THÈSE

D'ASTRONOMIE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS,

PAR L'ABBÉ J.-B. FOURESTEY.

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES.

MM. LE B^{ON} THÉNARD, Doyen.	
LACROIX.	
BIOT.	
LE B^{ON} POISSON.	
FRANCOEUR.	
BEUDANT.	
GEOFFROY-S^{T}-HILAIRE.	
MIRBEL.	*Professeurs.*
POUILLET.	
PONCELET.	
DE BLAINVILLE.	
CONSTANT PRÉVOST.	
DUMAS.	
AUGUSTE S^{T}-HILAIRE.	
LIBRI.	
DESPRETZ.	

MM. LEFÉBURE DE FOURCY.	
ISIDORE G.-S^{T}-HILAIRE.	*Suppléants.*
STURM.	

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

THÈSE D'ASTRONOMIE.

SUR LA DÉTERMINATION

DES

ORBITES DES COMÈTES.

1. La détermination du mouvement des planètes autour du Soleil présente deux cas : Celui où l'on peut les observer assez long-temps et dans des positions particulières, pour déduire des observations mêmes la durée de leur révolution ; c'est le cas de toutes les planètes qui, depuis leur découverte, ont pu être observées dans un nombre suffisant d'oppositions ; Et celui où l'on n'a pu faire qu'un petit nombre d'observations et dans une portion peu étendue de l'orbite : c'est le cas des planètes nouvellement découvertes et de toutes les comètes.

Ce dernier problème, dont la difficulté est généralement avouée des géomètres, les a beaucoup occupés. On connaît les méthodes de Lagrange, de Gauss, de Legendre, de Laplace, d'Olbers. Je me propose de développer ici une nouvelle méthode proposée il y a quelque temps par M. Binet, professeur d'Astronomie au Collége de France.

Une méthode de cette nature, pour être bien appréciée, doit être considérée sous le double point de vue analytique et pratique. Sous le rapport analytique, la méthode de M. Binet m'a paru avoir le mérite de la clarté ; elle se résume tout entière dans des constructions graphiques très simples ; en sorte que *dans la détermination des éléments géométriques de l'orbite, tous les intermédiaires peuvent être rendus géométriques.* (Binet, *Mémoire sur l'Astronomie.*)

Mais le principal mérite d'une méthode de ce genre doit consister surtout à rendre les calculs numériques plus faciles et plus courts. Comme aucun exemple, calculé d'après celle-ci, n'avait été publié par son auteur, j'ai essayé d'en faire l'application à la comète de 1781, qui a servi d'exemple à M. de Laplace pour éprouver sa *méthode pour la détermination des orbites des comètes.* C'est ce qu'on peut voir dans le 3e volume de l'*Astronomie* de M. Biot, où la méthode et l'exemple sont textuellement insérés. J'en ai rapporté les résultats avec détail, afin qu'on puisse comparer les calculs à faire dans chaque méthode pour les obtenir.

Les éléments de l'orbite dépendent des trois coordonnées de l'astre et de leurs coefficients différentiels pris par rapport au temps. En effet, soient ξ, η, ζ les trois coordonnées de la comète rapportées au centre du Soleil; ρ_1 son rayon vecteur autour de ce point; C, C′, C″ le double de la projection, sur chaque plan coordonné, de l'aire décrite par ce rayon dans l'unité de temps; A le demi-grand axe, e l'excentricité de l'orbite; I l'inclinaison de son plan sur l'écliptique; K la longitude du nœud ascendant, p la distance périhélie de l'astre, v sa distance angulaire et héliocentrique au périhélie, et t le temps écoulé depuis son passage par ce point; on a les formules suivantes :

$$(a)\quad \rho_1^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

$$(b)\quad \left\{\begin{aligned} C &= \frac{\xi d\eta - \eta d\xi}{dt}, \\ C' &= \frac{\zeta d\xi - \xi d\zeta}{dt}, \\ C'' &= \frac{\eta d\zeta - \zeta d\eta}{dt}, \end{aligned}\right.$$

$$(c)\quad \frac{1}{A} = \frac{2}{\rho_1} - \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{dt^2},$$

$$(d)\quad A(1 - e^2) = C^2 + C'^2 + C''^2,$$

$$(e)\quad A(1 - e^2) = 2p - \frac{p^2}{A},$$

$$(f)\quad \text{tang } I = \frac{\sqrt{C'^2 + C''^2}}{C},$$

$$(g)\quad \text{tang } K = -\frac{C''}{C'},$$

$$(h)\quad \cos v = \frac{A(1 - e^2) - r}{e},$$

$$(i)\quad v = nt + 2e \sin nt + \frac{5e^2}{2.2} \sin 2nt + \frac{e^3}{1.3.2^2}(13 \sin 3nt - 3 \sin nt) + \ldots\ldots$$

Dans le cas d'un mouvement elliptique très excentrique, et dans celui d'un mouvement hyperbolique, on devra substituer à la formule (*i*) d'autres relations appropriées à ces hypothèses. Dans le cas du mouvement parabolique, au lieu des deux dernières formules, on a les suivantes pour déterminer v et t:

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} v = \frac{p}{\rho_1}, \quad t = \sqrt{2p^3}\left(\tang \tfrac{1}{2} v + \tfrac{1}{3} \tang^3 \tfrac{1}{2} v\right).$$

Ainsi la détermination complète de l'orbite dépend des six quantités

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \frac{d\xi}{dt},\ \frac{d\eta}{dt},\ \frac{d\zeta}{dt}.$$

Ces quantités peuvent être déterminées par des observations, qui fourniront en premier lieu la distance de la comète à la Terre et son coefficient différentiel pris par rapport au temps. C'est le procédé que je vais employer.

Détermination de ρ et $\frac{d\rho}{dt}$.

