H.F. u. f. 166 (20)²

N° D'ORDRE

589.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. HAMY.

FACULTÉ des SCIENCES
BIBLIOTHÈQUE
PARIS

1re THÈSE. — ÉTUDE SUR LA FIGURE DES CORPS CÉLESTES.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 27 juin 1887, devant la Commission d'Examen.

MM. TISSERAND, *Président.*
APPELL, POINCARÉ, *Examinateurs.*

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1887

23689

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	HÉBERT, Professeur	Géologie.
PROFESSEURS HONORAIRES	PASTEUR.	
	DUCHARTRE	Botanique.
PROFESSEURS	DE LACAZE-DUTHIERS.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	HERMITE	Algèbre supérieure.
	TROOST	Chimie.
	FRIEDEL	Chimie organique.
	O. BONNET	Astronomie.
	DARBOUX	Géométrie supérieure.
	DEBRAY	Chimie.
	TISSERAND	Astronomie.
	LIPPMANN	Physique.
	HAUTEFEUILLE	Minéralogie.
	BOUTY	Physique.
	APPELL	Mécanique rationnelle.
	DUCLAUX	Chimie biologique.
	BOUSSINESQ	Mécanique physique et expérimentale.
	PICARD	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	POINCARÉ	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	YVES DELAGE	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BONNIER	Botanique.
	N	Physiologie.
PROFESSEURS ADJOINTS	WOLF	Physique céleste.
	DASTRE	Physiologie.
	CHATIN	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
SECRÉTAIRE	PHILIPPON.	

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
13061 Quai des Augustins, 55.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

A

MES PARENTS,

A

M. F. TISSERAND,

MEMBRE DE L'INSTITUT.

A

M. Le Contre-Amiral E. MOUCHEZ,

MEMBRE DE L'INSTITUT, DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS.

Hommage de reconnaissance,

M. HAMY.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

PREMIÈRE THÈSE.

ÉTUDE

SUR LA

FIGURE DES CORPS CÉLESTES.

Une des premières applications des lois de la gravitation universelle a été de rechercher la figure des corps célestes supposés fluides, en partant des équations générales de l'Hydrostatique. Ce problème se ramène à une question d'Analyse présentant des difficultés considérables. Les plus grands géomètres ne pouvant les surmonter, même en considérant le cas simple de l'homogénéité, ont dû renoncer à en obtenir la solution générale et se borner à des cas particuliers. Maclaurin, le premier, a démontré qu'une masse fluide homogène, tournant uniformément autour d'un axe et limitée par un ellipsoïde de révolution aplati suivant l'axe de rotation, peut se maintenir d'elle-même en équilibre. Jacobi a établi ensuite que l'équilibre relatif peut également exister lorsque la surface libre est un ellipsoïde à trois axes inégaux. Pendant longtemps ces deux figures d'équilibre furent les seules connues, mais récemment M. Poincaré est arrivé à des résultats de la plus haute importance. Après avoir démontré des propositions énoncées par MM. Tait et Thomson (1) et relatives aux formes annulaires d'équilibre, M. Poincaré a reconnu que le problème est susceptible d'une infinité de solutions en dehors des ellipsoïdes et des anneaux (2).

D'illustres savants, se plaçant à un point de vue plus spécial, ont étudié la question d'une manière approchée dans le but d'arriver à des connaissances

(1) *Bulletin astronomique*, t. II, p. 109 et 405.

(2) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1er semestre de 1885 et *Acta mathematica*.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

générales sur la constitution des planètes supposées hétérogènes. Dans leurs admirables travaux, Clairaut et Laplace se sont basés sur ce fait que les corps du système solaire sont très voisins de la forme sphérique, et les ont décomposés en couches de densités différentes toutes concentriques. Clairaut a admis que ces couches sont séparées par des ellipsoïdes de révolution peu aplatis; Laplace a démontré depuis que cette hypothèse est la seule possible. Ces grands maîtres ont établi en particulier des relations simples entre la configuration et la constitution interne de notre globe.

Plusieurs hypothèses ont été proposées sur la variation de la densité à l'intérieur de la Terre, mais aucune d'elles ne permet d'établir un accord suffisant entre la théorie et les nombres donnés par l'observation, et il est remarquable que toutes les lois envisagées jusqu'ici ont présenté le même écart. Dans un travail récent ([1]), M. Roche, discutant ces résultats, a cru pouvoir en conclure que la partie centrale de la Terre est actuellement à l'état solide. Partant de là, le savant professeur montre que la rotation de notre planète aurait été en s'accélérant dans la succession des siècles, et il déduit de diverses considérations que la Terre peut être assimilée à une masse formée de trois couches d'inégales densités. Ces principes posés, M. Roche arrive à faire coïncider la théorie et les résultats fournis par l'Astronomie et la Géodésie.

Dans la première Partie du présent travail, j'examine si les diverses couches dont sont composés les corps célestes, supposés fluides, peuvent être rigoureusement séparées par des ellipsoïdes. J'établis qu'une masse fluide en équilibre relatif, dans laquelle la densité croît ou décroît constamment de la surface au centre, ne peut être composée de couches homogènes séparées par des surfaces ellipsoïdales, sauf dans le cas où ces surfaces sont de révolution et où la rotation n'est pas uniforme.

Dans la seconde Partie, je fais l'application des équations de Clairaut à la Terre supposée composée de trois couches, afin de placer la méthode de l'illustre devancier de Laplace dans les conditions où M. Roche a formulé son hypothèse.

([1]) *Mémoire sur l'état intérieur du globe terrestre* (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Montpellier*, t. X).

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

PREMIÈRE PARTIE.

I.

Considérons une masse fluide dont toutes les parties s'attirent suivant la loi de Newton, formée de couches de densités différentes, séparées par des ellipsoïdes concentriques ayant leurs axes dirigés dans les mêmes directions et tournant d'un mouvement uniforme autour d'un de ces axes. En supposant les fluides parfaits et incompressibles et la pression extérieure constante, on peut trouver les conditions d'équilibre d'un pareil système.

Soient

$S_1, S_2, \ldots, S_n$ les divers ellipsoïdes comptés à partir de la surface extérieure;
$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ les densités respectives des couches comprises entre les surfaces $(S_1, S_2), (S_2, S_3), \ldots, S_n$;
$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ les différences $\rho_1 - 0, \rho_2 - \rho_1, \ldots, \rho_n - \rho_{n-1}$.

Je prends pour axe des x l'axe de rotation, et pour axes des y et des z les deux autres axes des ellipsoïdes.

Cherchons les conditions d'équilibre de la surface S_p, et, à cet effet, commençons par exprimer la force qui sollicite un point quelconque M de coordonnées α, β, γ placé sur cette surface et ayant pour masse l'unité. Cette force est la résultante de l'attraction de la masse totale sur ce point et de la force centrifuge provenant de la rotation.

Soient $V_1, V_2, \ldots, V_n$ les volumes renfermés dans les surfaces $S_1, S_2, \ldots, S_n$; les masses attirantes sont

$$(V_1 - V_2)\rho_1, \quad (V_2 - V_3)\rho_2, \quad \ldots, \quad V_n\rho_n$$

ou, ce qui revient au même,

$$V_1\rho_1, \quad V_2(\rho_2 - \rho_1), \quad V_3(\rho_3 - \rho_2), \quad \ldots, \quad V_n(\rho_n - \rho_{n-1}),$$

c'est-à-dire

$$V_1\eta_1, \quad V_2\eta_2, \quad V_3\eta_3, \quad \ldots, \quad V_n\eta_n.$$

Désignons, d'une façon générale, par X_i, Y_i, Z_i les composantes de l'attraction de la masse $V_i\eta_i$ sur le point M. Les composantes de l'attraction de la masse

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

entière sur le même point seront alors

$$(1)\quad \begin{cases} \mathcal{A}_p = \sum\limits_{r=1}^{r=p} X_r + \sum\limits_{q=p+1}^{q=n} X_q, \\ \mathcal{B}_p = \sum\limits_{r=1}^{r=p} Y_r + \sum\limits_{q=p+1}^{q=n} Y_q, \\ \mathcal{C}_p = \sum\limits_{r=1}^{r=p} Z_r + \sum\limits_{q=p+1}^{q=n} Z_q. \end{cases}$$

Les premiers signes Σ comprennent les composantes des attractions des ellipsoïdes ayant le point M à leur intérieur et les seconds celles des ellipsoïdes ne le renfermant pas.

La force agissant sur le point M, en appelant ω la vitesse de rotation, a donc pour composantes

$$(2)\quad \begin{cases} \mathcal{A}_p, \\ \mathcal{B}_p + \omega^2 \beta, \\ \mathcal{C}_p + \omega^2 \gamma. \end{cases}$$

La théorie de l'attraction des ellipsoïdes donne les expressions de X_r, Y_r, Z_r; X_q, Y_q, Z_q.

Représentons, d'une manière générale, par a_i, b_i, c_i les demi-axes de l'ellipsoïde S_i. On a

$$(3)\quad \begin{cases} X_r = -2\pi f \eta_r \dfrac{\alpha}{a_r^2} \displaystyle\int_0^\infty \dfrac{ds}{\left(1+\dfrac{s}{a_r^2}\right)\sqrt{\left(1+\dfrac{s}{a_r^2}\right)\left(1+\dfrac{s}{b_r^2}\right)\left(1+\dfrac{s}{c_r^2}\right)}}, \\ Y_r = -2\pi f \eta_r \dfrac{\beta}{b_r^2} \displaystyle\int_0^\infty \dfrac{ds}{\left(1+\dfrac{s}{b_r^2}\right)\sqrt{\left(1+\dfrac{s}{a_r^2}\right)\left(1+\dfrac{s}{b_r^2}\right)\left(1+\dfrac{s}{c_r^2}\right)}}, \\ Z_r = -2\pi f \eta_r \dfrac{\gamma}{c_r^2} \displaystyle\int_0^\infty \dfrac{ds}{\left(1+\dfrac{s}{c_r^2}\right)\sqrt{\left(1+\dfrac{s}{a_r^2}\right)\left(1+\dfrac{s}{b_r^2}\right)\left(1+\dfrac{s}{c_r^2}\right)}}. \end{cases}$$

Soit ν_q la racine positive de l'équation

$$(4)\quad \frac{\alpha^2}{a_q^2+\nu_q} + \frac{\beta^2}{b_q^2+\nu_q} + \frac{\gamma^2}{c_q^2+\nu_q} = 1;$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

on a de même

$$(5)\quad \begin{cases} X_q = -2\pi f \eta_q \dfrac{\alpha}{a_q^2} \displaystyle\int_{\nu_q}^{\infty} \dfrac{ds}{\left(1+\dfrac{s}{a_q^2}\right)\sqrt{\left(1+\dfrac{s}{a_q^2}\right)\left(1+\dfrac{s}{b_q^2}\right)\left(1+\dfrac{s}{c_q^2}\right)}}, \\[2ex] Y_q = -2\pi f \eta_q \dfrac{\beta}{b_q^2} \displaystyle\int_{\nu_q}^{\infty} \dfrac{ds}{\left(1+\dfrac{s}{b_q^2}\right)\sqrt{\left(1+\dfrac{s}{a_q^2}\right)\left(1+\dfrac{s}{b_q^2}\right)\left(1+\dfrac{s}{c_q^2}\right)}}, \\[2ex] Z_q = -2\pi f \eta_q \dfrac{\gamma}{c_q^2} \displaystyle\int_{\nu_q}^{\infty} \dfrac{ds}{\left(1+\dfrac{s}{c_q^2}\right)\sqrt{\left(1+\dfrac{s}{a_q^2}\right)\left(1+\dfrac{s}{b_q^2}\right)\left(1+\dfrac{s}{c_q^2}\right)}}. \end{cases}$$

De plus, le point M étant sur la surface S_p, ses coordonnées vérifient l'équation

$$(6)\quad \frac{\alpha^2}{a_p^2} + \frac{\beta^2}{b_p^2} + \frac{\gamma^2}{c_p^2} = 1.$$

La pression extérieure est constante, donc la surface S_1 est une surface de niveau. Dans ces conditions, on prouve en Hydrostatique que la densité est la même en tous les points d'une même surface de niveau. Il en résulte que toutes les autres surfaces S_2, S_3, ..., S_n sont aussi des surfaces de niveau. La force qui sollicite le point M doit par conséquent être normale à la surface S_p. En se reportant aux expressions (2) des composantes de cette force, on a

$$\frac{\mathcal{A}_p}{\dfrac{\alpha}{a_p^2}} = \frac{\mathcal{B}_p + \omega^2\beta}{\dfrac{\beta}{b_p^2}} = \frac{\mathcal{C}_p + \omega^2\gamma}{\dfrac{\gamma}{c_p^2}}.$$

Ces deux équations peuvent s'écrire

$$(7)\quad \begin{cases} \omega^2 = -\dfrac{\mathcal{B}_p}{\beta} + \dfrac{a_p^2}{b_p^2}\dfrac{\mathcal{A}_p}{\alpha}, \\[2ex] \omega^2 = -\dfrac{\mathcal{C}_p}{\gamma} + \dfrac{a_p^2}{c_p^2}\dfrac{\mathcal{A}_p}{\alpha}. \end{cases}$$

Remplaçant $\mathcal{A}_p$, $\mathcal{B}_p$, $\mathcal{C}_p$ par leurs valeurs déduites des expressions (1), (3), (5), il vient, en posant

$$(8)\quad \begin{cases} \Delta_r = \sqrt{\left(1+\dfrac{s}{a_r^2}\right)\left(1+\dfrac{s}{b_r^2}\right)\left(1+\dfrac{s}{c_r^2}\right)}, \\[2ex] \Delta_q = \sqrt{\left(1+\dfrac{s}{a_q^2}\right)\left(1+\dfrac{s}{b_q^2}\right)\left(1+\dfrac{s}{c_q^2}\right)}, \end{cases}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

pour la première équation (7),

$$\frac{\omega^2}{2\pi f} = \sum_{r=1}^{r=p} \frac{\eta_r}{b_r^2} \int_0^\infty \frac{ds}{\left(1+\frac{s}{b_r^2}\right)\Delta_r} - \sum_{r=1}^{r=p} \frac{a_p^2}{b_p^2}\frac{\eta_r}{a_r^2} \int_0^\infty \frac{ds}{\left(1+\frac{s}{a_r^2}\right)\Delta_r}$$

$$+ \sum_{q=p+1}^{q=n} \frac{\eta_q}{b_q^2} \int_{\nu_q}^\infty \frac{ds}{\left(1+\frac{s}{b_q^2}\right)\Delta_q} - \sum_{q=p+1}^{q=n} \frac{a_p^2}{b_p^2}\frac{\eta_q}{a_q^2} \int_{\nu_q}^\infty \frac{ds}{\left(1+\frac{s}{a_q^2}\right)\Delta_q}$$

ou bien

$$(\mathrm{A})\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\omega^2}{2\pi f} = \displaystyle\sum_{r=1}^{r=p} \eta_r \int_0^\infty \frac{\left[a_r^2+s-\frac{a_p^2}{b_p^2}(b_r^2+s)\right]ds}{(a_r^2+s)(b_r^2+s)\Delta_r} + \sum_{q=p+1}^{q=n} \eta_q \int_{\nu_q}^\infty \frac{\left[a_q^2+s-\frac{a_p^2}{b_p^2}(b_q^2+s)\right]ds}{(a_q^2+s)b_q^2+s)\Delta_q}, \\ \quad \text{de même} \\ \dfrac{\omega^2}{2\pi f} = \displaystyle\sum_{r=1}^{r=p} \eta_r \int_0^\infty \frac{\left[a_r^2+s-\frac{a_p^2}{c_p^2}(c_r^2+s)\right]ds}{(a_r^2+s)(c_r^2+s)\Delta_r} + \sum_{q=p+1}^{q=n} \eta_q \int_{\nu_q}^\infty \frac{\left[a_q^2+s-\frac{a_p^2}{c_p^2}(c_q^2+s)\right]ds}{(a_q^2+s)(c_q^2+s)\Delta_q}. \end{array}\right.$$

Telles sont les équations exprimant l'équilibre en un point quelconque de la surface S_p.

Les équations (4) et (6) peuvent s'écrire

$$\alpha^2 + \frac{a_q^2+\nu_q}{b_q^2+\nu_q}\beta^2 + \frac{a_q^2+\nu_q}{c_q^2+\nu_q}\gamma^2 - a_q^2 - \nu_q = 0,$$

$$\alpha^2 + \frac{a_p^2}{b_p^2}\beta^2 + \frac{a_p^2}{c_p^2}\gamma^2 - a_p^2 = 0.$$

On en tire par soustraction

$$(9) \qquad \left(\frac{a_p^2}{b_p^2} - \frac{a_q^2+\nu_q}{b_q^2+\nu_q}\right)\beta^2 + \left(\frac{a_p^2}{c_p^2} - \frac{a_q^2+\nu_q}{c_q^2+\nu_q}\right)\gamma^2 + a_q^2 + \nu_q - a_p^2 = 0.$$

ν_q est défini par cette équation (9); cette quantité dépend donc de β^2 et de γ^2. Ainsi les seconds membres des équations (A) sont des fonctions de β^2 et γ^2, ce qui ne doit pas être si l'équilibre est possible.

