se simplifie si l'on prend pour t et t_0 les couples d'arguments relatifs aux μ points doubles par lesquels ne passe pas la courbe d'ordre m. On a alors

$$\frac{\Omega(\theta_\nu)}{\Omega(\theta'_\nu)} = e^{\rho_\nu},$$

d'où les équations

$$\prod_{i=1}^{i=\mu+1} \frac{\operatorname{sn}^2 \theta_\nu - \operatorname{sn}^2 t_i}{\operatorname{sn}^2 \theta'_\nu - \operatorname{sn}^2 t_i} = e^{\rho_\nu} \frac{\Omega(-\theta_\nu)}{\Omega(-\theta'_\nu)} \left[\frac{\Theta(\theta'_\nu)}{\Theta(\theta_\nu)}\right]^{2\mu+2}$$

pour $\nu = 1, 2, \ldots, \mu$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

28. Les quantités $\mathrm{sn}^2 t_1$, $\mathrm{sn}^2 t_2$, ..., $\mathrm{sn}^2 t_{\mu+1}$, regardées comme fonctions des $\mu+1$ variables v, v_1, ..., v_μ en vertu des équations du problème, admettent $\mu+2$ périodes. Les μ premières résultent de l'exponentielle e^{v_ν}, qui permet de changer v_ν en $v_\nu + 2h_\nu i\pi$. Les deux autres proviennent des intégrales elliptiques. Remarquons seulement qu'en changeant v en $v + 2h\mathrm{K} + 2h' i\mathrm{K}'$ on doit augmenter en même temps v_ν de $\frac{h' i\pi}{\mathrm{K}}(\theta_\nu - \theta'_\nu)$, car, en ajoutant à l'argument t_i $2m\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}'$, le facteur $\frac{\mathrm{H}(\theta_\nu - t_i)}{\mathrm{H}(\theta'_\nu - t_i)}$ est multiplié par $e^{\frac{n\pi i}{\mathrm{K}}(\theta_\nu - \theta'_\nu)}$.

En se reportant à la forme des équations dans le cas d'un point de rebroussement (p. 34), on voit que, si $\varkappa$ est le nombre des points tels que $(\theta_\nu, \theta'_\nu)$ qui dégénèrent en rebroussements, le nombre des périodes s'abaisse à $\mu + 2 - \varkappa$.

§ III. — Problème relatif à certaines courbes d'ordre $n-3$.

29. Dans le cas d'une courbe d'ordre $n-3$ passant par $\delta - \mu$ points doubles de la proposée, et dont les 2μ autres points d'intersection se confondent deux à deux, les équations du problème seront, en appelant $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$ les arguments des μ points de contact,

$$\sum_{i=1}^{i=\mu} t_i = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu}(\theta_\nu + \theta'_\nu) + h\mathrm{K} + h' i\mathrm{K}',$$

et, pour $\nu = 1, 2, \ldots, \mu$, $\prod$ ayant même sens qu'à la page 34,

$$\prod_{i=1}^{i=\mu} \frac{\mathrm{H}^2(\theta_\nu - t_i)}{\mathrm{H}^2(\theta'_\nu - t_i)} = e^{\frac{i\pi h'}{\mathrm{K}}\theta_\nu - \theta'_\nu)} \prod_{i=1}^{i=\mu} \frac{\mathrm{H}(\theta_\nu - \theta_i)\,\mathrm{H}(\theta_\nu - \theta'_i)}{\mathrm{H}(\theta'_\nu - \theta_i)\,\mathrm{H}(\theta'_\nu - \theta'_i)}.$$

Leur nombre étant supérieur d'une unité à celui des inconnues t_1, t_2, ..., t_μ, une équation de condition doit être remplie. Nous allons chercher cette équation.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

A cet effet, soit

$$\prod_{i=1}^{i=\mu} \frac{\mathbf{H}(\theta_\nu - \theta_i)\,\mathbf{H}(\theta_\nu - \theta'_i)}{\mathbf{H}(\theta'_\nu - \theta_i)\,\mathbf{H}(\theta'_\nu - \theta'_i)} = \varepsilon_\nu^2,$$

d'où, Φ ayant même signification que dans le problème précédent (p. 39),

$$\frac{\Phi^2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\mu)}{\Phi^2(\theta'_1, \theta'_2, \ldots, \theta'_\mu)} = \varepsilon_1^2\,\varepsilon_2^2 \ldots \varepsilon_\mu^2.$$

Supposons les signes des racines carrées $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\mu$ choisis de telle sorte qu'on ait

$$\frac{\Phi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\mu)}{\Phi(\theta'_1, \theta'_2, \ldots, \theta'_\mu)} = \varepsilon_1\,\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_\mu.$$

Les équations du problème pourront s'écrire

$$\sum_{i=1}^{i=\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} (\theta_\nu + \theta'_\nu) + h\mathbf{K} + h' i\,\mathbf{K}' = \nu,$$

$$\prod_{i=1}^{i=\mu} \frac{\mathbf{H}(\theta_\nu - t_i)}{\mathbf{H}(\theta'_\nu - t_i)} = (-1)^{h_\nu}\,\varepsilon_\nu\, e^{\frac{i\pi}{2\mathbf{K}} h'(\theta_\nu - \theta'_\nu)} = e^{\nu_\nu}.$$

En faisant $x = \operatorname{sn}\left(t - \frac{v}{\mu}\right)$, $y = \operatorname{cn}\left(t - \frac{v}{\mu}\right)$, $z = \operatorname{dn}\left(t - \frac{v}{\mu}\right)$, et en suivant la même méthode que dans le paragraphe précédent, sauf le changement de $\mu + 1$ en μ, on arrivera à l'équation de condition

$$\prod_{\nu=1}^{\nu=\mu} (\theta_\nu - e^{\nu_\nu}\theta'_\nu) = 0,$$

où le produit symbolique $\theta_1\theta_2 \ldots \theta_\mu$ doit être remplacé par

$$\Phi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\mu)\,\mathbf{H}(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_\mu - v),$$

et en général $\theta'_1\theta'_2 \ldots \theta'_r\theta_{r+1} \ldots \theta_\mu$ par l'expression qui se déduit de la première en remplaçant $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$ par $\theta'_1, \theta'_2, \ldots, \theta'_r$.

Cela posé, dans le résultat obtenu, accouplons les termes en $e^{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_r}$ et en $e^{\nu_{r+1}+\nu_{r+2}+\ldots+\mu}$, lesquels, étant affectés des mêmes signes

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

que $(-1)^r$ et $(-1)^{\mu-r}$, auront pour somme

$$(-1)^r e^{-v_1-v_2-\ldots-v_r}\theta_1\theta_2\ldots\theta_r\theta'_{r+1}\ldots\theta'_\mu\left[\frac{\theta'_1\theta'_2\ldots\theta'_r\theta_{r+1}\ldots\theta_\mu}{\theta_1\theta_2\ldots\theta_r\theta'_{r+1}\ldots\theta'_\mu}e^{2(v_1+v_2+\ldots+v_r)}+(-1)^\mu e^{v_1+v_2+\ldots+v_\mu}\right].$$

Substituons à e^{v_1}, e^{v_2}, ... leurs valeurs; le premier terme placé entre crochets devient

$$\frac{\Phi(\theta'_1,\theta'_2,\ldots,\theta'_r,\theta_{r+1},\ldots,\theta_\mu)}{\Phi(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_r,\theta'_{r+1},\ldots,\theta'_\mu)}\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2\ldots\varepsilon_r^2\frac{\mathbf{H}(\theta'_1+\theta'_2+\ldots+\theta'_r+\theta_{r+1}+\ldots+\theta_\mu-v)}{\mathbf{H}(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_r+\theta'_{r+1}+\ldots+\theta'_\mu-v)}e^{\frac{i\pi h'}{\mathbf{K}}(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_r-\theta'_1-\theta'_2-\ldots-\theta'_r)}.$$

Or on a, en désignant par i un des nombres 1, 2, ..., r et par k un des nombres $r+1$, $r+2$, ..., μ,

$$\Phi(\theta'_1,\theta'_2,\ldots,\theta'_r,\theta_{r+1},\ldots,\theta_\mu)=\Phi(\theta'_1,\theta'_2,\ldots,\theta'_r)\,\Phi(\theta_{r+1},\theta_{r+2},\ldots,\theta_\mu)\,\Pi[\mathbf{H}(\theta'_i-\theta_k)],$$
$$\Phi(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_r,\theta'_{r+1},\ldots,\theta'_\mu)=\Phi(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_r)\,\Phi(\theta'_{r+1},\theta'_{r+2},\ldots,\theta'_\mu)\,\Pi[\mathbf{H}(\theta_i-\theta'_k)].$$

Enfin, i, i' désignant deux des nombres 1, 2, ..., r, et k toujours un des nombres $r+1$, ..., μ,

$$\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2\ldots\varepsilon_r^2=\frac{\Phi^2(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_r)\,\Pi[\mathbf{H}(\theta_i-\theta_k)]\,\Pi[\mathbf{H}(\theta_i-\theta'_{i'})]\,\Pi[\mathbf{H}(\theta_i-\theta'_k)]}{\Phi^2(\theta'_1,\theta'_2,\ldots,\theta'_r)\,\Pi[\mathbf{H}(\theta'_i-\theta'_k)]\,\Pi[\mathbf{H}(\theta'_i-\theta_{i'})]\,\Pi[\mathbf{H}(\theta'_i-\theta_k)]},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\Phi(\theta'_1,\theta'_2,\ldots,\theta'_r,\theta_{r+1},\ldots,\theta_\mu)}{\Phi(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_r,\theta'_{r+1},\ldots,\theta'_\mu)}\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2\ldots\varepsilon_r^2=\frac{\Phi(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_\mu)}{\Phi(\theta'_1,\theta'_2,\ldots,\theta'_\mu)}.$$

Cette expression, figurant aussi dans le second terme placé entre crochets, peut être mise en facteur; il reste alors

$$\frac{\mathbf{H}(\theta'_1+\theta'_2+\ldots+\theta'_r+\theta_{r+1}+\ldots+\theta_\mu-v)}{\mathbf{H}(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_r+\theta'_{r+1}+\ldots+\theta'_\mu-v)}e^{\frac{i\pi h'}{\mathbf{K}}(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_r-\theta'_1-\theta'_2-\ldots-\theta'_r)}$$
$$+(-1)^{\mu+h_1+h_2+\ldots+h_\mu}e^{\frac{i\pi h'}{2\mathbf{K}}\left(\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu}\theta_\nu-\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu}\theta'_\nu\right)}.$$

En posant

$$\tau=\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_r+\theta'_{r+1}+\ldots+\theta'_\mu-v,$$
$$\tau'=\theta'_1+\theta'_2+\ldots+\theta'_r+\theta_{r+1}+\ldots+\theta_\mu-v,$$

d'où

$$\tau+\tau'=-2h\mathbf{K}-2h'i\mathbf{K}',$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et par suite

$$\frac{\mathrm{H}(\tau')}{\mathrm{H}(\tau)} = (-1)^{h+1}\frac{\mathrm{H}(\tau+2h'i\mathrm{K}')}{\mathrm{H}(\tau)} = (-1)^{h+h'+1}e^{-\frac{i\pi h'}{\mathrm{K}}(\tau+h'i\mathrm{K}')},$$

on voit que la somme des deux termes considérés peut s'écrire, à un facteur près,

$$(-1)^{h+h'+1}e^{\frac{i\pi h'}{2\mathrm{K}}\left(\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu}\theta_\nu-\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu}\theta'_\nu+2h\mathrm{K}\right)}+(-1)^{\mu+\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu}h_\nu}e^{\frac{i\pi h'}{2\mathrm{K}}\left(\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu}\theta_\nu-\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu}\theta'_\nu\right)}$$

$$=e^{\frac{i\pi h'}{2\mathrm{K}}\left(\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu}\theta_\nu-\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu}\theta'_\nu\right)}\left[(-1)^{(h+1)(h'+1)}+(-1)^{\mu+\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu}h_\nu}\right].$$

Ce dernier facteur devant se présenter dans tous les couples de termes analogues à celui qui a été considéré, on aura, en l'égalant à zéro, la condition cherchée

$$(h+1)(h'+1)+\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu}h_\nu\equiv\mu+1 \pmod 2.$$

§ IV. — Conséquences géométriques.

30. Les diverses relations établies dans les paragraphes qui précèdent donnent lieu à des conséquences géométriques très nombreuses. Pour les déduire plus commodément, on peut transformer les équations (2′) du § I en prenant les logarithmes des deux membres et posant

$$t^{(\nu)} = \log\frac{\mathrm{H}(\theta_\nu-t)}{\mathrm{H}(\theta'_\nu-t)}-\frac{1}{n(n-3)}\log\prod\frac{\mathrm{H}(\theta_\nu-\theta_i)\,\mathrm{H}(\theta_\nu-\theta'_i)}{\mathrm{H}(\theta'_\nu-\theta_i)\,\mathrm{H}(\theta'_\nu-\theta'_i)},$$

ce qui donne, dans le cas général, le système des $(\delta+1)$ équations

$$\sum_{i=1}^{i=mn}t_i = m\sigma+2h\mathrm{K}+2h'i\mathrm{K}',$$

$$\sum_{i=1}^{i=mn}t_i^{(\nu)} = 2h_\nu i\pi+\frac{h'i\pi}{\mathrm{K}}(\theta_\nu-\theta'_\nu)\quad(\nu=1,2,\ldots,\delta),$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et un système de $(\mu+1)$ équations analogues lorsque la courbe d'ordre m passe par $(\delta-\mu)$ points doubles.

Les nombreux théorèmes qui en ont été déduits par Clebsch n'étant que la traduction immédiate de ces équations, nous nous contenterons d'énoncer les plus importants.

1° Soit $k=n(m-n+3)+2\mu$. *Parmi les courbes d'ordre m qui passent par $(\delta-\mu)$ points doubles et $k-r(\mu+1)$ points simples de la proposée, il y en a $r^{\mu+2}$ qui ont avec celle-ci, en $\mu+1$ points différents, un contact d'ordre r.* Ce nombre s'abaisse à $r^{\mu+2-\varkappa}$ quand $\varkappa$ des μ points doubles deviennent des points de rebroussement.

2° *Le nombre des courbes d'ordre $n-3$ qui passent par $\delta-\mu$ points doubles de la courbe et lui sont tangentes en μ points est $2^{\mu+1-\varkappa}$.* En particulier, *il existe $2^{\delta+1-\varkappa'}$ courbes d'ordre $n-3$ tangentes à la courbe donnée en tous les points de rencontre avec celle-ci* ($\varkappa'$ désigne ici le nombre total des points de rebroussement).

Ces $2^{\delta+1-\varkappa}$ courbes forment un nombre de couples égal à $2^{\delta-\varkappa}(2^{\delta-\varkappa+1}-1)$, se partageant en deux groupes. Le premier groupe contient $(2^{\delta-\varkappa-1}-1)$ systèmes de $2^{\delta-\varkappa}$ couples; dans chaque système figurent toutes les courbes d'ordre $n-3$, chacune une fois. Les points de contact de deux couples d'un même système sont situés sur une courbe d'ordre $2(n-3)$. Le second groupe contient $3.2^{\delta-\varkappa}$ systèmes de $2^{\delta-\varkappa-1}$ couples. Dans chacun d'eux figurent la moitié des courbes d'ordre $n-3$, et les points de contact de deux couples du même système sont sur une courbe d'ordre $2(n-3)$.

Ces théorèmes sont illusoires quand tous les points doubles dégénèrent en rebroussements. Dans ce cas, en effet, il reste une seule relation

$$(h+1)(h'+1)\equiv\frac{(n-1)(n-2)}{2}\pmod 2,$$

et, par suite :

Une courbe du quatrième degré admettant deux points de rebroussement a une seule tangente double.

Une courbe du cinquième degré ayant cinq rebroussements est touchée

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

en cinq points par trois coniques. Les quinze points de contact sont sur une même conique.

Une courbe du sixième ordre ayant neuf rebroussements est touchée par trois cubiques en neuf points.

CHAPITRE III.

APPLICATION AUX COURBES DU QUATRIÈME DEGRÉ AYANT DEUX POINTS DOUBLES.

§ I. — Expression des coordonnées.

31. Nous emploierons les coordonnées trilinéaires. En prenant pour un des côtés du triangle de référence $x_1 = 0$ la droite qui joint les deux points doubles, et pour les deux autres côtés des droites issues respectivement de chacun de ces points, l'équation de la courbe sera

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 x_3^2 + 2 x_1 x_2 x_3 \mathrm{B} + x_1^2 \mathrm{AC} = 0, \tag{1}$$

où l'on a

$$\mathrm{A} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3,$$
$$\mathrm{B} = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3,$$
$$\mathrm{C} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3.$$

Les deux droites $\mathrm{A} = 0$, $\mathrm{C} = 0$, forment alors un des couples de sécantes joignant les quatre points simples où la courbe rencontre les droites $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

Par les points doubles et par les deux points fixes ($x_2 = 0$, $\mathrm{A} = 0$), ($x_3 = 0$, $\mathrm{A} = 0$), faisons passer un faisceau de coniques

$$x_2 x_3 + \lambda x_1 \mathrm{A} = 0. \tag{2}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

En combinant (1) et (2), et posant

$$L_i = \lambda^2 a_i - 2\lambda b_i + c_i,$$

on arrive à l'équation

$$L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 = 0, \tag{3}$$

qui représente la droite des deux points variables d'intersection de la courbe avec le faisceau. L'enveloppe de ces droites est la conique

$$AC - B^2 = 0,$$

tangente aux droites A, C.

Pour calculer les coordonnées ξ_i, η_i des deux points, adjoignons aux équations (2) et (3) celle d'une droite quelconque

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0.$$

Le résultat de l'élimination de x_1, x_2, x_3 sera

$$\begin{vmatrix} 2\lambda a_1 & \lambda a_2 & \lambda a_3 & L_1 & u_1 \\ \lambda a_2 & 0 & 1 & L_2 & u_2 \\ \lambda a_3 & 1 & 0 & L_3 & u_3 \\ L_1 & L_2 & L_3 & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant étant ordonné par rapport à u_1, u_2, u_3 et mis sous la forme

$$\sum\sum w_{ik} u_i u_k \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

on aura, en l'identifiant avec le produit $\Sigma \xi_i u_i \Sigma \eta_i u_i$,

$$\xi_i \eta_i = w_{ii},$$

$$\xi_k \eta_k = w_{kk},$$

$$\xi_i \eta_k + \xi_k \eta_i = 2 w_{ik},$$

d'où

$$(\xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i)^2 = 4 (w_{ik}^2 - w_{ii} w_{kk}).$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Considérons le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2\lambda a_1 & \lambda a_2 & \lambda a_3 & L_1 \\ \lambda a_2 & 0 & 1 & L_2 \\ \lambda a_3 & 1 & 0 & L_3 \\ L_1 & L_2 & L_3 & 0 \end{vmatrix};$$

on aura, chacun des mineurs formé avec les éléments du système adjoint étant égal au produit de Δ par le mineur complémentaire,

$$w_{23}^2 - w_{22}w_{33} = \Delta L_1^2,$$
$$w_{31}^2 - w_{33}w_{11} = \Delta L_2^2,$$
$$w_{12}^2 - w_{11}w_{22} = \Delta L_3^2,$$

d'où l'on déduit

$$\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2 = \pm 2L_1\sqrt{\Delta},$$
$$\xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3 = \pm 2L_2\sqrt{\Delta},$$
$$\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 = \pm 2L_3\sqrt{\Delta}.$$

Dans ces formules, les signes supérieurs se correspondent ainsi que les signes inférieurs, puisque les premiers membres ne sont autres que les coordonnées de la droite $L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3 = 0$. On peut encore s'en rendre compte en calculant directement, par exemple, le produit

$$(\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2)(\xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3),$$

c'est-à-dire

$$2(\xi_2\eta_1 + \xi_1\eta_2)\xi_3\eta_3 - (\xi_3\eta_2 + \xi_2\eta_3)(\xi_1\eta_3 + \xi_3\eta_1) = 4(w_{12}w_{33} - w_{23}w_{13}) = 4\Delta L_1L_2.$$

On aura donc, en donnant au radical un signe déterminé,

$$\xi_1\eta_1 = w_{11}, \quad \xi_2\eta_1 = w_{12} - L_3\sqrt{\Delta}, \quad \xi_3\eta_1 = w_{13} + L_2\sqrt{\Delta},$$
$$\xi_1\eta_2 = w_{12} + L_3\sqrt{\Delta}, \quad \xi_2\eta_2 = w_{22}, \quad \xi_3\eta_2 = w_{23} - L_1\sqrt{\Delta},$$
$$\xi_1\eta_3 = w_{13} - L_2\sqrt{\Delta}, \quad \xi_2\eta_3 = w_{23} + L_1\sqrt{\Delta}, \quad \xi_3\eta_3 = w_{33},$$

ou, en multipliant respectivement chacune des lignes par trois constantes C_1, C_2, C_3, introduites pour la symétrie et telles que

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$C_1\eta_1 + C_2\eta_2 + C_3\eta_3$ soit différent de zéro, et désignant ce facteur commun par ρ,

$$\rho\xi_1 = \Sigma C_i w_{1i} + (C_2L_3 - C_3L_2)\sqrt{\Delta},$$
$$\rho\xi_2 = \Sigma C_i w_{2i} + (C_3L_1 - C_1L_3)\sqrt{\Delta},$$
$$\rho\xi_3 = \Sigma C_i w_{3i} + (C_1L_2 - C_2L_1)\sqrt{\Delta}.$$

En changeant le signe du radical, ces expressions donneraient les coordonnées du second point η.

Soient $C_1 = 1$, $C_2 = C_3 = 0$; substituons aux w leurs valeurs, on aura

$$(4)\qquad \begin{cases} \rho x_1 = -2L_2L_3, \\ \rho x_2 = L_3[L_1 + \lambda(a_3L_2 - a_2L_3) + \sqrt{\Delta}], \\ \rho x_3 = L_2[L_1 - \lambda(a_3L_2 - a_2L_3) - \sqrt{\Delta}]. \end{cases}$$

Le polynôme Δ placé sous le radical peut s'écrire

$$L_1^2 + \lambda^2(a_3L_2 - a_2L_3)^2 + 4\lambda a_1L_2L_3 - 2\lambda L_1(a_3L_2 + a_2L_3),$$

et l'on vérifie aisément qu'il est du quatrième degré en λ.

32. Au moyen des identités

$$[L_1 + \lambda(a_3L_2 - a_2L_3)]^2 - \Delta = 4\lambda L_2(a_3L_1 - a_1L_3),$$
$$[L_1 - \lambda(a_3L_2 - a_2L_3)]^2 - \Delta = 4\lambda L_3(a_2L_1 - a_1L_2),$$

on voit que les valeurs x_1, x_2, x_3 s'annulent simultanément si l'on fait

$$L_2 = 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{\Delta} = -[L_1 + \lambda(a_3L_2 - a_2L_3)]$$

ou

$$L_3 = 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{\Delta} = +[L_1 - \lambda(a_3L_2 - a_2L_3)],$$

c'est-à-dire pour quatre valeurs de λ, en prenant un signe déterminé devant le radical. Effectivement, dans ce cas $\rho = C_1\eta_1$ est nul, et les formules précédentes sont illusoires.

