THÈSES
DE MÉCANIQUE
ET
D'ASTRONOMIE,

PRÉSENTÉES

À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS,

Le ~~15 Avril~~ 2 Août 1852,

PAR M. OSSIAN BONNET.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
de l'École Polytechnique et du Bureau des Longitudes,
Rue du Jardinet, 12.

1852.

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES.

MM. MILNE EDWARDS, Doyen,

THENARD, PONCELET, BIOT, MIRBEL,	Professeurs honoraires.
CONSTANT PREVOST, DUMAS, AUGUSTE DE SAINT-HILAIRE, DESPRETZ, STURM, DELAFOSSE, BALARD, LEFÉBURE DE FOURCY, LE VERRIER, CHASLES, DUHAMEL, DE JUSSIEU, GEOFFROY-SAINT-HILAIRE, LAMÉ, DELAUNAY,	Professeurs.
VIEILLE, BERTRAND, MASSON, PELIGOT, PAYER, DUCHARTRE,	Agrégés.

THÈSE DE MÉCANIQUE.

SUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN SÉRIES ORDONNÉES SUIVANT LES FONCTIONS X_n ET Y_n.

On sait que les fonctions X_n et Y_n, introduites dans l'analyse par Legendre, sont d'un très-grand secours dans plusieurs théories importantes, en particulier dans la théorie de l'attraction des sphéroïdes et dans celle de la figure des planètes; parmi les nombreuses propriétés dont jouissent ces fonctions, une des plus remarquables consiste en ce que toute fonction de deux angles θ et φ, donnée arbitrairement entre les limites $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$ et assujettie à la seule condition de ne pas devenir infinie entre ces limites, peut toujours être développée en série convergente ordonnée suivant les fonctions Y_n. C'est à Laplace que l'on doit cette importante proposition; il y avait été conduit par des considérations indirectes et qui, de son propre aveu, sont insuffisantes; plus tard, Poisson, qui s'était servi du résultat de Laplace, dans plusieurs problèmes de Mécanique et de Physique mathématique, a cherché à l'établir rigoureusement. On peut voir dans le XIX^e^ cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, dans les *Additions à la Connaissance des Temps* pour les années 1829 et 1831, et enfin dans la *Théorie mathématique de la Chaleur*, page 212, la démonstration de cet illustre analyste. Cette démonstration suppose, comme on le reconnaît aisément, la fonction qu'il s'agit de développer et ses dérivées premières et secondes, continues par rapport à θ et à φ, conditions qui peuvent ne pas être satisfaites, même pour des cas très-simples; la démonstration de Poisson est donc incomplète. Depuis, M. Lejeune-Dirichlet a publié, dans le tome XVII du Journal de M. Crelle, la première et je crois l'unique démonstration entièrement rigoureuse du théorème de Laplace. Je me propose, dans cette Thèse, de donner une nouvelle démonstration plus directe que celle de M. Dirichlet, et, afin que mon travail présente un ensemble complet, je ferai préalablement une exposition rapide des principales propriétés des fonctions X_n et Y_n, en ne m'attachant à démontrer que les moins connues de ces propriétés.

§ I^{er}.

Propriétés des fonctions X_n.

Théorème I. *L'expression* $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$, *où* x *est un nombre compris entre* -1 *et* $+1$ *et* α *un nombre positif moindre que* 1, *est développable en série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de* α.

Remarque. On appelle X_n le coefficient de α^n dans le développement de $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Théorème II. *On a, en général,*

$$X_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\left\{\begin{aligned} &x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \ldots \end{aligned}\right\}.$$

Théorème III. *Posant* $x = \cos\gamma$, *on a, comme seconde valeur de* X_n,

$$\begin{aligned} X_n = {} & \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\,2\cos n\gamma + \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\frac{1}{2}\,2\cos(n-2)\gamma + \ldots \\ & + \frac{1.3.5\ldots(2n-2i-1)}{2.4.6\ldots(2n-2i)}\,\frac{1.3\ldots(2i-1)}{2.4\ldots 2i}\,2\cos(n-2i)\gamma + \ldots \end{aligned}$$

Corollaire. Les coefficients de $\cos n\gamma$, $\cos(n-2)\gamma$, etc., dans la valeur précédente, étant positifs, on voit que la plus grande valeur que puisse prendre X_n, quand γ varie, correspond à $\gamma = 0$ ou $x = 1$; or, dans ce cas, X_n est 1, puisque $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ se réduit à

$\frac{1}{1-\alpha}$: donc les fonctions X_n sont généralement moindres que 1 et elles n'atteignent la valeur 1 que pour $x = 1$.

Théorème IV. *Posant, comme dans le théorème précédent,* $x = \cos\gamma$, *et, de plus,* $\sqrt{-1} = i$, *on a, pour troisième valeur de* X_n,

$$X_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos\gamma + i\sin\gamma\cos\omega)^n\, d\omega.$$

Démonstration. On sait que toute expression de la forme

$$\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

peut se représenter par l'intégrale définie

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\omega}{A - iB\cos\omega},$$

où $i = \sqrt{-1}$. Soit donc

$$A = 1 - \alpha\cos\gamma, \quad B = \alpha\sin\gamma,$$

nous aurons

$$(1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\omega}{1 - \alpha\cos\gamma - i\alpha\sin\gamma\cos\omega};$$

développant les deux membres suivant les puissances entières et positives de α, et identifiant les deux développements, on trouve le résultat énoncé.

Théorème V. *Les trois fonctions consécutives* X_{n+1}, X_n, X_{n-1}, *sont liées par la relation*

$$(n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = 0.$$

Corollaire. On déduit de la relation précédente, et en s'aidant des principes de M. Sturm, que les racines de l'équation

$$X_n = 0,$$

sont réelles, inégales, comprises entre -1 et $+1$, et telles, qu'entre deux d'entre elles consécutives se trouve une et une seule racine réelle de l'équation

$$X_{n-1} = 0.$$

THÉORÈME VI. *Les indices m et n étant différents, l'intégrale définie*

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n \, dx$$

sera toujours nulle. Si ces indices sont égaux, on aura

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2 \, dx = \frac{2}{2n+1}.$$

THÉORÈME VII. *On a*

$$X_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n.2^n} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

THÉORÈME VIII. *La fonction* X_n *vérifie l'équation différentielle du second ordre*

$$\frac{d\left[(1 - x^2)\dfrac{dX_n}{dx}\right]}{dx} + n(n+1)X_n = 0. \tag{1}$$

Remarque. Le produit de X_n par une constante est la seule fonction entière de x, qui vérifie l'équation (1).

THÉORÈME IX. *Les indices m et n étant différents, l'intégrale définie*

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d^r X_m}{dx^r} \frac{d^r X_n}{dx^r} (1 - x^2)^r \, dx$$

sera toujours nulle. Si ces indices sont égaux, on aura

$$\int_{-1}^{+1} \left(\frac{d^r X_n}{dx^r}\right)^2 (1 - x^2)^r \, dx$$
$$= \frac{2}{2n+1}(n+r)(n+r-1)\ldots(n-r+1).$$

THÉORÈME X. *Les deux fonctions consécutives* X_n *et* X_{n+1} *sont liées par la relation différentielle*

$$\frac{1}{n+1}(1 - x^2)\frac{dX_n}{dx} = xX_n - X_{n+1}.$$

Démonstration. D'après l'équation (1), on a

$$\frac{1}{n+1}(1-x^2)\frac{dX_n}{dx} = -n\int_{-1}^{x} X_n\,dx;$$

il suffira donc de montrer que

$$-n\int_{-1}^{x} X_n\,dx = xX_n - X_{n+1},$$

ou, en se rappelant la valeur donnée par le théorème VII, que

$$\frac{-1}{1.2.3\ldots(n-1)2^n}\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}$$
$$= \frac{1}{1.2.3\ldots n.2^n}x\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} - \frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)2^{n+1}}\frac{d^{n+1}(x^2-1)^{n+1}}{dx^{n+1}},$$

ou bien encore que

$$\frac{d^{n+1}(x^2-1)^{n+1}}{dx^{n+1}} = 2(n+1)x\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} + 2n(n+1)\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}.$$

Mais

$$\frac{d^{n+1}(x^2-1)^{n+1}}{dx^{n+1}} = (x^2-1)\frac{d^{n+1}(x^2-1)^n}{dx^{n+1}}$$
$$+ 2(n+1)x\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} + n(n+1)\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}};$$

donc il faut que

$$(x^2-1)\frac{d^{n+1}(x^2-1)^n}{dx^{n+1}} = n(n+1)\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}.$$

Or, en différentiant par rapport à x, et multipliant par $\frac{1}{1.2.3\ldots n.2^n}$, on trouve

$$\frac{d(1-x^2)\frac{dX_n}{dx}}{dx} + n(n+1)X_n = 0.$$

Théorème XI. *Posant $x = \cos\gamma$, et supposant que γ varie entre les limites α et $\pi-\alpha$, ou α est un nombre déterminé aussi petit qu'on le veut, mais cependant différent de 0, on a, pour toutes ces valeurs* de γ,

$$X_n = \frac{2\cos\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2n\pi\sin\gamma}} + (-1)^n \frac{\cos\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{2n\sqrt{2n\pi\sin\gamma}}$$
$$+ \frac{\cot\gamma\sin\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{4n\sqrt{2n\pi\sin\gamma}} + \frac{p}{n^2\sqrt{n}},$$

p étant une fonction de γ et de n qui reste toujours finie.

Démonstration. D'après le théorème VIII, on a

$$\frac{d(1-x^2)\frac{dX_n}{dx}}{dx} + n(n+1)X_n = 0,$$

et, en changeant x en $\cos\gamma$,

$$\frac{d^2X_n}{d\gamma^2} + \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\frac{dX_n}{d\gamma} + n(n+1)X_n = 0.$$

Posons $X_n = u\sin^{-\frac{1}{2}}\gamma$, afin de faire disparaître le second terme, il viendra

$$\frac{d^2u}{d\gamma^2} + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 u = -\frac{u}{4\sin^2\gamma},$$

ou

$$(1) \qquad \frac{d^2u}{d\gamma^2} + \rho^2 u = -\frac{u}{4\sin^2\gamma},$$

en faisant $n + \frac{1}{2} = \rho$.

Multiplions maintenant cette équation par $\sin\rho\gamma d\gamma$, et intégrons de α à γ, nous aurons

$$\sin\rho\gamma\frac{du}{d\gamma} - \rho u\cos\rho\gamma = C - \frac{1}{4}\int_\alpha^\gamma \frac{u\sin\rho\gamma d\gamma}{\sin^2\gamma};$$

ou bien, en remplaçant, sous le signe $\int$, la variable γ par γ', afin de la distinguer de la valeur particulière qui représente la limite supérieure, et appelant u' ce que devient u par ce changement,

$$(2) \qquad \sin\rho\gamma\frac{du}{d\gamma} - \rho u\cos\rho\gamma = C - \frac{1}{4}\int_\alpha^\gamma \frac{u'\sin\rho\gamma' d\gamma'}{\sin^2\gamma'};$$

multipliant de même l'équation (1) par $\cos \rho\gamma d\gamma$, et intégrant de α à γ, on a

$$(3) \qquad \cos \rho\gamma \frac{du}{d\gamma} + \rho u \sin \rho\gamma = \mathrm{C}' - \frac{1}{4}\int_\alpha^\gamma \frac{u' \cos \rho\gamma'\, d\gamma'}{\sin^2\gamma'}.$$

Éliminant $\frac{du}{d\gamma}$ entre les équations (2) et (3), il vient

$$u = \frac{\mathrm{C}' \sin \rho\gamma - \mathrm{C} \cos \rho\gamma}{\rho} + \frac{1}{4\rho}\int_\alpha^\gamma \frac{u' \sin \rho(\gamma' - \gamma)\, d\gamma'}{\sin^2\gamma'};$$

ou bien, en substituant à C et C′ deux nouvelles constantes δ et ε, convenablement choisies,

$$u = \frac{\delta \cos(\rho\gamma + \varepsilon)}{\rho} + \frac{1}{4\rho}\int_\alpha^\gamma \frac{u' \sin \rho(\gamma' - \gamma)\, d\gamma'}{\sin^2\gamma'}.$$

Ce résultat fait connaître les différents termes du développement de u, suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{\rho}$; en effet, on en déduit successivement

$$u = \frac{\delta \cos(\rho\gamma + \varepsilon)}{\rho} + \frac{\delta}{4\rho^2}\int_\alpha^\gamma \frac{\cos(\rho\gamma' + \varepsilon) \sin \rho(\gamma' - \gamma)\, d\gamma'}{\sin^2\gamma'}$$
$$+ \frac{1}{16\rho^2}\int_\alpha^\gamma \frac{\sin \rho(\gamma' - \gamma)\, d\gamma'}{\sin^2\gamma'}\int_\alpha^\gamma \frac{u'' \sin \rho(\gamma'' - \gamma')\, d\gamma''}{\sin^2\gamma''},$$

puis

$$u = \frac{\delta \cos(\rho\gamma + \varepsilon)}{\rho} + \frac{\delta}{4\rho^2}\int_\alpha^\gamma \frac{\cos(\rho\gamma' + \varepsilon) \sin \rho(\gamma' - \gamma)\, d\gamma'}{\sin^2\gamma'}$$
$$+ \frac{\delta}{16\rho^3}\int_\alpha^\gamma \frac{\sin \rho(\gamma' - \gamma)\, d\gamma'}{\sin^2\gamma'}\int_\alpha^{\gamma'} \frac{\cos(\rho\gamma'' + \varepsilon) \sin \rho(\gamma'' - \gamma')\, d\gamma''}{\sin^2\gamma''}$$
$$+ \frac{1}{64\rho^3}\int_\alpha^\gamma \frac{\sin \rho(\gamma' - \gamma)\, d\gamma'}{\sin^2\gamma'}\int_\alpha^{\gamma'} \frac{\sin \rho(\gamma'' - \gamma')\, d\gamma''}{\sin^2\gamma''}\int_\alpha^{\gamma''} \frac{u''' \sin \rho(\gamma''' - \gamma'')\, d\gamma'''}{\sin^2\gamma'''};$$

ainsi de suite. On peut remarquer que, pour éviter toute confusion, nous changeons sous le signe $\int$ successivement γ' en γ'', γ''', ...; ce qui transforme u' en u'', u''', ...

Nous ne ferons usage, dans ce qui va suivre, que de la valeur de u, écrite en dernier lieu, mais après l'avoir mise sous une forme beaucoup

2

plus simple. Il est clair que u ou bien $X_n \sin^{\frac{1}{2}}\gamma$ est, pour toutes les valeurs de ρ et pour toutes les valeurs de γ, depuis α jusqu'à $\pi-\alpha$, constamment inférieur, en valeur absolue, à 1; d'ailleurs $\sin^2\gamma'$, $\sin^2\gamma''$, $\sin^2\gamma'''$ sont au moins égaux à $\sin^2\alpha$. D'après cela, l'intégrale triple

$$\int_\alpha^\gamma \frac{\sin\rho(\gamma'-\gamma)\,d\gamma'}{\sin^2\gamma'}\int_\alpha^{\gamma'}\frac{\sin\rho(\gamma''-\gamma')\,d\gamma''}{\sin^2\gamma''}\int_\alpha^{\gamma''}\frac{u'''\sin\rho(\gamma'''-\gamma'')\,d\gamma'''}{\sin^2\gamma'''}$$

ne peut jamais dépasser, quel que soit ρ et quel que soit γ, depuis α jusqu'à $\pi-\alpha$, un certain nombre déterminé; il en est de même évidemment de l'intégrale double

$$\int_\alpha^\gamma \frac{\sin\rho(\gamma'-\gamma)\,d\gamma'}{\sin^2\gamma'}\int_\alpha^{\gamma'}\frac{\cos(\rho\gamma''+\varepsilon)\sin\rho(\gamma''-\gamma')\,d\gamma''}{\sin^2\gamma''};$$

on peut donc écrire

$$u=\frac{\delta\cos(\rho\gamma+\varepsilon)}{\rho}+\frac{\delta}{4\rho^2}\int_\alpha^\gamma\frac{\cos(\rho\gamma'+\varepsilon)\sin\rho(\gamma'-\gamma)\,d\gamma'}{\sin^2\gamma'}+\frac{p\delta}{\rho^3}+\frac{q}{\rho^3},$$

p et q restant finis pour toutes les valeurs de ρ et pour les valeurs de γ, comprises entre α et $\pi-\alpha$. De plus, si l'on remplace dans l'intégrale le produit de sinus et cosinus par une somme de sinus, il vient

$$\frac{\delta}{8\rho^2}\int_\alpha^\gamma\frac{\sin(2\rho\gamma'-\rho\gamma+\varepsilon)\,d\gamma'}{\sin^2\gamma'}-\frac{\delta}{8\rho^2}\sin(\rho\gamma+\varepsilon)\int_\alpha^\gamma\frac{d\gamma'}{\sin^2\gamma'}:$$

or le premier terme, en remarquant que

$$\sin(2\rho\gamma'-\rho\gamma+\varepsilon)=-\frac{1}{2\rho}\frac{d\cos(2\rho\gamma'-\rho\gamma+\varepsilon)}{d\gamma'},$$

et appliquant le procédé de l'intégration par parties, se met aisément sous la forme $\frac{p'\delta}{\rho^3}$, p' étant, comme p, une certaine fonction de ρ et de γ, qui ne dépasse jamais une limite fixe; on peut donc grouper ce terme avec $\frac{p\delta}{\rho^3}$ dans la valeur de u, et il vient finalement

$$u=\frac{\delta\cos(\rho\gamma+\varepsilon)}{\rho}-\frac{\delta}{8\rho^2}\sin(\rho\gamma+\varepsilon)\int_\alpha^\gamma\frac{d\gamma'}{\sin^2\gamma'}+\frac{p\delta}{\rho^3}+\frac{q}{\rho^3}. \tag{4}$$

p et q sont, comme plus haut, des fonctions de ρ et γ, qui restent pour toutes les valeurs de ρ et pour les valeurs de γ comprises entre α et $\pi-\alpha$, constamment au-dessous d'un certaine limite fixe.