Exprimons, pour faire disparaître β^2 et γ^2 des seconds membres, que les dérivées de ces seconds membres prises par rapport à β^2 et à γ^2 sont nulles identi-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

quement :

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\beta^2}\sum_{p+1}^{n}\eta_q\int_{\nu_q}^{\infty}\frac{\left[a_q^2+s-\frac{a_p^2}{b_p^2}(b_q^2+s)\right]ds}{(a_q^2+s)(b_q^2+s)\Delta_q}\\ &=\sum_{p+1}^{n}\eta_q\left\{\frac{\partial}{\partial\nu_q}\int_{\nu_q}^{\infty}\frac{\left[a_q^2+s-\frac{a_p^2}{b_p^2}(b_q^2+s)\right]ds}{(a_q^2+s)(b_q^2+s)\Delta_q}\right\}\frac{\partial\nu_q}{\partial\beta^2}=0.\end{aligned}\right.$$

Mais on a

$$(11)\quad \frac{\partial}{\partial\nu_q}\int_{\nu_q}^{\infty}\frac{\left[a_q^2+s-\frac{a_p^2}{b_p^2}(b_q^2+s)\right]ds}{(a_q^2+s)(b_q^2+s)\Delta_q}=-\frac{a_q^2+\nu_q-\frac{a_p^2}{b_p^2}(b_q^2+\nu_q)}{(a_q^2+\nu_q)(b_q^2+\nu_q)\delta_q},$$

en posant

$$(12)\quad \delta_q=\sqrt{\left(1+\frac{\nu_q}{a_q^2}\right)\left(1+\frac{\nu_q}{b_q^2}\right)\left(1+\frac{\nu_q}{c_q^2}\right)}.$$

Pour avoir $\frac{\partial\nu_q}{\partial\beta^2}$, différentions les deux membres de l'équation (9) par rapport à β^2,

$$\frac{a_p^2}{b_p^2}-\frac{a_q^2+\nu_q}{b_q^2+\nu_q}+\left[-\beta^2\frac{b_q^2-a_q^2}{(b_q^2+\nu_q)^2}-\gamma^2\frac{c_q^2-a_q^2}{(c_q^2+\nu_q)^2}+1\right]\frac{\partial\nu_q}{\partial\beta^2}=0.$$

L'identité (10) devient, en y remplaçant $\frac{\partial\nu_q}{\partial\beta^2}$ par sa valeur,

$$(13)\quad 0=\sum_{p+1}^{n}\eta_q\frac{\left[a_q^2+\nu_q-\frac{a_p^2}{b_p^2}(b_q^2+\nu_q)\right]^2}{(a_q^2+\nu_q)(b_q^2+\nu_q)^2\delta_q\left[1-\beta^2\frac{b_q^2-a_q^2}{(b_q^2+\nu_q)^2}-\gamma^2\frac{c_q^2-a_q^2}{(c_q^2+\nu_q)^2}\right]}.$$

La fraction placée sous le signe $\sum_{p+1}^{n}$ est essentiellement positive. Il suffit pour le prouver de montrer que le facteur

$$1-\beta^2\frac{b_q^2-a_q^2}{(b_q^2+\nu_q)^2}-\gamma^2\frac{c_q^2-a_q^2}{(c_q^2+\nu_q)^2}$$

est positif. Or on peut l'écrire

$$\frac{a_q^2}{(b_q^2+\nu_q)^2}\beta^2+\frac{a_q^2}{(c_q^2+\nu_q)^2}\gamma^2+1-\frac{\beta^2}{b_q^2+\nu_q}\frac{b_q^2}{b_q^2+\nu_q}-\frac{\gamma^2}{c_q^2+\nu_q}\frac{c_q^2}{c_q^2+\nu_q}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

D'après l'équation (4),

$$1 - \frac{\beta^2}{b_q^2 + \nu_q} - \frac{\gamma^2}{c_q^2 + \nu_q} = \frac{\alpha^2}{a_q^2 + \nu_q} > 0.$$

La même inégalité aura lieu *a fortiori* si l'on diminue la valeur absolue des quantités négatives entrant dans le premier membre, en multipliant ces quantités par les facteurs $\frac{b_q^2}{b_q^2 + \nu_q}$ et $\frac{c_q^2}{c_q^2 + \nu_q}$ inférieurs à l'unité.

Ainsi le multiplicateur de η_q sous le signe Σ dans l'identité (13) ne peut pas être négatif.

Supposons, ce qui comprend le cas des corps célestes, que la densité croisse ou décroisse constamment de la surface au centre : alors toutes les quantités η sont de même signe, et l'identité (13) ne peut exister que si l'on a

$$a_q^2 + \nu_q - \frac{a_p^2}{b_p^2}(b_q^2 + \nu_q) = 0; \tag{14}$$

la même discussion de la deuxième équation (A) donnerait

$$a_q^2 + \nu_q - \frac{a_p^2}{c_p^2}(c_q^2 + \nu_q) = 0. \tag{15}$$

L'équation (9) donne alors

$$a_q^2 + \nu_q = a_p^2. \tag{16}$$

En portant cette valeur de $a_q^2 + \nu_q$ dans les relations (14) et (15), on en déduit

$$\begin{cases} b_q^2 + \nu_q = b_q^2, \\ c_q^2 + \nu_q = c_p^2. \end{cases} \tag{17}$$

Les équations (16) et (17) expriment que les surfaces S_p et S_q sont homofocales; comme p et q sont quelconques, tous les ellipsoïdes séparant les milieux différents doivent être homofocaux.

Il en résulte

$$\begin{cases} b_i^2 - a_i^2 = b_p^2 - a_p^2 = h, \\ c_i^2 - a_i^2 = c_p^2 - a_p^2 = k, \end{cases} \tag{18}$$

i et p étant quelconques entre 1 et n.

La première équation (A), en tenant compte des équations (18) dans les nu-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

mérateurs des fonctions placées sous les signes $\int$, devient

$$(19)\quad \frac{\omega^2}{2\pi f} = \sum_{r=1}^{r=p} \eta_r \frac{h}{b_p^2} \int_0^\infty \frac{s + a_r^2 - a_p^2}{(a_r^2+s)(b_r^2+s)\Delta_r}\, ds + \sum_{q=p+1}^{q=n} \eta_q \frac{h}{b_p^2} \int_{a_p^2 - a_q^2}^\infty \frac{s - (a_p^2 - a_q^2)}{(a_q^2+s)(b_q^2+s)\Delta_q}\, ds.$$

Le premier membre étant positif, le second doit l'être aussi. Or les intégrales qui y figurent sont essentiellement positives : il faut donc que h soit du signe des quantités η. La deuxième équation (A) conduirait à un résultat semblable pour k. Ainsi, lorsque la densité croît constamment de la surface au centre, tous les ellipsoïdes doivent être aplatis, et le contraire a lieu si la densité suit une loi inverse.

Cela posé, la première équation d'équilibre de la surface S_{p+1} peut s'écrire

$$(20)\quad \frac{\omega^2}{2\pi f} = \sum_{r=1}^{r=p} \eta_r \frac{h}{b_{p+1}^2} \int_0^\infty \frac{s + a_r^2 - a_{p+1}^2}{(a_r^2+s)(b_r^2+s)\Delta_r}\, ds + \sum_{q=p+1}^{q=n} \eta_q \frac{h}{b_{p+1}^2} \int_{a_{p+1}^2 - a_q^2}^\infty \frac{s - (a_{p+1}^2 - a_q^2)}{(a_q^2+s)(b_q^2+s)\Delta_q}\, ds,$$

les limites des signes Σ étant les mêmes que pour la surface S_p, ce qui est permis, car les fonctions placées sous ces signes sont égales pour $r = q = p + 1$.

Retranchons l'équation (20) de l'équation (19). La différence des premiers signes Σ est négative, car $b_{p+1}^2 < b_p^2$ et $a_{p+1}^2 < a_p^2$. La différence des seconds signes Σ est aussi négative, l'élément différentiel étant plus grand et la limite inférieure de l'intégrale plus petite dans l'équation (20).

Ainsi les équations d'équilibre des surfaces séparant les différents milieux sont incompatibles.

Il en résulte ce théorème [1] :

Une masse fluide en équilibre relatif, dans laquelle la densité croît ou décroît constamment de la surface au centre, ne peut être composée de couches homogènes séparées par des ellipsoïdes.

II.

Le théorème démontré dans le § I est général et comprend le cas où les ellipsoïdes, au lieu d'être à trois axes, sont de révolution. Cette question pourrait d'ailleurs être traitée directement après avoir effectué les intégrations dans les expressions des composantes de l'attraction.

---

[1] J'avais primitivement établi ce théorème à l'aide des formules ordinaires de l'attraction. Sur le conseil de M. Tisserand, j'ai repris la démonstration en partant des expressions de Dirichlet; ces formules conduisent plus simplement au résultat.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

Dans l'hypothèse des couches de révolution, il y a lieu d'étudier la question suivante :

Étant donnée une masse fluide en équilibre, composée de couches homogènes dont la densité croît de la surface au centre, est-il possible de trouver une loi de rotation continue, telle que les surfaces séparant les milieux différents soient des ellipsoïdes de révolution autour de l'axe de rotation et dont tous les points tournent avec la même vitesse angulaire ?

Désignons par ω_p la vitesse angulaire de rotation des points placés sur la surface S_p. Les conditions d'équilibre de cette surface s'obtiennent exactement comme si la rotation était uniforme dans toute la masse fluide; d'où il suit que l'on doit avoir, en adoptant les notations du § I et faisant $b = c$ dans les équations (A),

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\omega_p^2}{2\pi f} &= \sum_{r=1}^{r=p} \eta_r \int_0^\infty \frac{\left[a_r^2 + s - \frac{a_p^2}{b_p^2}(b_r^2+s)\right] ds}{(a_r^2+s)(b_r^2+s)\sqrt{\left(1+\frac{s}{a_r^2}\right)\left(1+\frac{s}{b_r^2}\right)^2}} \\ &+ \sum_{q=p+1}^{q=n} \eta_q \int_{\nu_q}^\infty \frac{\left[a_q^2 + s - \frac{a_p^2}{b_p^2}(b_q^2+s)\right] ds}{(a_q^2+s)(b_q^2+s)\sqrt{\left(1+\frac{s}{a_q^2}\right)\left(1+\frac{s}{b_q^2}\right)^2}}. \end{aligned}\right.$$

On démontrerait, comme au § I, que, pour que l'équilibre ait lieu en tous les points de chacune des surfaces S, ces surfaces doivent être homofocales. Il en résulte, comme on l'a vu,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \nu_q &= a_p^2 - a_q^2, \\ b_i^2 - a_i^2 &= b_p^2 - a_p^2, \end{aligned}\right.$$

où i et p sont des entiers quelconques compris entre 1 et n.

De plus, la densité croissant de la surface au centre, on a vu que l'axe dirigé suivant l'axe de rotation dans chacune des surfaces S était nécessairement le plus petit.

La dernière des relations (2), en posant

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} b_i^2 &= a_i^2(1+\lambda_i^2), \\ b_p^2 &= a_p^2(1+\lambda_p^2), \end{aligned}\right.$$

devient

$$(4)\quad a_i^2\lambda_i^2 = a_p^2\lambda_p^2.$$

Les intégrations à effectuer dans le second membre de l'équation (1) se ra-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

mènent aisément à celles de fractions rationnelles. Les calculs faits, et après y avoir remplacé les quantités b par les quantités λ en vertu des relations (3), cette équation devient

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\omega_p^2}{2\pi f} = \frac{3+\lambda_p^2}{1+\lambda_p^2}\sum_{r=1}^{r=p}\eta_r\left(\frac{1+\lambda_r^2}{\lambda_r^3}\operatorname{arc\,tang}\lambda_r - \frac{1}{\lambda_r^2} - \frac{2}{3+\lambda_p^2}\right) \\ + \left(\frac{3+\lambda_p^2}{1+\lambda_p^2}\operatorname{arc\,tang}\lambda_p - \frac{3\lambda_p}{1+\lambda_p^2}\right)\sum_{q=p+1}^{q=n}\eta_q\frac{1+\lambda_q^2}{\lambda_q^3}. \end{aligned}\right.$$

En faisant successivement $p = 1, 2, \ldots, n$ dans l'équation (5), on obtient n équations pour déterminer $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Ce sont des conditions nécessaires de l'équilibre de la masse, mais non suffisantes. Il faut encore déterminer la loi de variation de la vitesse de rotation à l'intérieur des couches homogènes. Il est facile de trouver cette loi lorsque les points animés de la même rotation se trouvent sur des ellipsoïdes de révolution concentriques à la masse fluide. D'abord ces ellipsoïdes doivent être homofocaux aux surfaces $S_1, S_2, \ldots, S_n$; car l'un quelconque d'entre eux divise la couche homogène à l'intérieur de laquelle il se trouve en deux autres, et le raisonnement qui a été fait pour établir que les ellipsoïdes de séparation des couches sont homofocaux ne suppose nullement que toutes ces couches aient des densités différentes.

La même remarque conduit immédiatement à l'expression de la rotation. Considérons, par exemple, la couche homogène comprise entre les surfaces S_p et S_{p+1}. Soit S l'ellipsoïde homofocal aux surfaces S_p et S_{p+1} passant par tous les points de la couche dont la rotation est Ω; posons, comme plus haut, pour cette surface S,

$$b^2 = a^2(1+\lambda^2).$$

L'équation (5) donne

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\Omega^2}{2\pi f} = \frac{3+\lambda^2}{1+\lambda^2}\sum_{r=1}^{r=p}\eta_r\left(\frac{1+\lambda_r^2}{\lambda_r^3}\operatorname{arc\,tang}\lambda_r - \frac{1}{\lambda_r^2} - \frac{2}{3+\lambda^2}\right) \\ + \left(\frac{3+\lambda^2}{1+\lambda^2}\operatorname{arc\,tang}\lambda - \frac{3\lambda}{1+\lambda^2}\right)\sum_{q=p+1}^{q=n}\eta_q\frac{1+\lambda_q^2}{\lambda_q^3}. \end{aligned}\right.$$

Il est à remarquer qu'il n'y a pas de terme provenant du dédoublement de la couche homogène à ajouter à ceux compris sous les signes Σ, la différence $\eta = \rho_p - \rho_p$ étant identiquement nulle.

Lorsque l'ellipsoïde S varie d'une manière continue entre les surfaces S_p et S_{p+1}, λ varie d'une manière continue entre λ_p et λ_{p+1} et, par suite, Ω entre ω_p et ω_{p+1}.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

Si la rotation intérieure suit la loi définie par les équations (5) et (7), la masse fluide est en équilibre, sauf, comme nous allons le voir, dans le cas où la rotation extérieure dépasse une certaine limite.

L'équation exprimant l'équilibre de la surface S_1 s'obtient en faisant $p = 1$ dans l'équation (5); les termes généraux des deux signes Σ étant égaux pour $r = q = p = 1$, on a

$$\frac{\omega_1^2}{2\pi f} = \left(\frac{3+\lambda_1^2}{1+\lambda_1^2}\operatorname{arc\,tang}\lambda_1 - \frac{3\lambda_1}{1+\lambda_1^2}\right)\sum_{q=1}^{q=n}\eta_q\frac{1+\lambda_q^2}{\lambda_q^3}.$$

Soient V_p le volume de l'ellipsoïde S_p, V_i celui de l'ellipsoïde S_i. On a

$$V_p = \tfrac{4}{3}\pi a_p^3(1+\lambda_p^2),$$
$$V_i = \tfrac{4}{3}\pi a_i^3(1+\lambda_i^2).$$

Éliminons a_p et a_i entre ces deux équations et l'équation (4) qui exprime que les surfaces S_i et S_p sont homofocales; il vient

$$V_p\frac{\lambda_p^3}{1+\lambda_p^2} = V_i\frac{\lambda_i^3}{1+\lambda_i^2}. \tag{8}$$

Faisons $i = q$ et $p = 1$ dans cette équation et remplaçons $\frac{1+\lambda_q^2}{\lambda_q^3}$ par la valeur qu'on en déduit dans l'expression de $\frac{\omega_1^2}{2\pi f}$; nous trouverons

$$\frac{\omega_1^2}{2\pi f} = \left(\frac{3+\lambda_1^2}{\lambda_1^3}\operatorname{arc\,tang}\lambda_1 - \frac{3}{\lambda_1^2}\right)\sum_{q=1}^{q=n}\frac{\eta_q V_q}{V_1}$$

ou

$$\frac{\omega_1^2}{2\pi f} = \left(\frac{3+\lambda_1^2}{\lambda_1^3}\operatorname{arc\,tang}\lambda_1 - \frac{3}{\lambda_1^2}\right)\Delta, \tag{9}$$

Δ désignant la densité moyenne de la masse entière.

Cette équation exprime l'équilibre d'une masse fluide homogène, de densité Δ, tournant uniformément avec la vitesse angulaire ω_1 quand la surface extérieure est un ellipsoïde de révolution aplati.

On sait que la fonction $\frac{3+x^2}{x^3}\operatorname{arc\,tang}x - \frac{3}{x^2}$ va en croissant depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 2,5293\ldots$, et décroît quand x dépasse cette valeur. Le maximum est égal à $0,22467\ldots$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

Donc si

$$\frac{\omega_1^2}{2\pi f\Delta} > 0,22467\ldots,$$

le problème n'est pas possible,

Pour $x = 0$ et $x = \infty$, la fonction est nulle; donc, si

$$0 < \frac{\omega_1^2}{2\pi f\Delta} < 0,22467\ldots,$$

l'équation (9) donnera deux valeurs réelles de λ_1.