On trouvera de même les quatre valeurs annulant séparément une des coordonnées. On aura, pour $x_1 = 0$,

$$L_2 = 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{\Delta} = L_1 + \lambda(a_3L_2 - a_2L_3)$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ou

$$L_3 = 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{\Delta} = -[L_1 - \lambda(a_3 L_2 - a_2 L_3)];$$

pour $x_2 = 0$,

$$L_3 = 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{\Delta} = -[L_1 - \lambda(a_3 L_2 - a_2 L_3)],$$

ou

$$\lambda = 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{\Delta} = -L_1,$$

ou enfin

$$a_3 L_1 - a_1 L_3 = 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{\Delta} = -[L_1 + \lambda(a_3 L_2 - a_2 L_3)];$$

pour $x_3 = 0$,

$$L_2 = 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{\Delta} = -[L_1 + \lambda(a_3 L_2 - a_2 L_3)],$$

ou

$$\lambda = 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{\Delta} = L_1,$$

ou enfin

$$a_2 L_1 - a_1 L_2 = 0, \quad \sqrt{\Delta} = L_1 - \lambda(a_3 L_2 - a_2 L_3).$$

33. L'introduction des fonctions $\operatorname{sn} t$, $\operatorname{cn} t$, $\operatorname{dn} t$ dans les expressions des coordonnées se fera comme il a été dit au Chapitre I. Soient alors $-\alpha_2$, $-\beta_2$, $-\alpha_3$, $-\beta_3$ les valeurs de t qui annulent les trois coordonnées à la fois : les zéros de x_1 seront α_2, β_2, α_3, β_3; ceux de x_2 seront α_3, β_3, γ, γ_2 (ces deux derniers correspondent à $\lambda = 0$ et $a_3 L_1 - a_1 L_3 = 0$); enfin ceux de x_3 seront α_2, β_2, $-\gamma$ (pour $\lambda = 0$), et γ_3 (pour $a_2 L_1 - a_1 L_2 = 0$). On pourra donc poser

$$x_1 = c_1 H(t-\alpha_2) H(t-\beta_2) H(t-\alpha_3) H(t-\beta_3),$$
$$x_2 = c_2 H(t-\alpha_3) H(t-\beta_3) H(t-\gamma) H(t-\gamma_2),$$
$$x_3 = c_3 H(t-\alpha_2) H(t-\beta_2) H(t+\gamma) H(t-\gamma_3).$$

La somme des zéros de ces trois fonctions étant, comme on l'a vu, la même a des multiples près des périodes, posons

$$\alpha_2 + \beta_2 + \alpha_3 + \beta_3 \equiv \alpha_3 + \beta_3 + \gamma + \gamma_2 \equiv \alpha_2 + \beta_2 - \gamma + \gamma_3 \equiv 4\varepsilon,$$

le signe $\equiv$ indiquant que les égalités ont lieu en négligeant les multiples des périodes. Soient enfin

$$\alpha_2 - \beta_2 = 2\delta_2, \quad \alpha_3 - \beta_3 = 2\delta_3, \quad \gamma_2 - \gamma_3 = 2\sigma, \quad \gamma + \sigma = \tau,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

on aura

$$\gamma_2 = 2\varepsilon + \sigma, \qquad \gamma_3 = 2\varepsilon - \sigma,$$

$$\alpha_2 = \varepsilon + \frac{\tau}{2} + \delta_2, \quad \alpha_3 = \varepsilon - \frac{\tau}{2} + \delta_3,$$

$$\beta_2 = \varepsilon + \frac{\tau}{2} - \delta_2, \quad \beta_3 = \varepsilon - \frac{\tau}{2} - \delta_3,$$

et, en prenant pour variable $t - \varepsilon = u$,

$$(5)\quad \begin{cases} x_1 = c_1 \mathrm{H}\left(u - \frac{\tau}{2} - \delta_2\right) \mathrm{H}\left(u - \frac{\tau}{2} + \delta_2\right) \mathrm{H}\left(u + \frac{\tau}{2} - \delta_3\right) \mathrm{H}\left(u + \frac{\tau}{2} + \delta_3\right), \\ x_2 = c_2 \mathrm{H}\left(u + \frac{\tau}{2} - \delta_3\right) \mathrm{H}\left(u + \frac{\tau}{2} + \delta_3\right) \mathrm{H}(u - \gamma + \varepsilon) \mathrm{H}(u - \varepsilon - \sigma), \\ x_3 = c_3 \mathrm{H}\left(u - \frac{\tau}{2} - \delta_2\right) \mathrm{H}\left(u - \frac{\tau}{2} + \delta_2\right) \mathrm{H}(u + \gamma + \varepsilon) \mathrm{H}(u - \varepsilon + \sigma), \end{cases}$$

ou, en introduisant le dénominateur $\Theta^2\left(u - \frac{\tau}{2}\right)\Theta^2\left(u + \frac{\tau}{2}\right)$, et modifiant les constantes,

$$(6)\quad \begin{cases} x_1 = c'_1 \left[\mathrm{sn}^2\left(u - \frac{\tau}{2}\right) - \mathrm{sn}^2\delta_2\right]\left[\mathrm{sn}^2\left(u + \frac{\tau}{2}\right) - \mathrm{sn}^2\delta_3\right], \\ x_2 = c'_2 \left[\mathrm{sn}^2\left(u + \frac{\tau}{2}\right) - \mathrm{sn}^2\delta_3\right]\left[\mathrm{sn}^2\left(u - \frac{\tau}{2}\right) - \mathrm{sn}^2\left(\varepsilon - \frac{\gamma - \sigma}{2}\right)\right], \\ x_3 = c'_3 \left[\mathrm{sn}^2\left(u - \frac{\tau}{2}\right) - \mathrm{sn}^2\delta_2\right]\left[\mathrm{sn}^2\left(u + \frac{\tau}{2}\right) - \mathrm{sn}^2\left(\varepsilon + \frac{\gamma - \sigma}{2}\right)\right] \end{cases}$$

En prenant pour nouvelle variable $\mathrm{sn}^2 u = z$ et appliquant le théorème d'addition, on transforme ces expressions en une partie rationnelle du second degré en z, accompagnée du radical $\sqrt{z(1-z)(1-k^2 z)}$ multiplié par une constante.

Les valeurs de u qui déterminent les points doubles sont $\frac{\tau}{2} + \delta_2$, $\frac{\tau}{2} - \delta_2$ pour le premier, $-\frac{\tau}{2} + \delta_3$, $-\frac{\tau}{2} - \delta_3$ pour le second. Les valeurs $\gamma - \varepsilon$, $-\gamma - \varepsilon$ correspondent à $\lambda = 0$, c'est-à-dire aux points situés à l'intersection de la droite C avec les droites $x_2 = 0$, $x_3 = 0$; enfin les valeurs $\varepsilon + \sigma$, $\varepsilon - \sigma$ se rapportent aux points de A situés sur ces mêmes droites.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On calculera donc les rapports des coefficients c'_1, c'_2, c'_3 en faisant dans les formules (6) $u=\varepsilon+\sigma$, $u=\varepsilon-\sigma$, et remarquant qu'on a $a_1x_1+a_3x_3=0$ dans le premier cas, et $a_1x_1+a_2x_2=0$ dans le second.

§ II. — Intersection de la courbe avec une courbe quelconque.

34. Les conditions relatives aux $4m$ points de rencontre de la courbe avec une courbe quelconque d'ordre m seront, en appliquant les formules du Chapitre II,

$$\sum_{i=1}^{i=4m} u_i = 2h\mathrm{K} + 2h'i\mathrm{K}',$$

$$\prod_{i=1}^{i=4m} \frac{\mathrm{H}\left(\frac{\tau}{2}+\delta_2-u_i\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{\tau}{2}-\delta_2-u_i\right)} = e^{\frac{2i\pi h'\delta_2}{\mathrm{K}}}\left[\frac{\mathrm{H}(\tau+\delta_2+\delta_3)\,\mathrm{H}(\tau+\delta_2-\delta_3)}{\mathrm{H}(\tau-\delta_2-\delta_3)\,\mathrm{H}(\tau-\delta_2+\delta_3)}\right]^m;$$

$$\prod_{i=1}^{i=4m} \frac{\mathrm{H}\left(\frac{\tau}{2}-\delta_3+u_i\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{\tau}{2}+\delta_3+u_i\right)} = e^{\frac{2i\pi h'\delta_3}{\mathrm{K}}}\left[\frac{\mathrm{H}(\tau-\delta_2-\delta_3)\,\mathrm{H}(\tau+\delta_2-\delta_3)}{\mathrm{H}(\tau+\delta_2+\delta_3)\,\mathrm{H}(\tau-\delta_2+\delta_3)}\right]^m.$$

Lorsque l'un des points du système coïncide avec un point double, une de ces deux dernières équations disparaît. Enfin, si la courbe d'ordre m passe par les deux points doubles, il reste seulement cette condition

$$\sum_{i=1}^{i=4m-4} u_i = 2h\mathrm{K} + 2h'i\mathrm{K}'.$$

35. Supposons qu'il s'agisse de coniques passant par les deux points doubles et tangentes à la courbe en quatre points confondus. L'argument du point de contact prendra l'une des seize valeurs

$$u = \frac{h\mathrm{K}+h'i\mathrm{K}'}{2} \qquad \begin{pmatrix} h=0,1,2,3 \\ h'=0,1,2,3 \end{pmatrix}.$$

Il y a donc seize de ces coniques; en désignant chacune d'elles par le

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

couple (h, h') correspondant, on en formera les quatre groupes

$$00, 02, 20, 22, \quad 01, 03, 21, 23, \quad 10, 12, 30, 32, \quad 11, 13, 31, 33.$$

Il existe quatre coniques dont chacune contient les quatre points de contact des coniques appartenant à l'un de ces groupes et les points doubles de la courbe; quarante-huit coniques dont chacune contient les points doubles et deux couples de points de contact pris dans des groupements différents; enfin soixante-quatre coniques passant par les points doubles et par quatre points de contact pris dans quatre groupes différents. Les points de contact des seize coniques (h, h') sont donc répartis sur cent seize coniques passant par quatre d'entre eux et par les points doubles.

Enfin il existe quatre-vingt-seize coniques dont chacune passe par les points doubles, touche la courbe au point de contact d'une des seize coniques (h, h') et passe par les points de contact de deux autres; celles-ci doivent être prises dans un des groupes qui ne contiennent pas la première.

36. Revenons au cas d'une courbe de degré $m \geq 2$; les formules générales déterminent alors trois points d'intersection au moyen des $4m-3$ autres. Il suffira de leur appliquer la méthode générale exposée au Chapitre II.

Supposons que la courbe d'ordre m passe par un des points doubles, par exemple le point $(x_1 = 0, x_2 = 0)$. Les arguments de deux points de rencontre se calculeront alors, en fonction des autres, par des équations telles que celles-ci :

$$u_1 + u_2 = \omega,$$

$$\frac{\mathrm{H}\left(\frac{z}{2} + \delta_2 - u_1\right)\mathrm{H}\left(\frac{z}{2} + \delta_2 - u_2\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{z}{2} - \delta_2 - u_1\right)\mathrm{H}\left(\frac{z}{2} - \delta_2 - u_2\right)} = e^{\omega_1}.$$

En posant $u_1 = \frac{\omega}{2} + \theta$, $u_2 = \frac{\omega}{2} - \theta$, la seconde équation devient

$$\frac{\mathrm{H}\left(\frac{z-\omega}{2} + \delta_2 - \theta\right)\mathrm{H}\left(\frac{z-\omega}{2} + \delta_2 + \theta\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{z-\omega}{2} - \delta_2 - \theta\right)\mathrm{H}\left(\frac{z-\omega}{2} - \delta_2 + \theta\right)} = e^{\omega_1},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ou, en appliquant une formule connue,

$$\frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{\tau-\omega}{2}+\delta_2\right)-\operatorname{sn}^2\theta}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{\tau-\omega}{2}-\delta_2\right)-\operatorname{sn}^2\theta}=e^{\omega_1}\frac{\Theta^2\left(\frac{\tau-\omega}{2}-\delta_2\right)}{\Theta^2\left(\frac{\tau-\omega}{2}+\delta_2\right)},$$

d'où l'on peut tirer $\operatorname{sn}^2\theta$.

37. Dans le cas d'une droite issue d'un point double, les équations seront

$$u_1+u_2=\tau+2h\mathrm{K}+2h'i\mathrm{K}',$$

$$\frac{\mathrm{H}\left(\frac{\tau}{2}+\delta_2-u_1\right)\mathrm{H}\left(\frac{\tau}{2}+\delta_2-u_2\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{\tau}{2}-\delta_2-u_1\right)\mathrm{H}\left(\frac{\tau}{2}-\delta_2-u_2\right)}=e^{\frac{2i\pi h'\delta_2}{\mathrm{K}}}.$$

Elles sont évidemment satisfaites si l'on fait $h=h'=0$ et

$$u_1=\frac{\tau}{2}+\theta,$$

$$u_2=\frac{\tau}{2}-\theta.$$

Tels sont donc en général les arguments de deux points situés en ligne droite avec le point double considéré. En particulier, les points de contact des quatre tangentes issues de ce point double auront pour arguments

$$\frac{\tau}{2},\quad \frac{\tau}{2}+\mathrm{K},\quad \frac{\tau}{2}+i\mathrm{K}',\quad \frac{\tau}{2}+\mathrm{K}+i\mathrm{K}'.$$

En changeant τ en $-\tau$, on obtient les arguments des points de contact des tangentes issues du second point double; ces quatre droites peuvent être associées avec les premières, de telle sorte que les points de contact de deux couples correspondants soient, avec les deux points doubles, sur une même conique.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

§ III. — Relations entre les arguments de quatre points en ligne droite.

38. Nous allons étudier spécialement le cas de l'intersection de la courbe et d'une droite quelconque.

Les équations générales deviennent alors

$$(7)\qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=4} u_i = 0, \\ \prod_{i=1}^{i=4} \dfrac{\mathrm{H}\left(\frac{\tau}{2} + \delta_2 - u_i\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{\tau}{2} - \delta_2 - u_i\right)} = \dfrac{\mathrm{H}(\tau + \delta_2 + \delta_3)\,\mathrm{H}(\tau + \delta_2 - \delta_3)}{\mathrm{H}(\tau - \delta_2 - \delta_3)\,\mathrm{H}(\tau - \delta_2 + \delta_3)}, \\ \prod_{i=1}^{i=4} \dfrac{\mathrm{H}\left(\frac{\tau}{2} - \delta_3 + u_i\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{\tau}{2} + \delta_3 + u_i\right)} = \dfrac{\mathrm{H}(\tau - \delta_2 - \delta_3)\,\mathrm{H}(\tau + \delta_2 - \delta_3)}{\mathrm{H}(\tau + \delta_2 + \delta_3)\,\mathrm{H}(\tau - \delta_2 + \delta_3)}. \end{cases}$$

Les deux dernières se réduisent d'ailleurs à une seule; nous vérifierons en effet, en transformant la première d'entre elles, qu'elle ne change pas si l'on remplace τ, δ_2, δ_3 par $-\tau$, δ_3, δ_2.

A cet effet, soient u, u', u'', u''' quatre quantités quelconques. En posant

$$\begin{aligned} 2\omega &= u + u' + u'' + u''', \\ 2\omega' &= u + u' - u'' - u''', \\ 2\omega'' &= u - u' + u'' - u''', \\ 2\omega''' &= u - u' - u'' + u''', \end{aligned}$$

on aura la relation suivante, démontrée par Rosenhaim (cf. *Mémoires de l'Institut*, t. XI) :

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{H}(u)\,\mathrm{H}(u')\,\mathrm{H}(u'')\,\mathrm{H}(u''') = {} & \mathrm{H}(\omega)\,\mathrm{H}(\omega')\,\mathrm{H}(\omega'')\,\mathrm{H}(\omega''') - \mathrm{H}_1(\omega)\,\mathrm{H}_1(\omega')\,\mathrm{H}_1(\omega'')\,\mathrm{H}_1(\omega''') \\ & - \Theta(\omega)\,\Theta(\omega')\,\Theta(\omega'')\,\Theta(\omega''') + \Theta_1(\omega)\,\Theta_1(\omega')\,\Theta_1(\omega'')\,\Theta_1(\omega'''). \end{aligned}$$

Appliquons cette formule à la seconde des trois équations du sys-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

tème (7), en faisant successivement

$$u = \frac{\tau}{2} + \delta_2 - u_1, \quad u' = \frac{\tau}{2} + \delta_2 - u_2, \quad u'' = \frac{\tau}{2} + \delta_2 - u_3, \quad u''' = \frac{\tau}{2} + \delta_2 - u_4,$$

puis

$$u = \frac{\tau}{2} - \delta_2 - u_1, \quad u' = \frac{\tau}{2} - \delta_2 - u_2, \quad u'' = \frac{\tau}{2} - \delta_2 - u_3, \quad u''' = \frac{\tau}{2} - \delta_2 - u_4.$$

Dans les deux cas, la valeur de ω est indépendante des u_i; ω', ω'', ω''' prennent chaque fois la même valeur, puisque ces quantités ne contiennent pas δ_2. Si donc on divise par $\Theta(\omega)\,\Theta(\omega')\,\Theta(\omega'')\,\Theta(\omega''')$, l'équation sera de la forme

$$A + B\,\mathrm{sn}\omega'\,\mathrm{sn}\omega''\,\mathrm{sn}\omega''' + C\,\mathrm{cn}\omega'\,\mathrm{cn}\omega''\,\mathrm{cn}\omega''' + D\,\mathrm{dn}\omega'\,\mathrm{dn}\omega''\,\mathrm{dn}\omega''' = 0,$$

les valeurs de ω', ω'', ω''' étant

$$\omega' = \frac{u_1 + u_2 - u_3 - u_4}{2},$$

$$\omega'' = \frac{u_1 - u_2 + u_3 - u_4}{2},$$

$$\omega''' = \frac{u_1 - u_2 - u_3 + u_4}{2}.$$

Pour calculer A, B, C, D, faisons trois hypothèses particulières, en prenant d'abord la droite des deux points doubles, dont les arguments sont $\frac{\tau}{2} + \delta_2$, $\frac{\tau}{2} - \delta_2$, $-\frac{\tau}{2} + \delta_3$, $-\frac{\tau}{2} - \delta_3$, puis une droite issue du premier point double et rencontrant la courbe aux deux points $-\frac{\tau}{2} + \delta_2$, $-\frac{\tau}{2} - \delta_2$, enfin une droite issue du second point double et passant par les points $\frac{\tau}{2} + \delta_3$, $\frac{\tau}{2} - \delta_3$.

On a, dans ces trois cas,

$$\omega' = \tau, \quad \omega'' = \delta_2 + \delta_3, \quad \omega''' = \delta_2 - \delta_3,$$

$$\omega' = \tau, \quad \omega'' = 2\delta_2, \quad \omega''' = 0,$$

$$\omega' = -\tau, \quad \omega'' = 2\delta_3, \quad \omega''' = 0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

En substituant ces valeurs dans l'équation générale, on pourra éliminer A, B, C, D. On trouve ainsi :

$$\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{sn}\omega'\operatorname{sn}\omega''\operatorname{sn}\omega''' & \operatorname{cn}\omega'\operatorname{cn}\omega''\operatorname{cn}\omega''' & \operatorname{dn}\omega'\operatorname{dn}\omega''\operatorname{dn}\omega''' \\ 1 & \operatorname{sn}\tau\operatorname{sn}(\delta_2+\delta_3)\operatorname{sn}(\delta_2-\delta_3) & \operatorname{cn}\tau\operatorname{cn}(\delta_2+\delta_3)\operatorname{cn}(\delta_2-\delta_3) & \operatorname{dn}\tau\operatorname{dn}(\delta_2+\delta_3)\operatorname{dn}(\delta_2-\delta_3) \\ 1 & 0 & \operatorname{cn}\tau\operatorname{cn}2\delta_2 & \operatorname{dn}\tau\operatorname{dn}2\delta_2 \\ 1 & 0 & \operatorname{cn}\tau\operatorname{cn}2\delta_3 & \operatorname{dn}\tau\operatorname{dn}2\delta_3 \end{vmatrix} = 0.$$

En opérant quelques réductions et appliquant les formules qui se déduisent du théorème d'addition (Briot et Bouquet, *Fonctions elliptiques*, p. 505), on arrive aux valeurs suivantes de A, B, C, D :

$$\begin{aligned} A &= -\operatorname{sn}(\delta_2+\delta_3)\operatorname{sn}(\delta_2-\delta_3)(\operatorname{cn}2\delta_2\operatorname{dn}2\delta_3-\operatorname{cn}2\delta_3\operatorname{dn}2\delta_2) \\ &= \frac{2k'^2\operatorname{sn}^2(\delta_2+\delta_3)\operatorname{sn}^2(\delta_2-\delta_3)}{1-k^2\operatorname{sn}^2(\delta_2+\delta_3)\operatorname{sn}^2(\delta_2-\delta_3)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\operatorname{sn}\tau}[\operatorname{cn}2\delta_2\operatorname{dn}2\delta_3-\operatorname{cn}2\delta_3\operatorname{dn}2\delta_2+\operatorname{dn}(\delta_2+\delta_3)\operatorname{dn}(\delta_2-\delta_3)(\operatorname{cn}2\delta_3-\operatorname{cn}2\delta_2) \\ &\qquad +\operatorname{cn}(\delta_2+\delta_3)\operatorname{cn}(\delta_2-\delta_3)(\operatorname{dn}2\delta_2-\operatorname{dn}2\delta_3)] \\ &= \frac{2}{\operatorname{sn}\tau[1-k^2\operatorname{sn}^2(\delta_2+\delta_3)\operatorname{sn}^2(\delta_2-\delta_3)]} \\ &\quad\times[-k'^2\operatorname{sn}(\delta_2+\delta_3)\operatorname{sn}(\delta_2-\delta_3)+\operatorname{dn}^2(\delta_2+\delta_3)\operatorname{dn}^2(\delta_2-\delta_3)\operatorname{sn}(\delta_2+\delta_3)\operatorname{sn}(\delta_2-\delta_3) \\ &\qquad -k^2\operatorname{cn}^2(\delta_2+\delta_3)\operatorname{cn}^2(\delta_2-\delta_3)\operatorname{sn}(\delta_2+\delta_3)\operatorname{sn}(\delta_2-\delta_3)] \\ &= -\frac{2k^2k'^2\operatorname{sn}^3(\delta_2+\delta_3)\operatorname{sn}^3(\delta_2-\delta_3)}{\operatorname{sn}\tau[1-k^2\operatorname{sn}^2(\delta_2+\delta_3)\operatorname{sn}^2(\delta_2-\delta_3)]}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{\operatorname{sn}(\delta_2+\delta_3)\operatorname{sn}(\delta_2-\delta_3)(\operatorname{dn}2\delta_2-\operatorname{dn}2\delta_3)}{\operatorname{cn}\tau[1-k^2\operatorname{sn}^2(\delta_2+\delta_3)\operatorname{sn}^2(\delta_2-\delta_3)]} \\ &= \frac{2k^2\operatorname{sn}^2(\delta_2+\delta_3)\operatorname{sn}^2(\delta_2-\delta_3)\operatorname{cn}(\delta_2+\delta_3)\operatorname{cn}(\delta_2-\delta_3)}{\operatorname{cn}\tau[1-k^2\operatorname{sn}^2(\delta_2+\delta_3)\operatorname{sn}^2(\delta_2-\delta_3)]}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{\operatorname{sn}(\delta_2+\delta_3)\operatorname{sn}(\delta_2-\delta_3)(\operatorname{cn}2\delta_2-\operatorname{cn}2\delta_3)}{\operatorname{dn}\tau[1-k^2\operatorname{sn}^2(\delta_2+\delta_3)\operatorname{sn}^2(\delta_2-\delta_3)]} \\ &= -\frac{2\operatorname{sn}^2(\delta_2+\delta_3)\operatorname{sn}^2(\delta_2-\delta_3)\operatorname{dn}(\delta_2+\delta_3)\operatorname{dn}(\delta_2-\delta_3)}{\operatorname{dn}\tau[1-k^2\operatorname{sn}^2(\delta_2+\delta_3)\operatorname{sn}^2(\delta_2-\delta_3)]}. \end{aligned}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

En supprimant tous les facteurs communs, on arrive enfin à la condition

$$1 - \frac{k^2 \operatorname{sn}(\delta_2 + \delta_3) \operatorname{sn}(\delta_2 - \delta_3) \operatorname{sn}\omega' \operatorname{sn}\omega'' \operatorname{sn}\omega'''}{\operatorname{sn}\tau}$$

$$+ \frac{k^2 \operatorname{cn}(\delta_2 + \delta_3) \operatorname{cn}(\delta_2 - \delta_3) \operatorname{cn}\omega' \operatorname{cn}\omega'' \operatorname{cn}\omega'''}{k'^2 \operatorname{cn}\tau}$$

$$- \frac{\operatorname{dn}(\delta_2 + \delta_3) \operatorname{dn}(\delta_2 - \delta_3) \operatorname{dn}\omega' \operatorname{dn}\omega'' \operatorname{dn}\omega'''}{k'^2 \operatorname{dn}\tau} = 0,$$

qui évidemment subsiste quand on change τ, δ_2, δ_3 en $-\tau$, δ_3, δ_2.

En résumé, les arguments relatifs aux points de rencontre d'une droite avec la courbe peuvent être représentés par les formules suivantes,

$$u_1 = \frac{\omega' + \omega'' + \omega'''}{2},$$

$$u_2 = \frac{\omega' - \omega'' - \omega'''}{2},$$

$$u_3 = \frac{-\omega' + \omega'' - \omega'''}{2},$$

$$u_4 = \frac{-\omega' - \omega'' + \omega'''}{2},$$

ω', ω'', ω''' étant liés par la relation qui vient d'être établie.