Occupons-nous maintenant de la détermination des constantes δ et ε introduites par l'intégration de l'équation (1). Pour cela, remarquons que, lorsque $\gamma = \frac{\pi}{2}$, on a, suivant le degré de parité de n,

$$u = X_{2k+1} = 0,$$

$$u = X_{2k} = (-1)^k \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots2k} = (-1)^k \frac{1.2.3\ldots2k}{2^{2k}(1.2.3\ldots k)^2}$$

$$= (-1)^k \frac{\sqrt{2\pi}\,(2k)^{2k+\frac{1}{2}} e^{-2k+\frac{1}{24k}-\frac{\theta}{2880k^3}}}{2^{2k}.2\pi k^{2k+1} e^{-2k+\frac{1}{6k}-\frac{\theta'}{180k^3}}} = (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k\pi}} e^{-\frac{1}{8k}+\frac{\theta''}{k^3}};$$

θ et θ' étant compris entre 0 et 1, et, par suite, θ'' entre $-\frac{1}{2880}$ et $\frac{1}{180}$: nous obtenons ainsi les deux relations

$$0 = \frac{\delta\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)}{2k+\frac{3}{2}} + \frac{\delta\cos\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)}{8\left(2k+\frac{3}{2}\right)^2}\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\gamma'}{\sin^2\gamma'} + \frac{p\delta}{\left(2k+\frac{3}{2}\right)^3} + \frac{q}{\left(2k+\frac{3}{2}\right)^3},$$

$$\frac{1}{\sqrt{k\pi}} e^{-\frac{1}{8k}+\frac{\theta''}{k^3}}$$

$$= \frac{\delta\cos\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)}{2k+\frac{1}{2}} - \frac{\delta\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)}{8\left(2k+\frac{1}{2}\right)^2}\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\gamma'}{\sin^2\gamma'} + \frac{p\delta}{\left(2k+\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{q}{\left(2k+\frac{1}{2}\right)^3};$$

dans lesquelles p et q n'ont pas la même signification que dans l'égalité (4), et représentent, comme dans tout ce qui va suivre, deux nombres fonctions de k seulement qui restent, quel que soit k, au-dessous d'une certaine limite fixe. Ordonnant les seconds membres par rapport aux puissances croissantes de $\frac{1}{k}$, groupant, dans $\frac{p\delta}{k^3}$ et $\frac{q}{k^3}$, tous les termes de même forme, et posant, pour simplifier,

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma'}{\sin^2\gamma'} = a,$$

ces égalités deviennent

$$\text{o} = \frac{\delta \sin\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)}{2k} - \frac{\delta}{8k^2}\left[3\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right) - \frac{a}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)\right] + \frac{p\delta}{k^3} + \frac{q}{k^3},$$

$$\frac{1}{\sqrt{k\pi}} e^{-\frac{1}{8k}+\frac{\theta''}{k^3}}$$

$$= \frac{\delta \cos\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)}{2k} - \frac{\delta}{8k^2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right) + \frac{a}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)\right] + \frac{p\delta}{k^3} + \frac{q}{k^3},$$

d'où, en faisant la somme membre à membre de leurs carrés et simplifiant,

$$\frac{1}{k\pi} e^{-\frac{1}{4k}+\frac{2\theta''}{k^3}} = \frac{\delta^2}{4k^2} - \frac{\delta^2}{8k^3}(2+\sin 2\varepsilon) + \frac{p\delta^2}{k^4} + \frac{q\delta}{k^4} + \frac{r}{k^6},$$

ou mieux,

$$(b) \quad \frac{1}{k\pi} - \frac{1}{4k^2\pi} + \frac{1}{32k^3\pi} = \frac{\delta^2}{4k^2} - \frac{\delta^2}{8k^3}(2+\sin 2\varepsilon) + \frac{p\delta^2}{k^4} + \frac{q\delta}{k^4} + \frac{r}{k^4}.$$

r étant un nombre de même nature que p et q, toujours fini, quel que soit k.

L'égalité (b) montre facilement que δ est de la forme $2\sqrt{\frac{k}{\pi}}(1+\zeta)$, ζ s'annulant avec $\frac{1}{k}$, puis l'égalité (a) que $\varepsilon = -\frac{\pi}{4}+\eta$, η s'annulant aussi avec $\frac{1}{k}$. Reste donc à trouver ζ et η; or, à cause des valeurs précédentes de δ et de ε, les égalités (a) et (b) peuvent se simplifier et s'écrire ainsi :

$$(a') \qquad \text{o} = \sin\eta - \frac{1}{4k}\left(3\sin\eta - \frac{a}{4}\cos\eta\right) + \frac{p}{k^2},$$

$$(b') \qquad \frac{1}{k\pi} - \frac{1}{4k^2\pi} = \frac{\delta^2}{4k^2} - \frac{\delta^2}{8k^3}(2-\cos 2\eta) + \frac{p}{k^3},$$

l'égalité (a') ne contenant que η, fait connaître cette inconnue; on peut d'abord la mettre sous la forme

$$\operatorname{tang}\eta\left(1-\frac{3}{4k}\right)+\frac{a}{16k}+\frac{p}{k^2}=0,$$

et de là on tire

$$\operatorname{tang}\eta=-\frac{a}{16k}+\frac{p}{k^2};$$

par conséquent,

$$\eta=-\frac{a}{16k}+\frac{p}{k^2}.$$

L'égalité (b'), qui peut, à cause de la valeur de η, s'écrire ainsi :

$$\frac{1}{k\pi}-\frac{1}{4k^2\pi}=\frac{\delta^2}{4k^2}-\frac{\delta^2}{8k^3}+\frac{p}{k^3},$$

donne ensuite

$$\delta^2=\frac{\frac{1}{k\pi}-\frac{1}{4k^2\pi}-\frac{p}{k^3}}{\frac{1}{4k^2}-\frac{1}{8k^3}}=\frac{4k}{\pi}+\frac{1}{\pi}+\frac{p}{k},$$

d'où

$$\delta=2\sqrt{\frac{k}{\pi}}+\frac{1}{4\sqrt{k\pi}}+\frac{p}{k\sqrt{k}}.$$

Ainsi les constantes δ et ε ont respectivement pour valeur,

$$\delta=2\sqrt{\frac{k}{\pi}}+\frac{1}{4\sqrt{k\pi}}+\frac{p}{k\sqrt{k}},$$

$$\varepsilon=-\frac{\pi}{4}-\frac{a}{16k}+\frac{q}{k^2},$$

p et q étant des fonctions de k jouissant de la propriété de ne pas pouvoir dépasser une certaine limite fixe.

Dans les valeurs précédentes de δ et de ε, k représente la moitié de l'indice n de X_n quand cet indice est pair, ou la moitié de l'indice diminuée de $\frac{1}{2}$ quand cet indice est impair; or il convient d'introduire l'indice lui-même dans les valeurs de δ et de ε; faisant la substitution, on trouve facilement

$$\delta = \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \pm \frac{1}{2\sqrt{2n\pi}} + \frac{p}{n\sqrt{n}}, \qquad \varepsilon = -\frac{\pi}{4} - \frac{a}{8n} + \frac{q}{n^2},$$

le signe $+$ du second terme de δ convenant au cas de n pair, et le signe $-$ au cas de n impair.

Reprenons la valeur de u fournie par l'équation (4), et écrivons-la comme il suit :

$$u = \frac{\delta \cos\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} + \varepsilon\right)}{n} - \frac{\delta \cos\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} + \varepsilon\right)}{2n^2}$$
$$- \frac{\delta}{8n^2} \sin\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} + \varepsilon\right) \int_\alpha^\gamma \frac{d\gamma'}{\sin^2\gamma'} + \frac{p\,\delta}{n^3} + \frac{q}{n^3},$$

en ordonnant par rapport aux puissances de $\frac{1}{n}$; puis remplaçons δ et ε par leurs valeurs précédemment obtenues, il viendra

$$u = \frac{2\cos\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2n\pi}} + (-1)^n \frac{\cos\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{2n\sqrt{2n\pi}}$$
$$+ \frac{\left(a - \int_\alpha^\gamma \frac{d\gamma'}{\sin^2\gamma'}\right) \sin\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{4n\sqrt{2n\pi}} + \frac{p}{n^2\sqrt{n}},$$

p étant maintenant une fonction de γ, quoique jouissant toujours de la même propriété; ou mieux

$$u = \frac{2\cos\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2n\pi}} + (-1)^n \frac{\cos\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{2n\sqrt{2n\pi}}$$
$$+ \frac{\cot\gamma \sin\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{4n\sqrt{2n\pi}} + \frac{p}{n^2\sqrt{n}},$$

en se rappelant les valeurs de a et de $\int_\alpha^\gamma \frac{d\gamma'}{\sin^2\gamma'}$.

Divisant enfin par $\sin^{\frac{1}{2}}\gamma$, afin d'avoir X_n, on trouve

$$X_n = \frac{2\cos\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2n\pi\sin\gamma}} + (-1)^n \frac{\cos\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{2n\sqrt{2n\pi\sin\gamma}}$$
$$+ \frac{\cot\gamma\sin\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{4n\sqrt{2n\pi\sin\gamma}} + \frac{p}{n^2\sqrt{n}},$$

comme il fallait le démontrer.

§ II.

Propriétés des fonctions Y_n.

Si, dans l'expression $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$, on suppose

$$x = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi'),$$

le coefficient de α^n, qui jusqu'ici a été désigné par X_n, deviendra ce qu'on appelle habituellement P_n.

Théorème I. *La fonction* P_n *satisfait à l'équation aux différences partielles*

$$(1)\qquad \frac{d\left(\sin\theta\frac{dP_n}{d\theta}\right)}{\sin\theta\, d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2P_n}{d\varphi^2} + n(n+1)P_n = 0.$$

Remarque. P_n n'est pas la seule fonction entière des trois quantités $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\varphi$, $\sin\theta\sin\varphi$, qui vérifie l'équation (1); on donnera plus bas, théorème IV, la forme générale des fonctions qui jouissent de cette double propriété, et que l'on appelle fonctions Y_n.

Théorème II. *On a*

$$P_n = X_nX'_n + \frac{2\Pi(n-1)}{\Pi(n+1)}\sin\theta\sin\theta'\frac{dX_n}{dx}\frac{dX'_n}{dx'}\cos(\varphi - \varphi')$$
$$+ \frac{2\Pi(n-2)}{\Pi(n+2)}\sin^2\theta\sin^2\theta'\frac{d^2X_n}{dx^2}\frac{d^2X'_n}{dx'^2}\cos 2(\varphi - \varphi') + \ldots,$$

$\Pi(k)$ *représentant en général le produit* $1.2.3\ldots k$, *et* X_n *et* X'_n *étant* *les coefficients de* α^n *dans les développements de* $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$, et de $(1 - 2\alpha x' + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$, *où l'on fait d'ailleurs*

$$x = \cos\theta, \quad x' = \cos\theta'.$$

THÉORÈME III. *On a*

$$\int_0^{2\pi} P_n \, d\varphi = 2\pi X_n X'_n,$$

X_n *et* X'_n *ayant la même signification que dans le théorème précédent.*

THÉORÈME IV. *On a*

$$Y_n = a X_n + (b' \cos\varphi + c' \sin\varphi) \frac{dX_n}{dx} \sin\theta + (b'' \cos 2\varphi + c'' \sin 2\varphi) \frac{d^2 X_n}{dx^2} \sin^2\theta + \ldots,$$

X_n *étant toujours le coefficient de* α^n *dans le développement de* $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ *où l'on suppose*

$$x = \cos\theta,$$

et $a, b', c', b'', c'', \ldots$ *représentant des constantes quelconques par rapport à* θ *et à* φ.

THÉORÈME V. *On a, m et n étant différents,*

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} Y_m Y_n \sin\theta \, d\theta = 0.$$

THÉORÈME VI. *On a*

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} Y_n P_n \sin\theta \, d\theta = \frac{2\pi}{2n+1} Y'_n,$$

en appelant Y'_n *ce que devient* Y_n *quand on y fait*

$$\theta = \theta' \quad \text{et} \quad \varphi = \varphi'.$$

THÉORÈME VII. *On a*

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} P_n^2 \sin\theta \, d\theta = \frac{2\pi}{2n+1}.$$

§ III.

Développement des fonctions de deux angles en séries ordonnées suivant les fonctions Y_n.

1. La formule qui sert à développer toute fonction de deux angles θ et φ en série ordonnée suivant les fonctions Y_n est exprimée par l'égalité suivante,

$$(a)\quad f(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1) \int_0^{\pi} \sin\theta'\, d\theta' \int_0^{2\pi} P_n f(\theta', \varphi')\, d\varphi'.$$

Cette égalité a lieu pour toutes les valeurs de θ et de φ comprises entre les limites $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$, et la fonction $f(\theta, \varphi)$ dont elle donne le développement, n'est assujettie qu'à la seule condition de ne pas devenir infinie. Quand le système de valeurs attribuées à θ et φ rend $f(\theta, \varphi)$ discontinue, le premier membre, qui n'a plus alors aucun sens précis, doit être remplacé par la valeur moyenne de la fonction $f(\theta, \varphi)$ répondant au système des valeurs de θ et de φ considérées. Voici, d'ailleurs, ce que l'on entend par valeur moyenne d'une fonction pour un système de valeurs des variables, rendant cette fonction discontinue. Prenons trois axes de coordonnées et regardons, pour plus de commodité, θ comme l'angle inférieur à π que forme une certaine droite OA issue de l'origine avec l'axe OZ, et φ comme l'angle positif que fait le plan de OA et de OZ avec le plan ZOX, de manière qu'à chaque système de valeurs de θ et de φ réponde une et une seule droite issue de l'origine; ou mieux, en représentant ces droites par leur point de rencontre avec une sphère S de rayon 1 et ayant le point O pour centre, un et un seul point de la sphère S. Ceci admis, supposons la fonction $f(\theta, \varphi)$ discontinue pour un système de valeurs de θ et φ répondant à un certain point A de la sphère S; on devra en conclure que la limite vers laquelle tend $f(\theta, \varphi)$, à mesure qu'on s'approche indéfiniment du point A en suivant une certaine ligne tracée sur la surface S et issue du point A, est variable avec la position de cette ligne qu'on peut supposer être un grand cercle dans le voisinage du point A; or, appelons ω l'angle variable qu'un arc de grand cercle quelconque AM, issu du point A, fait avec un autre arc de grand cercle fixe AB, issu du même point, et soit $F(\omega)$ la limite vers laquelle tend la fonction $f(\theta, \varphi)$, quand on s'approche du point A en suivant la ligne MA; l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\omega)\, d\omega$$

sera la valeur moyenne de la fonction $f(\theta, \varphi)$ relative au point A.

Il est presque inutile de dire que lorsque $f(\theta, \varphi)$ n'est pas discontinue pour le point A, il y a égalité entre la valeur moyenne et la valeur propre de la fonction en ce point.

2. Pour démontrer l'égalité (a), nous chercherons à sommer la série

$$(b) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1)\int_0^{\pi} \sin\theta'\, d\theta' \int_0^{2\pi} P_n f(\theta', \varphi')\, d\varphi';$$

à cet effet, nous considérerons d'abord la série

$$(c) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1)\, \alpha^n \int_0^{\pi} \sin\theta'\, d\theta' \int_0^{2\pi} P_n f(\theta', \varphi')\, d\varphi',$$

que l'on obtient en multipliant les différents termes de la précédente par les puissances successives d'un nombre α positif et moindre que 1; puis, ayant obtenu la somme de cette série, nous déterminerons la limite vers laquelle elle tend à mesure que α s'approche indéfiniment de 1; cette limite sera la somme de la série (b) si toutefois cette dernière série est convergente, comme cela résulte d'un théorème connu dû a Abel.

3. Posons

$$\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi') = \cos\gamma$$

et

$$(1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = V;$$

nous aurons, pour toutes les valeurs de α moindres que 1,

$$V = P_0 + P_1\alpha + P_2\alpha^2 + \ldots + P_n\alpha^n + \ldots;$$

de là on déduit aisément

$$V + 2\alpha \frac{dV}{d\alpha} = \frac{1-\alpha^2}{(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= P_0 + 3P_1\alpha + 5P_2\alpha^2 + \ldots + (2n+1)P_n\alpha^n + \ldots,$$

égalité qui subsiste aussi pour toutes les valeurs de α moindres que 1.

Multipliant les deux membres par $f(\theta', \varphi')\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'$, et intégrant par rapport à θ' de 0 à π, et par rapport à φ' de 0 à 2π, il vient

$$(1-\alpha^2)\int_0^\pi \sin\theta'\,d\theta' \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta', \varphi')\,d\varphi'}{(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1)\alpha^n \int_0^\pi \sin\theta'\,d\theta' \int_0^{2\pi} P_n f(\theta', \varphi')\,d\varphi',$$

ce qui déjà nous fait connaître la somme de la série (c).

4. Déterminons, en second lieu, la limite vers laquelle tend l'intégrale

$$(d) \qquad (1-\alpha^2)\int_0^\pi \sin\theta'\,d\theta' \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta', \varphi')\,d\varphi'}{(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}},$$

à mesure que α s'approche indéfiniment de 1, en lui restant constamment moindre. Reprenons la sphère S, appelons $d\sigma'$ l'élément de cette sphère qui répond au point M pour lequel

$$\text{ZOM} = \theta' \quad \text{et} \quad \left(\widehat{\text{ZOM}, \text{ZOX}}\right) = \varphi';$$

si N représente le point pour lequel

$$\text{ON} = \alpha, \quad \text{ZON} = \theta, \quad \left(\widehat{\text{ZON}, \text{ZOX}}\right) = \varphi,$$

et que A soit le point de la sphère S situé à l'extrémité du rayon ON, nous pourrons mettre l'intégrale (d) sous la forme

$$(e) \qquad (1+\alpha)\,\text{AN} \int\!\!\int \frac{f(\theta', \varphi')\,d\sigma'}{\overline{\text{MN}}^3}.$$

Cette nouvelle intégrale est étendue à tous les éléments de la sphère S; mais, comme il ne s'agit ici que de trouver la limite vers laquelle elle tend à mesure que α s'approche de 1, ou à mesure que le point N s'approche du point A, on peut évidemment se contenter de l'étendre à la portion de la sphère comprise dans un certain contour quelconque comprenant le point A, car l'autre partie de l'intégrale aura toujours zéro pour limite. Prenons donc pour définir les limites de l'intégrale un petit cercle ayant le point A pour pôle et supposons son rayon sphérique assez petit pour que, dans l'intérieur de ce cercle, il n'y ait pas d'autres points que le point A dont les coordonnées θ et φ puissent rendre discontinue la fonction $f(\theta, \varphi)$. On comprendra facilement que cette dernière condition peut toujours être remplie, en remarquant que les solutions de continuité de $f(\theta, \varphi)$ ne correspondent qu'à des points isolés et en nombre fini de la sphère S, et que cette fonction ne saurait être discontinue pour tous les points d'une ligne tracée sur la surface S, sans quoi la formule que nous nous proposons d'établir pourrait cesser d'être exacte. Ceci posé, transformons encore l'intégrale (e). Appelons γ l'angle MOA et ω l'angle que le plan MOA fait avec un plan fixe conduit suivant OA, le plan ZOA par exemple. En supposant à l'élément $d\sigma'$ une forme convenable, nous pourrons le considérer comme égal à $\sin\gamma\, d\gamma\, d\omega$, et si nous appelons $f_1(\gamma, \omega)$ la fonction $f(\theta, \varphi)$ exprimée en γ et ω, notre intégrale deviendra

$$(1+\alpha)\,\mathrm{AN}\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\gamma'} \frac{f_1(\gamma,\omega)\sin\gamma\, d\gamma}{\left(1+\overline{\mathrm{ON}}^2 - 2\,\mathrm{ON}\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}},$$

γ' étant le rayon sphérique du contour qui détermine les limites de l'intégrale.