La relation

$$\frac{V_1}{V_i}\,\frac{\lambda_1^3}{1+\lambda_1^2} = \frac{\lambda_i^3}{1+\lambda_i^2} = \frac{1}{\dfrac{1}{\lambda_i^3}+\dfrac{1}{\lambda_i}} \tag{10}$$

donnera alors, pour chaque valeur de λ_1, une seule valeur de λ_i.

Ainsi, pour une rotation extérieure déterminée, il y a deux systèmes de valeurs pour les quantités λ_i. Ces deux systèmes donneront chacun une valeur pour ω_p^2. On aurait, d'une façon tout à fait semblable, deux valeurs pour la rotation Ω^2.

Donc, quand la rotation extérieure est inférieure à une certaine limite, il y a deux figures d'équilibre.

Propriété des rotations.

La rotation des points placés sur un même ellipsoïde est d'autant plus grande que cette surface est plus voisine du centre.

Ω ayant pour limite ω_p et ω_{p+1} quand la surface S se confond avec S_p ou S_{p+1}, il suffit de prouver que Ω croît constamment quand S passe de S_p à S_{p+1}. On a

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\Omega^2}{2\pi f} &= \frac{3+\lambda^2}{1+\lambda^2}\sum_{r=1}^{r=p}\eta_r\left(\frac{1+\lambda_r^2}{\lambda_r^3}\operatorname{arc\,tang}\lambda_r - \frac{1}{\lambda_r^2} - \frac{2}{3+\lambda^2}\right)\\ &\quad+\left(\frac{3+\lambda^2}{1+\lambda^2}\operatorname{arc\,tang}\lambda - \frac{3\lambda}{1+\lambda^2}\right)\sum_{q=p+1}^{q=n}\eta_q\frac{1+\lambda_q^2}{\lambda_q^3};\end{aligned}\right. \tag{11}$$

λ est la racine positive de l'équation

$$\frac{V_1}{V}\,\frac{\lambda_1^3}{1+\lambda_1^2} = \frac{1}{\dfrac{1}{\lambda^3}+\dfrac{1}{\lambda}}. \tag{12}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

Quand la surface S passe de S_p à S_{p+1}, elle se rapproche du centre; donc le volume V qu'elle renferme diminue. Il en résulte que le premier membre de l'équation (12) augmente. Le second devant croître aussi, il faut que λ grandisse. Ainsi λ augmente constamment quand S passe de S_p à S_{p+1}.

La première partie du second membre de l'équation (11) peut s'écrire

$$\left(1+\frac{2}{1+\lambda^2}\right)\sum_1^p \eta_r\left(\frac{1+\lambda_r^2}{\lambda_r^3}\operatorname{arc\,tang}\lambda_r-\frac{1}{\lambda_r^2}\right)-\frac{2}{1+\lambda^2}\sum_1^p \eta_r$$

ou bien

$$\sum_1^p \eta_r\left(\frac{1+\lambda_r^2}{\lambda_r^3}\operatorname{arc\,tang}\lambda_r-\frac{1}{\lambda_r^2}\right)-\frac{2}{1+\lambda^2}\sum_1^p \eta_r\frac{1+\lambda_r^2}{\lambda_r^3}(\lambda_r-\operatorname{arc\,tang}\lambda_r).$$

Cette expression croît évidemment avec λ.

L'expression

$$\frac{3+\lambda^2}{1+\lambda^2}\operatorname{arc\,tang}\lambda-\frac{3\lambda}{1+\lambda^2} \tag{13}$$

a pour dérivée, par rapport à λ,

$$\frac{4\lambda}{(1+\lambda^2)^2}(\lambda-\operatorname{arc\,tang}\lambda).$$

Cette dérivée est positive; la fonction (13) est donc croissante.

Ainsi, les deux parties du second membre de l'équation (11) croissent quand la surface S se rapproche du centre, et Ω^2 augmente.

Cette propriété peut être déduite du raisonnement qui a été fait au § I pour démontrer que les équations (19) et (20) sont incompatibles.

III.

On peut regarder ω_p comme fonction de ω_1, puisque les quantités λ dépendent de la rotation superficielle. Quand celle-ci varie, il en est donc de même de ω_p.

Nous allons étudier les variations de cette fonction.

Avant cela, il est utile de modifier la forme des expressions placées sous les signes Σ dans l'équation qui donne ω_p^2.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

On a

$$\frac{3+\lambda_p^2}{1+\lambda_p^2}\sum_1^p \eta_r\left(\frac{1+\lambda_r^2}{\lambda_r^3}\operatorname{arc\,tang}\lambda_r-\frac{1}{\lambda_r^2}-\frac{2}{3+\lambda_p^2}\right)$$

$$=\sum_1^p \eta_r\left[\frac{3+\lambda_p^2}{1+\lambda_p^2}\left(\frac{1+\lambda_r^2}{\lambda_r^3}\operatorname{arc\,tang}\lambda_r-\frac{1}{\lambda_r^2}\right)-\frac{1}{1+\lambda_p^2}\right];$$

mais

$$\frac{3+\lambda_p^2}{1+\lambda_p^2}\left(\frac{1+\lambda_r^2}{\lambda_r^3}\operatorname{arc\,tang}\lambda_r-\frac{1}{\lambda_r^2}\right)-\frac{2}{1+\lambda_p^2}=\left(1+\frac{2}{1+\lambda_p^2}\right)\left(\frac{1+\lambda_r^2}{\lambda_r^3}\operatorname{arc\,tang}\lambda_r-\frac{1}{\lambda_r^2}-1\right)+1$$

$$=\frac{3+\lambda_p^2}{1+\lambda_p^2}\,\frac{1+\lambda_r^2}{\lambda_r^3}(\operatorname{arc\,tang}\lambda_r-\lambda_r)+1.$$

Les surfaces étant homofocales, on a vu que

$$\frac{1+\lambda_r^2}{\lambda_r^3}=\frac{V_r}{V_p}\,\frac{1+\lambda_p^2}{\lambda_p^3},$$

donc

$$\frac{3+\lambda_p^2}{1+\lambda_p^2}\left(\frac{1+\lambda_r^2}{\lambda_r^3}\operatorname{arc\,tang}\lambda_r-\frac{1}{\lambda_r^2}\right)-\frac{2}{1+\lambda_p^2}=\frac{V_r}{V_p}\,\frac{3+\lambda_p^2}{\lambda_p^3}(\operatorname{arc\,tang}\lambda_r-\lambda_r)+1;$$

par suite

$$\frac{3+\lambda_p^2}{1+\lambda_p^2}\sum_1^p \eta_r\left(\frac{1+\lambda_r^2}{\lambda_r^3}\operatorname{arc\,tang}\lambda_r-\frac{1}{\lambda_r^2}-\frac{2}{3+\lambda_p^2}\right)=\sum_1^p \eta_r\,\frac{V_r}{V_p}\,\frac{3+\lambda_p^2}{\lambda_p^3}(\operatorname{arc\,tang}\lambda_r-\lambda_r)+\sum_1^p \eta_r.$$

On trouve, de même,

$$\left(\frac{3+\lambda_p^2}{1+\lambda_p^2}\operatorname{arc\,tang}\lambda_p-\frac{3\lambda_p}{1+\lambda_p^2}\right)\sum_{p+1}^n \eta_q\,\frac{1+\lambda_q^2}{\lambda_q^3}=\frac{3+\lambda_p^2}{\lambda_p^3}(\operatorname{arc\,tang}\lambda_p-\lambda_p)\sum_{p+1}^n \eta_q\,\frac{V_q}{V_p}+\sum_{p+1}^n \eta_q\,\frac{V_q}{V_p}.$$

On a donc

$$\frac{\omega_p^2}{2\pi f}=\sum_{r=1}^{r=p}\eta_r+\sum_{q=p+1}^{q=n}\eta_q\,\frac{V_q}{V_p}+\sum_{r=1}^{r=p}\eta_r\,\frac{V_r}{V_p}\,\frac{3+\lambda_p^2}{\lambda_p^3}(\operatorname{arc\,tang}\lambda_r-\lambda_r)$$

$$+\sum_{q=p+1}^{q=n}\eta_q\,\frac{V_q}{V_p}\,\frac{3+\lambda_p^2}{\lambda_p^3}(\operatorname{arc\,tang}\lambda_p-\lambda_p)$$

ou bien

$$(1)\qquad \frac{1}{2\pi f}\,\omega_p^2=A_p-\sum_{r=1}^{r=p}B_r\,\frac{3+\lambda_p^2}{\lambda_p^3}(\lambda_r-\operatorname{arc\,tang}\lambda_r),$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

A_p et B_r désignant des constantes positives. Ce sont des constantes, car elles ne dépendent que des densités et des volumes, lesquels sont constants à cause de l'incompressibilité des fluides.

Considérons la fonction

$$(2) \qquad \frac{3+\lambda_p^2}{\lambda_p^3}(\lambda_r - \operatorname{arc\,tang}\lambda_r),$$

où λ_r est défini par la relation

$$(3) \qquad V_r \frac{\lambda_r^3}{1+\lambda_r^2} = V_p \frac{\lambda_p^3}{1+\lambda_p^2},$$

et prenons-en la dérivée par rapport à λ_p. On obtient

$$(4) \qquad -\frac{\lambda_p^2+9}{\lambda_p^4}(\lambda_r - \operatorname{arc\,tang}\lambda_r) + \frac{3+\lambda_p^2}{\lambda_p^3}\,\frac{\lambda_r^2}{1+\lambda_r^2}\,\frac{d\lambda_r}{d\lambda_p};$$

l'équation (3) différentiée donne

$$\frac{\lambda_r^2}{1+\lambda_r^2}\,\frac{d\lambda_r}{d\lambda_p} = \frac{V_p}{V_r}\,\frac{\lambda_p^2(3+\lambda_p^2)}{(1+\lambda_p^2)^2}\,\frac{1+\lambda_r^2}{3+\lambda_r^2}$$

ou, en tenant compte de l'équation (3),

$$\frac{\lambda_r^2}{1+\lambda_r^2}\,\frac{d\lambda_r}{d\lambda_p} = \frac{3+\lambda_p^2}{1+\lambda_p^2}\,\frac{\lambda_r^3}{3+\lambda_r^2}\,\frac{1}{\lambda_p}.$$

Remplaçons $\frac{d\lambda_r}{d\lambda_p}$ par sa valeur dans l'expression (4),

$$-\frac{\lambda_p^2+9}{\lambda_p^4}(\lambda_r - \operatorname{arc\,tang}\lambda_r) + \frac{1}{\lambda_p^4}\,\frac{(3+\lambda_p^2)^2}{1+\lambda_p^2}\,\frac{\lambda_r^3}{3+\lambda_r^2}.$$

On tire de cette dérivée, égalée à zéro,

$$(5) \qquad \frac{3+\lambda_r^2}{\lambda_r^3}(\lambda_r - \operatorname{arc\,tang}\lambda_r) = \frac{(3+\lambda_p^2)^2}{(1+\lambda_p^2)(\lambda_p^2+9)}.$$

Posons

$$(6) \qquad \frac{3+\lambda_r^2}{\lambda_r^3}(\lambda_r - \operatorname{arc\,tang}\lambda_r) = a,$$

et, pour faciliter l'écriture, remplaçons λ_p^2 par λ^2. On tire alors de l'équation (5)

$$\lambda^4(1-a) + 2\lambda^2(3-5a) + 9(1-a) = 0$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

ou

$$\lambda^2 = \frac{5a - 3 \pm \sqrt{4a(4a-3)}}{1-a}.$$

Pour que les valeurs de λ^2 soient réelles et positives, il faut et il suffit que l'on ait à la fois, a ne pouvant pas être négatif, comme nous le verrons, et le produit des racines étant positif,

$$(7) \qquad \begin{cases} a > \frac{3}{4}, \\ \dfrac{5a-3}{1-a} > 0. \end{cases}$$

On tire de la relation (6)

$$1 - a = \frac{3 + \lambda_r^2}{\lambda_r^3} \operatorname{arc\,tang} \lambda_r - \frac{3}{\lambda_r^2}.$$

Nous avons rencontré plus haut [1] la fonction contenue dans le second membre; elle a un maximum et pas de minimum; elle est nulle pour $\lambda_r = 0$ et $\lambda_r = \infty$: donc

$\lambda_r = 0,$	$1 - a = 0,$	$a = 1,$
$\lambda_r = 2,5293\ldots,$	$1 - a$ maximum $= 0,2242\ldots,$	a minimum $= 0,7758\ldots,$
$\lambda_r = \infty,$	$1 - a = 0,$	$a = 1.$

Ainsi a est toujours compris entre 1 et 0,7758. Les inégalités (7) sont vérifiées; par suite, il existe pour toute valeur positive de λ_r deux valeurs positives de λ^2.

La somme des racines de l'équation en λ^2 est $2\left(\frac{2}{1-a} - 5\right)$. Elle diminue ou augmente en même temps que a. Le produit des racines est constant et égal à 9. Soient λ'^2 la plus grande racine, λ''^2 la plus petite. Il résulte de ce qui précède que λ'^2 va en décroissant, est minimum et va en croissant en même temps que a; le contraire a lieu pour λ''^2.

On en déduit que λ'^2 va en décroissant quand λ_r croît de 0 à 2,5293... et en croissant ensuite. Le contraire arrive pour λ''^2.

En prenant λ_r pour abscisse et λ pour ordonnée, il est dès lors aisé de représenter graphiquement ces racines. La courbe BMC figure les variations de λ' et la courbe OM'D celles de λ''.

L'un des points M, M' se trouve sur la droite $\lambda = \lambda_r$; car, pour $\lambda_p = \lambda_r$, la fonction (2) se réduit à a, dont le minimum a lieu pour $\lambda_r = 2,5293\ldots$.

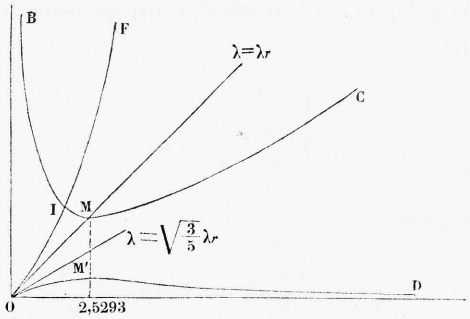
---

[1] Équation (9) du § II.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

La droite $\lambda = \lambda_r$ ne doit rencontrer la courbe qu'en un point autre que o et ∞, puisque a n'a qu'un minimum. On en déduit : 1° que la droite $\lambda = \lambda_r$ ne passe pas par le point M′, car autrement la condition précédente ne serait pas rem-

Fig. 1.



plie, le coefficient angulaire de la tangente à l'origine et la courbe OM′D étant $\sqrt{\frac{3}{5}} < 1$; 2° la droite $\lambda = \lambda_r$ passe par le point M, et la portion MC de la courbe est entièrement située au-dessous de cette droite.

Construisons maintenant, pour les valeurs positives de λ_r, la courbe représentée par l'équation (3),

$$V_p \frac{\lambda^3}{1+\lambda^2} = V_r \frac{\lambda_r^3}{1+\lambda_r^2}.$$

On en déduit

$$\frac{1}{\lambda^3} + \frac{1}{\lambda} = \frac{V_p}{V_r}\left(\frac{1}{\lambda_r} + \frac{1}{\lambda_r^3}\right).$$

Cette équation n'a qu'une racine positive qui augmente avec λ_r.

La surface S_p étant à l'intérieur de la surface S_r, on a

$$\frac{V_p}{V_r} < 1;$$

il en résulte que

$$\lambda > \lambda_r;$$

la courbe est donc entièrement au-dessus de la droite $\lambda = \lambda_r$.

Cette courbe rencontre donc la première en un point et un seul, et, par suite, la fonction (2) n'a qu'un minimum et pas de maximum.

Reste à savoir quand les lettres p et r prennent toutes les valeurs dont elles sont susceptibles, quelle est celle de toutes les fonctions obtenues qui passe la première par son minimum, et celle qui y passe la dernière quand ω_1 croît à partir de zéro.

L'équation de la courbe MB ne contient ni V_p ni V_r; cette courbe est donc constante quelles que soient les lettres p et r.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

L'ordonnée de la courbe OF, et par suite celle du point I, est d'autant plus grande que $\frac{V_p}{V_r}$ est plus petit, c'est-à-dire que r diffère plus de p, que, pour le moment, nous supposons constant. Quand r varie de 1 à p, et que λ_p croît à partir de zéro, la première fonction qui passe par son minimum est donc

$$\frac{3+\lambda_p^2}{\lambda_p^3}(\lambda_p - \text{arc tang}\,\lambda_p) \tag{8}$$

et la dernière

$$\frac{3+\lambda_p^2}{\lambda_p^3}(\lambda_1 - \text{arc tang}\,\lambda_1). \tag{9}$$

Donnons maintenant à p des valeurs comprises entre 1 et n.

La fonction (8) est minimum pour $\lambda_p = 2{,}5293\ldots$; la valeur correspondante de λ_1 s'obtient par l'équation

$$\frac{1}{\lambda_1^3} + \frac{1}{\lambda_1} = \frac{V_1}{V_p}\left(\frac{1}{\lambda_p^3} + \frac{1}{\lambda_p}\right).$$

Elle est d'autant plus petite que V_p est plus petit, c'est-à-dire que p est plus grand.

Ainsi, de toutes les fonctions (8), c'est la fonction

$$\frac{3+\lambda_n^2}{\lambda_n^3}(\lambda_n - \text{arc tang}\,\lambda_n)$$

qui passe la première par son minimum, quand les quantités λ croissent à partir de zéro.

Les valeurs de λ_p et λ_1, qui rendent la fonction (9) minimum, sont égales aux coordonnées du point de rencontre I de la courbe MB et de la courbe OF, ayant pour équation

$$V_p\,\frac{1+\lambda_p^2}{\lambda_p^3} = V_1\,\frac{1+\lambda_1^2}{\lambda_1^3}.$$

L'abscisse λ_1 du point I est d'autant plus grande que ce point est plus rapproché du point M, c'est-à-dire que p est plus voisin de 1. De toutes les fonctions (9), c'est donc la fonction

$$\frac{3+\lambda_1^2}{\lambda_1^3}(\lambda_1 - \text{arc tang}\,\lambda_1)$$

qui passe la dernière par son minimum quand les quantités λ croissent à partir de zéro.

Reportons-nous maintenant à l'expression de ω_p^2.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

Tant qu'aucune des fonctions

$$\frac{3+\lambda_p^2}{\lambda_p^3}(\lambda_r - \operatorname{arc\,tang}\lambda_r),$$

où r est compris entre 1 et p, n'aura atteint son minimum, ω_p ira certainement en augmentant, et, quand toutes ces fonctions auront dépassé leur minimum, ω_p ira certainement en décroissant.

Donc, tant que $\lambda_p < 2,5293, \ldots$, ω_p ira en croissant; ω_p se mettra à décroître, avant que λ_1 ait atteint la valeur $2,5293, \ldots$ pour laquelle ω_1 est maximum, et d'autant plus avant que p est plus voisin de n.

Il résulte aussi de ce qui précède que ω_p croît avec la rotation extérieure tant que λ_p demeure inférieur à $2,5293, \ldots$, et décroît avec la rotation extérieure quand celle-ci a dépassé son maximum.

Il y a un intervalle où les variations de ω_p paraissent dépendre de la constitution de la masse fluide.

Cette discussion ne suppose pas que la surface S_p sépare des milieux de densités différentes. L'étude des rotations Ω est donc toute semblable et conduit à des conclusions analogues.

Application aux planètes.

L'équation d'équilibre de la surface extérieure dans le problème que nous avons traité dans les §§ II et III exprime, comme nous l'avons vu, l'équilibre d'une masse fluide homogène ayant pour densité la densité moyenne de la masse et tournant uniformément avec la vitesse angulaire extérieure de cette masse.

Cette propriété montre de suite que la théorie précédente ne peut s'appliquer actuellement aux planètes, pour lesquelles l'hypothèse de l'homogénéité est en pleine contradiction avec les faits observés. Au moment de leur formation, alors qu'elles étaient fluides, la rotation n'était peut-être pas uniforme, et il n'est pas impossible qu'elles aient pris une pareille forme d'équilibre. Mais cet état n'a pu être que transitoire, des causes diverses, le frottement et le refroidissement, ayant dû progressivement uniformiser la vitesse de rotation aux différentes profondeurs.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

SECONDE PARTIE.

I.

Lorsque la rotation est nulle, une masse fluide composée de couches concentriques, dont la densité va en croissant constamment de la surface au centre, est en équilibre lorsque les surfaces de séparation des milieux différents sont des sphères. Si, au lieu d'être nulle, la rotation est très petite, les surfaces de séparation sont aplaties, mais voisines de la forme sphérique. Nous allons chercher si ces surfaces peuvent être assimilées d'une façon approchée à des ellipsoïdes peu aplatis. A cause de la faiblesse des aplatissements de ces ellipsoïdes, nous négligerons leurs carrés et produits.

Nous ferons usage des notations employées dans le § I de la première Partie.

Reprenons les équations (A) établies dans la première Partie

$$
(\mathrm{A})\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\omega^2}{2\pi f} &= \sum_{r=1}^{r=p} \eta_r \int_0^\infty \frac{\left[a_r^2 + s - \frac{a_p^2}{b_p^2}(b_r^2+s)\right] ds}{(a_r^2+s)(b_r^2+s)\sqrt{\left(1+\frac{s}{a_r^2}\right)\left(1+\frac{s}{b_r^2}\right)\left(1+\frac{s}{c_r^2}\right)}} \\
&\quad + \sum_{q=p+1}^{q=n} \eta_q \int_{\nu_q}^\infty \frac{\left[a_q^2 + s - \frac{a_p^2}{b_p^2}(b_q^2+s)\right] ds}{(a_q^2+s)(b_q^2+s)\sqrt{\left(1+\frac{s}{a_q^2}\right)\left(1+\frac{s}{b_q^2}\right)\left(1+\frac{s}{c_q^2}\right)}}, \\
\frac{\omega^2}{2\pi f} &= \sum_{r=1}^{r=p} \eta_r \int_0^\infty \frac{\left[a_r^2 + s - \frac{a_p^2}{c_p^2}(c_r^2+s)\right] ds}{(a_r^2+s)(c_r^2+s)\sqrt{\left(1+\frac{s}{a_r^2}\right)\left(1+\frac{s}{b_r^2}\right)\left(1+\frac{s}{c_r^2}\right)}} \\
&\quad + \sum_{q=p+1}^{q=n} \eta_q \int_{\nu_q}^\infty \frac{\left[a_q^2 + s - \frac{a_p^2}{c_p^2}(c_q^2+s)\right] ds}{(a_q^2+s)(c_q^2+s)\sqrt{\left(1+\frac{s}{a_q^2}\right)\left(1+\frac{s}{b_q^2}\right)\left(1+\frac{s}{c_q^2}\right)}},
\end{aligned}
\right.
$$

où ν_q est la racine positive de l'équation

$$
(1)\qquad \left(\frac{a_p^2}{b_p^2} - \frac{a_q^2+\nu_q}{b_q^2+\nu_q}\right)\beta^2 + \left(\frac{a_p^2}{c_p^2} - \frac{a_q^2+\nu_q}{c_q^2+\nu_q}\right)\gamma^2 + a_q^2 + \nu_q - a_p^2 = 0.
$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

Le numérateur des fonctions placées sous les signes $\int$ sont du premier ordre. Ces numérateurs sont nuls en effet quand on fait $b_i = a_i$ et $c_i = a_i$, c'est-à-dire quand les aplatissements sont nuls. Nous pouvons donc, puisque nous négligeons les quantités du second ordre, faire abstraction des quantités du premier ordre dans les dénominateurs et y remplacer par suite b_i et c_i par a_i.

On obtient ainsi, pour la première équation,

$$(2)\quad \frac{\omega^2}{2\pi f} = \sum_{r=1}^{r=p} \eta_r a_r^3 \int_0^\infty \frac{\left[a_r^2 + s - \frac{a_p^2}{b_p^2}(b_r^2 + s)\right] ds}{(a_r^2 + s)^{\frac{7}{2}}} + \sum_{q=p+1}^{q=n} \eta_q a_q^3 \int_{\nu_q}^\infty \frac{\left[a_q^2 + s - \frac{a_p^2}{b_p^2}(b_q^2 + s)\right] ds}{(a_q^2 + s)^{\frac{7}{2}}}.$$

Posons

$$(3)\qquad b_i = a_i(1 + e_i).$$

La différence entre e_i et l'aplatissement de la section principale ayant b_i pour demi grand axe est du second ordre, car l'aplatissement a pour expression $\frac{b_i - a_i}{b_i}$, et, en remplaçant b_i par sa valeur tirée de l'équation précédente,

$$\frac{b_i - a_i}{b_i} = \frac{e_i}{1 + e_i} = e_i, \qquad \ldots,$$

nous nommerons e_i l'*ellipticité de la section principale* ayant pour demi grand axe b_i, conformément à la définition de Clairaut.

Introduisons les ellipticités dans l'équation (2)

$$\frac{a_r^2 + s - \frac{a_p^2}{b_p^2}(b_r^2 + s)}{(a_r^2 + s)^{\frac{7}{2}}} = \frac{a_r^2 + s - \frac{1}{(1 + e_p)^2}(a_r^2 + s + 2a_r^2 e_r)}{(a_r^2 + s)^{\frac{7}{2}}} = 2\,\frac{(a_r^2 + s)e_p - a_r^2 e_r}{(a_r^2 + s)^{\frac{7}{2}}}.$$

L'équation (2) devient

$$(4)\quad \frac{\omega^2}{4\pi f} = \sum_{r=1}^{r=p} \eta_r a_r^3 \int_0^\infty \frac{(a_r^2 + s)e_p - a_r^2 e_r}{(a_r^2 + s)^{\frac{7}{2}}} ds + \sum_{q=p+1}^{q=n} \eta_q a_r^3 \int_{\nu_q}^\infty \frac{(a_q^2 + s)e_p - a_q^2 e_q}{(a_q^2 + s)^{\frac{7}{2}}} ds.$$

On a

$$\int_{\nu_q}^\infty \frac{(a_q^2 + s)e_p - a_q^2 e_q}{(a_q^2 + s)^{\frac{7}{2}}} ds = e_p \int_{\nu_q}^\infty \frac{ds}{(a_q^2 + s)^{\frac{5}{2}}} - a_q^2 e_q \int_{\nu_q}^\infty \frac{ds}{(a_q^2 + s)^{\frac{7}{2}}}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

Intégrant et portant dans l'équation (4), il vient

$$(5)\qquad \frac{\omega^2}{8\pi f} = \sum_{r=1}^{r=p} \eta_r \left(\frac{e_p}{3} - \frac{e_r}{5}\right) + \sum_{q=p+1}^{q=n} \eta_q \left[\frac{a_q^3}{(a_q^2+\nu_q)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{e_p}{3} - \frac{a_q^5}{(a_q^2+\nu_q)^{\frac{5}{2}}}\,\frac{e_q}{5}\right].$$

L'expression placée sous le second signe Σ est du premier ordre; nous devons donc négliger dans ν_q les termes du premier ordre. Or l'équation (1) se réduit à

$$a_q^2 - a_p^2 + \nu_q = 0;$$

quand les surfaces S sont des sphères, il en résulte que les coefficients de β^2 et de γ^2 sont du premier ordre. Ainsi il faut faire, dans l'équation (5),

$$\nu_q = a_p^2 - a_q^2;$$

on obtient ainsi

$$(\mathrm{C})\qquad \frac{\omega^2}{8\pi f} = \sum_{r=1}^{r=p} \eta_r \left(\frac{e_p}{3} - \frac{e_r}{5}\right) + \sum_{q=p+1}^{q=n} \eta_q \left[\left(\frac{a_q}{a_p}\right)^3 \frac{e_p}{3} - \left(\frac{a_q}{a_p}\right)^5 \frac{e_q}{5}\right].$$

La seconde équation (A) s'obtient en changeant b en c et inversement dans la première; si donc on pose

$$c_i = a_i(1+\varepsilon_i),$$

il suffit, pour obtenir la transformée de cette seconde équation, de changer, dans l'équation (C), e en ε, et inversement,

$$(\mathrm{C}')\qquad \frac{\omega^2}{8\pi f} = \sum_{r=1}^{r=p} \eta_r \left(\frac{\varepsilon_p}{3} - \frac{\varepsilon_r}{5}\right) + \sum_{q=p+1}^{q=n} \eta_q \left[\left(\frac{a_q}{a_p}\right)^3 \frac{\varepsilon_p}{3} - \left(\frac{a_q}{a_p}\right)^5 \frac{\varepsilon_q}{5}\right].$$

En faisant p successivement égal à 1, 2, ..., n, les équations (C) et (C') donnent deux systèmes d'équations identiques; donc $\varepsilon_p = e_p$. Ainsi une planète peu aplatie ne peut prendre approximativement la forme d'un ellipsoïde à trois axes, mais peut être décomposée en une série de couches ellipsoïdales de révolution.

L'équation (C) se ramène aisément à l'équation générale de Clairaut en mettant e_p en évidence; mais la forme (C) est plus avantageuse dans plusieurs cas, par exemple pour démontrer le théorème suivant, dû à Clairaut :

Les ellipticités vont en croissant du centre à la surface.

L'équation d'équilibre de la surface S_{p+1} peut, en effet, s'écrire

$$\frac{\omega^2}{8\pi f} = \sum_{r=1}^{r=p} \eta_r \left(\frac{e_{p+1}}{3} - \frac{e_r}{5}\right) + \sum_{q=p+1}^{q=n} \eta_q \left[\frac{a_q^3}{a_{p+1}^3}\,\frac{e_{p+1}}{5} - \left(\frac{a_q}{a_{p+1}}\right)^5 \frac{e_q}{5}\right].$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

Les signes Σ ayant les mêmes limites que pour la surface S_p, ce qui est permis, puisque les fonctions placées sous ces signes sont identiques pour $r = q = p + 1$.

Retranchons cette équation de l'équation (C),

$$0 = \sum_1^p \eta_r \left(\frac{e_p}{3} - \frac{e_{p+1}}{3}\right) + \sum_{p+1}^n \eta_q \left[\left(\frac{a_q}{a_p}\right)^3 \frac{e_p}{3} - \left(\frac{a_q}{a_p}\right)^5 \frac{e_q}{5} - \left(\frac{a_q}{a_{p+1}}\right)^3 \frac{e_{p+1}}{3} + \left(\frac{a_q}{a_{p+1}}\right)^5 \frac{e_q}{5}\right],$$

d'où

$$\frac{1}{3}(e_p - e_{p+1}) \sum_1^p \eta_r = -\sum_{p+1}^n \eta_q \left[\left(\frac{a_q}{a_p}\right)^3 \frac{e_p}{3} - \left(\frac{a_q}{a_p}\right)^5 \frac{e_q}{5} - \left(\frac{a_q}{a_{p+1}}\right)^3 \frac{e_{p+1}}{3} + \left(\frac{a_q}{a_{p+1}}\right)^5 \frac{e_q}{5}\right].$$

Ajoutons aux deux membres l'expression $\frac{1}{3}(e_p - e_{p+1}) \sum_{p+1}^n \eta_q \left(\frac{a_q}{a_p}\right)^3$,

$$\frac{1}{3}(e_p - e_{p+1}) \left[\sum_1^p \eta_r + \sum_{p+1}^n \eta_q \left(\frac{a_q}{a_p}\right)^3\right]$$
$$= \sum_{p+1}^n \eta_q \left\{\left(\frac{a_q}{a_p}\right)^5 \frac{e_q}{5} - \left(\frac{a_q}{a_p}\right)^3 \frac{e_{p+1}}{3} - \left[\left(\frac{a_q}{a_{p+1}}\right)^5 \frac{e_q}{5} - \left(\frac{a_q}{a_{p+1}}\right)^3 \frac{e_{p+1}}{3}\right]\right\}$$

ou

$$(6) \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{3}(e_p - e_{p+1}) \left[\sum_1^p \eta_r + \sum_{p+1}^n \eta_q \left(\frac{a_q}{a_p}\right)^3\right] \\ &= e_{p+1} \sum_{p+1}^n \eta_q \left\{\frac{1}{5}\left(\frac{a_q}{a_p}\right)^5 \frac{e_q}{e_{p+1}} - \frac{1}{3}\left(\frac{a_q}{a_p}\right)^3 - \left[\frac{1}{5}\left(\frac{a_q}{a_{p+1}}\right)^5 \frac{e_q}{e_{p+1}} - \frac{1}{3}\left(\frac{a_q}{a_{p+1}}\right)^3\right]\right\}. \end{aligned}\right.$$

Supposons que $e_n < e_{n-1} \ldots < e_{p+1}$. Il est alors aisé, à l'aide de l'équation (6), de montrer que $e_{p+1} < e_p$. Pour achever la démonstration, il suffira de prouver ensuite que $e_n < e_{n-1}$.

Considérons la fonction $\frac{1}{5} A x^5 - \frac{1}{3} x^3$. Sa dérivée est $x^2(Ax^2 - 1)$; donc cette fonction est décroissante quand $Ax^2 < 1$. Si nous faisons $A = \frac{e_q}{e_{p+1}}$, A, d'après notre hypothèse, est inférieur à l'unité; ainsi la fonction $\frac{1}{5} \frac{e_q}{e_{p+1}} x^5 - \frac{1}{3} x^3$ est décroissante quand $x < 1$. Or on a $\frac{a_q}{a_p} < \frac{a_q}{a_{p+1}} < 1$; donc l'expression entre crochets, dans le second membre de l'équation (6), est positive. Il en résulte évidemment $e_p > e_{p+1}$, puisque toutes les quantités η ont le même signe.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

L'inégalité $e_n < e_{n-1}$ se démontre en faisant $p = n - 1$ dans l'équation (6),

$$(7)\quad \frac{1}{3}(e_{n-1} - e_n)\left[\sum_{1}^{n-1} \eta_r + \eta_n\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^3\right] = e_n \eta_n \left\{\frac{1}{5}\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^5 - \frac{1}{3}\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^3 - \left[\frac{1}{5}(1)^5 - \frac{1}{3}(1)^3\right]\right\}.$$

La fonction $\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}$ est décroissante quand $x < 1$. Or $\frac{a_n}{a_{n-1}} < 1$; donc l'accolade du second membre de l'équation (7) est positive et, par suite, $e_{n-1} > e_n$. Cette inégalité entraîne les suivantes

$$e_1 > e_2 > e_3 > \ldots > e_{n-1} > e_n,$$

qui expriment le théorème de Clairaut.