39. Dans le cas d'une tangente d'inflexion, trois des arguments u_2, u_3, u_4 se confondent; on a $\omega' = \omega'' = \omega'''$, et l'argument $u = -\frac{\omega'}{2}$ du point d'inflexion est donné par l'équation précédente, qui, rendue rationnelle, est du douzième degré par rapport à $\operatorname{sn}\omega'$. Chaque valeur de ω' étant ainsi déterminée à un multiple près de $4\mathrm{K} + 4i\mathrm{K}'$, celle de $-\frac{\omega'}{2}$ le sera à un multiple près de $2\mathrm{K} + 2i\mathrm{K}'$. Les douze points d'inflexion s'obtiennent donc sans ambiguïté.

En posant $u_1 = u_2$, $u_3 = u_4$, et par suite $\omega'' = \omega''' = h\mathrm{K} + h'i\mathrm{K}'$, la formule générale fournit également les points de contact des huit tangentes doubles, et l'on est conduit à répartir ces droites en quatre groupes, suivant les valeurs de h et de h'.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

40. Le calcul relatif aux tangentes doubles peut encore se faire comme il suit.

En posant

$$u_i^{(1)} = \log\left[\frac{\mathrm{H}\left(\frac{\tau}{2}+\delta_2-u_i\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{\tau}{2}-\delta_2-u_i\right)}\sqrt[4]{\frac{\mathrm{H}(\tau-\delta_2-\delta_3)\,\mathrm{H}(\tau-\delta_2+\delta_3)}{\mathrm{H}(\tau+\delta_2+\delta_3)\,\mathrm{H}(\tau+\delta_2-\delta_3)}}\right],$$

$$u_i^{(2)} = \log\left[\frac{\mathrm{H}\left(-\frac{\tau}{2}+\delta_3-u_i\right)}{\mathrm{H}\left(-\frac{\tau}{2}-\delta_3-u_i\right)}\sqrt[4]{\frac{\mathrm{H}(\tau+\delta_2+\delta_3)\,\mathrm{H}(\tau-\delta_2+\delta_3)}{\mathrm{H}(\tau-\delta_2-\delta_3)\,\mathrm{H}(\tau+\delta_2-\delta_3)}}\right],$$

les équations qui déterminent les points de rencontre de la courbe avec une droite quelconque pourront s'écrire

$$\sum_{i=1}^{i=4} u_i = 2h\mathrm{K} + 2h'i\mathrm{K}',$$

$$\sum_{i=1}^{i=4} u_i^{(1)} = 2h_1 i\pi + \frac{2h'i\pi\delta_2}{\mathrm{K}},$$

$$\sum_{i=1}^{i=4} u_i^{(2)} = 2h_2 i\pi + \frac{2h'i\pi\delta_3}{\mathrm{K}}.$$

Dans le cas d'une tangente double, les u coïncident deux à deux. Soient donc u, u_0 les arguments des points de contact ; on a

$$u + u_0 = h\mathrm{K} + h'i\mathrm{K}',$$

$$u^{(1)} + u_0^{(1)} = h_1 i\pi + \frac{h'i\pi\delta_2}{\mathrm{K}},$$

$$u^{(2)} + u_0^{(2)} = h_2 i\pi + \frac{h'i\pi\delta_3}{\mathrm{K}}.$$

D'ailleurs, les entiers h, h', h_1, h_2 sont liés par la relation

$$(h+1)(h'+1) + h_1 + h_2 \equiv 1 \pmod 2,$$

comme cela résulte du théorème général établi au § III du Chapitre II,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et comme il serait d'ailleurs très simple de le démontrer directement dans le cas actuel.

En désignant une tangente double quelconque par $(h, h'; h_1, h_2)$, on est amené à considérer les quatre couples suivants :

$$(0,0;0,0),\ (0,0;1,1);\quad (1,0;1,0),\ (1,0;0,1),$$
$$(0,1;1,0),\ (0,1;0,1);\quad (1,1;1,0),\ (1,1;0,1).$$

Les nombres qui se correspondent dans deux couples différents formant une somme paire, on peut énoncer les théorèmes suivants :

Les points de contact de deux couples sont situés sur une même conique. Il existe trois couples de coniques tels que les seize points de contact des tangentes doubles soient situés sur les deux coniques d'un même couple.

Toute cubique passant par des points de contact de deux couples rencontre la courbe en quatre autres points situés avec les points doubles sur une même conique.

Tous ces points de contact sont les points fondamentaux d'un faisceau de courbes du quatrième degré.

CHAPITRE IV.

APPLICATION AUX COURBES DU TROISIÈME ORDRE.

§ I. — Expression des coordonnées.

41. Dans le cas d'une courbe du troisième ordre, le nombre maximum des points doubles est un; on peut donc, en général, exprimer au moyen des fonctions elliptiques les coordonnées des points d'une telle courbe.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Soit $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ l'équation de la cubique en coordonnées trilinéaires; soit Δ son hessien, ainsi défini :

$$\Delta = \frac{1}{36}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{vmatrix}.$$

Considérons un point (y_1, y_2, y_3) de la courbe, et posons, pour abréger,

$$f_i = \frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial y_i}, \qquad \Delta_i = \frac{1}{3}\frac{\partial \Delta}{\partial y_i},$$

$$f_{ik} = \frac{1}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_k}, \quad \Delta_{ik} = \frac{1}{6}\frac{\partial^2 \Delta}{\partial y_i \partial y_k} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3 \\ k = 1, 2, 3 \end{pmatrix}.$$

Les équations

$$S = \Sigma\Sigma f_{ik} x_i x_k = 0,$$

$$P = \Sigma f_i x_i = 0$$

représentent les polaires du second et du premier ordre du point y par rapport à la cubique. La droite $P = 0$ n'est autre que la tangente en y à la courbe.

Soient encore

$$\Gamma = \Sigma\Sigma \Delta_{ik} x_i x_k = 0,$$

$$H = \Sigma \Delta_i x_i = 0$$

les polaires de y par rapport au hessien. L'équation $f = 0$ peut être mise sous la forme

$$SH - \Gamma P = 0,$$

comme on le constate très facilement en supposant f ramenée à la forme canonique (cf. Salmon, *Higher plane curves*, 2e édition, p. 199).

La conique $S = 0$ est tangente à la cubique au point y et la rencontre en quatre autres points situés sur la conique $\Gamma = 0$: ce sont les points de contact des tangentes menées de y à la courbe f.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Cela posé, on voit que toute conique du faisceau

$$\Gamma - \lambda S = 0$$

rencontre la cubique en ces quatre points fixes, et de plus en deux points variables situés sur la droite

$$\Pi - \lambda P = 0,$$

qui passe par le point fixe ($\Pi = 0$, $P = 0$), où la tangente en y va de nouveau rencontrer la courbe. Ce point est appelé le *tangentiel* du point y.

D'ailleurs, la droite (3) étant la polaire de y par rapport à la conique (2), la cubique peut être engendrée en menant de ce point fixe y les tangentes à toutes les courbes du faisceau considéré (2); les deux points de contact situés sur chacune d'elles décrivent la cubique. Pour calculer les coordonnées ξ_i, η_i de ces deux points variables, éliminons x_1, x_2, x_3 entre les équations (2), (3) et celle d'une droite quelconque $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$. Le résultant sera de la forme

$$\begin{vmatrix} \Delta_{11} - \lambda f_{11} & \Delta_{12} - \lambda f_{12} & \Delta_{13} - \lambda f_{13} & \Delta_1 - \lambda f_1 & u_1 \\ \Delta_{21} - \lambda f_{21} & \Delta_{22} - \lambda f_{22} & \Delta_{23} - \lambda f_{23} & \Delta_2 - \lambda f_2 & u_2 \\ \Delta_{31} - \lambda f_{31} & \Delta_{32} - \lambda f_{32} & \Delta_{33} - \lambda f_{33} & \Delta_3 - \lambda f_3 & u_3 \\ \Delta_1 - \lambda f_1 & \Delta_2 - \lambda f_2 & \Delta_3 - \lambda f_3 & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \Sigma\Sigma w_{ik} u_i u_k = 0.$$

En l'identifiant avec le produit $\Sigma u_i \xi_i . \Sigma u_i \eta_i$, on obtient

$$\xi_i \eta_i = w_{ii},$$

$$\xi_i \eta_k + \xi_k \eta_i = 2 w_{ik},$$

d'où

$$(\xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i)^2 = 4 (w_{ik}^2 - w_{ii} w_{kk}).$$

On a d'ailleurs, par une propriété des déterminants rappelée au Chapitre précédent (p. 48),

$$w_{23} - w_{22} w_{33} = D (\Delta_1 - \lambda f_1)^2,$$

$$w_{31} - w_{33} w_{11} = D (\Delta_2 - \lambda f_2)^2,$$

$$w_{12} - w_{11} w_{22} = D (\Delta_3 - \lambda f_3)^2,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

en posant

$$D=\begin{vmatrix} \Delta_{11}-\lambda f_{11} & \Delta_{12}-\lambda f_{12} & \Delta_{13}-\lambda f_{13} & \Delta_1-\lambda f_1 \\ \Delta_{21}-\lambda f_{21} & \Delta_{22}-\lambda f_{22} & \Delta_{23}-\lambda f_{23} & \Delta_2-\lambda f_2 \\ \Delta_{31}-\lambda f_{31} & \Delta_{32}-\lambda f_{32} & \Delta_{33}-\lambda f_{33} & \Delta_3-\lambda f_3 \\ \Delta_1-\lambda f_1 & \Delta_2-\lambda f_2 & \Delta_3-\lambda f_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-\Delta(y)\begin{vmatrix} \Delta_{11}-\lambda f_{11} & \Delta_{12}-\lambda f_{12} & \Delta_{13}-\lambda f_{13} \\ \Delta_{21}-\lambda f_{21} & \Delta_{22}-\lambda f_{22} & \Delta_{23}-\lambda f_{23} \\ \Delta_{31}-\lambda f_{31} & \Delta_{32}-\lambda f_{32} & \Delta_{33}-\lambda f_{33} \end{vmatrix}.$$

Ce dernier déterminant n'est autre que le hessien de $\Delta-\lambda f$, divisé par 6, et dans lequel on a remplacé x_1, x_2, x_3 par y_1, y_2, y_3. D'ailleurs, ce hessien est lui-même de la forme $\mu'\Delta-\lambda' f$, μ', λ' ayant les valeurs suivantes :

$$\mu'=-\lambda^3-12S\lambda+2T,$$

$$\lambda'=6(2S\lambda^2-T\lambda-8S^2).$$

On le voit au moyen des formes canoniques (SALMON, *Higher curves*, p. 190). S et T désignent ici les deux invariants de la courbe.

On en conclut, f étant nul pour $x_i=y_i$,

$$D=\frac{\Delta^2(y)}{6}(\lambda^3+12S\lambda-2T),$$

et par suite

$$\xi_2\eta_3-\xi_3\eta_2=\pm 2(\Delta_1-\lambda f_1)\Delta(y)\sqrt{\tfrac{1}{6}(\lambda^3+12S\lambda-2T)},$$

$$\xi_3\eta_1-\xi_1\eta_3=\pm 2(\Delta_2-\lambda f_2)\Delta(y)\sqrt{\tfrac{1}{6}(\lambda^3+12S\lambda-2T)},$$

$$\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1=\pm 2(\Delta_3-\lambda f_3)\Delta(y)\sqrt{\tfrac{1}{6}(\lambda^3+12S\lambda-2T)},$$

les signes supérieurs se correspondant ainsi que les signes inférieurs, puisque $\Delta_1-\lambda f_1$, $\Delta_2-\lambda f_2$, $\Delta_3-\lambda f_3$ sont les coordonnées de la droite des deux points.

En introduisant trois constantes C_1, C_2, C_3 telles que l'expression

$$C_1\eta_1+C_2\eta_2+C_3\eta_3=\rho$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ne soit pas nulle, on aura

$$(4)\quad \begin{cases} \rho\xi_1 = \Sigma C_i w_{1i} \pm \begin{vmatrix} C_2 & C_3 \\ \Delta_2 - \lambda f_2 & \Delta_3 - \lambda f_3 \end{vmatrix} \Delta(\gamma)\sqrt{\frac{1}{6}(\lambda^3 + 12S\lambda - 2T)}, \\ \rho\xi_2 = \Sigma C_i w_{2i} \pm \begin{vmatrix} C_3 & C_1 \\ \Delta_3 - \lambda f_3 & \Delta_1 - \lambda f_1 \end{vmatrix} \Delta(\gamma)\sqrt{\frac{1}{6}(\lambda^3 + 12S\lambda - 2T)}, \\ \rho\xi_3 = \Sigma C_i w_{3i} \pm \begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ \Delta_1 - \lambda f_1 & \Delta_2 - \lambda f_2 \end{vmatrix} \Delta(\gamma)\sqrt{\frac{1}{6}(\lambda^3 + 12S\lambda - 2T)}. \end{cases}$$

Ces expressions se simplifient si l'on prend pour valeurs des constantes f_1, f_2, f_3. On a alors

$$\Sigma C_i w_{1i} = \begin{vmatrix} \Delta_{21} - \lambda f_{21} & \Delta_{22} - \lambda f_{22} & \Delta_{23} - \lambda f_{23} & \Delta_2 - \lambda f_2 \\ \Delta_{31} - \lambda f_{31} & \Delta_{32} - \lambda f_{32} & \Delta_{33} - \lambda f_{33} & \Delta_3 - \lambda f_3 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & 0 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \Delta(\gamma) \begin{vmatrix} \Delta_{21} - \lambda f_{21} & \Delta_{22} - \lambda f_{22} & \Delta_{23} - \lambda f_{23} \\ \Delta_{31} - \lambda f_{31} & \Delta_{32} - \lambda f_{32} & \Delta_{33} - \lambda f_{33} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix},$$

et l'on trouvera par analogie $\Sigma C_i w_{2i}$, $\Sigma C_i w_{3i}$. En substituant dans les formules (4) et faisant rentrer $\frac{1}{\Delta(\gamma)}$ dans ρ, on voit que la partie rationnelle des coordonnées s'abaisse au second degré et que le coefficient du radical est constant. Pour réunir les trois formules en une seule, faisons une combinaison linéaire des coordonnées. On trouve ainsi

$$(5)\quad \begin{cases} \Sigma u_i x_i = \begin{vmatrix} \Delta_{11} - \lambda f_{11} & \Delta_{12} - \lambda f_{12} & \Delta_{13} - \lambda f_{13} & u_1 \\ \Delta_{21} - \lambda f_{21} & \Delta_{22} - \lambda f_{22} & \Delta_{23} - \lambda f_{23} & u_2 \\ \Delta_{31} - \lambda f_{31} & \Delta_{32} - \lambda f_{32} & \Delta_{33} - \lambda f_{33} & u_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix} \\ \qquad \pm \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \sqrt{\frac{1}{6}(\lambda^3 + 12S\lambda - 2T)}. \end{cases}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Il suffira d'égaler dans les deux membres les coefficients de u_i pour avoir la valeur de x_i (¹). Cette valeur est de la forme suivante :

$$\rho x_i = l_i + m_i\lambda + n_i\lambda^2 \pm \frac{\alpha_i}{\sqrt{6}}\sqrt{\lambda^3 + 12S\lambda - 2T}. \tag{6}$$

42. La valeur de n_i n'est autre chose que $-\frac{y_i}{6}\Delta(y)$. Effectivement on a, par exemple,

$$n_1 = -\begin{vmatrix} f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = -\frac{y_1\Delta(y)}{6}.$$

Quant aux α_i, ce sont les coordonnées du tangentiel de y. Nous le désignerons désormais par α. Ce point est le centre du faisceau linéaire (3).

Lorsque le radical s'annule, les deux points ξ, η se confondent; les trois valeurs λ', λ'', λ''' pour lesquelles cette circonstance se présente fournissent trois des tangentes menées par α; la quatrième est donnée par $\lambda = \infty$; c'est la tangente en y.

43. Le rapport anharmonique de ces quatre valeurs ne dépend que de l'invariant absolu $\frac{S^3}{T^2}$ de la courbe, car l'équation aux carrés des différences étant de la forme $z^3 + aSz^2 + bS^2z + c(64S^3 + T^2)$, si l'on prend pour inconnue $\frac{z}{S}$, ce qui n'altère pas les rapports tels que $\frac{\lambda'' - \lambda'''}{\lambda' - \lambda'''}$, les coefficients ne contiennent plus que $\frac{S^3}{T^2}$. D'ailleurs, y et par suite α sont quelconques. Nous démontrons donc ainsi que *le rapport anharmonique des quatre tangentes menées d'un point de la courbe est constant et qu'il ne dépend que de* $\frac{S^3}{T^2}$.

(¹) Ces expressions ne diffèrent que par les coefficients numériques de S et T de celles qui ont été obtenues par Aronhold et Clebsch au moyen de considérations différentes. Nous avons, avec Salmon, appelé S et T les expressions qui, pour la forme canonique $x^3 + y^3 + z^3 + 6mxyz$, se réduisent à $m - m^4$ et $1 - 20m^3 - 8m^6$. Ces mêmes quantités seraient désignées par $-4S$ et $-T$ dans la notation des géomètres allemands (*voir* Aronhold, *Monatsbericht der Akademie zu Berlin*, April 1861).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

44. Supposons que y soit un point d'inflexion, et par suite coïncide avec son tangentiel α. On a alors $\Delta = 0$ et

$$\rho x_i = l_i + m_i\lambda \pm \alpha_i \sqrt{\tfrac{1}{6}(\lambda^3 + 12S\lambda - 2T)}.$$

Ces équations montrent que la droite représentée par les équations

$$\rho x_i = l_i + m_i\lambda$$

est le lieu des conjugués harmoniques du point α par rapport aux deux autres points de rencontre de la courbe avec une sécante issue de α. Cette droite passe par les trois points pour lesquels le radical s'annule, c'est-à-dire par les points de contact des trois tangentes menées du point d'inflexion. C'est la polaire harmonique de ce point.

45. Pour introduire les fonctions elliptiques dans les formules (6), soit

$$\lambda = (\lambda'' - \lambda''')\,\mathrm{sn}^2 t + \lambda''',$$

$$k^2 = \frac{\lambda''' - \lambda''}{\lambda''' - \lambda'},$$

d'où

$$\sqrt{\lambda^3 + 12S\lambda - 2T} = (\lambda'' - \lambda''')\sqrt{\lambda' - \lambda'''}\,\mathrm{sn}\,t\,\mathrm{cn}\,t\,\mathrm{dn}\,t.$$

Le nouveau paramètre t est alors défini par l'égalité

$$t = \sqrt{\frac{\lambda' - \lambda'''}{2}} \int_{\lambda'''}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^3 + 12S\lambda - 2T}},$$

et, φ_i désignant un polynôme du second degré, on a

$$x_i = \varphi_i\,\mathrm{sn}^2 t + \tfrac{1}{2}(\lambda''' - \lambda'')\sqrt{\frac{\lambda' - \lambda'''}{6}}\,\alpha_i \frac{d\,\mathrm{sn}^2 t}{dt}. \tag{7}$$

46. En rapportant la courbe à des axes particuliers, on exprimerait immédiatement les coordonnées en fonction de $\mathrm{sn}\,t$, $\mathrm{cn}\,t$, $\mathrm{dn}\,t$. Prenons par exemple pour côtés du triangle de référence une droite $x_1 = 0$, tangente en un point d'inflexion, puis pour droite $x_2 = 0$ une des tangentes menées de ce point, et pour $x_3 = 0$ la polaire harmonique du point d'inflexion. L'équation est alors

$$x_3^2 x_1 - x_2(x_2 - x_1)(x_2 - k^2 x_1) = 0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Il suffit donc de poser

$$x_1 = \operatorname{sn}^3 t,$$
$$x_2 = \operatorname{sn} t,$$
$$x_3 = \sqrt{(1 - \operatorname{sn}^2 t)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 t)} = \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t.$$

En partant de la forme d'équation ABC = D et considérant les hyperboles AB = 0, M. Hermite a donné l'expression des coordonnées en fonction de 0 (*Cours d'Analyse*, p. 422).

Enfin on peut procéder synthétiquement, en posant

$$x = x_0 + \mathrm{AZ}(t-a) + \mathrm{BZ}(t-b) + \mathrm{CZ}(t-c),$$
$$y = y_0 + \mathrm{A'Z}(t-a) + \mathrm{B'Z}(t-b) + \mathrm{C'Z}(t-c),$$

et prouver directement que l'élimination de t conduit à une équation du troisième degré en x, y, si l'on a $\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} = 0$, $\mathrm{A'} + \mathrm{B'} + \mathrm{C'} = 0$.

47. Il nous semble avantageux, pour les applications qui vont suivre, de conserver les formules (6), en y introduisant la fonction doublement périodique considérée par M. Weierstrass,

$$\lambda = p(u) = p,$$

et qui résulte de l'inversion de l'intégrale

$$u = \int_{\infty}^{\lambda} \frac{d\lambda}{2\sqrt{\lambda^3 + 12\mathrm{S}\lambda - 2\mathrm{T}}}.$$

On a alors

$$p'^2(u) = 4(p^3 + 12\mathrm{S}p - 2\mathrm{T}),$$
$$p''(u) = 6(p^2 + 4\mathrm{S}),$$
$$p'''(u) = 12pp',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Un premier avantage est d'éviter la résolution de l'équation cubique en λ.

Les formules (6) deviennent alors

$$x_i = l_i + m_i p + n_i p^2 + \frac{\alpha_i}{2\sqrt{6}} p' \qquad (8)$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ou, remplaçant p^2 en fonction de p'',

$$x_i = l_i + \tfrac{2}{3}\mathrm{S}y_i\Delta(y) + m_i p + \frac{\alpha_i}{2\sqrt{6}}p' - \frac{y_i}{36}\Delta(y)p''. \tag{8'}$$

Soient 2ω, $2\omega'$ les deux périodes de $p(u)$, en sorte qu'on ait

$$p(\omega) = \lambda', \quad p(\omega+\omega') = \lambda'', \quad p(\omega') = \lambda'''.$$

48. La relation entre les fonctions p et sn se déduira de l'équation

$$p = \lambda = (\lambda'' - \lambda''')\,\mathrm{sn}^2 t + \lambda''',$$

qui a conduit aux formules (7). De la relation

$$t = \frac{\sqrt{\lambda' - \lambda'''}}{2}\left(\int_\infty^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{4\lambda^3 + 12\mathrm{S}\lambda - 2\mathrm{T}}} - \int_\infty^{\lambda'''} \frac{d\lambda}{\sqrt{4\lambda^3 + 12\mathrm{S}\lambda - 2\mathrm{T}}}\right) = \sqrt{\lambda' - \lambda'''}\,(u - \omega'),$$

on tire

$$p(u) = \lambda''' + (\lambda'' - \lambda''')\,\mathrm{sn}^2(u - \omega')\sqrt{\lambda' - \lambda'''}.$$

D'ailleurs, pour $u = 0$, on doit avoir $p(u) = \infty$; donc

$$\omega' = \frac{i\mathrm{K}'}{\sqrt{\lambda' - \lambda'''}};$$

et de même, pour $u = \omega + \omega'$, $p(u) = \lambda''$; donc

$$\omega = \frac{\mathrm{K}}{\sqrt{\lambda' - \lambda'''}}.$$

Finalement, on a

$$p(u) = \lambda''' + \frac{\lambda' - \lambda'''}{\mathrm{sn}^2\left(u\sqrt{\lambda' - \lambda'''}\right)}.$$

§ II. — Relations entre les paramètres qui déterminent un même point.

49. L'expression des coordonnées déterminée par les formules (8) conduit à des conséquences géométriques très importantes.

Un premier théorème s'obtient en changeant le point y, et par suite le centre du faisceau linéaire qui sert à engendrer la courbe. Soit μ le nouveau paramètre variable; si l'on pose $\mu = p(v)$, *les arguments* u, v

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

qui correspondent à un même point de la courbe ne diffèrent que par une constante.

En effet on a, en un point quelconque u de la courbe,

$$\frac{x_2\,dx_3 - x_3\,dx_2}{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}} = \frac{x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3}{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}} = \frac{x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1}{\dfrac{\partial f}{\partial x_3}} = \frac{\Sigma \pm c_1 x_2\,dx_3}{\sum c_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}},$$

où c_1, c_2, c_3 sont trois quantités arbitraires. Nous allons démontrer que la valeur de cette expression est égale à du, à un facteur numérique près.