Soient **X**, **Y**, **Z** les composantes de la force accélératrice de la Terre par rapport au Soleil; x, y, z ses coordonnées rapportées à cet astre comme origine; X_1, Y_1, Z_1 les composantes de la force accélératrice de la comète; ρ sa distance à la Terre; α, β, γ les cosinus des angles que fait sa direction avec trois parallèles aux axes menées par le centre de la Terre, on en déduit les trois équations :

$$(1)\quad \begin{cases} \rho \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\,\dfrac{d\rho\, d\alpha}{dt^2} + \alpha\,\dfrac{d^2\rho}{dt^2} + X_1 - X = 0, \\[2mm] \rho \dfrac{d^2\beta}{dt^2} + 2\,\dfrac{d\rho\, d\beta}{dt^2} + \beta\,\dfrac{d^2\rho}{dt^2} + Y_1 - Y = 0, \\[2mm] \rho \dfrac{d^2\gamma}{dt^2} + 2\,\dfrac{d\rho\, d\gamma}{dt^2} + \gamma\,\dfrac{d^2\rho}{dt^2} + Z_1 - Z = 0. \end{cases}$$

Ces équations étant linéaires, peuvent être résolues par rapport à ρ et à ses coefficients différentiels.

En faisant, pour abréger,

$$\left(\alpha, d\beta, d^2\gamma\right) = \alpha d\beta d^2\gamma - \gamma d\beta d^2\alpha + \beta d\gamma d^2\alpha - \alpha d\gamma d^2\beta + \gamma d\alpha d^2\beta - \beta d\alpha d^2\gamma,$$

on a les trois équations suivantes :

$$(2)\quad \rho\left(\frac{\alpha, d\beta, d^2\gamma}{dt^2}\right) + (X_1 - X)(\beta d\gamma - \gamma d\beta) + (Y_1 - Y)(\gamma d\alpha - \alpha d\gamma) + (Z_1 - Z)(\alpha d\beta - \beta d\alpha) = 0,$$

$$(3)\quad \frac{2d\rho}{dt}\left(\frac{\alpha, d\beta, d^2\gamma}{dt}\right) + (X_1 - X)(\gamma d^2\beta - \beta d^2\gamma) + (Y_1 - Y)(\alpha d^2\gamma - \gamma d^2\alpha) + (Z_1 - Z)(\beta d^2\alpha - \alpha d^2\beta) = 0,$$

$$(4)\quad \frac{d^2\rho}{dt^2}\left(\alpha, d\beta, d^2\gamma\right) + (X_1 - X)(d\beta d^2\alpha - d\alpha d^2\beta) + (Y_1 - Y)(d\gamma d^2\alpha - d\alpha d^2\gamma) + (Z_1 - Z)(d\alpha d^2\beta - d\beta d^2\alpha) = 0.$$

2. Si l'on imagine une sphère concentrique à la Terre, et décrite d'un rayon égal à l'unité, le point dont les coordonnées seraient α, β, γ, décrirait sur cette sphère la route apparente de la comète. Le plan tangent à cette orbite apparente et passant par le centre de la Terre, fait avec les plans coordonnés des angles dont je désigne les cosinus par a, b, c; on aura donc

$$a = \frac{\beta d\gamma - \gamma d\beta}{d\sigma}, \quad b = \frac{\gamma d\alpha - \alpha d\gamma}{d\sigma}, \quad c = \frac{\alpha d\beta - \beta d\alpha}{d\sigma}:$$

$d\sigma$ est l'élément de la courbe apparente dont les projections sur les axes sont $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$.

Ces angles sont en même temps ceux d'une normale au plan tangent à l'orbite apparente passant par le centre de la Terre, et perçant la sphère en un point Π, qui sera le pôle du grand cercle tracé sur cette sphère par le plan.

Si de même on désigne par a', b', c' les cosinus des angles faits par le plan osculateur de l'orbite apparente avec les plans coordonnés, on aura

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} a' &= \frac{d\beta d^2\gamma - d\gamma d^2\beta}{\sqrt{(d\beta d^2\gamma - d\gamma d^2\beta)^2 + (d\gamma d^2\alpha - d\alpha d^2\gamma)^2 + (d\alpha d^2\beta - d\beta d^2\alpha)^2}}, \\ b' &= \frac{d\gamma d^2\alpha - d\alpha d^2\gamma}{\sqrt{(d\beta d^2\gamma - d\gamma d^2\beta)^2 + (d\gamma d^2\alpha - d\alpha d\gamma)^2 + (d\alpha d^2\beta - d\beta d^2\alpha)^2}}, \\ c' &= \frac{d\alpha d^2\beta - d\beta d^2\alpha}{\sqrt{(d\beta d^2\gamma - d\gamma d^2\beta)^2 + (d\gamma d^2\alpha - d\alpha d^2\gamma)^2 + d\alpha d^2\beta - d\beta d^2\alpha)^2}}; \end{aligned}\right.$$

ce sont en même temps les cosinus des angles que la normale à ce plan osculateur, passant par le centre de la Terre, fait avec trois parallèles aux axes.

Si l'on désigne par φ l'angle que fait cette droite avec la direction de la distance ρ, et si l'on remarque que le rayon de courbure du cercle osculateur est $\sin\varphi$, on trouvera

$$\cos\varphi = \sin\varphi \left(\frac{\alpha,\ d\beta,\ d^2\gamma}{d\sigma^3}\right),$$

ou

$$(6) \qquad (\alpha,\, d\beta,\, d^2\gamma) = \frac{d\sigma^3}{\operatorname{tang}\varphi}.$$

L'angle φ sera toujours $< 90^\circ$, en prenant le pôle Φ du cercle osculateur, du côté de la concavité de l'orbite apparente.

Si l'on substitue cette valeur de $[\alpha,\, d\beta,\, d^2\gamma]$, ainsi que celles de $\frac{\beta d\gamma - \gamma d\beta}{d\sigma}$, etc...., dans l'équation (2), on trouve

$$(7) \qquad \rho\, \frac{d\sigma^2}{\operatorname{tang}\varphi\, dt^2} + a\,(X_1 - X) + b\,(Y_1 - Y) + c\,(Z_1 - Z) = 0.$$

En ajoutant les équations (1), après les avoir respectivement multipliées par $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, il viendra

$$(8) \qquad 2\,\frac{d\rho}{dt}\frac{d\sigma}{dt} + \rho\,\frac{d^2\sigma}{dt^2} + (X_1 - X)\,\frac{d\alpha}{d\sigma} + (Y_1 - Y)\,\frac{d\beta}{d\sigma} + (Z_1 - Z)\,\frac{d\gamma}{d\sigma} = 0.$$

La première de ces équations servira à déterminer ρ, et la 2^e^, $\frac{d\rho}{dt}$.