5. Occupons-nous de l'intégrale simple

$$\mathrm{AN}\int_0^{\gamma'} \frac{f_1(\gamma,\omega)\sin\gamma\, d\gamma}{\left(1+\overline{\mathrm{ON}}^2 - 2\,\mathrm{ON}\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Intégrons par parties, ce qui est permis ici, puisque $f_1(\gamma, \omega)$ est continue entre les limites de l'intégration; il viendra

$$(f)\quad \left\{\begin{aligned}&\left[\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{ON}}\frac{f_1(\gamma,\omega)}{\left(1+\overline{\mathrm{ON}}^2-2\,\mathrm{ON}\cos\gamma\right)^{\frac{1}{2}}}\right]_{\gamma=0}-\left[\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{ON}}\frac{f_1(\gamma,\omega)}{\left(1+\overline{\mathrm{ON}}^2-2\,\mathrm{ON}\cos\gamma\right)^{\frac{1}{2}}}\right]_{\gamma=\gamma'}\\&\qquad+\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{ON}}\int_0^{\gamma'}\frac{\frac{df_1}{d\gamma}d\gamma}{\left(1+\overline{\mathrm{ON}}^2-2\,\mathrm{ON}\cos\gamma\right)^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned}\right.$$

Le premier terme de cette somme est égal à $\frac{f_1(0,\omega)}{\mathrm{ON}}$, et se réduit à $f_1(0,\omega)$ quand le point N coïncide avec le point A; le second a évidemment zéro pour limite. Passons au troisième

$$\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{ON}}\int_0^{\gamma'}\frac{\frac{df_1}{d\gamma}d\gamma}{\left(1+\overline{\mathrm{ON}}^2-2\,\mathrm{ON}\cos\gamma\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

La fonction $\frac{df_1}{d\gamma}$, qui entre sous le signe $\int$ dans cette intégrale, peut présenter, entre les limites o et γ' de l'intégration, un certain nombre de changements de signes; toutefois, ce nombre doit être fini, sans quoi la fonction $f_1(\gamma,\omega)$ aurait, dans le voisinage du point A, un nombre infini de maxima ou minima, hypothèse qu'il faut nécessairement écarter. Décomposons l'intégrale en une série d'autres, de telle sorte qu'entre les limites de chacune, la fonction $\frac{df_1}{d\gamma}$ ait constamment le même signe; et soit

$$\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{ON}}\int_{\gamma_k}^{\gamma_{k+1}}\frac{\frac{df_1}{d\gamma}d\gamma}{\left(1+\overline{\mathrm{ON}}^2-2\,\mathrm{ON}\cos\gamma\right)^{\frac{1}{2}}}$$

l'une de ces nouvelles intégrales; comme $\frac{\mathrm{AN}}{\left(1+\overline{\mathrm{ON}}^2-2\,\mathrm{ON}\cos\gamma\right)^{\frac{1}{2}}}$ est au plus égal à 1 et que $\frac{df_1}{d\gamma}$ a constamment le même signe de γ_k à γ_{k+1}, cette intégrale a une valeur absolue moindre que celle de la différence

$$\frac{1}{\mathrm{ON}}\left[f_1(\gamma_{k+1}, \omega) - f_1(\gamma_k, \omega)\right],$$

et, par conséquent, aussi petite que l'on veut; car $f_1(\gamma, \omega)$ est une fonction continue de γ, et les deux valeurs γ_k, γ_{k+1} de γ ont une différence aussi petite que l'on veut, puisqu'elles sont toutes deux moindres que γ', qui peut être supposé aussi petit que l'on veut; on a ainsi, pour le troisième terme de la somme (f), un nombre fini de quantités aussi petites que l'on veut, et, par conséquent, une quantité aussi petite que l'on veut; de là nous pouvons conclure que la limite vers laquelle tend l'intégrale simple

$$\mathrm{AN}\int_0^{\gamma'} \frac{f_1(\gamma, \omega)\sin\gamma\, d\gamma}{\left(1+\overline{\mathrm{ON}}^2 - 2\,\mathrm{ON}\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}},$$

est égale a $f_1(0, \omega)$, et, par conséquent, que celle vers laquelle tend l'intégrale double

$$(1+\alpha)\,\mathrm{AN}\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\gamma'} \frac{f_1(\gamma, \omega)\sin\gamma\, d\gamma}{\left(1+\overline{\mathrm{ON}}^2 - 2\,\mathrm{ON}\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}},$$

est

$$2\int_0^{2\pi} f_1(0, \omega)\, d\omega,$$

c'est-à-dire le produit par 4π de la valeur moyenne de $f(\theta, \varphi)$ au point A.

6. Il nous reste, et c'est là la principale difficulté de la question, à démontrer la convergence de la série (b). Transformons d'abord le terme général

$$(2n+1)\int_0^{\pi} \sin\theta'\, d\theta' \int_0^{2\pi} \mathrm{P}_n\, f(\theta', \varphi')\, d\varphi'$$

de cette série, en substituant aux variables θ' et φ' les variables γ et ω, dont nous avons fait usage précédemment; il viendra, en observant que P_n s'exprime au moyen de γ seulement,

$$(2n+1)\int_0^{\pi} \mathrm{P}_n \sin\gamma\, d\gamma \int_0^{2\pi} f_1(\gamma, \omega)\, d\omega,$$

ou bien

$$(g) \qquad (2n+1)\int_0^{\pi} P_n F(\gamma) \sin\gamma d\gamma,$$

en posant, pour simplifier,

$$\int_0^{2\pi} f_1(\gamma, \omega)\, d\omega = F(\gamma).$$

Faisons encore $\cos\gamma = x$; P_n deviendra X_n, et si nous appelons $\varphi(x)$ ce que devient $F(\gamma)$, nous aurons

$$(g') \qquad (2n+1)\int_{-1}^{+1} X_n \varphi(x)\, dx$$

comme seconde valeur du terme général de la série, qui, dans ce qui va suivre, sera employé concurremment avec la valeur (g).

7. Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de signaler une propriété très-importante des fonctions $F(\gamma)$ et $\varphi(x)$: ces deux fonctions, qui peuvent présenter un nombre fini quelconque de solutions de continuité entre les limites 0 et π, -1 et $+1$ des intégrales où elles entrent, ne peuvent jamais être discontinues pour ces limites mêmes. Ainsi, par exemple, $F(\gamma)$ ne saurait être discontinue pour

$$\gamma = 0.$$

Pour le voir clairement, on remarque que $F(0)$ est égal à $\int_0^{2\pi} f_1(0, \omega) d\omega$, c'est-à-dire au produit par 2π de la valeur moyenne de $f_1(\gamma, \omega)$ pour le point A; or on peut évidemment toujours tracer autour d'un point A un cercle assez petit pour que, dans son intérieur, il n'y ait pas d'autre discontinuité de la fonction $f_1(\gamma, \omega)$ que celle qui peut avoir lieu au point A; on en déduit qu'en prenant γ suffisamment petit, $f_1(\gamma, \omega)$ est aussi près que l'on veut de $f_1(0, \omega)$, quel que soit d'ailleurs ω; par suite, que $\int_0^{2\pi} f_1(\gamma, \omega)\, d\omega$ est aussi près que l'on veut de $\int_0^{2\pi} f_1(0, \omega)\, d\omega$.

8. Cette propriété étant admise, appelons ε un nombre déterminé assez petit pour que, entre -1 et $-1+\varepsilon$ et entre $1-\varepsilon$ et 1, il n'y ait aucune solution de continuité de la fonction $\varphi(x)$; nous pourrons décomposer l'intégrale (g') de la manière suivante :

$$(2n+1)\int_{-1}^{-1+\varepsilon} X_n\varphi(x)\,dx + (2n+1)\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} X_n\varphi(x)\,dx$$
$$+ (2n+1)\int_{1-\varepsilon}^{1} X_n\varphi(x)\,dx,$$

et tout consistera à prouver que les trois séries dont les termes généraux sont respectivement les termes de la somme précédente sont convergentes, ou plus simplement, d'après un théorème d'Abel, que les trois séries

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} n\int_{-1}^{-1+\varepsilon} X_n\varphi(x)\,dx,$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} n\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} X_n\varphi(x)\,dx,$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} n\int_{1-\varepsilon}^{1} X_n\varphi(x)\,dx,$$

le sont.

9. Considérons d'abord la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} n\int_{-1}^{-1+\varepsilon} X_n\varphi(x)\,dx;$$

en nous rappelant que X_n vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d(1-x^2)\dfrac{dX_n}{dx}}{dx} + n(n+1)X_n = 0,$$

nous pouvons mettre le terme général de notre série sous la forme

$$-\frac{1}{n+1}\int_{-1}^{-1+\varepsilon} \varphi(x)\frac{d(1-x^2)\dfrac{dX_n}{dx}}{dx}\,dx.$$

Intégrant par parties, ce qui est permis ici, puisque $\varphi(x)$ est continue entre -1 et $-1+\varepsilon$, on a

$$-\frac{\left[\varphi(x)(1-x^2)\dfrac{dX_n}{dx}\right]_{x=-1+\varepsilon}}{n+1}+\frac{1}{n+1}\int_{-1}^{-1+\varepsilon}\varphi'(x)(1-x^2)\frac{dX_n}{dx}\,dx.$$

Or,

$$\frac{1}{n+1}(1-x^2)\frac{dX_n}{dx}=x\,X_n-X_{n+1};$$

d'après le théorème X du § I^er; d'ailleurs la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}(x\,X_n-X_{n+1})_{x=-1+\varepsilon}$$

est convergente; donc déjà la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\left[\varphi(x)(1-x^2)\dfrac{dX_n}{dx}\right]_{x=-1+\varepsilon}}{n+1}$$

est convergente, et il suffit de démontrer que la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{n+1}\int_{-1}^{-1+\varepsilon}\varphi'(x)(1-x^2)\frac{dX_n}{dx}\,dx,$$

ou

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\int_{-1}^{-1+\varepsilon}\varphi'(x)(x\,X_n-X_{n+1})\,dx,$$

l'est aussi. Pour cela, remarquons que la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}(x\,X_n-X_{n+1}),$$

qui est convergente, avons-nous dit, pour $x=-1+\varepsilon$, l'est aussi pour $x=-1$. En effet, ses différents termes se réduisent à zéro pour cette hypothèse; il est donc possible de fixer un nombre A que ne dépasse jamais, en valeur absolue, la somme

$$\sum_{n=0}^{n=n}(x\,X_n-X_{n+1}),$$

quel que soit n et quel que soit x de -1 à $-1+\varepsilon$. Cela étant, on voit aisément que l'intégrale

$$\int_{-1}^{-1+\varepsilon} \varphi'(x) \sum_{n=0}^{n=n} (x X_n - X_{n+1})\, dx$$

est, quel que soit n, aussi près que l'on veut de zéro, en ayant soin de prendre ε suffisamment petit [il faut pourtant que $\varphi'(x)$ ne change de signe, ou que $\varphi(x)$ ne devienne *maximum* ou *minimum*, qu'un nombre fini de fois entre -1 et $-1+\varepsilon$]; il suffit de décomposer cette intégrale en une série d'autres, de façon qu'entre les limites de chacune, $\varphi'(x)$ ait toujours le même signe, puis d'observer que chacune de ces intégrales partielles est, en valeur absolue, moindre que A multiplié par la différence des valeurs que prend $\varphi(x)$ lorsqu'on remplace x par les deux limites de l'intégrale.

10. Il ne sera pas inutile, pour lever toutes les difficultés, de montrer comment on peut trouver une valeur de A, ce qui nous permettra en même temps d'établir la convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (x X_n - X_{n+1}),$$

que nous avons admise un peu plus haut. Rétablissons $\cos\gamma$ à la place de x, et P_n à la place de X_n.

On sait que l'on a (théorème IV, § I^er^)

$$P_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos\gamma + i \sin\gamma \cos\omega)^n\, d\omega;$$

d'où l'on tire, en posant pour simplifier $\cos\gamma + i\sin\gamma\cos\omega = z$,

$$\sum_{n=0}^{n=n-1} P_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1})\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1-z^n}{1-z}\, d\omega,$$

$$\sum_{n=0}^{n=n-1} P_{n+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (z + z^2 + \ldots + z^n)\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{z(1-z^n)}{1-z}\, d\omega,$$

et

$$\sum_{n=0}^{n=n-1} (\cos\gamma\, P_n - P_{n+1}) = \frac{-i}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\gamma\,(1-z^n)}{1-z}\cos\omega\, d\omega$$

$$= -\frac{i\sin\gamma}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos\omega\, d\omega}{1-\cos\gamma - i\sin\gamma\cos\omega} + \frac{i\sin\gamma}{\pi}\int_0^\pi \frac{(\cos\gamma + i\sin\gamma\cos\omega)^n\cos\omega\, d\omega}{1-\cos\gamma - i\sin\gamma\cos\omega}.$$

Ne prenons que les parties réelles de ces intégrales, car la somme de leurs parties imaginaires est évidemment nulle; nous trouverons, en considérant d'abord la première intégrale,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin^2\gamma\cos^2\omega\, d\omega}{(1-\cos\gamma)^2 + \sin^2\gamma\cos^2\omega},$$

ou bien, excluant le cas de $\gamma = 0$, pour lequel, du reste, la somme

$$\sum_{n=0}^{n=n-1} (\cos\gamma\, P_n - P_{n+1})$$

est nulle,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\frac{\gamma}{2}\cos^2\omega\, d\omega}{\sin^2\frac{\gamma}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2}\cos^2\omega};$$

divisant, sous le signe $\int$, par $\cos^2\frac{\gamma}{2}\cos^4\omega$, ce qui exige qu'on laisse encore de côté le cas de $\gamma = \pi$, pour lequel on a aussi

$$\sum_{n=0}^{n=n-1} (\cos\gamma\, P_n - P_{n+1}) = 0,$$

il vient

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,\mathrm{tang}\,\omega}{(1+\mathrm{tang}^2\omega)\left(1+\mathrm{tang}^2\frac{\gamma}{2} + \mathrm{tang}^2\frac{\gamma}{2}\,\mathrm{tang}^2\omega\right)} = 1 - \sin\frac{1}{2}\gamma.$$

Ainsi, la partie réelle de la première intégrale est toujours moindre que 1.

Occupons-nous de la seconde intégrale

$$\frac{i \sin \gamma}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{(\cos \gamma + i \sin \gamma \cos \omega)^n \cos \omega \, d\omega}{(1 - \cos \gamma - i \sin \gamma \cos \omega)};$$

il est évident que le module de $(\cos \gamma + i \sin \gamma \cos \omega)^n$ est au plus égal à 1 : donc la partie réelle et la partie imaginaire de cette expression sont, aussi séparément, au plus égales à 1, en valeur absolue; cela montre que la valeur absolue de la partie réelle de l'intégrale précédente est au plus égale à

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \gamma \cos^2 \omega \, d\omega}{(1 - \cos \gamma)^2 + \sin^2 \gamma \cos^2 \omega} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \gamma (1 - \cos \gamma) \cos \omega \, d\omega}{(1 - \cos \gamma)^2 + \sin^2 \gamma \cos^2 \omega}.$$

Mais la première de ces intégrales est moindre que 1, comme on l'a déjà vu; quant à la seconde, en excluant les cas de $\gamma = 0$ et de $\gamma = \pi$, on la ramène à celle-ci :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \frac{1}{2} \gamma \cos \frac{1}{2} \gamma \cos \omega \, d\omega}{\sin^2 \frac{1}{2} \gamma + \cos^2 \frac{1}{2} \gamma \cos^2 \omega} = \frac{4}{\pi} \cos^2 \frac{1}{4} \gamma \tang \frac{1}{4} \gamma \log \frac{1}{\tang \frac{1}{4} \gamma}:$$

mais, γ variant de 0 à π ou $\tang \frac{1}{4} \gamma$ de 0 à 1, le *maximum* de $\tang \frac{1}{4} \gamma \log \dfrac{1}{\tang \frac{1}{4} \gamma}$ est $\frac{1}{e}$: cela prouve que l'intégrale considérée est moindre que $\dfrac{4}{\pi e} < 1$. Ainsi, on a une valeur pour A, en prenant $1 + 1 + 1$ ou 3.

11. Il est démontré, par ce qui précède, que la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} n \int_{-1}^{-1+\varepsilon} X_n \varphi(x) \, dx$$

est convergente. On établirait de même la convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} n \int_{1-\varepsilon}^{1} X_n \varphi(x) \, dx.$$

Il ne nous reste donc à considérer que celle qui a pour terme général

$$n\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} X_n\,\varphi(x)\,dx,$$

ou, en rétablissant γ à la place de x,

$$n\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} F(\gamma)\,P_n\sin\gamma\,d\gamma,$$

α étant un nombre déterminé, positif, mais aussi voisin que l'on veut de zéro.

12. Remplaçons P_n, qui ne diffère de X_n que par l'échange de x en $\cos\gamma$, par la valeur fournie par le théorème XI du § I^{er}; on reconnaîtra aisément que la question se ramène à démontrer la convergence des séries

$$\sum\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\sqrt{n}\cos n\gamma\sin\gamma\,\mathrm{tang}^{\pm\frac{1}{2}}\frac{\gamma}{2}\,F(\gamma)\,d\gamma,$$

$$\sum\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\sqrt{n}\sin n\gamma\sin\gamma\,\mathrm{tang}^{\pm\frac{1}{2}}\frac{\gamma}{2}\,F(\gamma)\,d\gamma,$$

$$\sum\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos n\gamma\cos\gamma\,\mathrm{tang}^{\pm\frac{1}{2}}\frac{\gamma}{2}\,F(\gamma)\,d\gamma,$$

$$\sum\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin n\gamma\cos\gamma\,\mathrm{tang}^{\pm\frac{1}{2}}\frac{\gamma}{2}\,F(\gamma)\,d\gamma,$$

$$\sum\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{1}{n\sqrt{n}}\,p\sin\gamma\,F(\gamma)\,d\gamma,$$

où les sommes s'étendent à toutes les valeurs entières de n, et celle des séries

$$\sum\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos n\gamma\sin\gamma\,\mathrm{tang}^{\pm\frac{1}{2}}\frac{\gamma}{2}\,F(\gamma)\,d\gamma,$$

$$\sum\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin n\gamma\sin\gamma\,\mathrm{tang}^{\pm\frac{1}{2}}\frac{\gamma}{2}\,F(\gamma)\,d\gamma,$$

où les sommes s'étendent successivement à toutes les valeurs paires et à toutes les valeurs impaires de n. D'abord il est inutile de s'occuper de la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} p\sin\gamma\,F(\gamma)\,d\gamma,$$

puisque la série $\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ est convergente, et que la fonction $p \sin\gamma \mathrm{F}(\gamma)$ reste toujours finie entre les limites de l'intégration; quant aux autres, je dis qu'il suffira de faire voir que les deux séries

$$\sum \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{n} \cos n\gamma \Phi(\gamma)\, d\gamma, \qquad \sum \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{n} \sin n\gamma \Phi(\gamma)\, d\gamma,$$

où les sommes s'étendent à toutes les valeurs entières de n, et où $\Phi(\gamma)$ désigne une fonction ou un produit de fonctions indépendantes de n, ne devenant jamais infinies entre α et β, et ne présentant entre ces limites qu'un nombre fini de maxima ou minima, sont convergentes.