Prenons, en effet, pour c_i les coordonnées α_i du tangentiel de γ. Le numérateur de la différentielle considérée devient alors

$$\Sigma \pm (f_2\Delta_3 - f_3\Delta_2)\,x_2\,dx_3, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \Sigma f_i x_i \,\Sigma \Delta_i dx_i - \Sigma \Delta_i x_i \Sigma f_i dx_i.$$

D'ailleurs, le système des quatre tangentes menées de α a pour équation (Salmon, *Higher curves*, p. 60)

$$\left(\sum \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 - 4 f \Sigma x_i \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = 0,$$

et, puisqu'on obtient trois d'entre elles en remplaçant λ par $\dfrac{\Sigma \Delta_i x_i}{\Sigma f_i x_i}$ dans $\lambda^3 + 12S\lambda - 2T = 0$ et la quatrième par l'équation $\Sigma f_i x_i = 0$, on aura pour un point quelconque de la courbe, f étant nul,

$$\sum \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = g(\Sigma f_i x_i)^2 \sqrt{\lambda^3 + 12S\lambda - 2T},$$

d'où l'on déduit pour la différentielle $\dfrac{\Sigma \pm c_1 x_2\,dx_3}{\sum c_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}}$ la valeur suivante :

$$\frac{1}{g} \frac{d\dfrac{\Sigma \Delta_i x_i}{\Sigma f_i x_i}}{\sqrt{\lambda^3 + 12S\lambda - 2T}} = \frac{d\lambda}{g\sqrt{\lambda^3 + 12S\lambda - 2T}} = \frac{2\,du}{g}.$$

La constante g se détermine au moyen d'un exemple. On trouve $g = \sqrt{6}$.

Cela posé, en remplaçant α, centre du premier faisceau, par α',

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

centre du second, on trouvera pour valeur de cette même expression $\frac{2dv}{g}$. On a donc

$$dv = du,$$
$$v = u + C.$$

50. La relation algébrique entre λ et μ s'obtiendra donc par le théorème d'addition appliqué aux fonctions $p(u)$. En partant de la formule

$$p(u) - p(v) = \frac{\sigma(v-u)\sigma(v+u)}{[\sigma(v)]^2[\sigma(u)]^2} \quad (1),$$

et différentiant par rapport à u et v, il vient

$$\frac{p'(u)}{p(u)-p(v)} = -\frac{\sigma'(v-u)}{\sigma(v-u)} + \frac{\sigma'(v+u)}{\sigma(v+u)} - \frac{2\sigma'(u)}{\sigma(u)},$$
$$\frac{-p'(v)}{p(u)-p(v)} = \frac{\sigma'(v-u)}{\sigma(v-u)} + \frac{\sigma'(v+u)}{\sigma(v+u)} - \frac{2\sigma'(v)}{\sigma(v)},$$

d'où

$$\frac{p'(u)+p'(v)}{p(u)-p(v)} = -2\frac{\sigma'(v-u)}{\sigma(v-u)} + 2\frac{\sigma'(v)}{\sigma(v)} - \frac{2\sigma'(u)}{\sigma(u)};$$

en différentiant de nouveau et appliquant la formule

$$p(u) = -\frac{d^2 \log \sigma u}{du^2},$$

on trouvera

$$p(v-u) = \frac{p(u)+p(v)}{2} + \frac{[p'(u)+p'(v)]^2}{4[p(u)-p(v)]^2} + \frac{p''(v)-p''(u)}{4[p(u)-p(v)]}$$

ou

$$p(C) = \frac{(\lambda+\mu)(\lambda\mu+12S) - 4T + \frac{p'(u)p'(v)}{2}}{(\lambda-\mu)^2}.$$

Cette équation, rendue rationnelle et débarrassée du facteur $(\lambda-\mu)^2$, devient, après quelques réductions,

$$\lambda^2\mu^2 - 2p(C)\lambda\mu(\lambda+\mu) + p^2(C)(\lambda-\mu)^2 - 24S\lambda\mu$$
$$+ [8T - 24p(C)S](\lambda+\mu) + 144S^2 + 8p(C)T = 0.$$

---

(1) KIEPERT, *Journal de Crelle*, t. 76, p. 24.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La constante $p(C)$ peut se déterminer en faisant $u=0$ ou $\lambda=\infty$, ce qui revient à prendre le point y. On aura alors

$$\mu=p(C)=\frac{\Sigma\Delta_i y_i}{\Sigma f_i' y_i}.$$

Cette valeur est encore égale à $\frac{\Sigma\Delta_i y_i'}{\Sigma f_i y_i'}$, comme on le voit en faisant $v=0$, ce qui donne le point y' analogue de y dans le second mode de représentation, et en remarquant que $p(-C)=p(C)$.

La relation entre λ et μ pourrait s'obtenir autrement, en éliminant x_1, x_2, x_3 entre les trois équations

$$f(x_1, x_2, x_3)=0, \quad \lambda\Sigma f_i x_i-\Sigma\Delta_i x_i=0, \quad \mu\Sigma f_i' x_i-\Sigma\Delta_i' x_i=0.$$

Le résultant, qui est alors du troisième degré par rapport à chacun des paramètres λ, μ, contient les facteurs

$$(\lambda\Sigma f_i\alpha_i'-\Sigma\Delta_i\alpha_i'), \quad (\mu\Sigma f_i'\alpha_i-\Sigma\Delta_i'\alpha_i),$$

puisque la droite des deux points α, α', considérée successivement dans chacun des deux faisceaux, rencontre toutes les droites de l'autre faisceau.

§ III. — Condition pour que trois points soient en ligne droite.

51. Cherchons maintenant la condition pour que trois points de la courbe soient en ligne droite.

Soit $Ax_1+Bx_2+Cx_3=0$ l'équation de cette droite; si l'on y porte les valeurs de x_1, x_2, x_3, fournies par les formules (8), le premier membre devient une fonction doublement périodique de u, de la forme

$$L+Mp(u)+Np^2(u)+Pp'(u),$$

admettant l'infini quadruple $u=0$, et par suite quatre zéros, entre lesquels existe la relation

$$u_0+u_1+u_2+u_3\equiv 0.$$

L'un d'eux, u_0, est constant et égal et de signe contraire à l'argument

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

relatif au point α, centre du faisceau, comme on le voit en faisant $u_2 = u_3 = 0$, ce qui donne la tangente en y.

Cette solution étrangère provient de ce que, pour $u = u_0$, le facteur commun $\rho = f_1\eta_1 + f_2\eta_2 + f_3\eta_3$ qui entre dans l'expression des coordonnées est nul, le point α étant sur la tangente en y. Les formules sont alors illusoires, les trois coordonnées s'annulant simultanément (*voir* p. 63).

La relation entre les valeurs de p relatives aux quatre zéros considérés sera évidemment

$$\begin{vmatrix} 1 & p(u_0) & p^2(u_0) & p'(u_0) \\ 1 & p(u_1) & p^2(u_1) & p'(u_1) \\ 1 & p(u_2) & p^2(u_2) & p'(u_2) \\ 1 & p(u_3) & p^2(u_3) & p'(u_3) \end{vmatrix} = 0.$$

52. La valeur de $p(u_0)$, étant celle que prend λ quand un des deux points variables devient le point α, peut se calculer comme il suit. La conique $\Gamma - \lambda S = 0$ est, on l'a vu, tangente aux droites qui joignent le point y aux deux points variables; dans le cas actuel, sa tangente en α sera la droite αy. On aura donc

$$\begin{vmatrix} \Delta_{11} - \lambda f_{11} & \Delta_{12} - \lambda f_{12} & \Delta_{13} - \lambda f_{13} & f_1 \\ \Delta_{21} - \lambda f_{21} & \Delta_{22} - \lambda f_{22} & \Delta_{23} - \lambda f_{23} & f_2 \\ \Delta_{31} - \lambda f_{31} & \Delta_{32} - \lambda f_{32} & \Delta_{33} - \lambda f_{33} & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dans cette équation, le coefficient de λ^2 est nul; le terme indépendant de λ est le covariant du sixième ordre

$$\begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & f_1 \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} & f_2 \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix},$$

que nous désignerons par Ψ. Le coefficient de λ est celui de $\lambda_{\mu\nu}$ dans le

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

déterminant auxiliaire

$$\begin{vmatrix} \Delta_{11}-\lambda f_{11} & \Delta_{12}-\lambda f_{12} & \Delta_{13}-\lambda f_{13} & \Delta_1-\mu f_1 \\ \Delta_{21}-\lambda f_{21} & \Delta_{22}-\lambda f_{22} & \Delta_{23}-\lambda f_{23} & \Delta_2-\mu f_2 \\ \Delta_{31}-\lambda f_{31} & \Delta_{32}-\lambda f_{32} & \Delta_{33}-\lambda f_{33} & \Delta_3-\mu f_3 \\ \Delta_1-\nu f_1 & \Delta_2-\nu f_2 & \Delta_3-\nu f_3 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= P+\lambda Q+\lambda^2 R+(P_1+\lambda Q_1+\lambda^2 R_1)(\mu+\nu)+(P_2+\lambda Q_2+\lambda^2 R_2)\mu\nu.$$

Ce déterminant, si l'on y fait $\mu=\lambda$, devient le produit de $-\frac{1}{6}(\Delta-\nu f)$ par le hessien de $\Delta-\lambda f$, lequel a pour expression, comme on l'a vu (p. 63),

$$-(\lambda^3+12S\lambda-2T)\Delta-6(2S\lambda^2-T\lambda-8S^2)f.$$

En identifiant les deux expressions du déterminant, on trouve

$$Q_2=-R_1=-\frac{\Delta^2(y)}{6},$$

et par suite

$$p(u_0)=\frac{6\Psi}{\Delta^2(y)}.$$

Cette valeur a été obtenue par Clebsch d'une manière moins simple (*Journal de Crelle*, t. 63). On a donc

$$p'^2(u_0)=\frac{4}{\Delta^6(y)}[216\Psi^3+72S\Delta^4\Psi-2T\Delta^6].$$

Nous allons montrer que l'expression entre crochets est le carré d'un covariant Ω.

53. La condition relative à trois points en ligne droite s'obtient encore en égalant à zéro le déterminant formé par leurs coordonnées, c'est-à-dire

$$\sum\pm\left[l_1+m_1p(u_1)+n_1p^2(u_1)+\frac{\alpha_1}{2\sqrt{6}}p'(u_1)\right]$$
$$\times\left[l_2+m_2p(u_2)+n_2p^2(u_2)+\frac{\alpha_2}{2\sqrt{6}}p'(u_2)\right]$$
$$\times\left[l_3+m_3p(u_3)+n_3p^2(u_3)+\frac{\alpha_3}{2\sqrt{6}}p'(u_3)\right].$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On a donc, par le théorème relatif au produit des déterminants,

$$\begin{vmatrix} \Sigma \pm m_1 n_2 \alpha_3 & -\Sigma \pm l_1 n_2 \alpha_3 & \Sigma \pm l_1 m_2 \alpha_3 & -2\sqrt{6}\,\Sigma \pm l_1 m_2 n_3 \\ 1 & p(u_1) & p^2(u_1) & p'(u_1) \\ 1 & p(u_2) & p^2(u_2) & p'(u_2) \\ 1 & p(u_3) & p^2(u_3) & p'(u_3) \end{vmatrix} = 0.$$

D'ailleurs, en se reportant aux valeurs de α_i, l_i, m_i, n_i [formules (5) et (6)],

$$\Sigma \pm l_1 n_2 \alpha_3 = \Sigma l_i f_i \Sigma n_i \Delta_i - \Sigma n_i f_i \Sigma l_i \Delta_i = -\Sigma l_i f_i \frac{\Delta^2(\gamma)}{6} = -\Psi \frac{\Delta^2(\gamma)}{6},$$

$$\Sigma \pm m_1 n_2 \alpha_3 = \Sigma m_i f_i \Sigma n_i \Delta_i - \Sigma n_i f_i \Sigma m_i \Delta_i$$

$$= -\Sigma m_i f_i \frac{\Delta^2(\gamma)}{6} = -Q_2 \frac{\Delta^2(\gamma)}{6} = \frac{\Delta^4(\gamma)}{36},$$

$$-\frac{\Sigma \pm l_1 n_2 \alpha_3}{\Sigma \pm m_1 n_2 \alpha_3} = \frac{6\Psi}{\Delta^2(\gamma)} = p(u_0),$$

et, en achevant de comparer les résultats fournis par les deux méthodes, on arrive aux relations

$$p^2(u_0) = \frac{\Sigma \pm l_1 m_2 \alpha_3}{\Sigma \pm m_1 n_2 \alpha_3},$$

$$p'(u_0) = -\frac{2\sqrt{6}\,\Sigma \pm l_1 m_2 n_3}{\Sigma \pm m_1 n_2 \alpha_3} = \frac{12\sqrt{6}\,\Sigma \pm l_1 m_2 \gamma_3}{\Delta^3(\gamma)}.$$

On peut donc poser

$$216\Psi^3 + 72S\Delta^4\Psi - 2T\Delta^6 = \frac{\Delta^6(\gamma)p'^2(u_0)}{4} = 216(\Sigma \pm l_1 m_2 \gamma_3)^2 = \Omega^2.$$

54. Supposons $u_0 = 0$. Alors γ coïncide avec son tangentiel : c'est un point d'inflexion. Dans ce cas, $p(u_0) = \infty$, $\Delta = 0$. La condition relative aux arguments sera

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0,$$

et l'on a

$$\begin{vmatrix} 1 & p(u_1) & p'(u_1) \\ 1 & p(u_2) & p'(u_2) \\ 1 & p(u_3) & p'(u_3) \end{vmatrix} = 0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

55. La relation obtenue dans le cas général,

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0,$$

permet de démontrer un grand nombre de propriétés des courbes du troisième ordre.

Supposons que la droite soit tangente à la courbe en un point $u_2 = u_3$; l'argument relatif au tangentiel sera $-2u_2 - u_0$. La valeur correspondante de λ sera

$$p(-2u_2 - u_0) = p(2u_2 + u_0).$$

Cette valeur ne changeant pas lorsqu'on remplace le point u_2 par le point $-u_2 - u_0$, situé sur la droite des deux points $u_2, 0$, et par suite les deux tangentiels respectifs des points u_2, $-u_2 - u_0$ étant en ligne droite avec le centre du faisceau α, tangentiel de 0, on en conclut ce théorème :

Les tangentiels de trois points en ligne droite sont eux-mêmes en ligne droite.

La quantité $p(2u_2 + u_0)$ s'exprime en fonction de $p\,u_0)$ et $p(2u_2)$ au moyen du théorème d'addition (50). Enfin $p(2u_2)$ est donné par la formule de multiplication (15), en y faisant $n = 2$. On trouve ainsi

$$p(2u) = -2p + \frac{p''^2}{4p'^2} = -2p + \frac{9(p^2 + 4S)^2}{4(p^3 + 12Sp - 2T)}.$$

56. Si l'on considère inversement les tangentes menées du point u_1 de la courbe, on trouve pour arguments des points de contact les quatre valeurs

$$-\frac{u_0 + u_1}{2}, \quad -\frac{u_0 + u_1}{2} + \omega, \quad -\frac{u_0 + u_1}{2} + \omega', \quad -\frac{u_0 + u_1}{2} + \omega + \omega'.$$

Les valeurs des paramètres correspondants $p(u)$ sont les racines de l'équation

$$p(2u) = p(u_0 + u_1)$$

ou

$$9(p^2 + 4S)^2 - 4(p^3 + 12Sp - 2T)[2p + p(u_0 + u_1)] = 0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On y remplacera $p(u_0)$ par sa valeur $\frac{6\Psi}{\Delta^2(y)}$ et $p(u_1)$ par $\frac{\Sigma\Delta_i z_i}{\Sigma f_i z_i}$, z_i désignant les coordonnées du point u_1.

Cette équation du quatrième degré ne change pas si l'on y remplace u_1 par $-2u_0-u_1$; ce dernier argument est celui d'un point situé en ligne droite avec le point u_1 et le point u_0, lequel est le tangentiel du centre du faisceau, et par suite un point quelconque. On en déduit ce nouveau théorème :

Si trois points de la courbe sont en ligne droite, les douze points de contact des tangentes menées de ces points sont répartis trois à trois sur seize droites.

En effet, parmi les quatre points de contact des tangentes issues du point u_0 se trouve le sommet du faisceau α; les quatre droites qui le joignent aux points de contact des tangentes issues de u_1 sont, d'après le calcul précédent, les mêmes que celles qui le joignent aux points de contact des tangentes issues du point $-2u_0-u_1$; en répétant le même raisonnement pour les trois autres points, on constatera l'existence des seize droites dont on a parlé.

57. Dans le cas particulier de $u_0=0$, l'équation du quatrième degré en p devient

$$9(p^2+4S)^2-4(p^3+12Sp-2T)[2p+p(u_1)]=0.$$

Elle ne change pas si l'on remplace le point u_1 par le point $-u_1$, situé en ligne droite avec le premier et avec le point d'inflexion qui, dans le cas actuel, est le centre du faisceau. Donc :

Si deux points de la courbe sont en ligne droite avec un point d'inflexion, les quatre points de contact des tangentes menées du premier sont respectivement en ligne droite avec ceux des tangentes menées du second et avec le point d'inflexion.

Les valeurs obtenues plus haut pour les arguments des points de contact des tangentes issues d'un point conduiraient aussi très simplement à ces résultats. On verrait encore que les trois systèmes de sécantes déterminés par les quatre points de contact se coupent sur la courbe,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

en des points $u_1 - \omega$, $u_1 - \omega'$, $u_1 - \omega - \omega'$, qui peuvent être regardés, avec le point initial u_1, comme les points de contact des quatre tangentes menées du point qui a pour argument $-2u_1 - u_0$.

§ IV. — Points d'inflexion. — Résolution algébrique d'une équation du neuvième degré.

58. L'étude des points d'inflexion de la courbe mérite une attention particulière. Supposons que les trois arguments u_1, u_2, u_3 se confondent; leur valeur commune est alors $-\frac{u_0}{3} + \frac{2h\omega + 2h'\omega'}{3}$. La courbe admet donc neuf points d'inflexion qui, désignés respectivement par les valeurs correspondantes de h et de h', forment le tableau suivant :

00	01	02
10	11	12
20	21	22.

En les groupant, soit par lignes horizontales, soit par colonnes verticales, soit de manière à former les six termes d'un déterminant à neuf éléments, on constate l'existence de douze droites sur lesquelles ces points se répartissent trois par trois. Ces douze droites forment quatre triangles tels que les côtés d'un même triangle contiennent tous les points d'inflexion. Pour les obtenir, on associera les points qui correspondent soit aux trois lignes, soit aux trois colonnes, soit aux trois termes positifs, soit aux trois termes négatifs du déterminant.

59. Ces résultats peuvent être retrouvés et complétés en considérant l'équation qui fournit les valeurs de p. On a, dans le cas actuel,

$$p(3u) = p(u_0) = \frac{6\Psi}{\Delta^2}.$$

Appliquons la formule de M. Kiepert :

$$p(3u) = p - \frac{p'}{9}\frac{\begin{vmatrix} p' & p'' & p''' \\ p'' & p''' & p^{IV} \\ p''' & p^{IV} & p^{V} \end{vmatrix}}{(p'p''' - p''^2)^2} = p - \frac{4p'^2(12pp'^2p'' - 4p'^4 - p''^3)}{(12pp'^2 - p''^2)^2}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

En posant

$$V = pp'^2 - \frac{p''^2}{12} = p^4 + 24Sp^2 - 8Tp - 48S^2,$$

on arrive à l'équation du neuvième degré

$$(9)\quad 9\left(\frac{6\Psi}{\Delta^2} - p\right)V^2 + 72(p^2+4S)(p^3+12Sp-2T)V - 64(p^3+12Sp-2T)^3 = 0,$$

qui détermine les droites joignant le sommet du faisceau aux neuf points d'inflexion. On l'eût obtenue en éliminant x_1, x_2, x_3 entre les trois équations

$$f(x) = 0, \quad \Delta(x) = 0, \quad p\Sigma f_i x_i - \Sigma \Delta_i x_i = 0.$$

Si l'on suppose que y est un point d'inflexion, ou $\Delta = 0$, l'équation devient du quatrième degré : $V = 0$.

Il a donc quatre droites joignant un même point d'inflexion aux huit autres; par suite, *les neuf points sont répartis trois à trois sur douze droites.*

L'invariant I du second ordre de la forme V étant nul, son discriminant est négatif, et, par suite, l'équation $V = 0$ admet deux racines réelles : une positive, pour laquelle p' est réel, puisque $pp'^2 - \frac{p''^2}{12} = 0$, et une négative, pour laquelle p' est imaginaire. En supposant, ce qui est toujours permis, que y est un point d'inflexion *réel*, on voit qu'il existe deux autres points d'inflexion réels, situés en ligne droite avec le premier. Ceux qui correspondent à la racine négative sont imaginaires conjugués. Donc *toute cubique admet trois points d'inflexion réels, et six autres imaginaires, situés trois à trois sur douze droites, dont quatre seulement sont réelles;* l'une d'elles joint les trois points réels; chacune des trois autres joint un point réel à deux points imaginaires conjugués.

L'invariant I étant nul, on sait que les quatre racines de l'équation $V = 0$, et par suite les quatre droites issues d'un même point d'inflexion, sont dans un rapport *équiharmonique* (1).

(1) C'est-à-dire que les six rapports anharmoniques de ces droites sont égaux, par groupes de trois, aux racines cubiques imaginaires de -1.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Les quatre racines de l'équation V=o sont, en fonction des périodes,

$$p_1 = p\left(\frac{2\omega}{3}\right) = p\left(\frac{4\omega}{3}\right),$$

$$p_2 = p\left(\frac{2\omega'}{3}\right) = p\left(\frac{4\omega'}{3}\right),$$

$$p_3 = p\left(\frac{2\omega + 2\omega'}{3}\right) = p\left(\frac{4\omega + 4\omega'}{3}\right),$$

$$p_4 = p\left(\frac{2\omega + 4\omega'}{3}\right) = p\left(\frac{4\omega + 2\omega'}{3}\right).$$

La résolution algébrique de cette équation peut s'effectuer par la méthode d'Euler; on trouvera ainsi

$$p = \pm\sqrt{-4S + \sqrt[3]{R}} \pm \sqrt{-4S + \varepsilon\sqrt[3]{R}} \pm \sqrt{-4S + \varepsilon^2\sqrt[3]{R}},$$

en posant $R = 64S^3 + T^2$ et désignant par ε, ε^2 les racines cubiques imaginaires de l'unité. De plus, les signes des trois radicaux doivent être associés de telle sorte que leur produit soit égal à $+T$.

En substituant à p une de ces valeurs, l'équation $pf - \Delta = o$ représentera un des triangles d'inflexion. Donc le produit des trois côtés d'un triangle est réel pour deux triangles; il prend des valeurs imaginaires conjuguées pour les deux autres. Le système complet des quatre triangles aura pour équation

$$\Delta^4 + 24Sf^2\Delta^2 - 8Tf^3\Delta - 48S^2f^4 = o.$$

60. Revenons au cas général. L'équation du neuvième degré (9), qui détermine les points d'inflexion, peut être résolue algébriquement au moyen de radicaux. Nous nous proposons de le démontrer ici directement et de calculer les racines, ce qui revient à exprimer $p\left(\frac{u}{3}\right)$ en fonction de $p(u)$.

A cet effet, soient α, β deux quelconques des trois racines cubiques de l'unité, différentes ou non. L'expression

$$(1)\quad \left[\sum \alpha^h \beta^{h'} p\left(\frac{u}{3} + \frac{2h\omega + 2h'\omega'}{3}\right)\right]^3 + \left[\sum \alpha^{-h} \beta^{-h'} p\left(\frac{u}{3} + \frac{2h\omega + 2h'\omega'}{3}\right)\right]^3,$$

où le signe Σ se rapporte à trois valeurs entières consécutives de h

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et de h', est une fonction paire de u, admettant les périodes 2ω, $2\omega'$, et l'infini sextuple $u=0$; elle peut donc être mise sous la forme $2A[p^3(u)+Bp^2(u)+Cp(u)+D]$, et la valeur de A est 3^6, comme on le voit en égalant les coefficients de $\frac{1}{u^6}$ dans les deux expressions.