3. Soient M, m', m'', m''', etc., les masses du Soleil et des diverses planètes qui peuvent exercer quelque action sur la Terre et sur la comète dont on veut déterminer le mouvement; x', y', z', x'', y'', z'', ... les coordonnées du centre de ces planètes dont la position est supposée connue à toute époque; μ la masse de la comète, et m celle de la Terre; on aura

$$(\mathrm{A}) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= x + \alpha\rho, \\ \eta &= y + \beta\rho, \\ \zeta &= z + \gamma\rho; \end{aligned} \right.$$

et d'après des formules connues de Mécanique céleste,

$$X = (M + m)\,\frac{x}{r^3} + \mu\left(\frac{\xi}{\rho_1^3} - \frac{\xi - x}{\rho^3}\right) + \sum m^{(n)} \left\{ \frac{x^{(n)}}{r^{(n)}} - \frac{x^{(n)} - x}{[(x^{(n)} - x)^2 + (y^{(n)} - y)^2 + (z^{(n)} - z)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\}.$$

la lettre Σ désignant la somme de n termes de même forme relatifs aux n planètes de l'action desquelles on tient compte. On aura de même

$$X_1 = (M+\mu)\frac{\xi}{\rho_1^3} + m\left(\frac{x}{r^3} + \frac{\xi - x}{\rho^3}\right) + \sum m^{(n)}\left\{\frac{x^{(n)}}{r^{(n)}} - \frac{x^{(n)} - \xi}{[(x^{(n)}-\xi)^2+(y^{(n)}-\eta)^2+(z^{(n)}-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}\right\}.$$

Les valeurs de Y et Y_1, Z et Z_1 seront données par des équations entièrement semblables, composées en y et η, z et ζ, comme les précédentes en x et ξ.

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (7), en remarquant que la relation $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ donne $a\xi + b\eta + c\zeta = ax + by + cz$, on trouvera

$$(9)\ \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\rho}{\tang\varphi}\dfrac{d\sigma^2}{dt^2} + M\left(\dfrac{1}{\rho_1^3} - \dfrac{1}{r^3}\right)(ax+by+cz) \\ -\sum m^{(n)}\left\{\dfrac{a(x^{(n)}-x)+b(y^{(n)}-y)+c(z^{(n)}-z)}{[(x^{(n)}-\xi)^2+(y^{(n)}-\eta)^2+(z^{(n)}-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{a(x^{(n)}-x)+b(y^{(n)}-y)+c(z^{(n)}-z)}{[(x^{(n)}-x)^2+(y^{(n)}-y)^2+(z^{(n)}-z)^2]^{\frac{3}{2}}}\right\}\end{array}\right\} = 0.$$

On voit qu'en supposant la comète soumise à l'action du Soleil, de la Terre et de toutes les autres planètes, l'équation générale qui doit donner sa distance ρ à la Terre, n'est pas plus difficile à établir que si l'on n'avait égard qu'à la seule action du Soleil; et il est à remarquer que les termes relatifs à l'action mutuelle de la Terre et de la planète disparaissent d'eux-mêmes de cette équation.

4. Le plus souvent il est inutile de conserver dans l'équation (9) les termes compris sous le signe Σ.

Si l'on désigne par δ la distance angulaire du lieu apparent du Soleil au point Π, on a $\cos\delta = -\left(a\frac{x}{r} + b\frac{y}{r} + c\frac{z}{r}\right)$; et l'équation (9), en ayant égard à cette valeur, et négligeant les termes sous le signe Σ, se réduit à

$$\rho\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = Mr\cos\delta\tang\varphi\left(\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{1}{r^3}\right).$$

Soit D la distance apparente de la comète au Soleil, on aura

$$\rho_1^2 = \rho^2 - 2\rho r \cos D + r^2;$$

en prenant la masse M du Soleil pour unité, et posant

$$h = r \cos \delta \operatorname{tang} \varphi \left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2,$$

on a enfin, pour déterminer ρ, l'équation suivante

$$(10) \qquad \rho = h \left\{ \frac{1}{[\rho^2 - 2\rho r \cos D + r^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{r^3} \right\},$$

qui, lorsqu'on fait disparaître ce radical, s'élève au huitième degré.

Si l'on pose $\rho = r\mathrm{R}$, $h = r^4 \mathrm{H}$, cette équation devient

$$\mathrm{R} + \mathrm{H} = \frac{\mathrm{H}}{(\mathrm{R}^2 - 2\mathrm{R} \cos D + 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour avoir $\frac{d\rho}{dt}$, on substituera dans l'équation (8) les valeurs de $X_1 - X$, $Y_1 - Y$, $Z_1 - Z$. Si l'on y remplace $\frac{xd\alpha + yd\beta + zd\gamma}{d\sigma}$ par $-r \cos \varepsilon$, en négligeant toujours les termes sous le signe Σ, on trouve enfin, pour déterminer $\frac{d\rho}{dt}$,

$$(11) \qquad 2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\sigma}{dt} = \rho \left(\frac{\cos \varepsilon}{\cos \delta \operatorname{tang} \varphi} \frac{d\sigma^2}{dt^2} - \frac{d^2\sigma}{dt^2} \right).$$

Détermination trigonométrique des éléments d'où dépendent ρ et $\frac{d\rho}{dt}$.

Ces quantités sont α, β, γ, φ, $\frac{d\alpha}{d\sigma}$, $\frac{d\beta}{d\sigma}$, $\frac{d\gamma}{d\sigma}$, D, δ, ε. Soient C_1, C_2, C_3 trois positions de la comète, assez rapprochées pour que le cercle passant par ces trois points puisse être pris sans erreur sensible pour le cercle osculateur de l'orbite apparente au point C_2; θ_1, θ_2, θ_3, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, leurs longitudes et latitudes géocentriques; a et b les arcs de grand cercle C_1C_2, C_2C_3; L_1 la longitude du nœud du grand cercle passant par C_1, C_2; L_2 celle du nœud du grand cercle passant par C_2, C_3; I_1, I_2 les inclinaisons de leurs plans sur le plan de l'écliptique : on aura

$$\operatorname{tang} \eta_1 = \sin(\theta_1 - L_1) \operatorname{tang} I_1, \quad \operatorname{tang} \eta_2 = \sin(\theta_2 - L_1) \operatorname{tang} I_1,$$
$$\operatorname{tang} \eta_2 = \sin(\theta_2 - L_2) \operatorname{tang} I_2, \quad \operatorname{tang} \eta_3 = \sin(\theta_3 - L_2) \operatorname{tang} I_2;$$