Supposons, en effet, ce point établi; il en résultera que les séries

$$\sum \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \sqrt{n} \cos n\gamma \sin\gamma \operatorname{tang}^{\pm\frac{1}{2}} \frac{\gamma}{2} \mathrm{F}(\gamma)\, d\gamma,$$

$$\sum \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \sqrt{n} \sin n\gamma \sin\gamma \operatorname{tang}^{\pm\frac{1}{2}} \frac{\gamma}{2} \mathrm{F}(\gamma)\, d\gamma,$$

$$\sum \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \sqrt{n} \cos n\gamma \cos\gamma \operatorname{tang}^{\pm\frac{1}{2}} \frac{\gamma}{2} \mathrm{F}(\gamma)\, d\gamma,$$

$$\sum \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \sqrt{n} \cos n\gamma \cos\gamma \operatorname{tang}^{\pm\frac{1}{2}} \frac{\gamma}{2} \mathrm{F}(\gamma)\, d\gamma,$$

où les sommes s'étendent à toutes les valeurs entières de n, sont convergentes, et, par conséquent, d'après un théorème d'Abel, déjà employé, que les suivantes :

$$\sum \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos n\gamma \sin\gamma \operatorname{tang}^{\pm\frac{1}{2}} \frac{\gamma}{2} \mathrm{F}(\gamma)\, d\gamma,$$

$$\sum \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin n\gamma \sin\gamma \operatorname{tang}^{\pm\frac{1}{2}} \frac{\gamma}{2} \mathrm{F}(\gamma)\, d\gamma,$$

$$\sum \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos n\gamma \cos\gamma \operatorname{tang}^{\pm\frac{1}{2}} \frac{\gamma}{2} \mathrm{F}(\gamma)\, d\gamma,$$

$$\sum \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin n\gamma \cos\gamma \operatorname{tang}^{\pm\frac{1}{2}} \gamma \mathrm{F}(\gamma)\, d\gamma,$$

où les sommes s'étendent également à toutes les valeurs entières de n, le sont aussi; d'un autre côté, il est facile de démontrer que si des séries de la forme

$$\sum \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\cos n\gamma}{\sqrt{n}} \Phi(\gamma)\, d\gamma, \quad \sum \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin n\gamma}{\sqrt{n}} \Phi(\gamma)\, d\gamma,$$

ou $\Phi(\gamma)$ représente une fonction ou un produit de fonctions indépendantes de n et toujours finies entre α et β, sont convergentes quand on étend les sommes à toutes les valeurs entières de n, il en est de même lorsqu'on n'étend ces sommes qu'aux valeurs paires ou impaires. En effet, supposons que n doive toujours être pair dans la première somme par exemple, nous pourrons la mettre sous la forme

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \sum \int_{2\alpha}^{2\beta} \frac{\cos n\gamma}{\sqrt{n}} \Phi\left(\frac{\gamma}{2}\right) d\gamma,$$

le signe s'étendant à toutes les valeurs entières de n, et cette série étant convergente, il en sera de même de la première; si n doit toujours être impair, nous pourrons mettre la même somme sous la forme

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \sum \int_{2\alpha}^{2\beta} \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}} \Phi\left(\frac{\gamma}{2}\right) d\gamma,$$

puis sous celle-ci,

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \sum \int_{2\alpha}^{2\beta} \frac{\cos n\gamma \cos\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{n}} \Phi\left(\frac{\gamma}{2}\right) d\gamma$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum \int_{2\alpha}^{2\beta} \frac{\sin n\gamma \sin\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{n}} \Phi\left(\frac{\gamma}{2}\right) d\gamma + \sum \int_{2\alpha}^{2\beta} \frac{p\, d\gamma}{n\sqrt{n}},$$

toutes ces nouvelles sommes s'étendant aux valeurs paires et impaires de n, et p représentant une fonction de γ et de n, toujours au-dessous d'une certaine limite. Or les trois dernières séries sont convergentes, il en est donc de même de la série proposée. On voit par là que les séries

$$\sum\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos n\gamma\sin\gamma\operatorname{tang}^{\pm\frac{1}{2}}\frac{\gamma}{2}\,\mathrm{F}(\gamma)\,d\gamma,$$

$$\sum\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos n\gamma\sin\gamma\operatorname{tang}^{\pm\frac{1}{2}}\frac{\gamma}{2}\,\mathrm{F}(\gamma)\,d\gamma,$$

où les sommes s'étendent tantôt aux valeurs paires, tantôt aux valeurs impaires de n, seront convergentes, s'il en est ainsi lorsque les sommes s'étendent à toutes les valeurs entières de n. Ainsi, comme on l'avait énoncé, tout se réduit à établir la convergence des séries

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\sqrt{n}\cos n\gamma\,\Phi(\gamma)\,d\gamma,\quad \sum_{n=0}^{n=\infty}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\sqrt{n}\sin n\gamma\,\Phi(\gamma)\,d\gamma,$$

où $\Phi(\gamma)$ représente, nous le répétons, une fonction ou un produit de fonctions, indépendantes de n, ne devenant jamais infinies entre α et $\pi-\alpha$, et ne présentant entre ces limites qu'un nombre fini de maxima et minima. Nous allons, pour cela, évaluer d'abord les deux sommes

$$\sum_{n=1}^{n=n}\frac{\cos n\gamma}{\sqrt{n}},\quad \sum_{n=1}^{n=n}\frac{\sin n\gamma}{\sqrt{n}}.$$

15. Or on a

$$\frac{1}{\Gamma\frac{1}{2}}\int_0^1 x^{n-1}\log^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{\sqrt{n}};$$

d'où

$$\frac{1}{\Gamma\frac{1}{2}}\int_0^1\log^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right)\left(e^{\gamma\sqrt{-1}}+xe^{2\gamma\sqrt{-1}}+x^2e^{3\gamma\sqrt{-1}}+\ldots+x^{n-1}e^{n\gamma\sqrt{-1}}\right)dx$$

$$=\sum_{n=1}^{n=n}\frac{e^{n\gamma\sqrt{-1}}}{\sqrt{n}};$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{n=n} \frac{\cos n\gamma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\Gamma\frac{1}{2}} \int_0^1 \log^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right) \frac{\cos\gamma - x - x^n \cos(n+1)\gamma + x^{n+1}\cos n\gamma}{1 + x^2 - 2x\cos\gamma} dx,$$

$$\sum_{n=1}^{n=n} \frac{\sin n\gamma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\Gamma\frac{1}{2}} \int_0^1 \log^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right) \frac{\sin\gamma - x^n \sin(n+1)\gamma + x^{n+1}\sin n\gamma}{1 + x^2 - 2x\cos\gamma} dx:$$

différentiant par rapport à γ, et ne développant les calculs que pour les termes dépendants de n, il vient

$$\sum_{n=1}^{n=n} \sqrt{n}\sin n\gamma = \frac{1}{\Gamma\frac{1}{2}} \int_0^1 \log^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right) \frac{2x^{n+2}\sin\gamma\cos n\gamma - 2x^{n+1}\sin\gamma\cos(n+1)\gamma}{(1 + x^2 - 2x\cos\gamma)^2} dx$$

$$+ \frac{1}{\Gamma\frac{1}{2}} \int_0^1 \log^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right) \frac{-(n+1)x^n\sin(n+1)\gamma + nx^{n+1}\sin n\gamma}{(1 + x^2 - 2x\cos\gamma)} dx + k,$$

$$\sum_{n=1}^{n=n} \sqrt{n}\cos n\gamma = \frac{1}{\Gamma\frac{1}{2}} \int_0^1 \log^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right) \frac{2x^{n+1}\sin\gamma\sin(n+1)\gamma - 2x^{n+2}\sin\gamma\sin n\gamma}{(1 + x^2 - 2x\cos\gamma)^2} dx$$

$$+ \frac{1}{\Gamma\frac{1}{2}} \int_0^1 \log^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right) \frac{-(n+1)x^n\cos(n+1)\gamma + nx^{n+1}\cos n\gamma}{(1 + x^2 - 2x\cos\gamma)} dx + k';$$

k et k' représentant des fonctions de γ indépendantes de n et jouissant de la propriété de rester au-dessous d'une limite fixe, lorsque γ varie de α à $\pi - \alpha$.

Actuellement on peut remarquer que puisque, en général,

$$\frac{1}{\Gamma\frac{1}{2}} \int_0^1 \log^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right) x^{p-1}\, dx = \frac{1}{\sqrt{p}};$$

on a aussi

$$\frac{1}{\Gamma\frac{1}{2}}\int_0^1 \log^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right)\frac{x^{p-1}\,dx}{1+x^2-2x\cos\gamma}=\frac{M}{\sqrt{p}};$$

$$\frac{1}{\Gamma\frac{1}{2}}\int_0^1 \log^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right)\frac{x^{p-1}\,dx}{(1+x^2-2x\cos\gamma)^2}=\frac{N}{\sqrt{p}};$$

M et N étant des fonctions de p et de γ qui, pour toutes les valeurs de p et pour les valeurs de γ comprises entre α et $\pi-\alpha$, restent au-dessous d'une certaine limite fixe, et qui jouissent en outre de la propriété de constamment décroître, lorsqu'après avoir fixé p on fait croître γ de α à $\pi-\alpha$; d'après cela, les formules ci-dessus deviennent

$$\sum_{n=1}^{n=n}\sqrt{n}\cos n\gamma=\frac{M(n+1)\cos(n+1)\gamma}{\sqrt{n+1}}+\frac{M_1 n\cos n\gamma}{\sqrt{n+2}}$$
$$+\frac{N\sin\gamma\sin(n+1)\gamma}{\sqrt{n+2}}+\frac{N_1\sin\gamma\sin n\gamma}{\sqrt{n+3}}+k,$$

$$\sum_{n=1}^{n=n}\sqrt{n}\sin n\gamma=\frac{M(n+1)\sin(n+1)\gamma}{\sqrt{n+1}}+\frac{M_1 n\sin n\gamma}{\sqrt{n+2}}$$
$$-\frac{N\sin\gamma\cos(n+1)\gamma}{\sqrt{n+2}}-\frac{N_1\sin\gamma\cos n\gamma}{\sqrt{n+3}}+k',$$

M, M_1, N, N_1 étant des quantités analogues aux quantités M et N précédemment définies, et l'on a

$$\sum_{n=1}^{n=n}\int_\alpha^{\pi-\alpha}\sqrt{n}\cos n\gamma\,\Phi(\gamma)\,d\gamma=\int_\alpha^{\pi-\alpha}\frac{M(n+1)\cos(n+1)\gamma\,\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+1}}$$
$$+\int_\alpha^{\pi-\alpha}\frac{M_1 n\cos n\gamma\,\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+2}}+\int_\alpha^{\pi-\alpha}\frac{N\sin\gamma\sin(n+1)\gamma\,\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+2}}$$
$$+\int_\alpha^{\pi-\alpha}\frac{N_1\sin\gamma\sin n\gamma\,\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+3}}+\int_\alpha^{\pi-\alpha}k\,\Phi(\gamma)\,d\gamma,$$

$$\sum_{n=1}^{n=n}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\sqrt{n}\sin n\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma=\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{\mathrm{M}(n+1)\sin(n+1)\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+1}}$$

$$+\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{\mathrm{M}_1 n\sin n\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+2}}-\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{\mathrm{N}\sin\gamma\cos(n+1)\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+2}}$$

$$-\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{\mathrm{N}_1\sin\gamma\cos n\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+3}}+\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}k'\Phi(\gamma)\,d\gamma;$$

de telle sorte que, pour établir la convergence des deux séries

$$\sum\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\sqrt{n}\cos n\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma,\quad \sum\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\sqrt{n}\sin n\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma,$$

il suffit de faire voir que les limites vers lesquelles tendent les différentes expressions

$$\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{\mathrm{M}(n+1)\cos(n+1)\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+1}},\qquad \int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{\mathrm{M}_1 n\cos n\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+2}},$$

$$\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{\mathrm{N}\sin\gamma\sin(n+1)\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+2}},\qquad \int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{\mathrm{N}_1\sin\gamma\sin n\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+3}};$$

$$\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{\mathrm{M}(n+1)\sin(n+1)\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+1}},\qquad \int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{\mathrm{M}_1 n\sin n\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+2}};$$

$$\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{\mathrm{N}\sin\gamma\cos(n+1)\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+2}},\qquad \int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{\mathrm{N}_1\sin\gamma\cos n\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+3}},$$

à mesure que n croît, sont toutes finies et déterminées, puisque les deux intégrales

$$\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}k\,\Phi(\gamma)\,d\gamma,\quad \int_{\alpha}^{\pi-\alpha}k'\,\Phi(\gamma)\,d\gamma$$

sont indépendantes de n et finies. A cet effet, nous démontrerons, il est clair que cela suffit, que zéro est la limite des deux intégrales

$$\sqrt{n}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\mathrm{M}\cos n\gamma\,\Phi(\gamma)\,d\gamma,\quad \sqrt{n}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\mathrm{M}\sin n\gamma\,\Phi(\gamma)\,d\gamma,$$

dans lesquelles $\Phi(\gamma)$ représente, comme plus haut, un produit de

5..

fonctions de γ qui ne deviennent jamais infinies entre α et $\pi - \alpha$, et n'ayant entre ces limites qu'un nombre fini de maxima ou minima, et M une fonction de γ et de n qui, pour toutes les valeurs de n et pour toutes les valeurs de γ, depuis α jusqu'à $\pi - \alpha$, reste au-dessous d'une certaine limite, et décroît lorsque γ croît.

14. Divisons l'intervalle compris entre α et $\pi - \alpha$ en une série d'autres, de façon que dans chacun de ces nouveaux intervalles les facteurs qui composent $\Phi(\gamma)$ varient dans le même sens; soient a et b les limites d'un quelconque de ces intervalles, appelons p, p_1, p_2 les facteurs de $\Phi(\gamma)$ qui vont en diminuant, lorsque γ augmente de a à b, et q, q_1, q_2 ceux qui vont en augmentant; soit d'ailleurs A un nombre positif supérieur à la valeur absolue de chacun des deux produits

$$\mathrm{M}pp_1p_2, \quad qq_1q_2$$

pour toutes les valeurs de n et pour les valeurs de γ depuis a jusqu'à b; nous pourrons écrire la partie des deux intégrales ci-dessus qui se rapporte à l'intervalle compris entre a et b, de la manière suivante :

$$-\int_a^b \sqrt{n}\cos n\gamma(\mathrm{A} + \mathrm{M}pp_1p_2)(\mathrm{A} - qq_1q_2)\,d\gamma$$

$$+\mathrm{A}\int_a^b \sqrt{n}\cos n\gamma(\mathrm{A} + \mathrm{M}pp_1p_2)\,d\gamma$$

$$+\mathrm{A}\int_a^b \sqrt{n}\cos n\gamma(\mathrm{A} - qq_1q_2)\,d\gamma + \mathrm{A}^2\int_a^b \sqrt{n}\cos n\gamma\,d\gamma,$$

$$-\int_a^b \sqrt{n}\sin n\gamma(\mathrm{A} + \mathrm{M}pp_1p_2)(\mathrm{A} - qq_1q_2)\,d\gamma$$

$$+\mathrm{A}\int_a^b \sqrt{n}\sin n\gamma(\mathrm{A} + \mathrm{M}pp_1p_2)\,d\gamma$$

$$+\mathrm{A}\int_a^b \sqrt{n}\sin n\gamma(\mathrm{A} - qq_1q_2)\,d\gamma + \mathrm{A}^2\int_a^b \sqrt{n}\sin n\gamma\,d\gamma;$$

remarquant alors que les intégrales définies

$$\int_a^\gamma \sqrt{n}\cos n\gamma\,d\gamma, \quad \int_a^\gamma \sqrt{n}\sin n\gamma\,d\gamma$$

sont, quelles que soient les limites, inférieures à $\frac{2}{\sqrt{n}}$, et que les expressions

$$A + M p p_1 p_2, \quad A - q q_1 q_2, \quad (A + M p p_1 p_2)(A - q q_1 q_2)$$

sont positives et décroissantes, on verra aisément, d'après un lemme de calcul intégral que j'ai démontré dans le tome XIV du Journal de M. Liouville, que la partie considérée des deux intégrales

$$\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \sqrt{n} \cos n\gamma \, \Phi(\gamma) \, d\gamma, \quad \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \sqrt{n} \sin n\gamma \, \Phi(\gamma) \, d\gamma$$

est moindre qu'un nombre de la forme $\frac{k}{\sqrt{n}}$, k étant indépendant de n et au-dessous d'une certaine limite, et, par conséquent, aussi petite qu'on le veut, en prenant n suffisamment grand. Ce que nous avons dit de la partie des intégrales précédentes, qui se rapporte à l'intervalle compris entre a et b, nous pourrions le dire de tous les autres intervalles en lesquels nous avons décomposé l'intervalle de α à $\pi-\alpha$; donc le nombre de ces intervalles étant fini, puisque le nombre des maxima et minima, compris entre α et $\pi - \alpha$, des différents facteurs p, p_1, p_2, q, q_1, q_2 de $\Phi(\gamma)$, est lui-même limité, nous pouvons conclure que les intégrales totales

$$\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \sqrt{n} \cos n\gamma \, \Phi(\gamma) \, d\gamma, \qquad \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \sqrt{n} \sin n\gamma \, \Phi(\gamma) \, d\gamma$$

sont aussi petites que l'on veut, en prenant n suffisamment grand.

15. *Nota.* Si dans la formule

$$f(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1) \int_0^{\pi} \sin\theta' \, d\theta' \int_0^{2\pi} P_n f(\theta', \varphi') \, d\varphi'$$

qui donne le développement d'une fonction de deux angles en série ordonnée suivant les fonctions Y_n, on suppose la fonction $f(\theta, \varphi)$ indépendante de φ, on trouve

$$f(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1) \int_0^{\pi} f(\theta') \sin\theta' \, d\theta' \int_0^{2\pi} P_n \, d\varphi'$$

ou bien, posant $\cos\theta = x$, $\cos\theta' = x'$, appelant $F(x)$ ce que devient $f(\theta)$ et se rappelant le théorème III du § II,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2n+1}{2} X_n \int_{-1}^{+1} F(x') X_n' \, dx'.$$

C'est la formule par laquelle on développe une fonction d'une variable x (x restant compris entre -1 et $+1$), en série ordonnée suivant les fonctions X_n. Il ne faut pas perdre de vue que lorsqu'on attribue à x une valeur qui rend la fonction $F(x)$ discontinue, l'égalité précédente n'est exacte qu'en ayant soin de remplacer le premier membre par la valeur moyenne de la fonction, c'est-à-dire ici par $\frac{F(x-\varepsilon) + F(x+\varepsilon)}{2}$; ε étant un nombre infiniment petit.

Vu et approuvé,

Le 12 juin 1852,

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer,

Le 14 juin 1852,

Le Recteur de l'Académie de la Seine,

CAYX.

THÈSE D'ASTRONOMIE.

SUR LA THÉORIE MATHÉMATIQUE DES CARTES GÉOGRAPHIQUES.

INTRODUCTION.

Une carte géographique n'est autre chose qu'une représentation sur une surface déterminée, que l'on suppose ordinairement plane, de la surface de la terre ou de l'une de ses parties. Cette représentation peut être faite suivant une loi quelconque ; toutefois, dans les premières cartes qu'on a construites, elle a toujours été soumise aux règles de la perspective. Les cartes étaient ainsi de simples projections coniques ou cylindriques, et les différences qui existaient entre elles, provenaient de la position donnée à l'œil et au plan de projection. On connaît ces différentes cartes, dont les plus remarquables sont dues à Ptolémée. Plus tard, quelques astronomes abandonnèrent le mode de représentation par perspective, qui avait dû se présenter tout naturellement à l'esprit, mais que rien n'obligeait à suivre, et ils regardèrent les lignes correspondantès aux méridiens et aux parallèles, comme des lignes tout à fait quelconques que l'on pouvait, dans chaque cas, choisir arbitrairement, suivant la destination de la carte. C'est ainsi que furent construites les cartes marines réduites ou par latitudes croissantes, dans lesquelles on s'imposait la condition que les rumbs de vent fussent représentés par des droites faisant entre elles les mêmes angles que ces rumbs faisaient dans la rose de compas. Enfin, Lambert envisagea la théorie des cartes géographiques sous un point de vue général extrêmement important. Il remarqua que le plus grand degré de perfection d'une carte était de reproduire la figure des différentes parties de la carte, de manière qu'il y eût constamment similitude entre une partie quelconque de la terre et la partie correspondante de la carte; mais cette condition étant généralement impossible à remplir, à moins de supposer à la surface de la carte une forme particulière, Lambert se proposa de déterminer les lignes des méridiens et des parallèles par la condition que la similitude eût lieu seulement entre les éléments infiniment petits. Sans doute, de cette manière, une portion finie de la terre était déformée sur la carte, mais les angles faits sur la carte étaient toujours égaux aux angles correspondants sur la surface du globe, propriété importante que l'on avait reconnue au système de représentation de Ptolémée. Lambert ne résolut pas d'une manière complète le problème général qu'il s'était posé; après lui, plusieurs géomètres, Euler, Lagrange, s'occupèrent avec succès de la question, mais en supposant toujours à la terre la forme d'une sphère ou tout au plus d'une surface de révolution; ce fut M. Gauss qui, dans un Mémoire couronné par l'Académie de Copenhague, résolut, le premier, le problème dans toute sa généralité et sans faire aucune hypothèse sur la surface de la terre et sur celle de la carte. Nous nous proposons, dans cette Thèse, d'exposer la théorie des cartes géographiques au point de vue indiqué par Lambert. Notre travail n'offre rien d'essentiellement nouveau. Nous n'avons eu d'autre but que de simplifier les solutions des questions traitées avant nous par Lagrange, Euler, M. Gauss.