De même, l'expression

$$(II)\quad \left[\sum \alpha^h\beta^{h'}p\left(\frac{u}{3}+\frac{2h\omega+2h'\omega'}{3}\right)\right]^3-\left[\sum \alpha^{-h}\beta^{-h'}p\left(\frac{u}{3}+\frac{2h\omega+2h'\omega'}{3}\right)\right]^3$$

est une fonction impaire, admettant les mêmes périodes. Elle a pour zéros ω, ω', $\omega+\omega'$: on le vérifie en comparant, dans les deux parties placées entre crochets, les deux termes $\alpha^h\beta^{h'}p\left(\frac{u}{3}+\frac{2h\omega+2h'\omega'}{3}\right)$ et $\alpha^h\beta^{h'}p\left(\frac{u}{3}-\frac{2h\omega+2h'\omega'}{3}\right)$, lesquels deviennent égaux pour $u=3\omega$, $3\omega'$, $3(\omega+\omega')$. Enfin cette même expression admet l'infini triple $u=0$, car, en développant par rapport aux puissances de $p\left(\frac{u}{3}\right)$, et Σ' se rapportant aux mêmes valeurs de h et h' que Σ sauf $h=h'=0$, les termes de degré supérieur seront

$$3p^2\left(\frac{u}{3}\right)\left[\sum{}'\alpha^h\beta^{h'}p\left(\frac{u}{3}+\frac{2h\omega+2h'\omega'}{3}\right)-\sum{}'\alpha^{-h}\beta^{-h'}p\left(\frac{u}{3}+\frac{2h\omega+2h'\omega'}{3}\right)\right],$$

ou, en réunissant deux à deux les termes analogues à ceux qu'on vient de comparer,

$$-3p^2\left(\frac{u}{3}\right)p'\left(\frac{u}{3}\right)\sum{}'\frac{p'\left(\frac{2h\omega+2h'\omega'}{3}\right)}{\left[p\left(\frac{u}{3}\right)-p\left(\frac{2h\omega+2h'\omega'}{3}\right)\right]^2},$$

ce qui est du troisième ordre par rapport à $\frac{1}{u}$.

L'expression dont il s'agit peut donc être remplacée par $2.3^6Mp'(u)$. On conclut de ce qui précède, en ajoutant (I) et (II) et extrayant la racine cubique,

$$\sum \alpha^h\beta^{h'}p\left(\frac{u}{3}+\frac{2h\omega+2h'\omega'}{3}\right)=9\sqrt[3]{p^3(u)+Bp^2(u)+Cp(u)+D+Mp'(u)}.$$

D'ailleurs, en donnant à α et β, dans cette égalité, toutes les valeurs

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

des racines cubiques de l'unité, et ajoutant les résultats, on constate que le premier membre se réduit à $9p\left(\frac{u}{3}\right)$; on obtient donc $p\left(\frac{u}{3}\right)$ sous la forme d'une somme de radicaux. Le nombre de ces radicaux est seulement égal à huit, car, si l'on fait $\alpha=\beta=1$, le premier membre n'est autre que la somme des racines de l'équation du neuvième degré, ou $9p(u)$. On a donc

$$(10)\qquad p\left(\frac{u}{3}\right)=p(u)+\sum_{1}^{8}\sqrt[3]{p^3(u)+\mathrm{B}p^2(u)+\mathrm{C}p(u)+\mathrm{D}+\mathrm{M}p'(u)}.$$

61. Il nous reste à calculer B, C, D, M.

Les coefficients B et M peuvent s'obtenir immédiatement : on a, en effet,

$$\left[\sum\alpha^h\beta^{h'}p\left(\frac{u}{3}+\frac{2h\omega+2h'\omega'}{3}\right)\right]^3=3^6\left[p^3(u)+\mathrm{B}p^2(u)+\mathrm{C}p(u)+\mathrm{D}+\mathrm{M}p'(u)\right].$$

En développant les deux membres par la formule

$$p(u)=\frac{1}{u^2}+\frac{12\mathrm{S}}{5}u^2+\ldots$$

et égalant les coefficients de $\frac{1}{u^4}$, on trouvera

$$\mathrm{B}=\tfrac{1}{3}\sum{}'\alpha^h\beta^{h'}p\left(\frac{2h\omega+2h'\omega'}{3}\right),$$

qui, pour les différentes valeurs de α, β, prendra les valeurs suivantes :

$\alpha=1$, $\beta=\varepsilon$ ou $\alpha=1$, $\beta=\varepsilon^2$..... $\mathrm{B}=p\left(\frac{2\omega}{3}\right)$,

$\alpha=\varepsilon$, $\beta=1$ ou $\alpha=\varepsilon^2$, $\beta=1$..... $\mathrm{B}=p\left(\frac{2\omega'}{3}\right)$,

$\alpha=\varepsilon$, $\beta=\varepsilon^2$ ou $\alpha=\varepsilon^2$, $\beta=\varepsilon$..... $\mathrm{B}=p\left(\frac{2\omega+2\omega'}{3}\right)$,

$\alpha=\varepsilon$, $\beta=\varepsilon$ ou $\alpha=\varepsilon^2$, $\beta=\varepsilon^2$..... $\mathrm{B}=p\left(\frac{4\omega+2\omega'}{3}\right)$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On trouverait de même directement, Σ' ayant même sens que ci-dessus,

$$\mathrm{M} = -\tfrac{1}{18}\sum{}' \alpha^h \beta^{h'} p'\left(\frac{2h\omega + 2h'\omega'}{3}\right).$$

Mais nous allons retrouver les valeurs de B et de M par un autre procédé, qui donnera en même temps C et D.

Considérons la fonction doublement périodique

$$\left[\sum \alpha^h \beta^{h'} p\left(\frac{u}{3} + \frac{2h\omega + 2h'\omega'}{3}\right)\right]\left[\sum \alpha^{-h} \beta^{-h'} p\left(\frac{u}{3} + \frac{2h\omega + 2h'\omega'}{3}\right)\right],$$

laquelle, étant paire et admettant l'infini quadruple $u = 0$, peut être mise sous cette forme

$$3^4[p^2(u) + bp^2(u) + c].$$

En élevant au cube, et remplaçant les deux facteurs de ce produit par les valeurs que fournissent l'addition et la soustraction des expressions (I) et (II), il vient

$$(p^3 + \mathrm{B}p^2 + \mathrm{C}p + \mathrm{D})^2 - \mathrm{M}^2 p'^2 = (p^2 + bp + c)^3.$$

En identifiant les deux membres, on aura six équations pour déterminer B, C, D, M, b, c. On trouve ainsi

$$\mathrm{B} = \frac{3b}{2}, \quad \mathrm{C} = \frac{3b^2 + 12c}{8}, \quad \mathrm{D} = \frac{-3b^3 + 40b^2c + 16c^2}{64b}, \quad \mathrm{M}^2 = \frac{(b^2 - 4c)^2}{128b}.$$

En substituant ces valeurs dans les deux dernières équations, on constatera qu'elles admettent le facteur $(b^2 - 4c)^2$, qui ne peut s'annuler, M et b n'étant pas nuls; on aura

$$c = 8\mathrm{S} + \tfrac{3}{4}b^2,$$
$$27b^3 + 288\mathrm{S}b^2 - 64\mathrm{T}b - 256\mathrm{S}^2 = 0.$$

Cette dernière équation n'est autre que la transformée aux racines multipliées par $\frac{2}{3}$ de l'équation du quatrième degré qui admet pour racines $p\left(\frac{2\omega}{3}\right)$, $p\left(\frac{2\omega'}{3}\right)$, ... Les valeurs de B sont donc égales à ces quatre racines, comme on l'avait trouvé directement. Soit donc $\mathrm{B} = p_i$;

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

on aura

$$c = 8S + \frac{p_i^2}{3},$$

$$C = 12S + \frac{2p_i^2}{3},$$

$$D = \frac{p_i^4 + 32Sp_i^2 + 144S^2}{6p_i} = \frac{2p_i^3 + 52Sp_i - 12T}{3},$$

$$M = \pm\sqrt{3}\,\frac{p_i^2 + 36S}{18\sqrt{p_i}}.$$

A chaque valeur de p_i correspondent ainsi deux radicaux qui diffèrent par le signe de M. Nous les appellerons *radicaux conjugués*.

62. En substituant ces valeurs dans la formule (10), on aura la valeur de $p\left(\frac{u}{3}\right)$, et plus généralement celle de $p\left(\frac{u}{3} + \frac{2p\omega + 2q\omega'}{3}\right)$, à la condition de multiplier chacune des expressions $\sum \alpha^h \beta^{h'} p\left(\frac{u}{3} + \frac{2h\omega + 2h'\omega'}{3}\right)$ par $\alpha^{-p}\beta^{-q}$, c'est-à-dire par une certaine racine cubique de l'unité.

On est ainsi amené à chercher quelles sont les déterminations algébriques des huit radicaux qui doivent être associées entre elles pour que la formule (10) donne la valeur de $p\left(\frac{u}{3}\right)$, ou, en général, de $p\left(\frac{u}{3} + \frac{2p\omega + 2q\omega'}{3}\right)$. Il est évident qu'on ne peut les prendre toutes arbitrairement, car alors on aurait 3^8 solutions.

Considérons d'abord deux expressions de la forme suivante,

$$\sum \alpha^h \beta^{h'} p\left(\frac{u}{3} + \frac{2h\omega + 2h'\omega'}{3}\right), \quad \sum \alpha^{-h} \beta^{-h'} p\left(\frac{u}{3} + \frac{2h\omega + 2h'\omega'}{3}\right),$$

lesquelles, d'après ce qui a été vu plus haut (p. 80), donneront lieu à des valeurs égales et de signes contraires de M, c'est-à-dire à deux radicaux conjugués. Leur produit étant égal à $3^4[p^2(u) + bp(u) + c]$, on en conclut qu'à chaque valeur du premier radical correspond une valeur bien déterminée du second, ce qui abaisse le nombre des valeurs fournies par la formule (10) à 3^4. En outre, si nous formons les quatre groupes de deux expressions de ce genre, on pourra déterminer huit

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

produits de trois expressions, prises respectivement dans des groupes différents, et dont chacun est une fonction périodique de u bien déterminée. Considérons par exemple, ε, ε^2 étant les racines cubiques imaginaires de l'unité, les quatre produits

$$\sum \varepsilon^h \varepsilon^{h'} p\left(\frac{u}{3}+\frac{2h\omega+2h'\omega'}{3}\right)\sum \varepsilon^h \varepsilon^{2h'} p\left(\frac{u}{3}+\frac{2h\omega+2h'\omega'}{3}\right)\sum \varepsilon^h p\left(\frac{u}{3}+\frac{2h\omega+2h'\omega'}{3}\right),$$

$$\sum \varepsilon^h \varepsilon^{h'} p\left(\frac{u}{3}+\frac{2h\omega+2h'\omega'}{3}\right)\sum \varepsilon^{2h} \varepsilon^{h'} p\left(\frac{u}{3}+\frac{2h\omega+2h'\omega'}{3}\right)\sum \varepsilon^{h'} p\left(\frac{u}{3}+\frac{2h\omega+2h'\omega'}{3}\right),$$

$$\sum \varepsilon^h p\left(\frac{u}{3}+\frac{2h\omega+2h'\omega'}{3}\right)\sum \varepsilon^{h'} p\left(\frac{u}{3}+\frac{2h\omega+2h'\omega'}{3}\right)\sum \varepsilon^{2h} \varepsilon^{2h'} p\left(\frac{u}{3}+\frac{2h\omega+2h'\omega'}{3}\right),$$

$$\sum \varepsilon^{2h} p\left(\frac{u}{3}+\frac{2h\omega+2h'\omega'}{3}\right)\sum \varepsilon^{h'} p\left(\frac{u}{3}+\frac{2h\omega+2h'\omega'}{3}\right)\sum \varepsilon^{h} \varepsilon^{2h'} p\left(\frac{u}{3}+\frac{2h\omega+2h'\omega'}{3}\right),$$

ainsi que les produits formés avec les expressions conjuguées. Chacun d'eux est une fonction doublement périodique de u, admettant l'infini sextuple $u=0$, et, par une méthode semblable à celle qui a été suivie plus haut, on pourra le mettre sous la forme suivante :

$$3^6(p^3+\mathfrak{B}p^2+\mathfrak{C}p+\mathfrak{D})+3^6\mathfrak{M}p'.$$

En multipliant deux produits d'expressions conjuguées, on aura l'identité

$$(p^3+\mathfrak{B}p^2+\mathfrak{C}p+\mathfrak{D})^2-\mathfrak{M}^2p'^2=(p^2+b_2p+c_2)(p^2+b_3p+c_3)(p^2+b_4p+c_4),$$

où b_2, c_2, b_3, c_3, b_4, c_4 se rapportent aux trois couples d'expressions conjuguées figurant dans ce produit. Cette identité sert à déterminer $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{M}$. Soit p_1 la valeur de p_i qui correspond au quatrième couple. On trouvera les valeurs suivantes :

$$\mathfrak{B}=-\frac{p_1}{3},$$

$$\mathfrak{C}=\frac{28S}{3},$$

$$\mathfrak{D}=-\frac{4(Sp_1+T)}{3},$$

$$\mathfrak{M}=\frac{M_2+M_3+M_4}{3}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On voit dès lors qu'à deux radicaux pris arbitrairement correspondent sans ambiguïté des déterminations précises des six autres, et que, par suite, le nombre des valeurs fournies par la formule (10) ne peut dépasser neuf. D'ailleurs il en existe neuf, car, si l'on change $\frac{u}{3}$ en $\frac{u}{3}+\frac{2p\omega+2q\omega'}{3}$, ce qui revient à multiplier $\sum\alpha^h\beta^{h'}p\left(\frac{u}{3}+\frac{2h\omega+2h'\omega'}{3}\right)$ par $\alpha^{-p}\beta^{-q}$, il est facile de voir que les conditions précédentes ne sont pas changées.

63. La détermination des points d'inflexion de la cubique résulte des calculs et de la discussion précédente. Soient $u=u_0$, $p(u)=\frac{6\Psi}{\Delta^2(y)}$, $p'(u)=\frac{2\Omega}{\Delta^3(y)}$ (**52**); l'équation (10) fournira les valeurs de p relatives à ces neuf points. On aura

$$p=\frac{6\Psi}{\Delta^2}+\frac{1}{\Delta^2}\sum\sqrt[3]{216\Psi^3+36p_i\Psi^2\Delta^2+(72S+4p_i^2)\Psi\Delta^4+\frac{2p_i^3+52Sp_i-12T}{3}\Delta^6\pm\frac{1}{3\sqrt{3}p_i}p_i^2-36S\Omega\Delta^6},$$

où Σ se rapporte aux quatre valeurs de p_i; chacune d'elles doit être combinée successivement avec les deux signes figurant à l'intérieur du radical. L'expression des quantités p_i en fonction de S et T a d'ailleurs été donnée ci-dessus (**59**).

§ V. — Points sextatiques.

64. Parmi les quatre tangentes qu'on peut en général mener d'un point de la courbe, l'une d'elles, dans le cas d'un point d'inflexion, se confond avec la tangente d'inflexion elle-même. Les trois autres ont leurs points de contact en ligne droite, comme nous l'avons démontré (**44**). On peut le vérifier par le calcul des arguments des points de contact. Soit

$$u_1\equiv-\frac{u_0}{3}+\frac{2h\omega+2h'\omega'}{3}$$

celui du point d'inflexion; ceux des points de contact sont donnés par la formule

$$3u_1\equiv u_1+2u\equiv-u_0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'où

$$2u \equiv 2u_1.$$

Les quatre valeurs de u sont donc u_1, $u_1+\omega$, $u_1+\omega'$, $u_1+\omega+\omega'$. Les trois dernières, ayant pour somme $3u_1 \equiv -u_0$, correspondent à trois points en ligne droite. L'équation aux valeurs de p s'obtient en posant

$$p(2u) = p(2u_1)$$

ou

$$(11)\quad 8[p(u_1)-p(u)]p'^2(u_1)p'^2(u)+p'^2(u_1)p''^2(u)-p''^2(u_1)p'^2(u)=0.$$

Écartons le facteur $p(u)-p(u_1)$ qui fournit le point d'inflexion ; on arrive à l'équation du troisième degré

$$(11)'\quad \left\{\begin{aligned}&[p'^3(u_1)+12\mathrm{S}p(u_1)-2\mathrm{T}]p^3+18[2\mathrm{S}p^2(u_1)-\mathrm{T}p(u_1)-8\mathrm{S}^2]p^2\\&+6[2\mathrm{S}p^3(u_1)-3\mathrm{T}p^2(u_1)-72\mathrm{S}p(u_1)+8\mathrm{TS}]p-2\mathrm{T}p^3(u_1)\\&-144\mathrm{S}^2p^2(u_1)+48\mathrm{TS}p(u_1)-32(\mathrm{T}^2+54\mathrm{S}^3)=0.\end{aligned}\right.$$

Les valeurs de $p(u_1)$ ayant été obtenues par la formule établie au paragraphe précédent, on voit que le problème des points de contact des tangentes issues des neuf points d'inflexion peut être résolu algébriquement.

65. En éliminant u_1 au moyen de l'équation $p(3u_1)=p(u_0)$, on arriverait à l'équation du vingt-septième degré qui détermine tous ces points de contact. Nous l'obtiendrons plus loin par un autre procédé. Bornons-nous à chercher ici ce que devient cette équation quand on a $u_0=0$. On a alors (59) pour tout point d'inflexion autre que le centre du faisceau

$$12p(u_1)p'^2(u_1)-p''^2(u_1)=0,$$

et l'équation (11) peut s'écrire

$$p''^2(u)-4p'^2(u)[p(u_1)+2p(u)]=0,$$

d'où

$$p(u_1)=\frac{p''^2-8pp'^2}{4p'^2}=p-\frac{3\mathrm{V}}{p'^2},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

en posant comme ci-dessus

$$V = pp'^2 - \frac{p''^2}{12} = p^4 + 24Sp^2 - 8Tp - 48S^2.$$

En éliminant $p(u_1)$ et supprimant le facteur V qui fournirait les points d'inflexion, on arrive à l'équation du douzième degré

$$81V^3 - 108pp'^2V + 9p''p'^4V - 2p'^8 = 0.$$

On en conclut qu'*il existe douze droites passant par un point d'inflexion et sur lesquelles se répartissent deux à deux les vingt-quatre points de contact des tangentes menées par les huit autres points d'inflexion.* Deux points de contact correspondants proviennent de deux points d'inflexion situés eux-mêmes en ligne droite avec le premier, car à une valeur de $p(u)$ correspond, d'après les formules précédentes, une seule valeur de $p(u_1)$. En considérant successivement les divers points d'inflexion, on obtiendra cent huit droites de cette espèce.

66. Les vingt-sept points dont nous venons de parler sont appelés *points de Steiner* ou *points sextatiques de la courbe*. Cette dernière dénomination provient de ce qu'en chacun d'eux passe une conique qui est tangente à la cubique en six points confondus.

En effet, la condition pour que six points de la courbe soient sur une même conique étant $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + 2u_0 \equiv 0$, on aura, dans le cas où ces six points se confondent,

$$6u_1 \equiv -2u_0,$$

$$u_1 \equiv -\frac{u_0}{3} + \frac{2h\omega + 2h'\omega'}{6} \quad (h, h' = 0, 1, 2, 3, 4, 5).$$

Parmi les trente-six systèmes de valeurs de h et de h', écartons les neuf combinaisons de deux nombres pairs, lesquelles donneraient les points d'inflexion. Les vingt-sept autres systèmes, dans lesquels une au moins des valeurs de h et de h' est impaire, coïncident avec celles qui ont été obtenues dans le problème précédent.

67. Pour former l'équation aux valeurs de p, posons $p(6u) = p(2u_0)$, et, au lieu d'exprimer directement $p(6u)$ en fonction de $p(u)$, ce qui

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

conduirait à un calcul assez compliqué, faisons $3u = u'$. On a alors

$$p(2u') = p(2u_0),$$

et, en écartant le facteur $[p(u') - p(u_0)]$, qui donnerait les points d'inflexion, puis substituant $p(u_0) = \frac{6\Psi}{\Delta^2}$, $p'^2(u_0) = \frac{4\Omega^2}{\Delta^6}$, on trouvera

$$\begin{aligned}&\Omega^2 p^3(u') + 36\Delta^2[36S\Psi^2 - 3T\Delta^2\Psi - 4S^2\Delta^4]p^2(u')\\&\quad + 12[216S\Psi^3 - 54T\Delta^2\Psi^2 - 216S^2\Delta^4\Psi + 4TS\Delta^6]p(u')\\&\quad - 432T\Psi^3 - 5184S^2\Delta^2\Psi^2 + 288TS\Delta^4\Psi - 32(T^2 + 54S^3)\Delta^6 = 0.\end{aligned}$$

Enfin, dans cette équation, on doit faire (*voir* p. 77)

$$p(u') = p(3u) = \frac{9V^2 p - 3Vp'^2 p'' + p'^6}{9V^2}.$$

Lorsque l'on a $u_0 = 0$, l'équation du vingt-septième degré s'abaisse au douzième. En effet, soit $\Delta = 0$; on trouve alors

$$p^3(u') + 12Sp(u') - 2T = 0,$$

c'est-à-dire

$$p'(3u) = 0.$$

En développant, il vient

$$\begin{aligned}p' - \frac{2p'p''(3p''V - p'^4)}{9V^2} - \frac{p'^2(3p'''V + 3p''V' - 4p'^3p'')}{9V^2}\\ + \frac{2p'^2(3p''V - p'^4)V'}{9V^3} = 0.\end{aligned}$$

Supprimant le facteur p' qui se rapporte aux trois tangentes issues du centre du faisceau, on trouve, après quelques réductions,

$$81V^3 - 108pp'^2V^2 + 9p''p'^4V - 2p'^8 = 0;$$

c'est l'équation obtenue page 87, ce qui démontre de nouveau l'identité des points sextatiques avec les points de contact des tangentes issues des points d'inflexion.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

§ VI. — Polygones de Steiner. — Notions sur certaines courbes de sixième classe.

68. La question des points d'inflexion et celle des points sextatiques se rattachent au problème suivant, résolu par Steiner : *Inscrire dans la cubique des polygones d'un nombre pair $2n$ de côtés et tels que les côtés de rang impair concourent en un point fixe de la courbe, et de même les côtés de rang pair en un autre point fixe.* Si u et v sont les arguments des deux points, le premier étant supposé choisi arbitrairement ainsi que la direction du premier côté, on trouve, pour déterminer v, la relation suivante :

$$u - v \equiv \frac{2h\omega + 2h'\omega'}{n}.$$

En y donnant à h et h' les valeurs $0, 1, 2, \ldots n-1$, sauf l'hypothèse $h = h' = 0$, on obtient $n^2 - 1$ points v. A chacun d'eux correspond un polygone déterminé, qui toutefois pourrait avoir moins de $2n$ côtés si n n'est pas premier, car, en supposant que h et h' aient un facteur d commun avec n, on voit que le polygone se fermerait après 2ν opérations, si l'on a $n = d\nu$.

69. La question se résout algébriquement au moyen de la formule de multiplication. La condition trouvée étant indépendante de u_0, on peut supposer que le point u coïncide avec le point arbitraire $-u_0$. On a alors $v = -u_0 - \frac{2h\omega + 2h'\omega'}{n}$; tout revient donc à calculer les valeurs de $p\left(\frac{2h\omega + 2h'\omega'}{n}\right)$, et l'on en déduira $p(v)$ par le théorème d'addition. Ces valeurs sont données par l'équation

$$\begin{vmatrix} p' & p'' & \ldots & p^{(n-1)} \\ p'' & p''' & \ldots & p^{(n)} \\ p''' & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p^{(n-1)} & p^{(n)} & \ldots & p^{(2n-3)} \end{vmatrix} = 0.$$

Si n est impair, ce déterminant est une fonction entière de p, de

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

degré $\frac{n^2-1}{2}$, puisque, considéré comme fonction de u, il admet l'infini $u=0$ au degré n^2-1. A chacune des valeurs de u qui l'annulent en correspond une autre donnant même valeur de p; les valeurs correspondantes de p' sont égales et de signes contraires. On trouve ainsi, pour $p(v)$, n^2-1 valeurs. Si n est pair, le premier membre de l'équation admet le facteur $p'(u)$, et, en supprimant les valeurs correspondantes ω, ω', $\omega+\omega'$, il reste n^2-4 solutions.

70. Deux points d'inflexion forment un couple satisfaisant à la condition trouvée dans le cas de l'hexagone; deux points sextatiques forment un couple relatif au dodécagone. Ces derniers points, toutefois, donneront naissance à un hexagone s'ils sont en ligne droite avec un point d'inflexion, c'est-à-dire s'ils sont situés sur une des cent huit droites dont on a fait mention (65), car alors leurs arguments sont de la forme

$$-\frac{u_0}{3}+\frac{2h\omega+2h'\omega'}{3}+p\omega+q\omega', \qquad -\frac{u_0}{3}+\frac{2h_1\omega+2h'_1\omega'}{3}-p\omega-q\omega',$$

dont la différence est $\frac{2(h-h_1)\omega+2(h'-h'_1)\omega'}{3}$, à des multiples près des périodes.