d'où l'on déduit les quatre formules

$$(1) \qquad \operatorname{tang}\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - L_1\right) = \frac{\sin(\eta_1 + \eta_2)}{\sin(\eta_1 - \eta_2)} \operatorname{tang}\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right),$$

$$(2) \qquad \operatorname{tang}\left(\frac{\theta_2 + \theta_3}{2} - L_2\right) = \frac{\sin(\eta_2 + \eta_3)}{\sin(\eta_2 - \eta_3)} \operatorname{tang}\left(\frac{\theta_2 - \theta_3}{2}\right),$$

$$(3) \qquad \operatorname{tang} A_1 = \frac{\operatorname{tang}(\theta_2 - L_1)}{\sin \eta_2},$$

$$(4) \qquad \operatorname{tang} A_2 = \frac{\operatorname{tang}(\theta_2 - L_2)}{\sin \eta_2}.$$

A_1, A_2 sont les angles opposés aux côtés $\theta_2 - L_1$, $\theta_2 - L_2$. Les deux dernières formules donnent le supplément de l'angle compris entre a et b, que je désigne par K_2.

Pour calculer a et b, on remarquera qu'ils sont les côtés de triangles sphériques dont on connaît les deux autres, ainsi que l'angle compris; ce sont les compléments des latitudes, et les différences de longitudes des trois positions données. En posant

$$(5) \qquad \operatorname{tang} V_1 = \frac{\sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{2}\right)} \sqrt{\cos \eta_1 \cos \eta_2},$$

$$(6) \qquad \operatorname{tang} V_2 = \frac{\sin\left(\frac{\theta_3 - \theta_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\eta_3 - \eta_2}{2}\right)} \sqrt{\cos \eta_2 \cos \eta_3},$$

on a

$$(7) \qquad \sin \tfrac{1}{2} a = \frac{\sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)}{\cos V_1}, \quad (8) \ \sin \tfrac{1}{2} b = \frac{\sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_3}{2}\right)}{\cos V_2}.$$

Si l'on suppose deux arcs de grand cercle respectivement perpendiculaires sur les milieux de a et b, leur point de rencontre Φ_2 sera celui que nous avons désigné par Φ, relativement au point C_2 de l'orbite apparente; et $C_2\,\Phi_2$ sera l'arc φ, que je désigne aussi par φ_2.

Les arcs qui déterminent Φ_2 forment deux triangles sphériques rectangles qui ont pour hypoténuse commune φ_2. Soient x, x' les angles compris entre les côtés φ_2 et a, φ_2 et b; on en déduit

$$\text{(9)} \qquad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(x - x') = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} K_2 \frac{\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)},$$

$$\text{(10)} \qquad \operatorname{tang} \varphi_2 = \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b)}{2 \sin \frac{1}{2} K_2 \cos \frac{1}{2}(x - x') \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b}$$

Pour déterminer la position du cercle tangent en C_2 à la courbe apparente, soit L'_2 la longitude de son nœud, et B_2 l'angle opposé au côté $\theta_2 - L'_2$; comme cet angle est connu, on a

$$\text{(11)} \qquad \operatorname{tang}(\theta_2 - L'_2) = \sin \eta_2 \operatorname{tang} B_2.$$

Soit Ω_2 le point désigné précédemment par Ω, Θ_2 sa longitude, H_2 sa latitude : le triangle sphérique qui a ses sommets aux points Ω_2, C_2 et au pôle de l'écliptique, a pour côtés $90° - H_2$, $90° - \eta$ et $90°$, et pour angle compris entre ces deux derniers $180° - B_2$; on a donc pour déterminer Ω_2,

$$\text{(12)} \quad \sin H_2 = -\cos \eta_2 \cos B_2, \qquad \text{(13)} \quad \operatorname{tang}(\Theta_2 - \theta_2) = \frac{\operatorname{tang} B_2}{\sin \eta_2}.$$

Si l'on prend pour plan des XY, le plan de l'écliptique, en faisant passer l'axe des x par ♈, on a les six formules suivantes :

$$\text{(14)} \quad \frac{d\alpha}{d\sigma} = \cos\Theta_2 \cos H_2, \qquad \text{(17)} \quad \alpha = \cos\theta_2 \cos \eta_2,$$

$$\text{(15)} \quad \frac{d\beta}{d\sigma} = \sin\Theta_2 \cos H_2, \qquad \text{(18)} \quad \beta = \sin\theta_2 \cos \eta_2,$$

$$\text{(16)} \quad \frac{d\gamma}{d\sigma} = \sin H_2, \qquad \text{(19)} \quad \gamma = \sin \eta_2.$$

La distance apparente du Soleil à la comète ou l'angle D_2, est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont les deux autres côtés sont η_2 et $\theta_2 - O_2$, O_2 étant la longitude du Soleil. En désignant par S_2 le lieu de cet astre, et par E_2 l'angle opposé au côté $\theta_2 - O_2$, on a les quatre formules

(20) $\cos D_2 = \cos \eta_2 \cos(\theta_2 - O_2)$, (21) $\operatorname{tang} E_2 = \dfrac{\operatorname{tang}(\theta_2 - O_2)}{\sin \eta_2}$,

(22) $\cos \varepsilon_2 = \sin D_2 \cos \Omega_2 C_2 S_2$, (23) $\cos \delta_2 = \sin D_2 \sin \Omega_2 C_2 S_2$.