---

1. Soient deux surfaces quelconques S et S′ représentant la surface de la terre et celle de la carte. Supposons que l'on ait exprimé les trois coordonnées x, y, z rectangulaires d'un point quelconque m de la surface S, en fonction de deux variables indépendantes u et v, et les coordonnées x', y', z' d'un point m' de la surface S′, au moyen de deux autres variables u' et v'; de telle sorte que la première surface soit définie par trois équations de la forme

$$(1)\qquad x = f(u, v), \quad y = f_1(u, v), \quad z = f_2(u, v),$$

et la seconde par trois équations telles que

$$(2)\qquad x' = \varphi(u', v'), \quad y' = \varphi_1(u', v'), \quad z' = \varphi_2(u', v');$$

il s'agira de faire correspondre les points m et m' ou de déterminer u'

et v' en fonction de u et de v, de façon qu'un élément $m'm'_1$ de la surface S' ait, avec l'élément correspondant mm_1 de la surface S, un rapport indépendant de la direction de ces éléments et variable seulement avec la position des points m et m'.

2. Différentiant les équations (1), on trouve aisément que l'élément de la surface S, qui se termine aux points (u, v), $(u + du, v + dv)$, est

$$ds = \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2},$$

en posant

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = E,$$

$$\frac{dx}{du}\frac{dx}{dv} + \frac{dy}{du}\frac{dy}{dv} + \frac{dz}{du}\frac{dz}{dv} = F,$$

$$\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2 = G;$$

de même, l'élément de la surface S', qui se termine aux points (u', v'), $(u' + du', v' + dv')$, est

$$ds' = \sqrt{E'\,du'^2 + 2F'\,du'\,dv' + G'\,dv'^2},$$

en posant

$$\left(\frac{dx'}{du'}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{du'}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{du'}\right)^2 = E',$$

$$\frac{dx'}{du'}\frac{dx'}{dv'} + \frac{dy'}{du'}\frac{dy'}{dv'} + \frac{dz'}{du'}\frac{dz'}{dv'} = F',$$

$$\left(\frac{dx'}{dv'}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dv'}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dv'}\right)^2 = G'.$$

L'équation du problème devient ainsi

$$(3)\qquad \frac{E'\,du'^2 + 2F'\,du'\,dv' + G'\,dv'^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} = n^2,$$

n^2 étant une certaine fonction de u et de v. Pour pouvoir déduire de cette équation les valeurs de u' et v', il faut d'abord la simplifier, en particularisant les variables u, v, u' et v'. Nous choisirons ces variables de manière que l'on ait

$$E = 0, \quad G = 0, \quad E' = 0, \quad G' = 0.$$

Mais prouvons d'abord qu'il existe de telles variables et montrons comment on peut les obtenir.

3. Je considère l'équation différentielle

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = 0, \tag{4}$$

et je suppose qu'on en ait déduit une intégrale contenant une constante arbitraire. Soit

$$F(u, v) = C$$

cette intégrale résolue par rapport à la constante. Évidemment la fonction $F(u, v)$ sera imaginaire, car les valeurs de $\frac{dv}{du}$ déduites de l'équation (4) sont imaginaires; nous pouvons donc poser

$$F(u, v) = U + V\sqrt{-1},$$

U et V étant des fonctions réelles de u et de v, et notre intégrale deviendra

$$U + V\sqrt{-1} = C.$$

Cette intégrale renfermant, par hypothèse, une constante arbitraire, si on la différentie et qu'on tire $\frac{dv}{du}$, on trouvera une valeur qui devra être identiquement égale, quels que soient u et v, à l'une des deux valeurs de $\frac{dv}{du}$, que l'on déduit de l'équation (4); quant à l'autre valeur, comme elle est conjuguée de la première, elle sera évidemment fournie par l'équation

$$dU - dV\sqrt{-1} = 0.$$

Nous pouvons conclure de là que l'on a identiquement

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = M(dU^2 + dV^2),$$

M étant une certaine fonction de u et de v. Posant maintenant

$$U + V\sqrt{-1} = \alpha, \quad U - V\sqrt{-1} = \beta,$$

α et β étant de nouvelles variables, on aura

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = \mu\,d\alpha\,d\beta,$$

μ étant ce que devient M quand on y remplace u et v par leurs valeurs en α et β.

Ainsi, en prenant les variables α et β, l'élément de la surface S a la forme que nous voulions obtenir. Appelant de même

$$U' + V'\sqrt{-1} = C'$$

une intégrale quelconque de l'équation

$$(5)\qquad E'du'^2 + 2F'du'dv' + G'dv'^2 = 0,$$

nous verrions que le carré de l'élément de la surface S' peut se mettre sous la forme $M'(dU'^2 + dV'^2)$, et puis, en posant

$$U' + V'\sqrt{-1} = \alpha',\quad U' - V'\sqrt{-1} = \beta',$$

sous la forme voulue $\mu' d\alpha' d\beta'$; introduisant dans l'équation (3) les variables α, β, α', β', cette équation devient

$$\mu' d\alpha' d\beta' = n^2 \mu\, d\alpha\, d\beta,$$

et rien n'est plus simple maintenant que d'obtenir α' et β'.

4. En effet, remplaçons $d\alpha'$ par $\frac{d\alpha'}{d\alpha}d\alpha + \frac{d\alpha'}{d\beta}d\beta$, et $d\beta'$ par $\frac{d\beta'}{d\alpha}d\alpha + \frac{d\beta'}{d\beta}d\beta$, il vient

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha}\frac{d\beta'}{d\alpha}d\alpha^2 + \frac{d\alpha'}{d\beta}\frac{d\beta'}{d\beta}d\beta^2 + \left(\frac{d\alpha'}{d\alpha}\frac{d\beta'}{d\beta} + \frac{d\alpha'}{d\beta}\frac{d\beta'}{d\alpha}\right)d\alpha\, d\beta = n^2\mu\, d\alpha\, d\beta,$$

d'où

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha}\frac{d\beta'}{d\alpha} = 0,\quad \frac{d\alpha'}{d\beta}\frac{d\beta'}{d\beta} = 0,$$

et, par conséquent,

$$\frac{d\alpha'}{d\beta} = 0,\quad \frac{d\beta'}{d\alpha} = 0,$$

ou

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha} = 0,\quad \frac{d\beta'}{d\beta} = 0;$$

c'est-à-dire, en intégrant,

$$\alpha' = F(\alpha),\quad \beta' = F_1(\beta).$$

6..

ou bien

$$\alpha' = \Phi(\beta), \quad \beta' = \Phi_1(\alpha).$$

3. Nous aurions pu obtenir les résultats précédents en exprimant une autre propriété du système de représentation considéré, d'après laquelle l'angle de deux éléments quelconques de la surface S est toujours égal à l'angle des deux éléments correspondants de la surface S'.

Prenons, pour définir les différents points des deux surfaces S et S', les variables U, V et U', V'; de manière que pour l'une et l'autre surface, les lignes coordonnées forment deux systèmes orthogonaux, divisant la surface en carrés. Le cosinus de l'angle compris entre les éléments mm_1, mm_2 de la première surface, qui partent du point (U, V) et se terminent respectivement aux points $(U + dU,\ V + dV)$, $(U + \delta U,\ V + \delta V)$, sera, en laissant le signe de côté,

$$\frac{dV\,\delta U - dU\,\delta V}{\sqrt{(dU^2 + dV^2)(\delta U^2 + \delta V^2)}};$$

de même, le cosinus de l'angle formé par les éléments $m'm'_1$, $m'm'_2$ correspondants de la seconde surface, sera

$$\frac{dV'\,\delta U' - dU'\,\delta V'}{\sqrt{(dU'^2 + dV'^2)(\delta U'^2 + \delta V'^2)}}:$$

nous aurons donc, pour l'équation du problème,

$$\frac{dV\,\delta U - dU\,\delta V}{\sqrt{(dU^2 + dV^2)(\delta U^2 + \delta V^2)}} = \frac{dV'\,\delta U' - dU'\,\delta V'}{\sqrt{(dU'^2 + dV'^2)(\delta U'^2 + \delta V'^2)}}.$$

ou bien, en introduisant les variables α, β, α', β',

$$\frac{d\beta\,\delta\alpha - d\alpha\,\delta\beta}{\sqrt{d\alpha\, d\beta\, \delta\alpha\, \delta\beta}} = \frac{d\beta'\,\delta\alpha' - d\alpha'\,\delta\beta'}{\sqrt{d\alpha'\, d\beta'\, \delta\alpha'\, \delta\beta'}},$$

d'où

$$d\alpha'\, d\beta'\, \delta\alpha'\, \delta\beta'\, (d\beta\,\delta\alpha - d\alpha\,\delta\beta)^2 = d\alpha\, d\beta\, \delta\alpha\, \delta\beta\, (d\beta'\,\delta\alpha' - d\alpha'\,\delta\beta')^2.$$

Posons

$$\delta\alpha' = \frac{d\alpha'}{d\alpha}\delta\alpha + \frac{d\alpha'}{d\beta}\delta\beta, \quad \delta\beta' = \frac{d\beta'}{d\alpha}\delta\alpha + \frac{d\beta'}{d\beta}\delta\beta;$$

et supposant les éléments mm_1, $m'm'_1$ fixes, faisons varier les éléments

mm_2, $m'm'_2$; c'est-à-dire, supposant $d\alpha$, $d\beta$, $d\alpha'$, $d\beta'$ constants, faisons varier $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\alpha'$, $\delta\beta'$. L'égalité ci-dessus étant une identité, il ne pourra y avoir dans le premier membre d'autres termes en $\delta\alpha$ et $\delta\beta$ que ceux qui se trouvent dans le second ; ainsi les termes en $\delta\alpha^4$ et $\delta\beta^4$ du premier membre devront disparaître, ce qui exige que

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha}\,\frac{d\beta'}{d\alpha} = 0, \qquad \frac{d\alpha'}{d\beta}\,\frac{d\beta'}{d\beta} = 0,$$

d'où

$$\frac{d\alpha'}{d\beta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\beta'}{d\alpha} = 0,$$

ou bien

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d\beta'}{d\beta} = 0;$$

et, en intégrant,

$$\alpha' = F(\alpha) \quad \text{et} \quad \beta' = F_1(\beta),$$

ou bien

$$\alpha' = \Phi(\beta) \quad \text{et} \quad \beta' = \Phi_1(\alpha),$$

comme nous l'avions déjà obtenu.

6. Avant de particulariser les fonctions F et F_1 ou Φ et Φ_1, pour déduire de ce qui précède quelques systèmes de représentation, il est nécessaire de faire deux remarques importantes.

7. Substituons à α, β, α' et β' leurs valeurs en U, V, U' et V'; les deux solutions de notre problème deviendront

$$(6)\qquad \begin{cases} U' + V'\sqrt{-1} = F\left(U + V\sqrt{-1}\right), \\ U' - V'\sqrt{-1} = F_1\left(U - V\sqrt{-1}\right), \end{cases}$$

et

$$(7)\qquad \begin{cases} U' + V'\sqrt{-1} = \Phi\left(U - V\sqrt{-1}\right), \\ U' - V'\sqrt{-1} = \Phi_1\left(U + V\sqrt{-1}\right). \end{cases}$$

Or, U' et V' devant être réels comme U et V, les deux fonctions F_1 et Φ_1 ne peuvent pas être prises arbitrairement, une fois que les fonctions F et Φ ont été fixées. Il faut évidemment, si la fonction F est réelle, que F_1 soit la même fonction ; et si F est une fonction imaginaire, que F_1 soit la fonction imaginaire conjuguée obtenue en changeant $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$ dans la première; il en est de même de la fonction Φ_1 à l'égard de Φ. Ainsi chacune de nos solutions ne contient qu'une fonction arbitraire, qui peut toutefois être imaginaire aussi bien que réelle.

8. Nous avons obtenu deux solutions pour notre problème. Ces solutions conviennent toutes les deux, mais elles se distinguent l'une de l'autre en ce que l'une correspond à une similitude directe entre les éléments superficiels des deux surfaces, et l'autre à une similitude inverse. Entrons à ce sujet dans quelques développements. Une surface représentée, en général, par l'équation $f(x, y, z) = 0$, partage l'espace en deux régions : l'une, qu'on peut appeler extérieure à la surface pour laquelle $f(x, y, z)$, est positif; l'autre, que l'on nomme région intérieure, pour laquelle $f(x, y, z)$ est négatif. Si l'on se place dans la région extérieure, on voit les éléments de la surface issus d'un même point m disposés d'une certaine manière; et si l'on se place dans la région intérieure, on voit les mêmes éléments disposés d'une manière inverse; de telle sorte que si de deux éléments mm_1, mm_2, le second paraît à droite pour un spectateur situé dans la région externe de la surface, inversement pour un spectateur situé dans la partie intérieure, l'élément mm_2 paraîtra à gauche de mm_1. Ceci posé, plaçons-nous, par rapport à chacune des surfaces S et S', dans une région déterminée; soient mm_1, mm_2 deux éléments de la surface S partant du point m, et $m'm'_1$, $m'm'_2$ les deux éléments correspondants de la surface S', déterminés au moyen des solutions trouvées plus haut; pour les deux solutions on aura

$$\frac{mm_1}{m'm'_1} = \frac{mm_2}{m'm'_2}; \qquad \text{angle } m_1mm_2 = \text{angle } m'_1m'm'_2;$$

mais, pour l'une, $m'm'_2$ nous paraîtra à gauche ou à droite de $m'm'_1$, selon que mm_2 sera lui-même à gauche ou à droite de mm_1; et, pour l'autre, ce sera l'inverse, $m'm'_2$ nous paraîtra à droite ou à gauche de $m'm'_1$, selon que mm_2 sera à gauche ou à droite de mm_1. Ainsi, dans les deux cas, les deux triangles mm_1m_2, $m'm'_1m'_2$ sont semblables, mais la similitude est directe dans le premier cas, et inverse dans le second. Quant à la solution qui correspond à la similitude directe, on comprend qu'elle dépend uniquement de la manière dont on se place par rapport aux surfaces.

Démontrons la propriété que nous venons d'énoncer, et donnons un critérium certain pour reconnaître le genre de similitude qui correspond à une solution déterminée.

9. Appelons

$$f(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x', y', z') = 0$$

les équations des surfaces S et S', et plaçons-nous, par rapport à chacune des surfaces, dans la région extérieure, c'est-à-dire dans la région pour laquelle le premier membre de son équation est positif. Enfin, supposons que l'on adopte la première solution obtenue au n° 5, c'est-à-dire qu'on lie les points de la première surface à ceux de la seconde par la relation

$$U' + V'\sqrt{-1} = F(U + V\sqrt{-1})$$

et par la relation conjuguée

$$U' - V'\sqrt{-1} = F_1(U - V\sqrt{-1}).$$

Pour pouvoir comparer plus facilement les figures formées par les points m ou (x, y, z) de la première surface aux figures formées par les points correspondants m' ou (x', y', z') de la seconde, nous considérerons six autres systèmes de points intermédiaires, tous situés dans le plan des xy : le système des points μ ayant pour coordonnées rectangulaires $(x, y, 0)$; le système des points ν ayant pour coordonnées rectangulaires $(u, v, 0)$; le système des points π ayant pour coordonnées $(U, V, 0)$; le système des points π' ayant pour coordonnées $(U', V', 0)$; le système des points ν' ayant pour coordonnées $(u', v', 0)$; enfin le système des points μ' ayant pour coordonnées $(x', y', 0)$. Ces nouveaux systèmes de points considérés entre eux, ou avec les systèmes de points m et m', ne donneront pas nécessairement des systèmes semblables dans leurs éléments infiniment petits, mais deux de ces systèmes pourront être semblablement ou inversement placés; je veux dire par là que, dans deux systèmes, les éléments linéaires issus d'un même point pourront paraître placés de la même manière ou d'une manière inverse. A ce point de vue, nous pourrons donc comparer le système des points m au système des points μ, le système des points μ au système des points ν, ainsi de suite; et cela nous permettra de décider si la similitude qui existe entre les éléments superficiels formés par les deux systèmes de points m et m' est directe ou inverse. Ajoutons, pour qu'il n'y ait aucune ambiguïté, que les systèmes de points situés dans le plan des xy sont toujours vus du côté où se trouvent les z positifs. En comparant les deux systèmes de points m et μ, on reconnaît aisément qu'ils paraissent semblablement ou inversement placés, selon que, pour passer de la surface S à sa région extérieure par un déplacement parallèle à l'axe des z, il faut augmenter ou diminuer le z du point de la surface, ou bien si $edx + fdy + gdz$ est la différentielle totale du premier membre $f(x, y, z)$ de l'équation de S, selon que g est positif ou négatif; de même les systèmes des points m' et μ' paraissent semblablement ou inversement placés, selon que

$$g' = \frac{d\varphi(x', y', z')}{dz}$$

est positif ou négatif. Considérons maintenant les deux systèmes de points μ et ν. Soient ds la distance des deux points infiniment voisins (x, y), $(x + dx, y + dy)$ du premier système, et a l'angle positif que cette distance prolongée du premier vers le second point fait avec la partie positive des x, de manière que

$$dx = ds \cos a, \quad dy = ds \sin a.$$

Soient de même $d\sigma$ la distance des deux points correspondants (u, v), $(u + du, v + dv)$ du second système, et α l'angle positif que cette distance prolongée du premier vers le second point fait avec la partie positive des x, de manière que

$$du = d\sigma \cos \alpha, \quad dv = d\sigma \sin \alpha;$$

nous tirerons de là, en remarquant que x et y sont des fonctions connues de u et v,

$$ds \cos a = \left(\frac{dx}{du} \cos \alpha + \frac{dx}{dv} \sin \alpha\right) d\sigma,$$

$$ds \sin a = \left(\frac{dy}{du} \cos \alpha + \frac{dy}{dv} \sin \alpha\right) d\sigma;$$

d'ou

$$\tang a = \frac{\frac{dy}{du}\cos\alpha + \frac{dy}{dv}\sin\alpha}{\frac{dx}{du}\cos\alpha + \frac{dx}{dv}\sin\alpha};$$

regardant x et y comme constantes, et a et α comme variables, la différentiation donne

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\alpha} &= \frac{\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}}{\left(\frac{dx}{du}\cos\alpha + \frac{dx}{dv}\sin\alpha\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\cos\alpha + \frac{dy}{dv}\sin\alpha\right)^2} \\ &= \left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)\frac{d\sigma^2}{ds^2}.\end{aligned}$$

Cela nous montre que les angles a et α varient dans le même sens ou en sens inverse, selon que $\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dy}{du}\frac{dx}{dv}$ est positif ou négatif; par conséquent, que les systèmes des points μ et ν paraissent semblablement ou inversement placés, selon que $\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}$ est positif ou négatif. On verrait, par un raisonnement analogue, que les systèmes des points ν et π paraissent semblablement ou inversement placés, selon que $\frac{dU}{du}\frac{dV}{dv} - \frac{dU}{dv}\frac{dV}{du}$ est positif ou négatif; que les systèmes des points π et π' paraissent semblablement ou inversement placés, selon que $\frac{dU'}{dU}\frac{dV'}{dV} - \frac{dU'}{dV}\frac{dV'}{dU}$ est positif ou négatif; que les systèmes des points π' et ν' paraissent semblablement ou inversement placés, selon que $\frac{dU'}{du'}\frac{dV'}{dv'} - \frac{dU'}{dv'}\frac{dV'}{du'}$ est positif ou négatif; enfin, que les systèmes des points μ' et ν' paraissent semblablement ou inversement placés, selon que $\frac{dx'}{du'}\frac{dy'}{dv'} - \frac{dx'}{dv'}\frac{dy'}{du'}$ est positif ou négatif. Réunissant tous ces résultats entre eux et à ceux qui ont été obtenus relativement aux systèmes de points m et μ, m' et μ', on voit qu'en définitive les deux systèmes de points m et m' sont semblablement ou inversement placés, selon que le produit

$$\frac{df}{dz}\frac{d\varphi}{dz'}\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dx'}{du'}\frac{dy'}{dv'}-\frac{dx'}{dv'}\frac{dy'}{du'}\right)\left(\frac{dU}{du}\frac{dV}{dv}-\frac{dU}{dv}\frac{dV}{du}\right)\left(\frac{dU'}{du'}\frac{dV'}{dv'}-\frac{dU'}{dv'}\frac{dV'}{du'}\right)\left(\frac{dU'}{dU}\frac{dV'}{dV}-\frac{dU'}{dV}\frac{dV'}{dU}\right)$$

est positif ou négatif. On peut remarquer que, dans ce produit, les six premiers facteurs ne dépendent que des surfaces considérées et nullement de la liaison que l'on suppose exister entre les deux systèmes de points m et m' situés sur ces surfaces. Il suffira donc d'avoir égard au septième facteur $\frac{dU'}{dU}\frac{dV'}{dV}-\frac{dU'}{dV}\frac{dV'}{dU}$ pour connaître l'influence de cette liaison. Or, si l'on a

$$U' + V'\sqrt{-1} = F(U + V\sqrt{-1}),$$

on trouve aisément

$$\frac{dU'}{dU}\frac{dV'}{dV}-\frac{dU'}{dV}\frac{dV'}{dU} = \left(\frac{dU'}{dU}\right)^2 + \left(\frac{dU'}{dV}\right)^2,$$

et, par conséquent, un résultat positif. Si

$$U' + V'\sqrt{-1} = \Phi(U - V\sqrt{-1}),$$

on trouve

$$\frac{dU'}{dU}\frac{dV'}{dV}-\frac{dU'}{dV}\frac{dV'}{dU} = -\left(\frac{dU'}{dU}\right)^2 - \left(\frac{dU'}{dV}\right)^2,$$

et, par conséquent, un résultat négatif. Cela montre, comme nous l'avions annoncé, que des deux solutions obtenues au n° 5, l'une donne une similitude directe, l'autre une similitude inverse. On voit, en même temps, que la première solution, quand on se place dans la région extérieure pour l'une et l'autre surface, correspond à la similitude directe ou à la similitude inverse, selon que le produit

$$\frac{df}{dz}\frac{d\varphi}{dz'}\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dx'}{du'}\frac{dy'}{dv'}-\frac{dx'}{dv'}\frac{dy'}{du'}\right)\left(\frac{dU}{du}\frac{dV}{dv}-\frac{dU}{dv}\frac{dV}{du}\right)\left(\frac{dU'}{du'}\frac{dV'}{dv'}-\frac{dU'}{dv'}\frac{dV'}{du'}\right)$$

est positif ou négatif.

10. Reprenons les solutions générales du problème de Lambert obtenues au n° 5, et comme la seconde solution se déduit de la première, en changeant $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$ dans les seconds membres, bornons-nous à considérer la première :

$$(5)\qquad \begin{cases} U' + V'\sqrt{-1} = F\left(U + V\sqrt{-1}\right), \\ U' - V'\sqrt{-1} = F_1\left(U - V\sqrt{-1}\right), \end{cases}$$

où, d'après la remarque faite au n° **7**, F_1 représente la fonction conjuguée de F.

Proposons-nous de trouver le rapport d'agrandissement n en fonction de u et de v.

Différentiant les équations (5), on trouve aisément

$$dU'^2 + dV'^2 = F'\left(U + V\sqrt{-1}\right) F'_1\left(U - V\sqrt{-1}\right)\left(dU^2 + dV^2\right),$$

en appelant F' la dérivée de F et F'_1 celle de F_1. Or les carrés des éléments des surfaces S et S' sont respectivement

$$M\left(dU^2 + dV^2\right), \quad M'\left(dU'^2 + dV'^2\right),$$

M et M' étant des fonctions connues, la première de U et V, la seconde de U' et V'; donc le rapport des carrés de ces éléments ou n^2 sera

$$\frac{M'}{M} F'\left(U + V\sqrt{-1}\right) F'_1\left(U - V\sqrt{-1}\right);$$

par conséquent,

$$n = \sqrt{\frac{M'}{M} F'\left(U + V\sqrt{-1}\right) F'_1\left(U - V\sqrt{-1}\right)}.$$

Substituant dans M', à la place de U' et V', leurs valeurs déduites des équations (5), et puis exprimant U et V en u et v, la question se trouvera résolue.

11. Cherchons encore, avant de sortir des généralités, la relation qui existe entre les courbures géodésiques de deux courbes correspondantes tracées sur les surfaces S et S', relation qui nous sera utile dans la suite. Soient A une courbe quelconque tracée sur la surface S, et A' la courbe correspondante tracée sur la surface S'. Appelons ds l'élément de la première courbe, ds' l'élément correspondant de la seconde, de manière que

$$ds' = n\,ds.$$

Prenons les différentielles des deux membres, relatives à un déplacement normal aux courbes A et A′, et indiquons ces différentielles par la caractéristique δ; nous aurons

$$\delta ds' = n\delta ds + ds\delta n.$$

Mais, $\delta\sigma$ étant le déplacement infiniment petit, normal à la courbe A, qui a eu lieu sur la première surface, et $\delta\sigma'$ le déplacement correspondant, normal à la courbe A′, qui a eu lieu sur la seconde surface, on a

$$\delta\sigma' = n\delta\sigma;$$

on tire de là

$$\frac{\delta ds'}{ds'\,\delta\sigma'} = \frac{1}{n}\,\frac{\delta ds}{ds\,\delta\sigma} + \frac{1}{n^2}\,\frac{\delta n}{\delta\sigma}.$$

D'ailleurs, d'après une formule de notre Mémoire sur la théorie générale des surfaces, $\frac{\delta ds}{ds\,\delta\sigma}$, $\frac{\delta ds'}{ds'\,\delta\sigma'}$ sont, au signe près, les courbures géodésiques des courbes A et A′; en appelant $\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s$, $\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_{s'}$ ces courbures géodésiques, on a donc

$$(6)\qquad \left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_{s'} = \frac{1}{n}\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s - \frac{1}{n^2}\,\frac{\delta n}{\delta\sigma} = \frac{1}{n}\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s + \frac{\delta\frac{1}{n}}{\delta\sigma}.$$

Remarquons, toutefois, que cette égalité n'a lieu avec les signes que nous avons affectés aux différents termes des deux membres, que sous certaines conditions. Ainsi il faut, 1° que la relation qui existe entre les points des surfaces S et S′ corresponde à une similitude directe entre les éléments superficiels, pour le cas où l'on se place dans la région extérieure de chaque surface; 2° que les déplacements infiniment petits normaux à la courbe A et indiqués par la caractéristique δ se trouvent du côté qui sert à fixer la courbure géodésique de cette courbe.

12. Arrivons maintenant aux applications.

D'après la méthode exposée au n° **3**, on voit que le problème de Lambert, considéré dans toute sa généralité, n'offre d'autres difficultés que celles de mettre les carrés des éléments de la surface de la terre et de celle de la carte, sous la forme

$$ds^2 = \mathrm{M}(d\mathrm{U}^2 + d\mathrm{V}^2), \quad ds'^2 = \mathrm{M}'(d\mathrm{U}'^2 + d\mathrm{V}'^2),$$

ou, ce qui revient au même, de trouver pour ces deux surfaces deux systèmes de lignes orthogonales les divisant en carrés infiniment petits. Or on connaît de semblables lignes dans les surfaces développables, les surfaces de révolution, les surfaces du second ordre, les surfaces peu différentes d'une sphère; donc, en n'attribuant à la surface de la terre et à celle de la carte que l'une de ces formes, on saura résoudre le problème de Lambert. Il serait inutile de faire des applications pour les différents cas que l'on vient d'indiquer, ces applications ne peuvent offrir d'intérêt que comme exercices de calcul; nous supposerons donc immédiatement, comme on le fait toujours en géographie, que la terre soit une surface de révolution et que la surface de la carte soit un plan. Les équations représentées au n° **8** par

$$f(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x', y', z') = 0$$

deviendront ainsi

$$z - f(\sqrt{x^2 + y^2}) = 0, \quad z' = 0,$$

en plaçant convenablement les surfaces par rapport aux axes des coordonnées x, y, z et x', y', z', ce qui peut toujours être fait. La première équation peut être remplacée par les trois suivantes :

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = f(u),$$

u étant positif et v compris entre $-\pi$ et π, et les lignes coordonnées

$$u = \text{const.}, \quad v = \text{const.}$$

sont alors évidemment les parallèles et les méridiens de la terre. De même, l'équation de la carte peut être remplacée par les trois équations

$$x' = u', \quad y' = v', \quad z' = 0;$$

de là on déduit

$$ds = \sqrt{du^2 [1 + f'(u)^2] + u^2 dv^2}, \quad ds' = \sqrt{du'^2 + dv'^2}.$$

Intégrant, conformément à la méthode générale, les équations

$$ds = 0, \quad ds' = 0,$$

on trouve

$$U + V\sqrt{-1} = \int \frac{1}{u}\sqrt{1 + f'(u)^2}\,du + v\sqrt{-1},$$

$$U' + V'\sqrt{-1} = u' + v'\sqrt{-1} = x' + y'\sqrt{-1}.$$

Ainsi

$$U = \int \frac{1}{u}\sqrt{1 + f'(u)^2}\,du, \quad V = v,$$

$$U' = u' = x', \quad V' = v' = y';$$

et les formules obtenues au n° 5 donnent

$$x' + y'\sqrt{-1} = F\,(U + V\sqrt{-1}) = F\left(\int \frac{1}{u}\sqrt{1+f'(u)^2}\,du + v\sqrt{-1}\right),$$

$$x' - y'\sqrt{-1} = F_1(U - V\sqrt{-1}) = F_1\left(\int \frac{1}{u}\sqrt{1+f'(u)^2}\,du - v\sqrt{-1}\right),$$

et

$$x' + y'\sqrt{-1} = \Phi\,(U - V\sqrt{-1}) = \Phi\left(\int \frac{1}{u}\sqrt{1+f'(u)^2}\,du - v\sqrt{-1}\right),$$

$$x' - y'\sqrt{-1} = \Phi_1(U + V\sqrt{-1}) = \Phi_1\left(\int \frac{1}{u}\sqrt{1+f'(u)^2}\,du + v\sqrt{-1}\right).$$

13. Cherchons quelle est celle des deux solutions qui correspond à la similitude directe, quand on se place dans la région extérieure à chaque surface. Pour cela, formons l'expression

$$\frac{df}{dz}\frac{d\varphi}{dz'}\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dx'}{du'}\frac{dy'}{dv'} - \frac{dx'}{dv'}\frac{dy'}{du'}\right)\left(\frac{dU}{du}\frac{dV}{dv} - \frac{dU}{dv}\frac{dV}{du}\right)\left(\frac{dU'}{du'}\frac{dV'}{dv'} - \frac{dU'}{dv'}\frac{dV'}{du'}\right)$$

du n° **9**, nous trouvons aisément

$$\sqrt{1 + f'(u)^2},$$

c'est-à-dire un résultat positif; donc, d'après ce qui a été dit au n° **9**, la similitude directe correspond à la première solution. Nous ne considérerons, en conséquence, que cette solution.

14. Dans le cas actuel, on a

$$M = u^2, \quad M' = 1;$$

donc le rapport n d'agrandissement est

$$n = \frac{\sqrt{F'(U + V\sqrt{-1})F'_1(U - V\sqrt{-1})}}{u}$$

$$= \frac{\sqrt{F'\left(\int \frac{1}{u}\sqrt{1+f'(u)^2}\,du + v\sqrt{-1}\right) F'_1\left(\int \frac{1}{u}\sqrt{1+f'(u)^2}\,du - v\sqrt{-1}\right)}}{u};$$

nous le mettrons sous la forme

$$n = \frac{1}{u\Omega},$$

en posant, pour simplifier,

$$\frac{1}{\sqrt{F'(U + V\sqrt{-1})F'_1(U - V\sqrt{-1})}} = \Omega.$$

15. Enfin, la relation générale qui lie les courbures géodésiques de deux courbes conjuguées devient

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{n}\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s + \frac{\delta\frac{1}{n}}{\delta\sigma}, \tag{7}$$

ρ' étant le rayon de courbure de la courbe tracée sur la carte, précédé d'un signe qui se détermine d'ailleurs par la règle relative aux courbures géodésiques.

16. La relation précédente peut se mettre sous une forme plus simple quand la courbe A, tracée sur le globe terrestre, est un méridien ou un parallèle. En effet, supposons d'abord que la courbe A soit un méridien, c'est-à-dire une courbe pour laquelle v soit constant; on aura

$$\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s = 0,$$

par conséquent

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\delta\frac{1}{n}}{\delta\sigma}.$$

Mais

$$\frac{1}{n} = u\Omega;$$

donc

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\delta u\Omega}{\delta\sigma} = \frac{u\,\delta\Omega}{\delta\sigma};$$

et en remarquant que $\delta\sigma = u dv = u d\mathrm{V}$,

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{d\Omega}{d\mathrm{V}}.$$

Supposons, en second lieu, que la courbe A soit un parallèle, c'est-à-dire une courbe pour laquelle u soit constant; on aura

$$\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s = \frac{1}{u\sqrt{1+f'(u)^2}},$$

$$\frac{\delta\frac{1}{n}}{\delta\sigma} = \frac{\delta u\Omega}{\delta\sigma} = \Omega\frac{\delta u}{\delta\sigma} + u\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma} = -\frac{\Omega}{\sqrt{1+f'(u)^2}} - \frac{d\Omega}{d\mathrm{U}},$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{\rho'_1} = -\frac{d\Omega}{d\mathrm{U}}.$$

Ces deux résultats, qui sont de Lagrange, peuvent s'établir directement comme il suit.

17. Prenons l'expression

$$\frac{dy'\,d^2x' - dx'\,d^2y'}{(dx'^2 + dy'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

de la courbure dans une courbe plane quelconque, rapportée aux coordonnées rectangulaires x' et y'; pour en déduire la courbure de la courbe transformée d'un méridien et celle de la transformée d'un parallèle, il faudra successivement considérer x' et y' comme fonctions de U seulement, ou de V seulement dans la relation générale

$$x' + y'\sqrt{-1} = \mathrm{F}(\mathrm{U} + \mathrm{V}\sqrt{-1}).$$

Or, on déduit de cette relation

$$dx' = \alpha d\mathrm{U} - \beta d\mathrm{V}, \quad dy' = \beta d\mathrm{U} + \alpha d\mathrm{V}.$$

en appelant, pour simplifier, α la partie réelle et β le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans la dérivée, par rapport à U, de $\mathrm{F}(\mathrm{U} + \mathrm{V}\sqrt{-1})$. Pour les méridiens où V est constant, on aura donc

$$dx' = \alpha d\mathrm{U}, \quad dy' = \beta d\mathrm{U},$$

par suite

$$d^2x' = \frac{d\alpha}{dU}dU^2, \qquad d^2y' = \frac{d\beta}{dU}dU^2,$$

ce qui donne, en substituant dans l'expression générale de la courbure,

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\beta\frac{d\alpha}{dU} - \alpha\frac{d\beta}{dU}}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour les parallèles, U est constant; on a donc

$$dx' = -\beta dV, \qquad dy' = \alpha dV,$$

$$d^2x' = -\frac{d\beta}{dV}dV^2, \qquad d^2y' = \frac{d\alpha}{dV}dV^2,$$

et, par suite, la courbure est

$$\frac{1}{\rho'_1} = \frac{\beta\frac{d\alpha}{dV} - \alpha\frac{d\beta}{dV}}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Je remarque maintenant que l'on a

$$\frac{d\alpha}{dV} = -\frac{d\beta}{dU}, \qquad \frac{d\beta}{dV} = \frac{d\alpha}{dU}:$$

donc les expressions précédentes de $\frac{1}{\rho'}$ et de $\frac{1}{\rho'_1}$ peuvent se changer en celles-ci :

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\beta\frac{d\beta}{dV} + \alpha\frac{d\alpha}{dV}}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \frac{1}{\rho'_1} = -\frac{\beta\frac{d\beta}{dU} + \alpha\frac{d\alpha}{dU}}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ou bien

$$\frac{1}{\rho'} = -\frac{d\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}{dV}, \qquad \frac{1}{\rho'_1} = \frac{d\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}{dU}.$$

Ces résultats coïncident, sauf un signe, qu'il serait, du reste, bien facile d'expliquer, avec ceux qui ont été obtenus plus haut. En effet, d'après la définition de α et de β, et la forme des fonctions F et F_1, il est clair que

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{F'(U+V\sqrt{-1})\,F'_1(U-V\sqrt{-1})}=\frac{1}{\Omega}.$$

18. Reprenons les relations

$$x'+y'\sqrt{-1}=F(U+V\sqrt{-1}),\qquad x'-y'\sqrt{-1}=F_1(U-V\sqrt{-1}),$$

qui lient les différents points de la carte aux points correspondants du globe terrestre, et cherchons à déterminer les fonctions arbitraires F et F_1. Or je remarque que, si l'on fait $V=0$, on a pour les coordonnées des points de la courbe qui représente le méridien initial,

$$x'+y'\sqrt{-1}=F(U),\qquad x'-y'\sqrt{-1}=F_1(U);$$

ces deux égalités contenant deux fonctions arbitraires, savoir, la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ de F, on voit que le premier méridien peut être représenté par une courbe quelconque, et que la latitude peut varier sur ce méridien suivant une loi aussi quelconque. En effet, supposons que, pour ce méridien,

$$x'=\varphi(U),\qquad y'=\psi(U),$$

on aura

$$F(U)=\varphi(U)+\sqrt{-1}\,\psi(U),\qquad F_1(U)=\varphi(U)-\sqrt{-1}\,\psi(U),$$

et, par suite, les relations générales qui déterminent tous les points de la carte deviendront

$$x'+y'\sqrt{-1}=\varphi(U+V\sqrt{-1})+\sqrt{-1}\,\psi(U+V\sqrt{-1}),$$
$$x'-y'\sqrt{-1}=\varphi(U-V\sqrt{-1})-\sqrt{-1}\,\psi(U-V\sqrt{-1}).$$

19. Mais cette manière de déterminer les fonctions arbitraires, quoique la plus simple et la plus naturelle, n'est pas néanmoins celle qui convient le mieux à notre objet. En effet, il vaut mieux profiter de l'indétermination des deux fonctions qui entrent dans F et F_1, de manière à faire acquérir à la carte quelque nouvelle propriété qui rende sa construction facile ou son emploi commode.