Les couples de points dont les arguments satisfont à la condition

$$v-u\equiv\frac{2h\omega+2h'\omega'}{n}$$

peuvent, suivant les divers systèmes de valeurs de h et de h', se répartir en différentes classes. Tous les couples d'une même classe peuvent se déduire de l'un d'entre eux u, v, en faisant varier u et v d'une même quantité. On les construira géométriquement en joignant un point arbitraire θ de la courbe aux deux points u, v. Les points u', v', où les deux droites θu, θv rencontrent la courbe, formeront un couple de même classe que u, v, car on a

$$u+\theta+u'+u_0\equiv 0,$$
$$v+\theta+v'+u_0\equiv 0,$$

d'où

$$u'-v'\equiv v-u.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

71. Plus généralement, le problème de Steiner conduit à considérer des points de la courbe dont la différence des arguments est une quantité constante ε, sans être nécessairement de la forme $\frac{2h\omega + 2h'\omega'}{n}$.

Les droites déterminées par les couples de points correspondant à une même valeur de ε enveloppent une courbe de sixième classe.

En effet, soient $\varphi_i(u)$, $\varphi_i(u+\varepsilon)$ les coordonnées x_i de deux points d'un même couple. Les coordonnées de la droite qui les joint sont :

$$\mathrm{A}_1 = \begin{vmatrix} \varphi_2(u) & \varphi_3(u) \\ \varphi_2(u+\varepsilon) & \varphi_3(u+\varepsilon) \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{A}_2 = \begin{vmatrix} \varphi_3(u) & \varphi_1(u) \\ \varphi_3(u+\varepsilon) & \varphi_1(u+\varepsilon) \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{A}_3 = \begin{vmatrix} \varphi_1(u) & \varphi_2(u) \\ \varphi_1(u+\varepsilon) & \varphi_2(u+\varepsilon) \end{vmatrix};$$

et, d'après les valeurs de $\varphi_i(u)$, $\varphi_i(u+\varepsilon)$ données par les formules (8), page 67, on voit que A_1, A_2, A_3 admettent les deux infinis quadruples $u = 0$, $u = -\varepsilon$, et par suite huit zéros, dont il faut retrancher les valeurs constantes $u = u_0$, $u = u_0 - \varepsilon$, qui annulent respectivement (51) les coordonnées $\varphi_i(u)$, et les coordonnées $\varphi_i(u+\varepsilon)$.

La courbe est donc de sixième classe, et les coordonnées de ses tangentes s'expriment en fonction rationnelle et entière de $p(u)$ et $p'(u)$.

72. Quant aux coordonnées X_i des points de cette même courbe, elles peuvent se mettre sous une forme assez remarquable. On a, par exemple,

$$\mathrm{X}_1 = \mathrm{A}_2 \frac{d\mathrm{A}_3}{du} - \mathrm{A}_3 \frac{d\mathrm{A}_2}{du}$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi_3(u) & \varphi_1(u) \\ \varphi_3(u+\varepsilon) & \varphi_1(u+\varepsilon) \end{vmatrix} \left\{ \begin{vmatrix} \varphi'_1(u) & \varphi'_2(u) \\ \varphi_1(u+\varepsilon) & \varphi_2(u+\varepsilon) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_1(u) & \varphi_2(u) \\ \varphi'_1(u+\varepsilon) & \varphi'_2(u+\varepsilon) \end{vmatrix} \right.$$

$$- \begin{vmatrix} \varphi_1(u) & \varphi_2(u) \\ \varphi_1(u+\varepsilon) & \varphi_2(u+\varepsilon) \end{vmatrix} \left\{ \begin{vmatrix} \varphi'_3(u) & \varphi'_1(u) \\ \varphi_3(u+\varepsilon) & \varphi_1(u+\varepsilon) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_3(u) & \varphi_1(u) \\ \varphi'_3(u+\varepsilon) & \varphi'_1(u+\varepsilon) \end{vmatrix} \right\},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ou bien

$$X_1 = \varphi_1(u)\begin{vmatrix} \varphi_1(u) & \varphi_2(u) & \varphi_3(u) \\ \varphi_1(u+\varepsilon) & \varphi_2(u+\varepsilon) & \varphi_3(u+\varepsilon) \\ \varphi'_1(u+\varepsilon) & \varphi'_2(u+\varepsilon) & \varphi'_3(u+\varepsilon) \end{vmatrix} + \varphi_1(u+\varepsilon)\begin{vmatrix} \varphi_1(u+\varepsilon) & \varphi_2(u+\varepsilon) & \varphi_3(u+\varepsilon) \\ \varphi_1(u) & \varphi_2(u) & \varphi_3(u) \\ \varphi'_1(u) & \varphi'_2(u) & \varphi'_3(u) \end{vmatrix},$$

et, en général, X_i sera donné par une formule analogue : il suffira de remplacer dans X_1 les facteurs $\varphi_1(u)$, $\varphi_1(u+\varepsilon)$ placés devant chaque déterminant par $\varphi_i(u)$, $\varphi_i(u+\varepsilon)$.

Si l'on remplace φ_i, φ'_i par leurs valeurs tirées des équations (8), et si l'on applique aux deux déterminants une transformation dont on a déjà fait usage (53), il viendra

$$\rho X_i = \left[l_i + m_i p(u) + n_i p^2(u) + \frac{\alpha^2}{2\sqrt{6}} p'(u)\right]\begin{vmatrix} 1 & p(u_0) & p^2(u_0) & p'(u_0) \\ 1 & p(u) & p^2(u) & p'(u) \\ 1 & p(u+\varepsilon) & p^2(u+\varepsilon) & p'(u+\varepsilon) \\ 0 & p'(u+\varepsilon) & 2p(u+\varepsilon)p'(u+\varepsilon) & p''(u+\varepsilon) \end{vmatrix}$$

$$+\left[l_i + m_i p(u+\varepsilon) + n_i p^2(u+\varepsilon) + \frac{\alpha^2}{2\sqrt{6}} p'(u+\varepsilon)\right]\begin{vmatrix} 1 & p(u_0) & p^2(u_0) & p'(u_0) \\ 1 & p(u+\varepsilon) & p^2(u+\varepsilon) & p'(u+\varepsilon) \\ 1 & p(u) & p^2(u) & p'(u) \\ 0 & p'(u) & 2p(u)p'(u) & p''(u) \end{vmatrix}.$$

Cette expression est une fonction doublement périodique de u, admettant les infinis du huitième ordre $u = 0$, $u = -\varepsilon$, et par suite seize zéros, parmi lesquels u_0, $u_0+\varepsilon$, qui annulent X_i et sa dérivée, doivent être comptés deux fois. En les écartant, il reste douze valeurs d'évanouissement de X_i, et, par conséquent, la courbe est du douzième ordre.

73. La courbe dont il s'agit ici possède de plus la propriété d'être tangente à la cubique en ses dix-huit points de rencontre avec celle-ci.

En effet, les coordonnées X_i deviennent proportionnelles aux coordonnées $\varphi_i(u)$, et, par suite, le point X coïncide avec un point de la cubique lorsque le second déterminant s'annule, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$u_0 + u + \varepsilon + 2u \equiv 0.$$

Le point $u+\varepsilon$ est alors le tangentiel de u, et la droite des deux points

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

u, $u+\varepsilon$ est tangente commune en u à la cubique et à la courbe de sixième classe. Les valeurs de u obtenues ainsi sont au nombre de neuf, comprises dans la formule

$$(1) \qquad u = -\frac{u_0+\varepsilon}{3} + \frac{2h\omega + 2h'\omega'}{3}.$$

De même, le point X coïncide avec le point $u+\varepsilon$ de la cubique lorsque le premier déterminant s'annule, ce qui donne

$$u_0 + u + 2(u+\varepsilon) \equiv 0.$$

Le point u est le tangentiel de $u+\varepsilon$, et la droite des deux points est tangente commune en $(u+\varepsilon)$ aux deux courbes. Les neuf valeurs de $u+\varepsilon$ sont donc

$$u+\varepsilon = -\frac{u_0-\varepsilon}{3} + \frac{2h\omega + 2h'\omega'}{3}.$$

La courbe de sixième classe est donc tangente à la cubique en ses dix-huit points de rencontre. Ces points sont ceux de la cubique qui forment avec leurs tangentiels des couples de points liés par la relation $u - v \equiv \varepsilon$. Ils se partagent en deux groupes de neuf, et l'on voit que *toute droite joignant deux points de groupes différents passe par un des points d'inflexion de la cubique.* Le nombre de ces droites est égal à quatre-vingt-un.

Enfin, deux points de même groupe forment un couple de points relatifs à l'hexagone de Steiner.

L'équation du neuvième degré fournissant les points de chaque groupe sera

$$p(u_0 \pm \varepsilon) = p(3u) = p - \frac{p'^2(3Vp'' - p'^4)}{9V^2}.$$

Elle ne diffère de celle qui détermine les points d'inflexion de la cubique que par le changement de u_0 en $u_0 \pm \varepsilon$. Les coordonnées des dix-huit points se déduisent donc des formules (10), page 81, en y remplaçant $p(u)$ par $p(u_0 \pm \varepsilon)$.

En supposant $u_0 = 0$, les deux équations du neuvième ordre se réduisent à une seule :

$$p(\varepsilon) = p(3u).$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Effectivement, dans ce cas, le centre du faisceau étant un point d'inflexion, les dix-huit points de contact doivent se répartir deux à deux sur neuf droites issues de ce point.

74. Cherchons maintenant les tangentes doubles de la courbe. A cet effet, exprimons qu'une même droite rencontre la courbe en trois points d'arguments $u-\varepsilon$, u, $u+\varepsilon$. On a donc

$$u_0+u-\varepsilon+u+u+\varepsilon\equiv 0$$

ou

$$u_0+3u\equiv 0.$$

Les points u sont donc les points d'inflexion de la courbe du troisième ordre, et *la courbe de sixième classe admet neuf tangentes doubles dont chacune passe par un d'entre eux*.

Pour étudier la position des points de contact supposons $u_0=0$. Les coordonnées de la droite qui joint le point o centre du faisceau au point ε étant alors de la forme suivante,

$$A_1=\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ l_2+m_2p(\varepsilon) & l_3+m_3p(\varepsilon)\end{vmatrix},\ \ldots,$$

on voit qu'elles ne changent pas si l'on remplace ε par $-\varepsilon$. Donc la droite qui joint les trois points ε, o, $-\varepsilon$ est une tangente double. Quant aux points de contact, on les déduit de la formule générale

$$\rho X_i=\left[l_i+m_ip(u)+\frac{\alpha_i}{2\sqrt{6}}p'(u)\right]\begin{vmatrix} 1 & p(u) & p'(u) \\ 1 & p(u+\varepsilon) & p'(u+\varepsilon) \\ 0 & p'(u+\varepsilon) & p''(u+\varepsilon)\end{vmatrix}$$

$$+\left[l_i+m_ip(u+\varepsilon)+\frac{\alpha_i}{2\sqrt{6}}p'(u+\varepsilon)\right]\begin{vmatrix} 1 & p(u+\varepsilon) & p'(u+\varepsilon) \\ 1 & p(u) & p'(u) \\ 0 & p'(u) & p''(u)\end{vmatrix},$$

qui représente dans le cas actuel les coordonnées des points de la courbe.

En y faisant $u=0$, on obtiendra les coordonnées du premier point de

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

contact sous cette forme :

$$\rho\xi_i = l_i + m_i p(\varepsilon) + \frac{3\alpha_i}{2\sqrt{6}} p'(\varepsilon).$$

Le changement de ε en $-\varepsilon$ donnera celles du second point. *Les deux points de contact d'une tangente double à la courbe de sixième classe forment donc une division harmonique avec le point d'inflexion de la cubique situé sur cette tangente, et le point de rencontre de cette droite avec la polaire harmonique qui correspond au point d'inflexion considéré* (**44**).

75. En outre, *les points de contact des quatre tangentes simples menées par le point d'inflexion à la courbe de sixième classe sont situés sur la polaire harmonique.*

En effet, toute droite issue du point d'inflexion o rencontre la cubique en deux autres points u, $-u$; elle sera tangente à la courbe de sixième classe si l'on a $-2u \equiv \varepsilon$, d'où les quatre valeurs

$$u = -\frac{\varepsilon}{2}, \quad -\frac{\varepsilon}{2} - \omega, \quad -\frac{\varepsilon}{2} - \omega', \quad -\frac{\varepsilon}{2} - \omega - \omega',$$

$$u + \varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}, \quad \frac{\varepsilon}{2} + \omega, \quad \frac{\varepsilon}{2} + \omega', \quad \frac{\varepsilon}{2} + \omega + \omega'.$$

Les valeurs de u, $u+\varepsilon$ étant égales et de signes contraires, les deux déterminants

$$\begin{vmatrix} 1 & p(u) & p'(u) \\ 1 & p(u+\varepsilon) & p'(u+\varepsilon) \\ 0 & p'(u+\varepsilon) & p''(u+\varepsilon) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & p(u+\varepsilon) & p'(u+\varepsilon) \\ 1 & p(u) & p'(u) \\ 0 & p'(u) & p''(u) \end{vmatrix}$$

sont égaux, et les coordonnées ξ_i des points de contact ont pour valeurs

$$l_i + m_i p\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \quad l_i + m_i p\left(\frac{\varepsilon}{2} + \omega\right), \quad l_i + m_i p\left(\frac{\varepsilon}{2} + \omega'\right), \quad l_i + m_i p\left(\frac{\varepsilon}{2} + \omega + \omega'\right).$$

Ces quatre points sont donc sur la polaire harmonique, et l'on voit de plus que *les quatre tangentes simples sont les droites joignant le point d'inflexion aux couples de points de contact des tangentes menées à la cubique par les points* ε, $-\varepsilon$, *où cette dernière courbe rencontre la tangente double issue du point d'inflexion* (**74**).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

76. Un cas particulier intéressant est celui où l'on a $\varepsilon = \frac{2h\omega + 2h'\omega'}{3}$, ce qui donne quatre classes de couples relatifs à l'hexagone inscrit pour les valeurs $\varepsilon = \pm\frac{2\omega}{3}, \pm\frac{2\omega'}{3}, \pm\frac{2\omega + 2\omega'}{3}, \pm\frac{2\omega + 4\omega'}{3}$, et quatre courbes de sixième classe correspondantes.

Chacune des quatre courbes admet pour tangentes triples les trois côtés de l'un des triangles d'inflexion.

En effet, le tableau des arguments relatifs aux points d'inflexion (*voir* p. 77) montre que les arguments de trois points en ligne droite diffèrent deux à deux de la même quantité, à des multiples près des périodes, et que cette différence est, en valeur absolue, $\frac{2\omega}{3}, \frac{2\omega'}{3}, \frac{2\omega + 2\omega'}{3}, \frac{2\omega + 4\omega'}{3}$, suivant le triangle auquel appartient la droite considérée.

Soit, par exemple, $\varepsilon \equiv -\frac{2\omega}{3} \equiv \frac{4\omega}{3}$. Une des quatre tangentes simples menées en général par le point $u = 0$ est ici la droite $\frac{2\omega}{3}, -\frac{2\omega}{3}$; c'est la tangente triple, joignant les trois points d'inflexion $0, -\frac{2\omega}{3}, \frac{2\omega}{3}$.

Les trois autres tangentes simples joignent les couples de points sextatiques provenant des points d'inflexion $\frac{2\omega}{3}, -\frac{2\omega}{3}$. Ce sont donc trois des cent huit droites dont on a fait plusieurs fois mention. Ces cent huit droites se partagent donc en quatre groupes, et les vingt-sept droites de même groupe sont tangentes à une même courbe de sixième classe.

Enfin les points de contact des quatre tangentes simples étant toujours situés sur la polaire harmonique du point d'inflexion, on peut énoncer les théorèmes suivants :

Les trois points de contact de chacun des côtés d'un triangle d'inflexion avec la courbe de sixième classe correspondante sont situés respectivement sur les trois polaires harmoniques relatives aux points d'inflexion que contient le côté considéré.

Les droites qui joignent un point d'inflexion aux trois couples de points

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

sextatiques provenant de deux autres points d'inflexion situés sur une même droite avec le premier sont tangentes à la courbe de sixième classe qui admet cette dernière droite pour tangente triple, et les points de contact sont situés sur la polaire harmonique du point d'inflexion considéré.

CHAPITRE V.

APPLICATION A LA COURBE GAUCHE INTERSECTION DE DEUX SURFACES DU SECOND ORDRE.

§ I. — Expression des coordonnées.

77. L'intersection de deux surfaces du second degré se projetant en général suivant une courbe plane du quatrième ordre admettant deux points doubles, il en résulte que les coordonnées de ses points pourront s'exprimer par les fonctions elliptiques.

Soient

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{F}(x) &= \Sigma\Sigma \mathrm{A}_{ik} x_i x_k = 0 \\ f(x) &= \Sigma\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0 \end{aligned}\right\} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

les équations des deux surfaces en coordonnées tétraédrales ; soient y_1, y_2, y_3, y_4 les coordonnées d'un point quelconque y de la courbe. Posons

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y_i} = \mathrm{F}_i,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_i} = f_i,$$

Un plan quelconque mené par la tangente en y à la courbe aura pour équation

$$\Sigma(\mathrm{F}_i + \lambda f_i) x_i = 0. \tag{1}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Ce plan rencontre la courbe en deux autres points ξ, η, dont nous allons exprimer les coordonnées en fonction de λ.

A cet effet, remarquons que la droite qui joint ces deux points appartient à la surface du faisceau $F+\rho f=0$ qui contient la tangente en y à la courbe. L'équation de cette surface s'obtiendra en exprimant qu'elle est tangente au plan (1), ce qui donne la condition

$$\begin{vmatrix} A_{11}+\rho a_{11} & A_{12}+\rho a_{12} & A_{13}+\rho a_{13} & A_{14}+\rho a_{14} & F_1+\lambda f_1 \\ A_{21}+\rho a_{21} & A_{22}+\rho a_{22} & A_{23}+\rho a_{23} & A_{24}+\rho a_{24} & F_2+\lambda f_2 \\ A_{31}+\rho a_{31} & A_{32}+\rho a_{32} & A_{33}+\rho a_{33} & A_{34}+\rho a_{34} & F_3+\lambda f_3 \\ A_{41}+\rho a_{41} & A_{42}+\rho a_{42} & A_{43}+\rho a_{43} & A_{44}+\rho a_{44} & F_4+\lambda f_4 \\ F_1+\lambda f_1 & F_2+\lambda f_2 & F_3+\lambda f_3 & F_4+\lambda f_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation du troisième degré en ρ admet la racine double $\rho=\lambda$, qui correspond à la surface $F+\lambda f=0$; effectivement, celle-ci est tangente en y au plan (1), et les génératrices de contact forment le système double des sécantes passant par les quatre points d'intersection de la courbe gauche avec le plan. La racine simple est donc $\rho=-\frac{R(y)}{r(y)}$, en posant, pour abréger,

$$R(y)=-\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & f_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & f_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & f_3 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & f_4 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & 0 \end{vmatrix}, \quad r(y)=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & F_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & F_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & F_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & F_4 \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Remarquons que les covariants $R(x)$ et $r(x)$ égalés à 0 représentent l'un la surface polaire réciproque de F par rapport à f, l'autre celle de f par rapport à F.

L'équation de la surface lieu des droites $\xi\eta$ sera donc

$$r(y)\,F(x)-R(y)\,f(x)=0. \tag{2}$$

Elle est touchée par le plan (1) suivant deux droites, dont l'une est la tangente en y à la courbe gauche, l'autre la droite $\xi\eta$. Pour séparer ces

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

deux droites, cherchons à mettre l'équation (2) sous cette forme :

$$(3) \qquad r(y)\,\mathrm{F}(x) - \mathrm{R}(y)\,f(x) = \Sigma \mathrm{F}_i x_i \,\Sigma j_i x_i - \Sigma f_i x_i \,\Sigma \mathrm{J}_i x_i = 0.$$

Supposons les deux surfaces rapportées au tétraèdre conjugué commun. On a alors $\mathrm{A}_{ik} = a_{ik} = 0$ pour $i \gtrless k$, et par suite

$$\mathrm{R}(y) = \mathrm{A}_{11}\mathrm{A}_{22}\mathrm{A}_{33}\mathrm{A}_{44} \sum \frac{a_{ii}^2}{\mathrm{A}_{ii}} y_i^2, \quad r(y) = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \sum \frac{\mathrm{A}_{ii}^2}{a_{ii}} y_i^2.$$

Le coefficient de x_1^2 dans (2) sera donc alors

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_{11}r(y) - a_{11}\mathrm{R}(y) = \mathrm{A}_{11}\big[& a_{22}a_{33}a_{44}\mathrm{A}_{11}^2 y_1^2 + (\mathrm{A}_{22}y_2^2 + \mathrm{A}_{33}y_3^2 + \mathrm{A}_{44}y_4^2) \\ & \times (a_{11}a_{33}a_{44}\mathrm{A}_{22} + a_{11}a_{22}a_{44}\mathrm{A}_{33} + a_{11}a_{22}a_{33}\mathrm{A}_{44})\big] \\ - a_{11}\big[& \mathrm{A}_{22}\mathrm{A}_{33}\mathrm{A}_{44}a_{11}^2 y_1^2 + (a_{22}y_2^2 + a_{33}y_3^2 + a_{44}y_4^2) \\ & \times (\mathrm{A}_{11}\mathrm{A}_{33}\mathrm{A}_{44}a_{22} + \mathrm{A}_{11}\mathrm{A}_{22}\mathrm{A}_{44}a_{33} + \mathrm{A}_{11}\mathrm{A}_{22}\mathrm{A}_{33}a_{44})\big],\end{aligned}$$

c'est-à-dire, en vertu des identités $\Sigma \mathrm{A}_{ii} y_i^2 = 0$, $\Sigma a_{ii} y_i^2 = 0$,

$$2\mathrm{A}_{11}y_1\left(\mathrm{A}_{11}^2 a_{22}a_{33}a_{44}y_1 - \frac{\Theta}{2}\mathrm{A}_{11}y_1\right) - 2a_{11}y_1\left(a_{11}^2\mathrm{A}_{22}\mathrm{A}_{33}\mathrm{A}_{44}y_1 - \frac{\Theta_1}{2}a_{11}y_1\right)$$

ou bien

$$2\mathrm{F}_1\left(r_1 - \frac{\Theta}{2}\mathrm{F}_1\right) - 2f_1\left(\mathrm{R}_1 - \frac{\Theta_1}{2}f_1\right)$$

où Θ, Θ_1 sont les deux invariants qui multiplient λ^3 et λ dans le discriminant de $\mathrm{F} + \lambda f$; r_1, R_1 désignent d'ailleurs $\frac{1}{2}\frac{\partial r(y)}{\partial y_1}$, $\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{R}(y)}{\partial y_1}$.

En général, le coefficient de x_i^2 dans l'équation (2) sera de même

$$2\mathrm{F}_i\left(r_i - \frac{\Theta}{2}\mathrm{F}_i\right) - 2f_i\left(\mathrm{R}_i - \frac{\Theta_1}{2}f_i\right);$$

en le comparant à celui de x_i^2 dans le second membre de l'identité (3), on est amené à poser

$$j_i = 2\left(r_i - \frac{\Theta}{2}\mathrm{F}_i\right), \quad \mathrm{J}_i = 2\left(\mathrm{R}_i - \frac{\Theta_1}{2}f_i\right);$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et l'on vérifie aisément que le coefficient de $x_i x_k$ disparaît alors dans le second membre comme dans le premier.

Ainsi définis, les deux plans $\Sigma j_i x_i = 0$, $\Sigma J_i x_i = 0$ sont les plans polaires du point y par rapport aux deux surfaces auxiliaires (1)

$$j(x) = 2r(x) - \Theta F(x) = 0, \quad J(x) = 2R(x) - \Theta_1 f(x) = 0,$$

et l'identité (3), dont les deux membres ont la propriété invariantive, subsiste quel que soit le tétraèdre des coordonnées.

Cela posé, on aura, pour tous les points communs au plan (1) et à la surface (2),

$$\begin{cases} \Sigma(F_i + \lambda f_i) x_i = 0, \\ \Sigma F_i x_i \Sigma j_i x_i - \Sigma f_i x_i \Sigma J_i x_i = 0, \end{cases}$$

d'où

$$\Sigma f_i x_i (\Sigma J_i x_i + \lambda \Sigma j_i x_i) = 0.$$

Le premier facteur se rapporte à la tangente en y; le second fournit un plan covariant passant par la droite $\xi\eta$, dont les équations seront, par suite,

$$(4) \qquad \begin{cases} \Sigma(F_i + \lambda f_i) x_i = 0, \\ \Sigma(J_i + \lambda j_i) x_i = 0. \end{cases}$$

Déterminons les points de rencontre de cette droite avec une des surfaces du faisceau, par exemple avec la surface $F + \lambda f = 0$. Pour cela, adjoignons aux trois équations précédentes celles d'un plan arbitraire $\Sigma u_i x_i = 0$.