L'équation générale de Clairaut peut, comme nous l'avons déjà indiqué, se déduire de l'équation (C). Cette équation peut s'écrire

$$\frac{5}{8}\frac{\omega^2}{\pi f} = \sum_{r=1}^{r=p} \eta_r\left(\frac{5}{3}e_p - e_r\right) + \sum_{q=p+1}^{q=n} \eta_q\left(\frac{a_q}{a_p}\right)^3\left[\frac{5}{3}e_p - \left(\frac{a_q}{a_p}\right)^2 e_q\right]$$

ou

$$0 = \frac{5}{8}\frac{\omega^2}{\pi f}\sum_{r=1}^{r=p-1} \eta_r e_r + e_p\left\{\eta_p - \frac{5}{3}\left[\sum_{r=1}^{r=p} \eta_r + \sum_{q=p+1}^{q=n}\left(\frac{a_q}{a_p}\right)^3 \eta_q\right]\right\} + \sum_{q=p+1}^{q=n}\left(\frac{a_q}{a_p}\right)^5 \eta_q e_q.$$

Posons

$$(8)\qquad \mathcal{L}_p = \frac{5}{3}\left[\sum_{r=1}^{r=p} \eta_r + \sum_{q=p+1}^{q=n}\left(\frac{a_q}{a_p}\right)^3 \eta_q\right].$$

En se reportant à la définition des quantités η, donnée au commencement de ce travail, et groupant les termes d'une façon convenable, on trouve facilement une autre expression de $\mathcal{L}_p$

$$(9)\qquad \mathcal{L}_p = \frac{5}{3}\frac{1}{a_p^3}\sum_{q=p}^{q=n} \rho_q(a_q^3 - a_{q+1}^3),$$

et l'équation générale de Clairaut est

$$(\mathrm{D})\qquad 0 = \frac{5}{8}\frac{\omega^2}{\pi f} + \sum_{r=1}^{r=p-1} \eta_r e_r + (\eta_p - \mathcal{L}_p)e_p + \sum_{q=p+1}^{q=n}\left(\frac{a_q}{a_p}\right)^5 \eta_q e_q.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

Cas de la Terre.

Les n équations que l'on obtient en remplaçant p successivement par $1, 2, \ldots, n$ dans l'équation (D) fournissent n données sur l'état intérieur d'une planète quelconque peu aplatie. Dans le cas de la Terre, on peut ajouter deux relations à celles de Clairaut.

La première s'obtient en exprimant la densité moyenne de notre globe qui est connue, à l'aide des quantités η et a.

La masse M de la Terre est la somme des masses de ses différentes couches. Elle est aussi égale au produit de sa densité moyenne par son volume.

On a donc

$$V_1 \Delta = \sum_{q=1}^{q=n} V_q \eta_q \quad (^1)$$

ou

$$\Delta = \sum_{q=1}^{q=n} \left(\frac{a_q}{a_1}\right)^3 \eta_q; \tag{10}$$

car

$$\frac{V_q}{V_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi a_q b_q^2}{\frac{4}{3}\pi a_1 b_1^2} = \frac{a_q^3(1+e_q)^2}{a_1^3(1+e_1)^2} = \frac{a_q^3}{a_1^3},$$

en négligeant les quantités du premier ordre vis-à-vis des quantités d'ordre zéro.

Soient C et A les moments d'inertie de la Terre relativement à la ligne des pôles et à un diamètre équatorial. La deuxième relation s'obtient en exprimant le rapport $\frac{C-A}{C}$, dont la valeur a été déduite de la théorie de la précession des équinoxes, par Serret, en fonction des quantités η, a, e.

Les expressions de C et A s'obtiennent à l'aide des formules connues des moments d'inertie d'un ellipsoïde

$$C = \frac{4}{3}\pi \sum_{q=1}^{q=n} \eta_q \frac{2}{5} a_q b_q^4,$$

$$A = \frac{4}{3}\pi \sum_{q=1}^{q=n} \eta_q a_q b_q^2 \frac{a_q^2 + b_q^2}{5},$$

$$\frac{C-A}{C} = \frac{\sum_{q=1}^{q=n} \eta_q a_q b_q^2 (b_q^2 - a_q^2)}{2 \sum_{q=1}^{q=n} \eta_q a_q b_q^4}.$$

(1) *Voir* Ire Partie, § I, l'expression des masses des différentes couches.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

Remplaçant b_q par $a_q(1+e_q)$ et négligeant les termes du second ordre, il vient

$$(11)\qquad \frac{C-A}{C} = \frac{\sum_{q=1}^{q=n} \eta_q \left(\frac{a_q}{a_1}\right)^5 e_q}{\sum_{q=1}^{q=n} \eta_q \left(\frac{a_q}{a_1}\right)^5},$$

en divisant haut et bas par a_1^5. C'est la relation cherchée.

La valeur de $\frac{5}{8}\frac{\omega^2}{\pi f}$ s'obtient facilement en fonction du rapport φ de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur et de la densité moyenne Δ.

Soit g_0 la pesanteur à l'équateur où le rayon terrestre est b_1. On a

$$\varphi = \frac{\omega^2 b_1}{g_0},$$

ω^2 étant en facteur dans le second membre; φ est du premier ordre. Négligeant les quantités du second ordre, nous devons faire abstraction dans g_0 des quantités du premier, c'est-à-dire des quantités qui dépendent des ellipticités. Cela revient, dans le calcul de g_0, à supposer nulles ces ellipticités, ou à regarder les couches comme sphériques. On a, par suite,

$$g_0 = f\frac{V_1\Delta}{b_1^2} = \frac{4}{3}\pi b_1 \Delta.$$

Remplaçant g_0 par sa valeur dans l'expression de φ, on en tire

$$(12)\qquad \frac{5}{8}\frac{\omega^2}{\pi f} = \frac{5}{6}\Delta\varphi.$$

Ainsi, en supposant notre globe formé de n couches, on a $n+2$ équations entre les quantités

$$\rho_1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_n,$$
$$e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n,$$
$$\frac{a_2}{a_1},\ \ldots,\ \frac{a_n}{a_1}.$$

La Géodésie donne e_1, l'ellipticité à la surface; ρ_1 peut être considéré comme connu; nos équations renferment donc $3(n-1)$ inconnues. Il restera donc un nombre d'arbitraires égal à $3(n-1)-(n+2) = 2n-5$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

II.

Si l'on suppose la Terre formée de trois couches, $n = 3$; il y a seulement un paramètre arbitraire. Nous allons discuter d'une façon complète ce cas particulier.

Faisons, dans l'équation générale de Clairaut, $n = 3$ et p successivement égal à 1, 2, 3. Divisons les deux membres de chaque équation par ρ_1 et posons

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\eta_2}{\rho_1} = \theta_2, & \dfrac{\eta_3}{\rho_1} = \theta_3, \\[2ex] \dfrac{a_2}{a_1} = y, & \dfrac{a_3}{a_1} = x. \end{cases}$$

On obtient ainsi, en adjoignant les équations (10), (11) et remplaçant $\frac{5}{8}\frac{\omega^2}{\pi f}$ par sa valeur (12) du paragraphe précédent,

$$(3)\qquad \frac{5\Delta}{2\rho_1}\varphi = (2 + 5\theta_2 y^3 + 5\theta_3 x^3)e_1 - 3\theta_2 y^5 e_2 - 3\theta_3 x^5 e_3,$$

$$(4)\qquad \frac{5\Delta}{2\rho_1}\varphi = -3e_1 + \left(5 + 2\theta_2 + 5\theta_3\frac{x^3}{y^3}\right)e_2 - 3\theta_3\frac{x^5}{y^5}e_3,$$

$$(5)\qquad \frac{5\Delta}{2\rho_1}\varphi = -3e_1 - 3\theta_2 e_2 + (5 + 5\theta_2 + 2\theta_3)e_3,$$

$$(6)\qquad \frac{\Delta}{\rho_1} = 1 + \theta_2 y^3 + \theta_3 x^3,$$

$$(7)\qquad \frac{C - A}{C} = \frac{e_1 + \theta_2 y^5 e_2 + \theta_3 x^5 e_3}{1 + \theta_2 y^5 + \theta_3 x^5}.$$

Soit cinq équations contenant les six inconnues x, y, e_2, e_3, θ_2 et θ_3.

Résolution des équations (3), (4), (5), (6), (7).

Ajoutons et retranchons $3e_1$ au second membre de l'équation (3), elle devient

$$\frac{5\Delta}{2\rho_1}\varphi = 5(1 + \theta_2 y^3 + \theta_3 x^3)e_1 - 3(e_1 + \theta_2 y^5 e_2 + \theta_3 x^5 e_3).$$

Remplaçons les deux expressions entre parenthèses par leurs valeurs tirées des équations (6) et (7)

$$\frac{5\Delta}{2\rho_1}\varphi = 5\frac{\Delta}{\rho_1}e_1 - 3\frac{C - A}{C}(1 + \theta_2 y^5 + \theta_3 x^5$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

on en tire

$$\theta_2 y^5 + \theta_3 x^5 = \frac{5}{6}\frac{C}{C-A}\frac{\Delta}{\rho_1}(2e_1 - \varphi) - 1.$$

Posons

$$(8)\qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{5}{6}\dfrac{C}{C-A}\dfrac{\Delta}{\rho_1}(2e_1 - \varphi) - 1, \\ \beta = \dfrac{\Delta}{\rho_1} - 1; \end{cases}$$

l'équation précédente et l'équation (6) deviennent

$$(9')\qquad \begin{cases} \theta_2 y^5 + \theta_3 x^5 = \alpha, \\ \theta_2 y^3 + \theta_3 x^3 = \beta. \end{cases}$$

On en tire

$$(9)\qquad \begin{cases} \theta_3 x^3 = \dfrac{\alpha - \beta y^2}{x^2 - y^2}, \\ \theta_2 y^3 = \dfrac{\beta x^2 - \alpha}{x^2 - y^2}. \end{cases}$$

Posons

$$(10)\qquad \gamma = \frac{5\Delta}{2\rho_1}\varphi + 3e_1.$$

Les équations (4) et (5) deviennent

$$\left(5 + 2\theta_2 + 5\theta_3\frac{x^3}{y^3}\right)e_2 - 3\theta_3\frac{x^5}{y^5}e_3 = \gamma,$$

$$-3\theta_2 e_2 + (5 + 5\theta_2 + 2\theta_3)e_3 = \gamma.$$

Elles donnent

$$(11)\qquad \begin{cases} e_3 = \dfrac{5\left(1 + \theta_2 + \theta_3\dfrac{x^3}{y^3}\right)\gamma}{\left(5 + 2\theta_2 + 5\theta_3\dfrac{x^3}{y^3}\right)(5 + 5\theta_2 + 2\theta_3) - 9\theta_2\theta_3\dfrac{x^5}{y^5}}, \\ e_2 = \dfrac{\left(5 + 5\theta_2 + 2\theta_3 + 3\theta_3\dfrac{x^5}{y^5}\right)\gamma}{\left(5 + 2\theta_2 + 5\theta_3\dfrac{x^3}{y^3}\right)(5 + 5\theta_2 + 2\theta_3) - 9\theta_2\theta_3\dfrac{x^5}{y^5}}. \end{cases}$$

Portons ces expressions de e_2, e_3 dans l'équation (7), après y avoir remplacé

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

le dénominateur par $1+\alpha$ d'après les équations (9); on trouve

$$(12)\qquad \frac{C-A}{C}(1+\alpha)-e_1=\gamma\frac{\theta_2 y^5\left(5+5\theta_2+2\theta_3+3\theta_3\frac{x^5}{y^5}\right)+5\theta_3 x^5\left(1+\theta_2+\theta_3\frac{x^3}{y^3}\right)}{\left(5+2\theta_2+5\theta_3\frac{x^3}{y^3}\right)(5+5\theta_2+2\theta_3)-9\theta_2\theta_3\frac{x^5}{y^5}}.$$

Le numérateur peut s'écrire

$$5(1+\theta_2)(\theta_2 y^5+\theta_3 x^5)+\theta_2\theta_3(2y^5+3x^5)+5\theta_3^2\frac{x^8}{y^3}$$

ou bien

$$5\alpha(1+\theta_2)+\theta_2\theta_3(2y^5+3x^5)+5\theta_3^2\frac{x^8}{y^3}.$$

En remplaçant θ_2, θ_3 par leurs valeurs (9) et le numérateur de l'équation (12) par cette expression, l'équation (12) devient, après quelques calculs,

$$(13)\qquad \delta=\gamma y^5\frac{\left\{\begin{array}{l}5\alpha x^3(y^2-x^2)[(y^2-x^2)y^3+\alpha-\beta x^2]\\ \quad+(\alpha-\beta x^2)(\beta y^2-\alpha)(2y^5+3x^5)+5x^5(\beta y^2-\alpha)^2\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l}y^2[(5y^3+2\beta)(y^2-x^2)+3(\beta y^2-\alpha)]\\ \quad\times[5x^3y^3(y^2-x^2)+5x^3(\alpha-\beta x^2)+2y^3(\beta y^2-\alpha)]-9x^5(\alpha-\beta x^2)(\beta y^2-\alpha)\end{array}\right\}},$$

en posant

$$\delta=\frac{C-A}{C}(1+\alpha)-e_1$$

ou bien

$$(14)\qquad \delta=\frac{5}{6}\frac{\Delta}{\rho_1}(2e_1-\varphi)-e_1.$$

L'équation (13) ne contient plus que les deux inconnues x et y.

Supposons que l'on ait des systèmes de valeurs de x et y vérifiant l'équation (13). Les équations (9) et (11) donneront alors des valeurs correspondantes pour θ_3, θ_2, e_3, e_2. Nous allons donc nous occuper de l'équation (13).

Posons, en nous reportant aux expressions (8), (10), (14) de α, β, γ, δ,

$$(15)\qquad \left\{\begin{array}{l}a=\alpha\rho_1=\frac{5}{6}\frac{C}{C-A}\Delta(2e_1-\varphi)-\rho_1,\\ b=\beta\rho_1=\Delta-\rho_1,\\ k=\delta\rho_1=\frac{5}{6}\Delta(2e_1-\varphi)-\rho_1 e_1,\\ n=\gamma\rho_1=\frac{5}{2}\Delta\varphi+3e_1\rho_1\end{array}\right.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

et

$$(16)\quad \begin{cases} \mathrm{N} = y^5\{5ax^3(y^2-x^2)[y^3(y^2-x^2)\rho_1 + a - bx^2] \\ \qquad + (a-bx^2)(by^2-a)(2y^5+3x^5) + 5x^5(by^2-a)^2\}, \\ \mathrm{D} = y^2[(5\rho_1 y^3 + 2b)(y^2-x^2) + 3(by^2-a)] \\ \qquad \times [5x^3y^3(y^2-x^2)\rho_1 + 5x^3(a-bx^2) + 2y^3(by^2-a)] - 9x^5(a-bx^2)(by^2-a); \end{cases}$$

l'équation (13) peut s'écrire comme il suit :

$$(17)\qquad \mathrm{N}n - \mathrm{D}k = 0.$$

Le premier membre est une fonction entière de y, x, e_1, ρ_1, mais très compliquée.

Nous discuterons l'équation (17), en faisant des substitutions. Pour cela, il est plus avantageux de changer la forme des expressions (16) de N et D.

En posant

$$\mathrm{H} = 5x^3y^2 - 2y^5 - 3x^5,$$

on a

$$(18)\qquad \mathrm{N} = \begin{cases} a^2 \times \mathrm{H}y^5 \\ + b^2 \times x^2y^7\mathrm{H} \\ + ab \times 2\{x^2[(y^5-x^5)+5x^5] + y^2[(y^5-x^5)-5x^5]\}y^5 \\ + a\rho_1 \times 5x^3y^8(y^2-x^2)^2, \end{cases}$$

$$(19)\qquad \mathrm{D} = \begin{cases} + a^2 \times (-3\mathrm{H}) \\ + b^2 \times y^2[-3\mathrm{H}x^2 + 10(y^5-x^5)(y^2-x^2)] \\ + ab \times \{-x^2(2\mathrm{H}+15x^5) + y^2[5\mathrm{H}+15x^5-6(y^5-x^5)]\} \\ + b\rho_1 \times 5y^5(y^2-x^2)[\mathrm{H}+4(y^5-x^5)] \\ + a\rho_1 \times [-5y^5(y^2-x^2) \times 2(y^3-x^3)] \\ + \rho_1^2 \times 25y^8(y^2-x^2)^2 \times x^3. \end{cases}$$

Les limites entre lesquelles on doit faire varier x et y sont faciles à déterminer.

Nous avons trouvé, pour θ_3 et θ_2, les expressions suivantes

$$\theta_3 x^3 = \frac{\alpha - \beta y^2}{x^2 - y^2},$$

$$\theta_2 y^3 = \frac{\beta x^2 - \alpha}{x^2 - y^2}$$

ou, d'après les relations (15),

$$\rho_1\theta_3 x^3 = \frac{a - by^2}{x^2 - y^2},$$

$$\rho_1\theta_2 y^3 = \frac{bx^2 - a}{x^2 - y^2};$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

θ_2 et θ_3 sont positifs, puisque la densité croît de la surface au centre, et x est inférieur à y; donc

$$a - by^2 < 0,$$
$$bx^2 - a < 0.$$

Mais

$$b = \Delta - \rho_1 > 0,$$

car Δ est environ le double de ρ_1. On a donc

$$y^2 > \frac{a}{b},$$
$$x^2 < \frac{a}{b};$$

x est plus grand que zéro et y inférieur à l'unité; donc

$$(20) \qquad 0 < x^2 < \frac{a}{b} < y^2 < 1.$$

Quand x^2 ou y^2 a sa valeur limite $\frac{a}{b}$, θ_2 ou $\theta_3 x^3$ est nul. Dans le premier cas, ρ_2 est égal à ρ_1; dans le second, ou ρ_3 est égal à ρ_2, ou x est nul. Dans les deux cas la masse fluide se réduit à deux couches, et l'équation (17) prend une forme très simple.

Soit d'abord $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$; les expressions (16) de N et D deviennent, après des calculs très faciles,

$$N = 5(by^2 - a)^2\left(\frac{\rho_1}{b}y^3 + 1\right)y^5\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{5}{2}},$$

$$D = 5(by^2 - a)^2\left(\frac{\rho_1}{b}y^3 + 1\right)y^5\left[5\frac{\rho_1}{b}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + 2\right];$$

l'équation (17) est alors

$$(21) \qquad Nn - Dk = 5(by^2 - a)^2\left(\frac{\rho_1}{b}y^3 + 1)y^5\right)\left\{n\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{5}{2}} - k\left[\frac{5\rho_1}{b}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + 2\right]\right\} = 0.$$

Pour $y = \sqrt{\frac{a}{b}}$, l'équation (17) devient, de même,

$$(22) \qquad Nn - Dk = 5x^3(a - bx^2)^2\frac{a}{b}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\rho_1}{b} + 1\right]\left\{n\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{5}{2}} - k\left[\frac{5\rho_1}{b}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + 2\right]\right\} = 0.$$

Le signe des premiers membres est, comme on voit, le même que celui de l'ex-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

pression

$$n\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{5}{2}} - k\left[\frac{5\rho_1}{b}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + 2\right], \tag{23}$$

laquelle ne dépend que de e_1 et de ρ_1.

L'équation (21) est vérifiée par $y = \sqrt{\frac{a}{b}}$, et l'équation (22) par $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$. Il semble donc que

$$x = y = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

soit une solution du problème.

Il est facile de voir qu'il n'en est pas ainsi en se reportant à l'équation (13) qui, en remplaçant α, β, γ, δ en fonction de a, b, k, n et ρ_1, est

$$k = \frac{\mathrm{N}n}{\mathrm{D}}.$$

En faisant $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$ ou $y = \sqrt{\frac{a}{b}}$ et supprimant les facteurs communs aux deux termes de la fraction, cette équation devient

$$k = \frac{n\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{5}{2}}}{5\frac{\rho_1}{b}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + 2},$$

laquelle n'est autre que

$$n\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{5}{2}} - k\left[5\frac{\rho_1}{b}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + 2\right] = 0.$$

Ainsi, pour que $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$ ou $y = \sqrt{\frac{a}{b}}$ soit une solution, il faut que cette relation soit satisfaite.

Dans le premier cas y est quelconque; dans le second c'est x qui est indéterminé.

Limite inférieure de la densité au centre.

On peut, dans le cas de trois courbes, à l'aide des formules qui viennent d'être établies, vérifier un théorème remarquable de M. Stieltjes donnant une

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

limite inférieure de la densité au centre d'une planète quelconque [1]

$$\rho_n > \rho_1 + \frac{(\Delta - \rho_1)^{\frac{5}{2}}}{\left(\frac{5\Delta}{3\lambda} - \rho_1\right)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{ou} \quad \frac{\rho_n}{\rho_1} > 1 + \frac{\left(\frac{\Delta}{\rho_1} - 1\right)^{\frac{5}{2}}}{\left(\frac{5\frac{\Delta}{\rho_1}}{3\lambda} - 1\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

ρ_n, ρ_1, Δ ont la même signification que plus haut et λ désigne le rapport suivant

$$\lambda = \frac{\int_0^1 x^2 \rho_x \, dx}{\int_0^1 x^4 \rho_x \, dx};$$

ρ_x est la densité d'une couche infiniment mince quelconque ayant $a_1 x$ pour demi petit axe.

Ce rapport peut s'écrire, dans le cas de n couches,

$$\frac{\frac{1}{3}\int_0^1 \rho_x \, d(x^3)}{\frac{1}{5}\int_0^1 \rho_x \, d(x^5)} = \frac{5}{3} \frac{\rho_n\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^3 + \rho_{n-1}\left[\left(\frac{a_{n-1}}{a_1}\right)^3 - \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^3\right] + \ldots + \rho_2\left[\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3 - \left(\frac{a^3}{a_1}\right)^3\right] + \rho_1\left[\left(\frac{a_1}{a_1}\right)^3 - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3\right]}{\rho_n\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^5 + \rho_{n-1}\left[\left(\frac{a_{n-1}}{a_1}\right)^5 - \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^5\right] + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \rho_1\left[\left(\frac{a_1}{a_1}\right)^5 - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^5\right]},$$

ou, en groupant les termes d'une manière convenable,

$$\lambda = \frac{5}{3} \frac{\sum_{q=1}^{q=n} \eta_q \left(\frac{a_q}{a_1}\right)^3}{\sum_{q=1}^{q=n} \eta_q \left(\frac{a_q}{a_1}\right)^5}.$$

Dans le cas de trois couches en particulier,

$$\lambda = \frac{5}{3} \frac{\rho_1\left(\frac{a_1}{a_1}\right)^3 + \eta_2\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3 + \eta_3\left(\frac{a_3}{a_1}\right)^3}{\rho_1\left(\frac{a_1}{a_1}\right)^5 + \eta_2\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^5 + \eta_3\left(\frac{a_3}{a_1}\right)^5}.$$

Divisant haut et bas par ρ_1, et tenant compte des relations (2) de ce para-

---

(1) *Bulletin astronomique*, t. I, p. 465.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

graphe, il vient

$$\lambda = \frac{5}{3}\,\frac{1+\theta_2 y^3+\theta_3 x^3}{1+\theta_2 y^5+\theta_3 x^5}$$

et, en se reportant aux équations (9′),

$$\lambda = \frac{5}{3}\,\frac{1+\beta}{1+\alpha}.$$

Si dans l'inégalité de M. Stieltjes on remplace, en vertu de la deuxième relation (8), $\frac{\Delta}{\rho_1}$ par $1+\beta$ et λ par sa valeur, on trouve

$$\frac{\rho_3}{\rho_1} - 1 > \frac{\beta^{\frac{5}{2}}}{\alpha^{\frac{3}{2}}}.$$

Or on a

$$\frac{\rho_3}{\rho_1} - 1 = \frac{\rho_3-\rho_2+\rho_2-\rho_1}{\rho_1} = \theta_3+\theta_2.$$

L'inégalité à vérifier est donc

$$\theta_3+\theta_2 > \frac{\beta^{\frac{5}{2}}}{\alpha^{\frac{3}{2}}}.$$

Remplaçons θ_3 et θ_2 par leurs valeurs (9)

$$\frac{\dfrac{\alpha-\beta x^2}{y^3}+\dfrac{\beta y^2-\alpha}{x^3}}{y^2-x^2} > \frac{\beta^{\frac{5}{2}}}{\alpha^{\frac{3}{2}}}.$$

Posons

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = h.$$

L'inégalité devient

$$V = \frac{\dfrac{h^2-x^2}{y^3}+\dfrac{y^2-h^2}{x^3}}{y^2-x^2} > \frac{1}{h^3}.$$

On a

$$(y^2-x^2)^2\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{h^2-y^2}{x^4y^3}\left[2x^5-5x^2y^3+3y^5\right].$$

Nous avons démontré que $0 < x < h < y < 1$; il en résulte que $\frac{\partial V}{\partial x} < 0$. En effet les dérivées partielles de l'expression entre crochets sont

Par rapport à x..... $-10x(y^3-x^3) < 0$

Par rapport à y..... $15y^2(y^2-x^2) > 0$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

d'où il suit que la plus petite valeur de cette expression s'obtient en faisant $x = y = h$, ce qui donne un résultat nul. Ainsi le coefficient de $h^2 - y^2$ est toujours positif, et l'on a bien

$$\frac{\partial V}{\partial x} < 0.$$

La fonction V est symétrique en x et y, $\frac{\partial V}{\partial y}$ s'obtient donc en changeant x en y et y en x dans $\frac{\partial V}{\partial x}$; on reconnaît, comme pour $\frac{\partial V}{\partial x}$, que

$$\frac{\partial V}{\partial y} > 0.$$

La plus petite valeur de V s'obtient, par suite, en donnant à x sa plus grande valeur et à y sa plus petite, c'est-à-dire en faisant $x = y = h$. En faisant cette substitution, on trouve $V = \frac{1}{h^3}$. L'inégalité de M. Stieltjes est ainsi vérifiée.

III.

Calculs numériques.

La mise en nombre a été faite de deux façons différentes, destinées à contrôler l'exactitude des résultats obtenus. Dans un premier calcul, on ne s'est servi exclusivement que des Tables de multiplication de Crelle, et dans un second les Tables de logarithmes d'addition et de soustraction de Bremiker ont seules été employées.

La densité superficielle de l'écorce terrestre n'est pas très bien connue, mais on sait qu'elle est comprise entre 2 et 3. Les Tableaux qui suivent ont été calculés en faisant successivement plusieurs hypothèses sur sa valeur.

Dix valeurs régulièrement espacées ont été données à l'aplatissement du globe. Ce sont

$$0,00334405 = \frac{1}{299,04\ldots},$$
$$0,00335818 = \frac{1}{297,78\ldots},$$
$$0,00337230 = \frac{1}{296,53\ldots},$$
$$0,00338643 = \frac{1}{295,30\ldots},$$
$$0,00340055 = \frac{1}{294,08\ldots},$$
$$0,00341468 = \frac{1}{292,85\ldots},$$
$$0,00342880 = \frac{1}{291,65\ldots},$$
$$0,00344293 = \frac{1}{290,46\ldots},$$
$$0,00345705 = \frac{1}{289,27\ldots},$$
$$0,00347118 = \frac{1}{288,09\ldots},$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

Ces nombres ont été choisis de façon que la quantité a qui entre dans N et D n'ait que trois chiffres, chose importante pour le calcul avec les Tables de Crelle.

On a pris [1]

$$\frac{C-A}{C} = \frac{1}{305,6},$$

$$\Delta = 5,56,$$

$$\varphi = \frac{1}{288,38}.$$

Les nombres consignés dans les Tableaux qui suivent sont les résultats des substitutions de différentes valeurs de x et de y dans la fonction

$$(Nn - Dk)\,10^5.$$

Pour $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$ et pour $y = \sqrt{\frac{a}{b}}$ les signes seuls ont été inscrits, les résultats numériques des substitutions n'étant pas nécessaires.

Ces signes, nous l'avons vu, sont tous les mêmes et identiques à celui de l'expression (23) du § II, fonction seulement de ρ_1 et e_1. Voici un Tableau des valeurs de cette expression dans différentes hypothèses faites sur e_1 et ρ_1 :

	$\frac{1}{e_1} = 299,04.$	$\frac{1}{e_1} = 295,30.$	$\frac{1}{e_1} = 291,65.$	$\frac{1}{e_1} = 288,09.$
$\rho_1 = 2,9\ldots.$	− 70,55	+ 106,89	+ 315,60	+ 556,96
$\rho_1 = 2,7\ldots.$	− 69,31	+ 104,08	+ 304,78	+ 534,15
$\rho_1 = 2,5\ldots.$	− 67,81	+ 101,13	+ 294,20	+ 512,46
$\rho_1 = 2,3\ldots.$	− 66,16	+ 98,16	+ 283,91	+ 492,00

En cherchant, par interpolation, pour quelles valeurs de e_1 la fonction (23) est nulle, on trouve dans les quatre hypothèses faites sur la densité

$$e_1 = \frac{1}{297,53}.$$

---

[1] Le premier nombre a été déduit de la théorie de la précession des équinoxes par Serret (*Annales de l'Observatoire*, t. V, p. 324); le second a été donné par MM. Cornu et Baille (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXVI); le troisième a été déduit par M. Faye des expériences de M. Peirce sur le pendule (*Cours d'Astronomie de l'École Polytechnique*, Ire Partie, p. 332).

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

$$\rho_1 = 2,9, \qquad \frac{1}{e_1} = 299,04.$$

	$y=1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	0,86	0,84	0,82	$\sqrt{\frac{a}{b}}=0,789$
$x=0,0$	+1820	+1101	+ 626	+ 324	+ 145	+ 45	− 2	− 19	− 19	− 11	− 0
0,2	+1171	+ 653	+ 323	+ 125	+ 17	− 35	− 50	− 47	− 35	− 22	− »
0,4	− 94	− 218	− 266	− 268	− 241	− 203	− 161	− 120	− 87	− 60	− »
0,6	− 950	− 773	− 607	− 471	− 358	− 267	− 194	− 139	− 97	− 66	− »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	− »	− »	− »	− »	− »	− »	− »	− »	− »	− »	− 0

$$\rho_1 = 2,9, \qquad \frac{1}{e_1} = 297,78.$$

	$y=1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	0,86	0,84	0,82	$\sqrt{\frac{a}{b}}=0,799$
$x=0,0$	+2113	+1323	+ 794	+ 450	+ 238	+ 113	+ 46	+ 13	+ 2	+ 0	− 0
0,2	+1539	+ 936	+ 539	+ 288	+ 139	+ 55	+ 15	− 1	− 5	− 3	− »
0,4	+ 533	+ 277	+ 117	+ 27	− 17	− 33	− 34	− 27	− 19	− 11	− »
0,6	− 90	− 113	− 108	− 95	− 78	− 60	− 44	− 31	− 21	− 13	− »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	− »	− »	− »	− »	− »	− »	− »	− »	− »	− »	− 0

$$\rho_1 = 2,9, \qquad \frac{1}{e_1} = 296,53.$$

	$y=1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	0,86	0,84	0,82	$\sqrt{\frac{a}{b}}=0,809$
$x=0,0$	+2378	+1523	+ 942	+ 559	+ 316	+ 168	+ 83	+ 37	+ 15	+ 4	+ 0
0,2	+1881	+1196	+ 735	+ 435	+ 246	+ 134	+ 70	+ 35	+ 18	+ 9	+ »
0,4	+1158	+ 754	+ 485	+ 308	+ 196	+ 128	+ 85	+ 60	+ 44	+ 32	+ »
0,6	+ 757	+ 547	+ 383	+ 274	+ 197	+ 142	+ 103	+ 75	+ 53	+ 38	+ »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ 0

$$\rho_1 = 2,9, \qquad \frac{1}{e_1} = 295,30.$$

	$y=1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	0,86	0,84	$\sqrt{\frac{a}{b}}=0,818$
$x=0,0$	+2617	+1699	+1071	+ 652	+ 380	+ 211	+ 110	+ 51	+ 20	+ 0
0,2	+2195	+1433	+ 912	+ 565	+ 340	+ 200	+ 113	+ 63	+ 33	+ »
0,4	+1750	+1211	+ 836	+ 576	+ 398	+ 278	+ 196	+ 139	+ 100	+ »
0,6	+1592	+1175	+ 865	+ 636	+ 465	+ 339	+ 245	+ 177	+ 125	+ »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ 0

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

$$\rho_1 = 2,9, \qquad \frac{1}{e_1} = 294,08.$$

	$y = 1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	0,86	0,84	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,827$
$x = 0,0$	+2829	+1853	+1181	+ 728	+ 431	+ 242	+ 126	+ 56	+ 17	+ 0
0,2	+2484	+1648	+1070	+ 679	+ 420	+ 254	+ 148	+ 82	+ 41	+ »
0,4	+2320	+1651	+1172	+ 831	+ 589	+ 420	+ 299	+ 213	+ 151	+ »
0,6	+2414	+1803	+1339	+ 991	+ 729	+ 532	+ 385	+ 276	+ 194	+ »
0,8	+1515	+1049	+ 707	+ 461	+ 289	+ 170	+ 92	+ 44	+ 17	+ »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ 0

$$\rho_1 = 2,9, \qquad \frac{1}{e_1} = 292,85.$$

	$y = 1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	0,86	0,84	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,836$
$x = 0,0$	+3014	+1985	+1271	+ 788	+ 468	+ 261	+ 132	+ 52	+ 6	+ 0
0,2	+2746	+1841	+1209	+ 776	+ 486	+ 296	+ 173	+ 92	+ 41	+ »
0,4	+2869	+2072	+1492	+1062	+ 769	+ 552	+ 394	+ 280	+ 196	+ »
0,6	+3224	+2421	+1804	+1339	+ 987	+ 721	+ 521	+ 372	+ 261	+ »
0,8	+2061	+1428	+ 962	+ 627	+ 392	+ 231	+ 125	+ 60	+ 23	+ »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ 0

$$\rho_1 = 2,9, \qquad \frac{1}{e_1} = 291,65.$$

	$y = 1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	0,86	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,845$
$x = 0,0$	+3173	+2093	+1343	+ 831	+ 490	+ 269	+ 127	+ 40	+ 0
0,2	+2982	+2011	+1330	+ 859	+ 539	+ 327	+ 186	+ 94	+ »
0,4	+3394	+2473	+1797	+1301	+ 938	+ 675	+ 481	+ 339	+ »
0,6	+4021	+3027	+2263	+1680	+1238	+ 905	+ 654	+ 466	+ »
0,8	+2604	+1803	+1215	+ 793	+ 496	+ 292	+ 158	+ 75	+ »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ 0

$$\rho_1 = 2,9, \qquad \frac{1}{e_1} = 290,46.$$

	$y = 1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	0,86	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,854$
$x = 0,0$	+3304	+2179	+1394	+ 858	+ 497	+ 262	+ 113	+ 31	+ 0
0,2	+3192	+2158	+1429	+ 923	+ 577	+ 345	+ 190	+ 86	+ »
0,4	+3898	+2857	+2084	+1515	+1094	+ 787	+ 560	+ 393	+ »
0,6	+4806	+3623	+2711	+2016	+1485	+1084	+ 781	+ 556	+ »
0,8	+3144	+2177	+1467	+ 957	+ 597	+ 351	+ 190	+ 90	+ »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ 0

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

$\rho_1 = 2,9, \quad \frac{1}{e_1} = 289,27.$

	$y = 1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,863$
$x = 0,0$	+3409	+2243	+1427	+ 868	+ 492	+ 246	+ 88	+ 0
0,2	+3375	+2284	+1512	+ 972	+ 602	+ 351	+ 183	+ »
0,4	+4380	+3222	+2358	+1717	+1242	+ 891	+ 632	+ »
0,6	+5579	+4208	+3152	+2343	+1726	+1259	+ 907	+ »
0,8	+3681	+2548	+1717	+1119	+ 698	+ 411	+ 222	+ »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ 0

$\rho_1 = 2,9, \quad \frac{1}{e_1} = 288,09.$

	$y = 1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,871$
$x = 0,0$	+3485	+2285	+1438	+ 862	+ 471	+ 216	+ 54	+ 0
0,2	+3531	+2386	+1574	+1003	+ 611	+ 345	+ 166	+ »
0,4	+4840	+3569	+2614	+1903	+1377	+ 985	+ 694	+ »
0,6	+6338	+4782	+3583	+2663	+1962	+1430	+1028	+ »
0,8	+4215	+2917	+2221	+1280	+ 796	+ 470	+ 252	+ »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ 0

$\rho_1 = 2,7, \quad \frac{1}{e_1} = 299,04.$

	$y = 1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	0,86	0,84	0,82	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,806$
$x = 0,0$	+1820	+1063	+ 575	+ 275	+ 105	+ 19	— 17	— 24	— 17	— 6	— 0
0,2	+1171	+ 621	+ 282	+ 88	— 13	— 53	— 58	— 48	— 31	— 16	— »
0,4	— 94	— 236	— 288	— 287	— 254	— 210	— 161	— 118	— 82	— 56	— »
0,6	— 950	— 774	— 616	— 479	— 364	— 270	— 196	— 139	— 96	— 65	— »
0,8	— 699	— 486	— 329	— 216	— 135	— 80	— 44	— 20	— 8	— 2	— »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	— »	— »	— »	— »	— »	— »	— »	— »	— »	— »	— 0

$\rho_1 = 2,7, \quad \frac{1}{e_1} = 297,78.$

	$y = 1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	0,86	0,84	0,82	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,815$
$x = 0,0$	+2113	+1285	+ 742	+ 400	+ 196	+ 84	+ 28	+ 5	— 1	— 0	— 0
0,2	+1539	+ 903	+ 497	+ 250	+ 108	+ 35	+ 4	— 6	— 5	— 2	— »
0,4	+ 533	+ 259	+ 95	+ 8	— 30	— 41	— 36	— 26	— 17	— 10	— »
0,6	— 90	— 115	— 116	— 102	— 82	— 63	— 45	— 31	— 19	— 12	— »
0,8	— 141	— 98	— 67	— 44	— 27	— 16	— 9	— 3	— 2	— 1	— »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	— »	— »	— »	— »	— »	— »	— »	— »	— »	— »	— 0

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

$\rho_1 = 2,7, \quad \frac{1}{e_1} = 296,53.$

	$y = 1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	0,86	0,84	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,824$
$x = 0,0$	+2378	+1484	+ 890	+ 508	+ 273	+ 137	+ 62	+ 24	+ 7	+ 0
0,2	+1881	+1163	+ 693	+ 395	+ 214	+ 110	+ 55	+ 27	+ 14	+ »
0,4	+1158	+ 736	+ 462	+ 289	+ 182	+ 118	+ 81	+ 58	+ 43	+ »
0,6	+ 757	+ 533	+ 376	+ 269	+ 194	+ 140	+ 103	+ 75	+ 55	+ »
0,8	+ 414	+ 287	+ 193	+ 126	+ 80	+ 47	+ 25	+ 13	+ 4	+ »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ 0

$\rho_1 = 2,7, \quad \frac{1}{e_1} = 295,30.$

	$y = 1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	0,86	0,84	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,832$
$x = 0,0$	+2617	+1661	+1018	+ 599	+ 335	+ 177	+ 85	+ 35	+ 7	+ 0
0,2	+2195	+1400	+ 869	+ 523	+ 306	+ 174	+ 95	+ 51	+ 24	+ »
0,4	+1750	+1194	+ 813	+ 556	+ 383	+ 268	+ 190	+ 136	+ 96	+ »
0,6	+1592	+1172	+ 859	+ 632	+ 463	+ 338	+ 246	+ 177	+ 126	+ »
0,8	+ 966	+ 670	+ 452	+ 295	+ 186	+ 109	+ 60	+ 29	+ 10	+ »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ 0

$\rho_1 = 2,7, \quad \frac{1}{e_1} = 294,08.$

	$y = 1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	0,86	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,840$
$x = 0,0$	+2829	+1814	+1127	+ 673	+ 383	+ 204	+ 97	+ 35	+ 0
0,2	+2484	+1615	+1026	+ 635	+ 383	+ 224	+ 125	+ 65	+ »
0,4	+2320	+1633	+1148	+ 810	+ 572	+ 407	+ 290	+ 206	+ »
0,6	+2414	+1799	+1334	+ 988	+ 727	+ 533	+ 386	+ 276	+ »
0,8	+1515	+1051	+ 709	+ 463	+ 291	+ 171	+ 93	+ 45	+ »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ 0

$\rho_1 = 2,7, \quad \frac{1}{e_1} = 292,85.$

	$y = 1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	0,86	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,849$
$x = 0,0$	+3014	+1945	+1216	+ 731	+ 417	+ 219	+ 99	+ 27	+ 0
0,2	+2746	+1807	+1164	+ 731	+ 446	+ 263	+ 145	+ 71	+ »
0,4	+2869	+2054	+1468	+1051	+ 750	+ 537	+ 382	+ 270	+ »
0,6	+3224	+2417	+1801	+1339	+ 986	+ 719	+ 522	+ 373	+ »
0,8	+2061	+1430	+ 965	+ 630	+ 395	+ 233	+ 127	+ 61	+ »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ 0

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

$$\rho_1 = 2,7, \qquad \frac{1}{e_1} = 291,65.$$

	$y = 1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	0,86	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,857$
$x = 0,0$	+3173	+2053	+1285	+ 771	+ 436	+ 223	+ 89	+ 8	+ 0
0,2	+2982	+1976	+1282	+ 809	+ 495	+ 288	+ 153	+ 67	+ »
0,4	+3394	+2456	+1771	+1277	+ 917	+ 657	+ 465	+ 326	+ »
0,6	+4021	+3023	+2259	+1680	+1238	+ 902	+ 654	+ 466	+ »
0,8	+2604	+1807	+1218	+ 796	+ 498	+ 293	+ 159	+ 77	+ »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ 0

$$\rho_1 = 2,7, \qquad \frac{1}{e_1} = 290,46.$$

	$y = 1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,865$
$x = 0,0$	+3304	+2138	+1335	+ 795	+ 440	+ 211	+ 69	+ 0
0,2	+3192	+2123	+1380	+ 871	+ 529	+ 302	+ 151	+ »
0,4	+3898	+2840	+2059	+1490	+1072	+ 767	+ 540	+ »
0,6	+4806	+3620	+2708	+2015	+1485	+1081	+ 783	+ »
0,8	+3144	+2181	+1471	+ 960	+ 600	+ 353	+ 192	+ »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ 0

$$\rho_1 = 2,7, \qquad \frac{1}{e_1} = 289,27.$$

	$y = 1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,873$
$x = 0,0$	+3409	+2200	+1366	+ 802	+ 430	+ 189	+ 38	+ 0
0,2	+3375	+2247	+1459	+ 917	+ 550	+ 303	+ 139	+ »
0,4	+4380	+3203	+2332	+1689	+1215	+ 867	+ 608	+ »
0,6	+5579	+4206	+3150	+2342	+1726	+1260	+ 907	+ »
0,8	+3681	+2552	+1722	+1123	+ 702	+ 414	+ 224	+ »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ 0

$$\rho_1 = 2,7, \qquad \frac{1}{e_1} = 288,09.$$

	$y = 1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,881$
$x = 0,0$	+3485	+2240	+1376	+ 793	+ 407	+ 152	+ 0
0,2	+3531	+2349	+1520	+ 946	+ 554	+ 292	+ »
0,4	+4840	+3551	+2588	+1876	+1348	+ 958	+ »
0,6	+6338	+4782	+3583	+2665	+1961	+1424	+ »
0,8	+4215	+2923	+1871	+1285	+ 801	+ 472	+ »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ 0

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

$\rho_1 = 2,5, \qquad \frac{1}{e_1} = 299,04.$

	$y = 1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	0,86	0,84	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,821$
$x = 0,0$	+1820	+1026	+ 526	+ 231	+ 71	− 2	− 26	− 24	− 12	− 0
0,2	+1171	+ 592	+ 244	+ 54	− 37	− 65	− 62	− 44	− 25	− »
0,4	− 94	− 252	− 309	− 303	− 265	− 213	−160	−114	− 77	− »
0,6	− 959	− 781	− 625	− 485	− 367	− 271	−195	−138	− 95	− »
0,8	− 699	− 488	− 332	− 218	− 136	− 80	− 44	− 21	− 8	− »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	− »	− »	− »	− »	− »	− »	− »	− »	− »	− 0

$\rho_1 = 2,5, \qquad \frac{1}{e_1} = 297,78.$

	$y = 1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	0,86	0,84	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,828$
$x = 0,0$	+2113	+1248	+ 693	+ 355	+ 160	+ 61	+ 15	+ 1	− 1	− 0
0,2	+1539	+ 874	+ 458	+ 214	+ 81	+ 19	− 4	− 7	− 4	− »
0,4	+ 533	+ 243	+ 74	− 10	− 42	− 45	− 37	− 25	− 15	− »
0,6	− 90	− 122	− 123	− 106	− 85	− 63	− 43	− 29	− 19	− »
0,8	− 141	− 99	− 69	− 45	− 28	− 16	− 9	− 4	− 1	− »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	− »	− »	− »	− »	− »	− »	− »	− »	− »	− 0

$\rho_1 = 2,5, \qquad \frac{1}{e_1} = 296,53.$

	$y = 1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	0,86	0,84	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,836$
$x = 0,0$	+2378	+1447	+ 840	+ 461	+ 235	+ 110	+ 45	+ 16	+ 2	+ 0
0,2	+1881	+1133	+ 653	+ 358	+ 185	+ 91	+ 44	+ 21	+ 9	+ »
0,4	+1158	+ 720	+ 441	+ 270	+ 170	+ 112	+ 78	+ 57	+ 41	+ »
0,6	+ 757	+ 527	+ 370	+ 265	+ 192	+ 141	+105	+ 76	+ 54	+ »
0,8	+ 414	+ 287	+ 193	+ 126	+ 80	+ 48	+ 26	+ 12	+ 5	+ »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ 0

$\rho_1 = 2,5, \qquad \frac{1}{e_1} = 295,30.$

	$y = 1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	0,86	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,844$
$x = 0,0$	+2617	+1622	+ 967	+ 550	+ 294	+ 147	+ 64	+ 21	+ 0
0,2	+2195	+1369	+ 828	+ 484	+ 274	+ 150	+ 80	+ 39	+ »
0,4	+1750	+1177	+ 792	+ 536	+ 369	+ 259	+184	+131	+ »
076	+1592	+1166	+ 855	+ 629	+ 462	+ 339	+248	+178	+ »
0,8	+ 966	+ 671	+ 453	+ 296	+ 186	+ 111	+ 60	+ 29	+ »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ 0

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

$$\rho_1 = 2,5, \qquad \frac{1}{e_1} = 294,08.$$

	$y=1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	0,86	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,852$
$x=0,0$	+2829	+1775	+1074	+ 622	+ 339	+ 170	+ 71	+ 16	+ 0
0,2	+2484	+1583	+ 983	+ 594	+ 348	+ 197	+105	+ 48	+ »
0,4	+2320	+1616	+1127	+ 789	+ 557	+ 396	+281	+198	+ »
0,6	+2414	+1794	+1331	+ 986	+ 727	+ 533	+388	+277	+ »
0,8	+1515	+1052	+ 711	+ 465	+ 292	+ 173	+ 94	+ 45	+ »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ 0

$$\rho_1 = 2,5, \qquad \frac{1}{e_1} = 292,85.$$

	$y=1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	0,86	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,859$
$x=0,0$	+3014	+1905	+1162	+ 677	+ 369	+ 181	+ 68	+ 2	+ 0
0,2	+2746	+1775	+1119	+ 687	+ 408	+ 231	+120	+ 47	+ »
0,4	+2869	+2036	+1446	+1028	+ 733	+ 523	+370	+258	+ »
0,6	+3224	+2413	+1799	+1336	+ 986	+ 722	+524	+373	+ »
0,8	+2061	+1431	+ 968	+ 633	+ 397	+ 235	+128	+ 61	+ »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ 0

$$\rho_1 = 2,5, \qquad \frac{1}{e_1} = 291,65.$$

	$y=1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,867$
$x=0,0$	+3173	+2012	+1229	+ 715	+ 384	+ 178	+ 53	+ 0
0,2	+2982	+1943	+1235	+ 763	+ 453	+ 252	+123	+ »
0,4	+3394	+2437	+1748	+1253	+ 897	+ 640	+450	+ »
0,6	+4021	+3020	+2257	+1679	+1239	+ 906	+656	+ »
0,8	+2604	+1808	+1223	+ 800	+ 501	+ 296	+161	+ »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ 0

$$\rho_1 = 2,5, \qquad \frac{1}{e_1} = 290,46.$$

	$y=1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,874$
$x=0,0$	+3304	+2096	+1277	+ 735	+ 385	+ 163	+ 27	+ 0
0,2	+3192	+2089	+1332	+ 823	+ 484	+ 261	+115	+ »
0,4	+3898	+2848	+2034	+1465	+1050	+ 746	+522	+ »
0,6	+4806	+3618	+2708	+2014	+1487	+1086	+784	+ »
0,8	+3144	+2183	+1477	+ 965	+ 605	+ 357	+193	+ »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ 0

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

$$\rho_1 = 2,5, \qquad \frac{1}{e_1} = 289,27.$$

	$y = 1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,882$
$x = 0,0$	+3409	+2157	+1305	+ 738	+ 370	+ 135	+ 0
0,2	+3375	+2211	+1409	+ 864	+ 498	+ 256	+ »
0,4	+4380	+3184	+2305	+1662	+1190	+ 843	+ »
0,6	+5579	+4205	+3149	+2341	+1727	+1260	+ »
0,8	+3681	+2555	+1727	+1130	+ 707	+ 418	+ »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ 0

$$\rho_1 = 2,5, \qquad \frac{1}{e_1} = 288,09.$$

	$y = 1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,889$
$x = 0,0$	+3485	+2194	+1313	+ 724	+ 341	+ 93	+ 0
0,2	+3531	+2312	+1466	+ 891	+ 501	+ 241	+ »
0,4	+4840	+3529	+2558	+1848	+1319	+ 928	+ »
0,6	+6338	+4782	+3583	+2663	+1964	+1430	+ »
0,8	+4215	+2925	+1979	+1292	+ 809	+ 476	+ »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ 0

$$\rho_1 = 2,3, \qquad \frac{1}{e_1} = 299,04.$$

	$y = 1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	0,86	0,84	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,833$
$x = 0,0$	+1820	+ 989	+ 480	+ 189	+ 42	— 19	— 32	— 21	— 5	— 0
0,2	+1171	+ 562	+ 208	+ 23	— 57	— 75	— 63	— 39	— 17	— »
0,4	— 94	— 269	— 329	— 319	— 272	— 214	—157	—109	— 72	— »
0,6	— 948	— 788	— 632	— 491	— 371	— 272	—194	—136	— 94	— »
0,8	— 700	— 490	— 333	— 219	— 138	— 82	— 45	— 21	— 8	— »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	— »	— »	— »	— »	— »	— »	— »	— »	— »	— 0

$$\rho_1 = 2,3, \qquad \frac{1}{e_1} = 297,78.$$

	$y = 1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	0,86	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,840$
$x = 0,0$	+2113	+1210	+ 646	+ 312	+ 129	+ 41	+ 5	+ 0	— 0
0,2	+1539	+ 844	+ 421	+ 182	+ 59	+ 6	— 8	— 7	— »
0,4	+ 533	+ 226	+ 55	— 27	— 50	— 48	— 37	— 22	— »
0,6	— 90	— 128	— 128	— 111	— 87	— 63	— 42	— 27	— »
0,8	— 141	— 101	— 69	— 46	— 29	— 17	— 9	— 4	— »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	— »	— »	— »	— »	— »	— »	— »	— »	— 0

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

$$\rho_1 = 2,3, \qquad \frac{1}{e_1} = 296,53.$$

	$y = 1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	0,86	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,847$
$x = 0,0$	+2378	+1409	+ 791	+ 417	+ 200	+ 87	+ 31	+ 10	+ 0
0,2	+1881	+1103	+ 614	+ 323	+ 159	+ 75	+ 35	+ 15	+ »
0,4	+1158	+ 703	+ 423	+ 252	+ 160	+ 107	+ 75	+ 57	+ »
0,6	+ 757	+ 521	+ 366	+ 261	+ 190	+ 140	+106	+ 76	+ »
0,8	+ 414	+ 286	+ 193	+ 126	+ 79	+ 47	+ 26	+ 12	+ »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ 0

$$\rho_1 = 2,3, \qquad \frac{1}{e_1} = 295,30.$$

	$y = 1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	0,86	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,854$
$x = 0,0$	+2617	+1584	+ 917	+ 504	+ 257	+ 120	+ 45	+ 10	+ 0
0,2	+2195	+1339	+ 787	+ 448	+ 245	+ 130	+ 67	+ 28	+ »
0,4	+1750	+1160	+ 774	+ 517	+ 357	+ 252	+178	+127	+ »
0,6	+1592	+1160	+ 852	+ 627	+ 462	+ 339	+250	+180	+ »
0,8	+ 966	+ 471	+ 454	+ 297	+ 186	+ 111	+ 61	+ 12	+ »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ 0

$$\rho_1 = 2,3, \qquad \frac{1}{e_1} = 294,08.$$

	$y = 1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,861$
$x = 0,0$	+2828	+1736	+1022	+ 574	+ 298	+ 139	+ 48	+ 0
0,2	+2484	+1552	+ 941	+ 555	+ 315	+ 172	+ 87	+ »
0,4	+2320	+1599	+1108	+ 768	+ 543	+ 386	+ 272	+ »
0,6	+2415	+1789	+1329	+ 984	+ 727	+ 533	+ 389	+ »
0,8	+1515	+1053	+ 713	+ 467	+ 293	+ 174	+ 95	+ »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ 0

$$\rho_1 = 2,3, \qquad \frac{1}{e_1} = 292,85.$$

	$y = 1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,868$
$x = 0,0$	+3014	+1866	+1108	+ 627	+ 324	+ 145	+ 39	+ 0
0,2	+2746	+1743	+1076	+ 645	+ 371	+ 202	+ 96	+ »
0,4	+2869	+2019	+1426	+1006	+ 717	+ 510	+ 358	+ »
0,6	+3224	+2408	+1798	+1335	+ 986	+ 723	+ 525	+ »
0,8	+2061	+1433	+ 971	+ 636	+ 400	+ 237	+ 129	+ »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ 0

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

$$\rho_1 = 2,3, \quad \frac{1}{e_1} = 291,65.$$

	$y = 1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,875$
$x = 0,0$	+3173	+1972	+1173	+ 661	+ 335	+ 138	+ 18	+ 0
0,2	+2982	+1910	+1190	+ 718	+ 411	+ 218	+ 92	+ »
0,4	+3394	+2420	+1727	+1230	+ 879	+ 624	+ 435	+ »
0,6	+4021	+3017	+2257	+1677	+1239	+ 907	+ 656	+ »
0,8	+2604	+1810	+1226	+ 804	+ 505	+ 300	+ 163	+ »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ 0

$$\rho_1 = 2,3, \quad \frac{1}{e_1} = 290,46.$$

	$y = 1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,882$
$x = 0,0$	+3304	+2055	+1219	+ 678	+ 330	+ 117	+ 0
0,2	+3192	+2055	+1285	+ 773	+ 437	+ 221	+ »
0,4	+3898	+2803	+2012	+1441	+1029	+ 727	+ »
0,6	+4806	+3615	+2708	+2013	+1485	+1093	+ »
0,8	+3144	+2185	+1481	+ 971	+ 610	+ 362	+ »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ 0

$$\rho_1 = 2,3, \quad \frac{1}{e_1} = 289,27.$$

	$y = 1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,889$
$x = 0,0$	+3409	+2114	+1244	+ 676	+ 312	+ 83	+ 0
0,2	+3374	+2176	+1361	+ 813	+ 446	+ 210	+ »
0,4	+4380	+3165	+2279	+1636	+1167	+ 819	+ »
0,6	+5579	+4204	+3148	+2340	+1727	+1260	+ »
0,8	+3681	+2558	+1732	+1138	+ 713	+ 423	+ »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ 0

$$\rho_1 = 2,3, \quad \frac{1}{e_1} = 288,09.$$

	$y = 1,00$	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,896$
$x = 0,0$	+3485	+2153	+1250	+ 660	+ 276	+ 40	+ 0
0,2	+3531	+2277	+1417	+ 833	+ 443	+ 189	+ »
0,4	+4840	+3511	+2531	+1821	+1292	+ 902	+ »
0,6	+6338	+4780	+3588	+2662	+1960	+1432	+ »
0,8	+4215	+2928	+1985	+1302	+ 819	+ 485	+ »
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ »	+ 0

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

M. Faye (*Cours d'Astronomie de l'École Polytechnique*, Ire Partie, p. 299) donne, pour valeur de l'aplatissement terrestre,

$$e_1 = \frac{1}{292,2 \pm 1,5}.$$

Or on constate immédiatement, à l'aide des Tableaux qui précèdent, que, quelle que soit la densité superficielle ρ_1, l'équation

$$Nn - Dk = 0$$

n'est vérifiée par des systèmes convenables de x et y que pour des valeurs de e_1 inférieures à un certain nombre η, compris entre $\frac{1}{296,53}$ et $\frac{1}{297,78}$. Il en résulte que la Terre ne peut être assimilée à une masse fluide composée de trois couches homogènes distinctes.

La véritable constitution du globe est certainement beaucoup plus complexe que nous ne l'avons admis dans notre hypothèse. Cependant, disposant d'un paramètre arbitraire, il était naturel de s'attendre à pouvoir déterminer cette variable de façon à rendre les équations de Clairaut identiques, lorsqu'on y introduit les nombres fournis par l'observation.

Dans ce qui suit, nous allons déterminer le nombre η auquel l'aplatissement terrestre devrait être inférieur, pour que le problème soit susceptible de solutions.

IV.

L'équation (17) du § II de la seconde Partie, en posant

$$(1)\quad \begin{cases} N(x,y) = y^5\{5ax^3(y^2-x^2)[y^3(y^2-x^2)\rho_1 + a - bx^2] \\ \qquad + (a-bx^2)(by^2-a)(2y^5+3x^5) + 5x^5(by^2-a)^2\}, \\ D(x,y) = y^2[(5\rho_1 y^3 + 2b)(y^2-x^2) + 3(by^2-a)][5x^3y^3(y^2-x^2)\rho_1 \\ \qquad + 5x^3(a-bx^2) + 2y^3(by^2-a)] - 9x^5(a-bx^2)(by^2-a), \end{cases}$$

peut s'écrire

$$(2)\qquad \frac{k}{n} = \frac{N(x,y)}{D(x,y)}.$$

Lorsqu'on fait x ou y égal à $\sqrt{\frac{a}{b}}$, les trois couches se réduisent à deux, et l'é-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

quation (2) devient, en remplaçant $\sqrt{\frac{a}{b}}$ par h,

$$\frac{k}{n} = \frac{bh^5}{2b + 5\rho_1 h^3}.$$

Quelle que soit la densité extérieure ρ_1, cette équation a pour racine $\varepsilon = \frac{1}{297,53}$. Nous allons chercher la variation de cette racine lorsqu'on ajoute une très petite quantité ζ au second membre de l'équation; à cet effet, il convient de la développer en série suivant les puissances ascendantes de ζ.

Posons

$$f(e_1, \zeta) = \frac{k}{n} - \frac{bh^5}{2b + 5\rho_1 h^3} - \zeta = 0.$$

Différentiant, on a

$$\frac{\partial f}{\partial e} de_1 + \frac{\partial f}{\partial \zeta} d\zeta = 0.$$

Remplaçant k, n, h en fonction de e_1 [formules (15), p. 32] et effectuant les dérivations, il vient

$$\frac{\partial}{\partial e_1}\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{25}{6}\frac{\Delta^2\varphi}{n^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial e_1}\left(\frac{bh^5}{2b + 5\rho_1 h^3}\right) = \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{bh^5}{2b + 5\rho_1 h^3}\right)\frac{1}{2h}\frac{\partial h^2}{\partial e_1} = \frac{25}{3}\frac{h^3(b + \rho_1 h^3)}{(2b + 5\rho_1 h^3)^2}\Delta\frac{C}{C - A};$$

d'où

$$\frac{25}{6}\Delta\left[\frac{\Delta\varphi}{n^2} - \frac{2h^3(b + \rho_1 h^3)}{(2b + 5\rho_1 h^3)^2}\frac{C}{C - A}\right] de_1 - d\zeta = 0,$$

$$\frac{de_1}{d\zeta} = \frac{6}{25\Delta\left[\frac{\Delta\varphi}{n^2} - \frac{2h^3(b + \rho_1 h^3)}{(2b + 5\rho_1 h^3)^2}\frac{C}{C - A}\right]}.$$

On a donc

$$(3) \qquad e_1 = \varepsilon + \frac{6\zeta}{25\Delta\left[\frac{\Delta\varphi}{n^2} - \frac{2h^3(b + \rho_1 h^3)}{(2b + 5\rho_1 h^3)^2}\frac{C}{C - A}\right]} + \ldots.$$

Les quantités n, φ, $\frac{C - A}{C}$ sont de l'ordre de e_1. Il en résulte que $\frac{de_1}{d\zeta}$ est de l'ordre de e_1 et pareille chose arrive pour les dérivées suivantes. Si la quantité ζ est très petite, on pourra se contenter des termes écrits dans la formule (3), puisque

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

les nombres $\zeta^2, \zeta^3, \ldots$, déjà négligeables, sont multipliés par des coefficients de l'ordre de e_1.

Dans ce qui suit, nous supposerons la densité superficielle $\rho_1 = 2,5$.

Dans le coefficient de ζ, e_1 doit être remplacé par $\varepsilon = \frac{1}{297,53}$. Les calculs faits, on trouve

$$(4) \qquad e_1 = \varepsilon - \frac{\zeta}{289,8}.$$

Cette formule montre que e_1 est supérieur à ε lorsque ζ est une quantité négative. Revenons à l'équation (2). On peut l'écrire

$$\frac{k}{n} = \frac{bh^5}{2b + 5\rho_1 h^3} + \frac{N}{D} - \frac{bh^5}{2b + 5\rho_1 h^3}.$$

La fonction $\frac{N}{D} - \frac{bh^5}{2b + 5\rho_1 h^3}$ devient nulle, soit qu'on y fasse $x = h$, soit qu'on y remplace y par la même quantité. On a donc identiquement

$$\frac{N}{D} - \frac{bh^5}{2b + 5\rho_1 h^3} = (y - h)(x - h)\varphi(x, y),$$

et $\varphi(x, y)$ reste finie pour $x = h$ ou $y = h$.

La limite du premier membre de l'identité

$$\frac{(2b + 5\rho_1 h^3)N - bh^5 D}{(2b + 5\rho_1 h^3(y - h)D} = (x - h)\varphi(x, y),$$

pour $y = h$, qui s'obtient facilement en employant la règle des dérivées, est identiquement nulle; donc $\varphi(x, y)$ contient le facteur $(y - h)$ et l'on a

$$\frac{N}{D} - \frac{bh^5}{2b + 5\rho_1 h^3} = (y - h)^2 (x - h)\,\psi(x, y).$$

On en tire

$$\frac{(2b + 5\rho_1 h^3)N - bh^5 D}{(2b + 5\rho_1 h^3)(x - h)D} = (y - h)^2\,\psi(x, y).$$

La limite du premier membre pour $x = h$, développée suivant les puissances ascendantes de $(y - h)$, est

$$\frac{5b^2h^2}{(2b + 5\rho_1 h^3)^2}(y - h)^2 + \ldots.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

Pour des valeurs de x et de y très voisines de h, on a donc [1]

$$\frac{N}{D} - \frac{bh^5}{2b + 5\rho_1 h^3} = \frac{5b^2h^2}{(2b + 5\rho_1 h^3)^2}(x-h)(y-h)^2.$$

C'est une quantité négative très petite, qui croît en valeur absolue quand x et y s'éloignent de h.

Remplaçons ζ par $\frac{5b^2h^2}{(2b+5\rho_1h^3)^2}(x-h)(y-h)^2$ dans l'équation (4). D'après la remarque qui a été faite plus haut, on aura $e_1 > \varepsilon$, et e_1 augmentera quand x et y s'éloigneront de h tout en restant très voisins. Cette racine a d'ailleurs une limite assez rapprochée de ε, puisque pour $e_1 = \frac{1}{296,53}$ le problème n'admet pas de solutions. On peut reconnaître facilement que cette limite, désignée plus haut par η, est à peine différente de ε.

Faisons, dans l'équation (4),

$$\zeta = \zeta(x, y, e_1) = \frac{N(x,y)}{D(x,y)} - \frac{bh^5}{2b + 5\rho_1 h^3}.$$

On aura

$$e_1 = \varepsilon - \frac{\zeta(x, y, e_1)}{289,8}.$$

Cette équation a la forme de celle de Lagrange, par suite

$$e_1 = \varepsilon - \frac{\zeta(x,y,\varepsilon)}{289,8} + \left(\frac{1}{289,8}\right)^2 \zeta(x,y,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\zeta(x,y,\varepsilon) + \ldots,$$

ou simplement

$$(5) \qquad e_1 = \varepsilon - \frac{\zeta(x,y,\varepsilon)}{289,8}.$$

Cette formule montre que η correspond au maximum de la valeur positive de $-\zeta(x, y, \varepsilon)$.

---

(1) On a plus rigoureusement

$$\frac{N}{D} - \frac{bh^5}{2b+5\rho_1h^3} = \frac{b^2}{(2b+5\rho_1h^3)^2}(x-h)(y-h)^2 \left\{ \begin{array}{l} 5h^2 - \frac{25}{4}h(x-h) - \frac{5h}{2}\,\frac{23b+5\rho_1h^3}{b+\rho_1h^3}(y-h) \\ \quad + 7(x-h)^2 + \frac{228b+33\rho_1h^3}{2(b+\rho_1h^3)}(x-h)(y-h) \\ \qquad + \frac{599b^2+1228b\rho_1h^3+89\rho_1^2h^6}{4(b+\rho_1h^3)^2}(y-h)^2 + \ldots \end{array} \right\};$$

mais ce développement cesse assez rapidement de bien représenter la fonction $\frac{N}{D}$ quand x et y s'éloignent de h.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

Logarithmes de $\frac{N(x,y)}{D(x,y)}$ *pour* $\rho_1 = 2,5$ *et* $e_1 = \varepsilon = \frac{1}{297,53}$.

	$y=\sqrt{\frac{a}{b}}=0,830\ldots$	$y=0,84$	$y=0,86$	$y=0,88$	$y=0,90$	$y=0,92$	$y=0,94$	$y=0,96$	$y=0,98$	$y=1,00$
$x=0,0\ldots$	$\bar{2},958311$	$\bar{2},958527$	$\bar{2},959710$	$\bar{2},962723$	$\bar{2},966343$	$\bar{2},970647$	$\bar{2},975480$	$\bar{2},980707$	$\bar{2},986205$	$\bar{2},991912$
$x=0,2\ldots$	$\bar{2},958311$	$\bar{2},958202$	$\bar{2},958326$	$\bar{2},959533$	$\bar{2},961803$	$\bar{2},964886$	$\bar{2},968618$	$\bar{2},972857$	$\bar{2},977466$	$\bar{2},982359$
$x=0,4\ldots$	$\bar{2},958311$	$\bar{2},958237$	$\bar{2},957919$	$\bar{2},957774$	$\bar{2},958020$	$\bar{2},958772$	$\bar{2},960005$	$\bar{2},961703$	$\bar{2},963819$	$\bar{2},966286$
$x=0,6\ldots$	$\bar{2},958311$	$\bar{2},958277$	$\bar{2},958134$	$\bar{2},957967$	$\bar{2},957855$	$\bar{2},957871$	$\bar{2},958040$	$\bar{2},958368$	$\bar{2},958864$	$\bar{2},959514$
$x=0,8\ldots$	$\bar{2},958311$	$\bar{2},958302$	$\bar{2},958293$	$\bar{2},958268$	$\bar{2},958249$	$\bar{2},958239$	$\bar{2},958237$	$\bar{2},958247$	$\bar{2},958272$	$\bar{2},958309$
$x=\sqrt{\frac{a}{b}}\ldots$	$\bar{2},958311$	$\bar{2},958311$	$\bar{2},958311$	$\bar{2},958311$	$\bar{2},958311$	$\bar{2},958311$	$\bar{2},958311$	$\bar{2},958311$	$\bar{2},958311$	$\bar{2},958311$

On voit, sur le Tableau qui précède, que $\frac{N(x,y)}{D(x,y)}$ pour $e_1 = \varepsilon$ passe par sa plus petite valeur dans le voisinage de $x = 0,4$, $y = 0,88$. Le logarithme approché du minimum est $\bar{2},9576$. Il est facile d'en déduire que le maximum de $-\zeta(x,y,\varepsilon)$ a pour valeur $0,00015$. Porté dans l'équation (5), ce nombre donne $0,0000005$ pour différence entre η et ε, ce qui est insensible.

Ainsi, la théorie de Clairaut ne représente pas mieux les observations quand, au lieu de deux couches, on en prend trois.

Vu et approuvé :

Paris, le 9 mai 1887.

Le Doyen,

E. HÉBERT.

Permis d'imprimer :

Paris, le 9 mai 1887.

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

GRÉARD.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Approximation des fonctions de très grands nombres d'après un Mémoire de M. Darboux (*Journal de Liouville*, 3e série, t. IV).

Vu et approuvé :

Paris, le 9 mai 1887.

Le Doyen,

E. HÉBERT.

Permis d'imprimer :

Paris, le 9 mai 1887.

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

GRÉARD.

13061 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 20 2