Pour déterminer la vitesse apparente et son coefficient différentiel, il faudrait connaître les arcs du cercle osculateur compris entre les points C_1, C_2; C_2, C_3. Ces arcs sont en général différents de a et b; en les désignant par λ_1, λ_2, ils seront donnés par les formules

(24) $\sin\left(\dfrac{\lambda_1}{2 \sin \varphi_2}\right) = \dfrac{1}{\sin \varphi_2} \sin \dfrac{1}{2} a$, (25) $\sin\left(\dfrac{\lambda_2}{2 \sin \varphi_2}\right) = \dfrac{1}{\sin \varphi_2} \sin \dfrac{1}{2} b$;

ces arcs donneront $\dfrac{d\sigma}{dt}$ et $\dfrac{d^2\sigma}{dt^2}$. En effet, comme ils sont parcourus dans un temps très court, τ_1, τ_2, si l'on pose $\sigma = mt + nt^2$, et qu'on prenne pour origine du temps l'instant où la comète arrive au point C_2, on a pour déterminer les constantes m et n,

$$\lambda_1 = - m\tau_1 + n\tau_1^2,$$
$$\lambda_2 = m\tau_2 + n\tau_2^2;$$

d'où l'on tire

$$(26) \qquad \frac{d\sigma}{dt} = m = \frac{\lambda_1 \tau_2^2 + \lambda_2 \tau_1^2}{\tau_1 \tau_2 (\tau_1 + \tau_2)},$$

$$(27) \qquad \frac{d^2\sigma}{dt^2} = 2n = 2\frac{\lambda_2 \tau_1 - \lambda_1 \tau_2}{\tau_1 \tau_2 (\tau_1 + \tau_2)}.$$

Au moyen des formules précédentes on détermine ρ et $\dfrac{d\rho}{dt}$.

5. Les quantités $\xi, \eta, \zeta, \dfrac{d\xi}{dt}, \dfrac{d\eta}{dt}, \dfrac{d\zeta}{dt}$ dépendent encore de x, y, $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ qui se déduisent des tables. Pour avoir les deux premières, soit T_2 la longitude de la Terre : on a les deux équations

(28) $\frac{x}{r} = \cos T_2,$ (29) $\frac{y}{r} = \sin T_2.$

Enfin, les rapports $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ sont donnés par les formules

$$(30)\qquad \frac{dx}{dt}\sqrt{1-\left(\frac{r-1}{e}\right)^2} + \frac{x}{r}\left(\frac{r-1}{e}\right) + \cos \varpi x = 0,$$

$$(31)\qquad \frac{dy}{dt}\sqrt{1-\left(\frac{r-1}{e}\right)^2} + \frac{y}{r}\left(\frac{r-1}{e}\right) + \cos \varpi y = 0.$$

ϖx, ϖy sont les angles que fait avec les axes la direction du périhélie de l'orbite terrestre, et e son excentricité. Ces équations se déduisent facilement des équations générales du mouvement elliptique. (*Mécanique céleste*, tom. I, p. 163.)

La quantité $\frac{d\rho}{dt}$ dépend d'une autre, $\frac{d^2\sigma}{dt^2}$, sur laquelle on a plus d'incertitude à craindre que sur $\frac{d\sigma}{dt}$. Mais l'hypothèse du mouvement parabolique qu'on fait toujours pour les comètes, fournit un autre moyen de la déterminer, par l'équation

$$\frac{2}{\rho_1} - \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{dt^2} = 0.$$

Si l'on y remplace $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ par leurs valeurs tirées des équations (A), on a l'équation suivante du second degré en $\frac{d\rho}{dt}$, qui donne la valeur de cette inconnue

$$(32)\quad \frac{d\rho^2}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\,\frac{\alpha dx + \beta dy}{dt} + \rho^2\frac{d\sigma^2}{dt^2} + 2\rho\,\frac{d\alpha dx + d\beta dy}{dt^2} + \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} - \frac{2}{\rho_1} = 0.$$

6. La valeur de ρ est donnée par une équation du huitième degré, qui s'abaisse au septième en écartant la racine 0. On peut se procurer une valeur approchée de cette inconnue par une construction graphique fort simple, au moyen d'une courbe qui reste la même pour toutes les comètes.

Reprenons l'équation

$$(a) \qquad R + H = \frac{H}{(R^2 - 2R\cos D + 1)^{\frac{3}{2}}};$$

si l'on pose

$$(b) \qquad R = \cos D + x \sin D,$$

on a pour l'équation transformée

$$(c) \qquad \frac{1}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sin^3 D}{H}(x \sin D + \cos D + H).$$

Les abscisses des points d'intersection de la droite et de la courbe qui auraient pour ordonnées, l'une le premier membre de l'équation (c), et l'autre le second, détermineront par l'équation (b) les valeurs de R qui satisfont à l'équation (a).

La courbe qui a pour équation

$$Y = \frac{1}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

se compose de deux branches symétriques, correspondantes, l'une à la valeur positive, et l'autre à la valeur négative du radical. Or la valeur négative ne saurait convenir à la question actuelle, puisqu'on doit toujours supposer positives les distances ρ, r, $\sqrt{\rho^2 - 2r\cos D + r^2}$.

Soit donc MAN la branche dont les ordonnées sont positives; cette courbe aura un point d'intersection avec la droite

$$y = \frac{\sin^3 D}{H}(x \sin D + \cos D + H)$$

pour $x = -\cot D$, puisque $R = 0$ est une des racines de l'équation (a). Pour construire cette abscisse, menons par l'origine O la droite OS qui fasse, avec le prolongement de OA, un angle égal à D. Du point A', pris à une distance de O égale à OA, abaissons sur OS la perpendiculaire A'b : le point c où elle coupe l'axe des x détermine l'abscisse qu'on cherche, puisque $cO = \cot D$; et le point B de la courbe qui a cO pour abscisse, sera aussi un point de la droite.

Pour second point de cette droite, prenons celui où elle coupe l'axe des x, donné par l'équation

$$x = -\cot D - \frac{H}{\sin D}.$$

Si H est une quantité positive, on portera de b vers S une longueur bn égale à H; on mènera par le point n une parallèle à bc; le point m où cette parallèle coupera l'axe des x sera le second point cherché. Menons par les points m et B la droite indéfinie ge : elle coupera la courbe au point B en un point pris entre B et m, et en un troisième point K. Or les deux premiers donnent des valeurs de R étrangères à la question, puisque l'une est nulle et l'autre est négative. Si du point K on abaisse l'ordonnée Ka, et du point a une perpendiculaire at sur le prolongement de la droite SO, on aura $Ot = x \sin D$, $Ob = \cos D$: donc bt sera une autre valeur de R qui satisfait à l'équation (a) et convient à la question proposée.

Si H est une quantité négative, on prendra la longueur bn en sens contraire. Dans ce cas il y aura deux points d'intersection qui donneront deux valeurs positives pour R, mais le plus souvent accompagnées de caractères qui font reconnaître celle des deux qui convient à la question. Par exemple, on sait, d'après la belle remarque de Lambert, que la comète est plus près ou plus loin du Soleil que la Terre, suivant que la courbe apparente tourne sa concavité ou sa convexité vers le lieu apparent du Soleil : ce caractère suffit presque toujours pour lever l'incertitude que laisseraient les deux valeurs de R.

Application de la méthode précédente.

7. Les formules précédentes donnent tous les éléments nécessaires à la détermination de l'orbite d'une comète, lorsqu'on connaît ses longitudes et latitudes géocentriques dans trois positions distantes seulement d'un petit nombre de degrés. Je vais les appliquer à la comète de 1781, en prenant dans le Mémoire de M. Laplace trois observations rapportées à la même heure de chaque jour ($8^h\ 20^m\ 48^s$, temps moyen à Paris).

1781. Novembre,	LONGITUDE GÉOCENTRIQUE.	LATITUDE GÉOCENTRIQUE.
17	$306^\circ\ 57'\ 32'' = \theta_1$	$44^\circ\ 17'\ 12'' = \eta_1$
19	$306^\circ\ 51'\ 26'' = \theta_2$	$39^\circ\ 14'\ 48'' = \eta_2$
22	$306^\circ\ 44'\ 53'' = \theta_3$	$33^\circ\ 49'\ 1'' = \eta_3$;

on aura donc

$$\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = 306^\circ\ 54'\ 29'', \qquad \eta_1+\eta_2 = 83^\circ\ 32',$$

$$\frac{\theta_2+\theta_3}{2} = 306^\circ\ 48'\ 9'', \qquad \eta_2+\eta_3 = 73^\circ\ 3'\ 49'',$$

$$\frac{\theta_1-\theta_2}{2} = 3'\ 3'', \qquad \eta_1-\eta_2 = 5^\circ\ 2'\ 24'',$$

$$\frac{\theta_2-\theta_3}{2} = 3'\ 16'', \qquad \eta_2-\eta_3 = 5^\circ\ 25'\ 47''.$$

Les formules (1), (2), (3), (4) donnent

$$\theta_2 - L_1 = 31'\ 27'', \qquad L_1 = 306^\circ\ 19'\ 59'',$$

$$\theta_2 - L_2 = 36'\ 18'', \qquad L_2 = 306^\circ\ 15'\ 7'';$$

et les formules (5) et (6),

$$A_1 = 49'41'', \quad | \quad A_2 = 57'21'', \quad | \quad \text{d'où} \quad K_2 = 7'40''.$$

On pourrait, dans l'exemple proposé, se dispenser de calculer les formules (7) et (8), à cause que a et b diffèrent extrêmement peu de $\eta_1 - \eta_2$, $\eta_2 - \eta_3$; en appliquant ces formules, j'ai trouvé

$$a = 5^\circ\ 2'\ 26'', \qquad | \qquad b = 5^\circ\ 25'\ 50'';$$

les formules (9) et (10) donnent

$$\tfrac{1}{2}(x - x') = 9'', \qquad x = 89^\circ\ 56'\ 18'',$$

$$\phi_2 = 88^\circ\ 36'\ 5'', \qquad x' = 89^\circ\ 56'.$$

La différence $90^\circ - x$, ajoutée à l'angle A_1, donne $B_2 = 55'23''$; et la formule (11),

$$\theta_2 - L_2' = 33'\,46'', \qquad\qquad L_2' = 306^\circ\,17'\,40'';$$

les formules (12)....... .(19),

$$\begin{array}{ll|ll}
H_2 & = - \;\; 50^\circ\,44'\,41'', & \theta_2 - \Theta_2 & = \;\; 1^\circ\,24'\,22'', \\
\dfrac{d\alpha}{d\sigma} & = \cos\,(68^\circ\,28'\;\;6''), & \alpha & = \cos\;(\;62^\circ\,19'\,15''), \\
\dfrac{d\beta}{d\sigma} & = \cos\,(121^\circ\;1'\,43''), & \beta & = \cos\,(128^\circ\,17'\,25''), \\
\dfrac{d\gamma}{d\sigma} & = \cos\,(140^\circ\,44'\,41''), & \gamma & = \cos\;(\;50^\circ\,45'\,12'').
\end{array}$$

Longitude O_2 du Soleil donné par les tables, $O_2 = 257^\circ\,57'\,4''$. Les formules (20) et (21) donnent

$$\begin{array}{ll|ll}
D_2 & = 73^\circ\,48'\,59'', & E_2 & = 76^\circ\,17'\,7'', \\
S_2\,C_2\,\Omega_2 & = 75^\circ\,23'\,44'', & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
\varepsilon_2 & = 75^\circ\,59'\,11'', & \delta_2 & = 21^\circ\,40'\;\;2''.
\end{array}$$

A cause de la grandeur de φ_2, les arcs λ_1, λ_2 ne diffèrent pas de $1''$ de leurs cordes sphériques; on aura donc

$$\begin{array}{ll|ll}
\lambda_1 & = 18146'', & \lambda_2 & = 19550'', \\
\tau_1 & = 2, & \dfrac{d\sigma}{dt} & = 8050'', \\
\tau_2 & = 3, & \dfrac{d^2\sigma}{dt^2} & = -\;1022''.
\end{array}$$

D'après les formules de Laplace, la vitesse apparente diffère un peu de celle-ci. En effet, en conservant notre notation, on a pour l'expression de cette vitesse

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sqrt{\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\cos\eta\,\frac{d\theta}{dt}\right)^2};$$

or les formules citées donnent

$$\begin{aligned}
\eta &= \;\;39^\circ\,14'\,48'' - 7855''t + 535''t^2 - \ldots\ldots, \\
\theta &= 306^\circ\,57'\,26'' - \;\;153''t + \;\;10''t^2 - \ldots\ldots.
\end{aligned}$$

On en déduit, pour la position donnée,

$$\frac{d\eta}{dt} = -7885'', \quad \frac{d\theta}{dt} = -153'', \quad \frac{d\theta}{dt}\cos\eta = \quad 117'',$$

$$\frac{d\sigma}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7866'';$$

différence.......... .... $184''$,

environ $\frac{1}{44}$ de celle que nous trouvons.

Dans la suite des calculs, je prends pour unité linéaire la moyenne distance de la Terre au Soleil, et pour unité de temps, celui qu'elle mettrait à parcourir d'un mouvement moyen une partie de son orbite égale à l'unité de longueur, en supposant que cette orbite fût circulaire, et décrite d'un rayon égal à l'unité. Cela revient à faire $\frac{2\pi}{T} = 1$, T étant la durée de l'année sidérale.

Vitesse apparente rapportée à cette nouvelle unité, $\frac{d\sigma}{dt} = 2{,}26875$;

Valeur de h donnée par l'expression $\frac{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}{\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2} \cos\delta_2 \operatorname{tang}\varphi_2$, $h = 7{,}3941 . r$;

Distance r de la Terre au Soleil, $r = 0{,}9872$.

On a posé $h = Hr^4$, $H = 7{,}6834$.

En appliquant la construction du numéro (**6**), j'ai trouvé pour valeur approchée de R, environ 0,49. En résolvant ensuite l'équation

$$R + H = \frac{H}{(R^2 - 2R\cos D + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

par des essais, on trouve

$$R = 0{,}4745,$$

valeur exacte au moins jusqu'aux millièmes, et seule valeur positive de R qui satisfasse à l'équation (a); par conséquent il n'y a qu'une valeur de ρ qui convienne à la question proposée, ce qui s'accorde avec la solution graphique.

Cette valeur est

$$\rho = 0{,}46845.$$

C'est la distance de la comète à la Terre, exprimée en parties du demi-grand axe de l'orbite terrestre. M. Laplace a trouvé, pour la projection de cette distance sur le plan de l'écliptique, 0,39107. Cette valeur donne

$$\rho = 0{,}50497.$$

Ainsi, la distance de la comète à la Terre, obtenue par une première approximation, d'après la méthode que j'applique, diffère d'environ $\frac{1}{14}$ de la distance obtenue par la méthode de Laplace.

La formule $\rho_1^2 = \rho^2 - 2\rho r \cos D + r^2$ donne, pour la distance de la comète au Soleil,

$$\rho_1 = 0{,}96736;$$

par l'autre méthode,

$$\rho_1 = 0{,}97558.$$

La différence est moindre que $\frac{1}{100}$ de la distance.

Les tables donnent pour déterminer x, y, $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$,

$$\frac{x}{r} = \cos 57^\circ 57' 4'', \quad \frac{y}{r} = \sin 57^\circ 57' 4'', \quad e = 0{,}01685.$$

La longitude du périhélie est donnée par la formule

$$\varpi x = 99^\circ 30' 8'',39 + 61'',5171\, t + 0{,}0002038\, t^2,$$

en prenant l'origine du temps en 1800, et l'année pour unité. (Francœur, *Astronomie prat.*) Il en résulte, pour 1781, 19 novembre,

$$\varpi x = 99^\circ 10' 28'', \qquad \varpi y = 9^\circ 10' 28''.$$

Ces valeurs substituées dans les formules (28), (29), (30), (31), donnent

$$x = 0,52388, \qquad y = 0,83679,$$
$$\frac{dx}{dt} = -0,8583, \qquad \frac{dy}{dt} = 0,52899,$$
$$\frac{1-r}{e} = 0,7568, \qquad \sqrt{1-\left(\frac{1-r}{e}\right)^2} = 0,65365.$$

En observant que $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{d\sigma}\,\frac{d\sigma}{dt},\ldots$ on a pour résoudre l'équation (32),

$$\alpha\frac{dx}{dt} = -0,398698, \qquad 2\varrho\frac{d\alpha}{dt}\frac{dx}{dt} = -0,66958,$$
$$\beta\frac{dy}{dt} = -0,327746, \qquad 2\varrho\frac{d\beta}{dt}\frac{dy}{dt} = -0,57954,$$
$$\frac{dx^2+dy^2}{dt^2} = 1,01645, \qquad \frac{2}{\varrho_1} = 2,13616,$$
$$\rho^2\frac{d\sigma^2}{dt^2} = 1,12954,$$

et l'on en déduit $$\frac{d\varrho}{dt} = 2,05568.$$

Cette valeur, désignée par y dans le calcul cité, est $y = 2,25835$.

De ces diverses valeurs on tire :

$$\alpha\varrho = 0,217604, \qquad \beta\varrho = -0,290273, \qquad \gamma\varrho = 0,29637,$$
$$\frac{d\varrho}{dt} = 0,942703, \qquad \beta\frac{d\varrho}{dt} = -1,257513, \qquad \gamma\frac{d\varrho}{dt} = 1,28393,$$
$$\varrho\frac{d\alpha}{dt} = 0,39006, \qquad \varrho\frac{d\beta}{dt} = -0,54784, \qquad \varrho\frac{d\gamma}{dt} = -0,82296;$$

et enfin, pour les coordonnées ξ, η, ζ et leurs rapports différentiels par rapport au temps,

$$\xi = 0,741484, \qquad \eta = 0,546527, \qquad \zeta = 0,29637,$$
$$\frac{d\xi}{dt} = 0,474463, \qquad \frac{d\eta}{dt} = -1,276413, \qquad \frac{d\zeta}{dt} = 0,46097.$$

On déduit immédiatement de ces nombres tous les éléments de l'orbite, par les formules rapportées au commencement

$$\xi\frac{d\eta}{dt} = -0,94644, \qquad \zeta\frac{d\xi}{dt} = 0,140616, \qquad \eta\frac{d\zeta}{dt} = 0,251933,$$
$$\eta\frac{d\xi}{dt} = 0,259307, \qquad \xi\frac{d\zeta}{dt} = 0,341802, \qquad \zeta\frac{d\eta}{dt} = -0,37829,$$
$$C = -1,205747, \qquad C' = -0,201186, \qquad C'' = 0,630223,$$

$$\text{tang}\, K = -\frac{C''}{C'} = \text{tang}\, 72^\circ 17' 43'',$$

$$\text{tang}\, I = -\frac{\sqrt{C'^2 + C''^2}}{C} = \text{tang}\, 28^\circ 45' 4'',$$

$$C^2 + C'^2 + C''^2 = 2p = 1{,}891486,$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} V = \frac{p}{\varrho_1} \qquad V = 17^\circ 18',$$

$$\xi \frac{d\xi}{dt} = 0{,}351806, \quad \Big| \quad \eta \frac{d\eta}{dt} = -0{,}697594, \quad \Big| \quad \zeta \frac{d\zeta}{dt} = 0{,}136617;$$

$$\varrho_1 \frac{d\varrho_1}{dt} = -0{,}209171.$$

Ainsi la comète s'approche de son périhélie; le temps qu'elle doit mettre pour y arriver se déduit de la formule

$$t = \sqrt{2p^3}\,(\text{tang}\, \tfrac{1}{2} V + \tfrac{1}{3}\, \text{tang}^3 \tfrac{1}{2} V).$$

Pour exprimer t en jours, il faudra ajouter aux logarithmes des nombres donnés par cette formule, le logarithme de $\frac{T}{2\pi}$, T étant exprimé en jours. On trouve ainsi

$$\begin{aligned} \sqrt{2p^3}\, \text{tang}\, \tfrac{1}{2} V &= 11^j{,}5028, \\ \tfrac{1}{3}\sqrt{2p^3}\, \text{tang}^3 \tfrac{1}{2} V &= \underline{0^j{,}0682,} \\ t &= 11^j 13^h 27^m 50^s. \end{aligned}$$

Pour avoir la longitude du périhélie, on remarquera d'abord que puisque les cinq quantités ξ, η, ζ, $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ sont positives, et $\frac{d\eta}{dt}$ négative, la comète a passé par son nœud ascendant; que la projection de la distance au Soleil sur le plan de l'écliptique est dans l'angle des XY, où se trouve ce nœud; et que son mouvement est rétrograde. Le cosinus de la longitude héliocentrique de l'astre est

$$\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = \cos 36^\circ 23' 32''.$$

Distance en longitude de la comète à son nœud, 35° 54′ 11″;
Distance comptée sur l'orbite, 39.32.56;
Angle compris entre la direction du périhélie et la ligne des nœuds, 56° 50′ 56″,
Longitude du périhélie, 18.58.56.

Ainsi les éléments de l'orbite donnés par nos formules calculées d'après trois observations, sont :

Longitude de la ligne des nœuds,	72° 17′ 43″;
Inclinaison de l'orbite,	28.45. 8;
Distance périhélie,	0,94574;
Anomalie,	17° 18′;
Passage au périhélie 1781, 30 novembre, à	$21^h 57^m 34^s$;
Longitude du périhélie,	18° 58′ 56″.

Si l'on a plus de trois observations toutes assez peu distantes les unes des autres, on pourra faire les calculs d'après les trois premières; puis ensuite faire concourir chacune des suivantes avec les deux qui précèdent immédiatement.

Chaque combinaison subséquente donnera lieu à un calcul semblable au premier, mais moins long, puisque plusieurs des quantités calculées dans une opération serviront dans la suivante. On prendra ensuite pour éléments de l'orbite les moyennes des valeurs ainsi obtenues.

Dans la méthode que je viens d'appliquer, ainsi que dans celle de Laplace, on se propose en premier lieu de déterminer ρ et $\frac{d\rho}{dt}$. Dans l'une on fait dépendre ρ de la vitesse apparente $\frac{d\sigma}{dt}$, et de deux angles auxiliaires φ et δ que l'on calcule au moyen d'un certain nombre de formules trigonométriques; dans l'autre on détermine ρ en fonction des coefficients qui entrent dans le développement en séries de la longitude et de la latitude géocentriques de l'astre. Par ce moyen, on n'a à calculer que deux formules d'interpolation, à la vérité un peu longues.

Dans la première, on emploie aussi une interpolation pour déterminer $\frac{d\sigma}{dt}$. La même interpolation donne $\frac{d^2\sigma}{dt^2}$ d'où dépend $\frac{d\rho}{dt}$; mais l'erreur que l'on aurait à craindre dans la valeur de cette quantité, ordinairement assez petite, pouvant être de l'ordre de la quantité elle-même, on peut en éviter l'emploi dans l'hypothèse du mouvement parabolique, où $\frac{d\rho}{dt}$ est donné par les coordonnées du mouvement apparent et leurs coefficients différentiels. Quand on connaît les trois quantités φ, δ, $\frac{d\sigma}{dt}$, il reste encore, pour avoir ρ, à résoudre une équation du huitième degré si on l'a rendue rationnelle. Mais on sait d'avance qu'elle ne peut avoir plus de quatre racines réelles, en y comprenant la racine zéro, étrangère à la question; et que souvent elle n'en a que deux. Dans tous les cas, l'auteur de la méthode a donné un procédé analytique pour opérer la séparation des racines. D'ailleurs on peut avoir recours au procédé graphique qu'il a proposé : ce procédé a l'avantage de s'appliquer à l'équation irrationnelle, c'est-à-dire telle qu'on doit l'employer; de prouver que sous cette forme elle ne peut jamais avoir plus de deux racines qui conviennent à la question, et de donner, par une construction assez simple, des valeurs qui peuvent abréger sa résolution. Dans la méthode de Laplace, les trois quantités ρ, $\frac{d\rho}{dt}$, ρ_1, sont calculées ensemble. On les cherche par des essais, répétés jusqu'à ce que la valeur qu'on suppose à l'une de ces inconnues donne pour les deux autres des valeurs qui satisfassent aux trois équations d'où elles dépendent. Ici, les calculs à faire me paraissent au moins aussi longs que ceux de l'autre méthode; parce qu'à chaque valeur qu'on se donne il y en a toujours deux autres à calculer, pour essayer ensuite ces trois valeurs à la fois dans l'équation finale.

Cette impossibilité, qu'on remarque dans toutes les méthodes, d'arriver à des valeurs un peu approchées de ρ autrement que par une sorte de tâtonnement, tient à l'équation de degré supérieur, inévitable dans ce problème, sous quelque forme qu'on la déguise. A la vérité, en traitant directement le mouvement parabolique, cette équation ne s'élève qu'au sixième degré; mais les calculs restent encore fort longs.

Quand on connaît ρ et $\frac{d\rho}{dt}$, les éléments de l'orbite se calculent par des procédés qui sont les mêmes dans toutes les méthodes. Lorsque ces éléments sont à peu près connus, on peut les corriger par la méthode des approximations successives, qui, sous le rapport de la précision, ne laisse rien à désirer. Il n'entrait pas dans mon objet d'en faire usage, parce que je voulais me borner à la partie la plus difficile du problème, qui est de trouver les premières valeurs des éléments.

Vu et approuvé par le Doyen de la Faculté des Sciences,

18 novembre 1839.

Baron **THÉNARD.**

PERMIS D'IMPRIMER :

L'Inspecteur général des Études, chargé de l'Administration de l'Académie de Paris,

ROUSSELLES.