En faisant, pour abréger,

$$p_i = F_i + \lambda f_i,$$
$$p_{ik} = A_{ik} + \lambda a_{ik},$$
$$q_i = J_i + \lambda j_i,$$

(1) M. Westphal (*Mathematische Annalen*, Bd. XIII) a été également conduit à considérer ces deux surfaces, mais par une autre méthode, exigeant l'emploi du calcul symbolique.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

l'équation résultante sera

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_1 & q_1 & u_1 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_2 & q_2 & u_2 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_3 & q_3 & u_3 \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_4 & q_4 & u_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \sum\sum w_{ik} u_i u_k = 0.$$

En identifiant le premier membre avec le produit $\Sigma u_i \xi_i \Sigma u_i \eta_i$, on aura

$$\xi_i \eta_i = w_{ii},$$

$$\xi_i \eta_k + \xi_k \eta_i = 2 w_{ik},$$

$$(\xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i)^2 = 4(w_{ik}^2 - w_{ii} w_{kk}).$$

Considérons alors le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_1 & q_1 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_2 & q_2 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_3 & q_3 \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_4 & q_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 & 0 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & 0 & q_1 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & 0 & q_2 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & 0 & q_3 \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & 0 & q_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -[\mathbf{J}(y) + \lambda j(y)] \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & -[\mathbf{J}(y) + \lambda j(y)] & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -[\mathbf{J}(y) + \lambda j(y)]^2 \Delta(\lambda),$$

en désignant par $\Delta(\lambda)$ le discriminant de $\mathrm{F} + \lambda f$.

On aura donc, par une propriété des déterminants plusieurs fois appliquée dans les Chapitres précédents,

$$(\xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i)^2 = 4(p_l q_m - p_m q_l)^2 [\mathbf{J}(y) + \lambda j(y)]^2 \Delta(\lambda),$$

i, k, l, m désignant les nombres 1, 2, 3, 4 pris dans un ordre quelconque.

On en déduit six équations de la forme suivante,

$$\xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i = \pm 2 (p_l q_m - p_m q_l) [\mathbf{J}(y) + \lambda j(y)] \sqrt{\Delta(\lambda)},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

où les signes supérieurs correspondent aux signes supérieurs pour des permutations *iklm* de même classe, et aux signes inférieurs pour des permutations de classes différentes, comme cela résulte des conditions

$$\Sigma p_i \xi_i = 0, \quad \Sigma p_i \eta_i = 0, \quad \Sigma q_i \xi_i = 0, \quad \Sigma q_i \eta_i = 0.$$

On obtient ainsi quatre groupes de formules telles que celles-ci,

$$\begin{aligned}
\xi_1 \eta_1 &= w_{11}, \\
\xi_1 \eta_2 &= w_{12} + (p_3 q_4 - p_4 q_3)[\mathrm{J}(y) + \lambda j(y)]\sqrt{\Delta(\lambda)}, \\
\xi_1 \eta_3 &= w_{13} - (p_2 q_4 - p_4 q_2)[\mathrm{J}(y) + \lambda j(y)]\sqrt{\Delta(\lambda)}, \\
\xi_1 \eta_4 &= w_{14} + (p_2 q_3 - p_3 q_2)[\mathrm{J}(y) + \lambda j(y)]\sqrt{\Delta(\lambda)},
\end{aligned}$$

d'où, en multipliant par quatre constantes telles que $\Sigma c_i \eta_i$ soit différent de zéro,

$$\rho \xi_1 = \begin{vmatrix} p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_2 & q_2 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_3 & q_3 \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_4 & q_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 & 0 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & c_4 \\ p_2 & p_3 & p_4 \\ q_2 & q_3 & q_4 \end{vmatrix} [\mathrm{J}(y) + \lambda j(y)]\sqrt{\Delta(\lambda)}.$$

Cette expression se simplifie si l'on prend $c_i = f_i$. La partie rationnelle de ξ_1 devient alors

$$\begin{vmatrix} p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_2 & q_2 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_3 & q_3 \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_4 & q_4 \\ \mathrm{F}_1 & \mathrm{F}_2 & \mathrm{F}_3 & \mathrm{F}_4 & 0 & 0 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & 0 & 0 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -[\mathrm{J}(y) + \lambda j(y)] \begin{vmatrix} p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & q_2 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & q_3 \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & q_4 \\ \mathrm{F}_1 & \mathrm{F}_2 & \mathrm{F}_3 & \mathrm{F}_4 & 0 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & 0 \end{vmatrix}.$$

On peut donc faire abstraction du facteur commun $\mathrm{J}(y) + \lambda j(y)$; en remplaçant alors p_{ik}, q_i par leurs valeurs et en formant une combi-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

naison linéaire des ξ_i, on aura

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma u_i \xi_i = \left|\begin{array}{cccccc} A_{11}+\lambda a_{11} & A_{12}+\lambda a_{12} & A_{13}+\lambda a_{13} & A_{14}+\lambda a_{14} & J_1+\lambda f_1 & u_1 \\ A_{21}+\lambda a_{21} & A_{22}+\lambda a_{22} & A_{23}+\lambda a_{23} & A_{24}+\lambda a_{24} & J_2+\lambda f_2 & u_2 \\ A_{31}+\lambda a_{31} & A_{32}+\lambda a_{32} & A_{33}+\lambda a_{33} & A_{34}+\lambda a_{34} & J_3+\lambda f_3 & u_3 \\ A_{41}+\lambda a_{41} & A_{42}+\lambda a_{42} & A_{43}+\lambda a_{43} & A_{44}+\lambda a_{44} & J_4+\lambda f_4 & u_4 \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & 0 & 0 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & 0 & 0 \end{array}\right| \\ \pm \left|\begin{array}{cccc} f_1 & F_1 & J_1+\lambda f_1 & u_1 \\ f_2 & F_2 & J_2+\lambda f_2 & u_2 \\ f_3 & F_3 & J_3+\lambda f_3 & u_3 \\ f_4 & F_4 & J_4+\lambda f_4 & u_4 \end{array}\right| \sqrt{\Delta(\lambda)}. \end{array}\right.$$

Cette formule donne les valeurs des coordonnées ξ_i en égalant dans les deux membres les coefficients de u_i. La partie rationnelle est du troisième degré en λ, le coefficient de $\sqrt{\Delta}$ du premier.

Les coefficients de $\sqrt{\Delta(\lambda)}$ sont les coordonnées du point où la corde variable $\xi\eta$ rencontre la tangente en y. Les parties rationnelles représentent celles du conjugué harmonique de ce point par rapport aux deux points $\xi\eta$.

Le lieu de ce conjugué harmonique est une cubique gauche.

78. La condition pour que ξ, η coïncident, c'est-à-dire pour que le plan tangent en y à la courbe lui soit tangent en un second point, est évidemment $\Delta(\lambda) = 0$. La surface $F + \lambda f = 0$ est alors un des quatre cônes du second degré passant par la courbe, et le plan bitangent n'est autre que le plan tangent à ce cône au point y. *Par chaque point de la courbe, on peut donc lui mener quatre plans bitangents;* les quatre points de contact autres que le proposé étant d'ailleurs situés sur les génératrices respectives des quatre cônes qui sont issues de ce point ne sont autres que ceux où la courbe est rencontrée par les droites joignant ce point aux sommets du tétraèdre conjugué commun.

Enfin l'équation qui détermine les valeurs de λ relatives à ces plans étant toujours la même quel que soit y, *le rapport anharmonique des quatre plans bitangents menés d'un point de la courbe est constant.*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

79. Pour que l'un des points ξ, η se confonde avec γ, il faut que le plan $\Sigma(\mathrm{J}_i+\lambda j_i)x_i=0$ passe par γ, d'où

$$\lambda=-\frac{\mathrm{J}(\gamma)}{j(\gamma)}=-\frac{\mathrm{R}(\gamma)}{r(\gamma)}.$$

Le plan tangent en γ à la surface $\mathrm{F}+\lambda f=0$ est alors le plan osculateur en γ à la courbe, et l'équation de ce plan sera, par suite,

$$r(\gamma)\Sigma \mathrm{F}_i x_i-\mathrm{R}(\gamma)\Sigma f_i x_i=0.$$

80. Enfin, supposons que les deux points ξ, η viennent se confondre en γ; les trois plans

$$\Sigma \mathrm{F}_i x_i=0,\quad \Sigma f_i x_i=0,\quad \Sigma(\mathrm{J}_i+\lambda j_i)x_i=0$$

se coupent suivant une même droite, et, par suite, on a

$$\begin{vmatrix} \mathrm{F}_1 & f_1 & \mathrm{J}_1 & j_1 \\ \mathrm{F}_2 & f_2 & \mathrm{J}_2 & j_2 \\ \mathrm{F}_3 & f_3 & \mathrm{J}_3 & j_3 \\ \mathrm{F}_4 & f_4 & \mathrm{J}_4 & j_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{F}_1 & f_1 & \mathrm{R}_1 & r_1 \\ \mathrm{F}_2 & f_2 & \mathrm{R}_2 & r_2 \\ \mathrm{F}_3 & f_3 & \mathrm{R}_3 & r_3 \\ \mathrm{F}_4 & f_4 & \mathrm{R}_4 & r_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation, si l'on y regarde y_i comme des coordonnées courantes, représente les quatre faces du tétraèdre conjugué commun. On le vérifie en rapportant les deux surfaces F et f à ce tétraèdre.

Ces quatre plans rencontrent donc la courbe en seize points, en chacun desquels le plan tangent est stationnaire.

81. On conclut encore de ce qui précède qu'*une surface du faisceau* $\mathrm{F}+\rho f=0$ *contient huit tangentes à la courbe*. En effet, donnons à ρ une valeur déterminée : les trois surfaces $\mathrm{F}=0$, $f=0$, $\mathrm{J}+\rho j=0$ se coupent en huit points. Soit γ l'un de ces points, la tangente en γ à la courbe appartient à la surface $r(\gamma)\mathrm{F}-\mathrm{R}(\gamma)f=0$. D'ailleurs, on a $\rho=-\frac{\mathrm{J}(\gamma)}{j(\gamma)}=-\frac{\mathrm{R}(\gamma)}{r(\gamma)}$. Donc la tangente est située sur la surface $\mathrm{F}+\rho f$.

Chacune de ces huit tangentes en rencontre quatre autres, car la surface qui la contient admet quatre de ces tangentes comme génératrices d'un premier système et les quatre autres comme génératrices

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

du second. Toute droite joignant un des huit points de contact à l'un des sommets du tétraèdre conjugué commun va passer par un autre de ces huit points.

82. Pour introduire dans les formules (5) les fonctions elliptiques, il suffira de regarder λ comme la fonction inverse de l'intégrale

$$u = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Delta(\lambda)}}.$$

Cette fonction se ramène d'ailleurs très simplement aux fonctions $p(u)$ en posant, comme il a été dit au Chapitre I, page 23,

$$(6) \qquad \lambda = \lambda_1 + \frac{6\frac{d\Delta(\lambda_1)}{d\lambda_1}}{24z - \frac{d^2\Delta(\lambda_1)}{d\lambda_1^2}},$$

λ_1 désignant une des racines de l'équation

$$\Delta(\lambda) = \Delta_f\lambda^4 + \Theta\lambda^3 + \Phi\lambda^2 + \Theta_1\lambda + \Delta_F = 0.$$

Si l'on fait $\lambda_0 = \lambda_1$, on aura

$$u = \int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Delta(\lambda)}} = -\int_{\infty}^{z} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - Iz - J}},$$

les valeurs de I et J étant les suivantes :

$$I = \Delta_F\Delta_f - \frac{\Theta\Theta_1}{4} + \frac{\Phi^2}{12},$$

$$J = \frac{1}{12^3}\begin{vmatrix} 12\Delta_F & 3\Theta & 2\Phi \\ 3\Theta & 2\Phi & 3\Theta_1 \\ 2\Phi & 3\Theta_1 & 12\Delta_f \end{vmatrix}.$$

A l'aide de cette transformation, les coordonnées s'exprimeront en fonction rationnelle de $p(u)$ et de $p'(u)$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

83. La méthode synthétique de M. Hermite conduit aux expressions suivantes, en coordonnées cartésiennes :

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^{i=4} A_i Z(t - a_i),$$

$$y = y_0 + \sum_{i=1}^{i=4} A'_i Z(t - a_i),$$

$$z = z_0 + \sum_{i=1}^{i=4} A''_i Z(t - a_i),$$

où l'on suppose $\Sigma A_i = \Sigma A'_i = \Sigma A''_i = 0$.

§ II. — Relation entre les paramètres qui déterminent un même point.

84. Lorsqu'on change le point y, considéré dans le paragraphe précédent, en un autre point y', les coordonnées des points variables de la courbe s'expriment en fonction d'un nouveau paramètre μ. Nous allons chercher, comme dans le cas de la courbe du troisième degré, la relation qui existe entre les valeurs de λ et de μ se rapportant à un même point.

Considérons, à cet effet, la différentielle relative à la courbe gauche

$$D_x = \frac{\Sigma \pm a_1 b_2 x_3 dx_4}{\Sigma \pm F_1(x) f_2(x) u_3 v_4},$$

telle qu'elle a été définie par Clebsch (*Journal de Crelle*, t. 63, p. 221), où les quantités a_i, b_i, u_i, v_i sont liées par les relations

$$\Sigma u_i a_i = 0, \quad \Sigma u_i b_i = 0, \quad \Sigma v_i a_i = 0, \quad \Sigma v_i b_i = 0,$$

u_i, v_i pouvant être quelconques. Les six quantités $u_i v_k - u_k v_i = a_l b_m - a_m b_l$ sont les coordonnées d'une droite dont la position n'influe en rien sur la valeur de la différentielle D_x.

En prenant pour cette droite la tangente en y à la courbe, M. Westphal

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

a démontré que D_x peut être mis sous la forme $\frac{d\lambda}{\sqrt{\Delta(\lambda)}}$ à un facteur numérique près. Nous l'établirons d'une manière très simple, en nous servant des formules (5) (77).

Soient donc $u_i = F_i$, $v_i = f_i$ et, comme ci-dessus, $\lambda = -\frac{\Sigma F_i x_i}{\Sigma f_i x_i}$, F_i désignant $\frac{\partial F}{\partial y_i}$, f_i désignant de même $\frac{\partial f}{\partial y_i}$; on a, pour $i \gtrless k$,

$$\Sigma \pm a_1 b_2 x_3 dx_4 = \Sigma (F_i f_k - F_k f_i)(x_i dx_k - x_k dx_i)$$
$$= \begin{vmatrix} \Sigma F_i x_i & \Sigma f_i x_i \\ \Sigma F_i dx_i & \Sigma f_i dx_i \end{vmatrix} = (\Sigma f_i x_i)^2 d\lambda.$$

Quant au dénominateur de D_x, il devient, pour ces valeurs de u_i et de v_i,

$$\begin{vmatrix} F_1(x) & F_2(x) & F_3(x) & F_4(x) \\ f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & f_4(x) \\ F_1(y) & F_2(y) & F_3(y) & F_4(y) \\ f_1(y) & f_2(y) & f_3(y) & f_4(y) \end{vmatrix} = T.$$

L'équation $T = 0$ représente un cône de sommet y, puisque $\frac{dT}{dx_i}$ s'annule pour $x_i = y_i$; ce cône contient les sommets de ceux qui font partie du faisceau $F + \rho f = 0$, puisqu'en ces points on a $F_i(x) + \lambda f_i(x) = 0$. Enfin il contient la tangente en y à la courbe, puisque pour tout point de cette droite on a $\Sigma F_i x_i = 0$, $\Sigma f_i x_i = 0$, et que d'ailleurs $\Sigma F_i y_i = \Sigma f_i y_i = 0$.

Cela posé, si dans T on substitue les valeurs de x fournies par les formules (5), le résultat sera de la forme $\Phi(\lambda)\sqrt{\Delta(\lambda)}$, Φ étant rationnel et entier en λ.

Car, en substituant d'abord les valeurs de x_i réduites à leur partie irrationnelle, on aura $T = 0$, puisque les coefficients de $\sqrt{\Delta(\lambda)}$ sont les coordonnées d'un point situé sur la tangente en y (*voir* p. 103). Substituons ensuite les parties rationnelles, après avoir remplacé la première ligne de T par

$$F_1(x) + \lambda f_1(x), \quad F_2(x) + \lambda f_2(x), \quad F_3(x) + \lambda f_3(x), \quad F_4(x) + \lambda f_4(x).$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On aura, d'après les formules (5), où l'on supprime la partie irrationnelle,

$$F_i(x) - \lambda f_i(x) = \begin{vmatrix} A_{11}+\lambda a_{11} & A_{12}+\lambda a_{12} & A_{13}+\lambda a_{13} & A_{14}+\lambda a_{14} & J_1+\lambda j_1 & A_{i1}+\lambda a_{i1} \\ A_{21}+\lambda a_{21} & A_{22}+\lambda a_{22} & A_{23}+\lambda a_{23} & A_{24}+\lambda a_{24} & J_2+\lambda j_2 & A_{i2}+\lambda a_{i2} \\ A_{31}+\lambda a_{31} & A_{32}+\lambda a_{32} & A_{33}+\lambda a_{33} & A_{34}+\lambda a_{34} & J_3+\lambda j_3 & A_{i3}+\lambda a_{i3} \\ A_{41}+\lambda a_{41} & A_{42}+\lambda a_{42} & A_{43}+\lambda a_{43} & A_{44}+\lambda a_{44} & J_4+\lambda j_4 & A_{i4}+\lambda a_{i4} \\ F_1(y) & F_2(y) & F_3(y) & F_4(y) & 0 & 0 \\ f_1(y) & f_2(y) & f_3(y) & f_4(y) & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ou, en retranchant la colonne d'ordre i de la dernière,

$$F_i(x) + \lambda f_i(x) = M F_i(y) + N f_i(y),$$

M et N étant indépendants de i. On voit donc qu'une telle substitution annule T.

Si donc on porte dans T les valeurs complètes de x_i, on aura

$$T = \Phi(\lambda)\sqrt{\Delta(\lambda)}.$$

Enfin, remplaçant λ par $-\frac{\Sigma F_i x_i}{\Sigma f_i x_i}$, et comparant les degrés des deux membres, on trouvera

$$\Phi(\lambda) = g(\Sigma f_i x_i)^2,$$

g étant purement numérique. On en déduit finalement

$$D_x = \frac{d\lambda}{g\sqrt{\Delta(\lambda)}}.$$

Cette démonstration met de plus en évidence la propriété qu'a le cône T de contenir la cubique gauche dont nous avons parlé (77).

En considérant un autre point y' et un autre paramètre μ, on aura de même

$$D_x = \frac{d\mu}{g\sqrt{\Delta(\mu)}},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'où, λ, μ se rapportant à un même point,

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{\Delta(\lambda)}} = \frac{d\mu}{\sqrt{\Delta(\mu)}}.$$

Les arguments correspondants ne diffèrent donc que d'une constante.

85. Appliquons la formule donnée par Euler (*Instit. Calc. integr.*, t. IV, p. 485) pour intégrer une telle équation. On aura, Γ désignant une constante,

$$\begin{aligned}&(4\Gamma\Delta_f - \Theta^2 + 4\Phi\Delta_f)\lambda^2\mu^2 + 2(\Gamma\Theta + 2\Theta_1\Delta_f)\lambda\mu(\lambda+\mu)\\&\quad + 2(\Gamma^2 + 2\Gamma\Phi + \Theta\Theta_1 + 4\Delta_f\Delta_F)\lambda\mu + (4\Delta_f\Delta_F - \Gamma^2)(\lambda^2+\mu^2)\\&\qquad + 2(\Gamma\Theta_1 + 2\Theta\Delta_F)(\lambda+\mu) + 4\Gamma\Delta_F - \Theta_1^2 + 4\Phi\Delta_F = 0,\end{aligned}$$

et la question se ramène au calcul de Γ.

Pour cela, donnons à λ la valeur λ_i d'une racine de l'équation $\Delta = 0$, ce qui revient à mener par y un des plans bitangents, et soit μ_i la valeur correspondante de μ. En appliquant la formule indiquée d'abord (*loc. cit.*, p. 482), la relation précédente devient

$$\frac{\Delta(\mu_i)}{(\mu_i - \lambda_i)^2} = \Gamma + \Phi + \Theta(\lambda_i + \mu_i) + \Delta_f(\lambda_i + \mu_i)^2$$

ou

$$\begin{aligned}&\Delta_f\mu_i^3 + (\Delta_f\lambda_i + \Theta)\mu_i^2 + (\Delta_f\lambda_i^2 + \Theta\lambda_i + \Phi)\mu_i + \Delta_f\lambda_i^3 + \Theta\lambda_i^2 + \Phi\lambda_i + \Theta_1\\&\quad = (\Gamma + \Phi)(\mu_i - \lambda_i) + \Theta(\mu_i^2 - \lambda_i^2) + \Delta_f(\mu_i^2 - \lambda_i^2)(\mu_i + \lambda_i),\end{aligned}$$

ce qu'on peut écrire, en réduisant,

$$-2\frac{\Delta_F}{\lambda_i} - \Theta_1 + \mu_i(2\Delta_f\lambda_i^2 + \Theta\lambda_i) = \Gamma(\mu_i - \lambda_i).$$

Supposons les deux surfaces rapportées au tétraèdre conjugué commun, et par suite $\lambda_i = -\frac{A_{ii}}{a_{ii}}$; le point correspondant à cette valeur étant le conjugué harmonique de y par rapport à un sommet du tétraèdre et à un point de la face opposée, ses coordonnées sont celles de y, sauf le changement de y_i en $-y_i$; on a donc

$$\mu_i = -\frac{\Sigma F_i' y_i - 2F_i' y_i}{\Sigma f_i' y_i - 2f_i' y_i},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'où

$$\left(\frac{2\Delta_F}{\lambda_i}+\Theta_1\right)\Sigma f_i' y_i+(2\Delta_f\lambda_i^2+\Theta\lambda_i)\Sigma F_i' y_i$$
$$-\left(\frac{4\Delta_F}{\lambda_i}+2\Theta_1\right)f_i' y_i-(4\Delta_f\lambda_i^2+2\Theta\lambda_i)F_i' y_i=\Gamma(\lambda_i\Sigma f_i' y_i+\Sigma F_i' y_i).$$

Substituons à λ_i les quatre racines de Δ; ajoutons, en tenant compte de ces relations,

$$\frac{\Sigma f_i' y_i}{\lambda_i}=-\sum\frac{a_{ii}^2}{A_{ii}}y_i' y_i=-\frac{\Sigma R_i' y_i}{\Delta_F},$$

$$\Sigma\lambda_i F_i' y_i=-\sum\frac{A_{ii}^2}{a_{ii}}y_i' y_i=-\frac{\Sigma r_i' y_i}{\Delta_f},$$

$$\Delta_f\Sigma\lambda_i^2 F_i' y_i=-\Sigma\left(\Theta\lambda_i+\Phi+\frac{\Theta_1}{\lambda_i}+\frac{\Delta_F}{\lambda_i^2}\right)F_i' y_i$$
$$=\frac{\Theta}{\Delta_f}\Sigma r_i' y_i-\Phi\Sigma F_i' y_i+\Theta_1\Sigma f_i' y_i-\Sigma R_i' y_i,$$

$$\Sigma\lambda_i=-\frac{\Theta}{\Delta_f},\quad\sum\frac{1}{\lambda_i}=-\frac{\Theta_1}{\Delta_F},\quad\Sigma\lambda_i^2=\frac{\Theta^2}{\Delta_f^2}-2\frac{\Phi}{\Delta_f}.$$

On trouvera finalement cette valeur très simple :

$$\Gamma=\frac{4\Delta_f[2\Sigma R_i' y_i-\Theta_1\Sigma f_i' y_i]-\Theta[2\Sigma r_i' y_i-\Theta\Sigma F_i' y_i]}{4\Delta_f\Sigma F_i' y_i-\Theta\Sigma f_i' y_i}=\frac{4\Delta_f\Sigma J_i' y_i-\Theta\Sigma j_i' y_i}{4\Delta_f\Sigma F_i' y_i-\Theta\Sigma f_i' y_i}.$$

Bien qu'établie avec des coordonnées particulières, cette formule donne encore la valeur de Γ dans le cas général; en effet, la relation entre λ et μ montre que cette quantité possède la propriété invariantive.