20. Voyons d'abord s'il est possible d'obtenir un mode de représentation pour lequel une portion finie quelconque de la terre soit toujours semblable à la partie correspondante de la carte. Il faut, pour cela, évidemment que le rapport d'agrandissement

$$n = \frac{\sqrt{F'(U+V\sqrt{-1})\,F'_1(U-V\sqrt{-1})}}{u}$$

soit constant, ce qui entraîne, comme condition nécessaire, mais non suffisante, que la fonction

$$\sqrt{F'(U+V\sqrt{-1})\,F'_1(U-V\sqrt{-1})}$$

ne dépende que de U. Or posons

$$F'(U+V\sqrt{-1}) = \rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi), \tag{8}$$

ρ et φ étant des fonctions réelles de U et de V. Comme F_1 est la fonction conjuguée de F, on aura

$$F'_1(U-V\sqrt{-1}) = \rho(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi);$$

donc

$$\sqrt{F'(U+V\sqrt{-1})\,F'_1(U-V\sqrt{-1})} = \rho.$$

Différentions maintenant, d'abord par rapport à U, puis par rapport à V, les deux membres de l'égalité (8); il viendra

$$\begin{aligned} F''(U+V\sqrt{-1}) &= \frac{d\rho}{dU}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) \\ &\quad + \rho(-\sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi)\frac{d\varphi}{dU}, \end{aligned}$$

$$\sqrt{-1}\,F''(U+V\sqrt{-1}) = \rho(-\sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi)\frac{d\varphi}{dV},$$

en appelant F″ la dérivée seconde de la fonction F; donc,

$$\frac{d\rho}{dU}\cos\varphi - \rho\sin\varphi\frac{d\varphi}{dU} = \rho\cos\varphi\frac{d\varphi}{dV},$$

$$\frac{d\rho}{dU}\sin\varphi + \rho\cos\varphi\frac{d\varphi}{dU} = \rho\sin\varphi\frac{d\varphi}{dV};$$

d'où

$$\frac{d\varphi}{dV} = \frac{\frac{d\rho}{dU}}{\rho}, \quad \frac{d\varphi}{dU} = 0.$$

Ces égalités montrent que $\frac{\frac{d\rho}{dU}}{\rho}$ doit être une constante, et par conséquent que ρ est de la forme ae^{mU}, a et m étant des constantes. Jusqu'ici nous avons exprimé seulement que ρ était fonction de U, c'est-à-dire que le rapport d'agrandissement avait la même valeur pour tous les points d'un même parallèle; pour que ce rapport soit constant, il faut de plus que ρ soit le produit de u par une constante. Or, de l'égalité

$$e^{mU} = au$$

qui exprime cette propriété, on tire

$$dU = \frac{a}{m}\frac{du}{u}:$$

mais

$$dU = \frac{1}{u}\sqrt{1 + f'(u)^2}du;$$

donc

$$\sqrt{1 + f'(u)^2} = \frac{a}{m}.$$

Ainsi $f'(u)$ est constant, et le méridien de la surface de révolution qui représente la surface de la terre et dont l'équation, par rapport à l'axe des z et à un axe des u perpendiculaire au premier, est $z = f(u)$, devient une ligne droite. Ce n'est donc que dans le cas où l'on supposerait la terre cylindrique ou conique, que le rapport d'agrandissement pourrait être constant.

21. Proposons-nous, en second lieu, de déterminer les fonctions arbitraires par la condition qu'une série de points de la surface du globe occupent une position déterminée sur la surface de la carte. On peut ici supposer la fonction F réelle, et alors F_1 étant égal à F, on n'a plus qu'une seule fonction à considérer. Cette fonction doit avoir des valeurs connues pour une série de valeurs de u et de v ou de la variable $U + V\sqrt{-1}$ dont elle dépend; donc, au moyen des formules d'interpolation, on pourra toujours la déterminer.

22. On pourrait aussi assujettir le rapport d'agrandissement n à avoir une même valeur déterminée pour une série de points du globe terrestre; au moyen des formules d'interpolation, on trouverait encore aisément les fonctions arbitraires : mais toutes ces déterminations, qui ont d'ailleurs leur importance en géographie, n'offrent aucune difficulté.

23. Passons à une question beaucoup plus difficile et proposons-nous, avec Lagrange, de déterminer les fonctions arbitraires, de telle sorte qu'il en résulte pour les méridiens et pour les parallèles des courbes d'une nature donnée. Le problème posé ainsi, dans toute sa généralité, offre des difficultés peut-être insurmontables, nous nous bornerons à considérer le cas où les courbes données sont des cercles. Du reste, on peut remarquer que ce cas, qui comprend les projections stéréographiques et les cartes marines, est suffisant pour les besoins de la géographie; car il est naturel que dans la construction des cartes on préfère toujours le cercle à toute autre courbe, à cause de la facilité et de l'exactitude avec laquelle on peut le tracer.

24. Nous avons vu au n° **16** que le rayon de courbure de la courbe des méridiens était donné par la formule

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{d\Omega}{dV}\Omega.$$

Si l'on veut que la courbe des méridiens soit un cercle, il faudra que cette courbure ne varie que d'un méridien à un autre et soit par conséquent fonction de V seul; donc $\frac{d^2\Omega}{dV\,dU}$ sera nul. Il résulte d'abord de là cette conséquence importante, que par cela même que les méridiens sont représentés par des cercles, les parallèles le sont aussi. En effet, la condition $\frac{d^2\Omega}{dU\,dV} = 0$ montre que la courbure $\frac{d\Omega}{dU}$ des parallèles est fonction de U seul, par conséquent constante pour tous les points d'un même parallèle. On prouverait de la même manière que si les lignes des parallèles sont des cercles, les lignes des méridiens le sont aussi; et la condition commune à la circularité des uns et des autres est $\frac{d^2\Omega}{dU\,dV} = 0$. Voyons donc quelle doit être la forme des fonctions arbitraires pour que cette condition soit remplie.

25. Posons, pour simplifier,

$$\frac{1}{\sqrt{F'(z)}} = \varphi(z), \quad \frac{1}{\sqrt{F'_1(z)}} = \psi(z),$$

ce qui donne

$$\Omega = \varphi(U + V\sqrt{-1})\,\psi(U - V\sqrt{-1}).$$

La condition

$$\frac{d^2\Omega}{dU\,dV} = 0$$

deviendra

$$\varphi''(U + V\sqrt{-1})\,\psi(U - V\sqrt{-1}) - \psi''(U - V\sqrt{-1})\,\varphi(U + V\sqrt{-1}) = 0,$$

en appelant φ'' et ψ'' les dérivées secondes des fonctions φ et ψ.

L'égalité précédente peut se mettre sous la forme

$$\frac{\varphi''(U + V\sqrt{-1})}{\varphi(U + V\sqrt{-1})} = \frac{\psi''(U - V\sqrt{-1})}{\psi(U - V\sqrt{-1})}.$$

Or le second membre, d'après la nature des fonctions φ et ψ, se déduisant du premier par l'échange de $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$, cette égalité ne peut exister que si les deux membres se réduisent à une même constante réelle k; on a donc

$$\frac{\varphi''(U + V\sqrt{-1})}{\varphi(U + V\sqrt{-1})} = k,$$

d'où

$$\varphi(U + V\sqrt{-1}) = A e^{\sqrt{k}(U + V\sqrt{-1})} + B e^{-\sqrt{k}(U + V\sqrt{-1})},$$

A et B étant des constantes quelconques, réelles ou imaginaires; et, par conséquent,

$$F(U + V\sqrt{-1}) = P + \frac{e^{-\sqrt{k}(U + V\sqrt{-1})}}{M e^{\sqrt{k}(U + V\sqrt{-1})} + N e^{-\sqrt{k}(U + V\sqrt{-1})}},$$

M, N, P étant des nouvelles constantes de même nature que A et B.

Quant à la constante $\sqrt{k}$, comme son carré peut être aussi bien négatif que positif, elle peut de même être réelle ou imaginaire; mais on peut remarquer que la valeur que reçoit le second membre de l'égalité précédente pour une valeur de k négative et égale à $-c^2$, se déduit de la valeur que l'on obtient pour $k = c^2$, en changeant seulement U en V et V en $-$ U. Cela étant, nous nous contenterons d'attribuer une valeur positive c^2, il viendra ainsi

$$\mathrm{F}\left(\mathrm{U} + \mathrm{V}\sqrt{-1}\right),$$

ou bien

$$(9)\qquad x' + y'\sqrt{-1} = \mathrm{P} + \frac{e^{-c\left(\mathrm{U}+\mathrm{V}\sqrt{-1}\right)}}{\mathrm{M}e^{c\left(\mathrm{U}+\mathrm{V}\sqrt{-1}\right)} + \mathrm{N}e^{-c\left(\mathrm{U}+\mathrm{V}\sqrt{-1}\right)}}.$$

Ce résultat peut être considérablement simplifié.

26. Je remarque d'abord que l'on peut toujours supposer nulle la constante P, car cela revient à ajouter une simple constante à x' et y', c'est-à-dire à transporter les axes des x' et des y' parallèlement à eux-mêmes. De plus, les constantes M et N que nous avons dit être réelles ou imaginaires peuvent être supposées réelles et même positives. En effet, on peut, dans tous les cas, poser $\mathrm{M} = me^{\alpha\sqrt{-1}}$, $\mathrm{N} = ne^{\beta\sqrt{-1}}$, m et n étant positifs, et notre formule devient

$$x' + y'\sqrt{-1} = \frac{e^{-c\left(\mathrm{U}+\mathrm{V}\sqrt{-1}\right)}}{me^{c\left[\mathrm{U}+\left(\mathrm{V}+\frac{\alpha}{c}\right)\sqrt{-1}\right]} + ne^{-c\left[\mathrm{U}+\left(\mathrm{V}-\frac{\beta}{c}\right)\sqrt{-1}\right]}}.$$

Multiplions le premier membre par $\cos\beta + \sqrt{-1}\sin\beta$, et le second par $e^{\beta\sqrt{-1}}$, puis posons

$$x'\cos\beta - y'\sin\beta = x'_1,\quad x'\sin\beta + y'\cos\beta = y'_1;$$

nous aurons

$$x'_1 + y'_1\sqrt{-1} = \frac{e^{-c\left[\mathrm{U}+\left(\mathrm{V}-\frac{\beta}{c}\right)\sqrt{-1}\right]}}{me^{c\left[\mathrm{U}+\left(\mathrm{V}+\frac{\alpha}{c}\right)\sqrt{-1}\right]} + ne^{-c\left[\mathrm{U}+\left(\mathrm{V}-\frac{\beta}{c}\right)\sqrt{-1}\right]}}.$$

Or, x'_1 et y'_1 sont évidemment les coordonnées correspondantes à x'

et y' dans un système d'axes rectangulaires (OX'_1, OY'_1) que l'on obtient en faisant tourner de l'angle β le système des axes (OX', OY'); le second membre de la dernière équation ne diffère du second membre de l'équation (9), après qu'on y a fait $P = 0$, $M = m$, $N = n$, qu'en ce que $V + \frac{\alpha - \beta}{c}$ est mis à la place de V, comme on le voit aisément, en réduisant ces seconds membres au même numérateur 1. Donc, si l'on prend d'avance les axes des (X'_1, Y'_1) pour axes des (X', Y') et si l'on recule le méridien initial à partir duquel se comptent les longitudes V, de l'angle $\frac{\alpha - \beta}{c}$, la dernière équation se confondra avec l'équation (9). On peut donc toujours supposer réelles et positives les constantes M et N.

27. Pour déduire de l'équation (9) simplifiée, comme il vient d'être dit, les valeurs de x' et y' en U et V, multiplions, dans le second membre, haut et bas par $Me^{c(U - V\sqrt{-1})} + Ne^{-c(U - V\sqrt{-1})}$, il viendra

$$x' + y'\sqrt{-1} = \frac{Me^{-2cV\sqrt{-1}} + Ne^{-2cU}}{M^2 e^{2cU} + 2MN\cos 2cV + N^2 e^{-2cU}},$$

et en égalant séparément les parties réelles et les parties imaginaires,

$$x' = \frac{M\cos 2cV + Ne^{-2cU}}{M^2 e^{2cU} + 2MN\cos 2cV + N^2 e^{-2cU}},$$

$$y' = \frac{-M\sin 2cV}{M^2 e^{2cU} + 2MN\cos 2cV + N^2 e^{-2cU}}.$$

28. Si entre ces équations, on élimine U, on obtiendra une relation entre x, y, V, qui représentera tous les cercles répondant aux différents méridiens, et, réciproquement, si l'on élimine V, on aura une équation en x, y, U, qui sera l'équation commune à tous les cercles répondant aux différents parallèles. Pour faciliter les éliminations, il convient de faire d'abord la somme des carrés des deux équations; on trouve

$$x'^2 + y'^2 = \frac{e^{-2cU}}{M^2 e^{2cU} + 2MN\cos 2cV + N^2 e^{-2cU}},$$

et cela permet de mettre les équations sous la forme plus simple

$$\frac{x'}{x'^2 + y'^2} = \mathrm{N} + \mathrm{M}e^{2c\mathrm{U}} \cos 2c\mathrm{V},$$

$$\frac{y'}{x'^2 + y'^2} = -\mathrm{M}e^{2c\mathrm{U}} \sin 2c\mathrm{V}.$$

29. Éliminant, maintenant, la variable U, on a

$$x'^2 + y'^2 - \frac{y'}{\mathrm{N}} \operatorname{cotang} 2c\mathrm{V} - \frac{x'}{\mathrm{N}} = 0. \tag{10}$$

La circonférence représentée par cette équation passe par l'origine O des coordonnées et par le point A de OX, qui a $\frac{1}{\mathrm{N}}$ pour abscisse; de plus, elle coupe l'axe des x, au point O, sous un angle égal à $\pi - 2c\mathrm{V}$ ou à $-2c\mathrm{V}$ suivant que $\mathrm{V} = v$ est positif ou négatif; ajoutons que, dans le premier cas, on ne doit prendre que le segment situé du côté des y négatifs, et, dans le second, que le segment situé du côté des y positifs.

30. Éliminons, en second lieu, la variable V; on trouve

$$x'^2 + y'^2 + \frac{2\mathrm{N}x'}{\mathrm{M}^2 e^{4c\mathrm{U}} - \mathrm{N}^2} - \frac{1}{\mathrm{M}^2 e^{4c\mathrm{U}} - \mathrm{N}^2} = 0. \tag{11}$$

La circonférence représentée par cette équation a l'axe des x pour diamètre. Pour achever de la définir, je vais chercher un système de deux points situés sur l'axe des x, et tels que leurs distances à un point quelconque de la circonférence soient dans un rapport constant. A cet effet, je prends l'équation

$$(x' - a)^2 + y'^2 = k^2 [(x' - a')^2 + y'^2],$$

qui représente le lieu des points dont les distances à deux points situés sur l'axe des x, et ayant pour abscisses a et a', ont un rapport k, et j'identifie avec l'équation ci-dessus; il vient

$$\frac{-2a + 2a'k^2}{1 - k^2} = \frac{2\mathrm{N}}{\mathrm{M}^2 e^{4c\mathrm{U}} - \mathrm{N}^2}, \quad \frac{k^2 a'^2 - a^2}{1 - k^2} = \frac{1}{\mathrm{M}^2 e^{4c\mathrm{U}} - \mathrm{N}^2}.$$

On vérifie ces deux équations en posant

$$a' = 0, \quad a = \frac{1}{\mathrm{N}}, \quad k = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} e^{2c\mathrm{U}};$$

donc les circonférences représentant les différents parallèles du globe terrestre, sont les lieux de points dont les distances aux deux points fixes A et O déjà obtenus au n° **29**, sont dans un rapport constant et égal à $\frac{M}{N} e^{2cU}$.

31. Il convient de transporter l'origine des coordonnées au milieu de OA, afin de simplifier les équations (10) et (11); on trouve ainsi, en posant $OA = \frac{1}{N} = 2a$,

$$x'^2 + y'^2 - 2a \operatorname{cotang} 2cV \,.\, y' = a^2 \tag{12}$$

pour l'équation des méridiens, et

$$x'^2 + y'^2 + 2a \frac{4a^2 M^2 e^{4cU} + 1}{4a^2 M^2 e^{4cU} - 1} x' = -a^2$$

pour celle des parallèles.

Cette dernière équation peut se mettre sous une forme plus élégante : faisant $4a^2 M^2 = e^{4ch}$, le coefficient de x' deviendra

$$2a \frac{e^{4cU+4ch} + 1}{e^{4cU+4ch} - 1} = 2a \frac{e^{2c(U+h)} + e^{-2c(U+h)}}{e^{2c(U+h)} - e^{-2c(U+h)}}$$

$$= -2a\sqrt{-1} \operatorname{cotang} 2c \frac{(U+h)}{\sqrt{-1}},$$

et l'équation sera

$$x'^2 + y'^2 - 2a\sqrt{-1} \operatorname{cotang} 2cU_1\, x' = -a^2, \tag{13}$$

en posant

$$U + h = U_1 \sqrt{-1}.$$

On doit remarquer que la constante h qui entre dans l'expression de U_1 n'a aucune influence sur la solution trouvée, et qu'elle ne sert qu'à fixer le parallèle terrestre qui correspond à un cercle déterminé de la série représentée par l'équation (13). Ainsi il n'y a, en réalité, dans notre solution, que deux constantes arbitraires c et a.

32. Il est utile de connaître les valeurs de x' et de y', en fonction de U_1 et de V. Or, reprenons les valeurs

$$x' = \frac{M\cos 2cV + Ne^{-2cU}}{M^2 e^{2cU} + 2MN\cos 2cV + N^2 e^{-2cU}},$$

$$y' = -\frac{M\sin 2cV}{M^2 e^{2cU} + 2MN\cos 2cV + N^2 e^{-2cU}},$$

obtenues au n° **27**. Changeons dans la première x' en $x' + \frac{1}{2N}$, pour tenir compte du déplacement d'origine opéré plus haut; ce qui donne

$$x' = \frac{N^2 e^{-2cU} - M^2 e^{2cU}}{2N\left(M^2 e^{2cU} + 2MN\cos 2cV + N^2 e^{-2cU}\right)},$$

puis introduisons les nouvelles notations, il viendra

$$x' = a\,\frac{e^{-2c(U+h)} - e^{2c(U+h)}}{e^{2c(U+h)} + 2\cos 2cV + e^{-2c(U+h)}} = -a\sqrt{-1}\,\frac{\sin 2cU_1}{\cos 2cU_1 + \cos 2cV},$$

$$y' = -a\,\frac{\sin 2cV}{\cos 2cU_1 + \cos 2cV}.$$

33. De là on tire encore

$$x' + y'\sqrt{-1} = -a\sqrt{-1}\,\frac{\sin 2cU_1 + \sin 2cV}{\cos 2cU_1 + \cos 2cV} = -a\sqrt{-1}\,\operatorname{tang} c(U_1 + V),$$

par conséquent,

$$F\left(U + V\sqrt{-1}\right) = -a\sqrt{-1}\,\operatorname{tang} c(U_1 + V),$$

$$F_1\left(U - V\sqrt{-1}\right) = -a\sqrt{-1}\,\operatorname{tang} c(U_1 - V);$$

donc Ω, qui est égal à

$$\frac{1}{\sqrt{F'\left(U + V\sqrt{-1}\right) F'_1\left(U - V\sqrt{-1}\right)}},$$

devient

$$\Omega = \frac{\cos c(U_1 + V)\cos c(U_1 - V)}{ac}.$$

34. On peut obtenir une autre valeur de Ω d'une forme assez remarquable. Soient r et r' les distances d'un point quelconque (x', y')

aux points A et A′ situés sur l'axe des x et à la distance a de l'origine : nous aurons

$$r^2 = x'^2 + y'^2 + 2ax' + a^2, \quad r'^2 = x'^2 + y'^2 - 2ax' + a^2,$$

ou bien, d'après l'équation (13),

$$r^2 = 2ax'(1 + \sqrt{-1}\ \text{cotang}\ 2c\mathrm{U}_1),$$

$$r'^2 = 2ax'(-1 + \sqrt{-1}\ \text{cotang}\ 2c\mathrm{U}_1),$$

et, en substituant à x' sa valeur en U_1 et V,

$$r^2 = 2a^2\frac{\cos 2c\mathrm{U}_1 - \sqrt{-1}\sin 2c\mathrm{U}_1}{\cos 2c\mathrm{U}_1 + \cos 2c\mathrm{V}}, \quad r'^2 = 2a^2\frac{\cos 2c\mathrm{U}_1 + \sqrt{-1}\sin 2c\mathrm{U}_1}{\cos 2c\mathrm{U}_1 + \cos 2c\mathrm{V}};$$

de là on déduit

$$rr' = \frac{a^2}{\cos c(\mathrm{U}_1 + \mathrm{V})\cos c(\mathrm{U}_1 - \mathrm{V})},$$

donc on a

$$\Omega = \frac{a}{c\,rr'}.$$

35. Jusqu'à présent, nous n'avons fait aucune hypothèse sur la figure des méridiens terrestres; mais, pour pouvoir appliquer nos formules à la construction des cartes géographiques, il est nécessaire de connaître quelle fonction de la latitude est la variable u. Or, si l'on suppose la terre sphérique, ainsi qu'on le fait communément en géographie, et qu'on prenne, pour plus de simplicité, le rayon de la terre pour unité, on aura, s étant le complément de la latitude, $u = \sin s$; de plus, la fonction de u représentée par $f(u)$ dans le n° **12** sera ici $\cos s$; donc U, qui est égal en général à $\int \frac{1}{u}\sqrt{1 + f'(u)^2}\,du$, deviendra

$$\mathrm{U} = \int \frac{ds}{\sin s} = \log\text{tang}\frac{s}{2}.$$

Si, au lieu de supposer la terre sphérique, on supposait qu'elle fût un sphéroïde elliptique aplati par les pôles, en appelant σ le complément de la latitude, ou l'angle de la normale avec l'axe des pôles, on trouverait

$$U = \log\left[\operatorname{tang}\frac{\sigma}{2}\left(\frac{1+\varepsilon\cos\sigma}{1-\varepsilon\cos\sigma}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\right],$$

ε étant l'excentricité de l'ellipse méridienne; de manière qu'en appelant σ_1 un angle tel que

$$\operatorname{tang}\frac{\sigma_1}{2} = \operatorname{tang}\frac{\sigma}{2}\left(\frac{1+\varepsilon\cos\sigma}{1-\varepsilon\cos\sigma}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}},$$

l'expression de U aurait la même forme que dans le cas de la terre sphérique.

On sait que si l'on néglige les quantités de l'ordre ε^4, la relation précédente revient à cette autre

$$\sigma_1 = \sigma - \frac{\varepsilon^2}{2}\sin 2\sigma,$$

de manière qu'il est alors très-facile de tenir compte de l'aplatissement de la terre.

36. Résumons les règles qui résultent de ce qui précède, pour la construction d'une carte du système considéré, lorsqu'on suppose d'ailleurs la terre sphérique. Après avoir fixé la constante c, qui est, en quelque sorte, l'exposant de la carte, on prend sur une horizontale les points A et A′ où viennent se couper tous les méridiens, c'est-à-dire les pôles de la carte, en ayant soin de placer à droite le pôle boréal A; on connaît ainsi le méridien AA′ correspondant à $V = 0$, et le parallèle BB′, perpendiculaire au milieu de AA′, correspondant à $U_1 = 0$. Ce méridien et ce parallèle peuvent se rapporter à un lieu quelconque du globe terrestre, qui devient alors le centre de la carte. De la connaissance de ce lieu résulte celle du méridien, à partir duquel se comptent les longitudes, et celle de la constante h. Car, puisque pour le centre de la carte on a $V = 0$, $U_1 = 0$, d'après la valeur de V, le méridien à partir duquel se comptent les longitudes est précisément celui qui passe par le centre de la carte; et, d'après la valeur de U_1, si l'on appelle s_0 la valeur du complément de la latitude pour le centre de la carte, et par conséquent $\log\operatorname{tang}\frac{s_0}{2}$ la valeur de U pour ce même point, on a

$$h + \log\operatorname{tang}\frac{\sigma_0}{2} = 0, \quad \text{d'où} \quad h = -\log\operatorname{tang}\frac{\sigma_0}{2}.$$

Maintenant, pour obtenir la représentation du méridien correspondant à une longitude v, on décrit, avec AA′ pour base, un segment capable de l'angle $\pi - 2cv$, au-dessus de AA′, si v est positif, ou bien, un segment capable de $\pi + 2cv$, au-dessous de AA′, si v est négatif; et pour avoir la représentation du parallèle correspondant à la latitude $\frac{\pi}{2} - s$, et par conséquent à la valeur log tang $\frac{s}{2}$ de U, on décrit le cercle lieu des points dont le rapport des distances aux points A et A′ est égal à

$$\frac{M}{N} e^{2cU} = e^{2c(U+h)} = \frac{\left(\operatorname{tang}\frac{s}{2}\right)^{2c}}{\left(\operatorname{tang}\frac{s_0}{2}\right)^{2c}}.$$

On peut ainsi obtenir la représentation des différents méridiens et des différents parallèles, et, par conséquent, placer sur la carte tel lieu que l'on veut.

37. On voit que dans la construction de nos cartes il y a, comme indéterminées, d'abord la distance AA′ ou a, dont dépend la grandeur ou l'échelle de la carte, puis la constante c, et enfin la position du lieu de la terre, que l'on prend comme centre de la carte. Nous allons nous proposer de fixer ces indéterminées, de manière à diminuer le plus possible l'altération causée par la représentation dans la grandeur des différents lieux de la terre. Cherchons le point pour lequel le rapport d'agrandissement, désigné ci-dessus par n, est un minimum, ou bien le point dans le voisinage duquel n est le moins altéré. La formule (7) du n° **15** nous permet de résoudre très-simplement cette question. En effet, si l'on applique cette formule à un méridien, elle nous montre immédiatement que les lieux dont la grandeur est la moins altérée en longitude sont ceux qui sont situés sur le méridien rectiligne AA′ de la carte, car pour ces points on a

$$\frac{\partial \frac{1}{n}}{\partial \sigma} = 0, \qquad \left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_s = 0,$$

et, par conséquent, $\frac{1}{\rho}$ doit aussi être nul. Supposons, en second lieu, que la formule se rapporte aux parallèles, on aura

$$\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s = \frac{\cos s}{u}, \qquad \frac{1}{n} = u\Omega,$$

et si l'on veut que

$$\frac{\delta\,\frac{1}{n}}{\delta\sigma} = 0,$$

c'est-à-dire que la déformation du lieu en latitude soit également minimum, il faudra que

$$\frac{1}{\rho'} = \Omega \cos s;$$

mais le rayon ρ' de la courbe transformée d'un parallèle est, en tenant compte du signe,

$$\frac{a\sqrt{-1}}{\sin 2cU_1};$$

Ω, qui a pour valeur générale

$$\frac{\cos c\,(U_1 + V)\cos c\,(U_1 - V)}{ac},$$

se réduit ici à

$$\frac{\cos^2 cU_1}{ac} = \frac{1 + \cos 2cU_1}{2ac},$$

puisque, d'après la condition déjà trouvée, $V = 0$. Donc notre formule devient

$$\frac{2c\sqrt{-1}\sin 2cU_1}{1 + \cos 2cU_1} = -\cos s. \tag{14}$$

38. Nous pouvons obtenir un résultat beaucoup plus simple. Nommons k le rapport du point cherché aux points A et A', on sait que

$$k = e^{2c(U+h)} = \cos 2c\,U_1 + \sqrt{-1}\sin 2c\,U_1,$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{k} = \cos 2c\,U_1 - \sqrt{-1}\sin 2c\,U_1;$$

donc

$$\sqrt{-1}\sin 2c\,U_1 = \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{k}\right),$$

$$\cos 2c\,U_1 = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right).$$

Substituant dans l'égalité (14), il vient

$$\frac{2c(k^2-1)}{2k+k^2+1} = -\cos s;$$

d'où

$$k = \frac{2c-\cos s}{2c+\cos s}.$$

Ainsi le point cherché, pour lequel la déformation de la carte est la moindre possible, est le point situé sur le méridien rectiligne AA' qui partage ce méridien en parties proportionnelles à $2c - \cos s$ et à $2c + \cos s$. On voit qu'en supposant ce point désigné sur le globe terrestre, ce qui fait connaître s, on peut encore le placer arbitrairement sur l'axe AA' de la carte, et que l'exposant $2c$ se trouve seulement alors déterminé.

39. Puisqu'il reste encore une indéterminée, assujettissons la seconde variation de $\frac{1}{n}$ dans le sens du méridien à être nulle; nous aurons

$$\frac{d\frac{1}{\rho'}}{dU} = \frac{1}{n}\,\frac{d\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s}{dU},$$

$\frac{1}{\rho'}$ et $\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s$ se rapportant à un parallèle. Or

$$\frac{d\frac{1}{\rho'}}{dU} = -\frac{2c}{a}\cos 2c\,U_1,$$

puis, en supposant la terre sphérique, ce que nous n'avions pas fait encore,

$$\frac{d\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s}{dU} = \frac{d\,\text{cotang}\,s}{dU} = -\frac{1}{\sin s},\quad \frac{1}{n} = \sin s\,\frac{1+\cos 2c\,U_1}{2ac};$$

donc, en substituant, on a

$$4c^2\cos 2c\,U_1 = 1 + \cos 2c\,U_1,$$

d'où

$$4c^2 = \frac{(k+1)^2}{k^2+1},$$

et, à cause de la valeur de k obtenue plus haut,

$$2c = \sqrt{1 + \sin^2 s},$$

ce qui détermine $2c$, quand s est connu.

40. Ainsi, après avoir pris un lieu important M de la surface de la terre pour le point dans le voisinage duquel les lieux doivent être le moins altérés possible, on déterminera l'exposant de la carte par la condition $2c = \sqrt{1 + \sin^2 s_1}$, s_1 étant le complément de la latitude du point M, puis on prendra les pôles A et A', de façon que le rapport des distances de ces points au point M', qui représente le point M de la terre, soit $\frac{2c - \cos s_1}{2c + \cos s_1}$; enfin le coefficient h qui, en appelant s_0 le complément de la latitude du centre de la carte, est égal à log tang $\frac{s_0}{2}$, se déduira de ce que le rapport des distances M'A et M'A' ou $\frac{2c - \cos s_1}{2c + \cos s_1}$ doit être $\frac{\left(\tang \frac{s_1}{2}\right)^{2c}}{\left(\tang \frac{s_0}{2}\right)^{2c}}$, et la carte se trouvera entièrement déterminée, sauf l'échelle qui doit évidemment rester quelconque.

41. Nous terminerons en remarquant que le système général de représentation obtenu précédemment donne, comme cas particuliers, les cartes réduites et les cartes stéréographiques, et qu'il suffit pour cela de supposer l'exposant $2c$ de la carte égal à 0 ou à 1. En effet, si dans les valeurs de x' et y' du n° **32** on fait

$$c = 0,$$

et, en même temps,

$$a = -\frac{m}{c} = \infty,$$

pour que les valeurs de x' et y' ne se réduisent pas à zéro, on trouve aisément

$$x' = mh + m\mathrm{U}, \quad y' = m\mathrm{V};$$

par conséquent, en supposant la terre sphérique,

$$x' = mh + m \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} s, \qquad y' = mv.$$

Ainsi les méridiens sont représentés par des droites parallèles à l'axe des x, et dont les distances à cet axe croissent proportionnellement à la longitude, et les parallèles sont des droites parallèles à l'axe des y, dont les distances à cet axe croissent proportionnellement aux logarithmes de la tangente de la moitié du complément de la latitude. C'est le système de Mercator ou des cartes réduites.

En faisant $2c = 1$, on a

$$x' = -a\sqrt{-1}\,\frac{\sin \mathrm{U}_1}{\cos \mathrm{U}_1 + \cos \mathrm{V}}, \qquad y' = -a\,\frac{\sin \mathrm{V}}{\cos \mathrm{U}_1 + \cos \mathrm{V}}$$

pour les valeurs de x' et y' en U_1 et V; et

$$(15) \qquad \begin{aligned} &x'^2 + y'^2 - 2a \operatorname{cotang} \mathrm{V}\, y' = a^2, \\ &x'^2 + y'^2 - 2a\sqrt{-1} \operatorname{cotang} \mathrm{U}_1\, x' = -a^2, \end{aligned}$$

pour les équations des circonférences représentant les méridiens et les parallèles. Nous aurons démontré que ces résultats conviennent au mode de représentation de Ptolémée, si nous faisons voir qu'en supposant la terre sphérique, à tout cercle tracé sur la terre correspond un cercle sur la carte. Or un cercle de la sphère est représenté, en v et s, par une équation de la forme

$$\mathrm{A} \sin s \cos v + \mathrm{B} \sin s \sin v + \mathrm{C} \cos s = \mathrm{D},$$

A, B, C, D étant des constantes; d'ailleurs

$$v = \mathrm{V},$$

puis

$$\mathrm{U} = \log \operatorname{tang} \frac{s}{2},$$

d'où

$$\sin s = \frac{2e^{\mathrm{U}}}{1 + e^{2\mathrm{U}}}, \quad \cos s = \frac{1 - e^{2\mathrm{U}}}{1 + e^{2\mathrm{U}}},$$

et, par conséquent,

$$\sin s = \frac{1}{\cos(U_1 + h\sqrt{-1})}, \quad \cos s = \sqrt{-1}\,\frac{\sin(U_1 + h\sqrt{-1})}{\cos(U_1 + h\sqrt{-1})};$$

donc l'équation d'un cercle de la terre est, en U_1 et V,

$$A\cos V + B\sin V + C\sqrt{-1}\sin(U_1 + h\sqrt{-1}) = D\cos(U_1 + h\sqrt{-1}),$$

ou plus simplement,

$$A\cos V + B\sin V + C_1\sqrt{-1}\sin U_1 + D_1\cos U_1 = 0,$$

C_1 et D_1 étant des nouvelles constantes. Maintenant les équations (15) nous donnent

$$\cos V = \frac{x'^2 + y'^2 - a^2}{\sqrt{[(x'-a)^2 + y'^2][(x'+a)^2 + y'^2]}},$$

$$\sin V = \frac{2ay'}{\sqrt{[(x'-a)^2 + y'^2][(x'+a)^2 + y'^2]}},$$

$$\cos U_1 = \frac{x'^2 + y'^2 + a^2}{\sqrt{[(x'-a)^2 + y'^2][(x'+a)^2 + y'^2]}};$$

$$\sqrt{-1}\sin U_1 = \frac{-2ax'}{\sqrt{[(x'-a)^2 + y'^2][(x'+a)^2 + y'^2]}},$$

donc, en substituant, il vient, pour l'équation de la projection du cercle de la terre,

$$A(x'^2 + y'^2 - a^2) + 2aBy' + D_1(x'^2 + y'^2 + a^2) - 2aC_1y' = 0,$$

ce qui est bien l'équation d'un cercle.

Nota. Au lieu de se donner comme condition que les angles formés sur la carte soient toujours égaux aux angles correspondants sur la surface du globe, on pourrait exiger que les différentes parties de la terre conservassent la même étendue, en se déformant d'ailleurs. On sait que plusieurs cartes, entre autres celles de Flamsteed, ont été construites d'après cette condition. Or, en supposant d'abord la surface de la terre et celle de la carte tout à fait quelconques, et exprimant les coordonnées des points de chaque surface au moyen de deux variables, comme nous l'avons fait au n° **1**, on trouve aisément que l'aire du triangle infiniment petit, tracé sur la première surface, et ayant

10..

pour sommets les points (u, v), $(u + du, v + dv)$, $(u + \delta u, v + \delta v)$, est égale à

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{EG - F^2}\,(du\,\delta v - \delta u\,dv),$$

E, F et G étant les trois fonctions de u et de v, qui entrent dans l'expression de l'élément de la surface. De même l'aire du triangle correspondant tracé sur la seconde surface, et ayant pour sommets les points (u', v'), $(u' + du', v' + dv')$, $(u' + \delta u', v' + \delta v')$, est

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{E'G' - F'^2}\,(du'\,\delta v' - \delta u'\,dv');$$

donc la condition énoncée s'exprime par l'équation

$$\sqrt{E'G' - F'^2}\,(du'\,\delta v' - \delta u'\,dv') = \sqrt{EG - F^2}\,(du\,\delta v - \delta u\,dv);$$

ou bien, en posant

$$du = \frac{du}{du'}\,du' + \frac{du}{dv'}\,dv',$$

$$\delta u = \frac{du}{du'}\,\delta u' + \frac{du}{dv'}\,\delta v',$$

$$dv = \frac{dv}{du'}\,du' + \frac{dv}{dv'}\,dv',$$

$$\delta v = \frac{dv}{du'}\,\delta u' + \frac{dv}{dv'}\,\delta v',$$

et substituant,

$$\frac{du}{du'}\,\frac{dv}{dv'} - \frac{du}{dv'}\,\frac{dv}{du'} = \frac{\sqrt{E'G' - F'^2}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Pour déduire de cette équation les valeurs de u et v, on se donnera arbitrairement v en fonction de u' et de v', et la détermination de u dépendra de l'intégration d'une équation aux différences partielles, linéaire et du premier ordre, qui dans beaucoup de cas se ramènera immédiatement aux quadratures.

Supposons la terre sphérique et la carte plane; faisons en conséquence $u' = x$, $v' = y$, $u = s$, $v = v$, s étant le complément de la latitude et v la longitude; nous aurons

$$\frac{ds}{dx}\,\frac{dv}{dy} - \frac{ds}{dy}\,\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\sin s},$$

ou bien, en posant $\cos s = S$,

$$\frac{dS}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{dS}{dy}\frac{dv}{dx} = -1.$$

Comme nous avons deux inconnues et une seule condition, nous pouvons imposer à notre système de représentation une autre propriété; nous pouvons exiger, par exemple, que les lignes des méridiens et des parallèles se coupent à angle droit. A l'équation précédente nous devons alors joindre celle-ci :

$$\frac{dS}{dx}\frac{dv}{dx} + \frac{dS}{dy}\frac{dv}{dy} = 0.$$

Des deux équations on tire aisément

$$\frac{dS}{dx} = \frac{-\frac{dv}{dy}}{\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2},$$

$$\frac{dS}{dy} = \frac{\frac{dv}{dx}}{\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2}.$$

Différentiant la première de ces dernières équations par rapport à y, la seconde par rapport à x et égalant, on trouve

$$(1) \qquad (p^2 - q^2)(t - r) - 4\,pqs = 0,$$

en posant, pour simplifier,

$$\frac{dv}{dx} = p, \quad \frac{dv}{dy} = q, \quad \frac{d^2v}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2v}{dx\,dy} = s, \quad \frac{d^2v}{dy^2} = t.$$

Cette équation aux différences partielles du second ordre se ramène à la forme linéaire par la méthode de Legendre. Soit

$$v = px + qy - v_1,$$

et regardons v_1 comme une fonction inconnue de p et de q; nous aurons

$$\frac{dv_1}{dp} = x, \quad \frac{dv_1}{dq} = y, \quad \frac{d^2v_1}{dp^2} = \frac{t}{rt - s^2}, \quad \frac{d^2v_1}{dp\,dq} = \frac{-s}{rt - s^2}, \quad \frac{d^2v_1}{dq^2} = \frac{r}{rt - s^2},$$

d'où, en substituant dans l'équation (1), il vient

$$(a) \qquad (p^2 - q^2)\left(\frac{d^2 v_1}{dp^2} - \frac{d^2 v_1}{dq^2}\right) + 4pq\,\frac{d^2 v_1}{dp\,dq} = 0.$$

Si maintenant on peut tirer de cette équation la valeur de v_1 en fonction de p et de q, on aura ensuite aisément x et y, puis v, puis s, qui est égal à

$$\int \frac{q\,dx - p\,dy}{p^2 + q^2}.$$

Nous n'entrerons dans aucun détail ni sur l'intégration de l'équation (a), ni sur les applications que l'on peut faire relativement au système de représentation qui précède. Nous nous proposons de revenir en détail sur ce sujet dans une autre occasion.

Vu et approuvé,
Le 12 juin 1852,
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer,
Le 14 juin 1852,
Le Recteur de l'Académie de la Seine,
CAYX.

PARIS. — IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.