Au moyen de l'identité (3) (77), on constatera que Γ peut s'écrire également sous cette forme :

$$\frac{4\Delta_F\Sigma j_i' y_i-\Theta_1\Sigma J_i' y_i}{4\Delta_F\Sigma f_i' y_i-\Theta_1\Sigma F_i' y_i}.$$

En effet, en égalant ces deux valeurs, on arrive à l'identité

$$(16\Delta_f\Delta_F-\Theta\Theta_1)(\Sigma J_i' y_i\Sigma f_i' y_i-\Sigma j_i' y_i\Sigma F_i' y_i)=0$$

ou

$$(16\Delta_f\Delta_F-\Theta\Theta_1)[r(y)F(y')-R(y)f(y')]=0,$$

laquelle est satisfaite par deux points quelconques y, y' de la courbe.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

§ III. — Condition relative à quatre points situés dans un plan. Applications.

86. Supposons que dans les expressions des coordonnées on ait introduit les fonctions elliptiques, par exemple au moyen de la formule

$$\lambda = \lambda_1 + \frac{6\,\frac{d\Delta(\lambda_1)}{d\lambda_1}}{24p(u) - \frac{d^2\Delta(\lambda_1)}{d\lambda_1^2}}. \tag{7}$$

La condition entre les quatre arguments u_1, u_2, u_3, u_4 des points de rencontre de la courbe avec un plan quelconque s'obtient comme dans le cas de la courbe du troisième ordre. Elle est la suivante :

$$u_0 + u'_0 + \Sigma u_i \equiv 0,$$

u_0, u'_0 étant deux valeurs étrangères que l'on peut déterminer en prenant un plan passant par la tangente en γ à la courbe

$$\Sigma(\mathrm{F}_i + \rho f_i)x_i = 0.$$

L'équation qui détermine les valeurs de λ relatives aux points d'intersection sera, en appliquant les formules (5),

$$\begin{vmatrix}
\mathrm{A}_{11}+\lambda a_{11} & \mathrm{A}_{12}+\lambda a_{12} & \mathrm{A}_{13}+\lambda a_{13} & \mathrm{A}_{14}+\lambda a_{14} & \mathrm{J}_1+\lambda j_1 & \mathrm{F}_1+\rho f_1 \\
\mathrm{A}_{21}+\lambda a_{21} & \mathrm{A}_{22}+\lambda a_{22} & \mathrm{A}_{23}+\lambda a_{23} & \mathrm{A}_{24}+\lambda a_{24} & \mathrm{J}_2+\lambda j_2 & \mathrm{F}_2+\rho f_2 \\
\mathrm{A}_{31}+\lambda a_{31} & \mathrm{A}_{32}+\lambda a_{32} & \mathrm{A}_{33}+\lambda a_{33} & \mathrm{A}_{34}+\lambda a_{34} & \mathrm{J}_3+\lambda j_3 & \mathrm{F}_3+\rho f_3 \\
\mathrm{A}_{41}+\lambda a_{41} & \mathrm{A}_{42}+\lambda a_{42} & \mathrm{A}_{43}+\lambda a_{43} & \mathrm{A}_{44}+\lambda a_{44} & \mathrm{J}_4+\lambda j_4 & \mathrm{F}_4+\rho f_4 \\
\mathrm{F}_1 & \mathrm{F}_2 & \mathrm{F}_3 & \mathrm{F}_4 & 0 & 0 \\
f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & 0 & 0
\end{vmatrix} = 0$$

ou, comme on le voit aussitôt,

$$(\lambda-\rho)[\mathrm{R}(\gamma)+\lambda r(\gamma)] \begin{vmatrix}
\mathrm{A}_{11}+\lambda a_{11} & \mathrm{A}_{21}+\lambda a_{21} & \mathrm{A}_{31}+\lambda a_{31} & \mathrm{A}_{41}+\lambda a_{41} & f_1 \\
\mathrm{A}_{21}+\lambda a_{21} & \mathrm{A}_{22}+\lambda a_{22} & \mathrm{A}_{23}+\lambda a_{23} & \mathrm{A}_{24}+\lambda a_{24} & f_2 \\
\mathrm{A}_{31}+\lambda a_{31} & \mathrm{A}_{32}+\lambda a_{32} & \mathrm{A}_{33}+\lambda a_{33} & \mathrm{A}_{34}+\lambda a_{34} & f_3 \\
\mathrm{A}_{41}+\lambda a_{41} & \mathrm{A}_{42}+\lambda a_{42} & \mathrm{A}_{43}+\lambda a_{43} & \mathrm{A}_{44}+\lambda a_{44} & f_4 \\
f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & 0
\end{vmatrix} = 0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

c'est-à-dire, en se reportant à la condition pour qu'un plan

$$\Sigma(F_i + \sigma f_i)x_i = 0$$

soit tangent à une surface du faisceau $F + \lambda f = 0$ (77),

$$(\lambda - \rho)[R(y) + \lambda r(y)]^2 = 0.$$

La valeur $\lambda = \rho$ fournit les deux points d'intersection autres que le point y.

La valeur $\lambda = -\frac{R(y)}{r(y)}$ fournit, comme on sait, le point y et le second point de rencontre du plan osculateur en y avec la courbe. Les deux arguments étrangers u_0, u'_0 sont donc égaux à celui de ce dernier point, ou, ce qui revient au même, leur valeur commune est égale et de signe contraire à celle de l'argument u_y relatif au point y. Effectivement, à une même valeur de λ correspondent deux valeurs égales et de signe contraire de u.

Soit donc $\sigma = 2u_y$; la condition trouvée peut s'écrire

$$\Sigma u_i \equiv \sigma,$$

et l'on a

$$\frac{\sigma}{2} = -\int_{\lambda_1}^{-\frac{R(y)}{r(y)}} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Delta(\lambda)}}$$

ou, en résolvant la formule (7) par rapport à $p(u)$,

$$p\left(\frac{\sigma}{2}\right) = \frac{R(y)(6\Delta_f\lambda_1^2 + 3\Theta\lambda_1 + \Phi) + \frac{r(y)}{\lambda_1}(6\Delta_F + 3\Theta_1\lambda_1 + \Phi\lambda_1^2)}{12[R(y) + \lambda_1 r(y)]}.$$

87. La relation $\Sigma u_i \equiv \sigma$ conduit à un grand nombre de théorèmes sur les propriétés géométriques de la courbe gauche. On démontre ainsi très simplement les théorèmes suivants :

Par chaque point de la courbe on peut mener neuf plans osculateurs autres que celui qui se rapporte au point considéré.

Par deux points de la courbe passent quatre plans tangents à cette courbe.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La courbe admet quatre systèmes de plans bitangents, et par une tangente quelconque on peut faire passer un plan de chaque système.

Il existe sur la courbe seize points stationnaires répartis en groupes de quatre points situés dans un même plan.

Si λ_0 et U_0 sont les valeurs du paramètre et de l'argument relatifs à un de ces derniers points, on a

$$\sigma \equiv 4U_0 \equiv -4\int_{\lambda_1}^{\lambda_0} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Delta(\lambda)}}.$$

88. En considérant une quelconque des surfaces du faisceau $F + \lambda f = 0$ comme décrite par une série de cordes de la courbe formant un même système de génératrices, on peut énoncer le théorème suivant :

La somme des arguments relatifs aux extrémités de chacune de ces cordes est constante, à des multiples près des périodes.

Il suffit, pour le démontrer, de combiner toutes ces droites avec une corde fixe, prise dans le second système de génératrices.

Réciproquement, deux cordes sont des génératrices de même système d'une surface $F + \lambda f = 0$ *si la somme des arguments de leurs extrémités est la même.*

La valeur U de cette somme s'obtient en fonction de λ en supposant que la génératrice passe par le point y ou, ce qui revient au même, est contenue dans le plan $\Sigma(F_i + \lambda f_i)x_i = 0$. Soit u un des arguments égaux et de signes contraires, relatifs à la seconde extrémité de cette corde, on aura

$$U \equiv u + u_y = \pm\int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Delta(\lambda)}} + \frac{\sigma}{2},$$

le signe $\pm$ se rapportant aux deux systèmes de génératrices.

89. On déduit de ce qui précède la solution de ce problème : *Inscrire dans la courbe un polygone fermé d'un nombre pair* $2n$ *de sommets et dont les côtés appartiennent alternativement aux deux systèmes de géné-*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ratrices d'une même surface du faisceau. Soient $u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$ les arguments des sommets; on aura

$$\begin{aligned} U &\equiv u_1 + u_2, \\ \sigma - U &\equiv u_2 + u_3, \\ U &\equiv u_3 + u_4, \\ &\cdots\cdots\cdots, \\ \sigma - U &\equiv u_{2n} + u_1, \end{aligned}$$

d'où

$$U \equiv \frac{\sigma}{2} + \frac{2h\omega + 2h'\omega'}{2n},$$

et les valeurs de λ relatives aux surfaces répondant à la question seront déterminées par la formule

$$\frac{2h\omega + 2h'\omega'}{2n} = \pm \int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Delta(\lambda)}}$$

ou bien

$$\lambda = \lambda_1 + \frac{6\dfrac{\partial \Delta(\lambda_1)}{\partial \lambda_1}}{24\, p\left(\dfrac{2h\omega + 2h'\omega'}{2n}\right) - \dfrac{\partial^2 \Delta\ \lambda_1}{\partial \lambda_1^2}}.$$

Quant aux valeurs de $p\left(\dfrac{2h\omega + 2h'\omega'}{2n}\right)$, elles sont les racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} p' & p'' & \ldots & p^{(2n-1)} \\ p'' & \ldots & \ldots & p^{(2n-2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ p^{(2n-1)} & \ldots & \ldots & p^{(4n-3)} \end{vmatrix} = 0,$$

où l'on fait

$$\begin{aligned} p' &= 2\sqrt{4z^3 - Iz - J}, \\ p'' &= 6z^2 - \frac{I}{2}, \\ &\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

I et J ayant les valeurs indiquées plus haut.

Le premier membre de cette équation est divisible par p', qui donne les valeurs $p(\omega), p(\omega'), p(\omega + \omega')$, et, par suite, en leur adjoignant la

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

solution $h = h' = 0$, on retrouve les quatre cônes du faisceau; mais ce sont des solutions qui ne conviennent qu'improprement à la question. Le nombre des valeurs de z qui déterminent les surfaces cherchées est seulement égal à $2(n^2 - 1)$.

Ce problème se rattache à celui des polygones de Steiner inscrits dans une cubique. En prenant pour centre de perspective un point S de la courbe gauche, on transforme celle-ci en une courbe du troisième ordre, et les deux génératrices menées de ce point sur une des surfaces considérées donneront en perspective un couple de Steiner. La différence des arguments qui correspondent aux deux points de ce couple étant égale à $2U - \sigma$, c'est-à-dire à $\frac{2h\omega + 2h'\omega'}{n}$, on retrouve la condition obtenue au Chapitre IV, § VI.

Les $2(n^2 - 1)$ surfaces précédentes se partagent en quatre groupes, dont chacun donne lieu à toutes les classes de polygones de Steiner, relatives au nombre n, car, en prenant pour U les quatre valeurs

$$\frac{\sigma}{2} + \frac{2h\omega + 2h'\omega'}{2n}, \qquad \frac{\sigma}{2} + \frac{2h\omega + 2h'\omega'}{2n} + \omega,$$

$$\frac{\sigma}{2} + \frac{2h\omega + 2h'\omega'}{2n} + \omega', \qquad \frac{\sigma}{2} + \frac{2h\omega + 2h'\omega'}{2n} + \omega + \omega',$$

on est conduit à la même valeur de $2U - \sigma = \frac{2h\omega + 2h'\omega'}{n}$.

On voit que, si dans la formule (7), qui détermine λ, nous remplaçons λ_1 par une autre des racines de l'équation $\Delta(\lambda) = 0$, ces quatre groupes de surfaces s'échangeront entre eux.

90. Ainsi que l'a prouvé M. Westphal, les diagonales qui joignent deux sommets opposés dans les polygones gauches dont nous venons de parler ont des propriétés différentes suivant que n est pair ou impair.

1° Si n est impair, les relations entre les arguments des sommets peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} 2(u_1 + u_{n+1}) &\equiv \sigma, \\ 2(u_2 + u_{n+2}) &\equiv \sigma, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ 2(u_n + u_{2n}) &\equiv \sigma. \end{aligned}$$

Deux sommets opposés sont donc les points de contact d'un même plan

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

bitangent, et la diagonale qui les joint passe par un des sommets des quatre cônes du faisceau. Ce sommet sera différent suivant que la quantité $h\omega + h'\omega' \equiv u_1 + u_{n+1} - \frac{\sigma}{2} \equiv u_i + u_{n+i} - \frac{\sigma}{2}$ sera égale à o, ω, ω', $\omega + \omega'$. On est donc amené à parler des cônes o, ω, ω', $\omega + \omega'$ et à distinguer quatre espèces de polygones gauches, lesquelles correspondent aux quatre groupes de surfaces dont nous avons parlé, car les valeurs de U sont respectivement de la forme indiquée ci-dessus.

2° Si n est pair, on a

$$u_1 - u_{n+1} \equiv nU - \frac{n\sigma}{2} \equiv h\omega + h'\omega',$$

$$u_2 - u_{n+2} \equiv nU - \frac{n\sigma}{2} \equiv h\omega + h'\omega',$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$u_n - u_{2n} \equiv nU - \frac{n\sigma}{2} \equiv h\omega + h'\omega';$$

mais ici h et h' ne comportent que trois systèmes de valeurs.

Pour interpréter ces conditions, soient par exemple $h = 2k + 1$, $h' = 2k$; en posant

$$u_2 + u_1 \equiv \frac{\sigma}{2} + \omega,$$

$$u_2 + u_{n+1} \equiv \frac{\sigma}{2},$$

on aura

$$u_1 - u_{n+1} \equiv \omega.$$

Or les droites (u_1, u_2), (u_{n+1}, u_2) passent respectivement par les sommets des cônes ω, o; par suite, la droite (u_1, u_{n+1}) rencontre l'arête du tétraèdre conjugué qui joint ces deux sommets. On verra de même, en posant

$$u_{2'} + u_1 \equiv \frac{\sigma}{2} + \omega + \omega',$$

que cette droite rencontre l'arête opposée.

Ainsi, dans ce cas, *les diagonales du polygone rencontrent deux arêtes opposées du tétraèdre,* et, suivant les trois couples d'arêtes, on partagera les diagonales en trois classes.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

91. On voit, par cette même démonstration, que, lorsqu'une corde de la courbe rencontre une arête, elle rencontre aussi l'arête opposée. Appelons *points conjugués* les extrémités d'une telle corde. Il existe trois groupements de points conjugués, correspondant aux trois couples d'arêtes.

Nous pouvons maintenant démontrer très simplement différents théorèmes indiqués par M. Laguerre (¹), au sujet de ces couples de points.

Si (u, v), (u', v') *désignent deux couples de points conjugués appartenant au même groupement, les droites* uu', vv' *sont situées sur une même surface du faisceau.* Car soient

$$u - v \equiv h\omega + h'\omega',$$
$$u' - v' \equiv h\omega + h'\omega';$$

on en conclut

$$u + u' \equiv v + v'.$$

De même, les droites uv', $u'v$ sont sur une même surface.

Si par deux points quelconques de la courbe on lui mène les quatre plans tangents, chacun des points de contact est conjugué respectivement dans les trois groupes par rapport aux trois autres points de contact.

Car, u, v étant les arguments des deux points, ceux des points de contact sont compris dans la formule

$$-\frac{u+v}{2} + \frac{\sigma}{2} + h\omega + h'\omega',$$

et les six différences des quatre arguments pris deux à deux ont pour valeurs ω, ω', $\omega + \omega'$.

Les six droites déterminées par deux de ces points rencontrent donc deux à deux les mêmes couples d'arêtes opposées. Trois droites issues d'un même point appartiennent aux trois groupes différents. Deux arêtes opposées du tétraèdre formé par ces quatre points sont des cordes de même groupe.

(¹) *Bulletin de la Société Philomathique* (avril 1868).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Si les deux points u, v sont conjugués et si (u', v'), et (u'', v'') sont les couples de points conjugués de même groupement que u et v, qu'on peut obtenir parmi les quatre points de contact des plans tangents menés par uv, chacun des points u, v est le point de contact de deux plans tangents, menés l'un par u'v', l'autre par u''v''.

Supposons par exemple u, v conjugués dans le système (ω), ou

$$u - v \equiv \omega.$$

Les arguments des quatre points de contact sont alors

$$u' \equiv -v + \frac{\omega}{2} + \frac{\sigma}{2},$$

$$v' \equiv -v - \frac{\omega}{2} + \frac{\sigma}{2},$$

$$u'' \equiv -v + \frac{\omega}{2} + \omega' + \frac{\sigma}{2},$$

$$v'' \equiv -v - \frac{\omega}{2} + \omega' + \frac{\sigma}{2};$$

(u', v'), (u'', v'') forment deux couples du groupe ω. On a d'ailleurs

$$u \equiv -\frac{u' + v'}{2} + \omega + \frac{\sigma}{2} \equiv -\frac{u'' + v''}{2} + \omega + \omega' + \frac{\sigma}{2},$$

$$v \equiv -\frac{u' + v'}{2} + \frac{\sigma}{2} \equiv -\frac{u'' + v''}{2} + \omega' + \frac{\sigma}{2};$$

ce qui démontre le théorème.

Nous dirons que *deux cordes telles que uv, u'v' sont conjuguées dans un premier système*, et que *les cordes uv, u''v'' sont conjuguées dans le second.*

Les quatre droites qui joignent les extrémités d'une corde uv à celles d'une de ses conjuguées sont situées sur une même surface du faisceau.

En effet, d'après un théorème précédent, les deux droites uu', vv' sont sur une même surface. Cette surface a pour plan tangent en u' le plan $uu'v$ et pour plan tangent en v' le plan $uv'v$. Donc $u'v$, uv' sont deux génératrices de la surface.

De même, uv, $u''v''$, uv'', vu'' sont quatre droites d'une autre surface du faisceau.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Toutes les droites obtenues en joignant les extrémités des cordes d'un même groupe à celles de leurs cordes conjuguées dans un même système sont sur une seule et même surface du faisceau.

En effet, soient uv une corde du groupe (ω), $u'v'$ la corde conjuguée du premier système. On a démontré la relation

$$u + v' \equiv v + u' \equiv \frac{\omega}{2} + \frac{\tau}{2}.$$

Donc les deux droites uv', vu' sont sur la surface définie par la relation

$$\frac{\omega}{2} = \int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Delta(\lambda)}},$$

laquelle ne dépend aucunement du couple considéré et, par suite, sera la même pour toutes les cordes du même groupe.

En considérant les cordes conjuguées du second système, on trouvera de même

$$\frac{\omega}{2} + \omega' = \int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\Delta(\lambda)}}.$$

Les valeurs de λ sont donc données par la formule

$$\lambda = \lambda_i + \frac{6\dfrac{\partial\Delta(\lambda_i)}{\partial\lambda_i}}{24p - \dfrac{\partial^2\Delta(\lambda_i)}{\partial\lambda_i^2}},$$

où p désigne une des deux valeurs $p\left(\frac{\omega}{2}\right)$, $p\left(\frac{\omega}{2}+\omega'\right)$, et λ_i une quelconque des racines de l'équation $\Delta = 0$. Il est évident que, si l'on échange entre elles deux de ces racines, les valeurs de p ne changent pas ou se permutent entre elles. Ces valeurs s'obtiennent d'ailleurs en faisant $u = \frac{\omega}{2}$ dans l'équation

$$p(2u) = -2p(u) + \frac{p''^2(u)}{4p'^2(u)},$$

ce qui donne

$$p^4 - 4Jp(\omega)p^3 + \frac{I}{2}p^2 + [2J + Ip(\omega)]p + \frac{I^2}{16} + Jp(\omega) = 0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

cette équation admet les racines doubles

$$p\left(\frac{\omega}{2}\right) = p\left(\frac{3\omega}{2}\right), \quad p\left(\frac{\omega}{2} + \omega'\right) = p\left(\frac{3\omega}{2} + \omega'\right).$$

Les valeurs de ces racines sont données par cette formule :

$$p = p\left(\frac{\omega}{2}\right) \pm \sqrt{3p^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - \frac{1}{4}}.$$

En y changeant ω en ω', $\omega + \omega'$, on obtiendra les valeurs analogues qui correspondent aux deux autres groupes de points conjugués, et, par suite, les trois couples de surfaces lieux des droites joignant les extrémités des cordes d'un même groupe à celles de leurs conjuguées sont compris dans la formule

$$F + \left[\lambda_i + \frac{6\frac{\partial\Delta(\lambda_i)}{\partial\lambda_i}}{24\left(z \pm \sqrt{3z^2 - \frac{1}{4}}\right) - \frac{\partial^2\Delta(\lambda_i)}{\partial\lambda_i}}\right] f = 0,$$

où z est une quelconque des racines de l'équation cubique

$$4z^3 - Iz - J = 0.$$

Vu et approuvé :

Paris, le 6 mars 1880.

Le Doyen de la Faculté des Sciences.

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer :

Paris, le 8 mars 1880.

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

GRÉARD.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Exposer les propriétés de la fonction $p(u)$ de M. Weierstrass.

Vu et approuvé :

Paris, le 6 mars 1880.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer :

Paris, le 8 mars 1880.

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

GRÉARD.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ERRATA.

Page 11, ligne 9 en descendant, *au lieu de* l'axe des x, *lisez* l'axe des y.

Page 20, ligne 9 en descendant, *au lieu de* $X' = \varphi$, *lisez* $X' = \varphi'$.

Page 37, ligne 4 en descendant, *au lieu de* $\prod_{i=1}^{i=\mu+1} \frac{\Pi(t-t_i)}{\Theta^{\mu+1}\left(t-\frac{v}{\mu+1}\right)}$, *lisez* $\frac{\prod_{i=1}^{i=\mu+1} \Pi(t-t_i)}{\Theta^{\mu+1}\left(t-\frac{v}{\mu+1}\right)}$.

Page 42, ligne 10 en descendant, *au lieu de* $\sum_{i=1}^{i=\mu}$, *lisez* $\sum_{i=1}^{i=\mu} t_i$.

Page 55, ligne 4 en descendant, *après* deviennent alors, *ajoutez* en supposant $h = h' = 0$.

Page 60, ligne 12 en descendant, *au lieu de* par des points de contact, *lisez* par les points de contact.

Pages 66, 67, 68, *au lieu de* x_i, *lisez partout* φx_i.

Pages 92, lignes 11 et 12 en descendant, *au lieu de* z^2, *lisez* z_i.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE THÈSE.

Pages

INTRODUCTION..... 1

CHAPITRE I. — *Expression des coordonnées d'un point de la courbe à l'aide des fonctions elliptiques*..... 4

§ I. — Théorème fondamental..... 4
§ II. — Réciproque. Calculs relatifs aux points doubles..... 11
§ III. — Introduction des fonctions elliptiques. Invariabilité du module..... 18
§ IV. — Introduction de la fonction $p(u)$..... 21
§ V. — Expression de x et de y au moyen des fonctions Z..... 24
§ VI. — Transformations des expressions précédentes..... 27

CHAPITRE II. — *Intersection d'une courbe du premier genre et d'une courbe algébrique quelconque*..... 31

§ I. — Relations entre les mn arguments des points de rencontre..... 31
§ II. — Cas où la courbe d'ordre m contient des points doubles de la proposée... 34
§ III. — Problème relatif à certaines courbes d'ordre $n-3$..... 41
§ IV. — Conséquences géométriques..... 44

CHAPITRE III. — *Application aux courbes du quatrième degré ayant deux points doubles*..... 46

§ I. — Expression des coordonnées..... 46
§ II. — Intersection de la courbe avec une courbe quelconque..... 52
§ III. — Relations entre les arguments de quatre points en ligne droite..... 55

CHAPITRE IV. — *Application aux courbes du troisième ordre*..... 60

§ I. — Expression des coordonnées..... 60
§ II. — Relations entre les paramètres qui déterminent un même point..... 68
§ III. — Condition pour que trois points soient en ligne droite..... 71
§ IV. — Points d'inflexion. Résolution algébrique de l'équation du neuvième degré dont ils dépendent..... 77
§ V. — Points sextatiques..... 85
§ VI. — Polygones de Steiner. Notions sur certaines courbes de sixième classe.. 89

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Pages

CHAPITRE V. — *Applications à la courbe gauche intersection de deux surfaces du second ordre* 97

§ I. — Expression des coordonnées 97
§ II. — Relations entre les paramètres qui déterminent un même point 106
§ III. — Condition relative à quatre points situés dans un plan. Applications diverses 111

SECONDE THÈSE.

Propositions données par la Faculté 121

6027 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC