COURS

DE

MATHÉMATIQUES

APPLIQUÉES

AUX OPÉRATIONS FINANCIÈRES

PAR

E. JANSON-DURVILLE

SOUS-CHEF AU MINISTÈRE DES FINANCES

PARIS

BERGER-LEVRAULT ET C^ie, LIBRAIRES-ÉDITEURS

5, RUE DES BEAUX-ARTS, 5

MÊME MAISON A NANCY

—

1887

PRÉFACE

L'ouvrage que je publie aujourd'hui est le développement de *conférences faites à l'École des sciences politiques*, pour la préparation des candidats à l'Inspection générale des finances et à l'auditorat à la Cour des comptes.

L'éminent directeur de cette école, M. E. Boutmy, et quelques-uns de ses professeurs, frappés de la faiblesse excessive montrée en mathématiques par le plus grand nombre de ces candidats, jugèrent indispensable d'y remédier. M. Boutmy résolut donc de créer à son école des conférences qui auraient pour but de leur enseigner, non seulement les éléments de cette science qui leur faisaient défaut, mais surtout les méthodes d'applications de ces éléments.

Chargé de ces conférences, je ne voulus pas me borner à une simple préparation d'examen. Tout en regardant ce but comme le plus immédiat à atteindre, j'en visai un autre plus général : je cherchai à faire de mes leçons un enseignement utile à tous ceux qui s'occupent de questions financières à la Caisse des dépôts, à la Banque de France, au Crédit foncier, ou dans tout autre établissement de banque et de crédit.

Cet enseignement, je crois pouvoir l'avancer sans témérité, n'existe nulle part (du moins tel que je l'ai compris et professé), ni dans les cours ni dans les livres.

Les uns et les autres sont, ou très élémentaires, et décrivent les principales opérations de finances en donnant sans explication les moyens pratiques d'arriver aux résultats cherchés, sortes de barêmes destinés à économiser le temps de ceux qui les emploient; ou bien, ils sont très compliqués et très ardus, hérissés de formules algébriques, et abordables seulement aux mathématiciens.

Cette lacune de l'enseignement oral, je pense l'avoir comblée par mes conférences. En écrivant cet ouvrage, j'ai espéré faire disparaître celle qui existe dans les livres publiés jusqu'ici.

Bien que je me sois placé à un point de vue absolument pratique, j'ai voulu que toutes les formules employées fussent démontrées avant leur application, de manière que l'ensemble de cet ouvrage formât un tout bien complet qu'un lecteur un peu attentif pût comprendre et retenir sans grand effort.

Un mot encore.

Ce Cours ne peut être mis utilement qu'entre les mains des personnes qui possèdent déjà des notions sur les opérations de l'arithmétique et sur les principales propriétés des nombres.

Dans la première partie, je parle des unes et des autres, mais très brièvement, seulement pour les rappeler au souvenir du lecteur : je n'insiste que sur les opérations abrégées, méthodes de calcul très précieuses, et, je ne sais pourquoi, bannies presque partout aujourd'hui de l'enseignement secondaire.

Dans la deuxième partie, je traite principalement des questions d'intérêt simple, d'escompte, de comptes courants, de monnaies, etc., etc.

Dans la troisième partie, la plus considérable en étendue et en importance, je parle des intérêts composés et de leurs applications aux questions d'assurance, d'amortissement, aux emprunts d'États et à ceux du Crédit foncier, de la ville de Paris et des compagnies de chemins de fer.

Tel est le cadre que je me suis proposé de remplir ici, avec un développement que ne pouvait permettre le peu de temps consacré à mes conférences à l'École des sciences politiques, mais toujours avec le même but en vue : la vulgarisation complète et raisonnée des connaissances indispensables pour comprendre les diverses opérations auxquelles se livrent ceux qui disposent, comme fonctionnaires ou comme simples citoyens, de la puissance financière de la France.

ERRATA

Page 19, 11e ligne, *au lieu de :* 475,378965049, *lisez :* 475,378965349.
Page 108, 19e ligne, *au lieu de :* Effets à payer, *lisez :* à Effets à payer.
Page 108, 21e ligne, *au lieu de :* Capital, *lisez :* à Capital.
Page 108, 22e ligne, *au lieu de :* Achard, *lisez :* à Achard.
Page 147, 4e ligne en remontant, *au lieu de :* 3...., *lisez :* puis l'intérêt sur 3....
Page 171, 11e ligne en remontant, *au lieu de :* 1 000 fr., *lisez :* 100 fr.
Page 190, 9e ligne, *au lieu de :* 2,3713726, *lisez :* 2,3713737.
Page 191, 3e ligne en remontant, *au lieu de :* $d = \frac{a + \alpha + a + \beta}{2}$ *lisez :* $d = \frac{a + \alpha + a - \beta}{2}$.
Page 196, 12e ligne, 2e colonne, *au lieu de :* 6380637, *lisez :* 6880637.
Page 197, 19e ligne, *au lieu de :* 657215120, *lisez :* 657216120.
Page 197, 21e ligne, *au lieu de :* 0,65721512, *lisez :* 0,65721612.
Page 216, 7e ligne en remontant, *au lieu de :* Log = 0,0120875, *lisez :* Log 0,0120875.
Page 2,9, 8e ligne, *au lieu de :* $1 - \left[\frac{1}{(1 + r)^n}\right]$, *lisez :* $\left[1 - \frac{1}{(1 + r)^n}\right]$.
Page 227, 4e ligne, *au lieu de :* Log 0,0025, *lisez :* Log 0,0225.
Page 235, 11e ligne en remontant, *au lieu de :* Log 0,025, *lisez :* Log 0,0225.
Page 278, 5e ligne, *au lieu de :* — 146 Log 1,02019312, *lisez :* + 146 Log 1,02019312.
Page 278, 12e ligne, *au lieu de :* 147 Log 1,02019312, *lisez :* 146 Log 1,02019312.
Page 301, 1re ligne, *au lieu de :* $=$, *lisez :* $p' =$
Page 301, 2e ligne, *au lieu de :* $p =$, *lisez :* $p' =$
Page 303, 14e ligne en remontant, *au lieu de :* diminué, *lisez :* augmenté.
Page 303, 7e ligne en remontant, *au lieu de :* 75,780 — 0,125 = 75,655, *lisez :* 75,780 + 0,125 = 75,905.
Page 303, 5e ligne en remontant, *au lieu de :* 80 — 75,655 = 4 fr. 345, *lisez :* 80 — 75,905 = 4 fr. 095.
Page 303, 1re ligne en remontant, *au lieu de :* 77,433 — 0,125 = 77,308, *lisez :* 77,433 + 0,125 = 77,558.
Page 304, 2e ligne, *au lieu de :* 80 — 77,308 = 2 fr. 692, *lisez :* 80 — 77,558 = 2 fr. 442.

COURS

DE MATHÉMATIQUES

APPLIQUÉES

AUX OPÉRATIONS FINANCIÈRES

LIVRE PREMIER.

NOTIONS RÉSUMÉES SUR LES OPÉRATIONS DE L'ARITHMÉTIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES ENTIERS.

1. Je n'ai rien à rappeler sur la *Numération*, non plus que sur l'*Addition* et la *Soustraction*.

On fait la preuve d'une addition en la recommençant de bas en haut, si, la première fois, elle a été faite de haut en bas, ou inversement.

La preuve d'une soustraction se fait en ajoutant au reste de l'opération le nombre qui a été retranché : on doit retrouver ainsi l'autre nombre.

2. Dans la *Multiplication*, si le multiplicateur a un grand nombre de chiffres, voici comment on peut procéder pour rendre l'opération moins pénible et surtout plus certaine.

On forme les multiples du multiplicande, depuis 1 jusqu'à 10, de la manière suivante : on écrit le multiplicande; puis on l'ajoute à lui-même, ce qui donne son produit par 2; on l'ajoute encore à ce nouveau produit, ce qui donne son produit par 3; puis on l'ajoute encore à ce dernier produit, ce qui donne son produit par 4; et, ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait obtenu son produit par 10, produit dont on peut aisément vérifier l'exactitude, puisqu'il doit être égal au multiplicande donné, à la droite duquel on a écrit un zéro.

Cette vérification faite, on est certain que tous les autres produits sont exacts, puisqu'ils ont été obtenus les uns des autres par des additions successives.

Ce tableau étant ainsi reconnu juste, il ne reste plus qu'à employer, dans la multiplication à faire, les produits qu'il contient, dans l'ordre indiqué par les chiffres du multiplicateur.

Soit à multiplier 35 748 612 par 7 654 893. Je forme les dix premiers multiples de 35 748 612

$$\begin{aligned}
35\,748\,612 \times 1 &= 35\,748\,612\\
35\,748\,612 \times 2 &= 71\,497\,224\\
35\,748\,612 \times 3 &= 107\,245\,836\\
35\,748\,612 \times 4 &= 142\,994\,448\\
35\,748\,612 \times 5 &= 178\,743\,060\\
35\,748\,612 \times 6 &= 214\,491\,672\\
35\,748\,612 \times 7 &= 250\,240\,284\\
35\,748\,612 \times 8 &= 285\,988\,896\\
35\,748\,612 \times 9 &= 321\,737\,508\\
35\,748\,612 \times 10 &= 357\,486\,120
\end{aligned}$$

Je fais la multiplication demandée en employant les produits précédents suivant l'ordre des chiffres du multiplicateur :

$$\begin{array}{r}
35\,748\,612\\
7\,654\,893\\
\hline
107\,245\,836\\
3\,217\,375\,08\\
28\,598\,889\,6\\
142\,994\,448\\
1\,787\,430\,60\\
21\,449\,167\,2\\
250\,240\,284\\
\hline
273\,651\,799\,758\,516
\end{array}$$

3. On fait la preuve d'une multiplication en prenant le multiplicateur pour multiplicande et le multiplicande pour multiplicateur.

4. Dans la *Division*, si le quotient doit avoir un grand nombre de chiffres, ce qu'il est facile de voir avant de faire l'opération, on peut employer le procédé qui vient d'être indiqué pour la Multiplication.

On forme le tableau des produits du diviseur par les 10 premiers nombres, puis on emploie chacun d'eux dans la division, suivant l'ordre des chiffres du quotient, chiffres obtenus sans tâtonnement en comparant les divers dividendes partiels avec les multiples du diviseur contenus dans le tableau.

Soit à diviser 975 846 379 par 648.

$$\begin{array}{rcrcr}
648 & \times & 1 & = & 648 \\
648 & \times & 2 & = & 1\ 296 \\
648 & \times & 3 & = & 1\ 944 \\
648 & \times & 4 & = & 2\ 592 \\
648 & \times & 5 & = & 3\ 240 \\
648 & \times & 6 & = & 3\ 888 \\
648 & \times & 7 & = & 4\ 536 \\
648 & \times & 8 & = & 5\ 184 \\
648 & \times & 9 & = & 5\ 832 \\
648 & \times & 10 & = & 6\ 480
\end{array}$$

Je fais la division :

```
975 846 379 |    648
648         |__________
---         | 1 505 935
3278
3240
----
  3846
  3240
  ----
   6063
   5832
   ----
    2317
    1944
    ----
     3739
     3240
     ----
      499
```

5. On fait la preuve d'une division en multipliant le diviseur par le quotient : si à ce produit on ajoute le reste, on doit retrouver le dividende.

6. *Le caractère de divisibilité par 9* donne une autre preuve pour la Multiplication et la Division.

Multiplication. Tout nombre étant un multiple de 9, plus le reste que donne la somme de ses chiffres divisée par 9, le produit de deux nombres sera un multiple de 9, plus le produit des restes par 9 que donnent ces deux nombres.

Soit le produit 7436×835.

Je fais l'opération :

$$\begin{array}{r} 7\,436 \\ 835 \\ \hline 37\,180 \\ 223\,08 \\ 5\,948\,8 \\ \hline 6\,209\,060 \end{array}$$

Je vais vérifier ce produit en employant la preuve par 9.

$$\begin{array}{r} 7\,436 = m.9 + 2 \\ 835 = m.9 + 7 \\ \hline \end{array}$$

$$7\,436 \times 835 = m.9 \times m.9 + 2 \times m.9 + 7 \times m.9 + 2 \times 7$$
$$= m.9 + 14 = m.9 + 5.$$

ce qu'il est facile de vérifier sur le produit effectué : 6 209 060.

7. *Division.* Le produit des restes que donnent le diviseur et le quotient divisés par 9, ajouté au reste par 9 que donne le reste de la division, doit donner un reste égal à celui du dividende divisé par 9.

Soit à diviser 856432 par 935.

Je fais l'opération :

$$\begin{array}{r|l} 856432 & 935 \\ \cline{2-2} 1493 & 915 \\ 5582 & \\ 907 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 935 = m.9 + 8 \\ 915 = m.9 + 6 \\ \hline \end{array}$$

$$935 \times 915 = m.9 + 48 = m.9 + 3$$

J'ajoute : $907 = \qquad = m.9 + 7$

$$935 \times 915 + 907 \text{ ou } 856432 \quad = m.9 + 10 = m.9 + 1$$

ce qu'on vérifie aisément.

D'une manière générale, pour faire la preuve par 9 d'une opération, il faut effectuer sur les restes par 9 que donnent ses facteurs les opérations que l'on ferait sur ces nombres eux-mêmes si l'on employait les preuves données par les méthodes indiquées aux n^{os} 1, 3 et 5.

La preuve par 9 n'établit pas absolument l'exactitude du résultat obtenu : elle prouve seulement que la somme de ses chiffres est bonne. Mais elle ne ferait pas découvrir une erreur qui ne modifierait pas cette somme, l'erreur, par exemple, qui consisterait à mal placer les chiffres d'un produit partiel dans une multiplication, ou à intervertir l'ordre de deux chiffres consécutifs dans une opération.

Il n'en est pas moins vrai que, ces erreurs étant excessivement rares, il est toujours bon de ne pas employer le résultat d'une opération avant de s'être assuré qu'il est vérifié par la preuve par 9.

CHAPITRE II.

OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS.

8. Je rappelle rapidement les *opérations sur les fractions ordinaires*.

Pour additionner plusieurs fractions, il faut les réduire au même dénominateur, faire la somme des numérateurs des fractions ainsi obtenues, et lui donner pour dénominateur le dénominateur commun.

Étant donnée une fraction, pour en retrancher une autre, il faut les réduire au même dénominateur; dans ces nouvelles fractions, soustraire le numérateur de la seconde de celui de la première, et donner pour dénominateur à cette différence le dénominateur commun.

Pour multiplier plusieurs fractions l'une par l'autre, il faut les multiplier terme à terme, c'est-à-dire les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux : la fraction ainsi formée est égale au produit demandé.

Pour diviser une fraction par une autre, il faut multiplier la fraction dividende par la fraction diviseur renversée : la fraction ainsi formée est égale au quotient demandé.

9. *Fractions décimales.* L'Addition et la Soustraction se font comme celles des nombres entiers; seulement il faut, dans le résultat, donner à la virgule le rang qu'elle occupe dans les facteurs.

La Multiplication des nombres décimaux se fait comme celle des nombres entiers; seulement, il faut placer la virgule, dans le produit, de manière qu'il y ait un nombre de chiffres décimaux égal à la somme des nombres des chiffres décimaux qui se trouvent dans les facteurs du produit.

Dans la Division, il y a deux cas à distinguer.

Si le diviseur est entier, on fait l'opération comme celle des nombres entiers, et l'on sépare, dans le quotient, à la droite de la virgule, autant de chiffres décimaux qu'il y en a au dividende.

Si le diviseur est décimal, on le rend entier en supprimant sa virgule; dans le dividende, on reporte la virgule vers la droite d'autant de chiffres qu'il y avait de chiffres décimaux au diviseur primitif, et l'on opère ensuite comme dans le cas précédent.

10. On voit que, dans la Division, si l'on veut avoir un quotient avec une approximation donnée d'avance, par exemple avec six chiffres décimaux, il faut faire l'opération avec un dividende ayant six chiffres décimaux après le déplacement de la virgule.

Si le dernier reste est plus grand que la moitié du diviseur, on force d'une unité le dernier chiffre du quotient, qui est alors *approché par excès* à une demi-unité près de l'ordre de son dernier chiffre. Si le dernier reste est égal ou inférieur à la moitié du diviseur, on ne force pas le dernier chiffre du quotient et celui-ci est alors *approché par défaut* à une demi-unité près de l'ordre de son dernier chiffre.

11. Pour *convertir une fraction ordinaire en fraction décimale*, il faut diviser son numérateur par son dénominateur.

Dans cette opération, il peut se présenter trois cas :

Ou le quotient est une fraction décimale exacte, ce qui a lieu quand le dénominateur de la fraction donnée, réduite à sa plus simple expression (ce qu'on appelle *fraction irréductible*), ne contient pas d'autres facteurs premiers que 2 ou 5;

Ou le quotient est une fraction décimale périodique simple, ce qui a lieu quand le dénominateur de la fraction donnée, supposée irréductible, ne contient comme facteurs premiers ni 2 ni 5;

Ou enfin, le quotient est une fraction décimale périodique mixte, ce qui a lieu quand le dénominateur de la fraction donnée, supposée irréductible, contient comme facteurs premiers 2 ou 5 avec d'autres facteurs.

12. Il est très important, dans les problèmes où entrent des fractions ordinaires comme données de la question, de s'assurer dans lequel des trois cas précédents se trouvent ces fractions ; parce que si l'on veut avoir une solution d'une exactitude absolue, on ne devra transformer les fractions ordinaires en fractions décimales que si elles peuvent se convertir en fractions exactes.

CHAPITRE III.

PUISSANCES ET RACINES.

13. On appelle *puissance* d'un nombre le produit de plusieurs facteurs égaux à ce nombre.

On indique la puissance par un chiffre placé à droite et au-dessus du nombre, chiffre appelé *exposant*, et qui fait connaître de combien de facteurs se compose cette puissance.

Ainsi :

$$8^4 = 8 \times 8 \times 8 \times 8 = 4096.$$

14. Pour multiplier plusieurs puissances d'un même nombre, on en ajoute les exposants :

$$8^3 \times 8^4 = 8^7.$$

En effet, 8^7 représente le produit de 7 facteurs égaux à 8.

15. Pour diviser une puissance d'un nombre par une autre puissance du même nombre, il faut retrancher l'exposant du diviseur de celui du dividende :

$$8^7 : 8^4 = 8^3.$$

En effet, le diviseur 8^4 multiplié par le quotient 8^3 donne bien le dividende 8^7.

16. Pour élever un nombre à une puissance, il faut multiplier l'exposant du nombre par l'exposant de la puissance :

$$(8^4)^3 = 8^4 \times 8^4 \times 8^4 \times 8^4 = 8^{12} \qquad \text{(N° 14)}.$$

Il en résulte que dans l'élévation d'un nombre à une puissance, on peut réduire notablement le nombre des multiplications.

Soit, par exemple, à élever 9 à la puissance 70^e.

$$\begin{aligned}
9 &\times 9 = 9^2\\
9^2 &\times 9^2 = 9^4\\
9^4 &\times 9^4 = 9^8\\
9^8 &\times 9^8 = 9^{16}\\
9^{16} &\times 9^{16} = 9^{32}\\
9^{32} &\times 9^{32} = 9^{64}\\
9^{64} &\times 9^4 = 9^{68}\\
9^{68} &\times 9^2 = 9^{70}
\end{aligned}$$

En tout 8 multiplications.

17. On appelle *racine* d'un nombre un autre nombre, qui, élevé à une certaine puissance, reproduit le premier.

On indique la racine par le signe $\sqrt{}$ placé au-dessus du nombre, et accompagné d'un chiffre appelé *indice* de la racine.

L'indice de la racine d'un nombre fait connaître à quelle puissance il faut élever le nombre cherché pour qu'il reproduise le premier.

Ainsi :

$$\sqrt{243} = 3$$

car il faut élever 3 à la 5^e puissance pour retrouver 243.

Lorsque la racine ne porte pas d'indice, c'est l'indice 2 qui est sous-entendu.

Ainsi $\sqrt{8}$ représente la racine carrée de 2.

18. Je vais rappeler ici très brièvement quelques notions du calcul algébrique, indispensables à connaître, pour comprendre les théories qui suivent.

On appelle *terme* ou *monome* une expression algébrique contenant ou une quantité, ou plusieurs quantités entre lesquelles il y a à effectuer d'autres opérations que l'addition et la soustraction.

Ainsi :

$$5\,a^3b^2,\quad \frac{4\,c^3}{d},\quad \frac{4}{3}\sqrt{3\,a^2b}$$

sont des monomes.

Les chiffres placés en avant s'appellent *coefficients*.

On appelle *termes semblables* ou *monomes semblables* des expressions qui ne diffèrent que par les signes et les coefficients.

Ainsi :

$$5\,a^2b^4c,\qquad -7\,a^2b^4c,\qquad 11\,a^2b^4c$$

sont des termes semblables.

Un terme qui n'est précédé d'aucun signe a le signe $+$.

19. *Addition et Soustraction.* Pour faire l'addition de plusieurs termes semblables, on ajoute, d'une part, les coefficients précédés du signe $+$, de l'autre, ceux précédés du signe $-$; on fait la différence de ces deux sommes, on lui donne le signe de la plus grande, et on la fait suivre des lettres contenues dans les monomes semblables avec leurs exposants.

Ainsi l'addition des trois termes qui précèdent (nº 18) donnera

$$9\,a^2b^4c.$$

Pour faire la soustraction de termes semblables, on change, avant tout, les signes des termes à soustraire, et l'on est ainsi ramené à faire une addition, comme précédemment.

Soit l'expression

$$4\,a^3b^4 - 7\,a^3b^4$$

de laquelle on veut retrancher

$$3\,a^3b^4 - 11\,a^3b^4.$$

Pour effectuer la soustraction, j'écrirai :

$$4\,a^3b^4 - 7\,a^3b^4 - 3\,a^3b^4 + 11\,a^3b^4.$$

En les additionnant comme précédemment, j'obtiendrai pour résultat :

$$5\,a^3b^4.$$

Si les termes ne sont pas semblables, pour les ajouter, on les écrit à la suite les uns des autres avec leurs signes ; pour les soustraire, on les écrit de même à la suite les uns des autres, mais après avoir changé auparavant les signes des termes à soustraire.

Les résultats ainsi obtenus s'appellent *polynomes*.

L'addition et la soustraction en Algèbre ne diffèrent pas essentiellement l'une de l'autre : aussi les comprend-on sous une seule et même dénomination : *Réduction algébrique*.

20. *Multiplication*. Pour multiplier des monomes, on multiplie leurs coefficients et on ajoute les exposants des mêmes lettres. Quant au signe du produit, il suit la règle bien connue :

$+$	par	$+$	donne	$+$
$+$	par	$-$	donne	$-$
$-$	par	$+$	donne	$-$
$-$	par	$-$	donne	$+$

Ainsi :

$$-7\,a^3b^2c \times \frac{8}{5}\,ac^3d = -\frac{56}{5}\,a^4b^2c^4d.$$

Pour multiplier un polynome par un monome, on multiplie chacun des termes du polynome par le monome. Ainsi :

$$\left(4\,a^3bc^2 - \frac{8}{9}\,a^2b^2c^3 - 7\,ab^3c^4\right) \times 5\,a^2b^3cd^2$$
$$= 20\,a^5b^4c^3d^2 - \frac{40}{9}\,a^4b^5c^4d^2 - 35\,a^3b^6c^5d^2.$$

Pour multiplier un polynome par un polynome, on multiplie chacun des termes du polynome multiplicande par chacun des termes du polynome multiplicateur.

En voici quelques exemples, très utiles à retenir.

$$\begin{array}{llll} a & +\,b & & \\ a & -\,b & & \\ \hline a^2 & +\,ab & & \\ & -\,ab & -\,b^2 & \\ \hline a^2 & & -\,b^2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} a & +\,b & \\ a & +\,b & \\ \hline a^2 & +\,ab & \\ & +\,ab & +\,b^2 \\ \hline a^2 & +\,2\,ab & +\,b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} a & -\,b & \\ a & -\,b & \\ \hline a^2 & -\,ab & \\ & -\,ab & +\,b^2 \\ \hline a^2 & -\,2\,ab & +\,b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} a^2 & +\ 2ab & +\ b^2 & \\ & a & +\ b & \\ \hline a^3 & +\ 2a^2b & +\ ab^2 & \\ & +\ a^2b & +\ 2ab^2 & +\ b^3 \\ \hline a^3 & +\ 3a^2b & +\ 3ab^2 & +\ b^3 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} a^2 & -\ 2ab & +\ b^2 & \\ & a & -\ b & \\ \hline a^3 & -\ 2a^2b & +\ ab^2 & \\ & -\ a^2b & +\ 2ab^2 & -\ b^3 \\ \hline a^3 & -\ 3a^2b & +\ 3ab^2 & -\ b^3 \end{array}$$

En résumé :

$$\begin{aligned} (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \\ (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{aligned}$$

21. *Division.* Pour diviser un monome par un monome, on divise le coefficient du dividende par celui du diviseur et l'on retranche les exposants des lettres du diviseur de ceux des mêmes lettres du dividende.

On suit, pour le signe du quotient, la même règle que pour celui du produit. Ainsi :

$$\frac{5}{8}a^4b^3c^2 : -3a^2b^2c^2 = -\frac{5}{24}a^2b.$$

On voit que quand on a à diviser deux lettres dont les exposants sont les mêmes, comme ici c^2, le quotient étant 1, on ne l'écrit pas, à moins qu'il ne soit seul au numérateur du résultat.

Pour diviser un polynome par un monome, on divise successivement chacun des termes du polynome par le monome. Ainsi :

$$(8a^4b^3c^6 + 9a^5b^4c^4 - 12a^6b^5c^2) : -\frac{3}{5}a^4b^3c^2 = -\frac{40}{3}c^4 - 15abc^2 + 20a^2b^2.$$

Je ne parlerai pas de la division d'un polynome par un polynome, dont je n'ai pas à faire usage ici.

22. *Mettre une expression en facteur commun entre plusieurs termes*, c'est diviser chacun de ces termes par cette expression et indiquer la multiplication à faire entre cette expression et les quotients obtenus. On représente cette opération en écrivant d'abord l'expression mise en facteur commun, puis en plaçant, entre deux parenthèses, les quotients avec leurs signes.

Soit le polynome :

$$12\,a^4b^5c^6 - 8\,a^3b^4c^8 - 16\,a^2b^3c^{10} + 24\,ab^2c^{12}.$$

Je peux mettre en facteur commun l'expression

$$4\,ab^2c^6$$

et le polynome précédent s'écrira :

$$4\,ab^2c^6\,(3\,a^3b^3 - 2\,a^2b^2c^2 - 4\,abc^4 + 6\,b^6).$$

Soit encore :

$$(1+r)^3 + r(1+r)^2 - r^2(1+r).$$

Je peux mettre $1 + r$ en facteur commun, et le polynome précédent deviendra

$$\begin{aligned}(1+r)\left[(1+r)^2 + r(1+r) - r^2\right] &= (1+r)\,(1+2r+r^2+r+r^2-r^2)\\ &= (1+r)\,(1+3r+r^2).\end{aligned}$$

Je reprends maintenant les opérations de l'Arithmétique.

EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE.

23. *Racine carrée d'un nombre entier.* Pour faire cette extraction, je m'appuie sur le principe suivant :

Le carré de la somme de deux nombres égale le carré du premier nombre, plus deux fois le produit du premier par le second, plus le carré du second. (Voir n° 20, exemples.)

Ainsi :

$$(d+u)^2 = d^2 + 2\,du + u^2.$$

Soit à extraire la racine carrée de 5817.

Ce nombre, étant le carré de sa racine, contient le carré des dizaines de cette racine, plus le double produit de ses dizaines par ses unités, plus le carré de ses unités, plus le reste.

$$\begin{array}{rr|rl}
 & & du & \\
 & 5817 & 76 & \\
d^2 = & \underline{49} & \overline{140} & = 2\,d \\
 & 917 & \underline{6} & = u \\
 & & 840 & = 2\,du \\
 & & \underline{36} & = u^2 \\
2\,du + u^2 = & \underline{876} & 876 & = 2\,du + u^2. \\
 & 41 & &
\end{array}$$

On abrège ordinairement l'opération de la manière suivante :

$$\begin{array}{r|l} 5817 & 76 \\ \cline{2-2} 917 & 146 \\ 41 & \;\;\;\;6 \end{array}$$

24. Quand le nombre dont on cherche la racine carrée est plus grand que 10000, par conséquent contient plus de deux tranches de deux chiffres, on extrait d'abord la racine carrée du nombre formé par les deux tranches de gauche, comme précédemment. Cette racine carrée, composée de deux chiffres, est regardée comme formant les dizaines d' de la racine carrée du nombre composé des trois premières tranches à gauche, racine que l'on achève d'extraire. Cette nouvelle racine, composée de trois chiffres, est regardée à son tour comme formant les dizaines d'' de la racine carrée du nombre composé des quatre premières tranches à gauche, et ainsi de suite.

Soit à extraire la racine carrée de 72735239

$$\begin{array}{rr|rl}
 & & d''\; u'' & \\
 & & \overbrace{d'\; u'} & \\
 & & \overbrace{d\; u} & \\
 & 72735239 & 8528 & \\ \cline{3-3}
d^2 = & 64 & 160 & = 2d \\
 & 873 & 5 & = u \\ \cline{3-3}
 & & 800 & = 2du \\
 & & 25 & = u^2 \\ \cline{3-3}
2du + u^2 = & 825 & 825 & = 2du + u^2 \\ \cline{2-3}
 & 4852 & 1700 & = 2d' \\
 & & 2 & = u' \\ \cline{3-3}
 & & 3400 & = 2d'u' \\
 & & 4 & = u'^2 \\ \cline{3-3}
2d'u' + u'^2 = & 3404 & 3404 & = 2d'u' + u'^2 \\ \cline{2-3}
 & 144839 & 17040 & = 2d'' \\
 & & 8 & = u'' \\ \cline{3-3}
 & & 136320 & = 2d''u'' \\
 & & 64 & = u''^2 \\ \cline{3-3}
2d''u'' + u''^2 = & 136384 & 136384 & = 2d''u'' + u''^2 \\ \cline{2-2}
 & 8455 & &
\end{array}$$

On résume ordinairement cette opération de la manière suivante :

$$
\begin{array}{r|r}
72735239 & 8528 \\ \cline{2-2}
873 & 165 \\
4852 & 5 \\ \cline{2-2}
144839 & 1702 \\
8455 & 2 \\ \cline{2-2}
 & 17048 \\
 & 8
\end{array}
$$

25. *Racine carrée d'un nombre décimal.* Elle se fait absolument comme celle d'un nombre entier, pourvu que le nombre sur lequel on opère contienne deux fois autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans l'approximation demandée à la racine.

Soit à extraire la racine carrée de 47,56897 à 0,0001 près.

J'écris le nombre proposé avec 8 décimales; j'extrais sa racine carrée comme s'il était entier, et je sépare, dans le résultat obtenu, 4 chiffres à droite de la virgule.

$$
\begin{array}{r|r}
47{,}56897000 & 68970 \\ \cline{2-2}
1156 & 128 \\
13289 & 8 \\ \cline{2-2}
96870 & 1369 \\
36100 & 9 \\ \cline{2-2}
 & 13787 \\
 & 7
\end{array}
$$

La racine cherchée est 6,8970 à 0,0001 près.

On force le dernier chiffre, quand le reste est égal ou supérieur à la racine augmentée de 1. Dans le cas contraire, comme ici, on ne le force pas.

26. *Racine carrée d'une fraction ordinaire.* Pour extraire la racine carrée d'une fraction ordinaire, on convertit cette fraction en fraction décimale, et on opère comme précédemment.

27. Pour faire la preuve de la racine carrée, il faut l'élever au carré, puis ajouter au produit le reste obtenu dans l'extraction de la racine : on doit retrouver ainsi le nombre dont on a extrait la racine.

On peut aussi faire la preuve par 9. Pour cela, il faut chercher le reste de la racine par 9, en faire le carré, chercher le reste de ce carré par 9, y ajouter le reste par 9 que donne le reste obtenu dans l'extraction de la racine. Cette somme doit donner le même reste par 9 que le nombre proposé.

Dans le dernier exemple :

$$\begin{array}{ll} & 68970 = m.9 + 3 \\ (\text{N}^\circ\ 23) & \overline{68970}^2 = (m.9)^2 + 2 \times 3 \times m.9 + 3^2 = m.9 \\ & \underline{36100 = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = m.9 + 1} \\ & \overline{68970}^2 + 36100 \quad \text{ou} \quad 4756897000 = m.9 + 1 \end{array}$$

ce qu'il est facile de vérifier.

EXTRACTION DE LA RACINE CUBIQUE.

28. *Racine cubique d'un nombre entier.* Pour faire cette extraction, je m'appuie sur le principe suivant :

Le cube de la somme de deux nombres égale le cube du premier nombre, plus trois fois le carré du premier multiplié par le second, plus trois fois le premier multiplié par le carré du second, plus le cube du second. (Voir n° 20, exemples.)

Ainsi :

$$(d + u)^3 = d^3 + 3\,d^2u + 3\,du^2 + u^3 = d^3 + (3\,d^2 + 3\,du + u^2)\,u \quad (\text{N}^\circ\,22).$$

Soit à extraire la racine cubique de 76495.

Ce nombre étant le cube de sa racine contient le cube des dizaines de cette racine, plus trois fois le carré de ses dizaines par ses unités, plus trois fois ses dizaines par le carré de ses unités, plus le cube de ses unités, plus le reste.

$$\begin{array}{rr|l} & & du \\ & 76495 & 42 \\ d^3 = & \underline{64} & \overline{4800} = 3\,d^2 \\ & 12495 & \;\;240 = 3\,du \\ & & \quad\;\; \underline{4 = u^2} \\ (3\,d^2 + 3\,du + u^2)u = & \underline{10088} & 5044 \times 2 = (3d^2 + 3\,du + u^2)\,u. \\ & 2407 & \end{array}$$

29. Quand le nombre dont on cherche la racine cubique est plus grand que 1 000 000, par conséquent contient plus de deux tranches de trois chiffres, on extrait d'abord la racine cubique du nombre formé par les deux tranches de gauche, comme précédemment. Cette racine cubique, composée de deux chiffres, est regardée comme formant les dizaines d' de la racine cubique du nombre composé des trois premières tranches à gauche, racine que l'on achève d'extraire. Cette nouvelle racine, composée de trois chiffres est regardée à son tour comme formant les dizaines d'' de la racine cubique du nombre composé des quatre premières tranches à gauche, et ainsi de suite.

Soit à extraire la racine cubique de 273 456 359.

$$\begin{array}{llr|rl}
 & & & d'u' & \\
 & & & \overset{\frown}{du}\,\vdots & \\
 & & 273\,456\,359 & 649 & \\
\hline
 & d^3 = & 216 & 10800 & = 3d^2 \\
d'^3 & & 57\,456 & 720 & = 3du \\
 & & & 16 & = u^2 \\
 & (3d^2+3du+u^2)u = & 46\,144 & 11536 \times 4 & = (3d^2+3du+u^2)u \\
 & & 11\,312\,359 & 1228800 & = 3d'^2 \\
 & & & 17280 & = 3d'u' \\
 & & & 81 & = u'^2 \\
 & (3d'^2+3d'u'+u'^2)u' = & 11\,215\,449 & 1246161 \times 9 & = (3d'^2+3d'u'+u'^2)u' \\
 & & 96\,910 & &
\end{array}$$

On abrège ordinairement le calcul de la manière suivante :

$$\begin{array}{r|rl}
273\,456\,359 & 649 & \\
57\,456 & 10800 & \\
11\,312\,359 & & \\
96\,910 & 720 & \\
 & 16 & \\
 & 11536 \times 4 & \text{J'additionne ces 4 nombres} \\
 & 16 & \\
 & 1228800 & \\
 & 17280 & \\
 & 81 & \\
 & 1246161 \times 9 &
\end{array}$$

30. *Racine cubique d'un nombre décimal.* La racine cubique d'un nombre décimal s'extrait absolument de la même manière que celle d'un nombre entier, pourvu que le nombre sur lequel on opère contienne trois fois autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans l'approximation demandée à la racine.

Soit à extraire la racine cubique de 0,0035789 à 0,001 près.

J'écris le nombre proposé avec 9 décimales; j'extrais sa racine cubique comme si c'était un nombre entier, et je sépare, dans le résultat obtenu, 3 chiffres à droite de la virgule.

0,009857890	214
1857	1200
596890	
57546	60
	1
	1261 × 1
	1
	132300
	2520
	16
	134836 × 4

La racine cubique demandée est 0,214.

Pour savoir s'il faut ou non forcer le dernier chiffre, on continue l'opération. Si le chiffre suivant de la racine est égal ou supérieur à 5, on force le dernier chiffre obtenu; dans le cas contraire, on ne le force pas.

Dans l'exemple précédent, le quatrième chiffre étant un 4, je ne forcerai pas le dernier chiffre de la racine.

31. *Racine cubique d'une fraction ordinaire.* Pour extraire la racine cubique d'une fraction ordinaire, on réduit cette fraction en décimales, et on opère comme précédemment.

32. Pour faire la preuve de la racine cubique, il faut l'élever au cube, puis ajouter au produit le reste obtenu dans l'extraction de la racine : on doit retrouver ainsi le nombre donné.

On peut aussi employer la preuve par 9.

Pour cela, il faut chercher le reste de la racine par 9, en faire le cube, chercher le reste de ce cube par 9, y ajouter le reste par 9 que donne le reste obtenu dans l'extraction de la racine. Cette somme doit donner le même reste par 9 que le nombre proposé.

Dans le dernier exemple :

$$
\begin{array}{ll}
 & 214 = m.9 + 7 \\
(\text{N}^\circ\ 28) & \overline{214}^3 = (m.9)^3 + 3 \times 7 \times (m.9)^2 + 3 \times 7^2 \times m.9 + 7^3 \\
 & \overline{214}^3 = m.9 + 343 = m.9 + 1 \\
 & 57546 = \cdots\cdots = m.9
\end{array}
$$

$$\overline{214}^3 + 57546 \text{ ou } 9857890 = m.9 + 1$$

ce qu'il est facile de vérifier.

33. Pour extraire une racine quelconque d'un nombre, on peut extraire successivement les racines de ce nombre dont les indices multipliés entre eux forment un produit égal à l'indice de la racine à extraire. Ainsi :

$$\sqrt[12]{25} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{25}}$$

car en élevant à la 12^e puissance les deux membres de cette égalité, on trouve

$$25 = 25.$$

Il en résulte qu'on peut extraire, au moyen des racines carrées et cubiques, toutes les racines dont les indices sont des multiples de 2 et de 3 seulement :

$$\sqrt[72]{48} = \sqrt[36]{\sqrt{48}} = \sqrt[18]{\sqrt{\sqrt{48}}} = \sqrt[9]{\sqrt{\sqrt{\sqrt{48}}}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{\sqrt{48}}}}}.$$

On obtiendra cette racine 72^e en extrayant successivement trois racines carrées et deux racines cubiques, n'importe dans quel ordre.

CHAPITRE IV.

OPÉRATIONS ABRÉGÉES.

Les *opérations abrégées* ont pour but, non seulement d'amener les résultats cherchés, plus rapidement que les opérations ordinaires, mais aussi de donner ces résultats avec une approximation déterminée d'avance.

Ces opérations comprennent la *Multiplication*, la *Division*, l'*Élévation à la puissance* qui est un cas particulier de la Multiplication, l'*Extraction de la racine carrée* et *celle de la racine cubique*.

34. *Multiplication abrégée.*

Soit à multiplier 475,378965049 par 25,39620457 à 0,001 près.

Je prends pour multiplicande le nombre qui contient le plus de chiffres, j'écris le chiffre des unités du multiplicateur au-dessous de celui du multiplicande de l'ordre qui suit l'approximation demandée (ici, au-dessous du chiffre des *dix-millièmes*) si le multiplicateur n'a pas plus de 20 chiffres, au-dessous du chiffre suivant à droite (ici, ce serait au-dessous du chiffre des *cent-millièmes*), si le multiplicateur avait plus de 20 chiffres.

Cela fait, j'écris les autres chiffres du multiplicateur au-dessous de ceux du multiplicande, mais en renversant leur ordre, de la manière suivante :

$$\begin{array}{r} 475{,}378\ 965\ 349 \\ 75\ 402\ 693{,}52 \end{array}$$

Puis je fais le produit du premier chiffre à droite dans le multiplicateur par le chiffre du multiplicande qui se trouve au-dessus, mais en tenant compte de la retenue que donne le produit de ce chiffre du multiplicateur par les deux chiffres à droite du chiffre considéré dans le multiplicande. Je force cette retenue quand le chiffre qui la suit dans ce produit est égal ou supérieur à 5.

Je continue ensuite à faire la multiplication comme dans l'opération ordinaire.

Ainsi je dirai :

2 fois 3 font 6; je retiens 1, car 6 est plus près de 10 que de 0; 2 fois 5 font 10, et 1, font 11; je retiens 1.

2 fois 6 font 12, et 1 font 13; je pose 3, et je retiens 1.

2 fois 9 font 18, et 1 font 19; je pose 9, et je retiens 1.

2 fois 8 font 16, et 1 font 17; je pose 7, et je retiens 1.

2 fois 7 font 14, et 1 font 15; je pose 5, et je retiens 1.

2 fois 3 font 6, et 1 font 7; je pose 7.

2 fois 5 font 10; je pose 0, et je retiens 1.

2 fois 7 font 14, et 1 font 15; je pose 5, et je retiens 1.

2 fois 4 font 8, et 1 font 9, que je pose.

475,378 965 349
75 402 693,52
950 757 93
237 689 48
14 261 37
4 278 41
285 23
9 51
19
2
12 072,8214

Je passe au second chiffre du multiplicateur.

Je placerai le premier chiffre à droite dans le produit que je vais obtenir, sous le premier chiffre à droite du produit précédent.

5 fois 5 font 25, je retiens 3, et non pas 2, à cause des chiffres négligés à droite; 5 fois 6 font 30, et 3 font 33; je retiens 3.

5 fois 9 font 45, et 3 font 48; je pose 8, et je retiens 4.

5 fois 8 font 40, et 4 font 44; je pose 4, et je retiens 4.

5 fois 7 font 35, et 4 font 39; je pose 9, et je retiens 3.

5 fois 3 font 15, et 3 font 18; je pose 8, et je retiens 1.

5 fois 5 font 25, et 1 font 26; je pose 6, et je retiens 2.

5 fois 7 font 35, et 2 font 37; je pose 7, et je retiens 3.

5 fois 4 font 20, et 3 font 23, que je pose.

Je passe au troisième chiffre du multiplicateur.

Je placerai comme précédemment (et je le ferai toujours dans ce qui va suivre), le premier chiffre à droite dans le produit que je vais obtenir, sous le premier chiffre à droite du produit précédent.

3 fois 6 font 18, je retiens 2; 3 fois 9 font 27, et 2 font 29; je retiens 3.

3 fois 8 font 24, et 3 font 27; je pose 7, et je retiens 2.
3 fois 7 font 21, et 2 font 23; je pose 3, et je retiens 2.
3 fois 3 font 9, et 2 font 11; je pose 1, et je retiens 1.
3 fois 5 font 15, et 1 font 16; je pose 6, et je retiens 1.
3 fois 7 font 21, et 1 font 22; je pose 2, et je retiens 2.
3 fois 4 font 12, et 2 font 14, que je pose.

Je passe au quatrième chiffre du multiplicateur.

9 fois 9 font 81, je retiens 8; 9 fois 8 font 72, et 8 font 80; je retiens 8.

9 fois 7 font 63, et 8 font 71; je pose 1, et je retiens 7.
9 fois 3 font 27, et 7 font 34; je pose 4, et je retiens 3.
9 fois 5 font 45, et 3 font 48; je pose 8, et je retiens 4.
9 fois 7 font 63, et 4 font 67; je pose 7, et je retiens 6.
9 fois 4 font 36, et 6 font 42, que je pose.

Puis :

2 fois 7 font 14, je retiens 1; 2 fois 3 font 6, et 1 font 7; je retiens 1.
2 fois 5 font 10, et 1 font 11; je pose 1, et je retiens 1.
2 fois 7 font 14, et 1 font 15; je pose 5, et je retiens 1.
2 fois 4 font 8, et 1 font 9, que je pose.

Ensuite :

4 fois 5 font 20, je retiens 2; 4 fois 7 font 28, et 2 font 30; je retiens 3.

4 fois 4 font 16, et 3 font 19, que je pose.

Enfin :

5 fois 7 font 35, je retiens 4; 5 fois 4 font 20, et 4 font 24, qui donnent 2 de retenue, que je pose.

Quant au produit du dernier chiffre, 7, du multiplicateur par le dernier, 4, du multiplicande, il ne donnerait 1 de retenue que s'il était plus grand que 50, c'est-à-dire plus près de 100 que de 1, ce qui n'a pas lieu ici. Aussi je le néglige.

Je fais ensuite l'addition des divers produits partiels, et je sépare, avec une virgule, à la droite du résultat, un nombre de chiffres décimaux égal à l'ordre du rang occupé par le chiffre du multiplicande sous lequel j'ai placé le chiffre des unités du multiplicateur; ici, j'en sépare 4.

Je biffe le premier chiffre à droite, dont je ne peux garantir l'exactitude, et le nombre qui reste

$$12072,821$$

est le produit demandé, à 0,001 près.

C'est ce que je vais prouver.

Je vais démontrer d'abord que le premier chiffre à droite dans chaque produit partiel représente des *dix-millièmes,* le second des *millièmes,* le troisième des *centièmes,* et ainsi de suite; ensuite que les chiffres négligés donnent des erreurs dont la somme n'atteint pas 1 *millième.*

Pour prouver le premier point, je remarque que, dans la première multiplication partielle, le produit de 2 (chiffre des *dizaines* du multiplicateur) par 3 (chiffre des *dix-millionièmes* du multiplicande) donne 6 *millionièmes,* et, en forçant, 10 *millionièmes* ou 1 *cent-millième;* lequel, ajouté au produit de 2 (chiffre des *dizaines* du multiplicateur) par 5 (chiffre des *millionièmes* du multiplicande), donnera 11 *cent-millièmes.*

La retenue donnée par cette somme sera 1 *dix-millième,* lequel ajouté au produit de 2 (chiffre des *dizaines* du multiplicateur) par 6 (chiffre des *cent-millièmes* du multiplicande) donnera 13 *dix-millièmes.*

La retenue donnée par cette somme sera 1 *millième,* lequel, ajouté au produit de 2 (chiffre des *dizaines* du multiplicateur) par 9 (chiffre des *dix-millièmes* du multiplicande), donnera 19 *millièmes.* Et ainsi de suite pour les chiffres de la première multiplication partielle.

Je passe maintenant à la seconde multiplication partielle. Le raisonnement est absolument le même, et les divers produits obtenus successivement sont du même ordre que les précédents, parce que, si le second chiffre du multiplicateur est d'un ordre 10 fois moindre que celui du premier chiffre du multiplicateur, en revanche, chacun des chiffres employés au multiplicande dans cette seconde multiplication est d'un ordre 10 fois plus fort que chacun de ceux employés dans la première. Par conséquent, les divers produits successifs de cette seconde multiplication sont du même ordre que les produits de même rang dans la première.

Il en serait de même pour toutes les autres multiplications partielles; donc leurs chiffres sont bien placés les uns au-dessous des autres, en les alignant par la droite.

Quant aux erreurs commises, voici comment on peut les évaluer.

Dans la première multiplication partielle, au lieu de 11 *cent-millièmes*, donnés par le produit de 2 (chiffre des *dizaines* du multiplicateur) par 5 (chiffre des *millionièmes* du multiplicande), j'ai pris seulement la retenue 1 *dix-millième*; j'ai commis ainsi une erreur qui est moindre que $\frac{5}{100000}$.

Dans la seconde multiplication partielle, au lieu de 32 *cent-millièmes*, j'ai pris la retenue 3 *dix-millièmes*, c'est-à-dire que j'ai commis une erreur qui est encore moindre que $\frac{5}{100000}$.

Il en est de même de toutes les autres multiplications partielles.

Il en résulte évidemment que dans chacune d'elles j'ai commis une erreur moindre que $\frac{5}{100000}$; donc, si je n'ai pas plus de 20 chiffres au multiplicateur, la somme de ces erreurs n'atteindra pas 20 fois $\frac{5}{100000}$ ou $\frac{1}{1000}$.

Et encore, en raisonnant ainsi, je me suis placé dans le cas le plus défavorable, celui où toutes les erreurs seraient de 5 cent-millièmes, et de même sens, ce qui n'a jamais lieu; de sorte qu'en réalité, l'approximation est plus grande que je ne l'ai avancé.

D'après cela, on voit qu'il est essentiel de prendre pour multiplicateur celui des deux facteurs qui a le moins de chiffres, puisque le nombre des erreurs commises est égal au nombre des multiplications partielles.

35. Si le multiplicateur avait plus de 20 chiffres, il faudrait placer le chiffre de ses unités sous celui du multiplicande dont l'ordre est 100 fois plus petit que celui de l'approximation demandée, et on ferait l'opération exactement comme elle vient d'être décrite.

Dans ce cas, chacune des erreurs commises étant 10 fois moindre que dans l'exemple précédent, il faudrait que le multiplicateur eût plus de 200 chiffres pour que la somme de ces erreurs atteignît l'ordre de l'approximation demandée.

Ce cas se présente, non pas dans un produit de deux facteurs, parce qu'en général, l'un d'eux, au moins, n'a pas plus de 20 chiffres, mais dans un produit composé de plus de deux facteurs, parce qu'alors le nombre des chiffres des divers multiplicateurs forme un total qui dépasse souvent 20.

36. *Remarque I.* — Si l'on voulait diminuer de *un* le nombre des chiffres employés au multiplicande et au multiplicateur, on ne tiendrait compte, au commencement du premier produit partiel, que de la retenue que donne le premier chiffre du multiplicateur multiplié par le chiffre du multiplicande, situé à droite de celui qui est au-dessus du chiffre du multiplicateur (ici, ce serait le chiffre 5 des millionièmes du multiplicande); ou par ce chiffre augmenté d'une unité, si le suivant à droite était égal ou supérieur à 5. Dans ce cas, l'erreur commise dans ce produit partiel pourrait aller à $\frac{1}{10000}$, au lieu de $\frac{5}{100000}$, c'est-à-dire serait doublée.

De même, on pourrait ne pas tenir compte du chiffre du multiplicateur qui dépasse de deux rangs vers la gauche le dernier chiffre du multiplicande, si ce chiffre du multiplicateur était inférieur à 5. S'il était égal ou supérieur à 5 (comme dans l'exemple ci-dessus où il est un 7), il faudrait effectuer le produit précédent en forçant d'une unité le chiffre du multiplicateur (ici on ferait le produit avec 6). De la sorte, l'erreur commise dans ce produit pourrait aller à $\frac{1}{10000}$ comme la précédente.

Dans ce cas, pour que la somme des erreurs n'atteignît pas $\frac{1}{1000}$, il faudrait qu'il n'y eût pas plus de 16 chiffres au multiplicateur outre le premier et le dernier, c'est-à-dire 18 en tout. S'il y en avait plus, il faudrait reculer les chiffres du multiplicateur d'un rang vers la droite, et opérer comme je viens de le dire, ce qui permettrait de faire le calcul avec l'approximation demandée, pourvu qu'il n'y eût pas plus de 198 chiffres au multiplicateur.

37. *Remarque II.* — Le dernier chiffre du produit étant inexact, on ne peut pas, d'après sa valeur, conclure s'il faut ou non forcer le le chiffre précédent : il vaudra mieux s'abstenir de forcer à moins qu'il ne soit un 8 ou un 9; alors il sera préférable de forcer.

38. *Remarque III.* — Le seul inconvénient que présente la multiplication abrégée, c'est qu'elle n'est susceptible d'aucune preuve.

39. *Division abrégée.*

Soit à chercher le quotient de 4758532,29548 par 75938,6482 à 0,001 près.

Je fais comme dans la division ordinaire des nombres décimaux; je rends le diviseur entier en supprimant sa virgule; celle du dividende, je la reporte vers la droite d'autant de rangs qu'il y avait de chiffres décimaux au diviseur donné (ici, c'est de 4); enfin j'exprime le dividende en unités de l'ordre de l'approximation demandée (ici, c'est en millièmes), ou, en écrivant à sa droite un nombre de zéros suffisant pour qu'il ait 3 chiffres décimaux, s'il en a moins; ou, en ne conservant à sa droite que 3 chiffres décimaux, s'il en a plus. Dans l'exemple proposé, comme le dividende, après le déplacement de la virgule, n'a plus que 1 chiffre décimal, j'écris à sa droite 2 zéros.

Cela fait, je supprime à partir de la droite du dividende autant de chiffres qu'il y en a dans le diviseur moins 2, si le quotient ne doit pas avoir plus de 18 chiffres (ce dont il est facile de s'assurer); et s'il doit en avoir plus de 18, je supprime dans le dividende autant de chiffres qu'il y en a dans le diviseur moins 3. Puis je fais la division comme une division ordinaire, si la partie ainsi conservée du dividende peut contenir le diviseur. Si elle ne le peut pas, je supprime dans le diviseur assez de chiffres à partir de la droite pour que cette division puisse se faire.

Ici je supprime 7 chiffres au dividende, puisqu'il y en a 9 au diviseur. Il en reste 7 au dividende; pour faire la division, j'en conserve 6 au diviseur; j'ai ainsi à diviser 4758532 par 759386.

Dans les produits partiels de chaque chiffre du quotient par le diviseur, je supprime, à partir du second produit, un chiffre à droite dans le diviseur, jusqu'à ce que j'arrive à l'avant-dernier; alors l'opération est terminée; et dans chacun de ces produits je tiens compte de la retenue donnée par les deux chiffres à droite du premier chiffre conservé au diviseur.

Voici l'opération :

4758532,~~2954,800~~	75~~938,6482~~
202213	62,662
50336	
4773	
217	
65	

En 47, combien de fois 7 : 6 fois. 6 fois 8 font 48, je retiens 5; 6 fois 4 font 24, et 5 font 29; je retiens 3.

6 fois 6 font 36, et 3 font 39; 39 ôté de 42, il reste 3, et je retiens 4.

6 fois 8 font 48, et 4 font 52; 52 ôté de 53, il reste 1, et je retiens 5.

6 fois 3 font 18, et 5 font 23; 23 ôté de 25, il reste 2, et je retiens 2.

6 fois 9 font 54, et 2 font 56; 56 ôté de 58, il reste 2, et je retiens 5.

6 fois 5 font 30, et 5 font 35; 35 ôté de 35, il reste 0, et je retiens 3.

6 fois 7 font 42, et 3 font 45; 45 ôté de 47, il reste 2, que je pose.

Je biffe maintenant le chiffre 6 au diviseur, et je divise 202213 par 75938.

Le quotient est 2.

2 fois 4 font 8, je retiens 1; 2 fois 6 font 12, et 1 font 13; je retiens 1.

2 fois 8 font 16, et 1 font 17; 17 ôté de 23, il reste 6, et je retiens 2.

2 fois 3 font 6, et 2 font 8; 8 ôté de 11, il reste 3, et je retiens 1.

2 fois 9 font 18, et 1 font 19; 19 ôté de 22, il reste 3, et je retiens 2.

2 fois 5 font 10, et 2 font 12; 12 ôté de 12, il reste 0, et je retiens 1.

2 fois 7 font 14, et 1 font 15; 15 ôté de 20, il reste 5, que je pose.

Je biffe le 8 au diviseur et je continue.

En 50336, combien de fois 7593 : 6 fois.

6 fois 6 font 36, je retiens 2; 6 fois 8 font 48, et 2 font 50; je retiens 5.

6 fois 3 font 18, et 5 font 23; 23 ôté de 26, il reste 3, et je retiens 2.

6 fois 9 font 54, et 2 font 56; 56 ôté de 63, il reste 7, et je retiens 6.

6 fois 5 font 30, et 6 font 36; 36 ôté de 43, il reste 7, et je retiens 4.

6 fois 7 font 42, et 4 font 46; 46 ôté de 50, il reste 4, que je pose.

Je biffe le 3 au diviseur, et je continue :

En 4773, combien de fois 759 : 6 fois.

6 fois 8 font 48, je retiens 5; 6 fois 3 font 18, et 5 font 23; je retiens 2.

6 fois 9 font 54, et 2 font 56; 56 ôté de 63, il reste 7, et je retiens 6.

6 fois 5 font 30, et 6 font 36; 36 ôté de 37, il reste 1, et je retiens 3.

6 fois 7 font 42, et 3 font 45; 45 ôté de 47, il reste 2, que je pose.

Je biffe le 9 au diviseur :

En 217, combien de fois 75 : 2 fois.

2 fois 3 font 6, je retiens 1; 2 fois 9 font 18, et 1 font 19; je retiens 2.

2 fois 5 font 10, et 2 font 12; 12 ôté de 17, il reste 5, et je retiens 1.

2 fois 7 font 14, et 1 font 15; 15 ôté de 21, il reste 6, que je pose.

Je m'arrête là, au moment de biffer l'avant-dernier chiffre du diviseur, et je dis que le quotient à 0,001 près est 62,662.

Il faut établir, en premier lieu, que le quotient exprime bien un nombre de millièmes, et, en second lieu, que le total des erreurs provenant des chiffres négligés au dividende et au diviseur n'atteint pas le chiffre des millièmes.

Pour prouver le premier point, je remarque d'abord que si je n'avais supprimé aucun chiffre, ni au dividende, ni au diviseur, le quotient aurait bien exprimé des millièmes, puisque le dividende représente des millièmes.

Je remarque ensuite que si je supprimais autant de chiffres aux deux facteurs, le nombre des chiffres du quotient resterait le même, et exprimerait toujours des millièmes; or, c'est là précisément ce que j'ai fait, puisque j'ai supprimé, à chacun des deux facteurs, 7 chiffres, c'est-à-dire autant de chiffres qu'il y en a dans le diviseur moins 2.

Donc le quotient exprime bien des millièmes.

Calculons maintenant les erreurs commises.

Au dividende, j'ai négligé 2954,800.

Pour évaluer l'erreur ε que cette négligence produit au quotient, je rappelle que dans toute division le quotient multiplié par le diviseur doit reproduire le dividende; en conséquence, l'erreur ε du quotient, multipliée par le diviseur, doit reproduire l'erreur 2954,800 commise au dividende :

$$\varepsilon \times 759386482 = 2954,800$$

d'où :

$$\varepsilon = \frac{2954,800}{759386482}$$

J'augmente la fraction ci-dessus, en remplaçant son numérateur par la puissance de 10 immédiatement supérieure, et son dénominateur par la puissance de 10 immédiatement inférieure.

De là :

$$\varepsilon < \frac{10000}{100000000} \text{ ou } \frac{1}{10000}.$$

J'arrive maintenant aux erreurs provenant des chiffres négligés au diviseur.

Dans le premier produit partiel, le chiffre du quotient, 6, chiffre de *dizaines*, multiplié par le dernier chiffre négligé au diviseur, 4, chiffre de *centaines*, donnait avec la retenue, 29 *mille* (voir l'explication donnée plus haut de l'opération) : j'ai pris 30 *mille*, commettant ainsi une erreur qui n'atteint pas 5 *mille*. Cette erreur, provenant du produit du diviseur par le quotient, est celle du dividende ; celle e qui en résulte dans le quotient est égale au quotient de cette erreur divisée par le diviseur. Donc :

$$e < \frac{5000}{759386482}$$

à fortiori :

$$e < \frac{5000}{100000000} \text{ ou } \frac{5}{100000}.$$

Dans le second produit partiel, le chiffre du quotient, 2, chiffre d'*unités*, multiplié par le dernier chiffre négligé au diviseur, 6, chiffre de *mille*, donnait avec la retenue 13 *mille :* j'ai pris 10 *mille*, commettant ainsi une erreur qui n'atteint pas 5 *mille*. Celle qui en résulte pour le quotient sera, comme la précédente, inférieure à

$$\frac{5000}{100000000} \text{ ou } \frac{5}{100000}.$$

Il en est de même pour tous les autres produits partiels. Or, 18 erreurs égales à celle-là forment un total de

$$\frac{18 \times 5}{100000} = \frac{90}{100000} = \frac{9}{10000}$$

et celle provenant du dividende étant égale au plus à

$$\frac{1}{10000}$$

leur somme égale

$$\frac{1}{1000}$$

Donc pour que le quotient soit approché à $\frac{1}{1000}$ près, il faut qu'il n'y ait pas plus de 18 erreurs commises au diviseur, c'est-à-dire que le nombre des chiffres du quotient ne dépasse pas 18.

Et encore, en faisant ce raisonnement, je me suis placé dans le cas le plus défavorable, celui où toutes les erreurs seraient de $\frac{5}{100000}$ et de même sens, ce qui n'a jamais lieu, de sorte qu'en réalité l'approximation est plus grande que je ne l'ai avancé.

40. Si le quotient devait avoir plus de 18 chiffres (ce dont il est facile de s'assurer avant de faire l'opération), il faudrait, ainsi que je l'ai dit plus haut, supprimer à la droite du dividende autant de chiffres qu'il y en a dans le diviseur, moins 3; faire l'opération comme précédemment, et s'arrêter au moment de biffer au diviseur le troisième chiffre à partir de la gauche. De la sorte, les erreurs étant rendues 10 fois moindres, il faudrait plus de 198 chiffres au quotient pour que ce dernier ne présentât pas l'approximation demandée.

41. *Remarque I.* — Si l'on voulait diminuer de *un* le nombre des chiffres employés au diviseur, on ne tiendrait compte, dans le premier produit partiel, que de la retenue donnée par le chiffre du quotient multiplié par le dernier chiffre négligé au diviseur, 4, en le forçant à 5, puisque le chiffre de droite n'est pas inférieur à 5.

De la sorte, la première erreur commise pourrait aller à $\frac{1}{10000}$, au lieu de $\frac{5}{100000}$, c'est-à-dire qu'elle serait doublée.

Alors, pour que la somme des erreurs n'atteignît pas $\frac{1}{1000}$, il faudrait qu'il n'y eût pas plus de 16 autres chiffres au quotient, c'est-à-dire pas plus de 17 en tout. S'il y en avait plus, il faudrait supprimer à la droite du dividende autant de chiffres qu'il y en a dans le diviseur moins 3, et s'arrêter dans l'opération au moment de biffer dans le diviseur le troisième chiffre à partir de la gauche; le quotient aurait l'approximation demandée pourvu que le nombre de ses chiffres ne dépassât pas 197.

42. *Remarque II.* — Le reste étant inexact, on ne peut pas, d'après sa valeur, conclure s'il faut ou non forcer le dernier chiffre du quotient. Il vaudra mieux s'abstenir de forcer, à moins que le reste ne soit au moins égal aux $\frac{3}{4}$ du diviseur restant : alors il sera préférable de forcer.

43. *Remarque III.* — Le seul inconvénient que présente la division abrégée, c'est qu'elle n'est susceptible d'aucune preuve.

RACINE CARRÉE ABRÉGÉE.

44. On détermine d'abord combien on veut obtenir de chiffres en tout (entiers et décimaux) à la racine. Quand ce nombre de chiffres est impair, 11, par exemple, on en calcule, par la méthode ordinaire, plus de la moitié, c'est-à-dire 6. Quand il est pair, 12, par exemple, on en calcule, par la méthode ordinaire, la moitié, 6, si le premier chiffre de la racine est égal ou supérieur à 5; et on en calcule un de plus, c'est-à-dire 7, si ce premier chiffre est inférieur à 5.

Cela fait, on abaisse à la droite du reste autant de chiffres qu'il y en a encore à calculer à la racine, et on divise le nombre ainsi obtenu par le double de la partie déjà calculée à la racine, en employant la méthode de la division abrégée, à une unité près [1].

---

1. Démonstration algébrique de cette extraction de racine carrée.

Je vais exposer cette théorie en supposant la racine calculée à une unité près : le même raisonnement s'applique aux racines calculées à un ordre décimal donné.

Soit N le nombre dont on veut extraire la racine carrée ; a, la partie calculée à cette racine par la méthode ordinaire; b, la partie qui reste à calculer.

J'ai :

$$N = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

d'où :

$$N - a^2 = 2ab + b^2.$$

Or $N - a^2$ est le reste R du nombre quand on a calculé la partie a de la racine ; donc :

$$R = 2ab + b^2$$

d'où :

$$b = \frac{R}{2a} - \frac{b^2}{2a}.$$

Pour que la partie entière de b soit égale à celle de

$$\frac{R}{2a}$$

ou, pour que b soit égal, à une unité près, au quotient de R par $2a$, il faut avoir:

$$\frac{b^2}{2a} < 1 \quad \text{ou} \quad b^2 < 2a.$$

Ici il peut se présenter deux cas :

1° La racine a un nombre impair de chiffres, $2n + 1$.

Si j'en calcule par la méthode ordinaire $n + 1$, b en aura n, b^2 en aura au plus $2n$, tandis que a en ayant $2n + 1$ ($n + 1$ calculés, suivis de n zéros), $2a$ en aura au moins $2n + 1$.

Donc

$$b^2 < 2a.$$

2° La racine a un nombre pair de chiffres, $2n$.

45. Soit à extraire la racine carrée de 5 à 0,00000001 près.

Comme j'ai 9 chiffres à calculer en tout, puisqu'il y en a 1 à la partie entière, je vais en calculer 5 par la méthode ordinaire. Puis, quand ils seront obtenus, j'écrirai 4 zéros à la droite du reste, puisqu'il y aura encore 4 chiffres à calculer à la racine, et je diviserai le reste ainsi modifié par le double de la partie déjà obtenue à la racine.

$$
\begin{array}{r|l}
5 & 2{,}2360 \\ \cline{2-2}
100 & 42 \\
1600 & 2 \\ \cline{2-2}
27100 & 443 \\
30400 & 3 \\ \cline{2-2}
 & 4466 \\
 & 6 \\ \cline{2-2}
 & 44720
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
304000\cancel{000} & 44\cancel{720} \\ \cline{2-2}
35680 & 6797 \\
4376 & \\
351 & \\
38 &
\end{array}
$$

La racine carrée est 2,23606798 par excès.

46. Autre exemple. Soit à extraire la racine carrée de la fraction périodique 0,00543654365436..... à 0,000000001 près.

Si j'en calcule par la méthode ordinaire $n+1$, b en aura $n-1$, b^2 en aura au plus $2n-2$, tandis que a en ayant $2n$, $2a$ en aura au moins $2n$.

Donc encore

$$b^2 < 2a.$$

Remarquons que, dans ce cas, si le premier chiffre de a est > 5, il suffira de calculer directement n chiffres à la racine. En effet, alors b en aura n, b^2 en aura $2n$ au plus; et a en ayant $2n$, $2a$ en aura $2n+1$; car le double du premier chiffre de a donnant 2 chiffres, $2a$ aura nécessairement un chiffre de plus que a.

Donc, là encore

$$b^2 < 2a.$$

Il faut donc, quand on a calculé $n+1$ ou n chiffres, suivant le cas, diviser le reste R par le double de la partie déjà calculée à la racine, mais en tenant compte de la place que ces deux nombres occuperaient dans l'opération complète.

Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, le reste 30400 doit s'écrire 3040000000000 avec 8 zéros de plus, puisqu'il y a encore 4 chiffres à calculer à la racine; et le double de la partie calculée à cette racine par la méthode ordinaire, 44720, doit s'écrire avec 4 zéros de plus : 447200000.

Il revient au même d'abaisser simplement 4 zéros à la droite du reste, c'est-à-dire autant qu'il y a encore de chiffres à calculer à la racine.

L'énoncé de la règle donnée ci-dessus est donc parfaitement justifié dans tous les cas.

Le premier chiffre décimal de la racine devant être un zéro, j'ai donc 8 chiffres à calculer en tout : comme le premier chiffre de la racine est plus grand que 5 évidemment, je calculerai 4 chiffres par la méthode ordinaire, et 4 par la division abrégée.

0,005436543654365436	7373
536	143
10754	3
48536	1467
4307	7
	14743
	3
	14746

430754~~36~~	14746
13583	2921
312	
17	
2	

La racine cherchée est 0,073732921.

RACINE CUBIQUE ABRÉGÉE.

47. On détermine d'abord combien on veut obtenir de chiffres en tout (entiers et décimaux) a la racine. Quand ce nombre de chiffres est impair, 11, par exemple, on en calcule, par la méthode ordinaire, plus de la moitié, c'est-à-dire 6; ou encore un chiffre de plus, 7, si le premier chiffre de la racine est égal à 1.

Quand il est pair, 12, par exemple, on en calcule par la méthode ordinaire la moitié plus un, c'est-à-dire 7.

Cela fait, on abaisse à la droite du re te autant de chiffres qu'il y en a encore à calculer à la racine, et on divise le nombre ainsi obtenu par 3 fois le carré de la partie déjà calculée à la racine en employant la méthode de la division abrégée, à une unité près[1]

---

1. Démonstration algébrique de cette extraction de racine cubique.

J'expose cette théorie, comme la précédente, en supposant la racine calculée à une unité près.

Soit N le nombre dont on veut avoir la racine cubique ; a la partie calculée à cette racine par la méthode ordinaire; b la partie qui reste à calculer.

J'ai :

$$N = (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

48. Soit à extraire la racine cubique de π à 0,00001 près (π est le rapport de la circonférence au diamètre et égal à 3,14159265358979....)

---

d'où :

$$N - a^3 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Or $N - a^3$ est le reste R du nombre, quand on a calculé la partie a de la racine; donc

$$R = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

d'où :

$$b = \frac{R}{3a^2} - \frac{3ab^2}{3a^2} - \frac{b^3}{3a^2} = \frac{R}{3a^2} - \frac{b^2}{a} - \frac{b^2}{a} \times \frac{b}{3a}.$$

Pour que la partie entière de b soit égale à celle de

$$\frac{R}{3a^2}$$

ou, pour que b soit égal, à une unité près, au quotient de R par $3a^2$ il faut avoir

$$\frac{b^2}{a} + \frac{b^2}{a} \times \frac{b}{3a} < 1.$$

Je vais démontrer que cette condition est remplie, si

$$\frac{2b^2}{a} < 1 \text{ ou } b^2 < \frac{a}{2}.$$

En effet, j'aurai alors à fortiori

$$b < 3a \text{ ou } \frac{b}{3a} < 1$$

et

$$\frac{b^3}{a} \times \frac{b}{3a} < \frac{b^2}{a}.$$

De là

$$\frac{b^2}{a} + \frac{b^2}{a} \times \frac{b}{3a} < \frac{b^2}{a} + \frac{b^2}{a} \text{ ou } \frac{2b^2}{a} < 1$$

et à fortiori :

$$\frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a} \times \frac{b}{3a} < 1.$$

Donc, en résumé, il faut avoir :

$$b^2 < \frac{a}{2}.$$

Ici il peut se présenter deux cas :

1° La racine a un nombre impair de chiffres, $2n + 1$.

Si le premier chiffre de la racine est plus grand que 1, j'en calculerai directement $n + 1$; b en aura n, b^2 en aura au plus $2n$, tandis que a en ayant $2n + 1$, $\frac{a}{2}$ en aura de même $2n + 1$, puisque la division par 2 de la racine calculée directement n'en diminuera pas le nombre de chiffres.

Donc

$$b^2 < \frac{a}{2}.$$

Si, au contraire, le premier chiffre de la racine est 1, en la divisant par 2 le nombre de ses chiffres diminuera de 1, et alors $\frac{a}{2}$ ayant n chiffres comme b^2, je ne puis affirmer qu'il soit plus grand. Dans ce cas, il faudra calculer directement $n + 2$ chiffres; b en aura $n - 1$, b^2 au plus $2n - 2$, et alors il sera plus petit que $\frac{a}{2}$.

La partie entière contenant 1 chiffre, il y aura 6 chiffres à calculer en tout, 4 par la méthode ordinaire et 2 par la division abrégée.

$$
\begin{array}{l|l}
3{,}1415926538979\ldots. & 1{,}464 \\ \cline{2-2}
2\ 141 & 300 \\
\quad 397592 & 120 \\
\quad\ \ 29456653 & \ \ 16 \\ \cline{2-2}
\quad\quad 3807309 & 436 \times 4 \\
 & \ \ 16 \\ \cline{2-2}
 & 58800 \\
 & \ \ 2520 \\
 & \quad\ 36 \\ \cline{2-2}
 & 61356 \times 6 \\
 & \quad\ 36 \\ \cline{2-2}
 & 6394800 \\
 & \quad 17520 \\
 & \qquad\ 16 \\ \cline{2-2}
 & 6412336 \times 4 \\
 & \qquad\ 16 \\ \cline{2-2}
 & 6429888
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
3807\cancel{3}\cancel{0}9\cancel{8}\cancel{9} & 642\cancel{9}\cancel{8}\cancel{8}\cancel{8} \\ \cline{2-2}
592 & 59 \\
13 &
\end{array}
$$

La racine cherchée est 1,46459.

2° La racine a un nombre pair de chiffres, $2n$.

Si j'en calcule directement $n+1$, b en aura $n-1$, b^2 au plus $2n-2$, tandis que a en ayant $2n$, $\frac{a}{2}$ en aura au moins $2n-1$.

Donc encore

$$b^2 < \frac{a}{2}.$$

Il faut donc, quand on a calculé $n+2$ ou $n+1$ chiffres, suivant le cas, diviser le reste R par trois fois le carré de la partie déjà calculée à la racine, mais en tenant compte de la place que ces deux nombres occuperaient dans l'opération complète.

Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, le reste 3807309 doit être complété de la manière suivante, 3807309589793, en abaissant 6 chiffres, puisqu'il y a encore 2 chiffres à calculer à la racine; et le triple carré de la partie déjà calculée à la racine, 6429888, s'écrira 64298880000, avec 4 zéros de plus à droite.

Il revient au même d'abaisser simplement 2 chiffres à la droite du reste, c'est-à-dire autant qu'il y a encore de chiffres à calculer à la racine.

L'énoncé de la règle donnée ci-dessus est donc parfaitement justifié dans tous les cas.

CHAPITRE V.

APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES.

APPLICATIONS DE LA MULTIPLICATION ABRÉGÉE.

49. *Produit de deux nombres exacts.*

C'est ce que j'ai fait au n° 34. Je vais en donner un autre exemple.

Soit à multiplier 0,00079854064 par 0,008593427 à 0,000000001 près.

Je place le zéro des unités du multiplicateur sous le 10^e chiffre décimal du multiplicande.

```
   0,000798540 64
     724395800,0
-----------------
      63883
       3993
        719
         24
          3
-----------------
0,0000068622
```

Le produit demandé est 0,000006862 à 0,000000001 près.

50. *Produit d'un nombre approché par un nombre exact.*

Je prends le nombre approché comme multiplicande, et je dispose l'opération comme dans le cas précédent; mais, avant de la faire, je vais déterminer combien je dois prendre de chiffres au multiplicande.

Soit à multiplier π (3,14159265358979...) par 753,2589 à 0,0001 près.

Le nombre approché étant multiplié par un nombre compris entre 100 et 1000, l'erreur du produit sera égale à celle du multiplicande, multipliée par un nombre compris entre 100 et 1000; elle sera donc inférieure à 1000 fois celle du multiplicande. Par conséquent, pour qu'elle n'atteigne pas 0,0001, il faut que celle du multiplicande n'atteigne pas la millième de partie de 0,0001 c'est-à-dire 0,0000001.

Il faudra donc prendre ce dernier avec 7 décimales, c'est-à-dire avec un nombre de chiffres décimaux égal à l'ordre de l'approximation demandée, plus le nombre des chiffres entiers du multiplicateur :

$$4 + 3 = 7$$

Mais, d'après l'opération (n° 34), on voit que, lorsqu'on a placé les chiffres du multiplicateur renversé sous ceux du multiplicande, on emploie, dans ce dernier, pour le calcul des retenues, 2 chiffres à droite de celui sous lequel se trouve le chiffre de l'ordre le plus élevé dans le multiplicateur.

Or, dans l'exemple donné, les 7 centaines du multiplicateur (chiffre de l'ordre le plus élevé) devant être placées sous le 7^e chiffre décimal du multiplicande, il faudra en prendre 9 dans ce facteur; ou, comme (Rem. I, n° 36) le multiplicateur n'a pas plus de 18 chiffres, on peut en conserver 1 de moins au multiplicande, par conséquent 8 chiffres décimaux seulement.

Voici l'opération :

$$\begin{array}{r}
3{,}1415\ 9265\\
9852{,}357\\
\hline
219911485\\
15707963\\
942478\\
62832\\
15708\\
2513\\
283\\
\hline
2366{,}43262
\end{array}$$

Le produit est 2366,4326 à 0,0001 près.

51. *Autre exemple.*

Soit à multiplier la fraction périodique 47,234234234....... par 0,000895432 à 0,000001 près.

Le nombre approché étant multiplié par un nombre compris entre 0,001 et 0,0001, l'erreur du produit sera égale à celle du multiplicande, multipliée par un nombre compris entre 0,001 et 0,0001; elle sera donc inférieure à la millième partie de celle du multiplicande. Donc pour qu'elle n'atteigne pas 0,000001, il faut que celle du multiplicande n'atteigne pas 1000 fois 0,000001, c'est-à-dire 0,001.

Par conséquent, il faudra prendre ce dernier avec 3 décimales, c'est-à-dire avec un nombre de chiffres décimaux égal à l'ordre de l'approximation demandée, moins le nombre de zéros qui suivent la virgule, au multiplicateur :

$$6 - 3 = 3.$$

A cause des retenues, je prendrai 1 chiffre de plus, c'est-à-dire 4, puisque le multiplicateur n'a pas plus de 18 chiffres (Rem. I, n° 36).

$$\begin{array}{r}
47{,}2342 \\
234\ 598000{,}0 \\
\hline
377874 \\
42511 \\
2362 \\
189 \\
14 \\
1 \\
\hline
0{,}0422951
\end{array}$$

Le produit est 0,042295 à 0,000001 près.

52. *Produit de deux nombres approchés.*

Soit à multiplier la fraction périodique 475,387612387612...... par 2,718281828459045..... (nombre représenté en algèbre par la lettre e), à 0,00001 près.

En appliquant le raisonnement précédent à chacun des facteurs considéré successivement comme multiplicande, je vois que je devrai prendre au premier

$$5 + 1 \text{ ou } 6 \text{ décimales}$$

et au second

$$5 + 3 \text{ ou } 8 \text{ décimales};$$

et, à cause des retenues, comme chacun d'eux a moins de 18 chiffres en tout, 1 chiffre en plus.

Donc je prendrai le premier avec 7 décimales, et le second avec 9.

$$\begin{array}{r}
475{,}38761\ 24 \\
8281\ 82817{,}2 \\
\hline
950\ 77522\ 5 \\
332\ 77132\ 9 \\
4\ 75387\ 6 \\
3\ 80309\ 1 \\
9507\ 8 \\
3803\ 1 \\
47\ 5 \\
38\ 0 \\
1\ 0 \\
3 \\
\hline
1292{,}23749\ 8
\end{array}$$

(En forçant le dernier chiffre conservé, le suivant étant un 8.)

Le dernier chiffre du produit étant 8, il est préférable de forcer le précédent; ce qui donne 1292,23750 à 0,00001 près.

53. *Produit de plus de deux nombres approchés.*

Soit à effectuer le produit suivant à 0,000001 près :

$$\sqrt{4450} \times \pi \times 0{,}0000549549\ldots \text{ (fraction périodique).}$$

Comme il peut y avoir plus de 18 chiffres dans les multiplicateurs des deux multiplications que j'aurai à faire, mais qu'il y en aura certainement moins que 198 (Rem. I, n° 36), je ferai le calcul en plaçant dans chaque opération le chiffre des unités du multiplicateur *deux rangs à droite* plus loin que celui occupé dans le multiplicande par le chiffre de l'ordre de l'approximation demandée : autrement dit, je calculerai le produit avec une décimale de plus qu'on ne demande, c'est-à-dire avec 7.

Avec cette modification, je vais appliquer le raisonnement précédent à chacun des facteurs, considéré successivement comme multiplicande.

$\sqrt{4450}$ étant multiplié par un nombre compris entre 0,001 et 0,0001 (le produit de π par la fraction périodique donne à première vue environ 0,00016), devra être calculé avec un nombre de chiffres décimaux égal à

$$7 - 3 \text{ ou } 4. \qquad \text{(N° 51)}$$

π étant multiplié par un nombre compris entre 0,01 et 0,001 ($\sqrt{4450}$ égale à peu près 67 et son produit par la fraction périodique vaut environ 0,00340), devra être conservé avec un nombre de chiffres décimaux égal à

$$7 - 2 \text{ ou } 5. \qquad \text{(N° 51)}$$

Enfin la fraction périodique 0,0000549549.... étant multipliée par un nombre compris entre 100 et 1000 (le produit de π par $\sqrt{4450}$ vaut à peut près 200), devra être conservée avec un nombre de chiffres décimaux égal à

$$7 + 3 \text{ ou } 10. \qquad \text{(N° 50)}$$

Remarquons maintenant que, à cause des retenues dans chaque multiplication, les facteurs doivent être calculés avec 1 chiffre de plus (puisque les multiplicateurs ont moins de 198 chiffres à eux tous); par conséquent, je conserverai à $\sqrt{4450}$ 5 décimales, à π 6, et à la fraction périodique 11

Quant aux places que doivent occuper les chiffres des multiplicateurs sous ceux des multiplicandes, je remarque qu'il suffit d'écrire le premier chiffre significatif de droite dans chaque multiplicateur sous le second de droite dans le multiplicande (le premier étant employé seulement pour les retenues), et de placer en conséquence les autres chiffres du multiplicateur. Le produit final devra se trouver ainsi calculé avec 2 décimales de plus que l'approximation demandée, une à cause des retenues, et une autre parce que le calcul est fait avec l'approximation d'une décimale de plus que ce n'était demandé.

Je fais maintenant les opérations.

Je cherche d'abord $\sqrt{4450}$ par la méthode abrégée. Comme j'ai à l'obtenir avec 5 décimales, et qu'elle a 2 chiffres entiers, j'ai à en calculer 7 chiffres, 4 par la méthode ordinaire, et 3 par la division abrégée (n° 44).

$$
\begin{array}{r|l}
44500000 & 6670 \\
850 & \overline{126} \\
9400 & 6 \\
11100 & \overline{1327} \\
 & 7 \\
 & \overline{13340}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
11100\cancel{9}\cancel{0}\cancel{0} & 13\cancel{3}\cancel{4}\cancel{9} \\
428 & \overline{832} \\
28 & \\
1 &
\end{array}
$$

La racine est 66,70832.

J'effectue maintenant les multiplications :

$$
\begin{array}{r}
66{,}708\ 32 \\
395\ 141{,}3 \\
\hline
200\ 125\ 0 \\
6\ 670\ 8 \\
2\ 668\ 3 \\
66\ 7 \\
33\ 4 \\
6\ 0 \\
1 \\
\hline
209{,}570\ 3000\ 0 \\
5945\ 945\ 0000{,}0 \\
\hline
1047\ 851\phantom{\ 0000{,}0} \\
83\ 828\phantom{\ 0000{,}0} \\
18\ 861\phantom{\ 0000{,}0} \\
1\ 048\phantom{\ 0000{,}0} \\
84\phantom{\ 0000{,}0} \\
19\phantom{\ 0000{,}0} \\
1\phantom{\ 0000{,}0} \\
\hline
0{,}01151\ 692\phantom{\ 0000{,}0}
\end{array}
$$

(Je force le 1er chiffre à gauche parce que le chiffre négligé qui suit, est un 6.)

Le produit demandé est 0,011517 à 0,000001 près par excès.

APPLICATIONS DE LA DIVISION ABRÉGÉE.

54. *Quotient de deux nombres exacts.*

C'est ce que j'ai fait au n° 39. Je vais en donner un autre exemple. Soit à diviser 9,498543673147215 par 0,0076983256 à 0,0001 près.

$$
\begin{array}{r|l}
9{,}49854367\,3\cancel{1}{,}\cancel{47215} & 0{,}00769\cancel{83256} \\
\cline{2-2}
1\;80021807 & 1233{,}8454 \\
26055295 & \\
2960318 & \\
650820 & \\
34954 & \\
4161 & \\
312 & \\
4 &
\end{array}
$$

Le quotient à 0,0001 près est 1233,8454.

Dans cet exemple, je ferai les remarques suivantes :

1° Après avoir rendu entier le diviseur, et, par suite, transporté, la virgule du dividende de 10 rangs vers la droite, il reste au dividende ainsi modifié 5 chiffres décimaux; comme je n'en ai besoin que de 4 dans l'approximation demandée, je supprime le 5ᵉ chiffre décimal du dividende.

2° Après la suppression de 6 chiffres au dividende, il en reste 9, c'est-à-dire plus qu'il n'en faut pour que le diviseur y soit contenu au moins une fois : je fais, dans ce cas, la division par la méthode ordinaire, en abaissant à chaque opération un chiffre du dividende restant, et je ne commence à employer la méthode abrégée que lorsque je n'ai plus dans ce dividende de chiffre à abaisser; alors j'en supprime un au diviseur et je continue comme il est expliqué au n° 39.

55. *Quotient d'un nombre approché par un nombre exact.*

Soit π à diviser par 748,5649 à 0,000000001 près.

Le diviseur étant compris entre 100 et 1000, l'erreur du quotient sera égale à celle du dividende, divisée par un nombre compris entre 100 et 1000; elle sera donc inférieure à la centième partie de celle du dividende; alors pour qu'elle n'atteigne pas 0,000000001, il faut que celle du dividende n'atteigne pas 100 fois 0,000000001 ou 0,0000001. Donc il faut calculer ce dernier avec 7 décimales, c'est-à-dire avec un nombre de chiffres décimaux égal à l'ordre de l'approximation demandée, moins le nombre des chiffres entiers du diviseur, plus un :

$$9 - 3 + 1 = 7.$$

$$\begin{array}{r|l}
3,1415,9260\cancel{00000} & 74\cancel{8,5649} \\ \cline{2-2}
1473\ 3300 & 4196820 \\
724\ 7651 & \\
51\ 0567 & \\
6\ 1428 & \\
1543 & \\
46 &
\end{array}$$

Le quotient demandé est 0,004196821 à 0,000000001 près par excès.

56. *Autre exemple.* — Soit à diviser e ($e = 2,718281828459045....$) par 0,00094653814 à 0,001 près.

Le diviseur étant compris entre 0,001 et 0,0001, l'erreur du quotient sera égale à celle du dividende, divisée par un nombre compris entre 0,001 et 0,0001; elle sera donc inférieure à 10 000 fois celle du dividende ; alors pour qu'elle n'atteigne pas 0,001, il faut que celle du dividende n'atteigne pas la dix-millième partie de 0,001 ou 0,0000001. Donc il faut calculer ce dernier avec 7 décimales, c'est-à-dire avec un nombre de chiffres décimaux égal à l'ordre de l'approximation demandée, plus le nombre de zéros contenus dans le diviseur, à droite et à gauche de la virgule :

$$3 + 4 = 7.$$

$$\begin{array}{r|l}
2,71828180\cancel{000},\cancel{000} & 0,00094\cancel{653814} \\ \cline{2-2}
82520552 & 2871814 \\
6797501 & \\
171734 & \\
77080 & \\
1357 & \\
410 & \\
31 &
\end{array}$$

Le quotient demandé est 2871,814 à 0,001 près.

57. *Quotient de deux nombres approchés.*

Soit à diviser $\sqrt[3]{456839421,75}$ par e ($e = 2,7182818284590....$) à 0,00001 près.

En se reportant à l'opération de la division abrégée (nº 39), on voit que, lorsque les deux facteurs contiennent plus de chiffres que l'opération n'en exige, le nombre des chiffres conservés au diviseur égale le nombre des chiffres du quotient, plus un; et que celui des chiffres conservés au dividende est égal à celui des chiffres conservés au diviseur, ou à ce nombre plus un; en un mot, le dividende conservé doit contenir au moins 1 fois et au plus 9 fois le diviseur conservé.

Il faut donc, avant tout, déterminer le nombre de chiffres que le quotient devra avoir.

La racine cubique, dans l'exemple donné, est comprise entre 700 et 800; son quotient par e ($e = 2,718281828459045....$) sera compris entre 100 et 1000, c'est-à-dire aura 3 chiffres entiers; comme je dois le calculer avec 5 décimales, il aura 8 chiffres en tout (entiers et décimaux). Donc je devrai en prendre 9 en tout au diviseur, et comme le premier chiffre du dividende est plus grand que le premier du diviseur (ce dont il est aisé de s'assurer), je prendrai également 9 chiffres au dividende.

Seulement, à cause des retenues dont il faut tenir compte dans le produit du diviseur par le quotient (Rem. I, n° 41), comme ce dernier n'a pas plus de 17 chiffres, je prendrai un chiffre de plus au diviseur, c'est-à-dire 10.

Je fais maintenant les opérations.

Dans l'extraction de la racine cubique que je dois faire avec 9 chiffres, j'en calcule 5 par la méthode ordinaire, et 4 par la division abrégée, puisque le premier chiffre de cette racine est plus grand que 1 (n° 47).

456839421,75	77017
113839	14700
306421 750	1470
128528 649000	49
3975 986087	16219 × 7
	49
	177870000
	23100
	1
	177893101 × 1
	1
	17791620300
	1617210
	49
	17793237559 × 7
	49
	17794854867

$$
\begin{array}{r|l}
39759\cancel{860870000} & 17\cancel{794854867} \\
\cline{2-2}
4169 & 2234 \\
610 & \\
76 & \\
5 &
\end{array}
$$

La racine cubique est 770,172234.

Je fais maintenant la division demandée :

$$
\begin{array}{r|l}
770,172234\cancel{000},\cancel{00000} & 2,71\cancel{8281828} \\
\cline{2-2}
226\ 515868 & 28333053 \\
9\ 053322 & \\
898477 & \\
82992 & \\
1444 & \\
85 & \\
3 &
\end{array}
$$

Le quotient cherché est 283,33053 à 0,00001 près.

58. *Quotient d'un nombre exact par un nombre approché.*

Ce cas rentre dans le précédent. Si le dividende ne contient pas assez de chiffres, on écrit à sa droite le nombre de zéros nécessaires à l'opération, et le calcul se fait absolument comme celui du n° 57.

LIVRE II

INTÉRÊTS SIMPLES. — ESCOMPTES. — TENUE DE LIVRES. — COMPTES COURANTS. — ALLIAGES. — MONNAIES.

L'étude des matières qui font l'objet de ce livre exige la connaissance des principales propriétés des rapports et proportions, ainsi que celle de la règle de trois. Je vais les exposer brièvement.

CHAPITRE PREMIER.

RAPPORTS ET PROPORTIONS.

Rapports.

59. On appelle *rapport* d'une quantité à une autre la valeur de la première quand la seconde est prise pour unité, ou bien le quotient de la première par la seconde, quand elles sont exprimées toutes deux à l'aide de la même unité.

Ces deux définitions sont identiques.

Il en résulte que les rapports sont de véritables fractions et jouissent des mêmes propriétés que ces dernières.

Ils ont, de plus, quelques propriétés particulières que je vais développer.

60. Étant donnés plusieurs rapports égaux, si l'on fait la somme des numérateurs et celle des dénominateurs, le rapport qu'elles forment est égal à l'un des rapports proposés.

Soit :

$$\frac{4}{7} = \frac{8}{14} = \frac{16}{28} = \frac{24}{42}$$

je dis que le rapport

$$(1) \qquad \frac{4+8+16+24}{7+14+28+42}$$

sera égal à l'un quelconque des rapports donnés.

En effet, soit q la valeur de chacun d'eux, de l'égalité

$$\frac{4}{7}=\frac{8}{14}=\frac{16}{28}=\frac{24}{42}=q$$

je tire :

$$\begin{aligned} 4 &= 7 \times q \\ 8 &= 14 \times q \\ 16 &= 28 \times q \\ 24 &= 42 \times q \end{aligned}$$

d'où en additionnant : $4+8+16+24=(7+14+28+42)q.$

En remplaçant dans le rapport (1) le numérateur

$$4+8+16+24$$

par l'expression

$$(7+14+28+42)q$$

qui lui est égale, ce rapport (1) deviendra

$$\frac{(7+14+28+42)q}{7+14+28+42}=q.$$

Il a donc la même valeur que l'un quelconque des rapports donnés.

61. Étant donnés plusieurs rapports égaux, si l'on ajoute ou si l'on retranche entre eux les numérateurs ainsi que les dénominateurs des mêmes rapports, le nouveau rapport que forment les résultats ainsi obtenus est égal à l'un quelconque des rapports donnés.

Soit

$$\frac{4}{7}=\frac{8}{14}=\frac{16}{28}=\frac{24}{42}=q$$

je dis que le rapport

$$(2) \qquad \frac{4+8-16+24}{7+14-28+42}$$

égalera aussi q.

En effet :

$$\begin{aligned} 4 &= 7 \times q \\ 8 &= 14 \times q \\ 16 &= 28 \times q \\ 24 &= 42 \times q \end{aligned}$$

Si je fais la somme de la 1re, de la 2e et de la 4e égalité, et si j'en retranche la 3e, membre à membre, j'obtiendrai :

$$4 + 8 - 16 + 24 = (7 + 14 - 28 + 42)\, q.$$

En remplaçant dans le rapport (2), le numérateur

$$4 + 8 - 16 + 24$$

par l'expression

$$(7 + 14 - 28 + 42)\, q$$

qui lui est égale, ce rapport (2) deviendra

$$\frac{(7 + 14 - 28 + 42)\, q}{7 + 14 - 28 + 42} = q.$$

Il y a donc la même valeur que l'un quelconque des rapports donnés.

62. Deux rapports sont dits *inverses*, quand le numérateur du premier est le dénominateur du second, et que le dénominateur du premier est le numérateur du second.

Ainsi

$$\frac{4}{7} \quad \text{et} \quad \frac{7}{4}$$

sont deux rapports inverses.

Le produit de deux rapports inverses est toujours égal à 1.

Proportions.

63. On appelle *proportion* l'égalité de deux rapports.

Le numérateur du premier rapport et le dénominateur du second s'appellent *termes extrêmes*, le dénominateur du premier rapport et le numérateur du second s'appellent *termes moyens*.

Quand on a une suite de rapports égaux, on a plusieurs proportions : leur nombre est égal à celui des rapports, moins un.

Ainsi la suite

$$\frac{4}{7}=\frac{8}{14}=\frac{16}{28}=\frac{24}{42}$$

forme trois proportions, puisqu'on peut égaler successivement le premier de ces rapports à chacun des trois autres.

64. Dans une proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

Soit :

$$\frac{4}{7}=\frac{8}{14}.$$

Je réduis ces deux rapports au même dénominateur; j'obtiens

$$\frac{4\times 14}{7\times 14}=\frac{8\times 7}{14\times 7}.$$

Les dénominateurs étant égaux, les numérateurs le seront nécessairement, puisque les fractions sont égales.

Donc :

$$4\times 14=8\times 7.$$

65. Réciproquement, si quatre nombres sont tels que le produit de deux d'entre eux égale le produit des deux autres, ces quatre nombres peuvent être mis en proportion.

Soit :

$$4\times 14=7\times 8.$$

Je divise les deux membres de cette égalité par le produit

$$7\times 14.$$

J'aurai :

$$\frac{4\times \cancel{14}}{7\times \cancel{14}}=\frac{\cancel{7}\times 8}{\cancel{7}\times 14}$$

ou, en simplifiant

$$\frac{4}{7}=\frac{8}{14}.$$

66. Étant donnés trois termes d'une proportion, en trouver le quatrième, x.

Soit :

$$4 \quad 8$$

Comme

$$4 \times x = 7 \times 8 \qquad (\text{N}^\circ\ 64)$$

j'en tire :

$$x = \frac{7 \times 8}{4}.$$

67. Lorsque dans une proportion un même nombre occupe la place des deux moyens ou celle des deux extrêmes, il est appelé moyenne proportionnelle ou moyenne géométrique entre les deux autres.

Voici comment se calcule cette moyenne proportionnelle.

Soit la proportion

$$\frac{8}{x} = \frac{x}{18}$$

dans laquelle x est la moyenne proportionnelle entre 8 et 18.

De cette proportion je tire

$$x^2 = 8 \times 18 \qquad (\text{N}^\circ\ 64)$$

d'où

$$x = \sqrt{8 \times 18} = \sqrt{144} = 12.$$

68. Lorsque quatre nombres forment une proportion, ils peuvent former trois autres proportions.

Soit la proportion

$$\frac{4}{7} = \frac{8}{14}$$

Je peux changer l'ordre des termes comme il me conviendra, pourvu que j'aie toujours le même produit pour les moyens et pour les extrêmes.

Je change d'abord les moyens de place entre eux : j'ai

$$\frac{4}{8} = \frac{7}{14}$$

puis les extrêmes :

$$\frac{14}{7} = \frac{8}{4}$$

ensuite je mets les moyens à la place des extrêmes, et les extrêmes à la place des moyens, autrement dit, je renverse chaque rapport :

$$\frac{7}{4} = \frac{14}{8}$$

ce qui forme une quatrième proportion.

CHAPITRE II

RÈGLE DE TROIS.

69. On appelle *quantités directement proportionnelles* des quantités qui varient suivant un même rapport, c'est-à-dire qui deviennent ensemble 2, 3, 4...... fois plus grandes ou plus petites.

On appelle *quantités inversement proportionnelles* des quantités qui varient en rapport inverse les unes des autres, c'est-à dire telles que si les unes deviennent 2, 3, 4...... fois plus grandes, les autres deviennent 2, 3, 4...... fois plus petites.

70. La *règle de trois simple* est un problème dans lequel trois quantités sont données, et une est demandée, ces quatre quantités étant proportionnelles, directement ou inversement.

Cette règle se résout, soit par la réduction à l'unité, soit par les proportions.

Exemple : 225 ouvriers font 375 mètres d'un ouvrage en un certain temps. Combien faudra-t-il d'ouvriers pour faire dans le même temps 425 mètres du même ouvrage ?

1° Méthode de la réduction à l'unité.

375 mètres sont faits par. . . . . 225 ouvriers.

1 mètre est fait par 375 fois moins, ou. . $\dfrac{225}{375}$ ouvriers.

425 mètres sont faits par 425 fois plus, ou $\dfrac{225 \times 425}{375}$ ouvriers.

$$\frac{\overset{\overset{3\ \cancel{9}}{\cancel{45}}}{\cancel{225}} \times \overset{85}{\cancel{425}}}{\underset{\underset{\cancel{15}\ \cancel{5}}{\cancel{75}}}{\cancel{375}}} = 3 \times 85 = 255.$$

2° Méthode des proportions.

Les nombres d'ouvriers et de mètres étant directement proportionnels, j'aurai, en appelant x le nombre cherché :

$$\frac{225}{x} = \frac{375}{425}$$

D'où (n° 66) :

$$x = \frac{225 \times 425}{375} = 255.$$

71. Autre exemple. 350 ouvriers font un certain travail en 180 jours; combien 465 ouvriers mettront-ils de jours pour faire le même travail ?

1° Méthode de la réduction à l'unité.

350 ouvriers pour faire le travail emploient . . . . 180 jours.
1 ouvrier pour faire le travail emploie 350 fois plus, ou 180×350 jours.
465 ouvriers pour faire le travail emploient 465 fois moins, ou $\frac{180 \times 350}{465}$ jours.

$$\frac{\overset{\overset{12}{\cancel{36}}}{\cancel{180}} \times 350}{\underset{\underset{31}{\cancel{93}}}{\cancel{465}}} = \frac{12 \times 350}{31} = \frac{4200}{31} = 135 \text{ jours et demi.}$$

2° Méthode des proportions.

Les nombres d'ouvriers et de jours étant inversement proportionnels, j'aurai, en appelant x le nombre cherché

$$\frac{350}{465} = \frac{x}{180}$$

d'où (n° 66)

$$x = \frac{350 \times 180}{465} = 135 + \frac{1}{2}.$$

72. Lorsque, dans cette sorte de problème, il y a plus de quatre quantités, la règle prend alors le nom de *règle de trois composée*. On emploie deux méthodes principales pour la résoudre : la méthode de la réduction à l'unité, et la méthode des quantités proportionnelles, tout à fait analogue à celle des proportions, mais beaucoup plus simple.

Exemple : 180 ouvriers en 325 jours font 450 mètres d'un certain ouvrage, en travaillant 9 heures par jour. Combien 225 ouvriers mettront-ils de jours pour faire 625 mètres du même ouvrage, en travaillant 8 heures par jour ?

1° Méthode de la réduction à l'unité.

180 ouvriers pour faire 450 mètres en travaillant 9 heures par jour emploient 325 jours.

1 ouvrier pour faire 450 m. en travaillant 9 h. par jour emploie 180 fois plus, ou 325×180 jours.

1 ouvrier pour faire 1 m. en travaillant 9 h. par jour emploie 450 fois moins,

$$\text{ou } \frac{325 \times 180}{450} \text{ jours.}$$

1 ouvrier pour faire 1 m. en travaillant 1 h. par jour emploie 9 fois plus,

$$\text{ou } \frac{325 \times 180 \times 9}{450} \text{ jours.}$$

225 ouv. pour faire 1 m. en travaillant 1 h. par jour emploient 225 fois moins,

$$\text{ou } \frac{325 \times 180 \times 9}{450 \times 225} \text{ jours.}$$

225 ouv. pour faire 625 m. en travaillant 1 h. par jour emploient 625 fois plus,

$$\text{ou } \frac{325 \times 180 \times 9 \times 625}{450 \times 225} \text{ jours.}$$

225 ouv. pour faire 625 m. en travaillant 8 h. par jour emploient 8 fois moins,

$$\text{ou } \frac{325 \times 180 \times 9 \times 625}{450 \times 225 \times 8} \text{ jours.}$$

$$\frac{\overset{13\ \cancel{65}}{\cancel{325}} \times \overset{\cancel{2}}{\cancel{180}} \times \cancel{9} \times \overset{125}{\cancel{625}}}{\underset{\cancel{9}}{\cancel{450}} \times \underset{\underset{\cancel{5}}{\cancel{45}}}{\cancel{225}} \times \underset{4}{\cancel{8}}} = \frac{13 \times 125}{4} = \frac{1625}{4} = 406 \text{ jours } 1/4.$$

2° Méthode des quantités proportionnelles.

Cette méthode, assez longue à expliquer, est très rapide dans la pratique : c'est celle qu'il faut employer, de préférence à la précédente.

Je pose l'énoncé du problème en deux lignes, x étant la quantité de jours cherchée :

180 ouvriers en 325 jours font 450 mètres en travaillant 9 heures par jour.
225 ouvriers en x jours font 625 mètres en travaillant 8 heures par jour.

Dans les conditions énoncées à la première ligne, le nombre de jours cherché est de 325.

Je pars donc de

$$x = 325.$$

Si, au lieu de 180 ouvriers, il n'y en avait que 1, le nombre de jours deviendrait 180 fois plus grand, et puisqu'il y a 225 ouvriers, le nombre de jours deviendra 225 fois moindre.

Dans ces conditions :

$$x = \frac{325 \times 180}{225}.$$

Si, au lieu de 450 mètres, il n'y avait que 1 mètre à faire, le nombre de jours deviendrait 450 fois moindre, et puisqu'il y a 625 mètres, le nombre de jours deviendra 625 fois plus grand.

Dans ces conditions :

$$x = \frac{325 \times 180 \times 625}{225 \times 450}.$$

Enfin, si au lieu de travailler 9 heures par jour, les ouvriers travaillaient 1 heure, le nombre de jours deviendrait 9 fois plus grand, et puisqu'ils travaillent 8 heures, le nombre des jours deviendra 8 fois moindre.

Donc enfin :

$$x = \frac{325 \times 180 \times 625 \times 9}{225 \times 450 \times 8} = 406 + \frac{1}{4}.$$

CHAPITRE III

RÈGLE D'INTÉRÊT SIMPLE.

Dans les problèmes sur cette règle, il y a quatre quantités principales à examiner, le *capital* c, l'*intérêt* i, le *taux d'intérêt* t, et le *temps* a, dont une est l'inconnue de la question. Il se présente donc quatre problèmes principaux à résoudre.

Je vais employer la seconde méthode donnée au chapitre précédent pour la règle de trois composée.

Dans ces problèmes, l'année est toujours supposée de 360 jours, et le mois de 30 jours.

73. 1er Problème.

Quel est l'intérêt de 37 425 francs placés à 5,5 p. 100 pendant 3 ans 5 mois 12 jours ?

37 425 francs en 1242 jours rapportent i francs.
100 francs en 360 jours rapportent 5,5.

$$i = \frac{\overset{1,1}{\cancel{5,5}} \times \overset{1497}{\overset{\cancel{7485}}{\cancel{37425}}} \times \overset{69}{\overset{\cancel{138}}{\cancel{1242}}}}{\underset{\underset{\underset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{20}}}{\cancel{100}} \times \underset{\underset{8}{\cancel{72}}}{\cancel{360}}} = \frac{1,1 \times 1497 \times 69}{2 \times 8} = \frac{113622,3}{16} = 7101,39.$$

74. 2e Problème.

Quel est le capital qui, en 6 ans 1 mois 15 jours, à 3,75 p. 100 a rapporté 6 205 fr. 50 c. ?

c en 2 205 jours rapportent 6 205 fr. 50 c.
100 en 360 jours rapportent 3 fr. 75 c.

$$c = \frac{\overset{4}{\overset{\cancel{20}}{\cancel{100}}} \times \overset{8}{\overset{\cancel{40}}{\cancel{360}}} \times \overset{59,1}{\overset{\cancel{413,7}}{\overset{\cancel{1241,1}}{\cancel{6205,50}}}}}{\underset{\underset{\underset{7}{\cancel{49}}}{\cancel{441}}}{\cancel{2205}} \times \underset{\underset{\underset{\cancel{0,03}\ \underset{0,01}{}}{\cancel{0,15}}}{\cancel{0,75}}}{\cancel{3,75}}} = \frac{4 \times 8 \times 59,1}{7 \times 0,01} = \frac{1891,2}{0,07} = 27\,017 \text{ fr. } 14 \text{ c.}$$

75. 3e Problème.

A quel taux sont placés 135 900 fr. qui, en 7 ans 8 mois 18 jours, ont rapporté 42 300 fr. ?

135 900 fr. en 2778 jours ont rapporté 42 300 fr.
100 fr. en 360 jours ont rapporté t.

$$t = \frac{\overset{4700}{\cancel{42300}} \times \cancel{100} \times \overset{60}{\cancel{360}}}{\underset{151}{\cancel{135900}} \times \underset{463}{\cancel{2778}}} = \frac{4700 \times 60}{151 \times 463} = \frac{282000}{69913} = 4,034 \text{ p. } 100.$$

76. 4e Problème.

Pendant combien de temps ont été placés 244 800 fr. qui, à 4,25 p. 100, ont rapporté 37 800 fr. ?

244 800 fr. en a jours ont rapporté 37 800 fr.
100 fr. en 360 jours ont rapporté 4,25.

$$a = \frac{\overset{\overset{\overset{\cancel{5}}{\cancel{10}}}{\cancel{40}}}{\cancel{360}} \times \cancel{100} \times \overset{\overset{3780}{\cancel{18900}}}{\cancel{37800}}}{\underset{\underset{\underset{17}{\cancel{68}\ \cancel{34}}}{\cancel{272}}}{\cancel{244800}} \times \underset{\underset{0,17}{\cancel{0,85}}}{\cancel{4,25}}} = \frac{3780}{17 \times 0,17} = \frac{3780}{2,89} = 1\,308 \text{ jours.}$$

c'est-à-dire 3 ans 7 mois et 18 jours.

77. Ces quatre problèmes peuvent se résoudre par de simples applications de formules.

1° Si le temps est exprimé en jours :

$$i = \frac{c \times a \times t}{100 \times 360}$$

$$c = \frac{100 \times 360 \times i}{a \times t}$$

$$t = \frac{100 \times 360 \times i}{c \times a}$$

$$a = \frac{100 \times 360 \times i}{c \times t}$$

2° Si le temps est exprimé en mois :

$$i = \frac{c \times a \times t}{100 \times 12}$$

$$c = \frac{100 \times 12 \times i}{a \times t}$$

$$t = \frac{100 \times 12 \times i}{c \times a}$$

$$a = \frac{100 \times 12 \times i}{c \times t}$$

3° Si le temps est exprimé en années :

$$i = \frac{c \times a \times t}{100}$$

$$c = \frac{100 \times i}{a \times t}$$

$$t = \frac{100 \times i}{c \times a}$$

$$a = \frac{100 \times i}{c \times t}$$

Il y a quelques autres problèmes sur la règle d'intérêt simple, qui ne rentrent pas absolument dans les précédents, bien qu'ils en dépendent : je vais en traiter deux.

78. Problème.

Un capital placé à intérêts simples, à 4 $^1/_2$ p. 100, pendant 3 ans 7 mois 12 jours, a donné au bout de ce temps, avec ses intérêts, une somme de 73 225 fr. 75 c. Quel est ce capital ?

100 fr. en 1 302 jours à 4,5 p. 100 rapportent

$$\frac{\overset{\cancel{217}}{\cancel{1302}} \times \overset{\overset{0{,}3}{\cancel{0{,}9}}}{\cancel{4{,}5}}}{\underset{\underset{\underset{4}{\cancel{12}}}{\cancel{60}}}{\cancel{360}}} = \frac{65{,}1}{4} = 16{,}275.$$

Donc ils valent avec leurs intérêts 116 fr. 275

100 fr. valent 116 fr. 275
c francs valent 73 225 fr. 75 c.

d'où (n° 66)

$$c = \frac{100 \times \overset{\overset{2929{,}03}{\cancel{14645{,}15}}}{\cancel{73225{,}75}}}{\underset{\underset{4{,}651}{\cancel{23{,}255}}}{\cancel{116{,}275}}} = \frac{100 \times 2929{,}03}{4{,}651} = \frac{292903}{4{,}651} = 62976{,}35.$$

79. Problème.

Une personne a placé un capital de 350 000 fr., partie à 4,375 p. 100, partie à 5,125 p. 100. En 3 ans 3 mois 9 jours, elle a retiré en intérêts simples 61 250 fr. Combien a-t-elle placé à chacun de ces taux ?

Je vais d'abord calculer l'intérêt que cette personne aurait reçu au bout d'un an.

En 1 269 jours, elle reçoit 61 250 fr.
En 360 jours, elle reçoit i francs.

d'où (n° 66)

$$i = \frac{\overset{40}{\cancel{360}} \times 61250}{\underset{141}{\cancel{1269}}} = \frac{2450000}{141} = \ldots \quad 17375 \text{ fr. } 8865$$

Si tout le capital était placé à 4,375 p. 100 il donnerait, par an, un intérêt de :

$$\frac{350000 \times 4,375}{100} = \ldots\ldots \quad 15312 \text{ fr. } 50$$

C'est-à-dire . . . . 2063 fr. 3865

de moins qu'il ne donne réellement.

Or, 100 fr. placés à 5,125 p. 100
au lieu de l'être à. . 4,375 p. 100
donnant. . . . 0,750 de plus, j'ai, en appelant c le capital placé à 5,125 p. 100, la proportion suivante :

$$\frac{100}{0,750} = \frac{c}{2063,3865}$$

d'où :

$$c = \frac{\overset{20}{\cancel{100}} \times \overset{137,5591}{\overset{\cancel{412,6773}}{\cancel{2063,3865}}}}{\underset{0,01}{\underset{\cancel{0,05}}{\underset{\cancel{0,15}}{\cancel{0,750}}}}} = \frac{2751,182}{0,01} = 275118 \text{ fr. } 20.$$

Le restant du capital de 350 000 fr., c'est-à-dire 74 881 fr. 80 c., est placé à 4,375 p. 100.

Je vais faire la vérification de ces résultats.

275 118 fr. 20 c. placés à 5,125 p. 100 pendant 1 269 jours, donnent comme intérêts (n° 77).

$$\frac{\overset{137559,1}{\cancel{275118,20}} \times \overset{\overset{\overset{0,041}{\cancel{0,205}}}{\cancel{1,025}}}{\cancel{5,125}} \times \overset{141}{\cancel{1269}}}{\underset{\underset{\underset{4}{\cancel{8}}}{\cancel{40}}}{\cancel{360}} \times \underset{\underset{4}{\cancel{20}}}{\cancel{100}}} = \frac{137559,1 \times 0,041 \times 141}{4 \times 4} = \frac{795229,1571}{16} = 49701^{f}82$$

et 74 881 fr. 80 c. placés à 4,375 p. 100 pendant 1 269 jours donnent comme intérêts

$$\frac{\overset{37440,9}{\cancel{74881,80}} \times \overset{\overset{\overset{0,035}{\cancel{0,175}}}{\cancel{0,875}}}{\cancel{4,375}} \times \overset{141}{\cancel{1269}}}{\underset{\underset{\underset{4}{\cancel{36}}}{\cancel{180}}}{\cancel{360}} \times \underset{\underset{4}{\cancel{20}}}{\cancel{100}}} = \frac{37440,9 \times 0,035 \times 141}{4 \times 4} = \frac{184770,8415}{16} = 11548^{f}18$$

dont le total est 61250f00

CHAPITRE IV

RENTES FRANÇAISES.

Je ne veux pas faire ici l'historique de la création des diverses rentes françaises : cependant il n'est pas possible, dans un ouvrage écrit spécialement pour les administrations financières, de ne pas rappeler en quelques mots les principales origines de notre dette consolidée.

80. En 1797, le gouvernement du Directoire, se trouvant en présence d'un budget dont le déficit était considérable, décida de rembourser avec des assignats les deux tiers des dettes contractées à divers titres par l'État, sous l'ancien régime et pendant la Révolution, et d'en inscrire l'autre tiers sur le Grand-Livre de la Dette Publique, en en payant les intérêts au *denier vingt,* c'est-à-dire à 5 p. 100. C'est ce tiers, qui, sous le nom de *Tiers consolidé*, fut l'origine de la rente 5 p. 100. Le capital de cette rente s'élevait alors à 834 352 740 fr.

Il s'accrut considérablement par les guerres de l'Empire (en 1814, il était de 1 266 152 740 fr.) ; surtout par l'indemnité de guerre de 700 millions payés aux Alliés après la chute de Napoléon, et par divers travaux exécutés sous la Restauration, de sorte qu'en 1824, il s'élevait à 3 460 000 000 de francs.

A cette époque, M. de Villèle créa une rente au pair, portant un intérêt de 3 p. 100, afin d'indemniser les émigrés dont les biens avaient été confisqués et vendus pendant la Révolution : le capital de cette rente, origine du 3 p. 100 actuel, s'élevait à 987 820 000 fr.

En même temps, il obtint la conversion facultative du 5 p. 100 en 3 p. 100, après une discussion passionnée, dans laquelle les arguments de ses partisans et ceux de ses adversaires se bornèrent le plus souvent à un échange d'injures.

En 1828, un emprunt en rente 4 p. 100 fut fait pour rétablir l'équilibre du budget dérangé par l'occupation de la Grèce ; sous Louis-Philippe, diverses consolidations furent faites en ce fonds, qui atteignit ainsi, en capital, le chiffre de 11 152 000 fr.

Le 5 p. 100 n'avait pas disparu dans la conversion de 1824; il en resta même la plus grande partie, un capital de 2 848 518 000 fr., qui s'accrut rapidement de plusieurs emprunts contractés pendant la Restauration et le règne de Louis-Philippe, et sous la République de 1848 par diverses opérations financières que les difficultés de l'époque rendirent inévitables. En 1830, le montant total de la dette inscrite au Grand-Livre était de 4 426 279 767 fr., et en 1849, de 7 329 689 526 fr.

En 1852, le 5 p. 100 fut converti en 4 $^1/_2$ p. 100, et en 1862 le 3 p. 100 (dont la rente était payable par semestre) fut converti en 3 p. 100 nouveau (payable par trimestre), ainsi que le 4 $^1/_2$ p. 100; mais ce dernier ne le fut que partiellement.

Pendant le second Empire, les guerres de Crimée, d'Italie, du Mexique, une grande impulsion donnée aux travaux publics nécessitèrent des emprunts fréquents, de sorte qu'au budget de 1870, à la veille de notre guerre avec la Prusse, le capital de la Dette en 3 p. 100, en 4 $^1/_2$ p. 100 et en 4 p. 100 figurait pour 12 454 274 734 fr.

Les calamités effroyables de cette guerre et l'indemnité exorbitante exigée par nos vainqueurs nous obligèrent à contracter un emprunt de 750 millions (en août 1870), en 4 $^1/_2$ p. 100 et en 3 p. 100, un autre de 250 millions (dit emprunt Morgan) en 6 p. 100 converti bientôt en 3 p. 100, et enfin deux autres, en 5 p. 100 seulement, l'un en 1871 (dit emprunt de 2 milliards), l'autre en 1872 (dit emprunt de 3 milliards), dont le capital nominal s'élève à environ 7 milliards.

En 1878, M. Léon Say, alors ministre des finances, voyant que la Dette de la France allait toujours croissant, parce que depuis longtemps l'amortissement ne fonctionnait plus, créa un nouveau fonds, remboursable en 75 ans, par annuités, le *3 p. 100 amortissable*. Ce fonds, dans sa pensée, était destiné à couvrir les dépenses amenées par la création de nouvelles lignes de chemins de fer dont la construction était mise à la charge de l'État. Depuis, les conventions de 1883, en confiant aux grandes Compagnies le soin d'exécuter ces travaux, ont diminué de beaucoup l'importance du rôle réservé au 3 p. 100 amortissable.

Enfin, pour terminer cet aperçu, il ne me reste plus qu'à rappeler qu'en 1883 le 5 p. 100 créé en 1871 fut converti en $4\,^1/_2$ p. 100 payable par trimestre au lieu de l'être par semestre, comme le $4\,^1/_2$ p. 100 ancien; et qu'au commencement de l'année courante, il a été émis un emprunt de 904 millions, en 3 p. 100, pour consolider une partie de la Dette flottante. De sorte qu'aujourd'hui (1886) le montant de la Dette française consolidée se compose ainsi qu'il suit :

NATURE de la RENTE.	MONTANT du CAPITAL NOMINAL.	ÉCHÉANCES des COUPONS.	MONTANT de la RENTE.
$4\,^1/_2$ p. 100 nouveau. . . .	6 789 785 000 fr.	16 février 16 mai 16 août 16 novembre	305 540 359 fr.
$4\,^1/_2$ p. 100 ancien.	831 850 000	22 mars 22 septembre	37 433 284
4 p. 100	11 152 000	22 mars 22 septembre	446 096
3 p. 100.	12 993 904 000	1er janvier 1er avril 1er juillet 1er octobre	396 682 089
3 p. 100 amortissable . . .	3 993 410 000 (Capital restant à amortir.)	16 janvier 16 avril 16 juillet 16 octobre	144 304 970 (Rentes et amortissement.)
TOTAUX.	24 620 101 000 fr.		884 406 798 fr.

Je ne parlerai pas ici du 3 p. 100 amortissable dont l'étude fera l'objet d'un chapitre spécial dans la troisième partie de cet ouvrage. Je ne développerai, du reste, de problèmes que sur le $4\,^1/_2$ p. 100

nouveau, et le 3 p. 100, les autres sortes de rentes ne donnant lieu, pour ainsi dire, à aucune transaction.

81. Avant d'aborder ces problèmes, je crois utile de donner l'explication d'une expression qu'on retrouve fréquemment dans les ouvrages concernant les finances sous l'ancienne monarchie; c'est celle-ci : emprunter au *denier dix-huit,* au *denier vingt,* etc., etc.

Emprunter au denier vingt, c'est emprunter à un taux d'intérêt tel que pour 20 deniers de capital on donne un denier d'intérêt. Pour savoir ce que cette expression représente, si on la traduit à la moderne, c'est-à-dire pour savoir le taux pour 100 qu'elle signifie, il faut établir une proportion.

Soit t le taux pour cent cherché, j'aurai :

Pour le denier vingt :

$$\frac{20}{1} = \frac{100}{t}$$

d'où :

$$t = \frac{100}{20} = 5.$$

Pour le denier vingt-deux :

$$\frac{22}{1} = \frac{100}{t}$$

d'où :

$$t = \frac{100}{22} = \frac{50}{11} = 4,54 \qquad \text{etc.}$$

82. Les *ventes* ou *achats de rentes* se font par l'intermédiaire des agents de change qui prennent comme commission 1/8 p. 100 du capital employé (le minimum de cette commission étant de 1 franc). Seulement, en cas de remploi d'argent fait le même jour, c'est-à-dire lorsqu'un particulier vend une rente et en achète une autre le même jour, opération appelée *arbitrage,* l'agent de change ne prend sa commission de 1/8 p. 100 que sur la plus forte des deux opérations.

Comme autres frais, il y a, par chaque bordereau que fournit l'agent, à payer un timbre de 60 cent. (principal 50 cent., plus le double décime de guerre), si le total des opérations ne dépasse pas 10 000 fr., ou un timbre de 1 fr. 80 c. (principal 1 fr. 50 c., plus le double décime de guerre), si ce total dépasse 10 000 fr. De plus, un timbre de 10 cent. pour le reçu mentionné sur ce bordereau, et un autre de 10 cent. également pour le reçu des titres, aussi bien en cas d'achat qu'en cas de vente. Les agents y ajoutent, en général, 15 cent., prix de l'affranchissement de la lettre par laquelle ils avisent leurs clients de l'opération.

Dans les questions de rentes, il y a trois quantités principales à examiner : le *capital employé* C, le *montant de la rente r*, et le *cours c*. Quant au montant de la rente, je ferai remarquer que pour les titres nominatifs, les chiffres des inscriptions de rentes ne comprennent qu'un nombre exact de francs, sans fraction, et, pour les titres au porteur, les plus petites inscriptions sont de 2 fr. pour le 4 $^1/_2$ p. 100 nouveau, et de 3 fr. pour le 3 p. 100.

Je vais développer successivement les trois problèmes principaux qui peuvent se présenter.

83. 1^{er} Problème.

Quel capital C faut-il employer pour acheter 7 350 fr. de rente 3 p. 100 au cours de 79 fr. 50 c. ?

Avec 79 fr. 50 c. on achète 3 fr. de rente.
Avec C francs on achète 7 350 fr.

D'où :

$$C = \frac{79{,}50 \times \overset{2450}{\cancel{7350}}}{\cancel{3}} = \ldots\ldots\ldots \quad 194\,775^{f}00$$

Comme autres frais, il y a :

1/8 p. 100 de commmission $\frac{1947{,}75}{8} = \ldots$	243 45
Le timbre du bordereau	1 80
Les timbres des deux reçus et de la lettre .	0 35
En tout.	$195\,020^{f}60$

84. 2^{e} Problème.

Combien achètera-t-on de rente 4 $^1/_2$ p. 100, r, au cours de 106 fr. 35 c. avec un capital de 18 750 fr. ?

Avec 106 fr. 35 on achète 4,50 de rente.
Avec 18 750 fr. on achète r.

D'où :

$$r = \frac{18750 \times \overset{\overset{0,3}{\cancel{0,9}}}{\cancel{4,5}}}{\underset{\underset{7,09}{\cancel{21,27}}}{\cancel{106,35}}} = \frac{18750 \times 0{,}3}{7{,}09} = \frac{5625}{7{,}09} = 793.$$

La dépense réelle pour acheter cette rente sera en capital (n° 83) :

$$\frac{793 \times \overset{\overset{7,09}{\cancel{21,27}}}{\cancel{106,35}}}{\underset{\underset{0,3}{\cancel{0,9}}}{\cancel{4,5}}} = \frac{793 \times 7,09}{0,3} = \frac{5622,37}{0,3} = 18\,741^{f}25$$

La commission de 1/8 p. 100 $\frac{187,41}{8}$ = . .	23 45
Le timbre du bordereau.	1 80
Les timbres des deux reçus et de la lettre. .	0 35
En tout.	$18\,766^{f}85$

85. 3ᵉ Problème.

A quel cours, *c*, a-t-on acheté du 3 p. 100, sachant que l'achat de 1 125 fr. de cette rente a coûté en tout 30 555 fr. 95 c.

Je retranche d'abord du prix total		30 555 fr. 95
pour le timbre du bordereau	1 fr. 80	2 15
pour ceux des reçus et de la lettre. . . .	0 35	
Il reste.		30 553 fr. 80

qui représentent le prix de la rente augmenté de 1/8 p. 100 ou de $\frac{1}{800}$, c'est à dire les $\frac{801}{800}$ de ce prix.

Si donc :

$$\text{Les } \frac{801}{800} \text{ de ce prix valent } 30\,553 \text{ fr. } 80\,;$$

$$\frac{1}{800} \text{ de ce prix vaut } \frac{30553,80}{801}\,;$$

$$\text{Les } \frac{800}{800} \text{ de ce prix valent } \frac{30553,80 \times 800}{801}.$$

$$\frac{\overset{10184,60}{\cancel{30553,80}} \times 800}{\underset{267}{\cancel{801}}} = \frac{8147680}{267} = 30\,515 \text{ fr. } 65.$$

Le cours demandé, *c*, sera obtenu par la proportion suivante :

$$\frac{30515,65}{1125} = \frac{c}{3}$$

d'où :

$$c = \frac{\overset{6103,13}{\cancel{30515,65}} \times \cancel{3}}{\underset{\underset{75}{\cancel{375}}}{\cancel{1125}}} = 81,375.$$

Voici quelques autres questions.

86. Problème.

Une personne achète 2750 fr. de rente 3 p. 100 à 78,75 et les revend à 82,225. Combien gagne-t-elle ?

Le prix d'achat a été de :

$C = \dfrac{\overset{26,25}{\cancel{78,75}} \times 2750}{\cancel{3}} = \ldots\ldots\ldots$	$72\,187^{f}\,50$
La commission de 1/8 p. 100 $\dfrac{721,87}{8} = \ldots$	90 25
Le timbre du bordereau	1 80
Le timbre des reçus et de la lettre	0 35
En tout.	$72\,279^{f}\,90$

Le prix de vente a été :

$$C = \frac{82,225 \times 2750}{3} = \frac{226118,75}{3} = \ldots\ldots \quad 75\,372^{f}\,90$$

Moins :

La commission de 1/8 p. 100 $\dfrac{753,73}{8} =$.	$94^{f}\,20$	
Le timbre du bordereau	1 80	96 35
Les timbres des reçus et de la lettre . . .	0 35	
Le prix de vente, net, a été de		$75\,276^{f}\,55$
Le prix d'achat ayant été de		72 279 90
Le bénéfice net est de.		$2\,996^{f}\,65$

87. Problème.

Une personne a employé un capital de 103 174 fr. à acheter de la rente 4 $^{1}/_{2}$ p. 100 au cours de 109,75. Elle a été obligée de la revendre au cours de 107,35. Combien a-t-elle perdu ?

Je retranche d'abord du capital employé		103 174 f 00
Le timbre du bordereau.	1 f 80	2 f 15
Et les timbres des reçus et de la lettre. .	0 35	
Il reste.		103 171 f 85

qui représentent les $\frac{801}{800}$ du capital employé à l'achat de la rente. (Voir nº 85.)

Ce capital sera donc :

$$\frac{103171,85 \times 800}{801} = \frac{82537480}{801} = 103\,043 \text{ fr. } 05$$

La rente achetée avec ce capital, au cours de 109,75 est (nº 84) :

$$r = \frac{\overset{20608,61}{\cancel{103043,05}} \times \overset{0,9}{\cancel{4,5}}}{\underset{\underset{4,39}{\cancel{21,95}}}{\cancel{109,75}}} = \frac{18547,749}{4,39} = 4\,225 \text{ fr.}$$

Le capital produit par la vente de cette rente, au cours de 107,35 est de (nº 83) :

$$\frac{\overset{845}{\cancel{4225}} \times 107,35}{\underset{0,9}{\cancel{4,5}}} = \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \quad 100\,789^{f}\,70$$

dont il faut déduire :

La commission de 1/8 p. 100 $\frac{1007,90}{8} =$	125 f 95	128 f 10
Le timbre du bordereau.	1 80	
Les timbres des reçus et de la lettre. .	0 35	
Reste net.		100 661 f 60
Le capital employé primitivement étant de . . .		103 174 f 00
Il résulte de ces deux opérations une perte de. .		2 512 f 40

88. Probl

Une personne vend 4 350 fr. de rente 3 p. 100 à 80,525, et achète le même jour 4 575 fr. de rente 4 $^1/_2$ p. 100 à 108,675. Combien donnera-t-elle ou recevra-t-elle d'argent pour le règlement de son compte ?

La vente de 4350 fr. de rente 3 p. 100 à 80,525 produit un capital de (n° 83) :

$$\frac{\overset{1450}{\cancel{4350}} \times 80{,}525}{\cancel{3}} = \ldots\ldots\ldots \quad 116\,761^{f}\,25$$

L'achat de 4575 fr. de rente $4\,^1/_2$ p. 100 à 108,675 emploie un capital de (n° 83) :

$$\frac{4575 \times \overset{\overset{2{,}415}{\cancel{21{,}735}}}{\cancel{108{,}675}}}{\underset{0{,}1}{\cancel{4{,}5}\ \cancel{0{,}9}}} = 4575 \times 24{,}15 = 110\,486^{f}\,25$$

Différence à recevoir. . . . 6 275^{f} 00

Mais il faut en déduire :

La commission de 1/8 p. 100 sur la plus forte opération, qui est la vente du 3 p. 100 $\frac{1167{,}61}{8}$ = ...	145^{f} 95	150^{f} 10
Les timbres des bordereaux des deux opérations	3 60	
Les timbres des quatre reçus et de la lettre	0 55	

Reste net pour le client. . . . . . 6 124^{f} 90

89. Problème.

On achète 15 actions de la Société des Dépôts et Comptes courants à 612 fr. 50 c. Il n'y a que 125 fr. versés par action de 500 fr. Quel sera le capital déboursé ?

Lorsqu'une action n'est pas libérée en entier, il faut, pour avoir son prix véritable, déduire de son cours le montant des versements restant à effectuer ; mais la commission de 1/8 p. 100 se perçoit sur le chiffre du cours.

Ici, il reste à verser 375 fr. Donc chaque action vaudra :

612 fr. 50 — 375 fr. = 237 fr. 50

et le capital à débourser réellement sera de :

237 fr. 50 × 15 = ...	3 562f 50

Il faut y ajouter :

La commission de 1/8 p. 100 sur le capital calculé d'après le cours, c'est-à-dire 612,50 × 15 = 9,187 fr. 50; cette commission sera de $\frac{91,87}{8}$ = ...	11f 50	12f 45
Le timbre du bordereau	0 60	
Les timbres des reçus et de la lettre . . .	0 35	
Montant total de la dépense.		3 574f 95

PARITÉS.

90. On appelle *parité,* en fait de rentes ou d'actions, le calcul par lequel on établit quel devrait être le cours d'une rente ou d'une action pour qu'elle rapportât le même taux d'intérêt qu'une autre rente ou une autre action.

Avant de traiter cette question, je vais calculer le taux d'intérêt que produit une rente à un cours donné.

91. Problème.

1° Quel est le taux d'intérêt du 4 $^1/_2$ p. 100 au cours de 107,25 ?

J'ai la proportion :

$$\frac{107,25}{4,5} = \frac{100}{x}$$

d'où :

$$x = \frac{\overset{20}{\cancel{100}} \times \overset{\overset{0,3}{\cancel{0,9}}}{\cancel{4,5}}}{\underset{\underset{\underset{1,43}{\cancel{7,15}}}{\cancel{21,45}}}{\cancel{107,25}}} = \frac{6}{1,43} = 4,20 = 4\ ^1/_5 \text{ p. } 100.$$

2° Inversement, à quel cours le 3 p. 100 rapporte-t-il 3,80 p. 100 ? J'ai la proportion :

$$\frac{x}{3}=\frac{100}{3{,}80}$$

d'où :

$$x=\frac{3\times\overset{50}{\cancel{100}}}{\underset{1{,}90}{\cancel{3{,}80}}}=\frac{150}{1{,}90}=78{,}95.$$

92. Problème.

Le 3 p. 100 étant à 82,75, quelle est la parité du $4\,{}^1/_2$ p. 100?

$$\frac{x}{4{,}5}=\frac{82{,}75}{3}$$

d'où :

$$x=\frac{\overset{1{,}5}{\cancel{4{,}5}}\times 82{,}75}{\cancel{3}}=124{,}125.$$

Le $4\,{}^1/_2$ p. 100 est toujours à un cours inférieur à celui que donnerait sa parité avec le cours du 3 p. 100, parce que, étant au-dessus du pair, il peut être un jour ou l'autre remboursé à ce prix, tandis que le 3 p. 100, étant toujours au-dessous du pair, ne donne pas à ses porteurs les mêmes inquiétudes.

93. Tableau de quelques parités entre le 3 p. 100 et le $4\,{}^1/_2$ p. 100.

A 3 p. 100 d'intérêt, le cours du 3 (n° 91) est $\frac{300}{3}=100$, celui du $4\,{}^1/_2$ est $\frac{450}{3}=150$.

A $3\,{}^1/_4$ p. 100 d'intérêt, le cours du 3 est $\frac{300}{3{,}25}=92{,}31$, celui du $4\,{}^1/_2$ est $\frac{450}{3{,}25}=138{,}46$.

A $3\,{}^1/_2$ p. 100 d'intérêt, le cours du 3 est $\frac{300}{3{,}5}=85{,}71$, celui du $4\,{}^1/_2$ est $\frac{450}{3{,}5}=128{,}57$.

A $3\,{}^3/_4$ p. 100 d'intérêt, le cours du 3 est $\frac{300}{3{,}75}=80$, celui du $4\,{}^1/_2$ est $\frac{450}{3{,}75}=120$.

A 4 p. 100 d'intérêt, le cours du 3 est $\frac{300}{4} = 75$, celui du 4 $^1/_2$ est $\frac{450}{4} = 112{,}50$.

A 4 $^1/_4$ p. 100 d'intérêt, le cours du 3 est $\frac{300}{4{,}25} = 70{,}59$, celui du 4 $^1/_2$ est $\frac{450}{4{,}25} = 105{,}88$.

A 4 $^1/_2$ p. 100 d'intérêt, le cours du 3 est $\frac{300}{4{,}5} = 66{,}67$, celui du 4 $^1/_2$ est $\frac{450}{4{,}5} = 100$.

A 4 $^3/_4$ p. 100 d'intérêt, le cours du 3 est $\frac{300}{4{,}75} = 63{,}16$, celui du 4 $^1/_2$ est $\frac{450}{4{,}75} = 94{,}74$.

A 5 p. 100 d'intérêt, le cours du 3 est $\frac{300}{5} = 60$, celui de 4 $^1/_2$ est $\frac{450}{5} = 90$.

A 5 $^1/_4$ p. 100 d'intérêt, le cours du 3 est $\frac{300}{5{,}25} = 57{,}14$, celui du 4 $^1/_2$ est $\frac{450}{5{,}25} = 85{,}71$.

A 5 $^1/_2$ p. 100 d'intérêt, le cours du 3 est $\frac{300}{5{,}5} = 54{,}55$, celui du 4 $^1/_2$ est $\frac{450}{5{,}5} = 81{,}82$.

A 5 $^3/_4$ p. 100 d'intérêt, le cours du 3 est $\frac{300}{5{,}75} = 52{,}17$, celui du 4 $^1/_2$ est $\frac{450}{5{,}75} = 78{,}26$.

A 6 p. 100 d'intérêt, le cours du 3 est $\frac{300}{6} = 50$, celui du 4 $^1/_2$ est $\frac{450}{6} = 75$.

Connaissant le cours du 3 p. 100, en y ajoutant sa moitié, on obtient directement la parité du 4 $^1/_2$ p. 100 ; et, connaissant le cours du 4 $^1/_2$ p. 100, en en retranchant son tiers, on obtient directement la parité du 3 p. 100.

Remarque. — Si l'on voulait avoir plus exactement la parité du 3 p. 100 avec le 4 $^1/_2$ p. 100, il faudrait tenir compte de la différence d'échéance des coupons.

Les coupons des rentes se détachent 15 jours avant leur échéance. Pour le 3 p. 100, ce détachement se fait les 16 mars, 16 juin, 16 septembre et 16 décembre; pour le 4 $^1/_2$ p. 100, les 1er février, 1er mai, 1er août et 1er novembre.

Il en résulte que pendant les quatre périodes suivantes, savoir :

Du 1er février au 15 mars,
Du 1er mai au 15 juin,
Du 1er août au 15 septembre,
Et du 1er novembre au 15 décembre,

le coupon du 3 p. 100 se détache 45 jours avant celui du 4 $^1/_2$ p. 100, et que pendant les quatre périodes suivantes, savoir :

Du 16 mars au 30 avril,
Du 16 juin au 31 juillet,
Du 16 septembre au 31 octobre,
Et du 16 décembre au 31 janvier,

le coupon du 4 $^1/_2$ p. 100 se détache 45 jours avant celui du 3 p. 100.

Pour avoir la parité exacte des deux rentes, il faut, si l'on se trouve dans l'une des quatre premières périodes, ajouter au cours du 3 p. 100 l'intérêt acquis sur le coupon pendant 45 jours, c'est-à-dire la moitié de 0,75, ou

$$0,375;$$

si l'on se trouve dans l'une des quatre dernières périodes, il faut, au contraire, retrancher ce nombre 0,375 du cours du 3 p. 100.

CHAPITRE V.

RÈGLE D'ESCOMPTE.

94. On appelle *valeur nominale* d'un billet le montant du billet, *escompte* la somme que retient le banquier quand il paye le billet, *valeur réelle* ou *actuelle* du billet la somme qu'il donne en échange du billet.

Il y a deux sortes d'escompte : l'*escompte en dehors* et l'*escompte en dedans*.

Dans le premier, l'escompte représente les intérêts de la valeur nominale du billet au taux indiqué, pendant le temps qui reste à courir depuis le jour où le billet est escompté jusqu'à l'époque de son échéance.

Dans le second, l'escompte représente les intérêts de la valeur réelle du billet, pendant le même temps et au même taux.

L'escompte en dehors est employé en France ; l'escompte en dedans, en Angleterre et en Amérique, principalement.

Dans l'un comme dans l'autre, l'année est supposée de 360 jours, et le mois de 30, à moins que les indications des mois et des quantièmes ne soient données; dans ce cas, il faut compter pour chaque mois le nombre de jours qu'il contient réellement.

Ainsi, du 25 juillet au 5 novembre on comptera :

Du 25 au 31 juillet. . . .	6 jours.
Août.	31 —
Septembre	30 —
Octobre.	31 —
Du 1er au 5 novembre. . .	5 —
En tout. . . .	103 jours.

Dans la réalité, les choses se passent un peu autrement.

Outre l'escompte calculé comme je viens de le dire, les banquiers escompteurs perçoivent un droit fixe, indépendant du temps, et qui est de 1/8 p. 100, 1/4 p. 100, parfois 1/2 p. 100 de la valeur nominale du billet, ce qui est considérable, parce que les billets étant escomptés au plus tôt deux mois avant leur échéance, les taux précédents correspondent à 3/4 p. 100, 1 $^1/_2$ p. 100, 3 p. 100 par an, si les billets sont payables dans deux mois, et à des taux plus forts, si les billets sont payables dans un délai moindre.

De cette manière, les escompteurs ont pu de tout temps élever beaucoup le taux de l'escompte sans craindre de tomber sous l'action de la loi de 1806, qui interdisait les prêts au-dessus du taux de 6 p. 100 en matière commerciale, loi dont l'abrogation, décidée récemment, était réclamée depuis longtemps à juste titre. Elle était illusoire, comme je viens de le montrer ; et, de plus, elle était injuste, l'argent (et j'entends ici par argent la monnaie fiduciaire aussi bien que les espèces métalliques) étant une marchandise comme une autre, et devant, pour ce motif, échapper à toute taxation.

1re Section. — Escompte en dehors.

95. D'après ce que j'ai dit plus haut (nº 94), la règle de l'escompte en dehors est identique à celle de l'intérêt simple : elle comprend donc, comme cette dernière, quatre problèmes principaux dont je me bornerai à donner ici les formules.

Soit N la *valeur nominale d'un billet*, e l'*escompte*, t le *taux*, a le *temps*.

1° Si le temps est exprimé en jours :

$$e = \frac{N \times a \times t}{100 \times 360}$$

$$N = \frac{100 \times 360 \times e}{a \times t}$$

$$t = \frac{100 \times 360 \times e}{N \times a}$$

$$a = \frac{100 \times 360 \times e}{N \times t}$$

2° Si le temps est exprimé en mois :

$$e = \frac{N \times a \times t}{100 \times 12}$$

$$N = \frac{100 \times 12 \times e}{a \times t}$$

$$t = \frac{100 \times 12 \times e}{N \times a}$$

$$a = \frac{100 \times 12 \times e}{N \times t}$$

3° Si le temps est exprimé en années :

$$e = \frac{N \times a \times t}{100}$$

$$N = \frac{100 \times e}{a \times t}$$

$$t = \frac{100 \times e}{N \times a}$$

$$a = \frac{100 \times e}{N \times t}$$

96. Outre ces quatre problèmes, il y en a un autre que je vais examiner. C'est celui dans lequel on donne la valeur réelle d'un billet, et où l'on ne donne ni sa valeur nominale, ni l'escompte, de sorte qu'on ne peut le ramener à l'un des précédents.

Il est nécessaire alors d'employer un autre raisonnement, parce que la valeur réelle d'un billet n'est pas proportionnelle au temps. En effet, soit un billet dont la valeur nominale est de 1 000 fr.; le taux de l'escompte étant de 5 p. 100, si ce billet est payable dans 1 an, l'escompte est 50 fr., la valeur réelle 950 fr.; si ce billet est payable dans deux ans, l'escompte est 100 fr., la valeur réelle 900 fr.; si ce billet est payable dans 3 ans, l'escompte est 150 fr., la valeur réelle 850 fr. Les nombres 950, 900, 850 ne sont pas proportionnels à 1, 2, 3.

PROBLÈME.

Un billet dont la valeur réelle est de 435 fr. 75 c., payable dans 7 mois 12 jours est escompté à 3,75 p. 100. Quel est l'escompte qu'il subit ?

100 fr. payables dans 360 jours sont escomptés 3,75
100 fr. payables dans 222 jours sont escomptés x.

D'où (nº 66) .

$$x = \frac{\overset{37}{\cancel{222}} \times \overset{\cancel{0,75}\ 0,25}{\cancel{3,75}}}{\underset{\underset{\cancel{12}\ 4}{\cancel{60}}}{\cancel{360}}} = \frac{9,25}{4} = 2,3125.$$

Donc, un billet de 100 fr. payable dans 222 jours et escompté à 3,75 p. 100, a une valeur réelle de :

$$100 - 2,3125 = 97,6875.$$

De là, la proportion suivante, e étant l'escompte cherché :

$$\frac{97,6875}{2,3125} = \frac{435,75}{e}$$

$$\begin{array}{l} 0,0037 \\ 0,0185 \\ 0,0925 \\ 0,4625 \qquad 145,25 \end{array}$$

$$e = \frac{2,3125 \times 435,75}{97,6875} = \frac{0,0037 \times 145,25}{0,0521} = \frac{0,537425}{0,0521} = 10 \text{ fr. } 32.$$

$$\begin{array}{r} 19,5375 \\ 3,9075 \\ 0,7815 \\ 0,1563 \\ 0,0521 \end{array}$$

La valeur nominale du billet est :

$$435,75 + 10,32 = 446 \text{ fr. } 07.$$

On pourrait l'obtenir directement sans calculer l'escompte.

J'ai, en effet, la proportion suivante, N étant la valeur nominale du billet :

$$\frac{97,6875}{100} = \frac{435,75}{N}$$

$$\begin{array}{r} 5,81 \\ 17,43 \\ 87,15 \end{array}$$

$$N = \frac{100 \times 435,75}{97,6875} = \frac{581}{1,3025} = 446 \text{ fr. } 07.$$

$$\begin{array}{r} 19,5375 \\ 3,9075 \\ 1,3025 \end{array}$$

On peut résoudre ce problème par une application de formule.

En effet, examinons la valeur de e trouvée dans le problème précédent.

Elle contient :

435,75 qui est la valeur réelle du billet, R; 2,3125 qui est l'escompte de 100 fr. au taux et pendant le temps indiqué, c'est-à-dire :

$$\frac{a \times t}{360};$$

puis 95,6875 qui est la valeur réelle d'un billet de 100 fr., c'est-à-dire sa valeur nominale, moins l'escompte, ou

$$100 - \frac{a \times t}{360}$$

Donc :

$$(1) \qquad e = \frac{\dfrac{R \times a \times t}{360}}{100 - \dfrac{a \times t}{360}} = \frac{R \times a \times t}{100 \times 360 - a \times t}$$

quand le temps est exprimé en jours.

Cette formule devient :

$$(2) \qquad e = \frac{\dfrac{R \times a \times t}{12}}{100 - \dfrac{a \times t}{12}} = \frac{R \times a \times t}{100 \times 12 - a \times t}$$

quand le temps est exprimé en mois; et

$$(3) \qquad e = \frac{R \times a \times t}{100 - a \times t}$$

quand le temps est exprimé en années.

Si l'on veut obtenir la valeur nominale du billet sans en calculer l'escompte, on emploie la formule suivante :

$$N = R + e = R + \frac{R \times a \times t}{100 \times 360 - a \times t} = \frac{R \times 100 \times 360 - R \times a \times t + R \times a \times t}{100 \times 360 - a \times t}$$

$$(1) \qquad N = \frac{R \times 100 \times 360}{100 \times 360 - a \times t}$$

quand le temps est exprimé en jours.

Cette formule devient :

$$(2) \qquad N = \frac{R \times 100 \times 12}{100 \times 12 - a \times t}$$

quand le temps est exprime en mois, et

$$(3) \qquad N = \frac{R \times 100}{100 - a \times t}$$

quand le temps est exprimé en années.

Appliquons à l'exemple précédent les deux formules (1) qui donnent l'escompte et la valeur nominale quand le temps est exprimé en jours :

$$e=\frac{\overset{\begin{array}{c}5,81\\ \cancel{17,43}\\ \cancel{87,15}\end{array}}{\cancel{435,75}}\times\overset{\begin{array}{c}37\\ \cancel{74}\end{array}}{\cancel{222}}\times\overset{0,75}{\cancel{3,75}}}{\underset{\begin{array}{c}\cancel{20}\\ \cancel{4}\\ 2\end{array}}{\cancel{100}}\times\underset{\begin{array}{c}\cancel{120}\\ \cancel{40}\\ 8\end{array}}{\cancel{360}}-\underset{\begin{array}{c}\cancel{74}\\ 37\end{array}}{\cancel{222}}\times\underset{\begin{array}{c}\cancel{0,75}\\ \cancel{0,15}\\ \cancel{0,05}\\ 0,01\end{array}}{\cancel{3,75}}}=\frac{5,81\times37\times0,75}{2\times8-37\times0,01}=\frac{161,2275}{16-0,37}=\frac{161,2275}{15,63}=10^{f}32$$

$$N=\frac{\overset{\begin{array}{c}5,81\\ \cancel{17,43}\\ \cancel{87,15}\end{array}}{\cancel{435,75}}\times100\times\overset{\begin{array}{c}12\\ \cancel{72}\end{array}}{\cancel{360}}}{\underset{\begin{array}{c}\cancel{20}\\ 4\end{array}}{\cancel{100}}\times\underset{\begin{array}{c}\cancel{120}\\ \cancel{24}\\ 4\end{array}}{\cancel{360}}-\underset{37\cdot}{\cancel{222}}\times\underset{\begin{array}{c}\cancel{0,75}\\ \cancel{0,15}\\ \cancel{0,05}\\ 0,01\end{array}}{\cancel{3,75}}}=\frac{5,81\times100\times12}{4\times4-37\times0,01}=\frac{6972}{16-0,37}=\frac{6972}{15,63}=446^{f}07.$$

2e Section. — Escompte en dedans.

Le procédé de l'*escompte en dedans* consistant à faire le calcul sur la valeur réelle du billet, il ne présente de difficulté que quand on ne connaît pas l'escompte du billet; c'est-à-dire dans le cas correspondant au premier cas de l'escompte en dehors.

Je vais traiter successivement les quatre principaux problèmes de cette règle, d'abord par l'escompte en dedans, puis par l'escompte en dehors.

97. 1er Problème.

Quel est l'escompte à 4 p. 100 d'un billet dont la valeur nominale est de 15 000 fr., et qui est payable dans 2 mois 13 jours ?

1° En dedans :

Je cherche quelle est la valeur nominale d'un billet dont la valeur réelle serait aujourd'hui de 100 fr., au taux et pendant le temps indiqués.

100 payables dans 360 jours sont escomptés 4,
100 payables dans 73 jours sont escomptés x.

D'où (n° 66) :

$$x = \frac{4 \times 73}{\underset{90}{\cancel{360}}} = 0,811111.$$

Donc :

Un billet dont la valeur nominale est 100,811111 est escompté 0,811111,
Un billet dont la valeur nominale est 15000 est escompté e.

D'où (n° 66) :

$$e = \frac{15000 \times 0,811111}{100,811111} = \frac{12166,665}{100,811111} = 120 \text{ fr. } 69.$$

2° En dehors (n° 95) :

$$e = \frac{\overset{5}{\cancel{15000}} \times 73 \times \cancel{4}}{\cancel{100} \times \underset{\underset{3}{\cancel{12}}}{\cancel{360}}} = \frac{365}{3} = 121 \text{ fr. } 67.$$

Les trois autres problèmes se font très aisément par la valeur réelle du billet.

98. 2e Problème.

Quelle est la valeur nominale d'un billet qui, payable dans 3 mois 15 jours et escompté à 5,25 p. 100, subit un escompte de 72 fr. 75 c. ?

1° En dedans :

L'escompte 72 fr. 75 c. étant calculé sur la valeur réelle du billet, R, j'aurai par la formule du n° 95 :

$$R = \frac{100 \times \overset{\overset{\overset{8}{\cancel{24}}}{\cancel{72}}}{\cancel{360}} \times \overset{\overset{2,91}{\cancel{14,55}}}{\cancel{72,75}}}{\underset{\underset{\underset{0,07}{\cancel{0,35}}}{\cancel{1,05}}}{\cancel{5,25}} \times \underset{\underset{7}{\cancel{35}}}{\cancel{105}}} = 4\,751 \text{ fr. } 02.$$

La valeur nominale du billet égale sa valeur réelle, plus l'escompte, c'est-à-dire :

$$4\,751,02 + 72,75 = 4\,823 \text{ fr. } 77.$$

2° En dehors (n° 95) :

$$\mathrm{N} = \frac{100 \times 360 \times 72,75}{5,25 \times 105} = 4\,751 \text{ fr. } 02.$$

99. 3[e] Problème.

A quel taux a été escompté un billet de 2 735 fr., payable dans 4 mois 12 jours, sachant qu'il a subi un escompte de 48 fr. 90 c. ?

1° En dedans :

La valeur réelle

$$2\,735 - 48,90 = 2\,686 \text{ fr. } 10$$

le problème se pose ainsi :

2 686 fr. 10 payables dans 132 jours sont escomptés 48 fr. 90,
100 fr. payables dans 360 jours sont escomptés t.

D'où :

$$t = \frac{48,90 \times 100 \times \overset{\overset{30}{\cancel{60}}}{\cancel{360}}}{2686,10 \times \underset{\underset{11}{\cancel{22}}}{\cancel{132}}} = \frac{146700}{29547,1} = 4,965 \text{ p. } 100.$$

2° En dehors (n° 95) :

$$t = \frac{48,90 \times 100 \times \overset{\overset{\overset{6}{\cancel{30}}}{\cancel{60}}}{\cancel{360}}}{\underset{547}{\cancel{2735}} \times \underset{\underset{11}{\cancel{22}}}{\cancel{132}}} = \frac{29340}{6017} = 4,876 \text{ p. } 100.$$

100. 4[e] Problème.

Dans combien de jours est payable un billet de 1 237 fr. 50 c. qui au taux de 4,375 p. 100, a subi un escompte de 12 fr. 75 c. ?

1° En dedans :

La valeur réelle du billet étant :

$$1\,237,50 - 12,75 = 1\,224 \text{ fr. } 75$$

le problème se pose comme le précédent :

> 1 224 fr. 75 payables dans a jours sont escomptés 12 fr. 75,
> 100 fr. payables dans 360 jours sont escomptés 4 fr. 375.

D'où (n° 95) :

$$a = \frac{\begin{array}{ccc} & & 0{,}17\\ & & \cancel{0{,}51}\\ 72 & 20 & \cancel{2{,}55}\\ \cancel{360} \times & \cancel{100} \times & \cancel{12{,}75}\end{array}}{\begin{array}{cc}\cancel{1224{,}75} \times & \cancel{4{,}375}\\ 408{,}25 & \cancel{0{,}875}\\ & \cancel{0{,}175}\\ & \cancel{0{,}035}\\ & 0{,}007\end{array}} = \frac{244{,}8}{2{,}85775} = 86 \text{ jours.}$$

Le temps demandé est égal à 2 mois 6 jours.

2° En dehors :

$$a = \frac{\begin{array}{ccc} & & 0{,}17\\ 24 & 4 & \cancel{0{,}51}\\ \cancel{72} & \cancel{20} & \cancel{2{,}55}\\ \cancel{360} \times & \cancel{100} \times & \cancel{12{,}75}\end{array}}{\begin{array}{cc}\cancel{1237{,}50} \times & \cancel{4{,}375}\\ \cancel{412{,}5} & \cancel{0{,}875}\\ \cancel{137{,}5} & \cancel{0{,}175}\\ 27{,}5 & \cancel{0{,}035}\\ & 0{,}007\end{array}} = \frac{16{,}32}{0{,}1925} = 85 \text{ jours.}$$

Le temps demandé est égal à 2 mois 5 jours.

Remarque. — La comparaison entre les résultats donnés par le calcul de l'escompte en dedans et celui de l'escompte en dehors montre qu'ils diffèrent très peu, surtout quand le nombre de jours n'est pas considérable.

101. Je ne développe pas dans l'escompte en dedans le cas correspondant au cinquième cas de l'escompte en dehors (n° 96), c'est-à-dire celui où l'on donne la valeur réelle du billet, parce qu'il se fait par un raisonnement identique à celui des deux derniers cas (n^{os} 99 et 100).

102. Les quatre problèmes précédents peuvent se résoudre à l'aide de formules que l'on établit aisément en se reportant aux exemples des n^{os} 97, 98, 99 et 100. (Voir aussi le n° 96.)

Soit N la valeur nominale d'un billet,
R sa valeur réelle,
e l'escompte,
t le taux,
a le temps,

1° Si le temps est exprimé en jours :

$$e = \frac{N \times \frac{a \times t}{360}}{100 + \frac{a \times t}{360}} = \frac{N \times a \times t}{100 \times 360 + a \times t}$$

$$N = R + e = \frac{100 \times 360 \times e}{a \times t} + e = \frac{(100 \times 360 + a \times t)e}{a \times t}$$

$$t = \frac{100 \times 360 \times e}{R \times a} = \frac{100 \times 360 \times e}{(N - e)a}$$

$$a = \frac{100 \times 360 \times e}{R \times t} = \frac{100 \times 360 \times e}{(N - e)t}$$

2° Si le temps est exprimé en mois :

$$e = \frac{N \times a \times t}{100 \times 12 + a \times t}$$

$$N = \frac{(100 \times 360 + a \times t)e}{a \times t}$$

$$t = \frac{100 \times 12 \times e}{R \times a} = \frac{100 \times 12 \times e}{(N - e)a}$$

$$a = \frac{100 \times 12 \times e}{R \times t} = \frac{100 \times 12 \times e}{(N - e)t}$$

3° Si le temps est exprimé en années :

$$e = \frac{N \times a \times t}{100}$$

$$N = \frac{(100 + a \times t)e}{a \times t}$$

$$t = \frac{100 \times e}{R \times a} = \frac{100 \times e}{(N - e)a}$$

$$a = \frac{100 \times e}{R \times t} = \frac{100 \times e}{(N - e)t}$$

103. Il est souvent utile de comparer les résultats que donne l'escompte en dehors avec ceux que donne l'escompte en dedans.

Pour cela, je vais mettre en regard les formules établies pour ces deux règles aux numéros 95 et 102.

Je suppose le temps exprimé en jours :

1° En dehors :

$$e = \frac{N \times a \times t}{100 \times 360}$$

en dedans :

$$e' = \frac{N \times a \times t}{100 \times 360 + a \times t}$$

De là :

$$\frac{e}{e'} = \frac{\dfrac{N \times a \times t}{100 \times 360}}{\dfrac{N \times a \times t}{100 \times 360 + a \times t}} = \frac{100 \times 360 + a \times t}{100 \times 360} = 1 + \frac{a \times t}{100 \times 360}$$

$$e = e'\left(1 + \frac{a \times t}{100 \times 360}\right) \qquad e' = \frac{e}{1 + \dfrac{a \times t}{100 \times 360}}$$

Des premières valeurs de e, e', je tire aussi :

$$\frac{1}{e'} - \frac{1}{e} = \frac{100 \times 360 + a \times t}{N \times a \times t} - \frac{100 \times 360}{N \times a \times t} = \frac{a \times t}{N \times a \times t} = \frac{1}{N}.$$

2° En dehors :

$$N = \frac{100 \times 360 \times e}{a \times t}$$

en dedans :

$$N' = \frac{(100 \times 360 + a \times t)e}{a \times t}$$

De là :

$$\frac{N'}{N} = \frac{\dfrac{(100 \times 360 + a \times t)e}{a \times t}}{\dfrac{100 \times 360 \times e}{a \times t}} = \frac{100 \times 360 + a \times t}{100 \times 360} = 1 + \frac{a \times t}{100 \times 360}$$

$$N = \frac{N'}{1 + \dfrac{a \times t}{100 \times 360}} \qquad N' = N\left(1 + \frac{a \times t}{100 \times 360}\right)$$

Des premières valeurs de N, N', je tire aussi :

$$\mathrm{N}' - \mathrm{N} = \frac{(100 \times 360 + a \times t)e}{a \times t} - \frac{100 \times 360 \times e}{a \times t} = \frac{a \times t \times e}{a \times t} = e.$$

3° En dehors :

$$t = \frac{100 \times 360 \times e}{\mathrm{N} \times a}$$

en dedans :

$$t' = \frac{100 \times 360 \times e}{(\mathrm{N} - e)\,a}$$

De là :

$$\frac{t}{t'} = \frac{\dfrac{100 \times 360 \times e}{\mathrm{N} \times a}}{\dfrac{100 \times 360 \times e}{(\mathrm{N} - e)\,a}} = \frac{(\mathrm{N} - e)\,a}{\mathrm{N} \times a} = \frac{\mathrm{N} - e}{\mathrm{N}} = 1 - \frac{e}{\mathrm{N}}.$$

$$t = t'\left(1 - \frac{e}{\mathrm{N}}\right) \qquad t' = \frac{t}{1 - \dfrac{e}{\mathrm{N}}}.$$

Des premières valeurs de t, t', je tire aussi :

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{t'} = \frac{\mathrm{N} \times a}{100 \times 360 \times e} - \frac{(\mathrm{N} - e)\,a}{100 \times 360 \times e} = \frac{e \times a}{100 \times 360 \times e} = \frac{a}{100 \times 360}.$$

4° En dehors :

$$a = \frac{100 \times 360 \times e}{\mathrm{N} \times t}$$

en dedans :

$$a' = \frac{100 \times 360 \times e}{(\mathrm{N} - e)\,t}$$

De là :

$$\frac{a}{a'} = \frac{\dfrac{100 \times 360 \times e}{\mathrm{N} \times t}}{\dfrac{100 \times 360 \times e}{(\mathrm{N} - e)\,t}} = \frac{(\mathrm{N} - e)\,t}{\mathrm{N} \times t} = \frac{\mathrm{N} - e}{\mathrm{N}} = 1 - \frac{e}{\mathrm{N}}.$$

$$a = a'\left(1 - \frac{e}{\mathrm{N}}\right) \qquad a' = \frac{a}{1 - \dfrac{e}{\mathrm{N}}}.$$

Des premières valeurs de a, a', je tire aussi :

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a'} = \frac{\mathrm{N} \times t}{100 \times 360 \times e} - \frac{(\mathrm{N} - e)\,t}{100 \times 360 \times e} = \frac{e \times t}{100 \times 360 \times e} = \frac{t}{100 \times 360}.$$

Si le temps est exprimé en mois, les formules précédentes deviennent :

$$e = e'\left(1 + \frac{a \times t}{100 \times 12}\right) \qquad e' = \frac{e}{1 + \dfrac{a \times t}{100 \times 12}} \qquad \frac{1}{e'} - \frac{1}{e} = \frac{1}{N}$$

$$N = \frac{N'}{1 + \dfrac{a \times t}{100 \times 12}} \qquad N' = N\left(1 + \frac{a \times t}{100 \times 12}\right) \qquad N' - N = e$$

$$t = t'\left(1 - \frac{e}{N}\right) \qquad t' = \frac{t}{1 - \dfrac{e}{N}} \qquad \frac{1}{t} - \frac{1}{t'} = \frac{a}{100 \times 12}$$

$$a = a'\left(1 - \frac{e}{N}\right) \qquad a' = \frac{a}{1 - \dfrac{e}{N}} \qquad \frac{1}{a} - \frac{1}{a'} = \frac{t}{100 \times 12}.$$

Si le temps est exprimé en années :

$$e = e'\left(1 + \frac{a \times t}{100}\right) \qquad e' = \frac{e}{1 + \dfrac{a \times t}{100}} \qquad \frac{1}{e'} - \frac{1}{e} = \frac{1}{N}$$

$$N = \frac{N'}{1 + \dfrac{a \times t}{100}} \qquad N' = N\left(1 + \frac{a \times t}{100}\right) \qquad N' - N = e$$

$$t = t'\left(1 - \frac{e}{N}\right) \qquad t' = \frac{t}{1 - \dfrac{e}{N}} \qquad \frac{1}{t} - \frac{1}{t'} = \frac{a}{100}$$

$$a = a'\left(1 - \frac{e}{N}\right) \qquad a' = \frac{a}{1 - \dfrac{e}{N}} \qquad \frac{1}{a} - \frac{1}{a'} = \frac{t}{100}$$

3e Section. — Échéance moyenne.

104. On appelle *échéance moyenne* l'échéance d'un billet destiné à en remplacer plusieurs autres dont les échéances sont diverses.

Dans cette question, il y a deux cas principaux à étudier :

Ou la valeur nominale du billet unique est égale à la somme des valeurs nominales des billets primitifs, et alors il faut en déterminer l'échéance de manière que son escompte soit égal à la somme des escomptes des premiers billets, les uns et les autres étant supposés payés le jour même où ils sont souscrits ; ou bien la valeur nominale du billet unique, connue ou inconnue, n'est pas égale à la somme des valeurs nominales des billets primitifs, et alors il faut en calculer l'échéance ou valeur nominale de manière que sa valeur réelle soit égale à la somme des valeurs réelles des premiers billets au jour même où ils sont souscrits.

Ces problèmes peuvent se rencontrer avec l'escompte en dehors et avec l'escompte en dedans : les raisonnements sont absolument les mêmes dans les deux cas; il faut seulement tenir compte de la différence des procédés de calculs employés pour ces deux escomptes.

Je ne traiterai ici que l'échéance moyenne avec l'escompte en dehors, parce qu'il est seul usité en France.

1er cas.

105. 1er Problème.

Un négociant a souscrit trois billets le 17 mars : le premier de 2 700 fr., payable le 15 avril; le deuxième de 3 550 fr., payable le 30 juin ; le troisième de 2 250 fr., payable le 25 juillet. Il voudrait les remplacer par un billet unique dont le montant est égal à la somme de ces trois billets, 8 500 fr. Quelle en sera l'échéance ?

Je compte pour chaque mois le nombre exact de jours qu'il contient, puisque les quantièmes sont donnés (nº 94).

	Nombre de jours.
Du 17 au 31 mars	14
Du 31 mars au 15 avril	15
	29
Du 15 au 30 avril.	15
Du 30 avril au 31 mai.	31
Du 31 mai au 30 juin	30
	105
Du 30 juin au 25 juillet	25
	130

Soit t le taux de l'escompte, a le nombre de jours compris depuis le 17 mars (jour où les billets sont souscrits) jusqu'à l'époque de l'échéance cherchée pour le billet unique ; je vais écrire que l'escompte de ce dernier billet est égal à la somme des escomptes des trois premiers (nº 95) :

$$\frac{8500 \times a \times t}{100 \times 360} = \frac{2700 \times 29 \times t}{100 \times 360} + \frac{3550 \times 105 \times t}{100 \times 360} + \frac{2250 \times 130 \times t}{100 \times 360}$$

ou, en simplifiant :

$$8500 \times a = 2700 \times 29 + 3550 \times 105 + 2250 \times 130 = 743\,550$$

et

$$a = \frac{\begin{array}{c}14871\\ \cancel{743550}\end{array}}{\begin{array}{c}\cancel{8500}\\ 170\end{array}} = 87.$$

L'échéance cherchée sera donc le 12 juin.

On voit que, dans ce problème, le taux de l'escompte est absolument indifférent à la solution : aussi peut-on poser immédiatement la seconde des deux égalités précédentes.

106. 2ᵉ Problème.

Un négociant a trois billets à payer : l'un de 2 725 fr., à 35 jours; un autre de 1 875 fr., à 50 jours; il veut donner au troisième, de 4 250 fr., une échéance telle que, s'il remplaçait ces trois billets par un billet unique égal à leur somme, l'échéance de ce billet serait à 45 jours. A combien de jours d'échéance doit-il faire le troisième billet ?

Soit a ce nombre de jours.

J'ai (nº 105) :

$$(2725 + 1875 + 4250)\,45 = 2725 \times 35 + 1875 \times 50 + 4250 \times a$$

$$398250 = 95375 + 93750 + 4250 \times a$$

$$209125 = 4250 \times a$$

$$a = \frac{\begin{array}{c}1673\\ \cancel{8365}\\ \cancel{41825}\\ \cancel{209125}\end{array}}{\begin{array}{c}\cancel{4250}\\ \cancel{850}\\ \cancel{170}\\ 34\end{array}} = 49.$$

107. 3e Problème.

Un négociant a trois billets à payer, l'un de 3 750 fr., dans 70 jours; un autre de 4 250 fr., dans 40 jours, et un troisième, payable dans 60 jours et dont il a oublié le montant. Il se rappelle seulement que ces trois billets ont été souscrits par lui en échange d'un billet unique égal à leur somme, et payable dans 55 jours. Quel est le montant du troisième billet ?

Soit N ce montant.
J'ai (n° 105) :

$$(3750 + 4250 + N)\,55 = 3750 \times 70 + 4250 \times 40 + N \times 60$$
$$8000 \times 55 + N \times 55 = 3750 \times 70 + 4250 \times 40 + N \times 60$$
$$440000 + N \times 55 = 262500 + 170000 + N \times 60$$
$$440000 - 432500 = N \times 60 - N \times 55$$
$$7500 = N \times 5$$
$$N = \frac{7500}{5} = 1500.$$

2e cas.

108. 4e Problème.

Un négociant a trois billets à payer : l'un de 3 350 fr. à 45 jours; un autre de 4 225 fr. à 60 jours, le troisième de 2 140 fr. à 75 jours. Il voudrait les remplacer par un billet unique de 9 850 fr. Quelle en sera l'échéance, le taux de l'escompte étant de 4 $^1/_2$ p. 100.

Je calcule les escomptes de ces trois billets (n° 95) :

$$e = \frac{3350 \times 45 \times 4{,}5 + 4225 \times 60 \times 4{,}5 + 2140 \times 75 \times 4{,}5}{100 \times 360}$$

$$e = \frac{(3350 \times 45 + 4225 \times 60 + 2140 \times 75)\,\overset{\overset{0,1}{\cancel{0,5}}}{\cancel{4,5}}}{100 \times \underset{\underset{8}{\cancel{40}}}{\cancel{360}}} = \frac{\overset{11295}{\cancel{564750}} \times 0{,}1}{\underset{2}{\cancel{100}} \times 8}$$

$$e = \frac{1129{,}5}{16} = 70{,}59375.$$

La valeur nominale des trois billets étant égale à la somme

$3330 + 4225 + 2140 =$	$9\,715^{f}$
et leur escompte à	$70^{f}59375$
la somme de leurs valeurs réelles sera.	$9\,644^{f}40625$

Il ne reste plus qu'à chercher à combien de jours est payable un

billet dont la valeur nominale est.	$9\,850^{f}$
la valeur réelle	$9\,644^{f}40625$
et par suite, l'escompte	$205^{f}59375$

le taux de l'escompte étant $4\,^1/_2$ p. 100.

J'ai, pour ce nombre de jours (n° 95) :

$$a = \frac{\overset{2}{\cancel{100}} \times \overset{\overset{8}{\cancel{40}}}{\cancel{360}} \times 205,59375}{\underset{197}{\cancel{9850}} \times \underset{\underset{0,1}{\cancel{0,5}}}{\cancel{4,5}}} = \frac{3289,5}{19,7} = 167.$$

L'échéance demandée sera donc dans 5 mois 17 jours.

109. 5ᵉ Problème.

Un négociant a souscrit, le 14 juin, à un fournisseur, quatre billets : l'un de 1 740 fr., payable le 31 juillet ; le second de 4 160 fr., payable le 25 août ; le troisième de 3 250 fr., payable le 15 septembre, et enfin le quatrième de 2 770 fr. dont il a oublié l'échéance. Mais il se rappelle que son créancier lui a offert de remplacer ces quatre billets par un billet unique de 12 000 fr. payable le 30 septembre. Quelle est l'échéance du quatrième billet, le taux de l'escompte étant de $5\,^1/_2$ p. 100 ?

L'escompte du billet unique est (n° 95) :

$$e = \frac{12\cancel{000} \times 5,5 \times \overset{\overset{3}{\cancel{12}}}{\cancel{108}}}{\cancel{100} \times \underset{4}{\cancel{360}}} = 198 \text{ fr.}$$

Il vaut donc aujourd'hui :

$$12000 - 198 = 11\,802 \text{ fr.}$$

Les trois premiers billets subissent comme escompte :

$$e = \frac{1750 \times 47 \times 5{,}5 + 4160 \times 72 \times 5{,}5 + 3250 \times 93 \times 5{,}5}{100 \times 360}$$

$$e = \frac{(1750 \times 47 + 4160 \times 72 + 3250 \times 93)\ \overset{1,1}{\cancel{5{,}5}}}{100 \times \underset{72}{\cancel{360}}}$$

$$e = \frac{\overset{34201}{\cancel{684020}} \times 1{,}1}{10\cancel{0} \times \underset{36}{\cancel{72}}} = \frac{37621{,}1}{360} = \ldots\ldots \qquad 104^{f}5031$$

La somme de leurs valeurs nominales étant
1750 + 4160 + 3250 = ... 9 160^{f}

la somme de leurs valeurs réelles est. . . . . 9 055^{f}4969

Or la somme des valeurs réelles des quatre billets
doit être égale à la valeur réelle du billet unique. . . 11 802^{f}

donc le quatrième billet doit avoir pour valeur réelle . 2 746^{f}5031

Comme sa valeur nominale est . . . . 2 770^{f}

son escompte sera . . . . 23^{f}4969

Le nombre de jours cherché sera donné par la formule suivante (n° 95) :

$$a = \frac{\overset{2}{\cancel{100}} \times 360 \times 23{,}4969}{277\cancel{0} \times \underset{1,1}{\cancel{5{,}5}}} = \frac{16917{,}768}{304{,}7} = 56.$$

Le quatrième billet sera donc payable le 9 août.

110. 6^{e} Problème.

Un négociant a un billet de 7 525 fr. à payer dans 4 mois et 12 jours. Il voudrait le remplacer par un de 2 240 fr. payable dans 3 mois 5 jours, par un second, de 1 950 fr., payable dans 2 mois et 15 jours, et par un troisième payable dans un mois et 20 jours. Quel doit être le montant de ce troisième billet, le taux de l'escompte étant 4 $^{3}/_{4}$ p. 100.

Le billet unique a pour valeur nominale. . . . . . 7 525 f 00

Son escompte est :

$$e = \frac{\overset{1505}{\cancel{7525}} \times \overset{\overset{11}{\cancel{22}}}{\cancel{132}} \times \overset{0,95}{\cancel{4,75}}}{\underset{20}{\cancel{100}} \times \underset{\cancel{60}\ \cancel{30}\ 6}{\cancel{360}}} = \frac{78636,25}{600} = \dots \qquad 131^{f}06$$

Sa valeur réelle est donc . . . . 7 393 f 94

La somme des valeurs nominales des deux premiers billets est :

$$2240 + 1950 = \dots\ 4190$$

Leur escompte est :

$$\frac{(2240 \times 95 + 1950 \times 75)\overset{0,95}{\cancel{4,75}}}{100 \times \underset{72}{\cancel{360}}} = \frac{\cancel{359050} \times \overset{0,19}{\cancel{0,95}}}{\underset{2}{\cancel{100}} \times 72} =$$

$$\frac{6821,95}{144} = \dots\dots\dots \quad 47,375$$

la somme de leurs valeurs réelles. 4142,625   4 142 f 625

donc la valeur réelle du troisième billet est . . . . . 3 251 f 315

et, comme il est payable dans 50 jours, je trouve sa valeur nominale par la formule du numéro 96 :

$$N = \frac{3251,315 \times \overset{\overset{4}{\cancel{20}}}{\cancel{100}} \times \cancel{360}}{\underset{\underset{4}{\cancel{20}}}{\cancel{100}} \times 36\cancel{0} - \cancel{50} \times \underset{0,95}{\cancel{4,75}}} = \frac{468189,36}{144 - 0,95} = 3\,272 \text{ fr. } 91.$$

4e section. — Prix de vente et d'achat.

Les questions relatives aux bénéfices réalisés ou aux pertes essuyées sur les *prix de vente et d'achat* de marchandises, rentrent absolument, comme on va le voir, dans les questions d'escompte en dehors et en dedans.

111. 1er Problème.

Un commerçant achète un objet 880 fr. Il veut, en le vendant, gagner 7 $^1/_2$ p. 100 sur le prix d'achat. Combien le vendra-t-il ?

Il a acheté 100 fr. ce qu'il vend $107^{f},50$,
il a acheté 880 fr. ce qu'il vend x fr. ;
d'où :

$$x = \frac{\overset{21,5}{\cancel{107,5}} \times \overset{44}{\cancel{880}}}{\underset{5}{\cancel{100}}} = 946 \text{ fr.}$$

Il gagne $946 - 880 = 66$ fr.

112. 2e Problème.

Un commerçant achète un objet 880 fr. Il consent, en le vendant, à perdre $7\,{}^1/_2$ p. 100 sur le prix d'achat. Combien le vendra-t-il ?

Il a acheté 100 fr. ce qu'il vend $92^{f},50$,
il a acheté 880 fr. ce qu'il vend x fr. ;
d'où :

$$x = \frac{\overset{44}{\cancel{880}} \times \overset{18,5}{\cancel{92,5}}}{\underset{5}{\cancel{100}}} = 814 \text{ fr.}$$

Il perd $880 - 814 = 66$ fr.

113. 3e Problème.

Un commerçant achète un objet 880 fr. Il veut, en le vendant, gagner $7\,{}^1/_2$ p. 100 sur le prix de vente. Combien le vendra-t-il ?

Ce qu'il vend 100 fr., il l'a acheté $92^{f},50$,
ce qu'il vend x fr., il l'a acheté 880 fr.

$$x = \frac{\overset{\overset{4}{\cancel{20}}}{\cancel{100}} \times 880}{\underset{\underset{3,7}{\cancel{18,5}}}{\cancel{92,5}}} = \frac{3520}{3,7} = 951 \text{ fr. } 35.$$

Il gagne 951 fr. 35 — 880 = 71 fr. 35.

114. 4e Problème.

Un commerçant achète un objet 880 fr. Il consent, en le vendant, à perdre $7\,{}^1/_2$ p. 100 sur le prix de vente. Combien le vendra-t-il ?

Ce qu'il vend 100 fr., il l'a acheté 107 fr. 50,
ce qu'il vend x fr., il l'a acheté 880 fr.

$$x = \frac{\overset{\overset{4}{\cancel{20}}}{\cancel{100}} \times 880}{\underset{\underset{4,3}{\cancel{21,5}}}{\cancel{107,5}}} = \frac{3520}{4,3} = 818 \text{ fr. } 60.$$

Il perd 880 — 818,60 = 61 fr. 40.

115. 5^e Problème.

Un commerçant vend un objet 1 260 fr., en gagnant 12 $^1/_2$ p. 100 sur le prix de vente. Combien l'a-t-il acheté ?

Il vend 100 fr. ce qu'il a acheté 87 fr. 50,
il vend 1 260 fr. ce qu'il a acheté x fr.

$$x = \frac{\overset{63}{\cancel{1260}} \times \overset{17,5}{\cancel{87,5}}}{\underset{2}{\cancel{100}}} = 1\,102 \text{ fr. } 50.$$

Il gagne 1260 — 1102,50 = 157 fr. 50.

116. 6^e Problème.

Un commerçant vend un objet 1 260 fr. en consentant à une perte de 12 $^1/_2$ p. 100 sur le prix de vente. Combien l'a-t-il acheté ?

Il vend 100 fr. ce qu'il a acheté 112 fr. 50,
il vend 1 260 fr. ce qu'il a acheté x fr.

$$x = \frac{\overset{63}{\cancel{1260}} \times \overset{22,5}{\cancel{112,5}}}{\underset{5}{\cancel{100}}} = 1\,417 \text{ fr. } 50.$$

Il perd 1417,50 — 1260 = 157 fr. 50.

117. 7^e Problème.

Un commerçant vend un objet 1 260 fr. en gagnant 12 $^1/_2$ p. 100 sur le prix d'achat. Combien l'a-t-il acheté ?

Ce qu'il a acheté 100 fr., il le vend 112 fr. 50,
ce qu'il a acheté x fr., il le vend 1 260 fr.

$$x = \frac{\overset{\overset{4}{\cancel{20}}}{\cancel{100}} \times \overset{\overset{28}{\cancel{252}}}{\cancel{1260}}}{\underset{\underset{\underset{\cancel{0,5}\ 0,1}{\cancel{4,5}}}{\cancel{22,5}}}{\cancel{112,50}}} = 1\,120 \text{ fr.}$$

Il gagne 1260 — 1120 = 140 fr.

118. 8e Problème.

Un commerçant vend un objet 1 260 fr. en consentant à une perte de 12 $^1/_2$ p. 100 sur le prix d'achat. Combien l'a-t-il acheté ?

Ce qu'il a acheté 100 fr., il le vend 87 fr. 50,
ce qu'il a acheté x fr., il le vend 1 260 fr.

$$x = \frac{\overset{\overset{4}{\cancel{20}}}{\cancel{100}} \times \overset{\overset{36}{\cancel{252}}}{\cancel{1260}}}{\underset{\underset{\underset{\cancel{0,7}\ 0,1}{\cancel{3,5}}}{\cancel{17,5}}}{\cancel{87,5}}} = 1\,440 \text{ fr.}$$

Il perd 1440 — 1260 = 180 fr.

CHAPITRE VI.

NOTIONS RÉSUMÉES DE TENUE DES LIVRES EN PARTIE DOUBLE [1].

119. La tenue des livres en partie double consiste à passer des écritures dans lesquelles on constate deux choses distinctes : *la personne* ou *le compte qui reçoit* une valeur quelconque, et *la personne* ou *le compte qui la fournit,* autrement dit *le débiteur* et *le créancier.*

---

1. Pour étudier la tenue des livres dans tous ses détails, on pourra consulter avec fruit un excellent ouvrage de M. Th. Bertrand (chez J. Delalain), dont j'ai résumé ici les premières pages.

Les opérations d'une maison de commerce sont résumées par six comptes principaux :

Le compte de *Marchandises générales;*

Le compte de *Caisse;*

Le compte d'*Effets à recevoir;*

Le compte d'*Effets à payer;*

Le compte de *Profits et pertes;*

Le compte de *Capital.*

Le commerçant *débite* le compte de Marchandises générales quand il *reçoit* des marchandises, et le *crédite* quand il en *fournit.*

Il *débite* le compte de Caisse quand il *reçoit* de l'argent, et le *crédite* quand il en *donne.*

Il *débite* le compte d'Effets à recevoir quand il *reçoit* des effets souscrits ou passés à son ordre, et le *crédite* quand il les *donne* en paiement ou qu'il les encaisse.

Il *crédite* le compte d'Effets à payer quand il *émet* des effets souscrits par lui, et le *débite* quand il les *paye.*

Il *débite* le compte de Profits et pertes quand il subit une *perte,* et le *crédite* quand il fait un *bénéfice.*

Quant au compte de Capital, il ne le fait jouer qu'une fois par an, quand il règle tous ses comptes : si, de ce règlement, il résulte pour lui un *bénéfice* pendant l'année, il en *crédite* le compte de Capital; s'il en résulte une *perte,* il l'en *débite.*

Outre ces comptes généraux, le commerçant tient encore un compte particulier pour chacun de ses correspondants, fournisseurs et clients.

Il *crédite* le compte d'un fournisseur quand il en *reçoit* des marchandises, et le *débite* quand il les lui *paye.*

Il *débite* le compte d'un client quand il lui *remet* des marchandises et le *crédite* quand celui-ci les *paye.*

A ces divers comptes, il faut joindre quelques comptes spéciaux tels que *Frais généraux, Matériel,* etc....

Des livres de commerce.

120. Les livres principaux employés dans le commerce sont le *Brouillard,* le *Journal,* le *Grand-Livre,* le *Livre des Inventaires* et le *Livre de Correspondance.* Ils sont, sauf le Brouillard et le Grand-Livre, prescrits par le Code de commerce; ces deux derniers ne sont donc pas obligatoires aux yeux de la loi; mais le Grand-Livre est absolument indispensable pour l'établissement des comptes dont je viens de parler. Il n'y a donc que le Brouillard qui puisse être supprimé.

Du Brouillard.

Le *Brouillard*, appelé aussi quelquefois Mémorial, contient l'énoncé des opérations au fur et à mesure qu'elles sont faites, et sans aucune forme obligatoire de rédaction.

Du Journal.

121. Le *Journal* reçoit son nom de l'obligation où est le commerçant d'y inscrire ses opérations jour par jour; il doit le faire sans omission, surcharge, ni rature.

Dans chaque article du Journal, on indique les comptes qui jouent entre eux, les uns au débit, les autres au crédit.

Chaque page du Journal doit porter un numéro d'ordre; elle est divisée en cinq colonnes, de la manière suivante :

1	2	3	4	5

Dans la colonne 1, on inscrit le folio du Grand-Livre où se trouve le compte *débité* dans l'article du Journal; dans la colonne 2, on inscrit le folio du compte *crédité;* dans la colonne 3, on énonce l'opération. S'il y a, dans l'article, plusieurs comptes débités ou crédités, on inscrit la somme qui concerne chacun d'eux dans la colonne 4, et le total dans la colonne 5.

Si, au contraire, il n'y a, dans l'article du Journal, qu'un seul compte débité et un seul compte crédité, on fait ressortir la somme immédiatement dans la colonne 5.

Du Grand-Livre.

122. Le *Grand-Livre* est le résumé, par compte, de la situation du commerçant : il est, sous une autre forme, la reproduction des écritures du Journal.

Le commerçant y est représenté par les six comptes dont j'ai parlé au n° 119, et qu'on appelle comptes généraux. Chacun de ses correspondants y est représenté par un compte particulier.

Souvent il existe au Grand-Livre un septième compte général, le *compte de Dépôts,* lorsque le commerçant a reçu de diverses personnes des sommes en dépôt et pour lesquelles il leur sert un intérêt. J'en reparlerai plus longuement au chapitre suivant, qui traitera des *Comptes courants.*

Chacun de ces comptes, général ou particulier, est ouvert sur deux pages en regard l'une de l'autre (verso et recto), et qui n'en forment qu'une réellement, avec un seul numéro de folio. La page de gauche sert pour le *Débit* ou *Doit,* celle de droite pour le *Crédit* ou *Avoir.*

Chacune contient quatre colonnes.

DOIT.							**AVOIR.**
1	2	3	4	1	2	3	4

Dans la colonne 1, on inscrit la date de l'opération ; dans la colonne 2, le détail de cette opération ; dans la colonne 3, le folio de l'article du Journal qui la contient ; dans la colonne 4, la somme.

Du Livre des Inventaires.

123. Le *Livre des Inventaires* est un registre sur lequel le commerçant inscrit, en détail, à la fin de chaque année, d'une part, tout ce qu'il possède, son *actif ;* de l'autre, tout ce qu'il doit, son *passif ;* de manière à présenter la situation exacte de sa maison.

Du Livre de Correspondance.

124. Le *Livre de Correspondance* ou le *Copie de lettres* est un registre sur lequel le commerçant tient la copie des lettres qu'il adresse à ses correspondants.

Des contre-parties.

125. On appelle *contre-parties* les opérations passées au Journal et au Grand-Livre pour rectifier des erreurs d'écritures.

Les erreurs les plus fréquentes sont les suivantes : oublier de passer une opération; ou, au contraire, la passer deux fois; ou bien, la passer à l'inverse de ce qui devrait être fait, c'est-à-dire débiter le compte qui devrait être crédité, et créditer le compte qui devrait être débité.

On rectifie la première erreur en passant l'écriture omise; on rectifie la seconde en passant une écriture en sens inverse de celles qui ont été passées en double emploi, de manière à en annuler une. Quant à la rectification de la troisième erreur, elle exige deux écritures; d'abord on en passe une en sens inverse de celle qui a été passée, afin de l'annuler; puis on en passe une autre, telle qu'elle aurait dû être passée la première fois.

Des Balances.

126. On appelle *Balances* les opérations de comptabilité qui ont pour but de vérifier les écritures passées.

Il faut distinguer la *Balance mensuelle*, et la *Balance générale* qui se fait ordinairement tous les ans.

La Balance mensuelle consiste, d'une part, à additionner toutes les sommes portées au Journal pendant le mois écoulé; de l'autre, à additionner au Grand-Livre tous les débits correspondants, puis les crédits.

Ces trois totaux doivent être identiques, ce que l'on comprend aisément, puisque chaque opération passée au Journal contient un débit et un crédit, qui sont portés pour la même somme au Grand-Livre.

La Balance générale consiste à faire l'inventaire de la maison de commerce, c'est-à-dire à établir au crédit du compte de Marchandises générales celles qui restent en magasin; au crédit du compte de Caisse les espèces qui s'y trouvent; au crédit du compte d'Effets à recevoir, ceux qui restent en portefeuille; au débit du compte d'Effets à payer, ceux qui restent en circulation; au crédit des comptes particuliers, les sommes dues par les correspondants du commerçant; et au débit de ces mêmes comptes, les sommes que le commerçant doit à ses correspondants.

En un mot, on porte au crédit des comptes les soldes qui constituent l'actif du commerçant et à leur débit ceux qui forment son passif. De la comparaison de ces soldes résulte la situation de la maison de commerce.

Je reviendrai, un peu plus loin, sur cette balance, qui est l'opération la plus importante de toute la tenue des livres.

Après ces quelques notions préliminaires, indispensables pour comprendre ce qui va suivre, je passe maintenant à la pratique, et je vais montrer par des exemples comment on établit un Brouillard, un Journal, un Grand-Livre et des Balances.

127. *Brouillard.*

Art. 1er. — Du 2 novembre 1885. J'entre dans les affaires avec 80 000 fr.; j'achète du drap et de la mousseline pour 50 000 fr.; je dépense 10 000 fr. pour achat de matériel; 2 000 fr. pour frais d'installation, et je verse 18 000 fr. dans ma caisse.

Voici comment je transporte cet article au Journal.

Le compte de *Capital* fournit 80 000 fr. : je le crédite; *Marchandises générales* reçoivent 50 000 fr.; *Matériel industriel,* 10 000 fr.; *Frais généraux,* 2 000 fr. et *Caisse,* 18 000 fr. : je les débite.

Art. 2. — Du 4 novembre. Je vends, à crédit, à Dupont, 160 mètres de drap à 25 fr. le mètre, soit 4 000 fr., et à Lefebvre 300 mètres à 20 fr. le mètre, soit 6 000 fr. Ensemble 10 000 fr.

Au Journal, je débite *Dupont* et *Lefebvre* qui reçoivent, et je crédite *Marchandises générales* qui fournissent.

Art. 3. — Du 6 novembre. Je vends à Dupont 250 mètres de drap à 24 fr. le mètre, soit 6 000 fr., qu'il m'a payés en espèces.

Dupont paye tout de suite : son compte ne doit pas figurer dans l'opération. Je débite *Caisse* et je crédite *Marchandises générales.*

Art. 4. — Du 7 novembre. Je vends à Lefebvre 110 mètres de drap à 19 fr. le mètre, soit 2 090 fr., qu'il me solde en son billet à mon ordre, au 5 décembre prochain.

Lefebvre ayant donné un billet est regardé comme ayant payé; donc son compte ne doit pas figurer au Journal. Je débite *Effets à recevoir* par le crédit de *Marchandises générales*.

Art. 5. — Du 14 novembre. J'achète à Girard, à crédit, 100 pièces de toile à 96 fr. l'une, soit 9 600 fr.

Je débite *Marchandises générales* par le crédit de *Girard*.

Art. 6. — Du 17 novembre. J'achète à Girard 50 pièces de toile à 125 fr. l'une, soit 6 250 fr., que je lui paye comptant.

Girard ne doit pas figurer au Journal, puisqu'il est payé tout de suite. Je débite *Marchandises générales* par le crédit de *Caisse*.

Art. 7. — Du 19 novembre. J'achète à Clément 20 pièces de mousseline à 150 fr. l'une, soit 3 000 fr., que je lui solde par mon billet à son ordre, au 15 janvier.

Je débite *Marchandises générales* par le crédit d'*Effets à payer*.

Art. 8. — Du 21 novembre. Dupont me remet 1 500 fr. en espèces et 2 500 fr. en un billet à mon ordre au 31 décembre pour solder sa facture du 4 novembre.

Je débite *Caisse* de 1 500 fr., *Effets à recevoir* de 2 500 fr., et je crédite *Dupont* de 4,000 fr.

Art. 9. — Du 30 novembre. Je paye 1 250 fr. de traitements à mes employés et je prélève 1 000 fr. pour mes dépenses personnelles.

Je débite *Frais généraux* par le crédit de *Caisse*.

En vérifiant mon portefeuille pour faire ma balance du mois, je m'aperçois que l'article 7 du Brouillard a été passé à l'inverse de ce qu'il aurait dû être passé. En effet, l'opération a été la suivante : le 19 novembre, j'ai vendu à Clément 20 pièces de mousseline à 150 fr. l'une, soit 3 000 fr., qu'il m'a soldés par son billet à mon ordre, au 15 janvier.

Pour rectifier l'erreur commise, je passe deux articles.

Art. 10. — Du 30 novembre. Cet article est destiné à annuler l'article 7 qui est erroné. Donc je débite *Effets à payer* par le crédit de *Marchandises générales*.

Art. 11. — Du 30 novembre. Cet article doit rétablir l'opération telle qu'elle aurait dû être passée. Donc je débite *Effets à recevoir* par le crédit de *Marchandises générales*.

Art. 12. — Du 1er décembre. Je paye à Girard le montant de sa fourniture du 14 novembre, soit 9 600 fr.

Je débite *Girard* par le crédit de *Caisse*.

Art. 13. — Du 3 décembre. Je vends à Lefebvre 115 mètres de drap à 30 fr., soit 3 450 fr., qu'il me solde, en passant à mon ordre un billet au 30 décembre, souscrit en sa faveur par un de ses correspondants.

Je débite *Effets à recevoir* et je crédite *Marchandises générales*.

Art. 14. — Du 5 décembre. J'encaisse le billet que Lefebvre m'a remis, le 7 novembre, en paiement de sa facture, soit 2 090 fr.

Je débite *Caisse* par le crédit d'*Effets à recevoir*.

Art. 15. — Du 5 décembre. Lefebvre acquitte le montant de sa facture du 4 novembre, s'élevant à 6 000 fr., sous déduction de 3 p. 100 d'escompte, soit 180 fr.

Je débite *Caisse* des 5 820 fr. qu'elle reçoit réellement; les 180 fr. d'escompte étant une perte pour moi, j'en débite *Profits et pertes*, et je crédite *Lefebvre* de 6 000 fr.

Art. 16. — Du 8 décembre. Je vends à Belin 150 mètres de drap à 12 fr. 50 le mètre, soit 1 875 fr., qu'il me paye, partie en un billet à mon ordre, de 1 200 fr., payable le 31 janvier prochain, partie en espèces, 675 fr., sous déduction de 4 p. 100 d'escompte, soit 27 fr.

Je débite *Effets à recevoir* de 1 200 fr., *Caisse* de 648 fr., *Profits et pertes* de 27 fr., et je crédite *Marchandises générales* du total.

Art. 17. — Du 11 décembre. J'achète à David une pièce de drap de 7 500 fr., que je paye de la manière suivante : 5 000 fr. par mon billet à son ordre, payable le 15 février prochain, et 2 500 fr. comptant, sous déduction de 3 p. 100 d'escompte, soit 75 fr.

Je débite *Marchandises générales* de 7 500 fr., je crédite *Effets à payer* de 5 000 fr., *Caisse* de 2 425 fr., et *Profits et pertes* de 75 fr.

Art. 18. — Du 15 décembre. Je me suis fait remettre par Achard une somme de 2 500 fr., sur laquelle je lui ai compté immédiatement un escompte de 3 $^1/_2$ p. 100, soit 87 fr. 50.

Je débite *Caisse* de 2 412 fr. 50 qu'elle reçoit réellement, *Profits et pertes* de 87 fr. 50, et je crédite *Achard* du total.

Art. 19. — Du 17 décembre. Je négocie à mon banquier le billet de Dupont, de 2 500 fr., qu'il m'a remis le 21 novembre, sous déduction de 2 p. 100 d'escompte, soit 50 fr.

Négocier un billet, c'est le vendre. Donc je débite *Caisse* de 2 450 fr. qu'elle reçoit réellement, *Profits et pertes* de 50 fr., et je crédite *Effets à recevoir* du total.

Art. 20. — Du 22 décembre. Je vends à Dupont 250 mètres de drap à 30 fr. le mètre, soit 7 500 fr., qu'il me solde par son billet à mon ordre, au 31 janvier.

Je débite *Effets à recevoir* par le crédit de *Marchandises générales*.

Art. 21. — Du 24 décembre. Je remets à Lefebvre une somme de 2 000 fr., sous déduction de 5 p. 100 d'escompte, soit 100 fr.

Je débite *Lefebvre* de 2 000 fr., je crédite *Caisse* de 1 900 fr. qu'elle fournit réellement, et *Profits et pertes* de 100 fr.

Art. 22. — Du 31 décembre. Je paye à mes employés 1 250 fr. de traitements, 600 fr. de gratifications, et je prélève 1 150 fr. pour mes dépenses personnelles.

Je débite *Frais généraux* par le crédit de *Caisse*.

128. Du 31 décembre. Les articles qui suivent sont destinés à établir la Balance générale en fin d'année.

Je fais l'*inventaire* des Marchandises qui restent en magasin, du numéraire que j'ai en Caisse, et des Effets à recevoir que j'ai en Portefeuille ; puis à l'aide du Grand-Livre je constate les soldes des comptes suivants. Je vois ainsi que, comme *actif*, je possède :

En Marchandises générales	55 250^{f} 00
En espèces dans la Caisse	13 495 50
En Matériel industriel	10 000 00
En Effets à recevoir (en portefeuille)	15 150 00
En soldes débiteurs des comptes particuliers (compte Lefebvre)	2 000 00

comme *passif*, je trouve :

En Effets à payer (en circulation).	5 000^{f} 00
En soldes créanciers des comptes particuliers (compte Achard).	2 500 00
En capital	80 000 00

J'inscris sur les divers comptes au Grand-Livre les sommes ci-dessus, excepté celle qui concerne le Capital, en portant au crédit de ces comptes par le débit d'un nouveau compte : *Balance de sortie,* les sommes qui composent mon *actif;* et au débit de ces comptes par le crédit de Balance de sortie les sommes qui composent mon *passif.*

De cette manière tous les comptes sont *soldés* à l'exception de Marchandises générales, de Frais généraux, de Profits et pertes, et de Capital.

Alors je *solde* les comptes de Marchandises générales et de Frais généraux par celui de Profits et pertes, puis le compte de Profits et pertes par celui de Capital. L'augmentation ou la diminution qui en résulte pour le Capital indique un bénéfice ou une perte et en donne le montant.

Enfin je solde le compte Capital par celui de Balance de sortie.

Toutes ces opérations étant faites sur le Grand-Livre, je les passe ensuite au Journal.

Dans les deux premiers articles je fais jouer le compte Profits et pertes avec ceux de Marchandises générales, de Frais généraux et de Capital; et dans les deux derniers, je fais jouer le compte Balance de sortie avec les autres comptes qui établissent mon actif et mon passif, comme je l'ai dit plus haut, mais en prenant pour chiffre du Capital, le montant auquel on arrive en y comprenant le solde du compte Profits et pertes. On verra plus loin qu'ici c'est 88 395 fr. 50.

Ces deux derniers articles doivent présenter le même total.

Ils constituent le *Bilan* de la maison de commerce.

129. Du 1er janvier 1886. Les quatre articles précédents ayant établi bien nettement ma situation, je recommence mes écritures à nouveau, au Grand-Livre d'abord, au Journal ensuite, en portant au débit des comptes ci-dessous par le crédit d'un nouveau compte : *Balance d'entrée,* toutes les sommes qui constituent mon *actif,* savoir :

En Marchandises générales	55 250f 00
En Espèces en caisse.	13 495 50
En Matériel industriel	10 000 00
En Effets à recevoir	15 150 00
En soldes débiteurs des comptes particuliers . . .	2 000 00

et en portant au crédit des comptes ci-dessous par le débit du compte : *Balance d'entrée,* toutes les sommes constituant mon *passif,* savoir :

En Effets à payer	5 000^{f}00
En soldes créanciers des comptes particuliers . . .	2 500 00
En Capital	88 395 50

Autrement dit, je passe des écritures absolument inverses de celles par lesquelles j'ai terminé l'année précédente.

Pour bien se rendre compte de ce jeu d'écriture, il faut personnifier la Balance de sortie et la Balance d'entrée.

Je considérerai la Balance de sortie comme un individu qui prendrait la suite des affaires du commerçant, de sorte qu'il doit être débité de tout l'actif de ce dernier, et crédité de tout son passif.

Au contraire, la Balance d'entrée, c'est le commerçant lui-même qui reprend ses affaires, et qui, par conséquent, doit être débité de tout son passif et crédité de tout son actif.

130. *Journal.*

1

		Novembre 1885.		
		Du 1er novembre.		
		Art. 1er.		
	7	Divers à Capital.		
		Savoir :		
1		Marchandises générales.	50 000f 00	
		p/achat de marchandises.		
3		Matériel	10 000 00	
		p/achat de matériel.		
3		Frais généraux	2 000 00	
		p/dépenses diverses.		
2		Caisse	18 000 00	80 000f 00
		p/remise en espèces.		
		Du 4 novembre.		
		Art. 2.		
	1	Divers à Marchandises générales.		
		Savoir :		
8		Dupont		
		p/vente de 160 m. de drap à 25 fr. le mètre .	4 000f 00	
9		Lefebvre		
		p/vente de 300 m. de drap à 20 fr. le mètre .	6 000 00	10 000 00
		Du 6 novembre.		
		Art. 3.		
2	1	Caisse à Marchandises générales.		
		p/vente comptant à Dupont de 250 m. de drap à 24 fr. le mètre		6 000 00
		Du 7 novembre.		
		Art. 4.		
4	1	Effets à recevoir à Marchandises générales.		
		p/vente de 110 m. de drap à 19 fr. le mètre, faite à Lefebvre, qui m'a soldé par un billet à mon ordre, au 5 décembre.		2 090 00
		Du 14 novembre.		
		Art. 5.		
1	9	Marchandises générales à Girard.		
		p/achat de 100 pièces de toile à 96 fr. l'une .		9 600 00
		A reporter.		107 690f 00

2

		Report.		107 690f 00
		Du 17 novembre.		
		Art. 6.		
1	2	Marchandises générales à Caisse.		
		p/achat au comptant fait à Girard de 50 pièces de toile à 125 fr. l'une.		6 250 00
		Du 19 novembre.		
		Art. 7.		
1	5	Marchandises générales à Effets à payer.		
		p/achat fait à Clément de 20 pièces de mousseline à 150 fr. l'une, que je lui ai soldées par mon billet à son ordre au 15 janvier. .		3 000 00
		Du 21 novembre.		
		Art. 8.		
	8	Divers à Dupont.		
		Savoir :		
2		Caisse	1 500f 00	
		p/son paiement en espèces.		
4		Effets à recevoir	2 500 00	4 000 00
		p/sa remise d'un billet à mon ordre au 31 décembre.		
		Du 30 novembre.		
		Art. 9.		
3	2	Frais généraux à Caisse.		
		p/dépenses diverses, savoir : Traitements . . . . 1 250f Dépenses personnelles. . . . 1 000		2 250 00
		Du dit.		
		Art. 10.		
5	1	Effets à payer à Marchandises générales.		
		p/dépassement de l'art. 7, erroné		3 000 00
		Du dit.		
		Art. 11.		
4	1	Effets à recevoir à Marchandises gén.		
		p/vente faite à Clément de 20 pièces de mousseline, à 150 fr. l'une, qu'il m'a soldées par son billet à mon ordre, au 15 janvier. (Rétablissement de l'art. 7)		3 000 00
		Total du mois de novembre. . .		129 190f 00

		Décembre 1885.		
		Du 1er décembre.		
		Art. 12.		
9	2	Girard à Caisse.		
		p/paiement de sa facture du 14 novembre .		9 600f 00
		Du 3 décembre.		
		Art. 13.		
4	1	Effets à recevoir à Marchandises gén.		
		p/vente de 115 m. de drap à 30 fr. le mètre, faite à Lefebvre, qu'il m'a soldés en un billet à mon ordre, au 30 décembre		3 450 00
		Du 5 décembre.		
		Art. 14.		
2	4	Caisse à Effets à recevoir.		
		p/encaissement de l'effet Lefebvre remis le 7 novembre		2 090 00
		Du dit.		
		Art. 15.		
	9	Divers à Lefebvre.		
		Savoir :		
2		Caisse	5 820f 00	
		p/son paiement en espèce.		
6		Profits et pertes	180 00	6 000 00
		p/escompte de 3 p. 100 sur 6 000 fr.		
		Du 8 décembre.		
		Art. 16.		
	1	Divers à Marchandises générales.		
		p/vente à Belin de 150 m. de drap à 12 fr. 50 le mètre, qu'il m'a soldés comme suit :		
		Savoir :		
4		Effets à recevoir	1 200f 00	
		p/remise de s/billet à m/ordre au 31 janvier.		
2		Caisse	648 00	
		p/sa remise en espèces.		
6		Profits et pertes	27 00	1 875 00
		p/escompte de 4 p. 100 sur 675 fr.		
		A reporter.		23 015f 00

4

		Report.		23 015f 00
		Du 11 décembre.		
		Art. 17.		
1		Marchandises générales à Divers.		
		p/achat fait à David d'une pièce de drap que je lui ai soldée comme suit :		
		Savoir :		
	5	à Effets à payer	5 000f 00	
		p/m/remise d'un billet à son ordre, au 15 février.		
	2	à Caisse.	2 425 00	
		p/ma remise en espèces.		
	6	à Profits et pertes.	75 00	7 500 00
		p/escompte à 3 p. 100 sur 2 500 fr.		
		Du 15 décembre.		
		Art. 18.		
	8	Divers à Achard.		
		p/son versement.		
		Savoir :		
2		Caisse	2 412f 50	
		p/sa remise en espèces.		
6		Profits et pertes	87 50	2 500 00
		p/escompte à 3 p. 100 sur 2 500 fr.		
		Du 17 décembre.		
		Art. 19.		
	4	Divers à Effets à recevoir.		
		p/négociation du billet Dupont, remis le 21 novembre.		
		Savoir :		
2		Caisse	2 450f 00	
		p/espèces reçues.		
6		Profits et pertes	50 00	2 500 00
		p/escompte à 2 p. 100 sur 2 500 fr.		
		Du 22 décembre		
		Art. 20.		
4	1	Effets à recevoir à Marchandises gén.		
		p/vente faite à Dupont de 250 m. de drap à 30 fr. le mètre, qu'il m'a soldés en son billet à mon ordre, au 31 janvier		7 500 00
		Du 24 décembre.		
		Art. 21.		
9		Lefebvre à Divers.		
		p/remise faite à Lefebvre.		
		Savoir :		
	2	à Caisse.	1 900f 00	
		espèces.		
	6	à Profits et pertes.	100 00	2 000 00
		p/escompte à 5 p. 100 sur 2,000 fr.		
		A reporter.		45 015f 00

		Report.		45 015f 00
		Du 31 décembre.		
		Art. 22.		
3	2	Frais généraux à Caisse.		
		p/dépenses diverses, savoir :		
		Traitements . . . . 1 250 fr.		
		Gratifications. 600		
		Dépenses personnelles. . . . 1 150		3 000 00
		Du dit.		
		Art. 23.		
1	6	Marchandises générales à Profits et pertes.		
		p/transport du solde créditeur de ce compte.		15 815 00
		Du dit.		
		Art. 24.		
6		Profits et pertes à Divers.		
		Savoir :		
	3	à Frais généraux	7 250f 00	
		p/transport du solde débiteur de ce compte.		
	7	à Capital	8 395 50	15 645 50
		p/bénéfices de la maison résultant du solde du compte Profits et pertes.		
		Du dit.		
		Art. 25.		
10		Balance de sortie à Divers.		
		p/transport des soldes suivants, savoir :		
	1	à Marchandises générales.	55 250f 00	
		valeur des marchandises en magasin.		
	2	à Caisse.	13 495 50	
		espèces en caisse.		
	3	à Matériel.	10 000 00	
		valeur de ce matériel.		
	4	à Effets à recevoir	15 150 00	
		valeur des effets en portefeuille.		
	9	à Lefebvre.	2 000 00	95 895 50
		solde débiteur de son compte.		
		Du dit.		
		Art. 26.		
	10	Divers à Balance de sortie.		
		p/transport des soldes suivants, savoir :		
5		Effets à payer	5 000f 00	
		valeur des effets en circulation.		
7		Capital, solde créditeur	88 395 50	
8		Achard, solde créditeur	2 500 00	95 895 50
		Total de décembre.		271 266f 50
		Antérieur		129 190 00
		Total au 31 décembre 1885.		400 456f 50

6

		Janvier 1886.		
		Du 1er janvier.		
		Art. 1er.		
	10	Divers à Balance d'entrée.		
		p/transport des soldes suivants, savoir :		
1		Marchandises générales	55 250f 00	
		valeur des marchandises en magasin.		
2		Caisse	13 495 50	
		espèces en caisse.		
3		Matériel.	10 000 00	
		valeur de ce matériel.		
4		Effets à recevoir	15 150 00	
		valeur des effets en portefeuille.		
9		Lefebvre, solde à nouveau	2 000 00	95 895f 50
		Du dit.		
		Art. 2.		
10		Balance d'entrée à Divers.		
		p/transport des soldes suivants, savoir :		
	5	Effets à payer	5 000f 00	
		valeur des effets en circulation.		
	7	Capital, solde à nouveau.	88 395 50	
	8	Achard, solde à nouveau	2 500 00	95 895 50

131. *Grand-Livre.*

RÉPERTOIRE.

MARCHANDISES GÉNÉRALES.

Doit. 1 — **Avoir.** 1

1885				**1885**			
1er novembre.	A Capital . . . . p/achats divers.	1	50 000f 00	4 novembre.	Par Divers. . . . . p/ventes diverses.	1	10 000f 00
14 —	A Girard . . . . p/achat de toile.	1	9 600 00	6 —	Par Caisse. . . . . p/vente comptant.	1	6 000 00
17 —	A Caisse . . . . p/achat à Girard.	2	6 250 00	7 —	Par Effets à recevoir. . . . . p/vente à Lefebvre.	1	2 090 00
19 —	A Effets à payer . . . . p/achat à Clément.	2	3 000 00	30 —	Par Effets à payer . . . . p/annulation du débit du 19 novembre.	2	3 000 00
				30 —	Par Effets à recevoir. . . . . p/vente à Clément.	2	3 000 00
			68 850f 00				24 090f 00
11 décembre.	A Divers . . . . p/achat à David.	4	7 500 00	3 décembre.	Par Effets à recevoir . . . . p/vente à Lefebvre.	3	3 450 00
				8 —	Par Divers . . . . p/vente à Belin.	3	1 875 00
				22 —	Par Effets à recevoir. . . . . p/vente à Dupont.	4	7 500 00
31 —	A Profits et Pertes . . . . p/solde créditeur.	5	15 815 00	31 —	Par Balance de sortie . . . . p/marchandises en magasin.	5	55 250 00
			92 165f 00				92 165f 00
1886				**1886**			
1er janvier.	A Balance d'entrée . . . . p/marchandises en magasin.	6	55 250f 00				

2

Doit. CAISSE.

1885			
1er novembre.	A Capital . . . . p/remise d'espèces.	1	18 000f 00
6 —	A Marchandises générales . . . . p/vente comptant.	1	6 000 00
21 —	A Dupont. . . . . p/paiement en espèces.	2	1 500 00
			25 500f 00
5 décembre.	A Effets à recevoir . . . . p/encaissement de l'effet Lefebvre.	3	2 090 00
5 —	A Lefebvre . . . . p/paiement en espèces.	3	5 820 00
8 —	A Marchandises générales . . . . p/vente à Belin.	3	648 00
15 —	A Achard. . . . . p/son versement.	4	2 412 50
17 —	A Effets à recevoir . . . . p/négociation de l'effet Dupont.	4	2 450 00
			38 920f 50
1886			
1er janvier.	A Balance d'entrée . . . . p/espèces en caisse.	6	13 495f 50

CAISSE. **Avoir.**

2

1885			
17 novembre.	Par Marchandises générales. . . . . p/achat au comptant.	2	6 250f 00
30 —	Par Frais généraux . . . . p/dépenses diverses.	2	2 250 00
			8 500f 00
1er décembre.	Par Girard . . . . p/paiement de sa facture.	3	9 600 00
11 —	Par Marchandises générales. . . . . p/achat à David.	4	2 425 00
24 —	Par Lefebvre. . . . . p/avance à lui faite.	4	1 900 00
31 —	Par Frais généraux . . . . p/dépenses diverses.	5	3 000 00
31 —	Par Balance de sortie . . . . p/espèces en caisse.	5	13 495 50
			38 920f 50
1886			

MATÉRIEL.

Doit. 3 | **Avoir.** 3

1885				1885			
1er novembre.	A Capital . . . . p/achat de matériel.	1	10 000f 00	31 décembre.	Par Balance de sortie . . . . p/transport de solde débiteur.	5	10 000f 00
1886				1886			
1er janvier.	A Balance d'entrée . . . . p/solde à nouveau.	6	10 000f 00				

FRAIS GÉNÉRAUX.

1885				1885			
1er novembre.	A Capital . . . . p/frais d'installation.	1	2 000f 00				
30 —	A Caisse . . . . p/dépenses diverses.	2	2 250 00				
			4 250f 00				
31 décembre.	A Caisse . . . . p/dépenses diverses.	5	3 000 00				
			7 250f 00	31 décembre.	Par Profits et Pertes. . . . . p/solde du compte : Frais généraux.	5	7 250f 00

4

EFFETS A RECEVOIR.

Doit.

1885			
7 novembre.	A Marchandises générales. . . . . p/vente Lefebvre.	1	2 090^{f} 00
21 —	A Dupont. . . . . p/sa remise d'effet.	2	2 500 00
30 —	A Marchandises générales. . . . . p/vente Clément.	2	3 000 00
			7 590^{f} 00
3 décembre.	A Marchandises générales. . . . . p/vente Lefebvre.	3	3 450 00
8 —	A Marchandises générales. . . . . p/vente Belin.	3	1 200 00
22 —	A Marchandises générales. . . . . p/vente Dupont.	4	7 500 00
			19 740^{f} 00
1886			
1er janvier.	A Balance d'entrée . . . . p/montant des effets en portefeuille.	6	15 150^{f} 00

Avoir.

1885			
5 décembre.	Par Caisse. . . . . p/encaissement de l'effet Lefebvre.	3	2 090^{f} 00
17 —	Par Divers. . . . . p/négociation de l'effet Dupont.	4	2 500 00
31 —	Par Balance de sortie . . . . p/montant des effets en portefeuille.	5	15 150 00
			19 740^{f} 00
1886			

5 **Doit.** EFFETS A PAYER. **Avoir.** 5

1885				**1885**			
30 novembre.	A Marchandises générales . . . . p/annuler le crédit du 19 novembre.	2	3 000f 00	19 novembre.	Par Marchandises générales. . . . . p/achat Clément.	2	3 000f 00
31 décembre.	A Balance de sortie. . . . . p/montant des effets en circulation.	5	5 000 00	11 décembre.	Par Marchandises générales. . . . . p/achat David.	4	5 000 00
			8 000f 00				8 000f 00
1886				**1886**			
				1er janvier.	Par Balance d'entrée . . . . p/montant des effets en circulation.	6	5 000f 00

PROFITS ET PERTES.

Doit. 6

1885			
5 décembre.	A Lefebvre . . . . p/escompte s/son paiement.	3	180f 00
8 —	A Marchandises générales . . . . p/escompte s/vente Belin.	3	27 00
15 —	A Achard. . . . . p/escompte s/sa remise.	4	87 50
17 —	A Effets à recevoir . . . . p/frais de négociation de l'effet Dupont.	4	50 00
31 —	A Frais généraux. . . . . p/transport du solde de ce compte.	5	7 250 00
31 —	A Capital. . . . . p/transport du solde du compte Profits et Pertes.	5	8 395 50
			15 990f 00

Avoir. 6

1885			
11 décembre.	Par Marchandises générales. . . . . p/escompte s/achat David.	4	75f 00
24 —	Par Lefebvre. . . . . p/escompte s/l'avance à lui faite.	4	100 00
31 —	Par Marchandises générales. . . . . p/transport du solde de ce compte.	5	15 815 00
			15 990f 00

Doit. 7 CAPITAL. | CAPITAL. **Avoir.** 7

1885				**1885**			
				1er novembre.	Par Divers . . . . p/emplois divers.	1	80 000f 00
31 décembre.	A Balance de sortie. . . . . p/transport de solde	5	88 395f 50	31 décembre.	Par Profits et Pertes. . . . . p/solde de ce compte.	5	8 395 50
			88 395f 50				88 395f 50
1886				**1886**			
				1er janvier.	Par Balance d'entrée . . . . p/solde à nouveau.	6	88 395f 50

8 **Doit.** ACHARD. **Avoir.** 8

1885				**1885**			
31 décembre.	A Balance de sortie . . . . p/transport de solde.	5	2 500f 00	15 décembre.	Par Divers . . . . p/son versement.	4	2 500f 00
				1886			
				1er janvier.	Par Balance d'entrée . . . . p/solde à nouveau.	6	2 500f 00

DUPONT. DUPONT.

1885				**1885**			
4 novembre.	A Marchandises générales . . . . p/achat fait par lui.	1	4 000f 00	21 novembre.	Par Divers . . . . p/paiement.	2	4 000f 00

9 **Doit.** GIRARD. | GIRARD. **Avoir.** 9

1885				**1885**			
				14 novembre.	Par Marchandises générales. . . . . p/fourniture faite par lui.	1	9 600f 00
1er décembre.	A Caisse . . . . p/paiement de sa fourniture.	3	9 600f 00				

LEFEBVRE. | LEFEBVRE.

1885				**1885**			
4 novembre.	A Marchandises générales . . . . p/achat fait par lui.	1	6 000f 00				
24 décembre.	A Divers . . . . p/avance à lui faite.	4	2 000 00	5 décembre.	Par Divers. . . . . p/paiement.	3	6 000f 00
				31 —	Par Balance de sortie . . . . p/transport de solde.	5	2 000 00
			8 000f 00				8 000f 00
1886							
1er janvier.	A Balance d'entrée . . . . p/solde à nouveau.	6	2 000f 00				

Doit. BALANCE DE SORTIE. **Avoir.**

10 10

1885			**1885**			
31 décembre.	A Divers . . . . p/transport de soldes débiteurs.	5	95 895f 50	31 décembre.	Par Divers. . . . . p/transport de soldes créditeurs.	5	95 895 50

BALANCE D'ENTRÉE.

1886				**1886**			
1er janvier.	A Divers . . . . p/transport de soldes créditeurs.	6	95 895f 50	1er janvier.	Par Divers . . . . p/transport de soldes débiteurs.	6	95 895 50

132. Balances.

BALANCE MENSUELLE.

Balance au 30 novembre 1885.

TITRES DES COMPTES.	FOLIOS du Grand Livre.	DÉBIT.	CRÉDIT.	SOLDES débiteurs.	SOLDES créditeurs.
Marchandises générales	1	68 850	24 090	44 760	»
Caisse	2	25 500	8 500	17 000	»
Matériel	3	10 000	»	10 000	»
Frais généraux. . . .	3	4 250	»	4 250	»
Effets à recevoir . . .	4	7 590	»	7 590	»
Effets à payer	5	3 000	3 000	»	»
Profits et pertes . . .	6	»	»	»	»
Capital.	7	»	80 000	»	80 000
Achard.	8	»	»	»	»
Dupont.	8	4 000	4 000	»	»
Girard	9	»	9 600	»	9 600
Lefebvre	9	6 000	»	6 000	»
		129 190	129 190	89 600	89 600

BALANCE GÉNÉRALE AU 31 DÉCEMBRE 1885.

TITRES DES COMPTES.	FOLIOS du Grand Livre.	DÉBIT.	CRÉDIT.
Marchandises générales	1	92 165 00	92 165 00
Caisse	2	38 920 50	38 920 50
Matériel	3	10 000 00	10 000 00
Frais généraux.	3	7 250 00	7 250 00
Effets à recevoir	4	19 740 00	19 740 00
Effets à payer	5	8 000 00	8 000 00
Profits et pertes	6	15 990 00	15 990 00
Capital.	7	88 395 50	88 395 50
Achard.	8	2 500 00	2 500 00
Dupont.	8	4 000 00	4 000 00
Girard.	9	9 600 00	9 600 00
Lefebvre	9	8 000 00	8 000 00
Balance de sortie.	10	95 895 50	95 895 50
		400 456 50	400 456 50

CHAPITRE VII.

COMPTES COURANTS AVEC INTÉRÊTS.

133. Je ne peux mieux commencer ce chapitre qu'en transcrivant la plus grande partie de l'article 1440 de l'Instruction générale des Finances sur la comptabilité publique en France.

Depuis 1808, les écritures des trésoriers généraux et celles des receveurs particuliers sont tenues en partie double. Cette méthode consiste à employer pour la description de chaque opération, deux agents ou comptes, dont l'un est débité et l'autre crédité. Celui qui *doit, reçoit* ou *a reçu* est *débiteur;* celui à qui *il est dû,* qui *paye* ou *a payé* est *créditeur.*

Pour l'application de ces règles à la comptabilité des trésoriers généraux, sept catégories principales de comptes sont employées, savoir :

Comptes de valeurs;

Comptes de produits publics;

Comptes de dépenses publiques;

Comptes de services spéciaux;

Comptes de trésorerie;

Comptes des correspondants administratifs;

Compte courant du receveur particulier avec le trésorier général, et *compte courant du trésorier général avec le Trésor.*

Les comptes de valeurs sont *débités* du *numéraire ou des effets qui entrent* en caisse ou en portefeuille; ils sont *crédités* du *numéraire ou des effets qui en sortent.*

Les comptes de produits publics sont *crédités* des *versements* que font les redevables, et *débités* par la *centralisation* qui est faite de ces produits *dans les comptes courants du trésorier général* ou *du Trésor.*

Les comptes de dépenses publiques sont *débités* des *paiements* faits aux créanciers de l'État, et *crédités* par l'*application* de ces paiements *aux comptes courants mentionnés ci-dessus.*

Les comptes de services spéciaux sont *crédités* des *recettes* et *débités* des *dépenses* qui concernent ces services.

Les comptes de recettes du service de trésorerie sont *crédités* des *recettes* que le comptable effectue comme agent de transmission de fonds; les comptes de dépenses du même service sont *débités* des *paie-*

ments que le comptable fait en la même qualité. Les uns et les autres sont soldés par l'application des opérations aux comptes courants déjà mentionnés.

Les comptes des correspondants administratifs servent à constater: *à leur crédit, les recettes* que l'agent du Trésor opère pour leur service et dont il leur doit compte; *à leur débit,* les *paiements* qu'il fait pour eux et dont ces correspondants ont à compter avec lui.

Enfin les comptes courants des receveurs particuliers avec le trésorier général et du trésorier général avec le Trésor servent à centraliser au *crédit* toutes les opérations de *recettes,* au *débit* toutes les opérations de *dépenses* faites pour le service public.

Ainsi, lorsqu'une recette a eu lieu, le comptable débite la caisse ou le compte de portefeuille qui a reçu, ou le compte de l'agent par lequel la recette a été opérée; et il crédite ou le compte de produits représentant le comptable qui a payé, ou le compte de trésorerie représentant l'agent qui a versé les fonds, ou le compte du correspondant auquel appartient la somme reçue.

De même, lorsqu'un paiement a été effectué, le comptable crédite le compte de la valeur remise en paiement, ou le compte de l'agent qui a payé, et il débite ou le compte de dépense représentant le créancier qui reçoit, ou le compte de trésorerie représentant l'agent auquel les fonds sont versés, ou le compte du correspondant qui doit la somme payée.

A la fin de chaque dizaine, les comptes qui ont été *crédités* des recettes sont *débités :* dans les écritures du receveur particulier par le *crédit* du compte courant du trésorier général; dans les écritures du trésorier général par le *crédit* du compte courant du Trésor; et les comptes qui ont été *débités* des dépenses sont *crédités* par le *débit* des mêmes comptes courants qui résument dès lors la situation du comptable sur l'ensemble de son service.

Quant au compte courant du trésorier général avec le Trésor, qui est tenu au ministère des Finances (Direction du mouvement général des fonds), il comprend au *débit* toutes les *recettes* effectuées par le comptable, et au *crédit* toutes les *dépenses* qu'il a faites.

Ce compte se règle tous les trois mois et porte intérêt à 4 p. 100 l'an.

134. Avant d'exposer les diverses méthodes employées pour l'établissement d'un compte courant, je vais donner la définition d'une expression qui reviendra constamment dans le courant de cette étude; c'est celle du *nombre*.

Dans un compte courant on appelle *nombre* le produit du capital par le nombre de jours d'intérêts, divisé par 100. Habituellement, avant de faire ce produit, on néglige les centimes du capital, s'ils sont égaux ou inférieurs à 50; s'ils lui sont supérieurs, on les néglige de même, mais après avoir forcé d'une unité le chiffre des francs. On fait ensuite la multiplication, et dans le produit on néglige les deux chiffres de droite, s'ils forment un nombre égal ou inférieur à 50; s'ils forment un nombre supérieur, on les néglige de même, mais après avoir forcé d'une unité le dernier chiffre conservé.

Ainsi pour obtenir le nombre de 2 755 fr. 65 c. par 173 jours, je fais d'abord le produit

$$2\,756 \times 173 = 476788$$

et je prends

$$4768$$

pour nombre.

135. Voici maintenant comment à l'aide du nombre on obtient l'intérêt.

Reportons-nous à la formule des intérêts donnée au n° 77 :

$$i = \frac{c \times a \times t}{100 \times 360}$$

D'après la définition du nombre

$$n = \frac{c \times a}{100}$$

Donc :

$$i = n \times \frac{t}{360} = n : \frac{360}{t} = \frac{n}{d}$$

en appelant *d*, *diviseur*, le quotient de 360 par le taux.

Par conséquent l'intérêt s'obtient en divisant le nombre par le diviseur.

Je vais calculer les diviseurs correspondants aux taux d'intérêts le plus souvent employés :

$$\text{à 1 p. 100,} \qquad d = \frac{360}{1} = 360$$

à 1 $^1/_4$ p. 100, $d = \dfrac{360}{1,25} = 288$

à 1 $^1/_2$ p. 100, $d = \dfrac{360}{1,5} = 240$

à 1 $^3/_4$ p. 100, $d = \dfrac{360}{1,75} = 205,714$

à 2 p. 100, $d = \dfrac{360}{2} = 180$

à 2 $^1/_4$ p. 100, $d = \dfrac{360}{2,25} = 160$

à 2 $^1/_2$ p. 100, $d = \dfrac{360}{2,5} = 144$

à 2 $^3/_4$ p. 100, $d = \dfrac{360}{2,75} = 130,909$

à 3 p. 100, $d = \dfrac{360}{3} = 120$

à 3 $^1/_4$ p. 100, $d = \dfrac{360}{3,25} = 110,769$

à 3 $^1/_2$ p. 100, $d = \dfrac{360}{3,5} = 102,857$

à 3 $^3/_4$ p. 100, $d = \dfrac{360}{3,75} = 96$

à 4 p. 100, $d = \dfrac{360}{4} = 90$

à 4 $^1/_4$ p. 100, $d = \dfrac{360}{4,25} = 84,706$

à 4 $^1/_2$ p. 100, $d = \dfrac{360}{4,5} = 80$

à 4 $^3/_4$ p. 100, $d = \dfrac{360}{4,75} = 75,789$

à 5 p. 100, $d = \dfrac{360}{5} = 72$

à 5 $^1/_4$ p. 100, $d = \dfrac{360}{5,25} = 68,751$

à 5 $^1/_2$ p. 100, $d = \dfrac{360}{5,5} = 65,455$

$$\text{à } 5\,{}^3/_4 \text{ p. } 100,\ d = \frac{360}{5{,}75} = 62{,}609$$

$$\text{à } 6 \text{ p. } 100,\quad d = \frac{360}{6} = 60 \qquad \text{etc.}$$

Un compte courant se faisant avec le même taux d'intérêt pour toutes les opérations, on calcule le nombre pour chacune d'elles, on fait le total des nombres ainsi obtenus, et on en déduit l'intérêt. C'est bien plus court que de calculer l'intérêt pour chaque opération.

MÉTHODES POUR ÉTABLIR UN COMPTE COURANT.

136. *Méthode directe.*

La *méthode directe* consiste à calculer les nombres tant au débit qu'au crédit du compte, depuis le jour de l'opération jusqu'à celui où ce compte se termine, en faire la différence et calculer les intérêts résultant de cette différence de nombres.

Exemple.

Un banquier ouvre à un particulier, le 11 janvier 1886, un compte courant, dont les intérêts se calculeront au 30 juin suivant, à 4 p. 100.

Le particulier verse 1 250 fr. le 11 janvier, 2 700 fr. le 18 février; il délivre le 26 février un chèque de 3 520 fr. à un créancier qui vient le toucher le même jour chez le banquier; le 4 mars, il remet au banquier un effet de 1 825 fr. payable le 4 avril, et qu'il passe à son ordre; le 26 avril, il retire 1 225 fr.; le 14 mai, il verse 1 530 fr.; le 23 mai, il retire 1 850 fr.; le 11 juin, il verse 750 fr.; enfin le 26 juin, il retire 470 fr.

Quel est le solde de son compte au 30 juin, sachant que les intérêts pour les retraits partent de la veille, et pour les versements du lendemain des jours où ils ont été opérés, et que tous les mois sont comptés de 30 jours ?

Dans l'établissement de ce compte courant, pour tenir compte de la différence d'un jour en plus au débit, et d'un jour en moins au crédit, je change la date des opérations comme si elles avaient été faites, la veille, pour les débits, et le lendemain, pour les crédits.

Compte courant de M. .... à 4 p. 100. — Du 11 janvier 1886 au 30 juin 1886.

Méthode directe.

Doit.

DATES.	MOTIFS DES DÉBITS.	SOMMES.	JOURS.	NOMBRES.
25 février.	S/chèque	3 520 00	125	4 400
25 avril.	S/retrait.	1 225 00	65	796
22 mai.	S/retrait.	1 850 00	38	703
25 juin.	S/retrait.	470 00	5	23
		7 065 00		
30 juin.	Solde créditeur.	1 013 20		
		8 078 20		5 922

Avoir.

DATES.	MOTIFS DES CRÉDITS.	SOMMES.	JOURS.	NOMBRES.
12 janvier.	S/versement	1 250 00	168	2 100
19 février.	S/versement	2 700 00	131	3 537
4 mars.	S/remise effet-valeur au 5 avril . . .	1 825 00	85	1 551
15 mai.	S/versement	1 530 00	45	688
12 juin.	S/versement	750 00	18	135
		8 055 00		8 011
30 juin.	Balance des nombres.			2 089
	produisant en intérêts à 4 p. 100. .	23 20		
		8 078 20		5 922
1er juillet.	Solde créditeur à nouveau	1 013 20	180	1 823

Remarque. L'expression, *valeur au 5 avril,* employée à la troisième somme du crédit, veut dire que l'intérêt part du 5 avril; ce qui doit être, puisque l'effet ne sera touché par le banquier que le 4 avril, et que le crédit donné au déposant, doit, d'après les conventions, partir du lendemain. Le mot *valeur* est le mot consacré dans les comptes courants pour indiquer l'époque à partir de laquelle on calcule l'intérêt.

Pour le solde créditeur à nouveau, il est considéré comme établi au 30 juin, par conséquent l'intérêt part de ce jour-là; aussi ai-je compté 180 jours jusqu'à la fin de l'année.

Dans le commerce, les banquiers prennent comme taux d'intérêt celui de la Banque de France; mais, pour trouver quelque bénéfice dans les comptes courants qu'ils ouvrent, en général ils déduisent du solde créditeur une commission de 1/4 p. 100 calculée sur le montant du débit. Dans le compte précédent, cette commission serait de

$$\frac{70,65}{4} = 17 \text{ fr. } 65 \text{ c.}$$

Le solde créditeur serait ainsi réduit à

$$1013,20 - 17,65 = 995 \text{ fr. } 55 \text{ c.}$$

137. La méthode directe, très simple d'ailleurs, présente plusieurs inconvénients.

Le premier, c'est que l'on ne peut faire le calcul des nombres que lorsque l'on sait d'avance à quelle époque se terminera le compte; ce qui n'a pas lieu ordinairement, le déposant étant libre de demander le règlement de son compte au jour où il lui convient de le faire. Aussi les banquiers ont-ils complètement abandonné cette méthode et en emploient-ils une autre, dont je parlerai plus loin, dite *méthode inverse*.

138. Le second inconvénient, c'est que souvent, dans les opérations qui ont lieu à une époque voisine de la fin du compte, la valeur qu'il faut y appliquer dépasse le jour de cette fin de compte. Par exemple, dans le compte précédent, si la dernière somme du crédit, 750 fr., avait été un effet payable le 15 juillet, il aurait fallu compter 15 jours d'intérêts au débit du compte, puisque ce compte est arrêté au 30 juin, et que l'effet remis au banquier ne serait touché par lui que le 15 juillet, c'est-à-dire 15 jours plus tard.

La même difficulté peut se présenter dans les sommes du débit.

Or, cette manière de procéder à l'établissement d'un compte est absolument inadmissible; elle en rendrait la vérification, sinon impossible, du moins fort pénible.

Pour éviter cet inconvénient, lorsqu'on a, soit au débit, soit au crédit, des sommes dont la valeur dépasse l'époque de la fin du compte, on écrit les nombres du même côté (débit ou crédit) que les sommes auxquelles ils correspondent, mais à *l'encre rouge,* et on les retranche du total des nombres au milieu desquels ils se trouvent.

Cette opération, toute simple qu'elle est, rend cependant le règlement d'un compte plus long à faire, et peut même amener bien des erreurs de calculs. Aussi y a-t-on renoncé complètement.

Au ministère des Finances, où les Comptes courants des trésoriers généraux se règlent par trimestre, et pour lesquels on emploie la méthode directe, voici comment on procède.

Au débit comme au crédit, on établit deux colonnes de nombres, l'une en faveur du Trésor public, l'autre en faveur du trésorier général. Lorsque les écritures d'un compte sont achevées, on additionne entre elles, d'une part, les deux colonnes (débit et crédit) en faveur du Trésor public; de l'autre, les deux colonnes (débit et crédit) en faveur du trésorier général; on fait la différence de ces deux totaux, et on calcule les intérêts sur cette différence.

Voici un exemple de cette disposition. Ce qui suit est, je suppose, les dernières pages du compte courant d'un trésorier général, pendant le 1er trimestre de 1886.

On remarquera que les intérêts dus à la fin de ce trimestre ne sont pas compris dans le solde au 31 mars, parce qu'ils sont passés, un peu plus tard, dans les écritures du trimestre suivant[1].

---

1. Ces lignes étaient écrites avant que la suppression des comptes courants des trésoriers généraux ne fût décidée : j'ai cru devoir les conserver malgré cette suppression.

M. ...., Trésorier Général du département de .... Son compte courant avec le Trésor Public au 31 mars 1886.

Doit.

DATES.	MOTIFS DES DÉBITS.	SOMMES.	ÉPOQUES de valeurs.	JOURS.	NOMBRES en faveur du Trésorier général.	NOMBRES en faveur du Trésor public.
1886.	*Reports*. . .	11 207 879 24			1 060	7 655 461
27 mars.	Recettes s/Revenus publics.	1 876 825 09	20 mars	10		
	Recettes s/Fonds de troupes.	4 000 00	20 —	»	»	188 082
	Recettes s/Fonds des communes.	51 950 47	15 —	15		
	Recettes s/Fonds des Établissem. publics.	26 200 00	15 —	»	»	11 722
28 —	Achats de rentes. Chef-lieu	1 094 95	10 avril	10	109	»
	Achats de rentes. Sous-Préfectures	5 472 75	20 —	20	1 094	»
30 —	Prélèvement à la succursale.	500 000 00	27 mars	3	»	15 000
	Demande de bons . .	4 000 00	29 —	1	»	40
	Notre remise : Obligations de redevables.	4 606 50	13 avril	13	599	»
	Notre remise : Quittances de rentes. . . .	279 50	5 —	5	14	»
31 —	Achats de rentes. Chef-lieu	10 969 90	10 —	10	1 096	»
	Abonnement à l'*Officiel*	160 00	31 janvier	60	»	96
	Reports. . .	13 693 438 40			3 972	7 870 401

Avoir.

DATES.	MOTIFS DES CRÉDITS.	SOMMES.	ÉPOQUES de valeurs.	JOURS.	NOMBRES en faveur du Trésor public.	NOMBRES en faveur du Trésorier général.
1886.	*Reports*. . .	15 988 395 73				8 380 299
27 mars	S/remise Coupons .	30 593 25	15 mars	15		
	— Quittances de rentes. . .	14 576 50	15 —	»	»	6 822
	— Pensions . .	310 00	15 —	»		
	— Traite du caissier central	10 000 00	7 avril	7	700	»
	Dépenses publiques. .	877 563 76	15 mars	15	»	131 635
	Remboursements aux communes. S.-Préfectures	3 000 00	5 —	25	»	750
	Remboursements aux communes. Ch.-Lieu	15 900 00	15 —	15	»	2 385
	Remboursements aux Établissem. publics. Sous-Préfectures. .	1 600 00	5 —	25	»	400
	Remboursements aux Établissem. publics. Chef-Lieu.	113 800 00	15 —	15		
	Remboursements aux Fonds sans intérêts.	3 200 00	15 —	»	»	17 550
	Excédent sur Fonds libres	88 687 05	20 —	10	»	8 869
	S/remise. Mandats . .	20 144 84	15 —	15	»	3 022
	Reports. . .	17 167 771 13			700	8 551 732

M. ……………, Trésorier Général du département de …………… Son compte courant avec le Trésor Public au 31 mars 1886.

Doit.

DATES.	MOTIFS DES DÉBITS.	SOMMES.	ÉPOQUES de valeurs.	JOURS.	NOMBRES en faveur du Trésorier général.	NOMBRES en faveur du Trésor public.
1886.	*Reports*. . .	13 693 438 40			3 972	7 870 401
31 mars	Not/rem/ valeurs à recouvrer.	57 00	5 avril	5	4	»
	Not/rem/quitt. de rentes	24 00	5 —	»		
	Prélèvement à la succursale.	400 000 00	28 mars	2	»	8 000
	Demande de bons. . .	2 100 00	30 —	0	»	»
	S/mandats	50 00	31 —	0	»	»
		14 095 669 40			3 976	7 878 401
31 —	Solde créditeur . . .	4 234 790 93				700
		18 330 460 33				7 879 101

Avoir.

DATES.	MOTIFS DES CRÉDITS.	SOMMES.	ÉPOQUES de valeurs.	JOURS.	NOMBRES en faveur du Trésor public.	NOMBRES en faveur du Trésorier général.
1886.	*Reports*. . .	17 167 771 13			700	8 551 732
28 mars	Versement à la succursale	940 000 00	26 mars	4	»	37 600
	Vente de rentes . . .	2 602 50	28 —	2	»	52
30 —	Versement à la succursale	220 000 00	27 —	3	»	6 600
31 —	S/rem./Quitt. de Supplém. de pensions	86 70	31 —	0	»	»
					700	8 595 984
						3 976
		18 330 460 33				8 599 960
	Nombres au crédit					8 599 960
	— au débit.					7 879 101
	Balance des nombres					720 859
	produisant en intérêts à 4 p. 100. . .	8 009 54				

139. *Méthode inverse ou rétrograde.*

Cette méthode consiste à calculer les nombres que donnent les sommes au débit et au crédit, multipliées par le nombre de jours écoulés depuis la veille de l'ouverture du compte jusqu'au jour de l'opération; c'est-à-dire à ramener toutes ces opérations à ce qu'elles vaudraient la veille de l'ouverture du compte; en un mot, en faire l'escompte ce jour-là.

Ces sommes ainsi diminuées de leur escompte représentent la situation du débit et du crédit du compte au jour où il commence. Pour l'amener à ce qu'elle serait le jour où il finit, il faudrait ajouter au débit les intérêts des sommes retirées, et au crédit ceux des sommes versées, pendant toute la durée du compte, trois mois ou six mois, suivant les cas.

Au lieu de cela, on fait la différence du total des sommes retirées

et du total des sommes versées; on calcule le nombre que donne le montant de cette différence pendant toute la durée du compte, et l'on porte ce nombre du côté (débit ou crédit) où le montant des capitaux est le plus petit. On fait ensuite la balance des nombres comme dans la méthode précédente, et l'on porte les intérêts qu'elle donne du côté (débit ou crédit) où le total des nombres est le plus petit.

Le compte est ainsi établi exactement.

Je vais appliquer, à l'exemple donné au n° 136, cette méthode, qui au premier abord semble un peu compliquée, mais dont on prend rapidement l'habitude.

Comme le point de départ du compte n'influe pas sur le résultat que donne ce dernier quand on l'arrête, je vais le faire commencer au 1er janvier, pour rendre le calcul des jours plus facile.

Compte courant de M......................... **à 4 p. 100. Du 1er janvier au 30 juin 1885.**

Méthode inverse ou rétrograde.

Doit.

DATES.	MOTIFS DES DÉBITS.	SOMMES.	JOURS.	NOMBRES.
25 février	S/chèque	3 520 00	55	1 936
25 avril	S/retrait	1 225 00	115	1 409
22 mai	—	1 850 00	142	2 627
25 juin	—	470 00	175	822
		7 065 00		
30 —	Balance des capitaux (990 fr.).		180	1 782
30 —	Solde créditeur	1 013 20		8 576
		8 078 20		

Avoir.

DATES.	MOTIFS DES CRÉDITS.	SOMMES.	JOURS.	NOMBRES.
12 janvier	S/versement	1 250 00	12	150
19 février	—	2 700 00	49	1 323
4 mars	S/remise effet-valeur 5 avril . . .	1 825 00	95	1 734
15 mai	S/versement	1 530 00	135	2 065
12 juin	—	750 00	162	1 215
		8 055 00		6 487
	Balance des nombres.			2 089
	produisant en intérêts à 4 p. 100.	23 20		8 576
		8 078 20		
1er juillet	Solde créditeur à nouveau. . . .	1 013 20	Époque	

Le mot *époque* qui termine ce compte veut dire que la valeur du solde créditeur à nouveau est fixée à l'époque de la fin du compte précédent : le nombre de jours est donc nul.

Reprenons, sur ce compte établi, les explications générales données plus haut.

Je commence par le crédit.

Le versement du 12 janvier subit 12 jours d'escompte. Par la méthode directe (n° 136), il bénéficie de 168 jours d'intérêts, ce qui fait une différence de 180 jours ($12 + 168 = 180$).

Le versement du 19 février, qui, par la méthode inverse, subit 49 jours d'escompte, bénéficie, par la méthode directe, de 131 jours d'intérêts, ce qui fait également une différence de 180 jours, et ainsi de suite.

Il en est de même pour les sommes du débit.

Par conséquent, si l'on retranchait du crédit — 8 055 fr. — les intérêts représentés par les 6 487 nombres qui se trouvent de ce côté du compte, on aurait le montant du crédit, au 30 juin 1886, diminué de ses intérêts pendant 180 jours.

De même, si l'on retranchait du débit — 7 065 fr. — les intérêts représentés par les 6 794 nombres qui se trouvent de ce côté du compte, on aurait le montant du débit, au 30 juin 1886, diminué de ses intérêts pendant 180 jours.

Il faudrait donc, pour avoir réellement le montant du crédit et celui du débit, au 30 juin 1886, ajouter aux résultats précédents les intérêts, pendant 180 jours, de 8 055 fr. pour le crédit et de 7 065 fr. pour le débit, et faire la différence des deux totaux ainsi obtenus.

Au lieu de cela, on fait d'abord la différence des capitaux — 990 fr. — on en fait le produit par 180 jours, et le nombre résultant — 1 782 — qui représente des intérêts à ajouter au plus grand des deux capitaux, on l'écrit dans la colonne des nombres du plus petit, ce qui revient au même, puisque les nombres de cette colonne représentent des intérêts à retrancher de ce capital.

Cela fait, le nombre 8 576, traduit en intérêts, devant être retranché du débit, et le nombre 6 487, traduit également en intérêts, devant être retranché du crédit, on en fait la différence 2 089, dont l'intérêt correspondant — 23 fr. 20 c. — devrait être retranché du débit; au lieu de cela, on l'ajoute au crédit, ce qui donne évidemment le même résultat.

Cette méthode ne présente pas les deux inconvénients de la méthode directe. D'une part, il n'y a pas de nombres rouges à employer, et de l'autre, les calculs des nombres peuvent être faits au fur et à mesure des opérations, puisqu'ils dépendent du point de départ du compte, époque nécessairement connue. Et alors, il ne reste pour arrêter le compte, au jour indiqué pour cet arrêt, qu'à faire la balance des capitaux, en calculer les nombres, faire la balance de ces derniers et obtenir les intérêts qui y correspondent.

Tous ces avantages (je pourrais même y ajouter le suivant : c'est que le calcul du nombre de jours est plus aisé dans cette méthode que dans la méthode directe) font qu'elle est employée dans un grand nombre d'établissements de banque et de crédit.

140. *Méthode dite des parties aliquotes.*

Ce n'est pas, à proprement parler, une méthode pour établir un compte courant; c'est un procédé de calcul applicable aussi bien à la méthode directe qu'à la méthode inverse.

Ce procédé consiste, à calculer directement à 6 p. 100 les intérêts des sommes placées ou retirées (sans employer les nombres), puis à faire la différence des intérêts ainsi obtenus et la réduire dans la proportion de 6 au taux donné — 3 — 4 — 5, etc.

Ce procédé est avantageux au point de vue de la rapidité, lorsque le nombre de jours est près de 60, parce que à 6 p. 100 l'intérêt de 60 jours représente 1 p. 100 du capital.

Il est donc employé, de préférence aux méthodes précédentes, par les banquiers qui escomptent les effets de commerce, ces escomptes se faisant, le plus souvent, deux mois environ avant l'échéance des effets.

Soit à chercher, par exemple, l'intérêt de 575 fr. pendant 57 jours, on calcule l'intérêt pour 60 jours, ce qui donne . $5^{f}75$

3 . . . . $\frac{5^{f}75}{20} =$ 0 2875

Retranchons : pour 57 jours, l'intérêt est de. $5^{f}4625$

Je vais établir le compte courant du n° 136, par ce procédé appliqué à la méthode rétrograde.

Compte courant de M. .... à 4 p. 100. Du 1er janvier au 30 juin 1886.

Méthode rétrograde avec parties aliquotes.

Doit.

DATES.	MOTIFS DES DÉBITS.	SOMMES.	JOURS.	INTÉRÊTS à 6 p. 100.
25 février	S/chèque.	3 520 00	55	32 25
25 avril	S/retrait.	1 225 00	115	23 50
22 mai	—	1 850 00	142	43 80
25 juin	—	470 00	175	13 70
		7 065 00		
30 —	Balance des capitaux (990 fr.).		180	29 70
30 —	Solde créditeur	1 013 20		
				142 95
		8 078 20		

Avoir.

DATES.	MOTIFS DES CRÉDITS.	SOMMES.	JOURS.	INTÉRÊTS à 6 p. 100.
12 janvier	S/versement	1 250 00	12	2 50
19 février	—	2 700 00	49	22 05
4 mars	S/remise. Effet-valeur 5 avril . .	1 825 00	95	28 90
15 mai	S/versement	1 530 00	135	34 45
12 juin	—	750 00	162	20 25
		8 055 00		108 15
	Balance des intérêts à 6 p. 100.			34 80
	produisant en intérêts à 4 p. 100.	23 20		
				142 95
		8 078 20		
1er juillet	Solde créditeur à nouveau. . . .	1 013 20	Époque	

On voit, d'après le tableau précédent, que les intérêts sont arrondis de 5 en 5 centimes.

Voici, d'ailleurs, comment ont été faits les calculs de ces intérêts.

3 520 fr. en 60 jours rapportent. . . .	35,20
3 520 fr. en 6 jours rapportent. . . .	3,52
3 520 fr. en 54 jours rapportent. . . .	31,68
3 520 fr. en 1 jour rapportent $\frac{3,52}{6} =$	0,587
3 520 fr. en 55 jours rapportent. . . .	32,267

1 225 fr. en 60 jours rapportent. . . .	12,25
1 225 fr. en 60 jours rapportent. . . .	12,25
1 225 fr. en 120 jours rapportent. . . .	24,50
1 225 fr. en 6 jours rapportent. . . .	1,225
1 225 fr. en 114 jours rapportent. . . .	23,275
1 225 fr. en 1 jour rapportent $\frac{1,225}{6} =$	0,204
1 225 fr. en 115 jours rapportent. . . .	23,479

1 850 fr. en 60 jours rapportent. . . .	18,50
1 850 fr. en 60 jours rapportent. . . .	18,50
1 850 fr. en 12 jours rapportent $\frac{18,50}{5} =$	3,70
1 850 fr. en 6 jours rapportent. . . .	1,85
1 850 fr. en 3 jours rapportent $\frac{1,85}{2} =$	0,925
1 850 fr. en 1 jour rapportent $\frac{1,85}{6} =$	0,308
1 850 fr. en 142 jours rapportent. . . .	43,783

470 fr. en 60 jours rapportent. . . .	4,70
470 fr. en 120 jours rapportent. . . .	9,40
470 fr. en 180 jours rapportent. . . .	14,10
470 fr. en 6 jours rapportent. . . .	0,47
470 fr. en 174 jours rapportent. . . .	13,63
470 fr. en 1 jour rapportent	0,08
470 fr. en 175 jours rapportent. . . .	13,71

1 250 fr. en 6 jours rapportent. . . .	1,25
1 250 fr. en 6 jours rapportent. . . .	1,25
1 250 fr. en 12 jours rapportent. . . .	2,50

2 700 fr. en 60 jours rapportent. . . .	27,00
2 700 fr. en 12 jours rapportent. . . .	5,40
2 700 fr. en 48 jours rapportent. . . .	21,60
2 700 fr. en 1 jour rapportent	0,45
2 700 fr. en 49 jours rapportent. . . .	22,05

1 825 fr. en 60 jours rapportent. . . .	18,25
1 825 fr. en 30 jours rapportent. . . .	9,125
1 825 fr. en 6 jours rapportent. . . .	1,825
1 825 fr. en 96 jours rapportent. . . .	29,200
1 825 fr. en 1 jour rapportent	0,304
1 825 fr. en 95 jours rapportent. . . .	28,896

1 530 fr. en 60 jours rapportent . . .	15,30
1 530 fr. en 60 jours rapportent . . .	15,30
1 530 fr. en 12 jours rapportent . . .	3,06
1 530 fr. en 3 jours rapportent . . .	0,765
1 530 fr. en 135 jours rapportent . . .	34,425

750 fr. en 60 jours rapportent . . .	7,50
750 fr. en 60 jours rapportent. . . .	7,50
750 fr. en 30 jours rapportent. . . .	3,75
750 fr. en 12 jours rapportent. . . .	1,50
750 fr. en 162 jours rapportent. . . .	20,25

990 fr. en 60 jours rapportent. . . .	9,90
990 fr. en 120 jours rapportent. . . .	19,80
990 fr. en 180 jours rapportent. . . .	29,70

141. *Méthode Hambourgeoise* ou *par échellette*.

Cette méthode est employée dans quelques villes (non en France, mais à l'étranger, principalement à Hambourg, comme l'indique son nom) pour l'établissement d'un compte courant quand le solde de ce compte est tantôt créditeur et tantôt débiteur.

Voici dans quelles circonstances.

Un banquier ouvre un compte à un correspondant, et consent à se mettre à découvert avec lui, à condition que le taux d'intérêt soit plus fort quand le solde est débiteur pour le correspondant que quand il est créditeur.

Cette condition nécessite le *règlement* du compte chaque fois que le solde de *créditeur* devient *débiteur* et vice versâ. Pour établir un compte de la sorte, il faut nécessairement employer la méthode rétrograde puisqu'on ne sait pas d'avance à quelles époques il devra être réglé. L'exemple suivant montrera combien cette méthode est peu commode ; aussi n'est-elle pas du tout employée en France.

Un banquier ouvre, le 1er janvier 1886, un compte à un correspondant, et il convient avec lui que lorsque le solde sera créditeur l'intérêt sera de 5 p. 100, et de 6 p. 100 quand ce solde sera débiteur.

Le correspondant verse 3 750 fr. le 6 janvier, 2 120 fr. le 24 janvier ; il retire 4 325 fr. le 19 février, 2 270 fr. le 21 mars ; il verse 3 536 fr. le 18 avril, retire 3 179 fr. le 27 mai, verse 2 468 fr. le 6 juin, et retire 1 750 fr. le 23 juin. Quel sera le solde de son compte au 30 juin, en supposant que les intérêts partent du lendemain de l'opération pour les versements, et de la veille pour les retraits ?

Comme dans l'exemple du n° 136, je prends pour dates des crédits les lendemains des versements, et pour dates des débits les veilles des retraits.

Compte courant de M. .... Du 1er janvier au 30 juin 1886.

Méthode hambourgeoise et rétrograde. 5 p. 100 quand le solde est créditeur, 6 p. 100 quand il est débiteur.

Doit.

DATES.	MOTIFS DES DÉBITS.	SOMMES.	JOURS.	NOMBRES.
18 février	S/retrait	4 325 00	48	2 076
20 mars	—	2 270 00	80	1 816
				3 892
		6 595 00		
20 mars	Solde débiteur à nouveau	690 00	Époque	0
19 avril	Balance des capitaux. 2 846		29	825
19 —	Balance des nombres.		. . .	200
	produisant en intérêts à 6 p. 100.	3 35		1 025
		693 35		
19 —	Solde créditeur	2 842 65		
		3 536 00		

Avoir.

DATES.	MOTIFS DES CRÉDITS.	SOMMES.	JOURS.	NOMBRES.
7 janvier	S/versement	3 750 00	7	262
25 —	—	2 120 00	25	530
		5 870 00		792
20 mars	Balance des capitaux. 725.		80	580
				1 372
20 —	Balance des nombres.		. . .	2 520
	produisant en intérêts à 5 p. 100.	35 00		3 892
		5 905 00		
20 —	Solde débiteur	690 00		
		6 595 00		
19 avril	S/versement	3 536 00	29	1 025
				1 025
		3 536 00		

Doit.

DATES.	MOTIFS DES DÉBITS.	SOMMES.	JOURS.	NOMBRES.
26 mai	S/retrait.	3 179 00	37	1 176
				1 176
		3 179 00		
26 mai	Solde débiteur à nouveau	321 75	Époque	0
7 juin	Balance des capitaux. 2 146 25		11	236
7 —	Balance des nombres.			35
	produisant en intérêts à 6 p. 100.	0 60		271
		322 35		
7 —	Solde créditeur	2 145 65		
		2 468 00		
22 —	S/retrait	1 750 00	15	262
30 —	Balance des capitaux. 395 65		23	91
30 —	Solde créditeur	400 55		353
		2 150 55		

Avoir.

DATES.	MOTIFS DES CRÉDITS.	SOMMES.	JOURS.	NOMBRES.
19 avril	Solde créditeur à nouveau. . . .	2 842 65	Époque	0
26 mai	Balance des capitaux. 336 35		37	124
26 —	Balance des nombres.			1,052
	produisant en intérêts à 5 p. 100.	14 60		1 176
		2 857 25		
26 —	Solde débiteur	321 75		
		3 179 00		
7 juin	S/versement	2 468 00	11	271
				271
		2 468 00		
7 —	Solde créditeur à nouveau. . . .	2 145 65	Époque	0
30 —	Balance des nombres.			353
	produisant en intérêts à 5 p. 100.	4 90		353
		2 150 55		
1er juillet	Solde créditeur à nouveau. . . .	400 55		

CHAPITRE VIII.

ALLIAGES, MONNAIES — CHANGE.

Alliages.

142. On appelle *alliage* l'union de deux ou plusieurs métaux. L'alliage se distingue du mélange en ce qu'il possède des propriétés différentes de celles des corps qui entrent dans sa composition; ce qui ne se produit pas dans le mélange.

Le *titre* d'un alliage ou d'un lingot, c'est le rapport du poids du métal précieux qu'il contient, divisé par son poids total.

Ainsi, dire qu'un lingot est au titre de 0,750, c'est dire que sur 1 000 grammes de ce lingot, il y a 750 grammes de métal précieux. On dit aussi, dans ce cas, qu'il est à 0,750 de fin.

Il en résulte, que, connaissant le poids total d'un lingot, et son titre, il faut en faire le produit pour savoir le poids de métal précieux qu'il renferme.

Les questions d'alliages peuvent se ramener à sept problèmes principaux que je vais traiter successivement.

143. 1er Problème.

On allie ensemble trois lingots d'or dont les poids sont de $2^k,250$, $3^k,425$ et $4^k,650$ et les titres respectifs de 0,910, 0,840 et 0,780. Quel est le titre de l'alliage?

Soit x ce titre.

Je vais écrire que le poids du métal précieux contenu dans l'alliage est égal à la somme des poids des métaux précieux contenus dans chaque lingot.

$$x \times 10,325 = 2,250 \times 0,910 + 3,425 \times 0,840 + 4,650 \times 0,780$$

$$x \times 10,325 = 2,0475 + 2,8770 + 3,6270 = 8,5515.$$

$$x = \frac{\overset{1,7103}{\cancel{8,5515}}}{\underset{2,065}{\cancel{10,325}}} = 0,828.$$

144. 2ᵉ Problème.

On fait un alliage d'argent au titre de 0,825 avec trois lingots : un de $6^k,250$ au titre de 0,725; le 2ᵉ de $9^k,225$ au titre de 0,800; et le 3ᵉ de $15^k,450$ à un titre inconnu x. Calculer ce titre.

Le poids total étant

$$6,250 + 9,225 + 15,450 = 30^k,925$$

j'ai (nº 143)

$$30,925 \times 0,825 = 6,250 \times 0,725 + 9,225 \times 0,800 + 15,450 \times x$$

$$25,513125 = 4,53125 + 7,38 + 15,45 \times x$$

$$25,513125 - 11,91125 = 15,45\, x$$

$$x = \frac{\overset{2,720375}{\cancel{13,601875}}}{\underset{3,09}{\cancel{15,45}}} = 0,880.$$

145. 3ᵉ Problème.

On a un lingot d'argent de $7^k,225$ au titre de 0,850. Quel poids faut-il prendre d'un autre lingot d'argent au titre de 0,625 pour former avec le premier un alliage au titre de 0,785 ?

Chaque kilogramme du premier lingot contient

$$0^k,850 - 0^k,785 = 0^k,065$$

d'argent, de plus qu'un kilogramme de l'alliage. Donc les $7^k,225$ contiendront en plus

$$7,225 \times 0,065 = 0^k,469625.$$

Un kilogramme du second lingot contenant

$$0^k,785 - 0^k,625 = 0^k,160$$

d'argent, de plus qu'un kilogramme de l'alliage, autant de fois $0^k,160$ sera contenu dans $0^k,469625$, autant il faudra prendre de kilogrammes du second lingot.

Ce sera

$$\frac{0,469625}{0,16} = 2^k,935.$$

146. 4e Problème.

Dans quelle proportion faut-il allier deux lingots d'or aux titres de 0,925 et de 0,815 pour avoir un alliage au titre de 0,840?

Soient x et y les poids cherchés des deux lingots.

Le poids d'or que le premier lingot contient de plus que l'alliage doit être égal à celui que le second contient de moins.

Donc (n° 145) :

$$(0{,}925 - 0{,}840)\,x = (0{,}840 - 0{,}815)\,y$$

$$0{,}085\,x = 0{,}025\,y$$

$$\frac{x}{y} = \frac{0{,}025}{0{,}085} = \frac{25}{85} = \frac{5}{17}$$

c'est-à-dire que sur 22 grammes, il faut en prendre 5 du premier lingot et 17 du second.

Pour la proportion en millièmes, on a :

$$x = \frac{5}{22} = 0{,}227$$

$$y = \frac{17}{22} = 0{,}773.$$

Ordinairement, on dispose les données de ce problème de la manière suivante, ce qui lui a fait donner le nom de problème de la croix de Saint-André.

$$\begin{array}{ccccccc} 0{,}925 \searrow & & \nearrow 0{,}025 & \quad & x = 25 & & x = 5 \\ & 0{,}844 & & & & \text{ou} & \\ 0{,}815 \nearrow & & \searrow 0{,}085 & & y = 85 & & y = 17. \end{array}$$

147. 5e Problème.

Combien faut-il prendre de deux lingots d'argent aux titres de 0,890 et 0,825 pour avoir $7^{k}{,}250$ au titre de 0,844?

Je fais la croix de Saint-André :

$$\begin{array}{ccccc} 0{,}890 \searrow & & \nearrow 0{,}019 & \quad & 19 \\ & 0{,}844 & & & \\ 0{,}825 \nearrow & & \searrow 0{,}046 & & 46 \end{array}$$

Il ne reste plus qu'à partager $7^k,250$ proportionnellement à 19 et à 46.

$$x = \frac{19 \times \overset{1,45}{\cancel{7,250}}}{\underset{13}{\cancel{65}}} = \frac{27,55}{13} = 2^k,119$$

$$y = \frac{46 \times \overset{1,45}{\cancel{7,250}}}{\underset{13}{\cancel{65}}} = \frac{66,7}{13} = 5^k,131$$

Le total est bien . . . . $= 7^k,250$

148. 6^e Problème.

On a un lingot d'argent de $25^k,250$ au titre de 0,950. Quel poids de cuivre faut-il y ajouter pour former un alliage au titre de 0,835 ?

Le poids d'argent pur contenu dans l'alliage est

$$25,250 \times 0,950 = 23^k,9875,$$

qui doivent être répartis dans tout l'alliage à raison de $0^k,835$ par kilogramme de l'alliage.

Donc autant de fois $23^k,9875$ contiendront $0^k,835$, autant l'alliage devra contenir de kilogrammes en tout :

$$\frac{\overset{4,7975}{\cancel{23,9875}}}{\underset{0,167}{\cancel{0,835}}} = \dots\dots\dots \quad 28^k,728$$

Comme il y en avait déjà . . . . . . $25^k,250$

Le poids du cuivre à ajouter est . . . $3^k,478$

149. 7^e Problème.

On a $12^k,225$ d'un lingot d'argent et de cuivre au titre de 0,625. Quel poids d'argent pur faut-il y ajouter pour que le titre du lingot soit élevé à 0,880 ?

Le poids de cuivre contenu dans l'alliage est

$$12,225 \times 0,375 = 4^k,584375$$

qui doivent être répartis dans tout l'alliage à raison de 0,120 par kilogramme de l'alliage.

Donc autant de fois $4^k{,}584375$ contiendront $0^k{,}120$, autant l'alliage devra contenir de kilogrammes en tout :

$$\begin{array}{l} 1{,}528125 \\ \cancel{4{,}584375} \\ \hline \cancel{0{,}120} \\ 0{,}04 \end{array} = \dots\dots\dots\dots \quad 38^k{,}203$$

Comme il y en avait déjà . . . . . . $12^k{,}225$

Le poids d'argent pur à ajouter est . . $25^k{,}978$

Monnaies.

150. L'historique des monnaies françaises est trop considérable pour trouver place ici ; et, du reste, l'intérêt que pourrait offrir cette étude serait tout à fait rétrospectif, puisque les monnaies actuelles n'ont aucun rapport, ni comme poids, ni comme titre, avec celles de l'ancien régime.

Les variations perpétuelles de la valeur intrinsèque de ces dernières empêchent même d'établir une comparaison certaine entre les prix des choses autrefois et aujourd'hui. Ces prix ont suivi une progression croissante, ce n'est pas douteux : nous sommes même certains que, depuis le commencement de ce siècle ils ont doublé ou triplé, puisque la valeur absolue des monnaies n'a pas changé depuis ce temps.

Nous pouvons à ce fait assigner deux causes : la première et la principale est due aux progrès de l'industrie qui, satisfaisant les besoins à mesure qu'ils se produisent, en créent sans cesse de nouveaux ; la seconde résulte de la création et de la circulation de la monnaie fiduciaire et des effets de commerce, lesquels en augmentant le signe de la richesse du monde entier, ont diminué nécessairement la valeur relative de la monnaie métallique, qui, seule, représentait autrefois cette richesse.

Mais cette fixité des monnaies n'existait pas avant 1789 ; et, en laissant de côté les variations arbitraires que leur ont imposées quelques rois auxquels est resté le surnom de faux-monnayeurs, il est certain que la diminution de la valeur absolue des monnaies a été constante depuis Charlemagne; aussi lorsqu'on voit au XII^e^ ou XIII^e^ siècle le prix d'un mouton être de 5 sols d'or, c'est-à-dire de $\frac{1}{4}$ de livre tournois, il faut se rendre compte qu'en monnaie actuelle il vaudrait 18 ou 20 fois plus, c'est-à-dire 4 ou 5 francs environ. L'augmentation, toute considérable qu'elle soit, est donc moindre qu'on ne le croit généralement.

Voici un tableau qui donne la valeur absolue de la livre tournois aux principales époques de notre histoire, depuis Charlemagne jusqu'à Louis XVI.

ÉPOQUES.	PRINCIPAUX ROIS CONTEMPORAINS.	VALEUR de la livre tournois exprimée en livres tournois du XVIII^e^ siècle.	POIDS de la livre tournois en grammes.
768 à 1108	Charlemagne à Philippe I^er^ . .	De 64 à 20	De 325,632 à 101,760
1108 à 1158	Louis VI — Louis VII	18,00	91,584
1158 à 1223	Louis VII — Philippe II Auguste.	19,20	97,679
1223 à 1226	Louis VIII.	17,58	89,464
1226 à 1285	Louis IX — Philippe III . . .	17,29	87,980
1285 à 1314	Philippe IV le Bel.	17,77	90,418
1314 à 1322	Louis X — Philippe V	16,54	84,164
1322 à 1344	Charles IV — Philippe VI . .	14,06	71,550
1344 à 1364	Philippe VI — Jean le Bon . .	9,59	48,813
1364 à 1380	Charles V	9,12	46,481
1380 à 1422	Charles VI.	6,85	34,874
1422 à 1461	Charles VII	5,48	27,878
1461 à 1483	Louis XI.	4,79	24,380
1483 à 1498	Charles VIII	4,35	22,154
1498 à 1515	Louis XII	3,93	20,004
1515 à 1547	François I^er^	3,42	17,437
1547 à 1559	Henri II.	3,29	16,748
1559 à 1574	François II — Charles IX. . .	2,82	14,363
1574 à 1589	Henri III.	2,55	12,985
1589 à 1610	Henri IV.	2,31	11,766
1610 à 1643	Louis XIII.	1,77	9,010
1643 à 1715	Louis XIV.	1,20	6,095
1715 à 1720	Louis XV (système de Law). .	0,40	2,014
1720 à 1789	Louis XV — Louis XVI . . .	1,00	5,088

151. En 1794, époque de l'établissement du système décimal des poids et mesures, la livre tournois avait une valeur à peu près égale à celle de la nouvelle unité, le franc; elle valait exactement 99 centimes. Son emploi fut toléré, concurremment avec celui du franc, jusqu'à l'année 1807 où elle disparut définitivement.

152. Depuis 1866, année où fut conclue, entre la France, l'Italie, la Suisse et la Belgique, une convention monétaire à laquelle accédèrent plus tard le Portugal, le Danemark et la Grèce, les monnaies françaises ont été fixées comme il suit.

Une nouvelle convention conclue à la fin de 1885 par les mêmes États a reproduit exactement les termes de la précédente.

Monnaies de bronze composées de :	0,950 de cuivre, 0,040 d'étain, 0,010 de zinc	Pièce de	$0^f 01$	pesant 1 gr.,	diamètre : 15 millim.
		—	0 02	2	20
		—	0 05	5	25
		—	0 10	10	30
Monnaies d'argent composées de :	0,835 d'argent, 0,165 de cuivre	—	0 20	1	15
		—	0 50	2,5	18
		—	1 fr.	5	23
		—	2	10	27
	0,900 d'argent, 0,100 de cuivre	—	5	25	37
Monnaies d'or composées de :	0,900 d'or, 0,100 de cuivre	—	5	1,612903	17
		—	10	3,225806	19
		—	20	6,451613	21
		—	50	16,129032	28
		—	100	32,258065	35

A poids égal la monnaie d'argent vaut 20 fois la monnaie de bronze, et la monnaie d'or vaut 15 fois et demie la monnaie d'argent, et 310 fois la monnaie de bronze.

En résumé :

1 gramme de monnaie de bronze vaut. . .	$0^f 01$
1 gramme de monnaie d'argent vaut . . .	0 20
1 gramme de monnaie d'or vaut	3 10

153. 1^er^ Problème.

Combien coûte à la Monnaie de Paris la fabrication d'un kilogramme de monnaie de bronze, sachant que le kilogramme de cuivre vaut

1 fr. 80 c., celui d'étain 2 fr. 20 c., celui du zinc 0 fr. 60 c., et que les frais de fabrication sont de 0 fr. 30 c. par kilogramme de bronze monnayé ?

Dans un kilogramme de monnaie de bronze, il y a :

$0^k,950$ de cuivre qui coûtent $0,95 \times 1,8 =$	1^f71
$0\ ,040$ d'étain qui coûtent $0,04 \times 2,2 =$	$0\ 088$
$0\ ,010$ de zinc qui coûtent $0,01 \times 0,6 =$	$0\ 006$
Plus les frais de fabrication.	$0\ 30$
Il coûte donc.	2^f104
Comme sa valeur conventionnelle est de . . .	$10\ 000$
elle dépasse sa valeur réelle de	7^f896

154. 2e Problème.

Calculer la valeur d'un kilogramme d'argent pur, sachant que la Monnaie prend 1 fr. 75 c. pour frais de fabrication par kilogramme d'argent monnayé. Ce kilogramme d'argent pur est supposé converti : 1° en monnaies divisionnaires ; 2° en pièces de 5 fr.

1° $0^{gr},835$ d'argent pur valent 0^f20

$1\,000$ d'argent pur valent x

d'où :

$$x = \frac{\overset{200}{\cancel{1000}} \times 0,20}{\underset{0,167}{\cancel{0,835}}} = \frac{40}{0,167} = \ldots\ldots \quad 239^f521$$

Le poids de cuivre à y ajouter est :

$$\frac{1000 \times \overset{0,033}{\cancel{0,165}}}{\underset{0,167}{\cancel{0,835}}} = \frac{33}{0,167} = 198 \text{ grammes.}$$

On a donc un poids de monnaie d'argent de $1000 + 198$ ou $1\,198$ gr., dont la fabrication coûte $1,198 \times 1,75 =$	$2\ 096$
le kilogramme d'argent pur vaut en monnaies divisionnaires	237^f425

2° $0^{gr},900$ valent 0^f20

$1\,000$ valent x

d'où :

$$x = \frac{1000 \times 0,20}{0,9} = \frac{200}{0,9} = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 222^{f}222$$

Le poids de cuivre à y ajouter est :

$$\frac{1000 \times 0,100}{0,900} = \frac{100}{0,9} = 111 \text{ grammes.}$$

On a donc un poids de monnaie d'argent de $1000 + 111$ ou 1 111 gr., dont la fabrication coûte $1,111 \times 1,75 =$ 1 944

le kilogramme d'argent pur vaut en pièces de 5 fr. . . . $220^{f}278$

155. Ce prix, comme le précédent, est très loin du prix actuel du kilogramme d'argent pur, qui est d'environ 175 fr., c'est-à-dire que l'argent comme marchandise perd sur le prix conventionnel de la monnaie divisionnaire :

$$\frac{237 - 175}{237} = \frac{62}{237} \text{ ou 26 p. 100 environ de sa valeur ;}$$

et sur celui des pièces de 5 fr. :

$$\frac{220 - 175}{220} = \frac{45}{220} = \frac{9}{44} \text{ ou 20 p. 100 environ de sa valeur.}$$

Cette dépréciation considérable provient de plusieurs causes : d'abord, une grande quantité d'argent a été extraite de la Terre depuis quelques années : et puis, surtout, l'emploi de l'argent dans la bijouterie et l'orfèvrerie est beaucoup moins considérable aujourd'hui qu'il ne l'était autrefois. Aussi plusieurs États de l'Europe, inquiets de cette situation, ont démonétisé l'argent, et ne conservent plus que l'or comme monnaie légale. La France, qui n'a pas voulu recourir à cette extrémité, voit ses caisses publiques regorger d'argent, tandis que l'or y est assez rare. Heureusement, les populations de l'Extrême-Orient ne connaissent guère que l'argent comme monnaie d'échange, ce qui nous permet de leur en envoyer une grande quantité.

156. 3e Problème.

Calculer la valeur d'un kilogramme d'or pur, sachant que la Monnaie prend 6 fr. 50 c. pour frais de fabrication par kilogramme d'or monnayé.

$0^{gr},900$ d'or pur valent $3^{f}10$
1000 d'or pur valent x

d'où :

$$x = \frac{1000 \times 3{,}10}{0{,}9} = \frac{3100}{0{,}9} = \ldots\ldots \quad 3444^{f}444$$

Le poids de cuivre à y ajouter est :

$$\frac{1000 \times 0{,}100}{0{,}900} = \frac{100}{0{,}9} = 111 \text{ grammes.}$$

On a donc un poids de monnaie d'or de 1 000 + 111 ou 1 111 gr., dont la fabrication coûte $1{,}111 \times 6{,}50 =$ 7 222
le kilogramme d'or pur vaut . . . . $3437^{f}222$

C'est à peu près le prix actuel, dans le commerce, du kilogramme d'or pur.

Change.

157. On appelle *change* un marché par lequel un négociant, moyennant un prix convenu, cède à un autre des fonds dont il peut disposer dans une autre ville. L'instrument de ce marché est la *lettre de change.*

Le *taux* ou le *cours* du change entre deux villes est la somme variable donnée dans la première de ces villes pour une somme fixe et invariable dans l'autre : la première somme s'appelle l'*incertain*, la seconde le *certain.*

Ainsi le change de Paris sur Amsterdam, c'est le prix auquel à Paris on vend ou on achète 100 florins payables à Amsterdam. En général, dans les indications de cours de change, on ne mentionne pas le certain, parce qu'il est connu des négociants : on ne mentionne que l'incertain.

Par exemple, cette indication mise dans un journal de Paris :

17 février 1886 — Amsterdam — $214\,{}^{3}/_{8}$ (papier) — $214\,{}^{1}/_{4}$ (argent) veut dire que, le 17 février 1886, 100 florins payables à Amsterdam valent à Paris 214 fr. ${}^{3}/_{8}$ ou 214 fr. 375 en lettres de change, et 214 fr. ${}^{1}/_{4}$ ou 214 fr. 25 c. en numéraire.

158. Le change est *au pair* quand le prix du change est égal à la valeur même de la somme achetée. Ainsi, le thaler de Prusse valant 3 fr. 69 c., le change sera au pair entre Paris et Berlin, si à Paris 100 thalers s'achètent 369 fr.

Il est en *hausse* quand le prix du change est supérieur à la valeur même de la somme achetée, et en *baisse* quand il lui est inférieur.

Il en résulte que, quand le cours du change est en hausse, il est avantageux d'acheter des lettres de change remboursables dans les villes qui donnent l'incertain, et de vendre celles remboursables dans les villes qui donnent le certain ; c'est le contraire quand le cours du change est en baisse.

159. On distingue deux sortes de change : le *change direct* et le *change indirect.*

Le change direct consiste à acheter ou à vendre dans une ville des lettres de change qui doivent être remboursées directement dans une autre ville.

Le change indirect consiste à acheter ou à vendre dans une ville des lettres de change qui doivent être transmises dans d'autres villes, avant d'arriver à celles où elles doivent être remboursées.

L'*arbitrage* est le calcul que fait le négociant pour reconnaître s'il lui est plus avantageux d'employer le change direct ou le change indirect ; et, dans ce dernier cas, quelles sont les places qui lui serviront le plus avantageusement d'intermédiaires.

160. Les frais relatifs aux lettres de change sont les suivants :

1° *Commission au banquier,* qui varie de $^1/_4$ à $^1/_2$ p. 100.

2° *Courtage dû aux agents de change,* $^1/_8$ p. 100.

3° *Port de lettres, timbres des reçus* et *timbres des lettres de change.*

Le timbre des lettres de change est de 0 fr. 05 c. par 100 fr.

161. Expliquons maintenant quelques termes très usités dans les questions de change.

La lettre de change payable dans trois mois est généralement regardée comme du comptant. On appelle *papier long* celui qui est payable dans un délai plus long que 90 jours, et *papier court* celui qui est payable dans un délai moindre.

Dans le premier cas, on fait subir au porteur de la lettre de change un escompte calculé d'après la différence entre le nombre de jours au bout duquel cette lettre est payable, et le terme de 90 jours, regardé comme comptant, et qu'on appelle souvent *usance.* Dans le second, l'escompte se calcule de la même manière, mais à son avantage.

Ainsi le porteur d'une lettre de change payable dans 95 jours sur une place dont l'usance est de 90 jours, subira 5 jours d'escompte, et le porteur d'une lettre de change, payable dans 75 jours sur la même place, bénéficiera de 15 jours d'escompte.

Examinons le tableau suivant :

PARIS. — 24 avril 1886.

VALEURS SE NÉGOCIANT A TROIS MOIS.

		PAPIER LONG.	PAPIER COURT.
3 p. 100	Amsterdam.	207 $^3/_4$ à 208 $^1/_4$ et 4 p. 100	207 $^1/_4$ à 207 $^3/_4$ et 4 p. 100
4 $^1/_2$ p. 100	Berlin.	122 $^3/_8$ à 122 $^5/_8$ et 4 p. 100	122 $^3/_8$ à 122 $^5/_8$ et 4 p. 100
5 p. 100	Vienne.	199 à 201 et 4 p. 100	199 à 201 et 4 p. 100
5 p. 100	Barcelone.	487 à 488 et 4 p. 100	483 à 484 et 4 p. 100
5 p. 100	Madrid.	487 à 488 et 4 p. 100	483 à 484 et 4 p. 100
6 p. 100	Lisbonne.	547 à 548 et 4 p. 100	546 $^1/_2$ à 547 $^1/_2$ et 4 p. 100
6 p. 100	St-Pétersbourg.	243 à 248 et 4 p. 100	236 à 238 et 4 p. 100

La première colonne indique le taux général de l'escompte dans chacune des villes de la seconde colonne. Les troisième et quatrième colonnes donnent le montant de l'incertain par lequel à Paris on achèterait le certain dans ces villes, et font connaître en même temps que l'escompte spécial des lettres de change est de 4 p. 100 à retrancher du papier long et à ajouter au papier court.

Ainsi, le 24 avril 1886, pour acheter 100 florins à Amsterdam, il faut envoyer, de Paris, un effet variant de 207 fr. $^3/_4$ à 208 fr. $^1/_4$ en papier long, ou un effet variant de 207 $^1/_4$ à 207 $^3/_4$ en papier court, l'escompte spécial étant dans les deux cas de 4 p. 100.

Pour acheter à Berlin 100 reichsmarks, il faut envoyer de Paris un effet variant de 122 fr. $^3/_8$ à 122 fr. $^5/_8$ en papier long ou en papier court, avec l'escompte de 4 p. 100.

Pour Vienne, c'est le prix de 100 florins qui est sous-entendu ; pour Barcelone, Madrid, Lisbonne, celui de 100 piastres ; pour Saint-Pétersbourg, celui de 100 roubles.

Remarquons que, dans trois de ces quatre dernières villes, il y a un écart de plusieurs francs entre la valeur du papier long et celle du papier court ; cet écart indique ordinairement un peu de gêne dans les places où il se produit, puisqu'on y préfère le papier court au papier long.

162. L'escompte spécial des lettres de change de Paris est partout invariablement de 4 p. 100, à l'exception de celles payables eu Angleterre, en Suisse, en Italie et en Belgique, où cet escompte est variable et égal à l'escompte général des autres valeurs dans ces pays.

163. Problème.

350 fr. de France valent 168 florins de Hollande ; 54 florins de Hollande valent 92 reichsmarks d'Allemagne ; 96 reichsmarks d'Allemagne valent 21 piastres de Portugal, et 75 piastres de Portugal valent 170 roubles de Russie. Combien 1 200 fr. de France vaudront-ils de roubles de Russie ?

Il faut commencer par la fin.

75 piastres de Portugal valent	170
1 piastre de Portugal vaut.	$\frac{170}{75}$
21 piastres de Portugal ou 96 reichsmarks.	$\frac{170 \times 21}{75}$
1 reichsmark	$\frac{170 \times 21}{75 \times 96}$
92 reichsmarks ou 54 florins de Hollande.	$\frac{170 \times 21 \times 92}{75 \times 96}$
1 florin de Hollande	$\frac{170 \times 21 \times 92}{75 \times 96 \times 54}$
168 florins de Hollande ou 350 francs . .	$\frac{170 \times 21 \times 92 \times 168}{75 \times 96 \times 54}$
1 franc.	$\frac{170 \times 21 \times 92 \times 168}{75 \times 96 \times 54 \times 350}$
1 200 francs.	$\frac{170 \times 21 \times 92 \times 168 \times 1200}{75 \times 96 \times 54 \times 350}$

Ce procédé est un peu long ; aussi en emploie-t-on de préférence un autre, celui de la *règle conjointe*.

Il consiste à écrire en deux colonnes les chiffres énoncés, de manière que les deux valeurs de chacune des monnaies d'un même pays se trouvent, l'une dans une colonne, l'autre dans la seconde colonne. Puis on fait séparément le produit des nombres de chaque colonne, on les égale, et on tire de là la quantité cherchée.

350 francs valent	168 florins.
54 florins valent	92 reichsmarks.
96 reichsmarks valent. . . .	21 piastres.
75 piastres valent.	170 roubles.
x roubles valent.	1200 francs.

$$350 \times 54 \times 96 \times 75 \times x = 168 \times 92 \times 21 \times 170 \times 1200$$

d'où :

$$x = \frac{\overset{\overset{7}{\cancel{42}}}{\cancel{168}} \times \overset{23}{\cancel{92}} \times \overset{3}{\cancel{21}} \times 17\cancel{0} \times \overset{\overset{\overset{8}{\cancel{40}}}{\cancel{240}}}{1200}}{\underset{5}{\cancel{350}} \times \underset{\underset{3}{\cancel{18}}}{\cancel{54}} \times \underset{\underset{4}{\cancel{24}}}{\cancel{96}} \times \underset{15}{\cancel{75}}} = \frac{21896}{45} = \overset{\text{roubl.}}{485{,}5778}.$$

Pour réduire la fraction décimale 0,5778 en $\frac{1}{16}$, je pose la proportion :

$$\frac{5778}{10000} = \frac{y}{16}$$

d'où :

$$y = \frac{5778 \times \overset{4}{\cancel{16}}}{\underset{\underset{625}{\cancel{2500}}}{\cancel{10000}}} = 9 \text{ à peu près.}$$

Donc le nombre de roubles cherché est :

$$486\ ^{9}/_{16}.$$

ÉNONCÉS DE PROBLÈMES A RÉSOUDRE.

§ 1er. — *Intérêt simple.*

Une somme a été placée à un taux tel qu'au bout de 11 mois, le capital et les intérêts s'élevaient ensemble à 6 302 fr. 50 c. et au bout de 2 ans et demi, à 6 825 fr. Quel est le capital et à quel taux a-t-il été placé ?

$$(c = 6\,000 \qquad t = 5\ ^{1}/_{2} \text{ p. } 100).$$

Une somme de 7 200 fr. est placée à intérêts simples. Si la durée du placement avait été augmentée de 10 jours, l'intérêt l'eût été de

12 fr., et si le taux avait été diminué de $4\,^1/_2$ p. 100, l'intérêt l'eût été de 24 fr. Quel est le taux et quel est le temps du placement?

$$(t = 6 \qquad n = 240).$$

Une personne place les $^2/_5$ de son capital à 3 p. 100 et le reste à $4\,^1/_2$ p. 100. Quel est ce capital, sachant que le revenu est de 1 950 fr.?

$$(c = 50\,000 \text{ fr.}).$$

Une somme de 61 000 fr. a été placée, partie à 5 p. 100, partie à 6 p. 100, et a produit en un an 3 400 fr. d'intérêts. Quelle partie a été placée à 5 p. 100 et quelle partie à 6 p. 100?

(26,000 fr. et 35,000 fr.).

Une personne a placé deux capitaux à intérêts simples, le 1er à 4 p. 100, le 2e à 5 p. 100. Au bout de 7 ans et 9 mois, elle a retiré 23 800 fr. en tout, capital et intérêts. Quels sont les deux capitaux placés, sachant que le 1er est les $^5/_6$ du second?

(8 000 fr. et 9 600 fr.).

Un dissipateur place sa fortune à 4 p. 100. 2 ans après, il en retire le quart et laisse le reste pendant 7 mois. Après ce temps, il prend un quart de ce reste et laisse son capital ainsi diminué pendant 13 mois, après lesquels il retire tout ce qui lui reste. Dans l'espace de ces 44 mois, il a reçu 24 375 fr. d'intérêts. Quel était son capital?

(200 000 fr.)

§ 2. — *Rentes.*

Un particulier vend du 3 p. 100 au cours de 79,85 pour acheter, avec le prix de cette vente, du $4\,^1/_2$ p. 100 au cours de 108,10. Cet arbitrage augmentant de 70 fr. son revenu, on demande quel est le chiffre de la rente qu'il a achetée?

(718 fr.).

Un capitaliste a fait en deux Bourses différentes deux achats de rentes 3 p. 100 aux cours 68 et 72. Chaque fois, outre le principal, il a payé 2 fr. 15 c. de droits de toute espèce et $^1/_8$ p. 100 de courtage. Ces deux achats s'élèvent à 10 000 fr. de rente et ont coûté 230 612 fr. 20 c. Combien le capitaliste a-t-il acheté de rente chaque fois?

(7 260 fr. à 68 et 2 740 fr. à 72).

Un particulier a acheté du 3 p. 100 au cours de 81,10. Au bout d'un certain temps, et aussitôt après le détachement du coupon, il vend cette rente. Le boni réalisé et le coupon représentent 6,042 p. 100 du capital employé. A quel cours a-t-il vendu son 3 p. 100?

(85,25).

Une personne voudrait emprunter à la Banque de France une somme de 28 640 fr. en déposant du 4 $^1/_2$ p. 100 au cours de 108,50. Quel chiffre de rente devra-t-il déposer, la Banque prêtant $\frac{80}{100}$ du capital?

(1 485 fr.).

Un particulier renouvelle à la Banque de France un prêt en donnant 145 fr. Il a déposé de la rente 3 p. 100 au cours de 79,95 : sachant que la Banque a déduit de l'intérêt à payer le montant du coupon échu, qu'elle a prêté $\frac{80}{100}$ du capital, et que la durée du prêt était de trois mois, on demande quel est le chiffre de la rente que le particulier a déposée, l'intérêt des prêts étant à 5 $^1/_2$ p. 100.

(3 360 fr.).

Un particulier a contracté à la Banque de France un emprunt sur du 4 $^1/_2$ p. 100 ancien à 108. Le taux d'intérêt des prêts étant de 3 $^1/_2$ p. 100, et leur durée de trois mois, quel est le chiffre de la rente déposée, sachant que la Banque a retenu le coupon et payé 33 fr. 20 c. à l'emprunteur, le montant du prêt étant $\frac{80}{100}$ de la valeur du capital?

(1 000 fr.).

§ 3. — *Escompte en dehors.*

Un négociant donne en échange d'un billet de 3 700 fr. payable dans 4 mois 20 jours un autre billet de 3 760 fr. payable dans 6 mois 20 jours : le taux de l'escompte étant de 8 p. 100, combien donnera-t-il ou recevra-t-il en surplus?

(Il recevra 8 fr.).

Quel doit être le taux de l'escompte, pour qu'un billet de 480 fr. payable dans 40 jours ait la même valeur actuelle qu'un billet de 500 fr. payable dans 223 jours?

(7,80 p. 100).

§ 4. — *Escompte en dedans.*

L'escompte en dedans d'un billet est de 25 fr. 50 c., l'escompte en dehors 25 fr. 75 c., trouver la valeur nominale du billet?

(2 626 fr. 50 c.).

Un particulier présente à l'escompte un effet payable dans 5 mois au taux de 3 p. 100. Le banquier fait d'abord le calcul par l'escompte en dehors, puis s'apercevant que l'effet est payable en Angleterre, il l'escompte en dedans; ce dernier résultat est inférieur au premier de 35 cent. Trouver d'après cela le montant du billet et le chiffre des deux escomptes?

$(N = 2\,268 \qquad e = 28{,}35 \qquad e' = 28)$.

Un effet est escompté en dedans 37 fr. 50 c.; en dehors il l'aurait été de 37 fr. 72 c. Le taux étant 4 p. 100, dans combien de jours est l'échéance de l'effet?

(53 jours).

§ 5. — *Échéance moyenne avec escompte en dehors.*

Pour s'acquitter d'une dette de 782 fr., une personne donne à son créancier deux billets de même valeur nominale, l'un payable dans 3 mois, l'autre dans 6 mois. Quelle est cette valeur nominale, le taux de l'escompte étant 6 p. 100?

(400 fr.).

Un débiteur s'est engagé à payer une dette de 7 000 fr. aux termes suivants : 2 000 fr. dans 3 mois et demi, 3 500 fr. dans 4 mois, et 1 500 fr. dans 14 mois. Son créancier lui fait la proposition d'acquitter sa dette en deux paiements égaux chacun à la moitié de ce qu'il doit, et de manière que le second arrive un mois après le premier. Le débiteur y ayant consenti, quand auront lieu les échéances des deux paiements?

(5 mois et demi et 6 mois et demi).

§ 6. — *Vente et achat.*

Un marchand reçoit une pièce de drap qu'il paie à raison de 10 fr. le mètre. En la mesurant, il trouve que la pièce a 5 mètres de plus qu'il ne croyait ; mais le drap est de si mauvaise qualité qu'il se voit forcé de ne le vendre que 8 fr. le mètre. A ce prix, il perd 7 $^1/_2$ p. 100 sur son prix d'achat. De combien de mètres est la pièce de drap ?

(37 m.).

Un marchand a acheté sur le carreau d'une mine 897 600 kilogr. de houille pour 33 660 fr. Le transport lui a coûté 3 fr. 56 c. le quintal et a causé un déchet de 2,37 p. 100. Combien doit-il vendre le quintal pour gagner 4,75 p. 100 ?

(4 fr. 1667).

§ 7. — *Comptes courants.*

Un particulier a un compte courant chez un banquier, dont les intérêts se règlent tous les six mois, fin juin et fin décembre. Il verse 4 500 fr. le 17 mars, 8 300 fr. le 25 mai. Il retire 1 300 fr. le 8 avril, 9 200 fr. le 19 juin. Son compte est arrêté définitivement le 25 août. Quel est le solde créditeur qu'il présente, sachant que 3 p. 100 est le taux annuel d'intérêt, tous les mois étant supposés de 30 jours ?

(2 356 fr. 25 c.).

§ 8. — *Alliages.*

On allie 129 grammes d'or contenant $^1/_9$ de cuivre avec 33 grammes d'or contenant $^1/_8$ de cuivre. Pour quelle fraction le cuivre entre-t-il dans l'alliage ?

(0,114).

Un orfèvre veut employer dans sa fabrication un lingot d'argent de 5 kilogr. au titre de 0,778. On demande quel poids d'argent à 0,950 et quel poids de cuivre il devra y ajouter pour former un alliage de 12 kilogr. au titre de 0,750.

(Argent : $5^k,379$. Cuivre : $1^k,621$).

Un lingot d'argent est au titre de $^8/_9$. On y ajoute 3 kilogr. d'argent fin : le titre devient $^9/_{10}$. Quel est le poids du premier lingot ?

(27 kil.).

Un orfèvre a trois lingots à des titres différents : 0,900, 0,800 et 0,720. En faisant un alliage des deux premiers lingots, le titre est de 0,840 ; en faisant un alliage du 1er et du 3e, le titre est de 0,780. Le poids des trois lingots étant de 45 kilogr., quel est le poids de chacun d'eux ?

(10 kil., 15 kil., 20 kil.).

Quelles quantités de trois alliages aux titres de 0,800, 0,840 et 0,950 faut-il prendre pour obtenir 60 kilogr. d'alliage au titre de 0,900, les deux premiers entrant dans l'alliage définitif dans le rapport de 1 à 3 ?

(6^k,25 18^k,75 35 kil.).

§ 9. — *Monnaies.*

On a deux lingots d'or, l'un au titre de 0,920, l'autre au titre de 0,750. Combien doit-on prendre de chacun d'eux pour former un lingot avec lequel on puisse fabriquer 372 000 fr. au titre légal ?

(105^k,882 14^k,118).

On fond ensemble 25 kilogr. d'argent au titre de 0,800, 38 kilogr. au titre de 0,840 et 5^k,500 au titre de 0,950. Calculer la quantité de pièces de 1 fr., de 50 cent. et de 20 cent. que l'on peut faire avec cet alliage, en supposant que les nombres de ces pièces soient entre eux comme 2, 5 et 7.

(4640 11600 16237).

Une somme de 10 592 fr. se compose à poids égaux de pièces d'or de 20 fr., de pièces d'argent de 5 fr. et de pièces de bronze de 10 cent. On demande le nombre de pièces de chaque espèce, et la somme qu'elles forment séparément.

(496 de 20 fr., 128 de 5 fr., 320 de 10 cent.).

La tolérance pour les pièces de 20 fr. est de 0,005 du poids et de 0,002 du titre. Quelle est la plus grande valeur et la plus petite valeur que puisse avoir une pièce de 20 fr., et quelles sont les valeurs qu'auraient la pièce au titre le plus faible avec le poids le plus fort, et la pièce au titre le plus fort avec le poids le plus faible ?

(20 fr. 140 19 fr. 860 20 fr. 060 19 fr. 940).

§ 10. — *Change.*

Convertir en monnaie d'or de France 2337 guinées, le titre de la guinée étant de 0,917 et son poids $8^{gr},380$.

(61 863 fr. 20 c.).

Un particulier a acheté 1150 florins de rente autrichienne 5 p. 100. Le florin vaut 2 fr. 50 c. ; mais les coupons sont passibles d'un impôt de 16 p. 100, et le coupon se paie au cours du change du jour. Sachant que le florin est coté 2 fr. 06 c., on demande quelle sera en francs la somme représentée par les coupons.

(1 989 fr. 96 c.).

Un particulier vend de la rente hongroise 4 p. 100 et achète 500 livres sterling d'un emprunt russe 5 p. 100, coté 94,50. Sachant que la livre sterling vaut 25 fr. 20 c., que la rente hongroise est exprimée en florins valant 2 fr. 50 c. et que la personne en question s'est fait 650 fr. de revenu avec le Russe, on demande à quel cours elle a vendu le Hongrois.

(73,27).

LIVRE III.

INTÉRÊTS COMPOSÉS ET LEURS APPLICATIONS AUX ANNUITÉS, ASSURANCES ET AMORTISSEMENTS.

Les calculs relatifs aux intérêts composés et à leurs applications se faisant presque tous par les logarithmes, je vais en développer la théorie par les progressions.

CHAPITRE Ier.

PROGRESSION PAR DIFFÉRENCE OU ARITHMÉTIQUE.

164. On appelle *progression par différence* ou *arithmétique* une suite de termes dont la différence est constante.

Cette différence s'appelle *raison* de la progression. Quand la raison est positive, la progression est croissante ; quand la raison est négative, la progression est décroissante.

Ainsi :

$$\div\ 3.\ 7.\ 11.\ 15.\ 19.\ 23.\ 27.$$

est une progression arithmétique croissante dont la raison est $+4$, et

$$\div\ 49.\ 46.\ 43.\ 40.\ 37.\ 34.$$

est une progression arithmétique décroissante dont la raison est -3.

La forme générale d'une progression par différence est :

$$\div\ a.\ b.\ c.\ d. \ldots\ h.\ k.\ l.$$

la raison est r, et le nombre de termes n.

165. *Calcul d'un terme.*

Par définition :

$$b = a + r$$
$$c = b + r = a + 2r$$
$$d = c + r = a + 3r$$

l qui est le $n^{\text{ième}}$ terme aura pour valeur

$$l = a + (n - 1) r.$$

Ainsi, un terme quelconque est égal au premier, augmenté d'autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui.

Exemple. Soit la progression :

$$\div\ 3.\ 7.\ 11.\ 15.\ 19 \ldots.$$

le 13e terme sera égal à :

$$3 + 12 \times 4 = 51.$$

166. *Insérer* m *moyens différentiels ou arithmétiques entre deux nombres* u *et* v ; c'est-à-dire intercaler entre deux nombres u et v, m nombres qui, avec les deux premiers, forment une progression par différence :

$$\div\ u \overbrace{\ldots\ldots\ldots}^{m \text{ termes}} v$$

Il s'agit de former une progression arithmétique de $m + 2$ termes, dont u soit le premier et v le $(m + 2)^e$: c'est la raison qu'il faut chercher.

D'après la formule du n° 165, j'aurai, en appelant r la raison cherchée :

$$v = u + (m + 1) r$$

d'où :

$$r = \frac{v - u}{m + 1}.$$

Exemple. Soit à insérer 7 moyens arithmétiques entre 12 et 45.

$$r = \frac{45 - 12}{7 + 1} = \frac{33}{8} = 4 + \frac{1}{8}$$

Je forme la progression demandée :

$$\div 12.\ 16+\frac{1}{8}.\ 20+\frac{1}{4}.\ 24+\frac{3}{8}.\ 28+\frac{1}{2}.\ 32+\frac{5}{8}.\ 36+\frac{3}{4}.\ 40+\frac{7}{8}.\ 45$$

Remarque. Dans le cas où l'on n'a à insérer qu'un moyen entre deux nombres u et v, la formule précédente, dans laquelle on fait $m=1$, donne :

$$r=\frac{v-u}{2}$$

Le moyen inséré sera égal à :

$$u+r=u+\frac{v-u}{2}=\frac{v+u}{2}.$$

C'est la *moyenne différentielle* ou *arithmétique* entre u et v.

167. Si, entre les divers termes d'une progression arithmétique on insère un même nombre de moyens, on obtient diverses séries de termes qui forment une seule et même progression.

En effet, en reprenant la formule du n° 166 :

$$r=\frac{v-u}{m+1}$$

on voit que la raison r est égale à la différence des nombres donnés divisée par le nombre des moyens plus *un*. Si les nombres donnés appartiennent à une même progression arithmétique, leur différence est constante, puisqu'elle est la raison même de cette progression. Par conséquent, si on insère entre eux le même nombre de moyens, les diverses progressions ainsi formées auront même raison, et comme le dernier terme de la première est le premier de la seconde, que le dernier de la seconde est le premier de la troisième, et ainsi de suite, elles ne forment qu'une seule et même progression.

168. *La somme de deux termes également éloignés des extrêmes est constante et égale à la somme des extrêmes.*

Prenons $c+h$.

$$c=a+2r \qquad (\text{N}^\circ\ 165)$$
$$h=l-2r$$

Additionnons : $$c+h=a+l.$$

169. *Somme des termes* d'une progression par différence.

Soit la progression :

$$\div a.\ b.\ c.\ d.\dots\ h.\ k.\ l.$$

j'en fais la somme que j'appelle S, et j'écris une seconde fois cette somme au-dessous de la première en intervertissant l'ordre des termes :

$$\begin{aligned} S &= a + b + c + \cdots\cdots\cdots h + k + l \\ S &= l + k + h + \cdots\cdots\cdots c + b + a \end{aligned}$$

J'additionne : $2S = (a+l)+(b+k)+(c+h)+\cdots(h+c)+(k+b)+(l+a)$

Chacune des parenthèses ci-dessus contenant la somme de deux termes également éloignés des extrêmes a une valeur égale à la somme des deux termes extrêmes ; et comme il y a autant de parenthèses qu'il y a de termes dans la progression, c'est-à-dire n, leur somme égalera n fois $a + l$.

Donc :

$$2S = (a + l)n$$

d'où :

$$S = \frac{(a + l)n}{2}.$$

Exemple. Trouver la somme des 100 premiers nombres impairs.

Ici :

$$r = 2 \qquad n = 100 \qquad a = 1.$$

Je calcule d'abord le dernier terme l par la formule du n° 165 :

$$l = 1 + 99 \times 2 = 199.$$

De là (n° 169) :

$$S = \frac{(1 + 199)\,100}{2} = \frac{200 \times 100}{2} = \overline{100}^2 = 10000.$$

CHAPITRE II.

PROGRESSION PAR QUOTIENT OU GÉOMÉTRIQUE.

170. On appelle *progression par quotient* ou *géométrique* une suite de termes dont le quotient est constant.

Ce quotient s'appelle *raison* de la progression. Quand la raison est entière, la progression est croissante ; quand la raison est fractionnaire, la progression est décroissante.

Ainsi :

$$\div\div\; 2 : 6 : 18 : 54 : 162$$

est une progression géométrique croissante dont la raison est 3, et

$$\div\div\; 360 : 180 : 90 : 45 : 22{,}5$$

est une progression géométrique décroissante dont la raison est $\frac{1}{2}$.

La forme générale d'une progression par quotient est

$$\div\div\; a : b : c : d \ldots\ldots : h : k : l :$$

la raison est q et le nombre de termes n.

171. *Calcul d'un terme.*

Par définition :

$$b = aq$$
$$c = bq = aq^2$$
$$d = cq = aq^3$$

l qui est le $\text{n}^{\text{ième}}$ terme aura pour valeur

$$l = aq^{n-1}.$$

Ainsi, un terme quelconque est égal au premier, multiplié par une puissance de la raison dont le degré est égal au nombre des termes qui le précèdent.

Exemple. Soit la progression

$$\div\div\; 5 : 15 : 45 : 135 :$$

le 8^e terme sera égal à

$$5 \times 3^7 = 5 \times 2187 = 10935.$$

172. *Insérer* m *moyens proportionnels ou géométriques entre deux nombres* u *et* v ; c'est-à-dire intercaler entre deux nombres u et v, m nombres qui, avec les deux premiers, forment une progression par quotient.

$$\div\!\div\; u : \overbrace{\cdots\cdots\cdots}^{m \text{ termes}} v :$$

Il s'agit de former une progression géométrique de $m + 2$ termes dont u est le premier terme et v le $(m + 2)^e$: c'est la raison qu'il faut chercher.

D'après la formule du n° 171, j'aurai, en appelant q la raison cherchée :

$$v = u \times q^{m+1}$$

d'où :

$$q^{m+1} = \frac{v}{u}$$

et

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{v}{u}}.$$

Exemple. Soit à insérer 7 moyens proportionnels entre 7 et 45927.

$$q = \sqrt[8]{\frac{45927}{7}} = \sqrt[8]{6561} = \sqrt[4]{\sqrt{6561}} = \sqrt[4]{81} = \sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{9} = 3.$$

Je forme la progression demandée :

$$\div\!\div\; 7 : 21 : 63 : 189 : 567 : 1701 : 5103 : 15309 : 45927 :$$

En général, ce problème ne peut pas se faire par l'arithmétique. On ne peut calculer la raison, comme je viens de le faire, que lorsque l'indice de la racine à extraire est un nombre qui ne contient pas d'autres facteurs premiers que 2 et 3 (voir le n° 33), ce qui est très rare : le plus souvent, il faut avoir recours aux logarithmes (voir le chapitre suivant) pour extraire les racines.

Remarque. Dans le cas où l'on n'a à insérer qu'un moyen entre deux nombres u et v, la formule précédente, dans laquelle on fait $m = 1$, donne

$$q = \sqrt{\frac{v}{u}}.$$

Le moyen inséré sera égal à

$$u \times q = u\sqrt{\frac{v}{u}} = \sqrt{uv}.$$

C'est la *moyenne proportionnelle ou géométrique* entre u et v.

173. Si, entre les divers termes d'une progression par quotient on insère un même nombre de moyens, on obtient diverses séries de termes qui forment une seule et même progression.

En effet, en reprenant la formule du n° 172

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{v}{u}}$$

on voit que la raison q s'obtient par le quotient des nombres donnés, et dont on extrait une racine qui a un indice égal au nombre des moyens à insérer plus *un*. Si les nombres donnés appartiennent à une même progression géométrique, leur quotient est constant, puisqu'il est la raison même de cette progression. Par conséquent, si on insère entre eux le même nombre de moyens, les diverses progressions ainsi formées auront même raison, et comme le dernier terme de la première est le premier de la seconde, que le dernier de la seconde est le premier de la troisième, et ainsi de suite, elles ne forment qu'une seule et même progression.

174. *Le produit de deux termes également éloignés des extrêmes est constant et égal au produit des extrêmes.*

Prenons : $c + h$.

$$c = aq^2$$

$$h = \frac{l}{q^2}$$

Multiplions : $$ch = aq^2 \times \frac{l}{q^2} = al.$$

175. *Produit des termes* d'une progression par quotient.

Soit la progression

$$\div\div a : b : c : d \cdots : h : k : l :$$

j'en fais le produit que j'appelle P, et j'écris une seconde fois ce produit au-dessous du premier en intervertissant l'ordre des termes :

$$\begin{array}{rl} & P = a \times b \times c \times \cdots\cdots\cdots h \times k \times l \\ & P = l \times k \times h \times \cdots\cdots\cdots c \times b \times a \\ \hline \text{Je multiplie :} & P^2 = (al) \times (bk) \times (ch) \cdots (hc) \times (kb) \times (al). \end{array}$$

Chacune des parenthèses ci-dessus contenant le produit de deux termes également éloignés des extrêmes a une valeur égale au produit des deux termes extrêmes, et comme il y a autant de parenthèses qu'il y a de termes dans la progression, c'est-à-dire n, leur produit égalera al élevé à la puissance n.

Donc :

$$P^2 = (al)^n$$

d'où :

$$P = \sqrt{(al)^n}.$$

176. *Somme des termes* d'une progression par quotient.

Soit la progression :

$$\div\!\div\, a : b : c : \cdots\cdots h : k : l :$$

J'appelle S la somme cherchée. Je fais d'abord cette somme S : puis je l'écris une seconde fois en multipliant par la raison q chacun des termes qui la composent.

J'obtiens ainsi :

$$\begin{array}{rl} & S = a + b + c + h \cdots\cdots\cdots\cdots h + k + l \\ \text{et} & Sq = aq + bq + cq + \cdots\cdots\cdots hq + kq + lq \end{array}$$

puis je retranche la première ligne de la seconde.

Le 1^{er} terme de la 2^e ligne, aq, égale le 2^e terme de la 1^{re} ligne, b; le 2^e terme de la 2^e ligne, bq, égale le 3^e terme de la 1^{re} ligne, c;..... et ainsi de suite.

Donc, en supprimant les termes qui se détruisent deux à deux, il reste :

$$Sq - S = lq - a$$

ou

$$S(q-1) = lq - a$$

d'où

$$S = \frac{lq - a}{q - 1}.$$

Si la progression est décroissante, q étant plus petit que 1, il faut retrancher Sq de S, et l'on a :

$$S - Sq = a - lq$$

ou

$$S(1 - q) = a - lq$$

d'où

$$S = \frac{a - lq}{1 - q}.$$

Si la progression est indéfiniment décroissante, c'est-à-dire si le nombre des termes est infini, chacun d'eux étant plus petit que le précédent, le terme l peut être regardé comme nul [1], et il reste pour la somme des termes :

$$S = \frac{a}{1 - q}.$$

---

1. Pour la démonstration rigoureuse de ce fait, il faut prouver qu'on peut toujours prendre le rang n du terme l assez grand pour que l soit plus petit qu'une quantité donnée, aussi petite qu'on voudra.

La raison q étant ici plus petite que 1 peut être représentée par la fraction

$$\frac{1}{1 + \alpha},$$

α étant une quantité positive, car alors le numérateur 1 est nécessairement plus petit que le dénominateur $1 + \alpha$.

Je vais démontrer qu'on peut prendre n assez grand pour que

$$\frac{1}{(1 + \alpha)^n}$$

soit plus petit que toute quantité donnée, ou, ce qui revient au même, pour que

$$(1 + \alpha)^n$$

soit plus grand que toute quantité donnée, aussi grande que l'on voudra, et que j'appelle p.

Il faut prouver que l'on peut toujours poser

$$(1 + \alpha)^n > p.$$

Or :

$$(1 + \alpha)^2 \text{ ou } 1 + 2\alpha + \alpha^2 \cdots > 1 + 2\alpha$$
$$(1 + \alpha)^3 \text{ ou } 1 + 3\alpha + 3\alpha^2 + \alpha^3 > 1 + 3\alpha$$
$$\vdots$$
$$(1 + \alpha)^n \cdots\cdots\cdots\cdots > 1 + n\alpha.$$

Donc l'inégalité à démontrer

$$(1 + \alpha)^n > p$$

sera vraie *à fortiori*, si j'ai :

$$1 + n\alpha > p$$

d'où

$$n\alpha > p - 1$$

et

$$n > \frac{p - 1}{\alpha}$$

ce qui est toujours possible.

177. Reprenons les formules précédentes :

Progression par différence.	Progression par quotient.
$l = a + (n - 1)r$	$l = aq^{n-1}$
$r = \dfrac{v - u}{m + 1}$	$q = \sqrt[m+1]{\dfrac{v}{u}}$
$c + h = a + l$	$ch = al$
$S = \dfrac{(a + l)n}{2}$	$P = \sqrt{(al)^n}.$

Leur comparaison fait ressortir ceci :

L'*addition* dans la progression par différence est remplacée par la *multiplication* dans la progression par quotient, la *soustraction* par la *division*, la *multiplication* par l'*élévation à la puissance*, et la *division* par l'*extraction de racine*.

C'est de cette comparaison que je vais, dans le chapitre suivant, déduire la théorie des logarithmes. En réalité, cette théorie a été découverte par une autre méthode, mais dont je ne parlerai pas ici, car son développement ne rentre pas dans le cadre de cet ouvrage.

CHAPITRE III.

LOGARITHMES.

178. *Définition des logarithmes.* Étant données deux progressions, l'une par quotient, commençant par l'unité, l'autre par différence, commençant par zéro

$$\div\!\!\div\ 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 \ldots\ldots\ldots$$

$$\div\ 0.\ r.\ 2r.\ 3r.\ 4r \ldots\ldots\ldots$$

on appelle *logarithme* d'un terme de la progression par quotient le terme de même rang de la progression par différence.

Ainsi $3r$ est le logarithme de q^3.

On indique cette relation de la manière suivante :

$$3r = \text{Log } q^3.$$

Il est essentiel que la première progression commence par l'unité et la seconde par zéro ; mais les raisons q, r peuvent être prises arbitrairement.

La raison q de la progression par quotient, qui a pour logarithme la raison r de la progression par différence, s'appelle *base* du système de logarithmes.

L'inventeur de la théorie des logarithmes, le baron Néper, Écossais, qui publia le résultat de ses travaux en 1614, avait pris pour base de son système le nombre e (2,718281845....) et 1 pour raison de la progression par différence.

Les calculs amenés par le choix de cette base ayant été fort longs, il ne put pas donner à sa table de logarithmes le développement qu'il aurait voulu, et se proposait d'ailleurs de la recommencer en prenant pour base le nombre 10 ; mais la mort l'empêcha de réaliser ce projet qui fut repris d'abord par un Anglais, Briggs, puis par tous les calculateurs qui suivirent. Le système de Néper fut donc complètement abandonné, et les seules progressions adoptées pour l'établissement des logarithmes sont les suivantes :

$$\div\!\div\; 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000 : 10000000 \cdots\cdots$$

$$\div\; 0.\ \ 1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5.\ \ 6.\ \ 7.\ \ \cdots\cdots$$

qui ont formé le système appelé *système des logarithmes vulgaires*.

Je vais en déduire les principales propriétés des logarithmes.

179. 1° *Le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs de ce produit.*

Soit

$$10000 \times 1000 = 10000000$$

on a :

$$\text{Log } 10000 + \text{Log } 1000 = 4 + 3 = 7 = \text{Log } 10000000.$$

180. 2° *Le logarithme d'un quotient est égal au logarithme du dividende diminué de celui du diviseur.*

Soit

$$10000000 : 1000 = 10000$$

on a :

$$\text{Log}\,10000000 - \text{Log}\,1000 = 7 - 3 = 4 = \text{Log}\,10000.$$

181. 3° *Le logarithme d'une puissance d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre multiplié par l'exposant de la puissance.*

Soit

$$100^4 = 100000000$$

on a :

$$\text{Log}\,100^4 = 4\,\text{Log}\,100 = 4 \times 2 = 8 = \text{Log}\,100000000.$$

182. 4° *Le logarithme d'une racine d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre divisé par l'indice de la racine.*

Soit

$$\sqrt[3]{1000000} = 100$$

on a :

$$\text{Log}\,\sqrt{1000000} = \frac{\text{Log}\,1000000}{3} = \frac{6}{3} = 2 = \text{Log}\,100.$$

On retrouve donc ici ce que j'ai signalé à la fin du chapitre précédent, n° 177 :

La multiplication des nombres remplacée par l'addition des logarithmes ;

La division des nombres remplacée par la soustraction des logarithmes ;

L'élévation à la puissance des nombres remplacée par la multiplication des logarithmes ;

L'extraction de racine des nombres remplacée par la division des logarithmes.

On comprend aisément que ce résultat est obtenu parce que chaque terme de la progression géométrique est une puissance de 10 dont l'exposant est égal au logarithme de ce terme, ce qui n'a lieu que si les premiers termes des deux progressions sont respectivement 1 et 0.

183. Si l'on s'était borné à constater les propriétés des logarithmes sur les deux progressions précédentes (n° 178), leur étude n'aurait offert aucune utilité pour la simplification des calculs. Aussi, voici ce qu'on a fait : on a calculé par une méthode que je vais indiquer les logarithmes de tous les nombres entiers avec une approximation déterminée d'avance (7 décimales), et on a construit une table contenant tous ces nombres depuis 1 jusqu'à 108 000 avec leurs logarithmes.

Les premiers calculateurs de cette table furent :

Briggs, qui, en 1624, a publié les logarithmes des nombres de 1 à 20 000 et de 90 001 à 100 000 ;

Wlacq, qui, en 1628, a publié les logarithmes des nombres de 20 001 à 90 000, comblant ainsi la lacune laissée par Briggs ;

Scherwin, qui, en 1724, refit complètement les calculs précédents ;

Et enfin Callet, qui, en 1795, publia les logarithmes des nombres de 1 à 108 000.

C'est cette dernière table qui a servi de base à toutes celles qui ont été publiées depuis ; seulement les calculateurs de ce siècle-ci ont poussé l'approximation à une décimale de plus que ne l'avait fait Callet.

Voici comment on calcule les logarithmes des nombres entiers qui ne se trouvent pas dans la progression

$$\div\!\div\, 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 \cdots$$

Je vais d'abord calculer le logarithme de 2.

Pour cela, je cherche entre 1 et 10 la moyenne proportionnelle ou géométrique (n° 67), et entre leurs logarithmes 0 et 1 la moyenne différentielle ou arithmétique, qui en sera le logarithme (n° 178).

J'obtiens ainsi pour la moyenne proportionnelle

$$3{,}1622776$$

et pour la moyenne différentielle

$$0{,}5$$

qui est le logarithme de 3,1622776.

J'ai donc, d'une part, la progression par quotient :

$$\div\!\div\, 1 : 3{,}1622776 : 10 :$$

et la progression par différence

$$\div\, 0. \quad 0{,}5. \quad 1.$$

Je prends dans la première les deux termes

$$1 \quad \text{et} \quad 3{,}1622776$$

entre lesquels 2, dont je calcule le logarithme, est compris, et je cherche entre eux la moyenne proportionnelle, qui est

$$1{,}7782794.$$

Je cherche ensuite son logarithme qui est la moyenne différentielle entre 0 et 0,5, logarithmes de 1 et de 3,1622776. J'obtiens ainsi

$$0{,}25.$$

Je cherche ensuite la moyenne proportionnelle entre 1,7782794 et 3,1622776, qui est

$$2{,}3713726$$

dont le logarithme calculé comme les précédents est

$$0{,}375$$

et ainsi de suite, jusqu'à ce que la moyenne proportionnelle calculée ne diffère de 2 que par la 8^e décimale : le logarithme de cette moyenne proportionnelle sera le logarithme de 2.

Voici les détails du calcul :

$$\sqrt{1 \times 10} = 3{,}1622776, \quad \text{Log}\, 3{,}1622776 = \frac{0 + 1}{2} = 0{,}5.$$

$$\sqrt{1 \times 3{,}1622776} = 1{,}7782794, \quad \text{Log}\, 1{,}7782794 = \frac{0 + 0{,}5}{2} = 0{,}25.$$

$$\sqrt{1{,}7782794 \times 3{,}1622776} = 2{,}3713737, \quad \text{Log}\, 2{,}3713737 = \frac{0{,}5 + 0{,}25}{2} = 0{,}375.$$

$$\sqrt{1{,}7782794 \times 2{,}3713737} = 2{,}0535250, \quad \text{Log}\, 2{,}0535250 = \frac{0{,}25 + 0{,}375}{2} = 0{,}3125.$$

$$\sqrt{1{,}7782794 \times 2{,}0535250} = 1{,}9109530, \quad \text{Log}\, 1{,}9109530 = \frac{0{,}25 + 0{,}3125}{2} = 0{,}28125.$$

$$\sqrt{2{,}0535250 \times 1{,}9109530} = 1{,}9809568, \quad \text{Log}\, 1{,}9809568 = \frac{0{,}3125 + 0{,}28125}{2} = 0{,}296875.$$

$$\sqrt{2{,}0535250 \times 1{,}9809568} = 2{,}0169145, \quad \text{Log}\, 2{,}0169145 = \frac{0{,}3125 + 0{,}296875}{2} = 0{,}3046875.$$

$$\sqrt{1{,}9809568 \times 2{,}0169145} = 1{,}9988548, \quad \text{Log}\, 1{,}9988548 = \frac{0{,}296875 + 0{,}3046875}{2} = 0{,}30078125.$$

$$\sqrt{2{,}0169145 \times 1{,}9988548} = 2{,}0078643, \quad \text{Log}\, 2{,}0078643 = \frac{0{,}3046875 + 0{,}30078125}{2} = 0{,}30273437.$$

$$\sqrt{1{,}9988548 \times 2{,}0078643} = 2{,}0033545, \quad \text{Log}\, 2{,}0033545 = \frac{0{,}30078125 + 0{,}30273437}{2} = 0{,}30175781.$$

$$\sqrt{1{,}9988548 \times 2{,}0033545} = 2{,}0011034, \quad \text{Log}\, 2{,}0011034 = \frac{9{,}30078125 + 0{,}30175781}{2} = 0{,}30126953.$$

$$\sqrt{1{,}9988548 \times 2{,}0011034} = 1{,}9999788, \quad \text{Log}\, 1{,}9999788 = \frac{0{,}30078125 + 0{,}30126953}{2} = 0{,}30102539.$$

$$\sqrt{2{,}0011034 \times 1{,}9999788} = 2{,}0005410, \quad \text{Log}\, 2{,}0005410 = \frac{0{,}30126953 + 0{,}30102539}{2} = 0{,}30114746.$$

$$\sqrt{1{,}9999788 \times 2{,}0005410} = 2{,}0002599, \quad \text{Log}\, 2{,}0002599 = \frac{0{,}30102539 + 0{,}30114746}{2} = 0{,}30108642.$$

$$\sqrt{1{,}9999788 \times 2{,}0002599} = 2{,}0001193, \quad \text{Log}\, 2{,}0001193 = \frac{0{,}30102539 + 0{,}30108642}{2} = 0{,}30105590.$$

$$\sqrt{1{,}9999788 \times 2{,}0001193} = 2{,}0000400, \quad \text{Log}\, 2{,}0000400 = \frac{0{,}30102539 + 2{,}30105590}{2} = 0{,}30104064.$$

Dans les calculs qui suivent, je prendrai la moyenne différentielle entre les nombres au lieu de leur moyenne proportionnelle : les nombres ne différant pas entre eux des quatre premières décimales, la différence entre leur moyenne différentielle et leur moyenne proportionnelle n'atteindra pas la 8^e décimale, et *à fortiori* la 7^e [1].

---

1. Je vais démontrer, d'une manière générale, que lorsque deux nombres diffèrent entre eux d'un nombre de chiffres, à partir de la droite, moindre que la moitié du nombre total de leurs chiffres, la différence entre leur moyenne différentielle et leur moyenne proportiounelle est moindre qu'une unité du dernier ordre.

Je me place dans le cas le plus défavorable: celui où le nombre total des chiffres est impair, $2n+1$, et où les deux nombres ont leurs $n+1$ premiers chiffres identiques. Il reste à en calculer n.

Soit a cette partie commune aux deux nombres.

1° Je suppose d'abord que les deux nombres soient tous les deux plus grands que a à la droite duquel on a écrit n zéros, bien entendu.

Soit $a+\alpha$ le premier nombre, $a+\beta$, l'autre.

Leur moyenne différentielle est

$$d=\frac{a+\alpha+a+\beta}{2}=a+\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Leur moyenne proportionnelle

$$q=\sqrt{(a+\alpha)(a+\beta)}.$$

De là :

$$d^2=a^2+a\alpha+a\beta+\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{4}$$

et

$$q^2=a^2+a\alpha+a\beta+\alpha\beta.$$

Donc :

$$d^2-q^2=a^2+a\alpha+a\beta+\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{4}-a^2-a\alpha-a\beta-\alpha\beta=\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-4\alpha\beta}{4}=\frac{(\alpha-\beta)^2}{4}$$

or :

$$d^2-q^2=(d+q)(d-q)=\frac{(\alpha-\beta)^2}{4}$$

de là :

$$d-q=\frac{(\alpha-\beta)^2}{4(d+q)}.$$

Or, a ayant $n+1$ chiffres calculés, puisque $a+\alpha$ et $a+\beta$ en ont $2n+1$, α et β en ont chacun n. Donc leur différence $\alpha-\beta$ a au plus n chiffres, et son carré $(\alpha-\beta)^2$, au plus $2n$.

D'ailleurs d et q, étant compris entre $a+\alpha$ et $a+\beta$, en ont $2n+1$; donc $d+q$ en a au moins $2n+1$, et à fortiori $4(d+q)$ en a $2n+1$.

Par conséquent :

$$(\alpha-\beta)^2<4(d+q)$$

et par suite

$$d-q<1.$$

2° Je suppose maintenant l'un des deux nombres plus grands que a et l'autre plus petit que a.

Soient $a+\alpha$ et $a-\beta$ ces deux nombres.

Leur moyenne différentielle est

$$d=\frac{a+\alpha+a+\beta}{2}=a+\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Leur moyenne proportionnelle

$$q=\sqrt{(a+\alpha)(a-\beta)}.$$

$$\frac{1,9999788 + 2,0000490}{2} = 2,0000139, \quad \text{Log } 2,0000139 = \frac{0,30102539 + 0,30104064}{2} = 0,30103301.$$
$$\frac{1,9999788 + 2,0000139}{2} = 1,9999963, \quad \text{Log } 1,9999963 = \frac{0,30102539 + 0,30103301}{2} = 0,30102920.$$
$$\frac{1,9999963 + 2,0000139}{2} = 2,0000051, \quad \text{Log } 2,0000051 = \frac{0,30102920 + 0,30103301}{2} = 0,30103110.$$
$$\frac{1,9999963 + 2,0000051}{2} = 2,0000007, \quad \text{Log } 2,0000007 = \frac{0,30102920 + 0,30103110}{2} = 0,30103015.$$
$$\frac{1,9999963 + 2,0000007}{2} = 1,9999985, \quad \text{Log } 1,9999985 = \frac{0,30102920 + 0,30103015}{2} = 0,30102967.$$
$$\frac{1,9999985 + 2,0000007}{2} = 1,9999996, \quad \text{Log } 1,9999996 = \frac{0,30102967 + 0,30103015}{2} = 0,30102991.$$
$$\frac{1,9999996 + 2,0000007}{2} = 2,0000002, \quad \text{Log } 2,0000002 = \frac{0,30102991 + 0,30103015}{2} = 0,30103003.$$
$$\frac{1,9999996 + 2,0000002}{2} = 1,9999999, \quad \text{Log } 1,9999999 = \frac{0,30102991 + 0,30103003}{2} = 0,30102997.$$
$$\frac{1,9999999 + 2,0000002}{2} = 2,0000000, \quad \text{Log } 2,0000000 = \frac{0,30102997 + 0,30103003}{2} = 0,30103000.$$

Le logarithme de 2 est donc . . . . $= 0,3010300.$
Celui de 3 calculé directement comme celui de 2, est $= 0,4771213.$
$\text{Log } 4 = \text{Log } 2^2 = 2 \text{ Log } 2 = 2 \times 0,3010300 = 0,6020600.$
Le logarithme de 5, calculé directement est . . . $= 0,6989700.$
$\text{Log } 6 = \text{Log } 2 + \text{Log } 3 = 0,3010300 + 0,4771213 = 0,7781513.$
Le logarithme de 7, calculé directement est . . . $= 0,8450980.$
$\text{Log } 8 = \text{Log } 2^3 = 3 \text{ Log } 2 = 3 \times 0,3010300 = 0,9030900.$
$\text{Log } 9 = \text{Log } 3^2 = 2 \text{ Log } 3 = 2 \times 0,4771213 = 0,9542426.$
$\text{Log } 10$ . . . . $= 1$
et ainsi de suite.

En résumé, il n'y a à calculer directement que les logarithmes des nombres premiers : ceux des autres s'en déduisent aisément.

Or de 1 à 1000 il y a 170 nombres premiers. Les autres mille en

---

De là :
$$d^2 - q^2 = a^2 + a\alpha - a\beta + \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}{4} - a^2 - a\alpha + a\beta + \alpha\beta = \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + 4\alpha\beta}{4} = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2.$$

Or α et β ont n chiffres, et comme leur demi-somme $\frac{\alpha + \beta}{2}$ est plus petite que le plus grand des deux nombres α, β, il en résulte qu'elle a au plus n chiffres. Donc son carré $\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2$ en a au plus $2n$.

D'ailleurs $d + q$ en a au moins $2n + 1$, comme je viens de le démontrer.

Donc :
$$\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 < d + q$$
et comme
$$d^2 - q^2 = (d + q)(d - q) = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2$$
il en résulte
$$d - q < 1.$$

contiennent évidemment un peu moins ; prenons une moyenne de 150 nombres premiers par mille, cela donne jusqu'à 108 000

$$108 \times 150 = 16200$$

en chiffres ronds, 16 000 calculs pareils à celui que je viens de faire, pour construire la table. Ce serait très long : ainsi pour la terminer en 10 ans, il faudrait en faire 1600 par an, c'est-à-dire de 4 à 5 par jour.

Il est facile de comprendre qu'on a dû renoncer à ce procédé et qu'on en a trouvé d'autres beaucoup plus courts, mais qui sont du ressort de l'algèbre supérieure, et qui, par conséquent, n'ont pas à être exposés ici.

Il me suffit d'avoir montré comment l'étude des progressions pouvait conduire au calcul des logarithmes.

184. *Caractéristique d'un logarithme.*

La *caractéristique* d'un logarithme en est la partie entière ; comme elle ne se trouve pas dans les tables, il faut savoir la calculer.

Je suppose

$$\text{Log } 4756{,}325 = 3{,}6772715.$$

De là :

$$\text{Log } 47{,}56325 = \text{Log } \frac{4756{,}325}{100} = \text{Log } 4756{,}325 - \text{Log } 100$$
$$= 3{,}6772715 - 2 = 1{,}6772715.$$

De même :

$$\text{Log } 0{,}04756325 = \text{Log } \frac{47{,}56325}{1000} = \text{Log } 47{,}56325 - \text{Log } 1000$$
$$= 1{,}6772715 - 3 = \bar{2}{,}6772715.$$

Pour effectuer ce dernier calcul, je retranche 3 de 1, ce qui donne — 2 pour la partie entière ; la partie décimale restant toujours la même et positive, le résultat s'écrit :

$$\bar{2}{,}6772715$$

pour bien montrer que le signe — ne porte que sur la partie entière.

Ces exemples font voir que :

1° Si le nombre est > 1, la caractéristique de son logarithme est positive, et contient autant d'unités qu'il y a, dans le nombre, de chiffres entiers moins 1.

2° Si le nombre est < 1, la caractéristique de son logarithme est négative, et contient autant d'unités qu'il y a, dans le nombre, de zéros avant les chiffres significatifs, en comptant le zéro des unités.

185. *Usage des tables de logarithmes.*

Je prendrai, comme type de table de logarithmes, celle de Schrön, éditée chez Gauthier-Villars.

Avec cette table, on peut conserver dans un nombre les 7 premiers chiffres à gauche pour en calculer le logarithme si le nombre est compris entre 1 et 100 000, et 8 chiffres, s'il est compris entre 100 001 et 108 000.

Recherche du logarithme d'un nombre.

Soit à chercher le logarithme de 756,894768. Comme je ne peux conserver que 7 chiffres dans ce nombre, je supprime les deux derniers chiffres en forçant le précédent, puisque la partie négligée vaut plus de 5 unités de l'ordre du premier chiffre qui suit le dernier conservé; je cherche donc le logarithme de 756,8948.

La partie entière de ce logarithme est 2, que j'écris d'avance, puisqu'elle ne se trouve pas dans la table.

Puis, je cherche dans la table la page où, dans la colonne des nombres, je trouverai les premiers chiffres 7568 du nombre donné.

Je trouve le tableau suivant :

NOMBRES.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	57	
7551	878 0045	0102	0160	0217	0275	0332	0390	0447	0505	0562	1	5,7
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	2	11,4
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	3	17,1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	4	22,8
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	5	28,5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	6	34,2
7568	9811	9869	9926	9983	*0041	*0098	*0156	*0213	*0270	*0328	7	39,9
											8	45,6
7569	879 0385	0442	0500	0557	0615	0672	0729	0787	0844	0901	9	51,3

La première colonne à gauche contient les nombres; toutes les autres contiennent leurs logarithmes.

Pour diminuer le volume de la table, elle renferme les 3 premières décimales des logarithmes seulement dans la première colonne, en tête de laquelle est écrit 0; il faut les ajouter à gauche des 4 chiffres inscrits dans les autres colonnes.

Quant aux étoiles qui précèdent les logarithmes contenus dans les cinq dernières colonnes de la ligne du nombre 7568, elles signifient que les 3 premières décimales sous-entendues ne sont plus comme pour les précédents 878, mais celles qui se trouvent à la ligne suivante : 879.

Comme le nombre dont je veux avoir le logarithme commence par 75689, je cherche le nombre contenu dans la colonne du 9, en suivant la ligne de 7568. Je vois ainsi que 75689 a pour logarithme 2,8790328, en tenant compte de l'observation précédente, relativement aux étoiles placées devant les logarithmes.

Passons maintenant au calcul des logarithmes des deux derniers chiffres conservés au nombre.

A droite de la page, se trouve un petit tableau en tête duquel est inscrit le nombre 57. Ce nombre veut dire qu'il y a une différence de 57 unités du 7^{e} ordre décimal, entre les logarithmes de deux nombres consécutifs de 5 chiffres, c'est-à-dire de deux nombres dont les sixièmes chiffres, à partir de la gauche, diffèrent de 10 unités.

Dans ce petit tableau, la première colonne indique la différence entre les sixièmes chiffres des nombres, et la seconde colonne la différence entre leurs logarithmes.

Or, le nombre qui a pour logarithme 2,8790328 est 756,8900.

Si je le compare au nombre donné 756,8948, je vois que leurs sixièmes chiffres diffèrent de 4 unités ; donc leurs logarithmes différeront de 22,8 unités du 7^{e} ordre, comme le montre le tableau.

Donc, au logarithme de 756,8900 qui est 2,8790328, il faudra ajouter 22,8 pour avoir celui de 756,8940.

Quant à la différence entre les septièmes chiffres des nombres 756,8940 et 756,8948, on prendra pour différence de leurs logarithmes le dixième de la différence indiquée dans le petit tableau pour les logarithmes. Puis on s'arrêtera là, le calcul du 8^{e} chiffre ne pouvant se faire avec une exactitude absolue.

En résumé :

$$\begin{array}{lrcr}
\text{Log } 756{,}89 & & = & 2{,}8790328 \\
\text{Log} & 4 & = & 228 \\
\text{Log} & 8 & = & 456 \\
\hline
\text{Log } 756{,}8948 & & = & 2{,}879035536
\end{array}$$

186. *Calcul d'un nombre dont on a le logarithme.*

Soit le logarithme 4,6884355 : il faut chercher le nombre correspondant.

Je ne m'occupe pas de la caractéristique du logarithme, qui servira, une fois le nombre trouvé, à déterminer combien il a de chiffres entiers.

Je cherche, dans la table, la page où les 3 premières décimales des logarithmes sont 688, et je cherche dans cette page la ligne qui contient le logarithme immédiatement inférieur à 6884355.

Je trouve le tableau suivant :

NOMBRES.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	89	
4876	638 0637	0726	0815	0904	0993	1082	1171	1260	1349	1439	1	8,9
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	2	17,8
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	3	26,7
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	4	35,6
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	5	44,5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	6	53,4
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	7	62,3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	8	71,2
4880	4198	4287	4376	4465	4554	4643	4732	4821	4910	4999	9	80,1

Ce logarithme est 6884287 dont le nombre correspondant est 48801.

La différence entre le logarithme donné.	6884355
et le logarithme trouvé.	6884287
est de.	68

Pour savoir à quelle différence de nombres elle correspond, je consulte le petit tableau de droite.

Une diff^{ce} de	62,3	dans le Log. donne	dans le nomb.	une diff^{ce} de	7	au 6^e chiffre ;
—	5,34	—	—	—	6	au 7^e — ;
Donc —	67,64	—	—	—	76	au 7^e chiffre ;
	(à peu près 68)					

Donc le nombre cherché est

4880176

et, comme son logarithme a 4 pour caractéristique, le nombre demandé sera

48801,76.

Opérations faites par logarithmes.

187. Multiplier 568,74965 par 0,007985372.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Log } 568{,}74 & = 2{,}7549138 \\
\text{Log } \phantom{568{,}7}9 & = \phantom{2{,}7549}684 \\
\text{Log } \phantom{568{,}74}6 & = \phantom{2{,}7549}456 \\
\hline
\text{Log } 568{,}7496 & = 2{,}754921096 \\
\text{Log } 0{,}0079853 & = \bar{3}{,}9022912 \\
\text{Log } \phantom{0{,}007985}7 & = \phantom{\bar{3}{,}9022}385 \\
\text{Log } \phantom{0{,}0079853}2 & = \phantom{\bar{3}{,}90229}11 \\
\hline
\text{Log } 0{,}007985372 & = \bar{3}{,}902295061
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} 2{,}75492110 \\
\\
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \bar{3}{,}90229506 \\
\hline
\end{array}
$$

L'addition des deux logarithmes donne. . . 0,65721616
en tenant compte du signe — de la caractéristique du second logarithme.

Je cherche le nombre correspondant au logarithme trouvé 0,65721616.

$$
\begin{array}{rl}
6572089 & = \text{Log } 45416 \\
665 & = \text{Log } 7 \\
570 & = \text{Log } 6 \\
\hline
657215120 & = \text{Log } 4541676
\end{array}
$$

donc

$$0{,}65721512 = \text{Log } 4{,}541676.$$

4,541676 est le produit demandé.

188. Diviser 376,84793 par 4978,3756.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Log } 376{,}84 & = 2{,}5761570 \\
\text{Log } \phantom{376{,}8}7 & = \phantom{2{,}5761}805 \\
\text{Log } \phantom{376{,}84}9 & = \phantom{2{,}5761}103 \\
\hline
\text{Log } 376{,}8479 & = 2{,}57616608 \\
\text{Log } 4978{,}3 & = 3{,}6970811 \\
\text{Log } \phantom{4978{,}}7 & = \phantom{3{,}6970}609 \\
\text{Log } \phantom{4978{,}3}6 & = \phantom{3{,}69708}52 \\
\hline
\text{Log } 4978{,}376 & = 3{,}69708771
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} 2{,}57616608 \\
\\
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} 3{,}69708771 \\
\hline
\end{array}
$$

Je retranche : $\bar{2}{,}87907837$

Je cherche le nombre correspondant.

$$
\begin{array}{rl}
8790729 & = \text{Log } 75696 \\
522 & = \text{Log } 9 \\
232 & = \text{Log } 4 \\
\hline
879078352 & = \text{Log } 7569694
\end{array}
$$

Donc

$$\bar{2},87907835 = \text{Log } 0,07569694.$$

0,07569694 est le quotient demandé.

189. Diviser 4635,3892 par 0,0000895673.

$$\left.\begin{array}{lcr} \text{Log } 4635,3 & = & 3,6660778 \\ \text{Log } \qquad 8 & = & 752 \\ \text{Log } \qquad 9 & = & 846 \end{array}\right\} 3,66608617$$

$$\begin{array}{lcr} \text{Log } 4635,389 & = & 3,666086166 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{lcr} \text{Log } 0,000089567 & = & \bar{5},9521480 \\ \text{Log } \qquad 3 & = & 147 \end{array}\right\} \bar{5},95214947$$

$$\begin{array}{lcr} \text{Log } 0,0000895673 & = & \bar{5},95214947 \end{array}$$

Je retranche : 7,71393670

en tenant compte du signe — de la caractéristique du second logarithme.

Je cherche le nombre correspondant :

$$\begin{array}{rcl} 7139355 & = & \text{Log } 51753 \\ 84 & = & \text{Log } \qquad 1 \\ 336 & = & \text{Log } \qquad 4 \\ \hline 713936676 & = & \text{Log } 5175314 \end{array}$$

Donc :

$$7,7139367 = \text{Log } 51753140.$$

51753140 est le quotient demandé.

190. Diviser 0,0105087638 par 0,0000795146.

$$\left.\begin{array}{lcr} \text{Log } 0,0105087 & = & \bar{2},02154899 \\ \text{Log } \qquad 6 & = & 2484 \\ \text{Log } \qquad 4 & = & 1656 \end{array}\right\} \bar{2},02155164$$

$$\begin{array}{lcr} \text{Log } 0,010508764 & = & \bar{2},0215516396 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{lcr} \text{Log } 0,000079514 & = & \bar{5},9004436 \\ \text{Log } \qquad 6 & = & 33 \end{array}\right\} \bar{5},9004469$$

$$\begin{array}{lcr} \text{Log } 0,0000795146 & = & \bar{5},9004469 \end{array}$$

Je retranche : 2,12110474

Je cherche le nombre correspondant :

$$\begin{array}{rcl} 1211000 & = & \text{Log } 13216 \\ 329 & = & \text{Log } \qquad 1 \\ 1316 & = & \text{Log } \qquad 4 \\ \hline 121104606 & = & \text{Log } 1321614 \end{array}$$

Donc :

$$2{,}1211047 = \text{Log } 132{,}1614$$

132,1614 est le quotient demandé.

191. Élever 0,6905845 à la 12ᵉ puissance.

$$\begin{array}{lrcr}
\text{Log } 0{,}69058 & & = & \bar{1}{,}8392140 \\
\text{Log} & 4 & = & 252 \\
\text{Log} & 5 & = & 315 \\
\hline
\text{Log } 0{,}6905845 & & = & \bar{1}{,}839216835
\end{array}$$

Comme il faut multiplier ce logarithme par 12, je conserverai toutes ses décimales pour avoir une approximation plus grande.

Pour faire cette multiplication, je sépare le logarithme en deux parties, la partie positive et la partie négative, et je les multiplie successivement par 12.

$$\begin{array}{r}
\bar{1} \\
12 \\
\hline
\overline{12}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
0{,}839216835 \\
12 \\
\hline
1678433670 \\
839216835 \\
\hline
10{,}070602020
\end{array}$$

Le résultat est

$$\overline{12} + 10{,}070602020 = \bar{2}{,}070602020.$$

Je vais chercher le nombre correspondant :

$$\begin{array}{rcl}
0705919 & = & \text{Log } 11765 \\
738 & = & \text{Log } 2 \\
258 & = & \text{Log } 7 \\
\hline
07060186 & = & \text{Log } 1176527
\end{array}$$

Donc :

$$\bar{2}{,}0706020 = \text{Log } 0{,}01176527.$$

0,01176527 est la puissance demandée.

192. Extraire la racine 8ᵉ de 0,0095740378.

$$\begin{array}{lrcr}
\text{Log } 0{,}0095740 & & = & \bar{3}{,}9810934 \\
\text{Log} & 3 & = & 138 \\
\text{Log} & 8 & = & 368 \\
\hline
\text{Log } 0{,}009574038 & & = & \bar{3}{,}981095148
\end{array}$$

Pour diviser ce logarithme, je le séparerai en deux parties, comme dans l'exemple précédent ; puis j'ajouterai à la caractéristique négative assez d'unités pour qu'elle devienne divisible par 8. Pour ne rien changer au résultat, j'ajouterai le même nombre d'unités à la partie décimale, et je ferai la division.

J'obtiendrai ainsi :
d'une part $\bar{8}$ en ajoutant — 5 à la partie entière, et de l'autre 5,98109515 en ajoutant + 5 à la partie décimale.

J'ai donc à diviser par 8

$$\bar{8} + 5{,}98109515$$

ce qui donne

$$\bar{1} + 0{,}7476369.$$

Le logarithme cherché est $\bar{1},7476369$.

Je cherche le nombre correspondant :

$$\begin{array}{r@{\;=\;}l}
7476293 & \text{Log } 55928 \\
708 & \text{Log } 9 \\
546 & \text{Log } 7 \\
\hline
747636866 & \text{Log } 5592897
\end{array}$$

Donc :

$$\bar{1},7476369 = \text{Log } 0{,}5592897.$$

0,5592897 est la racine demandée.

Remarque. — Il est clair que si, dans ces deux derniers exemples, la caractéristique du logarithme avait été positive, on aurait fait la multiplication et la division de ce logarithme sans le décomposer en deux parties, absolument comme avec un nombre décimal ordinaire.

CHAPITRE IV.

INTÉRÊTS COMPOSÉS.

193. Une somme est dite placée à *intérêts composés* pendant un certain temps, lorsque les intérêts rapportés par cette somme sont ajoutés au capital, soit tous les ans, soit tous les six mois, soit tous les trois mois, et rapportent eux-mêmes des intérêts jusqu'à la fin de l'opération.

194. *Établissement des formules.*

Je suppose d'abord que les intérêts se capitalisent par an.

Soit r le centième du taux de l'intérêt, c'est-à-dire l'intérêt d'un franc en un an, n le nombre d'années.

Je vais calculer ce que vaudra 1 fr. au bout de ces n années.

1 fr. placé au commencement de la 1re année vaudra à la fin de cette année

$$1 + r$$

$1 + r$ placé au commencement de la 2e année vaudra à la fin de cette année

$$(1 + r) + r(1 + r) = (1 + r)(1 + r) = (1 + r)^2$$

$(1 + r)^2$ placé au commencement de la 3e année vaudra à la fin de cette année

$$(1 + r)^2 + r(1 + r)^2 = (1 + r)^2 (1 + r) = (1 + r)^3$$

$(1 + r)^3$ placé au commencement de la 4e année vaudra à la fin de cette année

$$(1 + r)^3 + r(1 + r)^3 = (1 + r)^3 (1 + r) = (1 + r)^4$$

. . . .

. . . .

$(1+r)^{n-1}$ placé au commencement de la nième année vaudra à la fin de cette année

$$(1 + r)^{n-1} + r(1 + r)^{n-1} = (1 + r)^{n-1}(1 + r) = (1 + r)^n.$$

(Voir le n° 22 pour la mise en facteur de $1 + r$.)

Soit a la somme placée au commencement de l'opération, A la somme (capital et intérêts réunis) obtenue à la fin, on a

$$\text{A} = a(1 + r)^n$$

Cette formule renferme quatre quantités variables : il y a donc quatre problèmes différents à étudier; ils se résolvent à l'aide des quatre formules suivantes :

1°
$$\text{A} = a(1 + r)^n$$

ou
$$\text{Log A} = \text{Log } a + n \text{ Log } (1 + r).$$

2°
$$a = \frac{\text{A}}{(1 + r)^n}$$

ou
$$\text{Log } a = \text{Log A} - n \text{ Log } (1 + r).$$

3°
$$1 + r = \sqrt[n]{\frac{\text{A}}{a}}$$

ou
$$\text{Log } (1 + r) = \frac{\text{Log A} - \text{Log } a}{n}.$$

4° Formule qui ne peut s'établir que par logarithmes :

$$n = \frac{\text{Log A} - \text{Log } a}{\text{Log } (1 + r)}.$$

Remarques. — Les formules qui ne contiennent que les nombres se tirent de la première (n° 194-1°) exprimée par des nombres, comme les formules qui contiennent des logarithmes se tirent de la première (n° 194-1°) exprimée par des logarithmes.

Quant à l'établissement de celle-ci, il suffit pour s'en rendre compte de se reporter aux propriétés des logarithmes développées ci-dessus (n^{os} 179, 180, 181, 182). Il en est de même des autres.

§ 1er. — *Le nombre d'années est exact.*

195. 1er problème.

A combien s'élève un capital de 12 745 fr. 25 c. placé pendant 25 ans à 3 $^1/_2$ p. 100?

$$A = a(1+r)^n$$

$$\text{Log } A = \text{Log } a + n \text{ Log}(1+r) = \text{Log } 12\,745{,}25 + 25 \text{ Log } 1{,}035.$$

$$\begin{aligned} \text{Log } 12745{,}25 &= 4{,}10534832 \\ 25 \text{ Log } 1{,}035 = 25 \times 0{,}01494035 &= \underline{0{,}37350875} \\ \text{J'ajoute :} \quad \text{Log } A &= 4{,}47885707 \end{aligned}$$

$$A = 30120 \text{ fr. } 14 \text{ c.}$$

196. 2^e problème.

Quel capital faut-il placer à 4 $^3/_4$ p. 100, pour retirer au bout de 18 ans 50 000 fr., capital et intérêts réunis?

$$a = \frac{A}{(1+r)^n}$$

$$\text{Log } a = \text{Log } A - n \text{ Log } (1+r) = \text{Log } 50000 - 18 \text{ Log } 1{,}0475.$$

$$\begin{aligned} \text{Log } 50000 &= 4{,}6989700 \\ 18 \text{ Log } 1{,}0475 = 18 \times 0{,}02015403 &= \underline{0{,}36277254} \\ \text{Je retranche :} \quad \text{Log } a &= 4{,}33619746 \end{aligned}$$

$$a = 21\,686 \text{ fr. } 90 \text{ c.}$$

197. 3^e problème.

A quel taux 15 225 fr. 50 c. placés pendant 15 ans ont-il donné 35 275 fr. 75 c., capital et intérêts réunis?

$$1 + r = \sqrt[n]{\frac{A}{a}}$$

$$\text{Log}\,(1+r) = \frac{\text{Log A} - \text{Log}\,a}{n} = \frac{\text{Log}\,35275{,}75 - \text{Log}\,15225{,}50}{15}$$

$$= \frac{4{,}54747622 - 4{,}18257155}{15} = \frac{0{,}36490467}{15} = 0{,}02432698.$$

$$1 + r = 1{,}0576135$$

d'où

$$r = 0{,}0576135.$$

Le taux est à peu près 5,761 p. 100.

198. 4e problème.

Pendant combien d'années a été placé un capital de 4000 fr. à 3 p. 100, qui est devenu égal à 5067 fr. 10 c.?

$$n = \frac{\text{Log A} - \text{Log}\,a}{\text{Log}\,(1+r)} = \frac{\text{Log}\,5067{,}10 - \text{Log}\,4000}{\text{Log}\,1{,}03}$$

$$= \frac{3{,}7047595 - 3{,}6020600}{0{,}01283722} = \frac{0{,}1026995}{0{,}01283722} = 8.$$

§ 2. – *Le nombre d'années n'est pas exact.*

199. 1er problème.

25000 fr. sont placés à $4\,{}^1/_2$ p. 100. Que donneront-ils, avec leurs intérêts composés, au bout de 5 ans 3 mois et 12 jours?

Dans la formule à appliquer ici

$$\text{A} = a\,(1+r)^n$$

on a

$$n = 5 + \frac{3}{12} + \frac{12}{360}$$

puisque 1 mois est $\frac{1}{12}$ d'année, et que 1 jour en est $\frac{1}{360}$.

Donc :

$$n = 5 + \frac{3}{12} + \frac{12}{360} = 5 + \frac{1}{4} + \frac{1}{30} = \frac{300 + 15 + 2}{60} = \frac{317}{60}.$$

$$\text{Log A} = \text{Log}\,a + n\,\text{Log}\,(1+r) = \text{Log}\,25000 + \frac{317}{60}\,\text{Log}\,1{,}045$$

$$= 4{,}3979400 + \frac{317}{60} \times 0{,}01911629$$

$$= 4{,}3979400 + 0{,}10099773 = 4{,}49893773.$$

$$\text{A} = 31\,545 \text{ fr. } 52 \text{ c.}$$

Dans la pratique, on opère souvent d'une autre manière. On calcule les intérêts composés pendant le nombre d'années exact, et les intérêts simples pendant le reste du temps.

Ici je vais d'abord calculer A en faisant $n = 5$.

$$\begin{aligned}\text{Log A} &= \text{Log } 25000 + 5 \text{ Log } 1{,}045 = 4{,}3979400 + 5 \times 0{,}09558145 \\ &= 4{,}3979400 + 0{,}09558145 = 4{,}49352145.\end{aligned}$$

Donc :

A au bout de 5 ans vaut . . . . 31 154$^{\text{f}}$54

J'y ajouterai les intérêts simples de cette somme pendant 3 mois et 12 jours (N° 77 — 1°) :

$$i = \frac{\overset{15577,27}{\cancel{31154{,}54}} \times \overset{0,1}{\cancel{4{,}5}} \times \overset{51}{\cancel{102}}}{\underset{\underset{\underset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{8}}}{\cancel{360}} \times 100} = \frac{79444{,}077}{200} = \ldots\ldots\ldots \quad 397^{\text{f}}22$$

Cela fait en tout . . . . 31 551$^{\text{f}}$76

Ce résultat est tellement rapproché du précédent qu'il est à peu près indifférent d'employer l'une ou l'autre méthode.

Je ferai remarquer seulement que l'emploi de l'intérêt composé, pour la fraction d'année, donne un résultat un peu moindre que celui de l'intérêt simple, ce qui, de prime abord, peut surprendre. Mais il faut faire attention que si 100 fr., à $4\,{}^1/_2$ p. 100, deviennent 104 fr. 50 c. au bout d'un an, par l'intérêt composé comme par l'intérêt simple, 100 fr. au bout d'une fraction d'année, 3 mois par exemple, vaudront moins par le premier que par le second ; puisque dans le premier cas, sa valeur au bout de 3 mois, augmentée de ses intérêts pendant 9 mois, vaudra 104 fr. 50 c., tandis que dans le second cas, sa valeur au bout de 3 mois, augmentée des intérêts de 100 fr. seulement, pendant 9 mois, vaudra la même somme 104 fr. 50 c. Dans ce dernier cas, les intérêts pendant 9 mois étant moindres que dans le premier, nécessairement le capital au bout de 3 mois est plus grand.

200. 2$^{\text{e}}$ Problème.

Quel capital faut-il placer à $4\,{}^1/_4$ p. 100, pour retirer, au bout de 8 ans 5 mois 25 jours, 30 000 fr., capital et intérêts réunis ?

$$a = \frac{\text{A}}{(1 + r)^n}$$

$$\text{Log } a = \text{Log A} - n \text{ Log } (1 + r).$$

Ici :

$$n = 8 + \frac{5}{12} + \frac{25}{360} = 8 + \frac{5}{12} + \frac{5}{72} = \frac{576 + 30 + 5}{72} = \frac{611}{72}$$

Donc :

$$\text{Log } a = \text{Log } 30000 - \frac{611}{72} \text{ Log } 1{,}0425 = 4{,}4771213 - \frac{611}{72} \times 0{,}01807606$$

$$= 4{,}4771213 - 0{,}15339545 = 4{,}32372585$$

$$a = 21072 \text{ fr. } 97 \text{ c.}$$

201. 3^{e} Problème.

A quel taux 25 275 fr. 50 c. placés pendant 6 ans 7 mois 19 jours ont-ils donné 37 446 fr. 25 c., capital et intérêts réunis ?

$$1 + r = \sqrt[n]{\frac{A}{a}}$$

$$\text{Log }(1 + r) = \frac{\text{Log A} - \text{Log } a}{n}$$

$$n = 6 + \frac{7}{12} + \frac{19}{360} = \frac{2160 + 210 + 19}{360} = \frac{2389}{360}$$

donc :

$$\text{Log}(1+r) = \frac{\text{Log}37446{,}25 - \text{Log}25275{,}50}{\frac{2389}{360}} = \frac{360(4{,}5734083 - 4{,}40269975)}{2389}$$

$$= \frac{360 \times 0{,}17070855}{2389} = 0{,}02572419$$

$$1 + r = 1{,}0610215$$

$$r = 0{,}0610215$$

Le taux est à peu près 6,10 p. 100.

202. 4^{e} problème.

Pendant combien de temps a été placé un capital de 36 248 fr. 75 c. à 5 $^{3}/_{8}$ p. 100, qui est devenu 47 372 fr. 35 c., capital et intérêts réunis ?

$$n = \frac{\text{Log A} - \text{Log } a}{\text{Log }(1 + r)} = \frac{\text{Log } 47372{,}35 - \text{Log } 36248{,}75}{\text{Log } 1{,}05375}$$

$$= \frac{4{,}67552492 - 4{,}5592930}{0{,}02273759} = \frac{0{,}11623192}{0{,}02273759} = 5{,}112.$$

Pour exprimer 0,112 d'année en jours, je pose la proportion :

$$\frac{112}{1000} = \frac{x}{360}$$

d'où :

$$x = \frac{112 \times \overset{\overset{9}{\cancel{18}}}{\cancel{360}}}{\underset{\underset{25}{\cancel{50}}}{\cancel{1000}}} = 40.$$

$n = 5$ ans 1 mois 10 jours.

203. Si les intérêts se capitalisent par semestre, dans les formules précédentes (nº 194), n représentera le nombre de semestres, et r l'intérêt de 1 fr. pendant un semestre : il sera donc égal à la deux-centième partie du taux d'intérêt.

Si les intérêts se capitalisent par trimestre, dans les formules du nº 194, n représentera le nombre de trimestres, et r l'intérêt de 1 fr. pendant un trimestre : il sera donc égal à la quatre-centième partie du taux d'intérêt.

CHAPITRE V.

ASSURANCES.

204. L'*assurance* est un contrat par lequel un particulier s'engage à verser à une compagnie une prime unique ou plusieurs primes annuelles fixes, soit pour assurer à son décès une rente viagère ou un capital à une personne désignée ou à ses héritiers, soit pour s'assurer à lui-même ou bien une rente viagère immédiate, ou bien une rente viagère ou un capital, après un certain nombre d'années. La prime annuelle fixe s'appelle *annuité*.

Il y a donc deux sortes principales d'assurances : l'*assurance après décès*, et l'*assurance pendant la vie*.

Dans la première : 1º on peut s'assurer, pour la vie entière, en versant soit une prime unique, soit des primes annuelles jusqu'à son décès, soit des primes annuelles temporaires, c'est-à-dire pendant un nombre d'années déterminé d'avance. Au décès de l'assuré, à quelque époque qu'il se produise, la compagnie payera la rente viagère ou le capital convenus.

2º On peut aussi s'assurer, pour une certaine période d'années déterminée d'avance, par des versements identiques aux précédents, la compagnie ne devant payer la rente viagère ou le capital convenus que si le décès de l'assuré se produit pendant cette période d'années.

Dans la seconde : 1° On peut s'assurer une *rente viagère immédiate* en versant une prime unique.

2° On peut s'assurer, soit par une prime unique, soit par des primes annuelles, une rente viagère ou un capital payable au bout d'un certain nombre d'années, si l'assuré est vivant à cette époque : c'est ce qu'on appelle *rente viagère différée, capital différé.*

3° On peut enfin s'assurer, soit par une prime unique, soit par des primes annuelles, une rente payable pendant une période d'années déterminée d'avance, si l'assuré est vivant pendant cette période : c'est ce qu'on appelle *rente temporaire immédiate ou différée.*

Voilà les principaux modes d'assurances. Il y en a un grand nombre d'autres, mais dont je ne ferai pas mention ici. Et même, comme je me propose de traiter complètement la question des assurances dans un ouvrage spécial, je ne vais développer actuellement que le premier mode d'assurances : l'assurance pour la vie entière, avec prime unique ou primes viagères, d'un capital payable au décès de l'assuré.

205. *Calcul de la prime, unique ou viagère :*

Je suppose qu'un individu, âgé de 25 ans, veuille contracter une assurance payable à son décès. D'après une table de mortalité, on constate que le nombre d'individus vivants à 25 ans est réduit à moitié à 58 ans, c'est-à-dire au bout de 33 ans ; donc, la personne en question doit être considérée comme devant vivre 33 ans. Par conséquent, si elle verse une prime unique, cette prime doit être égale à ce que vaut aujourd'hui le capital assuré payable dans 33 ans, à un taux déterminé : c'est le problème traité au n° 196 ; si elle verse une prime annuelle, cette prime doit être calculée de telle sorte que ces 33 versements annuels, avec leurs intérêts capitalisés, représentent au bout de 33 ans le capital assuré : c'est le problème que je vais traiter dans ce chapitre [1].

1. Les compagnies d'assurances emploient une autre méthode. Elles calculent la mortalité non seulement des individus de l'âge considéré (25 ans dans l'exemple précédent), mais aussi celle de tous ceux des âges suivants compris dans la table jusqu'à la fin, et de l'ensemble de tous ces calculs, elles concluent la valeur à fixer à la prime unique ou viagère.

Les résultats obtenus ainsi sont très différents de ceux que donne la méthode employée dans les problèmes qui suivent. Aussi elle ne pourrait pas servir pour établir les bases d'un contrat d'assurances à conclure avec une compagnie.

206. Les deux tables de mortalité usitées en France sont celles de Deparcieux et de Duvillard; elles sont très différentes l'une de l'autre.

La première présente un accroissement de mortalité beaucoup moins rapide que la seconde; aussi les compagnies emploient-elles la première dans les assurances pendant la vie, et la seconde dans les assurances après décès. Seulement, pour compenser en partie le désavantage qui en résulte pour leurs assurés, elles leur offrent une participation de 50 p. 100 dans les bénéfices, ou une diminution de 10 p. 100 sur les versements.

Voici la table de mortalité de Duvillard, la seule dont j'aie besoin dans les calculs qui vont suivre, puisque je ne traiterai que les assurances après décès.

AGES.	VIVANTS.	AGES.	VIVANTS.	AGES.	VIVANTS.	AGES.	VIVANTS.
0	1 000 000	28	451 635	56	248 782	84	15 175
1	767 525	29	444 932	57	240 214	85	11 886
2	671 834	30	438 183	58	231 488	86	9 224
3	624 668	31	431 398	59	222 605	87	7 165
4	598 713	32	424 583	60	213 567	88	5 670
5	583 151	33	417 744	61	204 380	89	4 686
6	573 025	34	410 886	62	195 054	90	3 830
7	565 838	35	404 012	63	185 600	91	3 093
8	560 245	36	397 123	64	176 035	92	2 466
9	555 486	37	390 219	65	166 377	93	1 938
10	551 122	38	383 300	66	156 651	94	1 499
11	546 888	39	376 363	67	146 882	95	1 140
12	542 630	40	369 404	68	137 102	96	850
13	538 255	41	362 419	69	127 347	97	621
14	533 711	42	355 400	70	117 656	98	442
15	528 969	43	348 342	71	108 070	99	307
16	524 020	44	341 235	72	98 637	100	207
17	518 863	45	334 072	73	89 404	101	135
18	513 502	46	326 843	74	80 423	102	84
19	507 949	47	319 539	75	71 745	103	51
20	502 216	48	312 148	76	63 424	104	29
21	496 317	49	304 662	77	55 511	105	16
22	490 267	50	297 070	78	48 057	106	8
23	484 083	51	289 361	79	41 107	107	4
24	477 777	52	281 527	80	34 705	108	2
25	471 366	53	273 560	81	28 886	109	1
26	464 863	54	265 450	82	23 680	110	0
27	458 282	55	257 193	83	19 106		

207. *Établissement des formules (Prime annuelle).*

Soient a la prime versée au commencement de chaque année, r l'intérêt de 1 fr. en un an, n le nombre d'années pendant lesquelles les versements s'effectueront, A le capital assuré.

D'après les calculs faits au n° 194.

La 1re prime a, versée au commencement de la 1re année, vaudra à la fin des n années . . . . $a(1+r)^n$

La 2e prime a, versée au commencement de la 2e année, vaudra à la fin des n années . . . . $a(1+r)^{n-1}$

La 3e prime a, versée au commencement de la 3e année, vaudra à la fin des n années . . . . $a(1+r)^{n-2}$

. . . .

. . . .

L'avant-dernière prime a, versée au commencement de la $(n-1)^{\text{ième}}$ année, vaudra à la fin des n années . . . . . . $a(1+r)^2$

La dernière prime a, versée au commencement de la $n^{\text{ième}}$ année, vaudra à la fin des n années . . . . $a(1+r)$.

Le capital assuré est égal à la somme de tous ces termes.

Or, si je les prends en remontant, de manière que $a(1+r)$ soit le premier terme et $a(1+r)^n$ le dernier, je vois qu'ils forment une progression par quotient dont la raison est $1+r$ et le nombre de termes n.

D'après la formule (n° 176) :

$$S = \frac{lq - a}{q - 1}$$

comme ici :

$$\begin{aligned} S &= A \\ l &= a(1+r)^n \\ a &= a(1+r) \\ q &= 1+r \end{aligned}$$

j'ai :

$$A = \frac{a(1+r)^n(1+r) - a(1+r)}{1+r-1} = \frac{a(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]}{r}.$$

Il y a dans cette formule quatre quantités variables ; mais pourtant il n'y a que trois problèmes différents à étudier, parce que le cas où r est l'inconnue ne peut se résoudre par l'algèbre élémentaire.

Les formules qui permettent de résoudre les trois autres problèmes sont les suivantes :

1° $$A = \frac{a(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]}{r}$$

ou $\text{Log A} = \text{Log } a + \text{Log } (1 + r) + \text{Log } \left[(1 + r)^n - 1\right] - \text{Log } r.$

2°
$$a = \frac{\text{A}r}{(1 + r)\left[(1 + r)^n - 1\right]}$$

ou $\text{Log } a = \text{Log A} + \text{Log } r - \left[\text{Log } (1 + r) + \text{Log } \left[(1 + r)^n - 1\right]\right].$

3°
$$(1 + r)^n - 1 = \frac{\text{A}r}{a(1 + r)}$$

ou $\text{Log } \left[(1 + r)^n - 1\right] = \text{Log A} + \text{Log } r - \left[\text{Log } a + \text{Log } (1 + r)\right].$

208. 1er Problème.

Une personne âgée de 27 ans verse chaque année une somme de 1 425 fr. 75 c. pour assurer un capital payable à son décès. Quel est ce capital, le taux étant de $4\,{}^3/_8$ p. 100 ?

D'après la table de Duvillard, sur 458 282 individus vivants à 27 ans, il en reste un peu plus de la moitié (231 488) à 58 ans. La personne en question a donc la chance de vivre un peu plus de 31 ans, et comme les versements se font au commencement de l'année, elle est présumée devoir en faire 32.

Alors j'applique la formule :

$$\text{A} = \frac{a\,(1 + r)\left[(1 + r)^n - 1\right]}{r}$$

$$\text{Log A} = \text{Log } a + \text{Log } (1 + r) + \text{Log } \left[(1 + r)^n - 1\right] - \text{Log } r.$$

$$= \text{Log } 1425{,}75 + \text{Log } 1{,}04375 + \text{Log } \left[\overline{1{,}04375}^{\,32} - 1\right] - \text{Log } 0{,}04375.$$

Je calcule d'abord $\text{Log } \left(\overline{1{,}04375}^{\,32} - 1\right).$

$$\text{Log } \overline{1{,}04375}^{\,32} = 32 \text{ Log } 1{,}04375 = 32 \times 0{,}01859649 = 0{,}59508768.$$

$$\overline{1{,}04375}^{\,32} = 3{,}936295$$

$$\begin{aligned}
\text{Log } \left(\overline{1{,}04375}^{\,32} - 1\right) = \text{Log } 2{,}936295 &= 0{,}46779969 \\
\text{Log } 1425{,}75 &= 3{,}15404335 \\
\text{Log } 1{,}04375 &= 0{,}01859649 \\
\hline
&\ 3{,}64043953 \\
\text{Log } 0{,}04375 &= \bar{2}{,}6409781 \\
\hline
\text{Log A} &= 4{,}99946143
\end{aligned}$$

A = 99 876 fr. 07 c.

209. 2^e Problème.

Une personne âgée de 35 ans veut assurer une somme de 75 000 fr. payable à son décès. Le taux étant de 4 p. 100 : 1° quelle est la prime à payer annuellement ; 2° quelle serait la prime unique ?

1° D'après la table de Duvillard, sur 404 012 personnes vivantes à 35 ans, il en reste un peu plus de la moitié (204 380) à 61 ans. Les versements se faisant au commencement de l'année, la personne en question est présumée devoir en faire 27.

$$a = \frac{Ar}{(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]}$$

$$\text{Log } a = \text{Log A} + \text{Log } r - \left[\text{Log }(1+r) + \text{Log }\left((1+r)^n - 1\right)\right]$$

$$= \text{Log } 75\,000 + \text{Log } 0{,}04 - \left[\text{Log } 1{,}04 + \text{Log }\left(\overline{1{,}04}^{27} - 1\right)\right]$$

$$\text{Log } \overline{1{,}04}^{27} = 27 \text{ Log } 1{,}04 = 27 \times 0{,}01703334 = 0{,}45990018.$$

$$\overline{1{,}04}^{27} = 2{,}883369$$

$$\text{Log }\left(\overline{1{,}04}^{27} - 1\right) = \text{Log } 1{,}883369 = 0{,}2749354.$$

$$\begin{array}{rr} \text{Log } 75\,000 = & 4{,}8750613 \\ \text{Log } 0{,}04 = & \bar{2}{,}6020600 \\ \hline & 3{,}4771213 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Log } 1{,}04 = 0{,}01703334 \\ \text{Log }\left(\overline{1{,}04}^{27} - 1\right) = 0{,}2749354 \end{array}\right\} \quad 0{,}29196874$$

$$\text{Log } a = 3{,}18515256$$

$$a = 1531 \text{ fr. } 625.$$

2° La prime unique se calcule par les intérêts composés. Il s'agit de savoir quelle est aujourd'hui la somme qui, à 4 p. 100, au bout de 26 ans, deviendra 75 000 fr. (n° 194).

$$a = \frac{A}{(1+r)^n}$$

$$\text{Log } a = \text{Log A} - n \text{ Log }(1+r) = \text{Log } 75\,000 - 26 \text{ Log } 1{,}04$$

$$= 4{,}8750613 - 26 \times 0{,}01703334 = 4{,}8750613 - 0{,}44286684 = 4{,}43219446.$$

$$a = 27\,051 \text{ fr. } 70 \text{ c.}$$

210. 3^e Problème.

Une personne verse par an une prime de 3 634 fr. pour assurer à son décès un capital de 150 000 fr. Le taux étant de $4\,{}^5/_8$, calculer le temps présumé qu'il lui restait à vivre au moment où elle a contracté son assurance.

$$(1+r)^n - 1 = \frac{Ar}{a\,(1+r)}$$

$$\text{Log}\left[(1+r)^n - 1\right] = \text{Log A} + \text{Log } r - \left[\text{Log } a + \text{Log }(1+r)\right]$$

$$\text{Log}\left(\overline{1{,}04625}^{\,n} - 1\right) = \text{Log } 150000 + \text{Log } 0{,}04625 - \left[\text{Log } 3634 + \text{Log } 1{,}04625\right]$$

$$\begin{aligned} \text{Log } 150000 &= 5{,}1760913 \\ \text{Log } 0{,}04625 &= \bar{2}{,}6651117 \\ & \overline{\ 3{,}8412030} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{Log } 3634 &= 3{,}5603849 \\ \text{Log } 1{,}04625 &= 0{,}01963547 \end{aligned}\right\} \ 3{,}58002007$$

$$\text{Log}\left[\overline{1{,}04625}^{\,n} - 1\right] = 0{,}26118263$$

$$\overline{1{,}04625}^{\,n} - 1 = 1{,}824663$$

$$\overline{1{,}04625}^{\,n} = 2{,}824663$$

$$n \text{ Log } 1{,}04625 = \text{Log } 2{,}824663$$

$$n = \frac{\text{Log } 2{,}824663}{\text{Log } 1{,}04625} = \frac{0{,}45096664}{0{,}01963547} = 22{,}97$$

$$n = 23 \text{ en forçant.}$$

Le nombre de versements présumé étant 23, la personne en question avait, au moment où elle a contracté son assurance, une durée probable de vie comprise entre 22 et 23 ans.

CHAPITRE VI.

SUBVENTIONS.

211. Dans ce chapitre ne sont pas traitées les subventions payées par l'État aux compagnies de chemins de fer. Ces subventions sont calculées comme des emprunts faits par l'État aux diverses compagnies, et remboursées par annuités égales en un certain nombre d'années. J'en parlerai dans le chapitre suivant.

Voici la question qu'il s'agit de résoudre ici.

Je suppose qu'un particulier veuille consacrer une somme de 150 000 fr. à la construction d'un établissement, et que cette subvention soit payable en 12 ans, année par année. Il ne faut pas croire que chacun de ces paiements sera $\frac{1}{12}$ de la somme totale, parce que, avec les intérêts, le montant réel de la subvention dépasserait le chiffre de 150 000 fr. Le particulier donnera chaque année une somme fixe, telle que, chacune d'elles étant augmentée de ses intérêts depuis le jour du versement jusqu'à celui où se termine l'opération, le total de toutes ces sommes forme 150 000 fr.

C'est donc un calcul tout à fait analogue à celui par lequel on détermine le montant d'un capital assuré par une prime annuelle, avec cette différence que, dans la subvention, l'annuité est versée à la fin de l'année, tandis que dans l'assurance, elle l'est au commencement.

212. *Établissement des formules.*

Soient a l'annuité versée à la fin de chaque année, r l'intérêt de 1 fr. par an, n le nombre d'années pendant lesquelles les annuités seront versées, A le montant de la subvention.

La 1re annuité a, versée à la fin de la 1re année, vaudra à la fin des n années . . . . $a(1+r)^{n-1}$

La 2e annuité a, versée à la fin de la 2e année, vaudra à la fin des n années . . . . $a(1+r)^{n-2}$

La 3e annuité a, versée à la fin de la 3e année, vaudra à la fin des n années . . . . $a(1+r)^{n-3}$

. . . .

. . . .

L'avant-dernière annuité a, versée à la fin de la $(n-1)^{\text{ième}}$ année, vaudra à la fin des n années . . . . $a(1+r)$

La dernière annuité a, versée à la fin de la $n^{\text{ième}}$ année, vaudra à la fin des n années . . . . a.

La somme de tous ces termes, pris en remontant, de manière que a soit le premier terme, et $a(1+r)^{n-1}$ le dernier, est égale à la somme des termes d'une progression par quotient, dont la raison est $1+r$, et le nombre de termes n.

J'applique la formule (n° 176).

$$S = \frac{lq - a}{q - 1}$$

dans laquelle

$$\begin{aligned} S &= A \\ l &= a(1+r)^{n-1} \\ a &= a \\ q &= 1+r. \end{aligned}$$

J'ai ainsi :

$$A = \frac{a(1+r)^{n-1}(1+r)-a}{1+r-1} = \frac{a(1+r)^n - a}{r} = \frac{a\left[(1+r)^n - 1\right]}{r}.$$

Il y a dans cette formule quatre quantités variables ; et cependant il n'y a que trois problèmes à étudier, celui où r est l'inconnue ne pouvant se traiter par l'algèbre élémentaire.

Voici les formules qui permettent de résoudre les trois autres cas.

1°
$$A = \frac{a\left[(1+r)^n - 1\right]}{r}$$

ou
$$\text{Log } A = \text{Log } a + \text{Log}\left[(1+r)^n - 1\right] - \text{Log } r.$$

2°
$$a = \frac{Ar}{(1+r)^n - 1}$$

ou
$$\text{Log } a = \text{Log } A + \text{Log } r - \text{Log}\left[(1+r)^n - 1\right].$$

3°
$$(1+r)^n - 1 = \frac{Ar}{a}$$

ou
$$\text{Log}\left[(1+r)^n - 1\right] = \text{Log } A + \text{Log } r - \text{Log } a.$$

213. 1er Problème.

Une personne consacre par an une somme de 12 575 fr. 25 c. à la construction d'un hôpital. Ce travail ayant duré 18 ans, on demande à combien s'élève en réalité la dépense qu'a faite le fondateur, capital et intérêts réunis, le taux étant 4,425 p. 100.

$$A = \frac{a\left[(1+r)^n - 1\right]}{r}$$

$$\begin{aligned} \text{Log } A &= \text{Log } a + \text{Log}\left[(1+r)^n - 1\right] - \text{Log } r \\ &= \text{Log } 12575{,}25 + \text{Log}\left(\overline{1{,}04425}^{18} - 1\right) - \text{Log } 0{,}04425 \end{aligned}$$

$$\text{Log } \overline{1{,}04425}^{18} = 18 \text{ Log } 1{,}04425 = 18 \times 0{,}01880448 = 0{,}33848064.$$

$$\overline{1{,}04425}^{18} = 2{,}180121$$

$$\text{Log}\left(\overline{1,04425}^{18} - 1\right) = \text{Log } 1,180121 = 0,0719265$$
$$\text{Log } 12575,25 = 4,0995166$$
$$\overline{4,1714431}$$
$$\text{Log } 0,04425 = \bar{2},6459133$$
$$\text{Log A} = 5,5255298$$
$$\text{A} = 335\,374 \text{ fr. } 43 \text{ c.}$$

214. 2[e] Problème.

Une personne veut consacrer 437 500 fr., capital et intérêts réunis, à l'établissement d'une ferme-modèle. Le taux étant de 4,835 p. 100 et les travaux devant durer 35 ans : 1° combien versera-t-elle par an? 2° quel serait le versement, si elle l'effectuait par semestre? 3° et quel serait-il par trimestre?

$$a = \frac{\text{A}r}{(1+r)^n - 1}$$
$$\text{Log } a = \text{Log A} + \text{Log } r - \text{Log}\left[(1+r)^n - 1\right].$$

1° Versements faits par année :

$$\text{Log } a = \text{Log } 437500 + \text{Log } 0,04835 - \text{Log}\left[\overline{1,04835}^{35} - 1\right].$$
$$\text{Log } \overline{1,04835}^{35} = 35 \text{ Log } 1,04835 = 35 \times 0,02050630 = 0,7177205.$$
$$\overline{1,04835}^{35} = 5,220601$$
$$\text{Log}\left(\overline{1,04835}^{35} - 1\right) = \text{Log } 4,220601 = 0,6253743.$$

$$\text{Log } 437500 = 5,6409781$$
$$\text{Log } 0,04835 = \bar{2},6843965$$
$$\overline{4,3253746}$$
$$\text{Log}\left(\overline{1,04835}^{35} - 1\right) = 0,6253743$$
$$\text{Log } a = 3,7000003$$
$$a = 5\,011 \text{ fr. } 873.$$

2° Versements faits par semestre (n° 203).

Ici :

$$r = \frac{0,04835}{2} = 0,024175$$
$$n = 35 \times 2 = 70.$$

$$\text{Log}\, a = \text{Log}\, 437500 + \text{Log}\, 0{,}024175 - \text{Log}\left[\overline{1{,}024175}^{70} - 1\right].$$

$$\text{Log}\, \overline{1{,}024175}^{70} = 70\ \text{Log}\, 1{,}024175 = 70 \times 0{,}01037417 = 0{,}7261919.$$

$$\overline{1{,}024175}^{70} = 5{,}323434.$$

$$\text{Log}\left(\overline{1{,}024175}^{70} - 1\right) = \text{Log}\, 4{,}323434 = 0{,}6358188.$$

$$\begin{array}{rl}
\text{Log}\, 437500 = & 5{,}6409781 \\
\text{Log}\, 0{,}024175 = & \bar{2}{,}3833665 \\
\hline
& 4{,}0243446 \\
\text{Log}\left(\overline{1{,}024175}^{70} - 1\right) = & 0{,}6358188 \\
\hline
\text{Log}\, a = & 3{,}3885258
\end{array}$$

$$a = 2\,446 \text{ fr. } 390.$$

C'est un peu moins que la moitié de l'annuité versée par an, résultat facile à prévoir.

3° Versements faits par trimestre (n° 203).

Ici :

$$r = \frac{0{,}04835}{4} = 0{,}0120875$$

$$n = 35 \times 4 = 140.$$

$$\text{Log}\, a = \text{Log}\, 437500 + \text{Log}\, 0{,}0120875 - \text{Log}\left[\overline{1{,}0120875}^{140} - 1\right].$$

$$\text{Log}\, \overline{1{,}0120875}^{140} = 140\ \text{Log}\, 1{,}0120875 = 140 \times 0{,}0052180575 = 0{,}73052805$$

$$\overline{1{,}0120875}^{140} = 5{,}376851.$$

$$\text{Log}\left(\overline{1{,}0120875}^{140} - 1\right) = \text{Log}\, 4{,}376851 = 0{,}64116176.$$

$$\begin{array}{rl}
\text{Log}\, 437500 = & 5{,}6409781 \\
\text{Log} = 0{,}0120875 = & \bar{2}{,}0823365 \\
\hline
& 3{,}7233146 \\
\text{Log}\left(\overline{1{,}0120875}^{140} - 1\right) = & 0{,}64116176 \\
\hline
\text{Log}\, a = & 3{,}08215284
\end{array}$$

$$a = 1\,208 \text{ fr. } 239.$$

C'est un peu moins que la moitié du versement précédent et que le quart du premier.

215. 3[e] Problème.

Une personne veut fournir à une commune, pour la construction d'une église, une subvention de 122 800 fr.; elle ne peut verser par an que 1 254 fr. 75 c. Le taux d'intérêt étant de $4\,{}^1/_8$ p. 100, pendant combien d'années devra-t-elle effectuer ses versements?

$$(1+r)^n - 1 = \frac{Ar}{a}$$

$$\text{Log}\left[(1+r)^n - 1\right] = \text{Log A} + \text{Log}\, r - \text{Log}\, a$$

$$\text{Log}\left(\overline{1{,}04125}^n - 1\right) = \text{Log}\, 122800 + \text{Log}\, 0{,}04125 - \text{Log}\, 1254{,}75$$

$$= 5{,}0891984 + \bar{2}{,}6154240 - 3{,}0985572 = 0{,}6060652.$$

$$\overline{1{,}04125}^n - 1 = 4{,}03706$$

$$\overline{1{,}04125}^n = 5{,}03706$$

$$n\,\text{Log}\, 1{,}04125 = \text{Log}\, 5{,}03706$$

$$n = \frac{\text{Log}\, 5{,}03706}{\text{Log}\, 1{,}04125} = \frac{0{,}70217716}{0{,}01755501} = 40.$$

CHAPITRE VII.

AMORTISSEMENT.

216. Toutes les questions d'amortissement se résument en ceci : un État, une commune, un particulier emprunte une somme qu'il remboursera dans un nombre d'années déterminé, en versant une somme fixe à la fin de chaque année. Il faut que le total de toutes ces annuités, dont chacune est augmentée de ses intérêts depuis le jour du versement jusqu'à celui où le remboursement de la dette est achevé, soit égal à la somme empruntée, augmentée de ses intérêts pendant toute la durée de l'opération ; les deux calculs se font avec le même taux d'intérêt choisi d'avance.

C'est ainsi que les compagnies de chemins de fer, le Crédit foncier de France, les établissements financiers et industriels ont offert au public des obligations remboursables en un temps déterminé. C'est aussi d'après le même principe que le Crédit foncier prête aux particuliers des capitaux garantis par leurs immeubles, et se fait rembourser par annuités du montant de ses prêts.

C'est encore d'après la même méthode que l'État se libère à l'égard des compagnies de chemins de fer. Il leur avait promis des subventions, payables en quelques années : les difficultés budgétaires l'ont obligé à répartir les versements à faire en un nombre d'années beaucoup plus grand.

Il en est de même pour les avances que ces compagnies ont faites à l'État, qui consistent en dépenses de constructions de lignes qu'elles ont effectuées pour son compte, et qu'il leur rembourse par annuités égales.

217. *Établissement des formules.*

Le montant total des diverses annuités a, versées à la fin de chaque année, donne, comme dans le cas de la subvention (nº 212) :

$$\frac{a\left[(1+r)^n-1\right]}{r}$$

Ce total doit, d'après ce que j'ai dit au nº 216, être égal à la somme empruntée, A, augmentée de ses intérêts pendant n années, c'est-à-dire à

$$A(1+r)^n \qquad \text{(Nº 194).}$$

J'ai donc l'égalité :

$$A(1+r)^n = \frac{a\left[(1+r)^n-1\right]}{r}.$$

Cette égalité contient quatre quantités variables, A, a, r et n.

Ici, il y a quatre problèmes principaux à étudier, car dans cette formule, on peut calculer r.

Voici les formules qui permettent de les résoudre :

1º
$$A = \frac{a\left[(1+r)^n-1\right]}{r(1+r)^n}$$

ou $\operatorname{Log} A = \operatorname{Log} a + \operatorname{Log}\left[(1+r)^n-1\right] - \left[\operatorname{Log} r + n \operatorname{Log}(1+r)\right].$

2º
$$a = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$$

ou $\operatorname{Log} a = \operatorname{Log} A + \operatorname{Log} r + n \operatorname{Log}(1+r) - \operatorname{Log}\left[(1+r)^n-1\right].$

3° Pour calculer r, je résous la formule

$$A\,(1+r)^n = \frac{a\left[(1+r)^n - 1\right]}{r}$$

en prenant r pour inconnue, comme si $(1+r)^n$ était une quantité connue.

J'ai :

$$(\alpha)\quad r = \frac{a\left[(1+r)^n - 1\right]}{A\,(1+r)^n} = \frac{a}{A} \times \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n} = \frac{a}{A}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right],$$

ou $$\operatorname{Log} r = \operatorname{Log} a + \operatorname{Log}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right] - \operatorname{Log} A.$$

Le calcul de la parenthèse $1 - \left[\frac{1}{(1+r)^n}\right]$ se fait par la *méthode dite des approximations successives;* elle consiste à modifier successivement le terme $\frac{1}{(1+r)^n}$ qui est très petit par rapport à l'autre, 1, de manière à ce que la valeur de la parenthèse se rapproche de plus en plus de sa valeur exacte.

Pour cela, je suppose d'abord ce terme $\frac{1}{(1+r)^n}$ égal à zéro.

J'ai pour valeur de r dans l'égalité (α) :

$$r_1 = \frac{a}{A}.$$

Puis, dans cette même égalité, je remplace dans $(1+r)^n$ r par cette valeur de r_1.

J'ai ainsi :

$$r_2 = \frac{a}{A}\left[1 - \frac{1}{(1+r_1)^n}\right],$$

Ensuite dans la même égalité (α), je remplace de nouveau dans $(1+r)^n$ r par cette valeur de r_2.

J'obtiens :

$$r_3 = \frac{a}{A}\left[1 - \frac{1}{(1+r_2)^n}\right],$$

et ainsi de suite, jusqu'à ce que les valeurs, trouvées sucessivement pour r, que j'appelle r_1, r_2, r_3, r_4...... ne diffèrent plus les unes des autres que par des décimales d'un ordre inférieur à celui dont je veux avoir l'approximation.

Par exemple, si je veux calculer r avec quatre décimales, je m'arrêterai quand deux valeurs successives obtenues pour r ne différeront entre elles que par les décimales qui suivent la 4e.

4° Pour calculer n, de la formule

$$A\,(1+r)^n = \frac{a\left[(1+r)^n - 1\right]}{r}$$

je tire :

$$Ar\,(1+r)^n = a\left[(1+r)^n - 1\right] = a\,(1+r)^n - a$$

$$(1+r)^n\,(a - Ar) = a$$

$$(1+r)^n = \frac{a}{a - Ar}$$

$$n \operatorname{Log}(1+r) = \operatorname{Log} a - \operatorname{Log}(a - Ar)$$

et enfin :

$$n = \frac{\operatorname{Log} a - \operatorname{Log}(a - Ar)}{\operatorname{Log}(1+r)}$$

218. Si les versements se font par semestre, dans les formules précédentes, n représente le nombre de semestres, et r l'intérêt de 1 fr. par semestre.

Si les versements se font par trimestre, n représente le nombre de trimestres, et r l'intérêt de 1 fr. par trimestre.

219. Cette question de l'amortissement étant très importante, je la diviserai en plusieurs parties.

Je traiterai d'abord de l'*amortissement au pair*, c'est-à-dire *avec un remboursement sans prime*; puis de l'*amortissement avec prime de remboursement*; ensuite de l'*amortissement avec prime de remboursement et lots*, comme les obligations de la ville de Paris et du Crédit foncier. Enfin, j'étudierai les opérations faites en *3 p. 100 amortissable*, rente nouvelle, dont la création appartient à notre éminent économiste et homme d'État, M. Léon Say.

Section I. — Amortissement avec remboursement sans prime.

Dans chacun des quatre problèmes indiqués plus haut (n° 217), lorsque la quantité inconnue est obtenue, on calcule aisément l'intérêt, et, par suite, l'amortissement de la première année. Je vais montrer comment on peut déduire de celui-ci les amortissements des années suivantes.

220. *Calcul des amortissements successifs.*

L'intérêt de la première année est Ar. En effet, l'intérêt de 1 fr. étant r, celui de A francs sera A fois plus grand. J'ai donc en appelant i_1 l'intérêt de la première année :

$$i_1 = \mathrm{A}r.$$

Quant à l'amortissement de la première année, que j'appelle α_1, il est égal à l'annuité diminuée de l'intérêt.

Donc :

$$\alpha_1 = a - \mathrm{A}r.$$

Pour l'amortissement pendant les autres années, je remarque d'abord que, chaque année, l'intérêt à payer est l'intérêt du capital restant à rembourser, et s'obtient en multipliant ce capital par r; puis, que la somme de l'amortissement et de l'intérêt pendant une même année étant toujours égale à l'annuité a, la quantité dont l'intérêt diminuera d'une année sur la précédente sera précisément celle dont l'amortissement augmentera.

A l'aide de ces remarques, je peux faire le tableau suivant :

NNÉES.	CAPITAUX restant à amortir au commencement de l'année.	INTÉRÊTS payés à la fin de l'année.	AMORTISSEMENTS à la fin de chaque année.	ANNUITÉS.
1	A	Ar	α_1	a
2	$\mathrm{A}-\alpha_1$	$\mathrm{A}r-\alpha_1 r$	$\alpha_1+\alpha_1 r = \ldots\ldots \alpha_1(1+r)$	a
3	$\mathrm{A}-\alpha_1-\alpha_1(1+r)$	$\mathrm{A}r-\alpha_1 r-\alpha_1(1+r)r$	$\alpha_1(1+r)+\alpha_1(1+r)r = \alpha_1(1+r)(1+r) = \alpha_1(1+r)^2$	a
4	$\mathrm{A}-\alpha_1-\alpha_1(1+r)-\alpha_1(1+r)^2$	$\mathrm{A}r-\alpha_1 r-\alpha_1(1+r)r-\alpha_1(1+r)^2 r$	$\alpha_1(1+r)^2+\alpha_1(1+r)^2 r = \alpha_1(1+r)^2(1+r) = \alpha_1(1+r)^3$	a
	⋮	⋮	⋮	⋮
m uelconque			$\alpha_1(1+r)^{m-1}$	a
	⋮	⋮	⋮	⋮
n dernière			$\alpha_1(1+r)^{n-1}$	a

Les amortissements successifs forment une progression par quotient dont le premier terme est α_1 et la raison $1 + r$.

Si l'on veut avoir le montant du capital amorti après une année déterminée, la $m^{\text{ième}}$, par exemple, il faut faire la somme de tous les termes :

$$\alpha_1 + \alpha_1 (1+r) + \alpha_1 (1+r)^2 + \alpha_1 (1+r)^3 + \ldots\ldots \alpha_1 (1+r)^{m-1}$$

qui, d'après la formule

$$S = \frac{lq - a}{q - 1}$$

donne :

$$S = \frac{\alpha_1 (1+r)^{m-1} (1+r) - \alpha_1}{1 + r - 1} = \frac{\alpha_1 \left[(1+r)^m - 1\right]}{r}$$

C'est la même formule que celle du n° 212.

On peut trouver les amortissements successifs par une autre méthode.

De la formule

$$A (1+r)^n = \frac{a\left[(1+r)^n - 1\right]}{r}$$

je tire :

$$Ar = \frac{a\left[(1+r)^n - 1\right]}{(1+r)^n}.$$

Si je remplace Ar par cette valeur, dans l'égalité établie plus haut

$$\alpha_1 = a - Ar,$$

j'obtiens :

$$\alpha_1 = a - \frac{a\left[(1+r)^n - 1\right]}{(1+r)^n} = \frac{a(1+r)^n - a(1+r)^n + a}{(1+r)^n} = \frac{a}{(1+r)^n}.$$

Pour l'amortissement de la seconde année :

$$\alpha_2 = \alpha_1 (1+r) = \frac{a(1+r)}{(1+r)^n} = \frac{a}{(1+r)^{n-1}}.$$

Pour les suivants :

$$\alpha_3 = \alpha_1 (1+r)^2 = \frac{a(1+r)^2}{(1+r)^n} = \frac{a}{(1+r)^{n-2}}.$$

. . . .

Pour le $m^{\text{ième}}$:

$$\alpha_m = \alpha_1 (1+r)^{m-1} = \frac{a(1+r)^{m-1}}{(1+r)^n} = \frac{a}{(1+r)^{n-m+1}}$$

. . . .

Pour le dernier :

$$\alpha_n = \alpha_1 (1 + r)^{n-1} = \frac{a(1+r)^{n-1}}{(1+r)^n} = \frac{a}{1+r}.$$

Les formules précédentes offrent un calcul plus commode pour les premiers amortissements, et celles-ci pour les derniers. On pourra les employer concurremment pour vérifier par l'une des deux méthodes les résultats trouvés par l'autre.

221. *Année moyenne du remboursement.*

On appelle ainsi l'année après laquelle la moitié de l'emprunt se trouve remboursée.

Soit m le rang de cette année moyenne.

Dans l'année suivante, la $(m+1)^{\text{ième}}$, la moitié du capital étant remboursée, l'intérêt payé, i_{m+1}, est la moitié de l'intérêt, i_1, payé pendant la première année.

Donc, α_{m+1} étant l'amortissement pendant cette année $(m+1)^{\text{ième}}$, j'ai :

$$\alpha_{m+1} = a - i_{m+1} = a - \frac{i_1}{2}$$

ce qui permet de le calculer.

D'ailleurs, d'après les formules établies précédemment pour les amortissements successifs (n° 220), j'ai :

$$\alpha_{m+1} = \alpha_1 (1+r)^m$$

d'où

$$\text{Log } \alpha_{m+1} = \text{Log } \alpha_1 + m \text{ Log } (1+r)$$

et

$$m = \frac{\text{Log } \alpha_{m+1} - \text{Log } \alpha_1}{\text{Log } (1+r)}.$$

On peut aussi obtenir m par une autre considération.

Soit S_m le total des amortissements effectués à la fin de l'année moyenne, m, total qui doit être égal à la moitié de l'emprunt, $\frac{A}{2}$.

J'ai, d'après la formule du n° 212 :

$$S_m = \frac{A}{2} = \frac{\alpha_1 \left[(1+r)^m - 1\right]}{r}$$

ou

$$\text{Log } \frac{A}{2} = \text{Log } \alpha_1 + \text{Log } \left[(1+r)^m - 1\right] - \text{Log } r$$

et enfin :

$$\text{Log}\left[(1+r)^m - 1\right] = \text{Log}\,\frac{A}{2} + \text{Log}\,r - \text{Log}\,\alpha_1$$

formule de laquelle on tire m.

Mais, par cette méthode, le calcul est beaucoup plus long que par la précédente : on fera bien de ne l'employer que pour vérifier la valeur de m trouvée par l'autre procédé.

Il est bien entendu que, dans tout ce qui précède, si l'amortissement s'effectuait par semestre ou par trimestre, il faudrait remplacer le nombre d'années par celui des semestres ou des trimestres, et diviser le taux d'intérêt par 2 ou par 4, comme je l'ai déjà fait remarquer au n° 218.

222. Dans chacun des problèmes que nous avons à étudier, les quantités les plus importantes à examiner sont les suivantes : le montant de l'emprunt, A; l'annuité, a; le temps du remboursement, n; le taux d'intérêt de 1 fr., r; l'intérêt de la première année, i_1; le premier et le dernier amortissement, α_1, α_n, et l'année moyenne, m.

Il résulte de cette énumération qu'un grand nombre de problèmes peuvent se présenter. Les principaux sont les suivants :

1er Problème.	On donne	a, n, r.	Calculer	$A, i_1, \alpha_1, \alpha_n, m$.
2e —	—	A, n, r.	—	$a, i_1, \alpha_1, \alpha_n, m$.
3e —	—	a, A, n.	—	$r, i_1, \alpha_1, \alpha_n, m$.
4e —	—	a, A, r.	—	$n, i_1, \alpha_1, \alpha_n, m$.

223. 1er Problème.

La Compagnie du chemin de fer du Nord reçoit de l'État une subvention annuelle de 505 074 fr. 20 c., payable par moitié le 1er mai et le 1er novembre de chaque année, pour le remboursement des dépenses effectuées pour la construction du chemin de fer d'Arras à Étaples et de Béthune à Abbeville. Cette subvention dont le premier versement a été fait le 1er novembre 1872 doit durer 78 ans, c'est-à-dire se terminer le 1er mai 1950. Le taux d'intérêt étant de $4\,{}^1/_2$ p. 100 par an, on demande : 1° le montant, A, des dépenses à rembourser ; 2° l'intérêt, i_1, du premier semestre ; 3° l'amortissement du premier semestre, α_1 ; 4° l'amortissement du dernier semestre, α_n ; 5° le semestre du remboursement moyen, m.

Les amortissements s'effectuant par semestre, j'ai :

$$a = \frac{505074{,}20}{2} = 252\,537 \text{ fr. } 10 \text{ c.}$$

$$n = 78 \times 2 = 156.$$

$$r = \frac{0{,}045}{2} = 0{,}0225.$$

1° *Montant de la dépense, A* (n° 217-1°).

$$\mathrm{A} = \frac{a\left[(1+r)^n - 1\right]}{r\,(1+r)^n}$$

$$\mathrm{Log\ A} = \mathrm{Log}\ a + \mathrm{Log}\left[(1+r)^n - 1\right] - \left[\mathrm{Log}\ r + n\ \mathrm{Log}\,(1+r)\right]$$

$$\mathrm{Log\ A} = \mathrm{Log}\,252537{,}10 + \mathrm{Log}\left(\overline{1{,}0225}^{156} - 1\right) - \left[\mathrm{Log}\,0{,}0225 + 156\,\mathrm{Log}\,1{,}0225\right].$$

$$\mathrm{Log}\ \overline{1{,}0225}^{156} = 156\ \mathrm{Log}\ 1{,}0225 = 156 \times 0{,}00966332 = 1{,}50747792.$$

$$\overline{1{,}0225}^{156} = 32{,}171987.$$

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Log}\left(\overline{1{,}0225}^{156} - 1\right) = \mathrm{Log}\ 31{,}171987 & = & 1{,}493764518 \\
\mathrm{Log}\ 252537{,}10 & = & 5{,}402325212 \\
\hline
 & & 6{,}896089730 \\
\left.\begin{array}{r} \mathrm{Log}\ 0{,}0225 = \bar{2}{,}3521825 \\ 156\ \mathrm{Log}\ 1{,}0225 = 1{,}50747792 \end{array}\right\} & & \bar{1}{,}85966042 \\
\hline
\mathrm{Log\ A} & = & 7{,}03642931
\end{array}$$

$$\mathrm{A} = 10\,875\,000 \text{ fr.}$$

2° *Intérêt du premier semestre, i_1.*

$$i_1 = \mathrm{A}r = 10875000 \times 0{,}0225 = 244\,687 \text{ fr. } 50 \text{ c.}$$

3° *Premier amortissement, α_1.*

$$\alpha_1 = a - i_1 = 252537{,}10 - 244687{,}50 = 7\,849 \text{ fr. } 60 \text{ c.}$$

Comme vérification (n° 220) :

$$\alpha_1 = \frac{a}{(1+r)^n} = \frac{252537{,}10}{\overline{1{,}0225}^{156}} = \frac{252537{,}10}{32{,}171987} = 7\,849 \text{ fr. } 60 \text{ c.}$$

4° *Dernier amortissement, α_n.*

$$\alpha_n = \frac{a}{1+r} = \frac{252537{,}10}{1{,}0225} = 246980 \text{ fr. } 10 \text{ c.}$$

Comme vérification (n° 220) :

$$\alpha_n = \alpha_1 (1+r)^{n-1}.$$

$$\begin{aligned}\text{Log } \alpha_n &= \text{Log } \alpha_1 + (n-1) \text{ Log } (1+r) = \text{Log } 7849{,}60 + 155 \text{ Log } 1{,}0225 \\ &= 3{,}8948475 + 1{,}4978146 = 5{,}3926621.\end{aligned}$$

$$\alpha_n = 246\,980 \text{ fr. } 10 \text{ c.}$$

5° *Semestre moyen, m, du remboursement.*

L'intérêt i_{m+1} payé pendant le semestre suivant, le $(m+1)^{\text{ième}}$, est la moitié de l'intérêt payé pendant le premier semestre (n° 221).

Donc :

$$i_{m+1} = \frac{i_1}{2} = \frac{244687{,}50}{2} = 122\,343 \text{ fr. } 75 \text{ c.}$$

et

$$\alpha_{m+1} = a - i_{m+1} = 252537{,}10 - 122343{,}75 = 130193 \text{ fr. } 35 \text{ c.}$$

D'ailleurs (n° 221) :

$$\alpha_{m+1} = \alpha_1 (1+r)^m$$

$$\text{Log } \alpha_{m+1} = \text{Log } \alpha_1 + m \text{ Log } (1+r)$$

d'où :

$$\begin{aligned} m &= \frac{\text{Log } \alpha_{m+1} - \text{Log } \alpha_1}{\text{Log } (1+r)} = \frac{\text{Log } 130193{,}35 - \text{Log } 7849{,}60}{\text{Log } 1{,}0225} \\ &= \frac{5{,}11458879 - 3{,}8948475}{0{,}00966332} \end{aligned}$$

$$m = \frac{1{,}21974129}{0{,}00966332} = 126{,}22.$$

$$m = 126 \text{ par défaut.}$$

Le semestre moyen est le 126ᵉ : c'est celui qui se termine au 1ᵉʳ mai 1935.

Je vais vérifier ce résultat par la seconde méthode du n° 221 : je suppose m connu, et égal à 126, et je calcule S qui devra être égal à la moitié de A.

$$S_m = \frac{\alpha_1 \left[(1+r)^m - 1\right]}{r}$$

$$\begin{aligned}\text{Log } S_m &= \text{Log } \alpha_1 + \text{Log } \left[(1+r)^m - 1\right] - \text{Log } r \\ &= \text{Log } 7849{,}60 + \text{Log } \left(\overline{1{,}0225}^{\,126} - 1\right) - \text{Log } 0{,}0225\end{aligned}$$

$$\text{Log } \overline{1{,}0225}^{\,126} = 126 \text{ Log } 1{,}0225 = 126 \times 0{,}00966332 = 1{,}21757832$$

$$\overline{1{,}0225}^{\,126} = 16{,}503586$$

$$\text{Log}\left(\overline{1,0225}^{126} - 1\right) = \text{Log } 15,503586 = 1,19043217$$
$$\text{Log } 7849,60 = 3,8948475$$
$$5,08527967$$
$$\text{Log } 0,0025 = \bar{2},3521825$$
$$\text{Log } S_m = 6,73309717$$
$$S_m = 5\,408\,753 \text{ fr. } 40 \text{ c.}$$

un peu moins que la moitié de la subvention qui est

$$\frac{10875000}{2} = 5437500,$$

ce qui doit avoir lieu puisque 126 est un peu trop faible.

D'ailleurs l'amortissement du 127^e semestre est :

$$\alpha_{127} = \alpha_1 (1 + r)^{126} = 7849,60 \times \overline{1,0225}^{126} = 7849,60 \times 16,503586$$
$$= 129\,546 \text{ fr. } 55 \text{ c.}$$

Donc après le 127^e semestre, on a remboursé

$$5408753,40 + 129546,55 = 5538299 \text{ fr. } 95 \text{ c.}$$

c'est-à-dire un peu plus que la moitié de la subvention.

Par conséquent, le 126^e semestre est bien le semestre moyen du remboursement.

224. 2^e Problème.

Un particulier emprunte au Crédit foncier une somme de 72 000 fr. remboursable en 20 ans. Le taux d'intérêt étant 5,30 p. 100, on demande : 1° l'annuité, a ; 2° l'intérêt de la première année, i_1 ; 3° le premier amortissement, α_1 ; 4° le dernier amortissement, α_n ; 5° l'année moyenne, m, du remboursement.

Je remarquerai d'abord que l'annuité due au Crédit foncier est calculée par année, bien qu'elle soit payée par moitié à la fin de chaque semestre (31 janvier et 31 juillet) : je ferai donc tous les calculs de ce problème comme si l'annuité était payée en une fois, à la fin de l'année.

1° *Annuité, a* (n° 217-2°).

$$a = \frac{Ar(1 + r)^n}{(1 + r)^n - 1}$$

$$\text{Log}\ a = \text{Log A} + \text{Log}\ r + n\ \text{Log}\ (1+r) - \text{Log}\left[(1+r)^n - 1\right]$$
$$= \text{Log}\ 72000 + \text{Log}\ 0{,}053 + 20\ \text{Log}\ 1{,}053 - \text{Log}\left(\overline{1{,}053}^{20} - 1\right).$$

$$\text{Log}\ \overline{1{,}053}^{20} = 20\ \text{Log}\ 1{,}053 = 20 \times 0{,}02242837 = 0{,}4485674.$$
$$\overline{1{,}053}^{20} = 2{,}809101$$
$$\text{Log}\left(\overline{1{,}053}^{20} - 1\right) = \text{Log}\ 1{,}809101 = 0{,}2574629.$$

$$\begin{array}{rl} \text{Log}\ 72000 = & 4{,}8573325 \\ \text{Log}\ 0{,}053 = & \bar{2}{,}7242759 \\ 20\ \text{Log}\ 1{,}053 = & 0{,}4485674 \\ \hline & 4{,}0301758 \\ \text{Log}\left(\overline{1{,}053}^{20} - 1\right) = & 0{,}2574629 \\ \hline \text{Log}\ a = & 3{,}7727129 \end{array}$$
$$a = 5\,925 \text{ fr. } 335.$$

2° *Intérêt de la 1^re année,* i_1.

$$i_1 = \text{A}r = 72000 \times 0{,}053 = 3816 \text{ fr.}$$

3° *Premier amortissement,* α_1, ou pour mieux dire, amortissement de la première année, puisqu'il s'effectue en deux parties égales, chaque semestre.

$$\alpha_1 = a - i_1 = 5925{,}335 - 3816 = 2\,109 \text{ fr. } 335.$$

Comme vérification (n° 220) :

$$\alpha_1 = \frac{a}{(1+r)^n} = \frac{5925{,}335}{\overline{1{,}053}^{20}} = \frac{5925{,}335}{2{,}809101} = 2\,109 \text{ fr. } 335.$$

4° *Dernier amortissement,* α_n.

$$\alpha_n = \frac{a}{1+r} = \frac{5925{,}335}{1{,}053} = 5627 \text{ fr. } 10 \text{ c.}$$

Comme vérification (n° 220) :

$$\alpha_n = \alpha_1 (1+r)^{n-1}$$
$$\text{Log}\ \alpha_n = \text{Log}\ \alpha_1 + (n-1)\ \text{Log}\ (1+r) = \text{Log}\ 2109{,}335 + 19\ \text{Log}\ 1{,}053$$
$$= 3{,}3241455 + 19 \times 0{,}02242837 = 3{,}3241455 + 0{,}42613903$$
$$= 3{,}75028453.$$
$$\alpha_n = 5\,627 \text{ fr. } 10 \text{ c.}$$

5° *Année moyenne, m, du remboursement.*

L'intérêt, i_{m+1}, payé pendant l'année suivante, la $(m+1)^{\text{ième}}$, est la moitié de l'intérêt payé pendant la première année (n° 221).

Donc :

$$i_{m+1} = \frac{i}{2} = \frac{3816}{2} = 1\,908 \text{ fr.}$$

et

$$\alpha_{m+1} = a - i_{m+1} = 5925{,}335 - 1908 = 4\,017 \text{ fr. } 335.$$

D'ailleurs (n° 221) :

$$\alpha_{m+1} = \alpha_1 (1+r)^m$$
$$\text{Log } \alpha_{m+1} = \text{Log } \alpha_1 + m \text{ Log } (1+r)$$

d'où :

$$m = \frac{\text{Log } \alpha_{m+1} - \text{Log } \alpha_1}{\text{Log } (1+r)} = \frac{\text{Log } 4017{,}335 - \text{Log } 2109{,}335}{\text{Log } 1{,}053}$$

$$m = \frac{3{,}60393808 - 3{,}324145575}{0{,}02242837} = \frac{0{,}279792505}{0{,}02242837} = 12{,}47$$

$m = 12$ par défaut.

Je vais vérifier ce résultat par la seconde méthode du n° 221.

$$S_m = \frac{\alpha_1 \left[(1+r)^m - 1\right]}{r}$$

$$\text{Log } S_m = \text{Log } \alpha_1 + \text{Log } \left[(1+r)^m - 1\right] - \text{Log } r$$

$$= \text{Log } 2109{,}335 + \text{Log } \left(\overline{1{,}053}^{12} - 1\right) - \text{Log } 0{,}053.$$

$$\text{Log } \overline{1{,}053}^{12} = 12 \text{ Log } 1{,}053 = 12 \times 0{,}02242837 = 0{,}26914044.$$

$$\overline{1{,}053}^{12} = 1{,}858405$$

$$\text{Log } \left(\overline{1{,}053}^{12} - 1\right) = \text{Log } 0{,}858405 = \bar{1}{,}9336923$$

$$\text{Log } 2109{,}335 = 3{,}3241455$$

$$3{,}2578378$$

$$\text{Log } 0{,}053 = \bar{2}{,}7242759$$

$$\text{Log } S_m = 4{,}5335619$$

$$S_m = 34\,163 \text{ fr. } 46. \text{ c.},$$

un peu moins que la moitié du prêt qui est :

$$\frac{72000}{2} = 36000,$$

ce qui doit avoir lieu puisque 12 est trop faible.

D'ailleurs l'amortissement de la 13ᵉ année est :

$$\alpha_{13} = \alpha_1 (1 + r)^{12} = 2109,335 \times \overline{1,053}^{12} = 2109,335 \times 1,858405 = 3920 \text{ fr.}$$

Donc, après la 13ᵉ année, on a remboursé :

$$34\,163,26 + 3\,920 = 38\,083 \text{ fr. } 26 \text{ c.},$$

c'est-à-dire un peu plus que la moitié du prêt.

Par conséquent, la 12ᵉ année est bien l'année moyenne du remboursement.

6° *Tableau de l'amortissement.*

Dans l'exemple du n° 223, je n'ai pas construit le tableau de l'amortissement, année par année, parce qu'il aurait été trop long à faire. Ici, au contraire, où le nombre d'années n'est pas considérable, je vais l'établir. Il permettra de vérifier les résultats que je viens de trouver directement par l'application des formules.

Voici comment se fait ce tableau.

Chaque année, l'annuité est employée d'abord à payer l'intérêt du capital restant à amortir, puis à amortir une portion de ce capital.

Par conséquent, en faisant ce calcul pour les 20 années pendant lesquelles dure l'opération, je trouverai que le capital restant à amortir au commencement de la 20ᵉ année est précisément égal à la somme que la dernière annuité doit amortir, quand les intérêts de cette année auront été payés. — Comme je prendrai pour annuité 5 925 fr. 35 c. au lieu de 5 925 fr. 335 qui est l'annuité exacte, et que j'arrondirai les intérêts de 5 en 5 centimes, je trouverai nécessairement à la fin une petite différence que je ferai porter sur le chiffre des intérêts de la dernière année, afin que le total des amortissements successifs arrive bien exactement à 72 000 fr.

TABLEAU.

Tableau d'amortissement.

ANNÉES.	CAPITAUX restant à amortir au commencement de l'année.	INTÉRÊTS à 5.30 p. 100.	AMORTISSEMENTS.	ANNUITÉS.
	fr. c.	fr. c.	fr. c.	fr. c.
1	72 000 00	3 816 00	2 109 35	5 925 35
2	69 890 65	3 704 25	2 221 10	5 925 35
3	67 669 55	3 586 50	2 338 85	5 925 35
4	65 330 70	3 462 55	2 462 80	5 925 35
5	62 867 90	3 332 00	2 593 35	5 925 35
6	60 274 55	3 194 60	2 730 75	5 925 35
7	57 543 80	3 049 85	3 875 50	5 925 35
8	54 668 30	2 897 40	3 027 95	5 925 35
9	51 640 35	2 736 90	3 188 45	5 925 35
10	48 451 90	2 567 95	3 357 40	5 925 35
TOTAUX.	*610 337 70*	*32 348 00*	*26 905 50*	*59 253 50*
11	45 094 50	2 390 05	3 535 30	5 925 35
12	41 559 20	2 202 65	3 722 70	5 925 35
Année moyenne TOTAUX.	*696 991 40*	*36 940 70*	*34 163 50*	*71 104 20*
13	37 836 50	2 005 35	3 920 00	5 925 35
14	33 916 50	1 797 60	4 127 75	5 925 35
15	29 788 75	1 578 80	4 346 55	5 925 35
16	25 442 20	1 348 45	4 576 90	5 925 35
17	20 865 30	1 105 85	4 819 50	5 925 35
18	16 045 80	850 45	5 074 90	5 925 35
19	10 970 90	581 45	5 343 90	5 925 35
20	5 627 00	298 35	5 627 00	5 925 35
TOTAUX.	*877 484 35*	*46 507 00*	*72 000 00*	*118 507 00*

Le calcul de l'intérêt de la dernière année donne 298 fr. 25 c., ce qui porterait le dernier amortissement à 5 627 fr. 10 c. : il serait de 0 fr. 10 c. plus fort que le capital restant à amortir. Je prendrai pour chiffre des intérêts 298 fr. 35 c. et l'amortissement se trouvera ainsi réduit à 5 627 fr.

Les totaux de chaque colonne placés après la 10e, la 12e et la 20e année servent de preuves.

Considérons en effet les totaux placés après la 10ᵉ année : celui de la 2ᵉ colonne, 32 348, ajouté à celui de la 3ᵉ, 26 905,50, donne celui de la 4ᵉ, 59 253,50 ; celui de la 1ʳᵉ colonne, 610 337,70, multiplié par r (ici 0,053) doit donner le total de la 2ᵉ, 32 348 ; enfin le total de la 3ᵉ colonne, 26 905,50, ajouté au nombre 45 094,50, qui correspond à la 11ᵉ année dans la 1ʳᵉ colonne, doit donner le montant de l'emprunt 72 000.

Ces vérifications résultent de la formation même du tableau et il n'est pas besoin de les expliquer.

225. 3ᵉ Problème.

Par la loi du 11 juin 1863, le Ministre des Travaux Publics a été autorisé à remplacer la subvention de 21 300 000 fr. promise à la Compagnie des chemins de fer du Midi, par des demi-annuités semestrielles, de 487 374 fr. 80 chacune, pendant 92 ans, la première devant être versée le 1ᵉʳ mai 1865 et la dernière le 1ᵉʳ novembre 1954. Calculer : 1° le taux d'intérêt semestriel ; 2° l'intérêt, i_1, du premier semestre ; 3° le premier amortissement, α_1 ; 4° le dernier amortissement, α_n ; 5° le semestre du remboursement moyen, m.

$$a = 487\,374 \text{ fr. } 80 \text{ c.}$$
$$\text{A} = 21\,300\,000 \text{ fr.}$$
$$n = 92 \times 2 = 184.$$

1° *Taux d'intérêt semestriel.*

Je prends la formule du nº 217-3°.

$$r = \frac{a}{\text{A}}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right].$$

Je néglige d'abord le dernier terme de la parenthèse, qui est très petit par rapport à l'autre.

J'ai ainsi :

$$r_1 = \frac{a}{\text{A}} = \frac{487374,80}{21300000} = 0,02288145.$$

Puis dans la même formule, je porte dans l'expression $(1+r)^n$ la valeur que je viens de trouver pour r_1.

$$r_2 = 0,02288145\left(1 - \frac{1}{\overline{1,02288145}^{184}}\right).$$

Pour calculer la parenthèse, je calcule d'abord :

$$\frac{1}{\overline{1{,}02288145}^{184}}, \quad \text{puis} \quad 1 - \frac{1}{\overline{1{,}02288145}^{184}}$$

$$\text{Log}\frac{1}{\overline{1{,}02288145}^{184}} = \text{Log}\,1 - 184\,\text{Log}\,1{,}02288145 = 0 - 184 \times 0{,}0098253048$$

$$= 0 - 1{,}80785608 = \bar{2}{,}19214392$$

$$\frac{1}{\overline{1{,}02288145}^{184}} = 0{,}01556481$$

$$1 - \frac{1}{\overline{1{,}02288145}^{184}} = 1 - 0{,}01556481 = 0{,}98443519$$

$r_2 = 0{,}02288145 \times 0{,}98443519 = 0{,}0225253.$

$$r_3 = 0{,}02288145\left[1 - \frac{1}{\overline{1{,}0225253}^{184}}\right]$$

$$\text{Log}\frac{1}{\overline{1{,}0225253}^{184}} = \text{Log}\,1 - 184\,\text{Log}\,1{,}0225253 = 0 - 184 \times 0{,}0096740625$$

$$= 0 - 1{,}78002750 = \bar{2}{,}21997250$$

$$\frac{1}{\overline{1{,}0225253}^{184}} = 0{,}01659482$$

$$1 - \frac{1}{\overline{1{,}0225253}^{184}} = 1 - 0{,}01659482 = 0{,}98340518$$

$r_3 = 0{,}02288145 \times 0{,}98340518 = 0{,}02250174.$

$$r_4 = 0{,}00288145\left[1 - \frac{1}{\overline{1{,}02250174}^{184}}\right]$$

$$\text{Log}\frac{1}{\overline{1{,}02250174}^{184}} = \text{Log}\,1 - 184\,\text{Log}\,1{,}02250174 = 0 - 184 \times 0{,}0096405776$$

$$= 0 - 1{,}77818663 = \bar{2}{,}22181337$$

$$\frac{1}{\overline{1{,}02251074}^{184}} = 0{,}01666531$$

$$1 - \frac{1}{\overline{1{,}02251074}^{184}} = 1 - 0{,}01666531 = 0{,}98333469$$

$r_4 = 0{,}00288145 \times 0{,}98333469 = 0{,}02250012$

Je m'arrête là, et j'ai, pour valeur de r exacte à 0,00001 près,

$$r = 0{,}02250.$$

Le taux d'intérêt par semestre est 2,25 p. 100 et par année 4,50 p. 100.

2° *Intérêt du premier semestre,* i_1.

$$i_1 = Ar = 21300000 \times 0{,}0225 = 479\,250 \text{ fr.}$$

3° *Premier amortissement,* α_1.

$$\alpha_1 = a - i_1 = 487374{,}80 - 479250 = 8\,124 \text{ fr. } 80 \text{ c.}$$

Comme vérification (n° 220) :

$$\alpha_1 = \frac{a}{(1+r)^n}$$

$$\text{Log } \alpha_1 = \text{Log } a - n \text{ Log } (1+r) = \text{Log } 487374{,}80 - 184 \text{ Log } 1{,}0225$$
$$= 5{,}68786307 - 184 \times 0{,}00966332 = 5{,}68786307 - 1{,}77805088 = 3{,}90981219$$

$$\alpha_1 = 8\,124 \text{ fr. } 79 \text{ c.}$$

4° *Dernier amortissement,* α_n.

$$\alpha_n = \frac{a}{1+r} = \frac{487374{,}80}{1{,}0225} = 476\,650 \text{ fr. } 15 \text{ c.}$$

Comme vérification (n° 220) :

$$\alpha_n = \alpha_1 (1+r)^{n-1}$$

$$\text{Log } \alpha_n = \text{Log } \alpha_1 + (n-1) \text{ Log } (1+r) = \text{Log } 8124{,}79 + 183 \text{ Log } 1{,}0225$$
$$= 3{,}90981219 + 183 \times 0{,}00966332 = 3{,}90981219 + 1{,}76838756 = 5{,}67819975.$$

$$\alpha_n = 476\,650 \text{ fr. } 10 \text{ c.}$$

5° *Semestre moyen du remboursement,* m.

$$i_{m+1} = \frac{i_1}{2} = \frac{479250}{2} = 239\,625 \text{ fr.} \qquad (\text{N}^\circ\ 221).$$

De là :

$$\alpha_{m+1} = a - i_{m+1} = 487374{,}80 - 239625 = 247\,749 \text{ fr. } 80 \text{ c.}$$

D'ailleurs :

$$\alpha_{m+1} = \alpha_1 (1+r)^m$$
$$\text{Log } \alpha_{m+1} = \text{Log } \alpha_1 + m \text{ Log } (1+r).$$

d'où :

$$m = \frac{\text{Log } \alpha_{m+1} - \text{Log } \alpha_1}{\text{Log } (1+r)} = \frac{\text{Log } 247749{,}80 - \text{Log } 8124{,}80}{\text{Log } 1{,}0225}$$

$$= \frac{5{,}39401335 - 3{,}9098127}{0{,}00966332}$$

$$m = \frac{1{,}48420065}{0{,}00966332} = 153{,}59.$$

$m = 154$ par excès.

Ce 154^e^ semestre est le 2^e^ de la 77^e^ année : c'est celui qui se termine au 1^er^ novembre 1941.

Je vérifie ce résultat par la seconde méthode indiquée au n° 221 :

$$S_m = \frac{\alpha_1 \left[(1+r)^m - 1\right]}{r}$$

$$\text{Log } S_m = \text{Log } \alpha_1 + \text{Log } \left[(1+r)^m - 1\right] - \text{Log } r$$

$$= \text{Log } 8124{,}80 + \text{Log } \left(\overline{1{,}0225}^{154} - 1\right) - \text{Log } 0{,}0225$$

$$\text{Log } \overline{1{,}0225}^{154} = 154 \text{ Log } 1{,}0225 = 154 \times 0{,}00966332 = 1{,}48815128$$

$$\overline{1{,}0225}^{154} = 30{,}77169$$

$$\text{Log } \left(\overline{1{,}0225}^{154} - 1\right) = \text{Log } 29{,}77169 = 1{,}4738034$$

$$\text{Log } 8124{,}80 = 3{,}9098127$$

$$5{,}3836161$$

$$\text{Log } 0{,}025 = \bar{2}{,}3521825$$

$$\text{Log } S_m = 7{,}0314336$$

$$S_m = 10\,750\,615 \text{ fr.}$$

un peu plus que la moitié de la subvention qui est

$$\frac{21300000}{2} = 10\,650\,000 \text{ fr.}$$

ce qui doit avoir lieu puisque 154 est un peu trop fort.

D'ailleurs l'amortissement du 153^e^ semestre est :

$$\alpha_{153} = \alpha_1 (1+r)^{152}$$

$$\text{Log}\,\alpha_{153} = \text{Log}\,8124{,}80 + 152\,\text{Log}\,1{,}0225 = 3{,}9098127 + 152 \times 0{,}00966332$$

$$= 3{,}9098127 + 1{,}46882464 = 5{,}37863734$$

$$\alpha_{153} = 239\,131 \text{ fr. } 80 \text{ c.}$$

Donc avant le 154e semestre, on a remboursé :

$$10750615 - 239131,80 = 10\,511\,483 \text{ fr. } 20 \text{ c.}$$

c'est-à-dire un peu moins que la moitié de la subvention.

Par conséquent, le 154e semestre est bien le semestre moyen du remboursement.

226. 4e Problème.

Par la loi du **11** juin 1863, le Ministre des Travaux Publics a été autorisé à payer à la Compagnie du chemin de fer de Paris à Orléans une annuité de 1 334 342 fr. 55 c., payable par moitié le 1er avril et le 1er octobre de chaque année, en remplacement de la subvention de 26 416 667 fr. qui avait été promise à cette compagnie. Le taux d'intérêt ayant été fixé à 5 p. 100, et la première demi-annuité devant être versée le 1er octobre 1863, on demande : 1° la durée de l'opération, n; 2° l'intérêt du premier semestre, i_1 ; 3° l'amortissement du premier semestre, α_1 ; 4° l'amortissement du dernier semestre, α_n ; 5° le semestre moyen, m, du remboursement.

Ici :

$$a = \frac{1334342,55}{2} = 667\,171 \text{ fr. } 275$$

$$A = 26\,416\,667 \text{ fr.}$$

$$r = \frac{0,05}{2} = 0,025.$$

1° *Nombre de semestres, n.* (n° 217-4°).

$$n = \frac{\text{Log } a - \text{Log } (a - Ar)}{\text{Log } (1 + r)}$$

Or :

$$a - Ar = 667171,275 - 26416667 \times 0,025 = 667171,275 - 660416,675$$
$$= 6754,60.$$

Donc :

$$n = \frac{\text{Log } 667171,275 - \text{Log } 6754,60}{\text{Log } 1,025} = \frac{5,824237329 - 3,8295996}{0,01072387}$$
$$= \frac{1,994637729}{0,01072387} = 186.$$

La durée de l'opération est donc de 186 semestres ou 93 années : elle se terminera au 1er avril 1956.

2° *Intérêt du premier semestre,* i_1.

$$i_1 = Ar = 26416667 \times 0{,}025 = 660\,416 \text{ fr. } 675.$$

3° *Amortissement du premier semestre,* α_1.

$$\alpha_1 = a - i_1 = 667171{,}275 - 660416{,}675 = 6\,754 \text{ fr. } 60 \text{ c.}$$

Comme vérification (n° 220) :

$$\alpha_1 = \frac{a}{(1+r)^n}$$

$$\begin{aligned}\text{Log } \alpha_1 &= \text{Log } a - n \text{ Log } (1+r) = \text{Log } 667171{,}275 - 186 \text{ Log } 1{,}025 \\ &= 5{,}824237329 - 186 \times 0{,}01072387 = 5{,}824237329 - 1{,}99463982 \\ &= \bar{3}{,}8295975\end{aligned}$$

$$\alpha_1 = 6\,754 \text{ fr. } 57 \text{ c.}$$

4° *Amortissement du dernier semestre,* α_n.

$$\alpha_n = \frac{a}{1+r} = \frac{667171{,}275}{1{,}025} = 650\,898 \text{ fr. } 80 \text{ c.}$$

Comme vérification (n° 220) :

$$\alpha_n = \alpha_1 (1+r)^{n-1}$$

$$\begin{aligned}\text{Log } \alpha_n &= \text{Log } \alpha_1 + (n-1) \text{ Log } (1+r) = \text{Log } 6754{,}57 + 185 \text{ Log } 1{,}025 \\ &= 3{,}8295996 + 185 \times 0{,}01072387 = 3{,}8295975 + 1{,}98391595 = 5{,}81351345\end{aligned}$$

$$\alpha_n = 650\,898 \text{ fr. } 80 \text{ c.}$$

5° *Semestre moyen du remboursement,* m.

D'après les formules du n° 221 :

$$\alpha_{m+1} = a - i_{m+1} = a - \frac{i_1}{2} = 667171{,}275 - 330208{,}3375 = 336\,962 \text{ fr. } 9375$$

et :

$$m = \frac{\text{Log } \alpha_{m+1} - \text{Log } \alpha_1}{\text{Log } (1+r)} = \frac{\text{Log } 336962{,}9375 - \text{Log } 6754{,}50}{\text{Log } 1{,}025}$$

$$= \frac{5{,}52758209 - 3{,}8295996}{0{,}01072387}$$

$$m = \frac{1{,}69798249}{0{,}01072387} = 158{,}34$$

$m = 158$ par défaut.

Ce 158^e semestre est le 2^e de la 79^e année : c'est celui qui se termine au 1er avril 1942.

Je vérifie ce résultat par la seconde méthode du n° 221 :

$$S_m = \frac{\alpha_1 \left[(1+r)^m - 1\right]}{r}$$

$$\text{Log } S_m = \text{Log } \alpha_1 + \text{Log} \left[(1+r)^m - 1\right] - \text{Log } r$$
$$= \text{Log } 6754{,}60 + \text{Log}\left(\overline{1{,}025}^{158} - 1\right) - \text{Log } 0{,}025$$

$$\text{Log } \overline{1{,}025}^{158} = 158 \text{ Log } 1{,}025 = 158 \times 0{,}01072387 = 1{,}69437146$$
$$\overline{1{,}025}^{158} = 49{,}47337$$

$$\text{Log}\left(\overline{1{,}025}^{158} - 1\right) = \text{Log } 48{,}47337 = 1{,}68550323$$
$$\text{Log } 6754{,}60 = 3{,}8295996$$
$$5{,}51510283$$
$$\text{Log } 0{,}025 = \bar{2}{,}3979400$$
$$\text{Log } S_m = 7{,}11716283$$

$$S_m = 13\,096\,730 \text{ fr.}$$

un peu moins que la moitié de la subvention qui est :

$$\frac{26416667}{2} = 13\,208\,333 \text{ fr. } 50 \text{ c.}$$

ce qui doit avoir lieu puisque 158 est un peu trop faible.

D'ailleurs l'amortissement du 159ᵉ semestre est :

$$\alpha_{159} = \alpha_1 (1+r)^{158} = 6754{,}60 \times \overline{1{,}025}^{158} = 6754{,}60 \times 49{,}47337$$
$$= 334\,172 \text{ fr. } 80 \text{ c.}$$

Donc, après le 159ᵉ semestre, on a remboursé :

$$13096730 + 334172{,}80 = 13\,430\,902 \text{ fr. } 80 \text{ c.}$$

c'est-à-dire un peu plus que la moitié de la subvention.

Par conséquent, le 158ᵉ semestre est bien celui du remboursement moyen.

2e Section. — Amortissement avec prime de remboursement.

227. Les questions d'amortissement avec prime de remboursement se présentent lorsqu'un emprunt en rentes ou en obligations remboursables à un chiffre fixé d'avance qu'on appelle le *pair*, est émis à un chiffre inférieur, qui est le *prix d'émission*; de sorte que le montant total du remboursement étant plus considérable que celui de la somme empruntée, il y a à connaître le taux d'intérêt effectif auquel l'opération revient à l'emprunteur (voir n° 231, plus loin).

228. On peut aussi chercher la *valeur d'un titre de rente ou d'une obligation*, à une époque déterminée pendant la durée de l'opération, cette valeur étant, au commencement, égale au prix d'émission, et allant toujours en croissant jusqu'à la fin, où elle atteint le pair (n° 231-8°).

229. Il y a encore, dans ces sortes d'emprunts, une question qu'on se pose souvent, c'est de savoir quel est l'*intérêt moyen* qu'ils offrent à leurs souscripteurs, en ajoutant à l'intérêt nominal celui qui résulte de la prime de remboursement.

Je ferai remarquer d'abord que, comme souscripteur, il ne peut être question ici que du porteur d'un seul titre, celui dont la chance de remboursement se trouve être pendant l'année moyenne; car pour celui qui posséderait deux ou plusieurs titres, l'époque où il aurait la chance d'être remboursé ne peut s'obtenir que par un calcul de probabilités qui ne rentre pas dans les limites de cet ouvrage.

Cette recherche de l'intérêt moyen est donc purement spéculative, puisqu'elle ne repose que sur une chance et non une certitude de remboursement. Je la ferai néanmoins pour montrer que, contrairement à une opinion généralement adoptée, le taux d'intérêt effectif, c'est-à-dire le coût d'un emprunt pour celui qui emprunte, est toujours supérieur au taux d'intérêt moyen que cet emprunt procurerait à ceux qui l'ont souscrit, si le remboursement de leurs titres s'effectuait pendant l'année moyenne (n° 231-9°).

230. En résumé, dans ces questions d'amortissement avec prime, les quantités à examiner sont les suivantes : le montant nominal de l'emprunt à rembourser, A; le montant réel de l'emprunt souscrit, A′; l'annuité, a; le temps du remboursement, n; le taux d'intérêt nominal, r; le taux d'intérêt effectif, y compris la prime de remboursement, r'; le prix d'émission, c; l'intérêt de la première année, i_1; le premier amortissement α_1; le dernier amortissement, α_n; l'année moyenne du remboursement, m; la valeur d'un titre à une époque donnée, v; enfin le taux d'intérêt moyen, y compris la prime de remboursement, ρ.

Il peut se présenter un grand nombre de problèmes à résoudre. Voici les principaux :

1er	Problème.	On donne	a, n, r, r'.	Calculer	$A, A', c, i_1, \alpha_1, \alpha_n, m, v, \rho$.
2e	—	—	A, n, r, r'.	—	$a, A', c, i_1, \alpha_1, \alpha_n, m, v, \rho$.
3e	—	—	A', n, r, r'.	—	$a, A, c, i_1, \alpha_1, \alpha_n, m, v, \rho$.
4e	—	—	a, n, r, c.	—	$A, A', r', i_1, \alpha_1, \alpha_n, m, v, \rho$.
5e	—	—	A, n, r, c.	—	$a, A', r', i_1, \alpha_1, \alpha_n, m, v, \rho$.
6e	—	—	A', n, r, c.	—	$a, A, r', i_1, \alpha_1, \alpha_n, m, v, \rho$.

Je vais donner un exemple de chacun des quatre premiers.

231. 1er Problème.

En 1859, le royaume de Sardaigne fit un emprunt, en livres sterling, au change fixe de 25 fr. 20 c. Cet emprunt, remboursable à 100 £ (le pair) en 35 ans, le 1er décembre de chaque année, de 1860 à 1894, donne 5 £ d'intérêt par titre nominal de 100 £, payables par moitié le 1er juin et le 1er décembre de chaque année.

Sachant que l'annuité est de 219 858£,146, et que le taux d'intérêt effectif, y compris la prime de remboursement, est de 6,353 p. 100, calculer : 1° le montant nominal de l'emprunt, A ; 2° le montant réel A′ ; 3° le cours d'émission, c; 4° l'intérêt de la première année, i_1; 5° le premier amortissement, α_1; 6° le dernier amortissement, α_n; 7° l'année moyenne, m; 8° la valeur d'un titre, v, à la fin de la 10e année ; 9° le taux d'intérêt moyen, ρ, que reçoit le porteur d'un titre.

Je ferai tout le calcul en livres sterling.

Ici :

$$a = 219858{,}146$$
$$n = 35$$
$$r = 0{,}05$$
$$r' = 0{,}06353.$$

1° *Montant nominal de l'emprunt*, A.

$$A = \frac{a\left[(1+r)^n - 1\right]}{r\,(1+r)^n}$$

$$\text{Log } A = \text{Log } a + \text{Log}\left[(1+r)^n - 1\right] - \left[\text{Log } r + n\,\text{Log}\,(1+r)\right]$$

$$= \text{Log } 219858{,}146 + \text{Log}\left(\overline{1{,}05}^{35} - 1\right) - \left[\text{Log } 0{,}05 + 35\,\text{Log } 1{,}05\right]$$

$$\text{Log } \overline{1{,}05}^{35} = 35\,\text{Log } 1{,}05 = 35 \times 0{,}02118930 = 0{,}7416255.$$

$$\overline{1{,}05}^{35} = 5{,}516015$$

$$\text{Log}\left(\overline{1{,}05}^{35} - 1\right) = \text{Log } 4{,}516015 = 0{,}6547554$$

$$\text{Log } 219858{,}146 = 5{,}3421426$$

$$5{,}9968980$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Log } 0{,}05 = \bar{2}{,}6989700\\ 35\,\text{Log } 1{,}05 = 0{,}7416255\end{array}\right\}\ \bar{1}{,}4405955$$

$$\text{Log } A = 6{,}5563025$$

$$A = 3\,600\,000\ \pounds.$$

2° *Montant réel de l'emprunt*, A′.

$$A' = \frac{a\left[(1+r')^n - 1\right]}{r'\,(1+r')^n}$$

$$\text{Log } A' = \text{Log } a + \text{Log}\left[(1+r')^n - 1\right] - \left[\text{Log } r' + n\,\text{Log}\,(1+r')\right]$$

$$= \text{Log } 219858{,}146 + \text{Log}\left(\overline{1{,}06353}^{35} - 1\right) - \left[\text{Log } 0{,}06353 + 35\,\text{Log } 1{,}06353\right]$$

$$\text{Log } \overline{1{,}06353}^{35} = 35\,\text{Log } 1{,}06353 = 35 \times 0{,}02674974 = 0{,}9362409$$

$$\overline{1{,}06353}^{35} = 8{,}634574$$

$$\text{Log}\left(\overline{1{,}06353}^{135} - 1\right) = \text{Log } 7{,}634574 = 0{,}8827850$$

$$\text{Log } 219858{,}146 = 5{,}3421426$$

$$6{,}2249276$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Log } 0{,}06353 = \bar{2}{,}8029789\\ 35\,\text{Log } 1{,}06353 = 0{,}9362409\end{array}\right\}\ \bar{1}{,}7392198$$

$$\text{Log } A' = 6{,}4857078$$

$$A' = 3\,059\,904\ \pounds.$$

3° *Prix d'émission, c.*

J'ai la proportion :

$$\frac{c}{100} = \frac{A'}{A} = \frac{3059904}{3600000}$$

d'où :

$$c = \frac{\overset{\overset{\overset{\overset{31874}{\cancel{95622}}}{\cancel{191244}}}{\cancel{764976}}}{\cancel{3059904}} \times \cancel{100}}{\underset{\underset{\underset{\underset{375}{\cancel{1125}}}{\cancel{2250}}}{\cancel{9000}}}{\cancel{3600000}}} = 85,$$

4° *Intérêt de la première année, i_1.*

$$i_1 = Ar = 3600000 \times 0{,}05 = 180\,000£.$$

5° *Amortissement de la première année, α_1.*

$$\alpha_1 = a - i_1 = 219858{,}146 - 180000 = 39\,858£{,}146$$

Comme vérification (n° 220) :

$$\alpha_1 = \frac{a}{(1+r)^n}$$

$$\text{Log}\,\alpha_1 = \text{Log}\,a - n\,\text{Log}\,(1+r) = \text{Log}\,219858{,}146 - 35\,\text{Log}\,1{,}05$$
$$= 5{,}3421426 - 0{,}7416255 = 4{,}6005171.$$

$$\alpha_1 = 39\,858£{,}146.$$

6° *Amortissement de la dernière année, α_n.*

$$\alpha_n = \frac{a}{1+r} = \frac{219858{,}146}{1{,}05} = 209\,388£{,}710.$$

Comme vérification (n° 220) :

$$\alpha_n = \alpha_1\,(1+r)^{n-1}$$

$$\text{Log}\,\alpha_n = \text{Log}\,\alpha_1 + (n-1)\,\text{Log}\,(1+r) = \text{Log}\,39858{,}146 + 34\,\text{Log}\,1{,}05$$
$$= 4{,}6005171 + 0{,}7204362 = 5{,}3209533$$

$$\alpha_n = 209\,388£{,}710.$$

7° *Année moyenne du remboursement*, m (n° 221).

$$i_{m+1} = \frac{i_1}{2} = \frac{180000}{2} = 90\,000£$$

$$\alpha_{m+1} = a - i_{m+1} = 219858{,}146 - 90000 = 129\,858£{,}146.$$

D'ailleurs :

$$\alpha_{m+1} = \alpha_1 (1+r)^m$$
$$\text{Log } \alpha_{m+1} = \text{Log } \alpha_1 + m \text{ Log } (1+r)$$

d'où :

$$m = \frac{\text{Log } \alpha_{m+1} - \text{Log } \alpha_1}{\text{Log } (1+r)} = \frac{\text{Log } 129858{,}146 - \text{Log } 39858{,}146}{\text{Log } 1{,}05}$$

$$= \frac{5{,}11346921 - 4{,}6005171}{0{,}02118930} = \frac{0{,}51295211}{0{,}02118930} = 24{,}21.$$

$m = 24$ par défaut.

Cette 24^e^ année a été l'année 1883.

Je vais vérifier ce résultat par la seconde méthode du n° 221 :

$$S_m = \frac{\alpha_1 \left[(1+r)^m - 1\right]}{r}$$

$$\text{Log } S_m = \text{Log } \alpha_1 + \text{Log } \left[(1+r)^m - 1\right] - \text{Log } r$$
$$= \text{Log } 39858{,}146 + \text{Log } \left(\overline{1{,}05}^{24} - 1\right) - \text{Log } 0{,}05$$

$$\text{Log } \overline{1{,}05}^{24} = 24 \text{ Log } 1{,}05 = 24 \times 0{,}0211893 = 0{,}5085432$$
$$\overline{1{,}05}^{24} = 3{,}2251$$

$$\begin{aligned}
\text{Log } \left(\overline{1{,}05}^{24} - 1\right) = \text{Log } 2{,}2251 &= 0{,}3473495 \\
\text{Log } 39858{,}146 &= \underline{4{,}6005171} \\
&\ 4{,}9478666 \\
\text{Log } 0{,}05 &= \underline{\bar{2}{,}6989700} \\
\text{Log } S_m &= 6{,}2488966
\end{aligned}$$

$$S_m = 1\,773\,767£$$

c'est un peu moins que la moitié de l'emprunt qui est :

$$\frac{3600000}{2} = 1\,800\,000\ £$$

ce qui doit avoir lieu puisque 24 est un peu trop faible.

D'ailleurs, l'amortissement de la 25ᵉ année est :

$$\alpha_{25} = \alpha_1 (1+r)^{24} = 39858,146 \times \overline{1,05}^{24} = 39858,146 \times 3,2251 = 128\,546£,507$$

Donc, après la 25ᵉ année, on a remboursé :

$$1773767 + 128546,507 = 1\,902\,313£,507$$

un peu plus que la moitié de l'emprunt.

Par conséquent, la 24ᵉ année est bien l'année moyenne du remboursement.

8° *Valeur moyenne d'un titre, v, à la fin de la 10ᵉ année.*

Voici comment il faut procéder :

L'annuité 219 858£,146 servie pendant 35 ans, amortit à 5 p. 100 un capital de 3 600 000 £, *A*; et à 6,353 p. 100 un capital de 3 059 904 £, A′.

Je vais calculer ce qui reste à amortir dans chacune de ces opérations, au bout de la 10ᵉ année, sur A et sur A′.

Ce qui est amorti sur A au bout de 10 ans est (nᵒ 220) :

$$S_{10} = \frac{\alpha_1 \left[(1+r)^{10} - 1\right]}{r}$$

$$\text{Log } S_{10} = \text{Log } \alpha_1 + \text{Log } \left[(1+r)^{10} - 1\right] - \text{Log } r$$

$$= \text{Log } 39858,146 + \text{Log } \left(\overline{1,05}^{10} - 1\right) - \text{Log } 0,05$$

$$\text{Log } \overline{1,05}^{10} = 10 \text{ Log } 1,05 = 10 \times 0,0211893 = 0,211893$$

$$\overline{1,05}^{10} = 1,6288947$$

$$\text{Log } \left(\overline{1,05}^{10} - 1\right) = \text{Log } 0,6288947 = \bar{1},79857794$$

$$\text{Log } 39858,146 = 4,6005171$$

$$4,39909504$$

$$\text{Log } 0,05 = \bar{2},6989700$$

$$\text{Log } S_{10} = 5,70012504$$

S_{10} = ...	501 331£,500
Comme A = ...	3 600 000£
il reste à amortir sur A . . .	3 098 668£,500

Ce qui est amorti sur A' au bout de 10 ans est :

$$S'_{10} = \frac{\alpha'_1 \left[(1+r')^{10} - 1\right]}{r'}$$

$$\text{Log } S'_{10} = \text{Log } \alpha'_1 + \text{Log } \left[(1+r')^{10} - 1\right] - \text{Log } r'.$$

Il s'agit d'abord de calculer α'_1, l'amortissement de la 1^re^ année à 6,353 p. 100.

$$\begin{aligned} \alpha'_1 &= a - i'_1 = a - A'r' = 219858{,}146 - 3059904 \times 0{,}06353 \\ &= 219858{,}146 - 194395{,}701 = 25\,462£{,}445. \end{aligned}$$

Alors :

$$\text{Log } S'_{10} = \text{Log } 25462{,}445 + \text{Log } \left(\overline{1{,}06353}^{10} - 1\right) - \text{Log } 0{,}06353$$

$$\text{Log } \overline{1{,}06353}^{10} = 10 \text{ Log } 1{,}06353 = 10 \times 0{,}02674974 = 0{,}2674974$$

$$\overline{1{,}06353}^{10} = 1{,}851388.$$

$$\begin{aligned} \text{Log } \left(\overline{1{,}06353}^{10} - 1\right) = \text{Log } 0{,}851388 &= \bar{1}{,}93012748 \\ \text{Log } 25462{,}445 &= 4{,}40590011 \\ &\overline{\ 4{,}33602759} \\ \text{Log } 0{,}06353 &= \bar{2}{,}8029789 \\ \text{Log } S'_{10} &= 5{,}53304869 \end{aligned}$$

S'_{10} = ...	341 231£,170
Comme A' = ...	3 059 904£
il reste à amortir sur A' . . .	2 718 672£,830

J'ai évidemment la proportion suivante :

$$\frac{v}{100} = \frac{2718672{,}830}{3098668{,}500}$$

d'où :

$$v = \frac{2718672{,}83 \times 100}{3098668{,}5} = 87£{,}737.$$

9° *Taux d'intérêt moyen,* ρ.

Pour calculer le taux d'intérêt moyen que reçoit le porteur d'un titre, je remarque que, l'année moyenne étant la 24^e^, ce porteur, outre son intérêt semestriel de 2£,50, reçoit une prime de 15 £, au bout de 24 ans, puisqu'on lui rembourse 100 £ pour 85 qu'il a données. Je vais calculer la valeur de cette prime, ramenée au commencement de l'emprunt, et je la déduirai du prix d'émission.

Je calcule d'abord le taux d'intérêt semestriel que reçoit le porteur d'un titre.

Il est égal à (n° 77) :

$$\frac{\overset{0,5}{\cancel{2,50}} \times 100}{\underset{17}{\cancel{85}}} = \frac{50}{17} = 2,9411765.$$

D'ailleurs 15 fr. payables dans 24 années ou 48 semestres, valent, lors de l'émission, au taux de 2,9411765 p. 100 (n° 194, 2°) :

$$\frac{15}{\overline{1,029411765}^{48}}.$$

Or :

$$\operatorname{Log} 15 = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1,1760913$$

$$\operatorname{Log} \overline{1,029411765}^{48} = 48 \operatorname{Log} 1,029411765 = 48 \times 0,012591248 = 0,60427799$$

Je retranche : 0,57181331

le nombre correspondant est. 3,730898

Si du cours d'émission 85

je déduis ce nombre qui représente la valeur actuelle de la prime de 15 fr., j'aurai. 81,269102

prix net d'émission.

Puisque cette somme donne par semestre un intérêt de 2£,50, le taux d'intérêt semestriel ressortira à (n° 77) :

$$\frac{2,50 \times 100}{81,269102} = \frac{250}{81,269102} = 3,076$$

et par an :

$$\rho = 6,152 \text{ p. } 100.$$

Ce taux d'intérêt est un peu inférieur au taux d'intérêt effectif, 6,353 p. 100, c'est-à-dire au taux auquel l'emprunt revient à celui qui emprunte.

Ce résultat, qui, au premier abord, peut sembler extraordinaire, s'explique aisément.

Si je suppose chaque titre de 100 £ de capital entre des mains différentes, tous les porteurs qui seront remboursés pendant l'une des 23 années qui précèdent l'année moyenne, auront placé leur capital de 85 £ à un taux d'intérêt supérieur à celui de l'intérêt moyen, 6,152, et tous ceux qui seront remboursés pendant l'une des 11 années qui suivent l'année moyenne auront placé leur capital à un taux d'intérêt inférieur à celui de l'intérêt moyen, 6,152.

La première catégorie contient un peu moins de porteurs que la seconde, puisque ce n'est qu'après la 24^e année que la moitié des titres est remboursée ; mais les premiers recevront cet intérêt supérieur à l'intérêt moyen pendant 23 ans, tandis que les autres recevront l'intérêt inférieur à l'intérêt moyen pendant 11 ans seulement. De sorte que, pour celui qui emprunte, l'intérêt qu'il a à payer pour l'ensemble de l'opération ressort à un taux plus élevé que celui de l'intérêt moyen que reçoit le porteur d'un titre.

10° *Tableau de l'amortissement.*

Dans les emprunts avec prime de remboursement, l'établissement du tableau de l'amortissement présente une difficulté qui ne se rencontre pas dans les emprunts sans prime.

Les emprunts avec prime étant composés d'un certain nombre de titres de valeur égale, émis au-dessous du pair et remboursés au pair, le montant de chacun des amortissements doit être un multiple de la valeur de ces titres. Ici, par exemple, les remboursements se faisant par titre de 100 £ chacun, doivent être des multiples exacts de ce nombre. Les annuités ne seront donc pas rigoureusement égales à l'annuité calculée ci-dessus, 219 858£,146 ; mais il faudra qu'elles s'en rapprochent le plus possible.

Pour être certain de bien opérer, il faut d'abord dresser un tableau d'amortissement exact, avec l'annuité fixe de 219 858£,146, et à l'aide de celui-là, on calculera aisément l'autre, en prenant pour amortissements successifs les multiples de 100 £ qui se rapprocheront le plus des amortissements calculés dans le premier tableau.

Voici le premier tableau :

TABLEAU

Tableau d'amortissement.

ANNÉES.		CAPITAUX restant à amortir au commencement de l'année.	INTÉRÊTS à 5 p. 100.	AMORTISSEMENTS.	ANNUITÉS.
1	1860	3 600 000 000	180 000 000	39 858 146	219 858 146
2	1861	3 560 141 854	178 007 092	41 851 054	219 858 146
3	1862	3 518 290 800	175 914 540	43 943 606	219 858 146
4	1863	3 474 347 194	173 717 360	46 140 786	219 858 146
5	1864	3 428 206 408	171 410 320	48 447 826	219 858 146
6	1865	3 379 758 582	168 987 930	50 870 216	219 858 146
7	1866	3 328 888 366	166 444 418	53 413 728	219 858 146
8	1867	3 275 474 638	163 773 732	56 084 414	219 858 146
9	1868	3 219 390 224	160 969 511	58 888 635	219 858 146
10	1869	3 160 501 589	158 025 080	61 833 066	219 858 146
TOTAUX.		*33 944 999 655*	*1 697 249 983*	*501 331 477*	*2 198 581 460*
11	1870	3 098 668 523	154 933 426	64 924 720	219 858 146
12	1871	3 033 743 803	151 687 190	68 170 956	219 858 146
13	1872	2 965 572 847	148 278 642	71 579 504	219 858 146
14	1873	2 893 993 343	144 699 667	75 158 479	219 858 146
15	1874	2 818 834 864	140 941 743	78 916 403	219 858 146
16	1875	2 739 918 461	136 995 923	82 862 223	219 858 146
17	1876	2 657 056 238	132 852 812	87 005 334	219 858 146
18	1877	2 570 050 904	128 502 545	91 355 601	219 858 146
19	1878	2 478 695 303	123 934 765	95 923 381	219 858 146
20	1879	2 382 771 922	119 138 596	100 719 550	219 858 146
TOTAUX.		*61 584 305 863*	*3 079 215 292*	*1 317 947 628*	*4 397 162 920*
21	1880	2 282 052 372	114 102 619	105 755 527	219 858 146
22	1881	2 176 296 845	108 814 842	111 043 304	219 858 146
23	1882	2 065 253 541	103 262 677	116 595 469	219 858 146
24	1883	1 948 658 072	97 432 904	122 425 242	219 858 146
Année moyenne. TOTAUX.		*70 056 566 693*	*3 502 828 334*	*1 773 767 170*	*5 276 595 504*
25	1884	1 826 232 830	91 311 642	128 546 504	219 858 146
26	1885	1 697 686 326	84 884 316	134 973 830	219 858 146
27	1886	1 562 712 496	78 135 625	141 722 521	219 858 146
28	1887	1 420 989 975	71 049 499	148 808 647	219 858 146
29	1888	1 272 181 328	63 609 066	156 249 080	219 858 146
30	1889	1 115 932 248	55 796 612	164 061 534	219 858 146
TOTAUX.		*78 952 301 896*	*3 947 615 094*	*2 648 129 286*	*6 595 744 380*
31	1890	951 870 714	47 593 536	172 264 610	219 858 146
32	1891	779 606 104	38 980 305	180 877 841	219 858 146
33	1892	598 738 263	29 936 413	189 921 733	219 858 146
34	1893	408 806 530	20 440 326	199 417 820	219 858 146
35	1894	209 388 710	10 469 436	209 388 710	219 858 146
TOTAUX.		*81 900 702 217*	*4 095 035 110*	*3 600 000 000*	*7 695 035 110*

11° 2e Tableau d'amortissement.

ANNÉES.		CAPITAUX restant à amortir au commencement de l'année.	INTÉRÊTS à 5 p. 100.	AMORTISSEMENTS.	ANNUITÉS.
1	1860	3 600 000	180 000	39 900	219 900
2	1861	3 560 100	178 005	41 800	219 805
3	1862	3 518 300	175 915	43 900	219 815
4	1863	3 474 400	173 720	46 100	219 820
5	1864	3 428 300	171 415	48 500	219 915
6	1865	3 379 800	168 990	50 900	219 890
7	1866	3 328 900	166 445	53 400	219 845
8	1867	3 275 500	163 775	56 100	219 875
9	1868	3 219 400	160 970	58 900	219 870
10	1869	3 160 500	158 025	61 800	219 825
TOTAUX.		*33 945 200*	*1 697 260*	*501 300*	*2 198 250*
11	1870	3 098 700	154 935	64 900	219 835
12	1871	3 033 800	151 690	68 200	219 890
13	1872	2 965 600	148 280	71 600	219 880
14	1873	2 894 000	144 700	75 200	219 900
15	1874	2 818 800	140 940	78 900	219 840
16	1875	2 739 900	136 995	82 900	219 895
17	1876	2 657 000	132 850	87 000	219 850
18	1877	2 570 000	128 500	91 300	219 800
19	1878	2 478 700	123 935	95 900	219 835
20	1879	2 382 800	119 140	100 700	219 840
TOTAUX. .		*61 584 500*	*3 079 225*	*1 317 900*	*4 397 125*
21	1880	2 282 100	114 105	105 800	219 905
22	1881	2 176 300	108 815	111 000	219 815
23	1882	2 065 300	103 265	116 600	219 865
24	1883	1 948 700	97 435	122 400	219 835
Année moyenne. TOTAUX. .		*70 056 900*	*3 502 845*	*1 773 700*	*5 276 545*
25	1884	1 826 300	91 315	128 600	219 915
26	1885	1 697 700	84 885	135 000	219 885
27	1886	1 562 700	78 135	141 700	219 835
28	1887	1 421 000	71 050	148 800	219 850
29	1888	1 272 200	63 610	156 200	219 810
30	1889	1 116 000	55 800	164 100	219 900
TOTAUX. .		*78 952 800*	*3 947 640*	*2 648 100*	*6 595 740*
31	1890	951 900	47 595	172 300	219 895
32	1891	779 600	38 980	180 900	219 880
33	1892	598 700	29 935	189 900	219 835
34	1893	408 800	20 440	199 400	219 840
35	1894	209 400	10 470	209 400	219 870
TOTAUX. .		*81 901 200*	*4 095 060*	*3 600 000*	*7 695 060*

232. 2e Problème :

En 1857, la Société des Forges de Châtillon et Commentry a émis 20 000 obligations remboursables en 25 ans (de 1860 à 1884) à 312 fr. 50 c., et rapportant 15 fr. d'intérêts, payables par moitié les 15 mai et 15 novembre de chaque année ; les tirages se font le 10 mai, et les remboursements le 15 mai suivant.

Sachant que le taux effectif de l'intérêt, y compris la prime de remboursement, est de 7,1433 p. 100, calculer : 1° l'annuité, a ; 2° le montant réel de l'emprunt, A′ ; 3° le prix d'émission, c ; 4° l'intérêt de la première année, i_1 ; 5° le premier amortissement α_1 ; 6° le dernier amortissement, α_n ; 7° l'année moyenne, m ; 8° la valeur d'une obligation, v, à la fin de la 20e année ; 9° le taux d'intérêt moyen, ρ, que reçoit le porteur d'une obligation.

Je cherche d'abord le montant nominal de l'emprunt :

$$\mathrm{A} = 20000 \times 312,50 = 6\,250\,000 \text{ fr.}$$

puis le taux nominal :

$$r = \frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{62,5}{\cancel{312,50}}} = 0,048$$

D'ailleurs :

$$r' = 0,071433$$
$$n = 25.$$

1° *Annuité, a.*

$$a = \frac{\mathrm{A}r\,(1+r)^n}{(1+r)^{n-1}}$$

$$\mathrm{Log}\,a = \mathrm{Log}\,\mathrm{A} + \mathrm{Log}\,r + n\,\mathrm{Log}\,(1+r) - \mathrm{Log}\left[(1+r)^n - 1\right]$$

$$= \mathrm{Log}\,6250000 + \mathrm{Log}\,0,048 + 25\,\mathrm{Log}\,1,048 - \mathrm{Log}\left(\overline{1,048}^{25} - 1\right)$$

$$\mathrm{Log}\,\overline{1,048}^{25} = 25\,\mathrm{Log}\,1,048 = 25 \times 0,02036128 = 0,509032$$

$$\overline{1,048}^{25} = 3,228732$$

$$\mathrm{Log}\left(\overline{1,048}^{25} - 1\right) = \mathrm{Log}\,2,228732 = 0,34805785$$

$$\begin{aligned}
\text{Log } 6250000 &= 6{,}7958800 \\
\text{Log } 0{,}048 &= \bar{2}{,}6812412 \\
25 \text{ Log } 1{,}048 &= \underline{0{,}5090320} \\
& 5{,}9861532 \\
\text{Log}\left(\overline{1{,}048}^{25} - 1\right) &= \underline{0{,}34805785} \\
\text{Log } a &= 5{,}63809535 \\
a &= 434\,605 \text{ fr. } 65 \text{ c.}
\end{aligned}$$

2° *Montant réel de l'emprunt*, A'.

$$A' = \frac{a'\left[(1+r')^n - 1\right]}{r'(1+r')^n}$$

$$\text{Log } A' = \text{Log } a' + \text{Log}\left[(1+r')^n - 1\right] - \left[\text{Log } r' + n \text{ Log }(1+r')\right]$$

$$= \text{Log} 434605{,}65 + \text{Log}\left(\overline{1{,}071433}^{25} - 1\right) - \left[\text{Log} 0{,}071433 + 25 \text{Log} 1{,}071433\right]$$

$$\text{Log } \overline{1{,}071433}^{25} = 25 \text{ Log } 1{,}071433 = 25 \times 0{,}029965018 = 0{,}74912545$$

$$\overline{1{,}071433}^{25} = 5{,}612101$$

$$\begin{aligned}
\text{Log}\left(\overline{1{,}071433}^{25} - 1\right) = \text{Log } 4{,}612101 &= 0{,}6638988 \\
\text{Log } 434605{,}65 &= \underline{5{,}63809535} \\
& 6{,}30199415
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
\text{Log } 0{,}071433 &= \bar{2}{,}8538989 \\
25 \text{ Log } 1{,}071433 &= 0{,}74912545
\end{aligned}\right\} \ \bar{1}{,}60302435$$

$$\begin{aligned}
\text{Log } A' &= 6{,}69896980 \\
A' &= 5\,000\,000 \text{ de fr.}
\end{aligned}$$

3° *Prix d'émission*, c.

$$\frac{c}{312{,}50} = \frac{A'}{A} = \frac{5000000}{6250000}$$

$$c = \frac{\overset{\overset{4}{\cancel{100}}}{\cancel{5000000}} \times \overset{62{,}5}{\cancel{312{,}5}}}{\underset{\underset{5}{\cancel{125}}}{\cancel{6250000}}} = 250 \text{ fr.}$$

4° *Intérêt de la première année*, i_1.

$$i_1 = Ar = 6250000 \times 0{,}048 = 300000 \text{ fr.}$$

5° *Amortissement de la première année,* α_1.

$$\alpha_1 = a - i_1 = 434605,65 - 300000 = 134\,605 \text{ fr. } 65 \text{ c.}$$

Le nombre d'obligations amorties sera :

$$\frac{134605,65}{312,50} = 431.$$

Comme vérification (n° 220) :

$$\alpha_1 = \frac{a}{(1+r)^n} = \frac{434605,65}{\overline{1,048}^{25}} = \frac{434605,65}{3,228732} = 134\,605 \text{ fr. } 67 \text{ c.}$$

6° *Amortissement de la dernière année,* α_n.

$$\alpha_n = \frac{a}{1+r} = \frac{434605,65}{1,048} = 414\,700 \text{ fr. } 05 \text{ c.}$$

Le nombre d'obligations amorties sera :

$$\frac{414700,05}{312,50} = 1327.$$

Comme vérification (n° 220) :

$$\alpha_n = \alpha_1 (1+r)^{n-1}$$

$$\text{Log } \alpha_n = \text{Log } \alpha_1 + (n-1) \text{ Log } (1+r) = \text{Log } 134605,65 + 24 \text{ Log } 1,048$$

$$= 5,12906335 + 0,48867072 = 5,61773407$$

$$\alpha_n = 414\,700 \text{ fr. } 07 \text{ c.}$$

7° *Année moyenne du remboursement,* m (n° 221).

$$i_{m+1} = \frac{i_1}{2} = \frac{300000}{2} = 150\,000 \text{ fr.}$$

$$\alpha_{m+1} = a - i_{m+1} = 434605,65 - 150000 = 284\,605 \text{ fr. } 65 \text{ c.}$$

D'ailleurs :

$$\alpha_{m+1} = \alpha_1 (1+r)^m$$

$$\text{Log } \alpha_{m+1} = \text{Log } \alpha_1 + m \text{ Log } (1+r)$$

et

$$m = \frac{\text{Log } \alpha_{m+1} - \text{Log } \alpha_1}{\text{Log } (1+r)} = \frac{\text{Log } 284605,65 - \text{Log } 134605,65}{\text{Log } 1,048}$$

$$= \frac{5,45424354 - 5,12906329}{0,02036128} = \frac{0,32418025}{0,02036128} = 15,92$$

$m = 16$ par excès, mais presque exactement.

Cette 16ᵉ année a été l'année 1875.

Je vais vérifier ce résultat par la seconde méthode du n° 221.

$$S_m = \frac{\alpha_1 \left[(1+r)^m - 1\right]}{r}$$

$$\text{Log } S_m = \text{Log } \alpha_1 + \text{Log } \left[(1+r)^m - 1\right] - \text{Log } r$$

$$= \text{Log } 134605{,}65 + \text{Log } \left(\overline{1{,}048}^{16} - 1\right) - \text{Log } 0{,}048.$$

$$\text{Log } \overline{1{,}048}^{16} = 16 \text{ Log } 1{,}048 = 16 \times 0{,}02036128 = 0{,}32578048$$

$$\overline{1{,}048}^{16} = 2{,}11729006$$

$$\text{Log } \left(\overline{1{,}048}^{16} - 1\right) = \text{Log } 1{,}11729006 = 0{,}04816614$$

$$\text{Log } 134605{,}65 = 5{,}12906329$$

$$5{,}17722943$$

$$\text{Log } 0{,}048 = \bar{2}{,}6812412$$

$$\text{Log } S_m = 6{,}49598823$$

$$S_m = 3\,133\,201 \text{ fr.}$$

C'est un peu plus que la moitié de l'emprunt qui est :

$$\frac{6250000}{2} = 3\,125\,000 \text{ fr.}$$

ce qui doit avoir lieu puisque 16 est un peu trop fort.

D'ailleurs, l'amortissement de la 16e année est :

$$\alpha_{16} = \alpha_1 (1+r)^{15}$$

$$\text{Log } \alpha_{16} = \text{Log } \alpha_1 + 15 \text{ Log } (1+r) = \text{Log } 134605{,}65 + 15 \text{ Log } 1{,}048$$

$$= 5{,}12906329 + 0{,}3054192 = 5{,}43448249$$

$$\alpha_{16} = 271\,945 \text{ fr } 80 \text{ c.}$$

Donc, avant la 16e année, on a remboursé :

$$3133201 + 271945{,}80 = 2\,861\,255 \text{ fr. } 20 \text{ c.}$$

un peu moins que la moitié de l'emprunt.

La 16e année est donc bien l'année moyenne.

8° *Valeur moyenne d'une obligation, v, à la fin de la 20e année* (n° 231-8°).

Le total des remboursements effectués à la fin de la 20e année sur le capital nominal, A, est (n° 220).

$$S_{20} = \frac{\alpha_1 \left[(1+r)^{20} - 1\right]}{r}$$

$$\text{Log } S_{20} = \text{Log } \alpha_1 + \text{Log } \left[(1+r)^{20} - 1\right] - \text{Log } r$$

$$= \text{Log } 134605{,}65 + \text{Log } \left(\overline{1{,}048}^{20} - 1\right) - \text{Log } 0{,}048$$

$$\mathrm{Log}\ \overline{1,048}^{20} = 20\ \mathrm{Log}\ 1,048 = 20 \times 0,02036128 = 0,4072256$$

$$\overline{1,048}^{20} = 2,5540276$$

$$\mathrm{Log}\left(\overline{1,048}^{20} - 1\right) = \mathrm{Log}\ 1,5540276 = 0,19145873$$

$$\mathrm{Log}\ 134605,65 = 5,12906329$$

$$5,32052202$$

$$\mathrm{Log}\ 0,048 = \bar{2},6812412$$

$$\mathrm{Log}\ S_{20} = 6,63928082$$

$S_{20} =$	4 357 936 fr.
Comme A = ...	6 250 000 fr.
il reste à amortir sur A	1 892 064 fr.

Ce qui est remboursé sur le capital réel, A′, au bout de 20 ans, est :

$$S'_{20} = \frac{\alpha'_1 \left[(1 + r')^{20} - 1\right]}{r'}$$

$$\mathrm{Log}\ S'_{20} = \mathrm{Log}\ \alpha'_1 + \mathrm{Log}\left[(1 + r')^{20} - 1\right] - \mathrm{Log}\ r'.$$

Il faut d'abord calculer α'_1, l'amortissement de la première année à 7,1433 p. 100.

$$\alpha'_1 = a - i'_1 = a - A'r' = 434605,65 - 5000000 \times 0,071433$$
$$= 434605,65 - 357165 = 77\,440 \text{ fr. } 65 \text{ c.}$$

Alors :

$$\mathrm{Log}\ \alpha'_{20} = \mathrm{Log}\ 77440,65 + \mathrm{Log}\left(\overline{1,071433}^{20} - 1\right) - \mathrm{Log}\ 0,071433$$

$$\mathrm{Log}\ \overline{1,071433}^{20} = 20\ \mathrm{Log}\ 1,071433 = 20 \times 0,029965018 = 0,59930036$$

$$\overline{1,071433}^{20} = 3,9746633$$

$$\mathrm{Log}\left(\overline{1,071433}^{20} - 1\right) = \mathrm{Log}\ 2,9746633 = 0,47343784$$

$$\mathrm{Log}\ 77440,65 = 4,8889690$$

$$5,36240684$$

$$\mathrm{Log}\ 0,071433 = \bar{2},8538989$$

$$\mathrm{Log}\ S'_{20} = 6,50850794$$

$S'_{20} =$	3 224 838 fr.
Comme A′ = ...	5 000 000 fr.
il reste à amortir sur A′	1 775 162 fr.

La valeur d'une obligation sera donnée par la proportion suivante :

$$\frac{v}{312,50} = \frac{1775162}{1892064}$$

d'où :

$$v = \frac{1775162 \times 312,50}{1892064} = 293 \text{ fr. } 192.$$

9° *Taux d'intérêt moyen*, ρ (n° 231-9°).

Le taux d'intérêt semestriel que reçoit le porteur d'une obligation est égal à (n° 77) :

$$\frac{7,50 \times 100}{250} = 3.$$

D'ailleurs, la prime de remboursement

$$312,50 - 250 = 62 \text{ fr. } 50 \text{ c.}$$

payable dans le semestre moyen, c'est-à-dire au bout de 32 semestres, vaut lors de l'émission (n° 194-2°) :

$$\frac{62,50}{\overline{1,03}^{32}}$$

Or :

$$\text{Log } 62,50 = 1,7958800$$

$$\text{Log } \overline{1,03}^{32} = 32 \text{ Log } 1,03 = 32 \times 0,01283722 = \underline{0,41079104}$$

Je retranche : 1,38508896

le nombre correspondant est . . . . . $24^{f}\,271071$

Si, du cours d'émission. 250

je déduis ce nombre qui représente la valeur actuelle de la prime de 62 fr. 50 c.

j'aurai . . . . $225^{f}\,728929$

prix net d'émission.

Comme cette somme donne par semestre un intérêt de 7 fr. 50 c., le taux d'intérêt semestriel ressortira à (n° 194-2°) :

$$\frac{7,5 \times 100}{225,728929} = \frac{750}{225,728929} = 3,3225$$

et, par an :

$$\rho = 6,645 \text{ p. } 100.$$

TABLEAU.

10°. 1er Tableau d'amortissement.

ANNÉES.		CAPITAUX à amortir au commencement de l'année.	INTÉRÊTS à 4.80 p. 100.	AMORTISSEMENTS.	ANNUITÉS.
1	1860	6 250 000 00	300 000 00	134 605 65	434 605 65
2	1861	6 115 394 35	293 538 90	141 066 75	434 605 65
3	1862	5 974 327 60	286 767 75	147 837 90	434 605 65
4	1863	5 826 489 70	279 671 50	154 934 15	434 605 65
5	1864	5 671 555 55	272 234 70	162 370 95	434 605 65
6	1865	5 509 184 60	264 440 90	170 164 75	434 605 65
7	1866	5 339 019 85	256 272 95	178 332 70	434 605 65
8	1867	5 160 687 15	247 713 00	186 892 65	434 605 65
9	1868	4 973 794 50	238 742 10	195 863 55	434 605 65
10	1869	4 777 930 95	229 340 70	205 264 95	434 605 65
TOTAUX.		*55 598 384 25*	*2 668 722 50*	*1 677 334 00*	*4 346 056 50*
11	1870	4 572 666 00	219 487 95	215 117 70	434 605 65
12	1871	4 357 548 30	209 162 30	225 443 35	434 605 65
13	1872	4 132 104 95	198 341 05	236 264 60	434 605 65
14	1873	3 895 840 35	187 000 30	247 605 35	434 605 65
15	1874	3 648 235 00	175 115 30	259 490 35	434 605 65
16	1875	3 388 744 65	162 659 75	271 945 90	434 605 65
Année moyenne TOTAUX.		*79 593 523 50*	*3 820 489 15*	*3 133 201 25*	*6 953 690 40*
17	1876	3 116 798 75	149 606 35	284 999 30	434 605 65
18	1877	2 831 799 45	135 926 35	298 679 30	434 605 65
19	1878	2 533 120 15	121 589 75	313 015 90	434 605 65
20	1879	2 220 104 25	106 565 00	328 040 65	434 605 65
TOTAUX.		*90 295 346 10*	*4 334 176 60*	*4 357 936 40*	*8 692 113 00*
21	1880	1 892 063 60	90 819 05	343 786 60	434 605 65
22	1881	1 548 277 00	74 317 30	360 288 35	434 605 65
23	1882	1 187 988 65	57 023 45	377 582 20	434 605 65
24	1883	810 406 45	38 899 50	395 706 15	434 605 65
25	1884	414 700 30	19 905 35	414 700 30	434 605 65
TOTAUX.		*96 148 782 10*	*4 615 141 25*	*6 250 000 00*	*10 865 141 25*

Il y a dans le total des amortissements une différence de 0,25 avec le montant du capital nominal 6 250 000 qui provient de ce que les intérêts ont été arrondis de 5 en 5 centimes. Pour arriver à ce dernier chiffre, je fais porter cette différence sur les intérêts de la dernière année qui devraient être de 19 905,60 et que je réduis à 19 905,35, afin que le dernier amortissement soit bien égal à ce qui reste à amortir sur le capital au commencement de cette année.

11° Il s'agit maintenant de faire le second tableau d'amortissement.

Pour trouver le nombre d'obligations amorties la première année, je divise le premier amortissement, 134 605,65, par 312,50, montant d'une obligation : je trouve comme quotient 431, à une unité près, par excès ; je multiplie 431 par 312,50 : le produit 134 687,50 est le premier amortissement ; je le retranche du capital 6 250 000 pour avoir le capital à amortir au commencement de la deuxième année, et ainsi de suite.

Dans la pratique, pour le calcul des intérêts, il est plus commode de prendre 15 fr. par obligation plutôt que de multiplier le capital par 0,048.

On emploie souvent aussi pour établir les divers amortissements successifs, quand le montant de l'obligation est un nombre un peu compliqué comme ici, une méthode de tâtonnement simple et rapide.

On forme successivement les multiples de 312,50 qui se rapprochent le plus des amortissements trouvés dans le tableau précédent, et les nombres ainsi obtenus servent à former les amortissements du second tableau.

$$
\begin{array}{rcrcr}
312{,}50 & \times & 431 & = & 134\,687{,}50 \\
312{,}50 & \times & 20 & = & 6\,250{,}00 \\
\hline
312{,}50 & \times & 451 & = & 140\,937{,}50 \\
312{,}50 & \times & 1 & = & 312{,}50 \\
\hline
312{,}50 & \times & 452 & = & 141\,250{,}00 \\
312{,}50 & \times & 20 & = & 6\,250{,}00 \\
312{,}50 & \times & 1 & = & 312{,}50 \\
\hline
312{,}50 & \times & 473 & = & 147\,812{,}50 \\
312{,}50 & \times & 20 & = & 6\,250{,}00 \\
312{,}50 & \times & 2 & = & 625{,}00 \\
\hline
312{,}50 & \times & 495 & = & 154\,687{,}50 \\
312{,}50 & \times & 1 & = & 312{,}50 \\
\hline
312{,}50 & \times & 496 & = & 155\,000{,}00
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcrcr}
312{,}50 & \times & 496 & = & 155\,000{,}00 \\
312{,}50 & \times & 20 & = & 6\,250{,}00 \\
312{,}50 & \times & 3 & = & 937{,}50 \\
\hline
312{,}50 & \times & 519 & = & 162\,187{,}50 \\
312{,}50 & \times & 1 & = & 312{,}50 \\
\hline
312{,}50 & \times & 520 & = & 162\,500{,}00 \\
312{,}50 & \times & 20 & = & 6\,250{,}00 \\
312{,}50 & \times & 4 & = & 1\,250{,}00 \\
\hline
312{,}50 & \times & 544 & = & 170\,000{,}00 \\
312{,}50 & \times & 1 & = & 312{,}50 \\
\hline
312{,}50 & \times & 545 & = & 170\,312{,}50 \\
312{,}50 & \times & 24 & = & 7\,500{,}00 \\
312{,}50 & \times & 1 & = & 312{,}50 \\
\hline
312{,}50 & \times & 570 & = & 178\,125{,}00
\end{array}
$$

$$\begin{array}{rcrcr}
312{,}50 & \times & 570 & = & 178\,125{,}00 \\
312{,}50 & \times & 1 & = & 312{,}50 \\ \cline{3-3} \cline{5-5}
312{,}50 & \times & 571 & = & 178\,437{,}50 \\
312{,}50 & \times & 24 & = & 7\,500{,}00 \\
312{,}50 & \times & 2 & = & 625{,}00 \\
312{,}50 & \times & 1 & = & 312{,}50 \\ \cline{3-3} \cline{5-5}
312{,}50 & \times & 598 & = & 186\,875{,}00 \\
312{,}50 & \times & 24 & = & 7\,500{,}00 \\
312{,}50 & \times & 4 & = & 1\,250{,}00 \\ \cline{3-3} \cline{5-5}
312{,}50 & \times & 626 & = & 195\,625{,}00 \\
312{,}50 & \times & 1 & = & 312{,}50 \\ \cline{3-3} \cline{5-5}
312{,}50 & \times & 627 & = & 195\,937{,}50 \\
312{,}50 & \times & 30 & = & 9\,375{,}00 \\ \cline{3-3} \cline{5-5}
312{,}50 & \times & 657 & = & 205\,312{,}50 \\
312{,}50 & \times & 30 & = & 9\,375{,}00 \\
312{,}50 & \times & 1 & = & 312{,}50 \\ \cline{3-3} \cline{5-5}
312{,}50 & \times & 688 & = & 215\,000{,}00 \\
312{,}50 & \times & 30 & = & 9\,375{,}00 \\
312{,}50 & \times & 2 & = & 625{,}00 \\ \cline{3-3} \cline{5-5}
312{,}50 & \times & 720 & = & 225\,000{,}00 \\
312{,}50 & \times & 1 & = & 312{,}50 \\ \cline{3-3} \cline{5-5}
312{,}50 & \times & 721 & = & 225\,312{,}50 \\
312{,}50 & \times & 32 & = & 10\,000{,}00 \\
312{,}50 & \times & 3 & = & 937{,}50 \\ \cline{3-3} \cline{5-5}
312{,}50 & \times & 756 & = & 236\,250{,}00 \\
312{,}50 & \times & 32 & = & 10\,000{,}00 \\
312{,}50 & \times & 4 & = & 1\,250{,}00 \\ \cline{3-3} \cline{5-5}
312{,}50 & \times & 792 & = & 247\,500{,}00 \\
312{,}50 & \times & 32 & = & 10\,000{,}00 \\
312{,}50 & \times & 4 & = & 1\,250{,}00 \\
312{,}50 & \times & 2 & = & 625{,}00 \\ \cline{3-3} \cline{5-5}
312{,}50 & \times & 830 & = & 259\,375{,}00 \\
312{,}50 & \times & 1 & = & 312{,}50 \\ \cline{3-3} \cline{5-5}
312{,}50 & \times & 831 & = & 259\,687{,}50
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcr}
312{,}50 & \times & 831 & = & 259\,687{,}50 \\
312{,}50 & \times & 32 & = & 10\,000{,}00 \\
312{,}50 & \times & 6 & = & 1\,875{,}00 \\
312{,}50 & \times & 1 & = & 312{,}50 \\ \cline{3-3} \cline{5-5}
312{,}50 & \times & 870 & = & 271\,875{,}00 \\
312{,}50 & \times & 40 & = & 12\,500{,}00 \\
312{,}50 & \times & 2 & = & 625{,}00 \\ \cline{3-3} \cline{5-5}
312{,}50 & \times & 912 & = & 285\,000{,}00 \\
312{,}50 & \times & 40 & = & 12\,500{,}00 \\
312{,}50 & \times & 4 & = & 1\,250{,}00 \\ \cline{3-3} \cline{5-5}
312{,}50 & \times & 956 & = & 298\,750{,}00 \\
312{,}50 & \times & 44 & = & 13\,750{,}00 \\
312{,}50 & \times & 2 & = & 625{,}00 \\ \cline{3-3} \cline{5-5}
312{,}50 & \times & 1002 & = & 313\,125{,}00 \\
312{,}50 & \times & 44 & = & 13\,750{,}00 \\
312{,}50 & \times & 4 & = & 1\,250{,}00 \\ \cline{3-3} \cline{5-5}
312{,}50 & \times & 1050 & = & 328\,125{,}00 \\
312{,}50 & \times & 48 & = & 15\,000{,}00 \\
312{,}50 & \times & 2 & = & 625{,}00 \\ \cline{3-3} \cline{5-5}
312{,}50 & \times & 1100 & = & 343\,750{,}00 \\
312{,}50 & \times & 50 & = & 15\,625{,}00 \\
312{,}50 & \times & 2 & = & 625{,}00 \\ \cline{3-3} \cline{5-5}
312{,}50 & \times & 1152 & = & 360\,000{,}00 \\
312{,}50 & \times & 1 & = & 312{,}50 \\ \cline{3-3} \cline{5-5}
312{,}50 & \times & 1153 & = & 360\,312{,}50 \\
312{,}50 & \times & 50 & = & 15\,625{,}00 \\
312{,}50 & \times & 5 & = & 1\,562{,}50 \\ \cline{3-3} \cline{5-5}
312{,}50 & \times & 1208 & = & 377\,500{,}00 \\
312{,}50 & \times & 50 & = & 15\,625{,}00 \\
312{,}50 & \times & 5 & = & 1\,562{,}50 \\
312{,}50 & \times & 3 & = & 937{,}50 \\ \cline{3-3} \cline{5-5}
312{,}50 & \times & 1266 & = & 395\,625{,}00 \\
312{,}50 & \times & 50 & = & 15\,625{,}00 \\
312{,}50 & \times & 10 & = & 3\,125{,}00 \\ \cline{3-3} \cline{5-5}
312{,}50 & \times & 1326 & = & 414\,375{,}00 \\
312{,}50 & \times & 1 & = & 312{,}50 \\ \cline{3-3} \cline{5-5}
312{,}50 & \times & 1327 & = & 414\,687{,}50
\end{array}$$

TABLEAU.

2e Tableau d'amortissement.

ANNÉES.		CAPITAUX à amortir au commencement de l'année		INTÉRÊTS à 4.80 p. 100 (15 fr. par obligation).	AMORTISSEMENTS		ANNUITÉS.
		en francs.	en obligations.		en francs.	en obligations	
1	1860	6 250 000 00	20 000	300 000 00	134 687 50	431	434 687 50
2	1861	6 115 312 50	19 569	293 535 00	140 937 50	451	434 472 50
3	1862	5 974 375 00	19 118	286 770 00	147 812 50	473	434 582 50
4	1863	5 826 562 50	18 645	279 675 00	155 000 00	496	434 675 00
5	1864	5 671 562 50	18 149	272 235 00	162 500 00	520	434 735 00
6	1865	5 509 062 50	17 629	264 435 00	170 312 50	545	434 747 50
7	1866	5 338 750 00	17 084	256 260 00	178 437 50	571	434 697 50
8	1867	5 160 312 50	16 513	247 695 00	186 875 00	598	434 570 00
9	1868	4 973 437 50	15 915	238 725 00	195 937 50	627	434 662 50
10	1869	4 777 500 00	15 288	229 320 00	205 312 50	657	434 632 50
TOTAUX.		*55 596 875 00*	*177 910*	*2 668 650 00*	*1 677 812 50*	*5 369*	*4 346 462 50*
11	1870	4 572 187 50	14 631	219 465 00	215 000 00	688	434 465 00
12	1871	4 357 187 50	13 943	209 145 00	225 312 50	721	434 457 50
13	1872	4 131 875 00	13 222	198 330 00	236 250 00	756	434 580 00
14	1873	3 895 625 00	12 466	186 990 00	247 500 00	792	434 490 00
15	1874	3 648 125 00	11 674	175 110 00	259 375 00	830	434 485 00
16	1875	3 388 750 00	10 844	162 660 00	271 875 00	870	434 535 00
Année moyenne. TOTAUX.		*79 590 625 00*	*254 690*	*3 820 350 00*	*3 133 125 00*	*10 026*	*6 953 475 00*
17	1876	3 116 875 00	9 974	149 610 00	285 000 00	912	434 610 00
18	1877	2 831 875 00	9 062	135 930 00	298 750 00	956	434 680 00
19	1878	2 533 125 00	8 106	121 590 00	313 125 00	1 002	434 715 00
20	1879	2 220 000 00	7 104	106 560 00	328 125 00	1 050	434 685 00
TOTAUX.		*90 292 500 00*	*288 936*	*4 334 040 00*	*4 358 125 00*	*13 946*	*8 692 165 00*
21	1880	1 891 875 00	6 054	90 810 00	343 750 00	1 100	434 560 00
22	1881	1 548 125 00	4 954	74 310 00	360 312 50	1 153	434 622 50
23	1882	1 187 812 50	3 801	57 015 00	377 500 00	1 208	434 515 00
24	1883	810 312 50	2 593	38 895 00	395 625 00	1 266	434 520 00
25	1884	414 687 50	1 327	19 905 00	414 687 50	1 327	434 592 50
TOTAUX.		*96 145 312 50*	*307 665*	*4 614 975 00*	*6 250 000 00*	*20 000*	*10 864 975 00*

Ce tableau présente entre les diverses colonnes les mêmes points de vérification que les précédents; de plus, les divers nombres d'obligations restant à amortir multipliés par 312,50 doivent reproduire les nombres correspondants des capitaux restant à amortir.

233. 3e Problème :

La Compagnie des chemins de fer de Paris à Orléans a fait, en 1842, un emprunt en obligations remboursables à 1 250 fr. en 47 ans (de 1845 à 1891) et rapportant 50 fr. d'intérêts, payables par moitié le 1er janvier et le 1er juillet de chaque année. Les tirages des obligations se font le 1er juin et le 1er décembre de chaque année, et les remboursements les 1er juillet et 1er janvier suivants, à partir du 1er janvier 1845. Le taux effectif de l'emprunt avec la prime de remboursement revenant à 4,658 144 p. 100 et le montant réel de l'emprunt étant 9 999 000 fr., on demande : 1° la demi-annuité, a; 2° le montant nominal de l'emprunt, A ; 3° le prix d'émission, c; 4° l'intérêt du premier semestre, i_1 ; 5° l'amortissement du premier semestre, α_1 ; 6° l'amortissement du dernier semestre, α_n ; 7° le semestre moyen du remboursement, m ; 8° la valeur d'une obligation, v, à la fin du 47e semestre ; 9° le taux d'intérêt moyen, ρ, que reçoit le porteur d'une obligation.

Le remboursement se faisant par semestre, j'ai :

$$A' = 9999000$$
$$n = 47 \times 2 = 94$$
$$r = \frac{1}{2} \times \frac{50}{1250} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{25} = \frac{1}{50} = 0{,}02$$
$$r' = \frac{1}{2} \times 0{,}04658144 = 0{,}02329072.$$

1° *Demi-annuité semestrielle, a.*

$$a = \frac{A'r'\,(1 + r')^n}{(1 + r')^n - 1}$$

$$\text{Log}\, a = \text{Log}\, A' + \text{Log}\, r' + n\, \text{Log}\,(1 + r') - \text{Log}\left[(1 + r')^n - 1\right]$$

$$= \text{Log}\, 9999000 + \text{Log}\, 0{,}02329072 + 94\, \text{Log}\, 1{,}02329072 - \text{Log}\left(\overline{1{,}02329072}^{\,94} - 1\right)$$

$$\text{Log}\, \overline{1{,}02329072}^{\,94} = 94\, \text{Log}\, 1{,}02329072 = 94 \times 0{,}009999035 = 0{,}93990929$$

$$\overline{1{,}02329072}^{\,94} = 8{,}707818$$

$$\text{Log}\left(\overline{1{,}02329072}^{\,94} - 1\right) = \text{Log}\, 7{,}707818 = 0{,}88693143.$$

$$
\begin{aligned}
\text{Log } 9999000 &= 6{,}9999566 \\
\text{Log } 0{,}02329072 &= \bar{2}{,}36718289 \\
94 \text{ Log } 1{,}02329072 &= \underline{0{,}93990929} \\
& 6{,}30704878 \\
\text{Log}\left(\overline{1{,}02329072}^{\,94} - 1\right) &= \underline{0{,}88693143} \\
\text{Log } a &= 5{,}42011735 \\
a &= 263\,097 \text{ fr. } 90 \text{ c.}
\end{aligned}
$$

2° *Montant nominal de l'emprunt*, A.

$$
\mathrm{A} = \frac{a\left[(1+r)^n - 1\right]}{r\,(1+r)^n}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Log A} &= \text{Log } a + \text{Log}\left[(1+r)^n - 1\right] - \left[\text{Log } r + n \text{ Log } (1+r)\right] \\
&= \text{Log } 263067{,}90 + \text{Log}\left(\overline{1{,}02}^{\,94} - 1\right) - \left[\text{Log } 0{,}02 + 94 \text{ Log } 1{,}02\right]
\end{aligned}
$$

$$
\text{Log } \overline{1{,}02}^{\,94} = 94 \text{ Log } 1{,}02 = 94 \times 0{,}00860017 = 0{,}80841598
$$

$$
\overline{1{,}02}^{\,94} = 6{,}433036
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Log}\left(\overline{1{,}02}^{\,94} - 1\right) = \text{Log } 5{,}433036 &= 0{,}7350426 \\
\text{Log } 263067{,}90 &= \underline{5{,}42011733} \\
& 6{,}15515993 \\
\left.\begin{aligned} \text{Log } 0{,}02 &= \bar{2}{,}3010300 \\ 94 \text{ Log } 1{,}02 &= 0{,}80841598 \end{aligned}\right\} & \underline{\bar{1}{,}10944598} \\
\text{Log A} &= 7{,}04571395 \\
\mathrm{A} &= 11\,110\,000 \text{ fr.}
\end{aligned}
$$

Le nombre d'obligations est :

$$
\frac{\begin{matrix} 44440 \\ \cancel{222200} \\ \cancel{11110000} \end{matrix}}{\begin{matrix} \cancel{1250} \\ \cancel{25} \\ 5 \end{matrix}} = 8888.
$$

3° *Prix d'émission*, c.

$$
c = \frac{125\cancel{0} \times \overset{9}{\cancel{9999000}}}{\cancel{11110000}} = 1\,125 \text{ fr.}
$$

4° *Intérêt du premier semestre*, i_1.

$$
i_1 = \mathrm{A}r = 11110000 \times 0{,}02 = 222\,200 \text{ fr.}
$$

5° *Amortissement du premier semestre,* α_1.

$$\alpha_1 = a - i_1 = 263097,90 - 222200 = 40\,897 \text{ fr. } 90 \text{ c.}$$

Le nombre d'obligations amorties est :

$$\frac{40897,90}{1250} = 33.$$

Comme vérification (n° 220) :

$$\alpha_1 = \frac{a}{(1+r)^n} = \frac{263097,90}{\overline{1,02}^{94}} = \frac{263097,90}{6,433036} = 40\,897 \text{ fr. } 93 \text{ c.}$$

6° *Amortissement du dernier semestre,* α_n.

$$\alpha_n = \frac{a}{1+r} = \frac{263097,90}{1,02} = 257\,939 \text{ fr. } 10 \text{ c.}$$

Le nombre des obligations amorties est :

$$\frac{257939,10}{1250} = 206.$$

Comme vérification (n° 220) :

$$\alpha_n = \alpha_1 (1+r)^{n-1}$$

$$\begin{aligned}\text{Log } \alpha_n &= \text{Log } \alpha_1 + (n-1) \text{ Log } (1+r) = \text{Log } 40897,90 + 93 \text{ Log } 1,02 \\ &= 4,61170104 + 93 \times 0,00860017 = 4,61170104 + 0,79981581 \\ &= 5,41151685\end{aligned}$$

$$\alpha_n = 257\,939 \text{ fr.}$$

7° *Semestre moyen du remboursement,* m (n° 221).

$$i_{m+1} = \frac{i_1}{2} = \frac{222200}{2} = 111\,100 \text{ fr.}$$

$$\alpha_{m+1} = a - i_{m+1} = 263097,90 - 111100 = 151\,997 \text{ fr. } 90 \text{ c.}$$

D'ailleurs :

$$\begin{aligned}m &= \frac{\text{Log } \alpha_{m+1} - \text{Log } \alpha_1}{\text{Log } (1+r)} = \frac{\text{Log } 151997,90 - \text{Log } 40897,90}{\text{Log } 1,02} \\ &= \frac{5,18183759 - 4,61170104}{0,00860017} = \frac{0,57013655}{0,00860017} = 66,29.\end{aligned}$$

$m = 66$ par défaut.

Ce 66^e semestre est le second de la 33^e année : c'est celui qui se termine le 1^{er} juillet 1877.

Je vais vérifier ce résultat par la seconde méthode du n° 221.

$$S_m = \frac{\alpha_1 \left[(1+r)^m - 1\right]}{r}$$

$$\text{Log } S_m = \text{Log } \alpha_1 + \text{Log}\left[(1+r)^m - 1\right] - \text{Log } r$$

$$= \text{Log } 40897,90 + \text{Log}\left(\overline{1,02}^{66} - 1\right) - \text{Log } 0,02$$

$$\text{Log } \overline{1,02}^{66} = 66 \text{ Log } 1,02 = 66 \times 0,00860017 = 0,56761122$$

$$\overline{1,02}^{66} = 3,694973.$$

$$\begin{array}{rr} \text{Log}\left(\overline{1,02}^{66} - 1\right) = \text{Log } 2,694973 = & 0,43055433 \\ \text{Log } 40897,90 = & 4,61170104 \\ \hline & 5,04225537 \\ \text{Log } 0,02 = & \bar{2},3010300 \\ \hline \text{Log } S_m = & 6,74122537 \end{array}$$

$$S_m = 5\,510\,936 \text{ fr.}$$

C'est un peu moins que la moitié de l'emprunt qui est :

$$\frac{11110000}{2} = 5\,555\,000 \text{ fr.}$$

ce qui doit avoir lieu puisque 66 est un peu trop faible.

D'ailleurs, l'amortissement du 67^e semestre est :

$$\alpha_{67} = \alpha_1 (1+r)^{66} = 40897,90 \times \overline{1,02}^{66} = 40897,90 \times 3,694973 = 151\,116 \text{ fr. } 60 \text{ c.}$$

Donc, après le 67^e semestre, on a remboursé :

$$5510936 + 151116,60 = 5\,662\,052 \text{ fr. } 60 \text{ c.}$$

un peu plus que la moitié de l'emprunt.

Par conséquent, le 67^e semestre est bien le semestre moyen du remboursement.

8° *Valeur d'une obligation, v, à la fin du 47° semestre* (n° 231-8°).

Le total des remboursements effectués à la fin du 47° semestre sur le capital nominal, A, est (n° 220) :

$$S_{47} = \frac{\alpha_1 \left[(1+r)^{47} - 1\right]}{r}$$

$$\text{Log } S_{47} = \text{Log } \alpha_1 + \text{Log } \left[(1+r)^{47} - 1\right] - \text{Log } r$$

$$= \text{Log } 40897,90 + \text{Log } \left(\overline{1,02}^{47} - 1\right) - \text{Log } 0,02$$

$$\text{Log } \overline{1,02}^{47} = 47 \text{ Log } 1,02 = 47 \times 0,00860017 = 0,40420799$$

$$\overline{1,02}^{47} = 2,536343$$

$$\text{Log } \left(\overline{1,02}^{47} - 1\right) = \text{Log } 1,536343 = 0,18648821$$

$$\text{Log } 40897,90 = \underline{4,61170104}$$

$$4,79818925$$

$$\text{Log } 0,02 = \underline{\bar{2},3010300}$$

$$\text{Log } S_{47} = 6,49715925$$

$S_{47} =$ . . . . 3 141 660 fr.

Comme $A =$ . . . . 11 110 000 fr.

il reste à amortir sur A . . . . 7 968 340 fr.

Ce qui est amorti sur le capital réel, A′, au bout de 47 semestres, est :

$$S'_{47} = \frac{\alpha'_1 \left[(1+r')^{47} - 1\right]}{r'}$$

$$\text{Log } S'_{47} = \text{Log } \alpha'_1 + \text{Log } \left[(1+r')^{47} - 1\right] - \text{Log } r'.$$

Il faut d'abord calculer α'_1, l'amortissement du premier semestre à 2,329072 p. 100 :

$$\alpha'_1 = a - i'_1 = a - A'r' = 263097,90 - 9999000 \times 0,02329072$$
$$= 263097,90 - 232883,90 = 30\,214 \text{ fr.}$$

Alors :

$$\text{Log } S'_{47} = \text{Log } 30214 + \text{Log } \left(\overline{1,02329072}^{47} - 1\right) - \text{Log } 0,02329072$$

$$\text{Log } \overline{1,02329072}^{47} = 47 \text{ Log } 1,02329072 = 47 \times 0,009999035 = 0,469954645$$

$$\overline{1,02329072}^{47} = 2,950901$$

$$\text{Log}\left(\overline{1{,}02329072}^{\,47} - 1\right) = \text{Log } 1{,}950901 = 0{,}29023522$$

$$\text{Log } 30214 = \underline{4{,}4802082}$$

$$4{,}77044342$$

$$\text{Log } 0{,}02329072 = \underline{\bar{2}{,}36718289}$$

$$\text{Log } S'_{47} = 6{,}40326053$$

$S'_{47} =$ . . . . 2 524 995 fr.
Comme $A' =$ . . . . 9 999 000 fr.
il reste à amortir sur A'. . . . . . . 7 474 005 fr.

La valeur d'une obligation après le 47ᵉ semestre est donc :

$$v = \frac{125\cancel{0} \times 7474005}{796834\cancel{0}} = \frac{934250625}{796834} = 1\,172 \text{ fr. } 452.$$

9° *Taux d'intérêt moyen, ρ, que reçoit le porteur d'une obligation.*

Il donne 1 125 fr. pour lesquels il reçoit 25 fr. d'intérêts par semestre, ce qui fait comme taux d'intérêt semestriel (n° 77).

$$\frac{\overset{5}{\cancel{25}} \times \overset{20}{\cancel{100}}}{\underset{\underset{\underset{9}{\cancel{45}}}{\cancel{225}}}{\cancel{1125}}} = 2{,}222222$$

Quant à la prime de remboursement, elle est de :

$$1250 - 1125 = 125 \text{ fr.}$$

payables dans 66 semestres (le semestre moyen étant le 66ᵉ).

Elle vaut au moment de l'émission (n° 194-2°) :

$$\frac{125}{\overline{1{,}02222222}^{\,66}}$$

or :

$\text{Log } 125 =$ 2,0969100

$\text{Log } \overline{1{,}02222222}^{\,66} = 66 \text{ Log } 1{,}02222222 = 66 \times 0{,}009545305 = \underline{0{,}62999013}$

Je retranche : 1,46691987

Le nombre correspondant est. . . . . . 29,30352.

Si du cours d'émission. 1125

je déduis ce nombre qui représente la valeur

actuelle de la prime de 125 fr., j'aurai . . . 1095,69648

prix net d'émission.

Le taux net d'intérêt semestriel sera :

$$\frac{25 \times 100}{1095{,}69648} = 2{,}282$$

et par an :

$$\rho = 4{,}564 \text{ p. } 100.$$

Je crois inutile de faire pour ce problème le tableau d'amortissement année par année : il se formerait exactement de la même manière que le précédent.

234. 4e Problème :

La Compagnie du chemin de fer de Lyon à Genève a émis, en 1855, un emprunt en obligations, au cours de 285 fr., remboursables en 99 ans (de 1856 à 1954) à 500 fr. et rapportant 15 fr. d'intérêts annuels, payables par moitié le 1er janvier et le 1er juillet de chaque année, à partir du 1er janvier 1856. Les tirages se font le 1er octobre, et les remboursements le 1er janvier suivant.

Sachant que l'annuité à payer est de 1 390 296 fr. 40 c., calculer : 1° le montant nominal de l'emprunt, A ; 2° le montant réel, A' ; 3° le taux d'intérêt effectif, r', y compris la prime de remboursement ; 4° l'intérêt de la première année, i_1 ; 5° le premier amortissement, α_1 ; 6° le dernier amortissement, α_n ; 7° l'année moyenne du remboursement, m ; 8° la valeur d'une obligation à la fin de la 30e année, v ; 9° le taux d'intérêt moyen, ρ.

$$\begin{aligned} a &= 1\,390\,296 \text{ fr. } 40 \text{ c.} \\ n &= 99 \\ r &= \frac{15}{500} = 0{,}03 \\ c &= 285. \end{aligned}$$

1° *Montant nominal de l'emprunt,* A.

$$\mathrm{A} = \frac{a\left[(1+r)^n - 1\right]}{r(1+r)^n}$$

$$\text{Log A} = \text{Log } a + \text{Log}\left[(1+r)^n - 1\right] - \left[\text{Log } r + n \text{ Log }(1+r)\right]$$

$$= \text{Log } 1390296{,}40 + \text{Log}\left(\overline{1{,}03}^{99} - 1\right) - [\text{Log } 0{,}03 + 99 \text{ Log } 1{,}03]$$

$$\text{Log } \overline{1{,}03}^{99} = 99 \text{ Log } 1{,}03 = 99 \times 0{,}01283722 = 1{,}27088478$$

$$\overline{1{,}03}^{99} = 18{,}658845$$

$$\text{Log}\left(\overline{1{,}03}^{99} - 1\right) = \text{Log } 17{,}658845 = 1{,}24696229$$
$$\text{Log } 1390296{,}40 = \underline{6{,}14310738}$$
$$7{,}39006967$$
$$\left.\begin{array}{r}\text{Log } 0{,}03 = \bar{2}{,}4771213 \\ 99 \text{ Log } 1{,}03 = 1{,}27088478\end{array}\right\} \underline{\bar{1}{,}74800608}$$
$$\text{Log A} = 7{,}64206359$$
$$\text{A} = 43\,859\,500 \text{ fr.}$$

Le nombre d'obligations émises est :

$$\frac{43859500}{500} = 87719.$$

2° *Montant réel de l'emprunt,* A$'$.

Chaque obligation étant émise à 285,

$$\text{A}' = 87719 \times 285 = 24\,999\,915 \text{ fr.}$$

3° Taux d'intérêt effectif, r' (n° 217 — 3°.)

$$r'_1 = \frac{a'}{\text{A}'}\left[1 - \frac{1}{(1+r')^n}\right] = \frac{1390296{,}40}{24999915}\left[1 - \frac{1}{(1+r')^{99}}\right]$$
$$= 0{,}05561206\left[1 - \frac{1}{(1+r')^{99}}\right]$$

Je néglige d'abord le dernier terme de la parenthèse.

J'ai :

$$r'_1 = 0{,}05561206$$
$$r'_2 = 0{,}05561206\left[1 - \frac{1}{\overline{1{,}05561206}^{99}}\right]$$
$$\text{Log}\frac{1}{\overline{1{,}05561206}^{99}} = \text{Log } 1 - 99 \text{ Log } 1{,}05561206$$
$$= 0 - 99 \times 0{,}0235043447 = 0 - 2{,}32693012 = \bar{3}{,}67306988.$$
$$\frac{1}{\overline{1{,}05561206}^{99}} = 0{,}004710531$$
$$1 - \frac{1}{\overline{1{,}05561206}^{99}} = 1 - 0{,}004710531 = 0{,}995289469$$
$$r'_2 = 0{,}05561206 \times 0{,}995289469 = 0{,}0553499$$

$$r'_3 = 0{,}05561206 \left[1 - \frac{1}{\overline{1{,}0553499}^{99}} \right]$$

$$\text{Log } \frac{1}{\overline{1{,}0553499}^{99}} = \text{Log } 1 - 99 \text{ Log } 1{,}0553499$$

$$= 0 - 99 \times 0{,}0233964689 = 0 - 2{,}31625042 = \bar{3}{,}68374958$$

$$\frac{1}{\overline{1{,}0553499}^{99}} = 0{,}004827803$$

$$1 - \frac{1}{\overline{1{,}0553499}^{99}} = 1 - 0{,}004827803 = 0{,}995172197$$

$$r'_3 = 0{,}05561206 \times 0{,}995172197 = 0{,}05534358$$

$$r'_4 = 0{,}05561206 \left[1 - \frac{1}{\overline{1{,}05534358}^{99}} \right]$$

$$\text{Log } \frac{1}{\overline{1{,}05534358}^{99}} = \text{Log } 1 - 99 \text{ Log } 1{,}05534358$$

$$= 0 - 99 \times 0{,}0233938714 = 0 - 2{,}31599427 = \bar{3}{,}68400573$$

$$\frac{1}{\overline{1{,}05534358}^{99}} = 0{,}004830652$$

$$1 - \frac{1}{\overline{1{,}05534358}^{99}} = 1 - 0{,}004830652 = 0{,}995169348$$

$$r'_4 = 0{,}05561206 \times 0{,}995169348 = 0{,}05534342.$$

Le taux d'intérêt effectif est de 5,5343 p. 100.

4° *Intérêt de la première année,* i_1.

$$i_1 = \text{A}r = 43859500 \times 0{,}03 = 1\,315\,785 \text{ fr.}$$

5° *Amortissement de la première année,* α_1.

$$\alpha_1 = a - i_1 = 1390296{,}40 - 1315785 = 74\,511 \text{ fr. } 40 \text{ c.}$$

Le nombre d'obligations amorties est :

$$\frac{74511{,}40}{500} = 149.$$

Comme vérification (n° 220) :

$$\alpha_1 = \frac{a}{(1+r)^n} = \frac{1390296{,}40}{\overline{1{,}03}^{99}} = \frac{1390296{,}40}{18{,}658845} = 74\,511 \text{ fr. } 39 \text{ c.}$$

6° *Amortissement de la dernière année*, α_n.

$$\alpha_n = \frac{a}{1+r} = \frac{1390296,40}{1,03} = 1\,349\,802 \text{ fr. } 30 \text{ c.}$$

Le nombre d'obligations amorties est :

$$\frac{1349802,30}{500} = 2700.$$

Comme vérification (n° 220) :

$$\alpha_n = \alpha_1 (1+r)^{n-1}$$

$$\begin{aligned}\text{Log } \alpha_n &= \text{Log } \alpha_1 + (n-1) \text{ Log } (1+r) = \text{Log } 74511,40 + 98 \text{ Log } 1,03 \\ &= 4,87222260 + 98 \times 0,01283722 = 4,87222260 + 1,25804756 \\ &= 6,13027016\end{aligned}$$

$$\alpha_n = 1\,349\,802 \text{ fr. } 40 \text{ c.}$$

7° *Année moyenne du remboursement*, m (n° 221).

$$i_{m+1} = \frac{i_1}{2} = \frac{1315785}{2} = 657\,892 \text{ fr. } 50 \text{ c.}$$

$$\alpha_{m+1} = a - i_{m+1} = 1390296,40 - 657892,50 = 742\,403 \text{ fr. } 90 \text{ c.}$$

D'ailleurs :

$$\begin{aligned}m &= \frac{\text{Log } \alpha_{m+1} - \text{Log } \alpha_1}{\text{Log } (1+r)} = \frac{\text{Log } 742403,90 - \text{Log } 74511,40}{\text{Log } 1,03} \\ &= \frac{5,87064026 - 4,8722260}{0,01283722} = \frac{0,99841766}{0,01283722} = 77,78\end{aligned}$$

$m = 78$ par excès.

Cette 78[e] année est l'année 1933.

Je vérifie ce résultat par la seconde méthode du n° 221.

$$S_m = \frac{\alpha_1 \left[(1+r)^m - 1\right]}{r}$$

$$\begin{aligned}\text{Log } S_m &= \text{Log } \alpha_1 + \text{Log } \left[(1+r)^m - 1\right] - \text{Log } r \\ &= \text{Log } 74511,40 + \text{Log } \left(\overline{1,03}^{78} - 1\right) - \text{Log } 0,03\end{aligned}$$

$$\text{Log } \overline{1,03}^{78} = 78 \text{ Log } 1,03 = 78 \times 0,01283722 = 1,00130316$$

$$\overline{1,03}^{78} = 10,030052$$

$$\text{Log}\left(\overline{1,03}^{78} - 1\right) = \text{Log}\ 9,030052 = 0,9556902$$
$$\text{Log}\ 74511,40 = \underline{4,8722226}$$
$$5,8279128$$
$$\text{Log}\ 0,03 = \underline{\bar{2},4771213}$$
$$\text{Log}\ S_{78} = 7,3507915$$
$$S_{78} = 22\,428\,052 \text{ fr.}$$

un peu plus que la moitié de l'emprunt, qui est :

$$\frac{43859500}{2} = 21\,929\,750 \text{ fr.}$$

ce qui doit avoir lieu puisque le nombre 78 est un peu trop fort.

D'ailleurs, l'amortissement de la 78^e année est :

$$\alpha_{78} = \alpha_1 (1 + r)^{77}$$

$$\begin{aligned}\text{Log}\ \alpha_{78} &= \text{Log}\ \alpha_1 + 77\ \text{Log}\ (1 + r) = \text{Log}\ 74511,40 + 77\ \text{Log}\ 1,03 \\ &= 4,8722226 + 77 \times 0,01283722 = 4,8722226 + 0,98846594 \\ &= 5,86068854\end{aligned}$$

$$\alpha_{78} = 725\,585 \text{ fr. } 40 \text{ c.}$$

Donc, avant la 78^e année, on a remboursé :

$$22428052 - 725585,40 = 21\,702\,666 \text{ fr. } 60 \text{ c.}$$

un peu moins que la moitié de l'emprunt.

Par conséquent, la 78^e année est bien l'année moyenne du remboursement.

8° *Valeur d'une obligation, v, à la fin de la 30^e année* (n° 231-8°).

Le total des remboursements effectués à la fin de la 30^e année, sur le capital nominal, A, est (n° 220) :

$$S_{30} = \frac{\alpha_1 \left[(1 + r)^{30} - 1\right]}{r}$$

$$\text{Log}\ S_{30} = \text{Log}\ \alpha_1 + \text{Log}\ \left[(1 + r)^{30} - 1\right] - \text{Log}\ r$$

$$= \text{Log}\ 74511,40 + \text{Log}\left(\overline{1,30}^{30} - 1\right) - \text{Log}\ 0,03$$

$$\text{Log}\ \overline{1,03}^{30} = 30\ \text{Log}\ 1,03 = 30 \times 0,01283722 = 0,3851166$$

$$\overline{1,03}^{30} = 2,427262$$

$$\text{Log}\left(\overline{1{,}03}^{30} - 1\right) = \text{Log } 1{,}427262 = 0{,}1545037$$
$$\text{Log } 74511{,}40 = 4{,}8722226$$
$$5{,}0267263$$
$$\text{Log } 0{,}03 = \bar{2}{,}4771213$$
$$\text{Log } S_{30} = 6{,}5496050$$

S_{30} = ... 3 544 908 f 20
Comme A = ... 43 859 500 f 00

il reste à amortir sur A . . . . 40 314 591 f 80

Ce qui est amorti sur le capital réel, A′, au bout de 30 ans, présente un total de :

$$S'_{30} = \frac{\alpha'_1 \left[(1 + r')^{30} - 1\right]}{r'}$$

$$\text{Log } S'_{30} = \text{Log } \alpha'_1 + \text{Log } \left[(1 + r')^{30} - 1\right] - \text{Log } r'$$

Il faut d'abord calculer α'_1, l'amortissement de la première année, à 0,055343.

$$\alpha'_1 = a - i'_1 = a - A'r' = 1390296{,}40 - 24999915 \times 0{,}055343$$
$$= 1390296{,}40 - 1383570{,}30 = 6\,726 \text{ fr. } 10 \text{ c.}$$

Alors :

$$\text{Log } S'_{30} = \text{Log } 6726{,}10 + \text{Log}\left(\overline{1{,}055343}^{30} - 1\right) - \text{Log } 0{,}055343$$

$$\text{Log } \overline{1{,}055343}^{30} = 30 \text{ Log } 1{,}055343 = 30 \times 0{,}023393636 = 0{,}70180908.$$
$$\overline{1{,}055343}^{30} = 5{,}032793$$

$$\text{Log}\left(\overline{1{,}055343}^{30} - 1\right) = \text{Log } 4{,}032793 = 0{,}60560596$$
$$\text{Log } 6726{,}10 = 3{,}8277633$$
$$4{,}43336926$$
$$\text{Log } 0{,}055343 = \bar{2}{,}7430627$$
$$\text{Log } S'_{30} = 5{,}69030656$$

S'_{30} = ... 490 124 f 70
Comme A′ = ... 24 999 915 f 00

il reste à amortir sur A′. . . . . 24 509 790 f 30

La valeur d'une obligation après la 30ᵉ année est donc :

$$v = \frac{500 \times 24509790,30}{40314591,80} = \frac{12254895150}{40314591,8} = 303 \text{ fr. } 98 \text{ c.}$$

9° *Taux d'intérêt moyen,* ρ, *que reçoit le porteur d'une obligation.*

Il donne 285 fr. pour lesquels il reçoit 7 fr. 50 c. d'intérêts par semestre, ce qui fait comme taux d'intérêt semestriel (n° 77) :

$$\frac{\overset{\overset{0,5}{\cancel{1,5}}}{\cancel{7,50}} \times 100}{\underset{\underset{19}{\cancel{57}}}{\cancel{285}}} = \frac{50}{19} = 2,631579$$

Quant à la prime de remboursement, elle est de :

$$500 - 285 = 215 \text{ fr.}$$

payables dans 156 semestres (l'année moyenne étant la 78ᵉ, et le semestre moyen le 156ᵉ).

Elle vaut au moment de l'émission (n° 194-2°) :

$$\frac{215}{1,02631579^{156}}$$

$\text{Log } 215 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2,3324385$

$\text{Log } 1,02631579^{156} = 156 \text{ Log } 1,02631579 = 156 \times 0,01128100917 = 1,75983743$

Je retranche : 0,57260107

Le nombre correspondant est. . . . . . 3,737671.

Si, du prix d'émission 285

je déduis ce nombre qui représente la valeur actuelle de la prime de 215 fr., j'aurai. . . 281,262329

prix net d'émission.

Le taux net d'intérêt semestriel sera donc :

$$\frac{7,5 \times 100}{281,262329} = \frac{750}{281,262329} = 2,666$$

et par an :

$$\rho = 5,333 \text{ p. } 100.$$

3e Section.

Amortissement avec prime de remboursement et lots.

235. Cette question ne diffère pas essentiellement de la précédente et elle offre les mêmes problèmes à résoudre.

Ici, il y a, de plus, à calculer la valeur des lots donnés chaque année, et à l'ajouter à l'annuité obtenue par la méthode donnée précédemment. On a ainsi la dépense annuelle que nécessite l'emprunt considéré, et on en déduit le taux effectif (nº 236).

Ce qui complique beaucoup les calculs dans ces sortes d'emprunts, c'est que, en général, il y a par année plusieurs tirages d'obligations avec lots, et qu'il faut, pour avoir une appréciation exacte de la dépense réelle, ramener la valeur de ces remboursements à ce qu'elle serait à l'époque où se fait celui des obligations au pair.

On le verra, du reste, dans les deux exemples que je vais donner : l'un est un emprunt fait par la ville de Paris, l'autre un emprunt fait par le Crédit foncier.

Dans ces emprunts, il n'y a pas à chercher, comme dans les précédents, la valeur d'une obligation à une époque déterminée, puisque cette valeur dépend en grande partie de la probabilité qu'il y a pour elle d'être remboursée avec un lot, calcul que je n'ai pas à développer ici. Pour la même raison, il n'y a pas non plus à se demander quel est le taux d'intérêt moyen que reçoit le porteur d'une obligation.

236. 1er Problème :

En 1876, la ville de Paris a fait un emprunt de 258 065 obligations, émises à 465 fr., remboursables à 500 fr. en 73 ans, de 1877 à 1949, et produisant un intérêt annuel de 20 fr., payable par moitié le 15 avril et le 15 octobre de chaque année.

Les tirages se font les 10 février, 10 mai, 10 août et 10 novembre, et les remboursements les 25 février, 25 mai, 25 août et 25 novembre suivants : les obligations remboursées ne reçoivent aucun intérêt sur le coupon courant.

A chacun des tirages,

Le premier numéro sorti est remboursé à			100 000 fr.
Le second	—	—	10 000 fr.
Le troisième	—	—	5 000 fr.
Et chacun des 10 suivants		—	1 000 fr.

Les tirages des 10 février et 10 août comprennent, en plus, un certain nombre d'obligations remboursées au pair.

Le premier tirage a lieu le 10 février 1877 et le dernier le 10 novembre 1949.

Le prix d'émission, fixé à 465 fr., est exigible comme suit :

	50 fr. en souscrivant, le 22 juillet 1876 ;
	75 fr. à la répartition, du 16 au 31 août 1876 ;
	110 fr., du 1er au 15 avril 1877 ;
	110 fr., du 1er au 15 octobre 1877 ;
	120 fr., du 1er au 15 avril 1878.
En tout :	465 fr.

Calculer : 1° la demi-annuité semestrielle, a ; 2° le montant réel de l'emprunt, A' ; 3° le taux effectif d'intérêt, r', y compris la prime de remboursement et la valeur des lots ; 4° l'intérêt du premier semestre, i_1 ; 5° l'amortissement du premier semestre, α_1 ; 6° l'amortissement du dernier, α_n ; 7° le semestre moyen du remboursement, m.

Avant de résoudre ces diverses questions, je vais calculer exactement quel est le *prix de revient d'une obligation*, en la supposant libérée en une fois, et à combien s'élève le *montant des remboursements semestriels*, y compris les lots.

Comme les intérêts sont semestriels et qu'ils sont payés pour la première fois le 15 avril 1877, c'est le 15 octobre 1876 qui est régulièrement la date du commencement de l'opération. Aussi, je vais calculer quel serait le prix de revient d'une obligation libérée à cette date.

Je prends comme taux d'intérêt le taux même de l'emprunt, 4 p. 100, ainsi que l'on fait toujours quand la libération anticipée est admise, et je suppose les versements effectués seulement le dernier jour de la période fixée pour chacun d'eux.

Au 15 octobre 1876 :

Le versement du 22 juillet 1876 est augmenté de 83 jours d'intérêt, soit. 50 $\dfrac{\cancel{2}0 \times 83 \times 4}{100 \times 360}$

Le versement du 31 août 1876 est augmenté de 45 jours d'intérêt, soit. $\dfrac{75 \times 45 \times 4}{100 \times 360}$

Le versement du 15 avril 1877 est diminué de 180 jours d'intérêt, soit . . . . $\dfrac{110 \times 180 \times 4}{100 \times 360}$

Le versement du 15 octobre 1877 est diminué de 360 jours d'intérêt, soit . . . . $\dfrac{110 \times 360 \times 4}{100 \times 360}$

Le versement du 15 avril 1878 est diminué de 540 jours d'intérêt, soit . . . . $\dfrac{120 \times 540 \times 4}{100 \times 360}$

Donc, le prix d'émission, c, sera égal à :

$$465 + \frac{\left[\overset{50}{\cancel{20}}\times 83 + 75 \times 45 - (110 \times 180 + 110 \times 360 + 120 \times 540)\right] \times 4}{100 \times 360}$$

$$= 465 + \frac{1660 + 3375 - 124200}{9000} = 465 - \frac{119165}{9000} = 465 - \underset{12.972222}{13{,}240556}$$

$$= \underset{2.027777}{451{,}759444}.$$

Je vais calculer maintenant la *valeur exacte des remboursements effectués pendant un semestre,* par exemple, pendant celui qui s'étend du 15 octobre au 15 avril ; le calcul, du reste, est absolument le même pour l'autre.

Je calcule les lots. Il faut d'abord en déduire le montant de chaque obligation, 500 fr., puisque ce prix est contenu dans le lot.

Chaque tirage à lots donne donc en primes :

$$\begin{array}{rcrcr} 1 & \times & 99500 & = & 99500 \\ 1 & \times & 9500 & = & 9500 \\ 1 & \times & 4500 & = & 4500 \\ 10 & \times & 500 & = & 5000 \\ \hline & & \text{En tout :} & & 118500 \text{ fr.} \end{array}$$

Je cherche la valeur exacte des deux remboursements à lots, au 25 février, époque du remboursement au pair des obligations sorties.

Le premier, se faisant le 25 février même, vaut . . . . 118 500^{f}

Le second, se faisant le 25 mai, c'est-à-dire trois mois après, vaut au 25 février :

$$118500 - \frac{118500 \times 3 \times 4}{12 \times 100} = 118500 - 1185 = 117\,315^{f}$$

Ils valent donc à eux deux, le 25 février. . . . . 235 815^{f}

De plus, dans chacun des deux tirages est compris le remboursement de 13 obligations à 500 fr., que j'ai déduit plus haut du montant des lots, ce qui forme 6 500 fr. pour chacun d'eux.

Le remboursement des obligations comprises dans le premier tirage s'effectuant le 25 février, conserve, à cette date, sa valeur, 6 500 fr. ; mais le remboursement des obligations comprises dans le second tirage, se faisant le 25 mai, celles-ci présenteront au 25 février une valeur de 6 500 fr. diminuée de ses intérêts pendant 3 mois, c'est-à-dire de :

$$\frac{6500 \times 3 \times 4}{12 \times 100} = 65.$$

D'une autre part, les coupons de ces obligations étant payés jusques et y compris celui du 15 avril, chacune d'elle vaudra, au 25 février, 10 fr. de plus qu'une obligation du tirage précédent, en tout 130 fr.

Par conséquent, les deux tirages dont les valeurs sont ramenées au 25 février, représentent :

$$235815 - 65 + 130 = 235\,880 \text{ fr.}$$

D'ailleurs, toutes les obligations sorties ne recevant d'intérêt que jusqu'au 15 octobre, il faut déduire du montant de chacune d'elles la portion acquise sur le coupon depuis le 15 octobre jusqu'au 25 février suivant, c'est-à-dire pendant 130 jours, ce qui fait :

$$\frac{10 \times 130}{180} = \frac{65}{9} = 7{,}222222.$$

Chaque obligation doit donc être regardée comme étant réellement remboursée à :

$$500 - 7{,}222222 = 492{,}777778.$$

et le remboursement total s'élève réellement à :

$$492{,}777778 \times 258065 = 127\,168\,697 \text{ fr.}$$

En résumé, la ville de Paris paye, par semestre, outre l'annuité que je vais calculer, des lots dont le montant s'élève à 235 880 fr. et elle rembourse en 146 semestres un capital de 127 168 697 fr.

J'employerai ces divers résultats quand je calculerai le taux effectif de l'emprunt.

Pour le calcul des diverses quantités comprises dans les formules générales (n° 217), j'ai :

$$A = 258065 \times 500 = 129\,032\,500 \text{ fr.}$$
$$n = 73 \times 2 = 146$$
$$r = \frac{0,04}{2} = 0,02$$
$$c = 451,759444.$$

1° *Annuité, a.*

$$a = \frac{Ar\,(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

$$\text{Log } a = \text{Log A} + \text{Log } r + n \text{ Log } (1+r) - \text{Log}\left[(1+r)^n - 1\right]$$
$$= \text{Log } 129032500 + \text{Log } 0,02 + 146 \text{ Log } 1,02 - \text{Log}\left(\overline{1,02}^{146} - 1\right).$$

$$\text{Log } \overline{1,02}^{146} = 146 \text{ Log } 1,02 = 146 \times 0,0086002 = 1,2556292$$
$$\overline{1,02}^{146} = 18,01479.$$
$$\text{Log}\left(\overline{1,02}^{146} - 1\right) = \text{Log } 17,01479 = 1,23082662$$

$$\begin{aligned}
\text{Log } 129032500 &= 8,110699125 \\
\text{Log } 0,02 &= \bar{2},3010300 \\
146 \text{ Log } 1,02 &= \underline{1,2556292} \\
& 7,667358325 \\
\text{Log}\left(\overline{1,02}^{146} - 1\right) &= \underline{1,23082662} \\
\text{Log } a &= 6,436531705 \\
a &= 2\,732\,321 \text{ fr.}
\end{aligned}$$

2° *Montant réel de l'emprunt,* A'.

$$A' = 451,759444 \times 258065 = 116\,583\,300 \text{ fr.}$$
652.648

3° *Taux effectif de l'emprunt, r'.*

Je calcule d'abord quelle doit être l'annuité correspondant à un remboursement total de 127 168 697 fr. (*voir plus haut*).

Le remboursement des obligations revenant réellement à 492,777778, le taux d'intérêt semestriel est :

$$\frac{500 \times \overset{0,01}{\cancel{0,02}}}{\underset{246,388889}{\cancel{492,777778}}} = \frac{5}{246,388889} = 0,02019312.$$

Soit a'' l'*annuité cherchée,* A'' le *remboursement total,* et, r'' le *taux* que je viens de calculer,

$$a'' = \frac{A''r''\,(1+r'')^n}{(1+r'')^n - 1}$$

$$\text{Log } a'' = \text{Log } A'' + \text{Log } r'' + n \text{ Log } (1+r'') - \text{Log}\left[(1+r'')^n - 1\right]$$

$$= \text{Log } 127168697 + \text{Log } 0{,}02019312 - 146 \text{ Log } 1{,}02019312$$

$$- \text{Log}\left(\overline{1{,}02019312}^{146} - 1\right)$$

$$\text{Log}\,\overline{1{,}02019312}^{146} = 146\,\text{Log}\,1{,}02019312 = 146 \times 0{,}00868238912 = 1{,}26762881.$$

$$\overline{1{,}02019312}^{146} = 18{,}51948$$

$$\text{Log}\left(\overline{1{,}02019312}^{146} - 1\right) = \text{Log } 17{,}51948 = 1{,}2435212$$

$$\begin{array}{rl}
\text{Log } 127168697 = & 8{,}10438025 \\
\text{Log } 0{,}02019312 = & \bar{2}{,}30520339 \\
147 \text{ Log } 1{,}02019312 = & 1{,}26762881 \\
\hline
 & 7{,}67721245 \\
\text{Log}\left(\overline{1{,}02019312}^{146} - 1\right) = & 1{,}2435212 \\
\hline
\text{Log } a'' = & 6{,}43369125
\end{array}$$

a''. . . . . . . =	2714509 fr.
Plus le montant des lots.	235880
La demi-annuité semestrielle a'. . . . . =	2950389 fr.

Je calcule maintenant le taux d'intérêt effectif comme dans les problèmes précédents (n° 217, 3°) :

$$r'_1 = \frac{a'}{A'} = \frac{2950389}{116583300} = 0{,}02530713.$$

$$r'_2 = 0{,}02530713\left[1 - \frac{1}{\overline{1{,}02530713}^{146}}\right]$$

$$\text{Log}\,\frac{1}{\overline{1{,}02530713}^{146}} = \text{Log } 1 - 146 \text{ Log } 1{,}02530713$$

$$= 0 - 146 \times 0{,}010853976 = 0 - 1{,}58468050 = \bar{2}{,}41531950$$

$$\frac{1}{\overline{1{,}02530713}^{146}} = 0{,}02602073$$

$$1 - \frac{1}{1{,}02530713^{146}} = 1 - 0{,}02602073 = 0{,}97397927$$

$$r'_2 = 0{,}02530713 \times 0{,}97397927 = 0{,}02464862.$$

$$r'_3 = 0{,}02530713 \left[1 - \frac{1}{1{,}02464862^{146}} \right]$$

$$\text{Log} \frac{1}{1{,}02464862^{146}} = \text{Log } 1 - 146 \text{ Log } 1{,}02464862$$

$$= 0 - 146 \times 0{,}0105749563 = 0 - 1{,}54394362 = \bar{2}{,}45605638.$$

$$\frac{1}{1{,}02464862^{146}} = 0{,}02857962$$

$$1 - \frac{1}{1{,}02464862^{146}} = 1 - 0{,}02857962 = 0{,}97142038$$

$$r'_3 = 0{,}02530713 \times 0{,}97142038 = 0{,}02458386.$$

$$r'_4 = 0{,}02530713 \left[1 - \frac{1}{1{,}02458386^{146}} \right]$$

$$\text{Log} \frac{1}{1{,}02458386^{146}} = \text{Log } 1 - 146 \text{ Log } 1{,}02458386$$

$$= 0 - 146 \times 0{,}0105475066 = 0 - 1{,}53993596 = \bar{2}{,}46006404.$$

$$\frac{1}{1{,}02458386^{146}} = 0{,}02884457$$

$$1 - \frac{1}{1{,}02458386^{146}} = 1 - 0{,}02884457 = 0{,}97115643$$

$$r'_4 = 0{,}02530713 \times 0{,}97115643 = 0{,}02457718.$$

$$r'_5 = 0{,}02530713 \left[1 - \frac{1}{1{,}02457718^{146}} \right]$$

$$\text{Log} \frac{1}{1{,}02457718^{146}} = \text{Log } 1 - 146 \text{ Log } 1{,}02457718$$

$$= 0 - 146 \times 0{,}0105446771 = 0 - 1{,}53952286 = \bar{2}{,}46047714$$

$$\frac{1}{1{,}02457718^{146}} = 0{,}02887202$$

$$1 - \frac{1}{\overline{1,02457718}^{146}} = 1 - 0,02887202 = 0,97112798$$

$$r'_5 = 0,02530713 \times 0,97112798 = 0,02457646$$

On voit aisément, en comparant les valeurs successives de r', que la valeur suivante, r'_6, ne différerait de r'_5 que par les décimales qui suivent la 6[e].

J'ai donc, avec six décimales exactes :

$$r' = 0,024576.$$

Le taux d'intérêt effectif est, par an, de 4,9152 p. 100.

4° *Intérêt du premier semestre,* i_1.

$$i_1 = \mathrm{A}r = 129032500 \times 0,02 = 2\,580\,650 \text{ fr.}$$

5° *Amortissement du premier semestre,* α_1.

$$\alpha_1 = a - i_1 = 2732321 - 2580650 = 151\,671 \text{ fr.}$$

Le nombre des obligations amorties est :

$$\frac{151671}{500} = 303$$

dont 26 avec lots et 277 au pair.

Comme vérification (n° 220) :

$$\alpha_1 = \frac{a}{(1+r)^n} = \frac{2732321}{\overline{1,02}^{146}} = \frac{2732321}{18,01479} = 151\,671 \text{ fr.}$$

6° *Amortissement du dernier semestre,* α_n.

$$\alpha_n = \frac{a}{1+r} = \frac{2732321}{1,02} = 2\,678\,746 \text{ fr.}$$

Le nombre d'obligations amorties est :

$$\frac{2678746}{500} = 5357$$

dont 26 avec lots et 5 331 au pair.

Comme vérification (n° 220) :

$$\alpha_n = \alpha_1 (1+r)^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \text{Log } \alpha_n &= \text{Log } \alpha_1 + (n-1) \text{ Log } (1+r) = \text{Log } 151671 + 145 \text{ Log } 1,02 \\ &= 5,18090256 + 145 \times 0,0086002 = 5,18090256 + 1,2470290 \\ &= 6,42793156 \end{aligned}$$

$$\alpha_n = 2\,678\,746 \text{ fr.}$$

Remarque. — Le tableau d'amortissement, année par année, dressé par la Ville de Paris, présente des résultats un peu différents des précédents. Cela provient de ce que, au début de l'opération, les obligations non libérées ne recevant qu'un intérêt de 5 fr. par semestre, jusqu'à leur entière libération, l'annuité n'a pas été constante pendant les premiers semestres : par conséquent le tableau d'amortissement n'a pu être établi par la Ville d'une manière rigoureusement mathématique.

7° *Semestre moyen du remboursement, m* (n° 221).

$$i_{m+1} = \frac{i_1}{2} = \frac{2580650}{2} = 1\,290\,325 \text{ fr.}$$

$$\alpha_{m+1} = a - i_{m+1} = 2732321 - 1290325 = 1\,441\,996 \text{ fr.}$$

D'ailleurs

$$\alpha_{m+1} = \alpha_1 (1 + r)^m$$

d'où :

$$m = \frac{\text{Log } \alpha_{m+1} - \text{Log } \alpha_1}{\text{Log } (1 + r)} = \frac{\text{Log } 1441996 - \text{Log } 151671}{\text{Log } 1{,}02}$$

$$= \frac{6{,}15896409 - 5{,}18090256}{0{,}0086002} = \frac{0{,}97806153}{0{,}0086002} = 113{,}73.$$

$m = 114$ par excès.

Je vérifie ce résultat par la seconde méthode du n° 221 :

$$S_{114} = \frac{\alpha_1 \left[(1 + r)^{114} - 1\right]}{r}$$

$$\text{Log } S_{114} = \text{Log } \alpha_1 + \text{Log } \left[(1 + r)^{114} - 1\right] - \text{Log } r$$

$$= \text{Log } 151671 + \text{Log } \left(\overline{1{,}02}^{114} - 1\right) - \text{Log } 0{,}02.$$

$$\text{Log } \overline{1{,}02}^{114} = 114 \text{ Log } 1{,}02 = 114 \times 0{,}0086002 = 0{,}9804228$$

$$\overline{1{,}02}^{114} = 9{,}559228$$

$$\text{Log } \left(\overline{1{,}02}^{114} - 1\right) = \text{Log } 8{,}559228 = 0{,}9324346$$

$$\text{Log } 151671 = 5{,}18090256$$

$$6{,}11333716$$

$$\text{Log } 0{,}02 = \bar{2}{,}3010300$$

$$\text{Log } S_{114} = 7{,}81230716$$

$$S_{114} = 64\,909\,340 \text{ fr.}$$

c'est un peu plus que la moitié de l'emprunt qui est :

$$\frac{129032500}{2} = 64\,516\,250 \text{ fr.}$$

ce qui doit avoir lieu, puisque le nombre 114 est un peu trop fort.

L'amortissement du 114^e semestre est :

$$\alpha_{114} = \alpha_1 (1 + r)^{113}$$

$$\begin{aligned} \text{Log } \alpha_{114} &= \text{Log } \alpha_1 + 113 \text{ Log } (1 + r) = \text{Log } 151671 + 113 \text{ Log } 1{,}02 \\ &= 5{,}18090256 + 113 \times 0{,}0086002 = 5{,}18090256 + 0{,}9718226 \\ &= 6{,}15272516 \end{aligned}$$

$$\alpha_{114} = 1\,421\,429 \text{ fr.}$$

Le montant total des remboursements effectués avant le 114^e semestre est :

$$64909340 - 1421429 = 63\,487\,911 \text{ fr.}$$

un peu moins que la moitié de l'emprunt.

Par conséquent, le 114^e semestre est bien le semestre moyen du remboursement.

237. 2^e Problème :

Le Crédit foncier de France a fait, en 1885, un emprunt de un million d'obligations 3 p. 100 remboursables à 500 fr. en 95 ans.

Le prix d'émission a été fixé à 435 fr. payables comme suit :

20 fr. le 9 avril 1885.
20 fr. du 1er au 15 juin 1885.
50 fr. du 15 au 30 novembre 1885.
50 fr. du 15 au 31 mai 1886.
50 fr. du 15 au 30 novembre 1886.
50 fr. du 15 au 31 mai 1887.
50 fr. du 15 au 30 novembre 1887.
75 fr. du 15 au 31 mai 1888.
70 fr. du 15 au 30 septembre 1888.

Ces obligations participent chaque année les 5 janvier, 5 mars, 5 mai, 5 juillet, 5 septembre et 5 novembre à 6 tirages de lots de 200 000 fr. chacun, savoir :

1	obligation	remboursée à	100 000 fr.
1	—	—	25 000 fr.
6	—	—	5 000 fr.
45	—	—	1 000 fr.

Les tirages des 5 mai et 5 novembre comprennent, en plus, un certain nombre d'obligations remboursées au pair. Les remboursements avec ou sans lots s'effectuent le premier jour du mois qui suit le tirage, et les obligations remboursées ne reçoivent aucun intérêt sur le coupon courant.

Le premier tirage a lieu le 5 juillet 1885. Les coupons sont payés semestriellement le 1er avril et le 1er octobre de chaque année.

Calculer : 1° la demi-annuité, a ; 2° le montant réel de l'emprunt, A' ; 3° le taux effectif d'intérêt, r', y compris la prime de remboursement et la valeur des lots ; 4° l'intérêt du premier semestre, i_1 ; 5° l'amortissement du premier semestre, α_1 ; 6° l'amortissement du dernier semestre, α_n ; 7° le semestre moyen du remboursement, m.

Avant de résoudre ces diverses questions, il faut calculer exactement quel est le *prix de revient d'une obligation*, et à combien s'élève *le montant des remboursements semestriels*, y compris les lots.

Les intérêts se payant à la fin de chaque semestre, comme ils sont payés pour la première fois le 1er octobre 1885, je vais prendre comme point de départ de l'emprunt le 1er avril 1885, et voir ce que vaudrait à cette date la somme des versements exigés pour une obligation si elle était libérée en une fois, à cette époque.

Je prends comme taux d'intérêt celui de l'emprunt, 3 p. 100, et je suppose les versements effectués seulement le dernier jour de la période fixée pour chacun d'eux.

Au 1er avril 1885 :

Le versement du 9 avril 1885 est diminué de 8 jours d'intérêts, soit . . . . $\dfrac{20 \times 8 \times 3}{100 \times 360}$

Le versement du 15 juin 1885 est diminué de 74 jours d'intérêts, soit . . . . $\dfrac{20 \times 74 \times 3}{100 \times 360}$

Le versement du 30 novembre 1885 est diminué de 239 jours d'intérêts, soit. . . . . $\dfrac{50 \times 239 \times 3}{100 \times 360}$

Le versement du 31 mai 1886 est diminué de 419 jours d'intérêts, soit. . . . . $\dfrac{50 \times 419 \times 3}{100 \times 360}$

Le versement du 30 novembre 1886 est diminué de 599 jours d'intérêts, soit. . . . . $\dfrac{50 \times 599 \times 3}{100 \times 360}$

Le versement du 31 mai 1887 est diminué de 779 jours d'intérêts, soit. . . . . $\dfrac{50 \times 779 \times 3}{100 \times 360}$

Le versement du 30 novembre 1887 est diminué de 959 jours d'intérêts, soit. . . . . $\dfrac{50 \times 959 \times 3}{100 \times 360}$

Le versement du 31 mai 1888 est diminué de 1139 jours d'intérêts, soit. . . . . $\dfrac{75 \times 1139 \times 3}{100 \times 360}$

Le versement du 30 septembre 1888 est diminué de 1259 jours d'intérêts, soit . . . . $\dfrac{70 \times 1259 \times 3}{100 \times 360}$

Additionnant tous ces escomptes, j'obtiens :

$$\frac{3 \times \left[20(8+74)+50(239+419+599+779+959)+75\times1139+70\times1259\right]}{100 \times 360}$$

$$= \frac{20 \times 82 + 50 \times 2995 + 75 \times 1139 + 70 \times 1259}{100 \times 120}$$

$$= \frac{\overset{\overset{21663}{\cancel{64989}}}{\cancel{324945}}}{100 \times \underset{\underset{8}{\cancel{24}}}{\cancel{120}}} = 27{,}07875$$

Le prix d'émission d'une obligation ressort donc à

$$435 - 27{,}07875 = 407{,}92125.$$

Je vais calculer maintenant la *valeur exacte des remboursements* effectués pendant le premier semestre.

Le premier tirage ayant lieu le 5 juillet 1885, le premier semestre du remboursement comprend les tirages des 5 juillet, 5 septembre et 5 novembre ; je vais ramener la valeur des obligations qui y sont tirées à ce qu'elle serait le 1er octobre, date de l'échéance du premier coupon.

Je calcule les lots. Il faut d'abord en déduire le montant de l'obligation, 500 fr., puisque ce prix est contenu dans le lot.

Chaque tirage à lots donne donc :

$$\begin{array}{rrr}
1 \times & 99\,500 = & 99\,500 \\
1 \times & 24\,500 = & 24\,500 \\
6 \times & 4\,500 = & 27\,000 \\
45 \times & 500 = & 22\,500 \\
\hline
 & \text{En tout :} & 173\,500 \text{ fr.}
\end{array}$$

Je vais chercher la valeur exacte des trois remboursements à lots, au 1er décembre, époque du remboursement au pair.

Le premier remboursement se faisant le 1er août, le second, le 1er octobre, et le troisième, le 1er décembre, l'époque moyenne est le 1er octobre.

A cette date, le total des trois sommes de lots vaudra :

$$173\,500 \times 3 = 520\,500 \text{ fr.}$$

De plus, dans chacun de ces trois tirages est compris le remboursement de 53 obligations à 500 fr., que j'ai déduit plus haut du montant des lots, ce qui forme 26 500 fr. pour chacun d'eux, et 79 500 fr. pour les trois.

Ces 79 500 fr. sont payés, en moyenne, le 1er octobre : leur valeur au 1er décembre devra être plus forte de 2 mois d'intérêts, c'est-à-dire de :

$$\frac{79500 \times 2 \times 3}{12 \times 100} = 397 \text{ fr. } 50 \text{ c.}$$

Donc la valeur des lots est, au 1er décembre, de :

$$520\,500 + 397{,}50 = 520\,897 \text{ fr. } 50 \text{ c.}$$

Maintenant tous les remboursements étant ramenés au 1er décembre, il faut déduire du montant de l'obligation remboursée la portion acquise sur le coupon depuis le 1er octobre jusqu'au 1er décembre, c'est-à-dire pendant deux mois, ce qui fait 2 fr. 50 c.

Les raisonnements et les calculs étant absolument les mêmes pour les opérations comprises dans chaque semestre de l'emprunt, les obligations doivent donc être regardées comme remboursées réellement à

$$500 - 2{,}50 = 497 \text{ fr. } 50 \text{ c.}$$

et le remboursement total s'élève réellement à

$$497{,}50 \times 1000000 = 497\,500\,000 \text{ fr.}$$

En résumé, le Crédit foncier paye, par semestre, outre l'annuité que je vais calculer, des lots dont le montant s'élève à 520 897 fr. 50 c. et il rembourse en 190 semestres un capital de 497 500 000 fr.

J'emploierai ces divers résultats pour calculer le taux effectif de l'emprunt.

Pour le calcul des diverses quantités comprises dans les formules générales (n° 217), j'ai :

$$A = 1\,000\,000 \times 500 = 500\,000\,000 \text{ de fr.}$$
$$n = 95 \times 2 = 190$$
$$r = \frac{0{,}03}{2} = 0{,}015$$
$$c = 407 \text{ fr. } 92125.$$

1° *Demi-annuité, a.*

$$a = \frac{\mathrm{A}r\,(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

$$\operatorname{Log} a = \operatorname{Log} \mathrm{A} + \operatorname{Log} r + n \operatorname{Log}(1+r) - \operatorname{Log}\left[(1+r)^n - 1\right]$$
$$= \operatorname{Log} 500000000 + \operatorname{Log} 0{,}015 + 190 \operatorname{Log} 1{,}015 - \operatorname{Log}\left(\overline{1{,}015}^{190} - 1\right).$$

$$\operatorname{Log} \overline{1{,}015}^{190} = 190 \operatorname{Log} 1{,}015 = 190 \times 0{,}00646604 = 1{,}2285476$$
$$\overline{1{,}015}^{190} = 16{,}92574$$
$$\operatorname{Log}\left(\overline{1{,}015}^{190} - 1\right) = \operatorname{Log} 15{,}92574 = 1{,}2020996$$

$$\begin{array}{rl}
\operatorname{Log} 500000000 = & 8{,}6989700 \\
\operatorname{Log} 0{,}015 = & \bar{2}{,}1760913 \\
190 \operatorname{Log} 1{,}015 = & \underline{1{,}2285476} \\
 & 8{,}1036089 \\
\operatorname{Log}\left(\overline{1{,}015}^{190} - 1\right) = & \underline{1{,}2020996} \\
\operatorname{Log} a = & 6{,}9015093 \\
a = & 7\,970\,935 \text{ fr. } 50 \text{ c.}
\end{array}$$

2° *Montant réel de l'emprunt,* A'.

$$\mathrm{A}' = 407{,}92125 \times 1000000 = 407\,921\,250 \text{ fr.}$$

3° *Taux effectif de l'emprunt, r'.*

Je calcule d'abord quelle doit être l'annuité correspondant à un remboursement total de 497 500 000 fr. (voir plus haut, même numéro).

Les obligations étant remboursées à 497 fr. 50 c., le taux d'intérêt semestriel est :

$$\frac{500 \times 0{,}015}{497{,}50} = 0{,}01507538.$$

Soit a'' l'*annuité cherchée,* A'' le *remboursement total,* et r'' le *taux* que je viens de calculer :

$$a'' = \frac{A''r''\,(1+r'')^n}{(1+r'')^n - 1}$$

$$\text{Log } a'' = \text{Log } A'' + \text{Log } r'' + n \text{ Log } (1+r'') - \text{Log}\left[(1+r'')^n - 1\right]$$

$$= \text{Log } 497500000 + \text{Log } 0{,}015 + 190 \text{ Log } 1{,}01507538 - \text{Log}\left(\overline{1{,}01507538}^{190} - 1\right)$$

$$\text{Log } \overline{1{,}01507538}^{190} = 190 \text{ Log } 1{,}01507538 = 190 \times 0{,}00649829264 = 1{,}2346756$$

$$\overline{1{,}01507538}^{190} = 17{,}16626$$

$$\text{Log}\left(\overline{1{,}01507538}^{190} - 1\right) = \text{Log } 16{,}16626 = 1{,}20860957.$$

$$\begin{aligned}
\text{Log } 497500000 &= 8{,}6967931\\
\text{Log } 0{,}01507538 &= \bar{2}{,}17826824\\
190 \text{ Log } 1{,}01507538 &= 1{,}2346756\\
\hline
&\ 8{,}10973694\\
\text{Log}\left(\overline{1{,}01507538}^{190} - 1\right) &= 1{,}20860957\\
\hline
\text{Log } a'' &= 6{,}90112737
\end{aligned}$$

a''. . . . . $= 7\,963\,929^{f}00$

Plus le montant des lots . $=$ 522 897 50

La demi-annuité semes-
trielle a'. . . . . $= 8\,486\,826^{f}50$

Je calcule maintenant le taux d'intérêt effectif comme dans les problèmes précédents (n° 217-3°) :

$$r'_1 = \frac{a'}{A'} = \frac{8486826{,}50}{407921250} = 0{,}02080506.$$

$$r'_2 = 0{,}02080506\left[1 - \frac{1}{\overline{1{,}02080506}^{190}}\right]$$

$$\text{Log } \frac{1}{\overline{1{,}02080506}^{190}} = \text{Log } 1 - 190 \text{ Log } 1{,}02080506 = 0 - 190 \times 0{,}0089430456$$

$$= 0 - 1{,}69917866 = \bar{2}{,}30082134$$

$$\frac{1}{\overline{1{,}02080506}^{190}} = 0{,}01999039$$

$$1 - \frac{1}{\overline{1{,}02080506}^{190}} = 1 - 0{,}01999039 = 0{,}98000961$$

$$r'_2 = 0{,}02080506 \times 0{,}98000961 = 0{,}02038916.$$

$$r'_3 = 0{,}02080506 \left[1 - \frac{1}{1{,}02038916^{190}} \right]$$

$$\operatorname{Log} \frac{1}{1{,}02038916^{190}} = \operatorname{Log} 1 - 190 \operatorname{Log} 1{,}02038916 = 0 - 190 \times 0{,}008765833$$

$$= 0 - 1{,}66550827 = \bar{2}{,}33449173$$

$$\frac{1}{1{,}02038916^{190}} = 0{,}02160189$$

$$1 - \frac{1}{1{,}03038916^{190}} = 1 - 0{,}02160189 = 0{,}97839811$$

$$r'_3 = 0{,}02080506 \times 0{,}97839811 = 0{,}02035563.$$

$$r'_4 = 0{,}02080506 \left[1 - \frac{1}{1{,}02035563^{190}} \right]$$

$$\operatorname{Log} \frac{1}{1{,}02035563^{190}} = \operatorname{Log} 1 - 190 \operatorname{Log} 1{,}02035563 = 0 - 190 \times 0{,}0087515684$$

$$= 0 - 1{,}66279799 = \bar{2}{,}33720201$$

$$\frac{1}{1{,}02035563^{190}} = 0{,}02173712$$

$$1 - \frac{1}{1{,}02035563^{190}} = 1 - 0{,}02173712 = 0{,}97826288$$

$$r'_4 = 0{,}02080506 \times 0{,}97826288 = 0{,}02035282.$$

$$r'_5 = 0{,}02080506 \left[1 - \frac{1}{1{,}02035282^{190}} \right]$$

$$\operatorname{Log} \frac{1}{1{,}02035282^{190}} = \operatorname{Log} 1 - 190 \operatorname{Log} 1{,}02035282 = 0 - 190 \times 0{,}0087503713$$

$$= 0 - 1{,}66257055 = \bar{2}{,}33742945$$

$$\frac{1}{1{,}02035282^{190}} = 0{,}02174850$$

$$1 - \frac{1}{1{,}02035282^{190}} = 1 - 0{,}02174850 = 0{,}97825150$$

$$r'_5 = 0{,}02080506 \times 0{,}97825150 = 0{,}02035258.$$

J'ai donc, avec cinq décimales exactes :

$$r' = 0{,}02035.$$

Le taux d'intérêt effectif est, par an, de 4,070 p. 100.

4° *Intérêt du premier semestre,* i_1.

$$i_1 = Ar = 500000000 \times 0{,}015 = 7\,500\,000 \text{ fr.}$$

5° *Amortissement du premier semestre,* α_1.

$$\alpha_1 = a - i_1 = 7970935{,}50 - 7500000 = 470\,935 \text{ fr. } 50 \text{ c.}$$

Le nombre des obligations amorties est :

$$\frac{470935{,}50}{500} = 942$$

dont 159 avec lots et 783 au pair.

Comme vérification (n° 220) :

$$\alpha_1 = \frac{a}{(1+r)^n} = \frac{7970935{,}50}{\overline{1{,}015}^{190}} = \frac{7970935{,}50}{16{,}92574} = 470\,935 \text{ fr. } 70 \text{ c.}$$

6° *Amortissement du dernier semestre,* α_n.

$$\alpha_n = \frac{a}{1+r} = \frac{7970935{,}50}{1{,}015} = 7\,853\,138 \text{ fr.}$$

Le nombre des obligations amorties est :

$$\frac{7853138}{500} = 15\,706$$

dont 159 avec lots et 15547 au pair.

Comme vérification (n° 220) :

$$\alpha_n = \alpha_1 (1+r)^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \text{Log}\,\alpha_n &= \text{Log}\,\alpha_1 + (n-1)\,\text{Log}\,(1+r) = \text{Log}\,470935{,}70 + 189 \text{ Log } 1{,}015 \\ &= 5{,}67296164 + 189 \times 0{,}00646604 = 5{,}67296164 + 1{,}22208156 \\ &= 6{,}89504320. \end{aligned}$$

$$\alpha_n = 7\,853\,138 \text{ fr.}$$

7° *Semestre moyen du remboursement,* m (n° 221).

$$i_{m+1} = \frac{i_1}{2} = \frac{7500000}{2} = 3\,750\,000 \text{ fr.}$$

$$\alpha_{m+1} = a - i_{m+1} = 7970935{,}50 - 3750000 = 4\,220\,935 \text{ fr. } 50 \text{ c.}$$

D'ailleurs :

$$m = \frac{\text{Log } \alpha_{m+1} - \text{Log } \alpha_1}{\text{Log } (1+r)} = \frac{\text{Log } 4220935{,}50 - \text{Log } 470935{,}50}{\text{Log } 1{,}015}$$

$$= \frac{6{,}62540876 - 5{,}67296146}{0{,}00646604} = \frac{0{,}9524470}{0{,}00646604} = 147{,}29$$

$m = 147$ par défaut.

Je vérifie ce résultat par la seconde méthode du n° 221.

$$S_{147} = \frac{\alpha_1 \left[(1+r)^{147} - 1\right]}{r}$$

$$\text{Log } S_{147} = \text{Log } \alpha_1 + \text{Log } \left[(1+r)^{147} - 1\right] - \text{Log } r$$

$$= \text{Log } 470935{,}50 + \text{Log } \left(\overline{1{,}015}^{147} - 1\right) - \text{Log } 0{,}015$$

$$\text{Log } \overline{1{,}015}^{147} = 147 \text{ Log } 1{,}015 = 147 \times 0{,}00646604 = 0{,}95050788$$

$$\overline{1{,}015}^{147} = 8{,}922938$$

$$\text{Log } \left(\overline{1{,}015}^{147} - 1\right) = \text{Log } 7{,}922938 = 0{,}8988863$$

$$\text{Log } 470935{,}50 = 5{,}67296146$$

$$6{,}57184776$$

$$\text{Log } 0{,}015 = \bar{2}{,}1760913$$

$$\text{Log } S_{147} = 8{,}39575646$$

$$S_{147} = 248\,746\,200 \text{ fr.}$$

un peu moins que la moitié de l'emprunt qui est :

$$\frac{500000000}{2} = 250\,000\,000 \text{ fr.}$$

ce qui doit avoir lieu, puisque le nombre 147 est un peu trop faible.

L'amortissement du 148^e semestre est :

$$\alpha_{148} = \alpha_1 (1+r)^{147} = 470935{,}50 \times \overline{1{,}015}^{147} = 470935{,}50 \times 8{,}922938$$
$$= 4\,202\,128 \text{ fr.}$$

Le montant total des remboursements effectués après le 148^e semestre est égal à :

$$248746200 + 4202128 = 252\,948\,328 \text{ fr.}$$

un peu plus que la moitié de l'emprunt.

Par conséquent le 147^e semestre est bien le semestre moyen du remboursement.

238. Dans cet emprunt, le Crédit foncier a opéré, pour l'amortissement des obligations, d'une manière un peu différente de celle que je viens de développer, et voici pourquoi.

Le montant de cet emprunt devant être employé à faire des prêts à des particuliers, le Crédit foncier ne peut rembourser ses obligataires qu'avec l'argent qu'il reçoit de ses emprunteurs. Or, comme ceux-ci paient un intérêt qui est en moyenne de 4,85 p. 100, leurs remboursements s'effectuent plus lentement que ceux de l'emprunt, calculés, ainsi que je viens de le faire, avec un taux d'intérêt de 3 p. 100. Il est évident, en effet, que plus l'intérêt à payer est considérable, moins le remboursement du capital est rapide.

Par conséquent, pour ne pas éprouver d'embarras financiers par l'amortissement de son emprunt, le Crédit foncier a établi cet amortissement sur un taux de 4,30 p. 100 par an, ou de 2,15 p. 100 par semestre. Ce taux est un peu inférieur à celui des prêts qu'il fait; mais il a pensé que les remboursements anticipés qui seraient effectués par quelques-uns de ses emprunteurs suffiraient à lui compléter les fonds nécessaires pour l'amortissement de ses obligations.

Je vais reprendre les calculs précédents avec le taux de 2,15 p. 100 par semestre ; les résultats trouvés ainsi seront conformes à ceux que présente le Crédit foncier.

1° *Demi-annuité, a.*

$$a = \frac{Ar\,(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

$$\text{Log}\, a = \text{Log A} + \text{Log}\, r + n\,\text{Log}\,(1+r) - \text{Log}\left[(1+r)^n - 1\right]$$

$$= \text{Log}\,500000000 + \text{Log}\,0{,}0215 + 190\,\text{Log}\,1{,}0215 - \text{Log}\left(\overline{1{,}0215}^{190} - 1\right)$$

$$\text{Log}\,\overline{1{,}0215}^{190} = 190\ \text{Log}\ 1{,}0215 = 190 \times 0{,}00923837 = 1{,}7552903$$

$$\overline{1{,}0215}^{190} = 56{,}92333$$

$$\text{Log}\left(\overline{1{,}0215}^{190} - 1\right) = \text{Log}\ 55{,}92333 = 1{,}74759304$$

$$\begin{aligned}
\text{Log}\ 500000000 &= 8{,}6989700\\
\text{Log}\ 0{,}0215 &= \bar{2}{,}3324385\\
190\ \text{Log}\ 1{,}0215 &= 1{,}7552903\\
&\overline{8{,}7866988}\\
\text{Log}\left(\overline{1{,}0215}^{190} - 1\right) &= 1{,}74759304\\
\text{Log}\ a &= 7{,}03910576
\end{aligned}$$

$$a = 10\,942\,230\ \text{fr.}$$

2° *Intérêt du premier semestre*, i_1.

$$i_1 = Ar = 500000000 \times 0{,}0215 = 10\,750\,000 \text{ fr.}$$

3° *Amortissement du premier semestre*, α_1.

$$a_1 = a - i_1 = 10942230 - 10750000 = 192\,230 \text{ fr.}$$

Le nombre d'obligations amorties est :

$$\frac{192230}{500} = 384$$

dont 159 avec lots et 225 au pair.

Comme vérification (n° 220) :

$$\alpha_1 = \frac{a}{(1+r)^n} = \frac{10942230}{\overline{1{,}0215}^{190}} = \frac{10942230}{56{,}92333} = 192\,227 \text{ fr. } 50 \text{ c.}$$

4° *Amortissement du dernier semestre*, α_n.

$$\alpha_n = \frac{a}{1+r} = \frac{10942230}{1{,}0215} = 10\,711\,924 \text{ fr.}$$

Le nombre d'obligations amorties est :

$$\frac{10711924}{500} = 21424$$

dont 159 avec lots et 21 265 au pair.

Comme vérification (n° 220) :

$$\alpha_n = \alpha_1 (1+r)^{n-1}$$

$$\text{Log } \alpha_n = \text{Log } \alpha_1 + (n-1) \text{ Log } (1+r) = \text{Log } 192227{,}50 + 189 \text{ Log } 1{,}0215$$
$$= 5{,}28381555 + 1{,}74605193 = 7{,}02986748$$
$$\alpha_n = 10\,711\,924 \text{ fr.}$$

5° *Semestre moyen du remboursement*, m (n° 221).

$$i_{m+1} = \frac{i_1}{2} = \frac{10750000}{2} = 5\,375\,000 \text{ fr.}$$

$$\alpha_{m+1} = a - i_{m+1} = 10942230 - 5375000 = 5\,567\,230 \text{ fr.}$$

D'ailleurs :

$$m = \frac{\text{Log } \alpha_{m+1} - \text{Log } \alpha_1}{\text{Log } (1+r)} = \frac{\text{Log } 5567230 - \text{Log } 192227{,}50}{\text{Log } 1{,}0215}$$
$$= \frac{6{,}74563914 - 5{,}28381555}{0{,}00923837} = \frac{1{,}46182359}{0{,}00923837} = 158{,}23$$

$m = 158$ par défaut.

Je vérifie ce résultat par la seconde méthode du n° 221.

$$S_{158} = \frac{\alpha_1 \left[(1+r)^{158} - 1\right]}{r}$$

$$\text{Log } S_{158} = \text{Log } \alpha_1 + \text{Log } \left[(1+r)^{158} - 1\right] - \text{Log } r$$

$$= \text{Log } 192227{,}50 + \text{Log } \left(\overline{1{,}0215}^{158} - 1\right) - \text{Log } 0{,}0215$$

$$\text{Log } \overline{1{,}0215}^{158} = 158 \text{ Log } 1{,}0215 = 158 \times 0{,}00923837 = 1{,}45966246$$

$$\overline{1{,}0215}^{158} = 28{,}81791$$

$$\text{Log } \left(\overline{1{,}0215}^{158} - 1\right) = \text{Log } 27{,}81791 = 1{,}4443245$$

$$\text{Log } 192227{,}50 = 5{,}2838155$$

$$6{,}72814005$$

$$\text{Log } 0{,}0215 = \bar{2}{,}3324385$$

$$\text{Log } S_{158} = 8{,}39570155$$

$$S_{158} = 248\,714\,770 \text{ fr.}$$

un peu moins que la moitié de l'emprunt, 250000000 fr., ce qui doit avoir lieu puisque le nombre 158 est trop faible.

L'amortissement du 159^e^ semestre est :

$$\alpha_{159} = \alpha_1 (1+r)^{158} = 192227{,}50 \times \overline{1{,}0215}^{158}$$

$$= 192227{,}50 \times 28{,}81791 = 5\,539\,595 \text{ fr.}$$

Le montant total des remboursements effectués après le 159^e^ semestre est égal à :

$$248714770 + 5539595 = 254\,254\,365 \text{ fr.}$$

un peu plus que la moitié de l'emprunt.

Par conséquent le 158^e^ semestre est bien le semestre moyen du remboursement.

Remarque. — En comparant ce résultat avec celui trouvé précédemment (6°) quand le taux d'intérêt semestriel est 0,015, on voit combien le remboursement au taux de 0,0215 s'effectue plus lentement, puisqu'avec ce dernier il faut 11 semestres de plus qu'avec l'autre pour arriver au semestre moyen du remboursement.

4e Section. — 3 p. 100 amortissable.

239. En 1878, M. Léon Say, alors ministre des finances, ayant, dans l'établissement de son budget, à couvrir les dépenses nécessitées par des constructions de chemins de fer, imagina un mode nouveau d'emprunt.

Au lieu d'avoir recours, comme ses prédécesseurs, au Grand-Livre de la Dette perpétuelle, il voulut que l'amortissement de l'emprunt qu'il offrait au public fût établi sur des bases immuables, fixées par le calcul, et terminé dans 75 ans.

Il émit donc, au cours de 80 fr., des coupures de 15 fr. de rente 3 p. 100, remboursables à 500 fr., par voie de tirage au sort, en 75 ans, de 1879 à 1953. Le montant nominal de cet emprunt était de 549 850 000 fr.

Jusque-là, l'opération ne différait pas de celles que les Compagnies de chemins de fer avaient faites bien souvent. Mais voici où se trouve l'innovation due à M. Léon Say.

Au lieu de diviser son emprunt en 1 099 700 obligations de 500 fr. chacune, il le divisa en 175 séries seulement, représentant chacune un capital nominal de 3 142 000 fr.

Ces séries ont servi, pour ainsi dire, d'unités pour le calcul de l'amortissement : pendant chacune des 29 premières années on en rembourse une ; pendant chacune des 18 suivantes, on en rembourse 2 ; pendant chacune des 13 suivantes, 3 ; et ainsi de suite jusqu'au parfait remboursement qui se fera à la fin de la 75e année.

Il est bien évident que chacune de ces unités représentant une somme considérable, le calcul de l'amortissement ne peut pas se faire avec la régularité que j'ai montrée dans les tableaux précédents (nos 224, 231 et 232). Dans le dernier, l'unité choisie valant 312 fr. 50 c., les écarts entre les annuités successives et l'annuité moyenne, 434 605 fr. 65 c., ne dépassent guère la moitié de 312 fr. 50 c., c'est-à-dire 156 fr. 25 c.

Dans l'emprunt de 1878, au contraire, l'unité choisie valant 3 142 000 fr., les annuités successives présentent avec l'annuité moyenne des différences qui atteignent et même parfois dépassent la moitié de 3 142 000 fr., c'est-à-dire 1 571 000 fr.

Dans ces conditions, les méthodes que j'ai employées plus haut pour calculer soit le taux effectif d'intérêt, soit le taux d'intérêt moyen que reçoit le porteur d'un titre, ne peuvent s'appliquer au 3 p. 100 amortissable.

Il faut ici faire usage de méthodes spéciales que je développerai plus loin.

Auparavant je vais faire connaître, pour chaque emprunt, le *montant nominal*, le *montant réel*, le *cours d'émission*, le *chiffre des rentes inscrites*, le *capital représenté par chaque série*, et le *tableau de l'amortissement.*

240. Pour les diverses émissions du 3 p. 100 amortissable, tous les remboursements se terminent en 1953, bien qu'ils commencent à des époques différentes. Chaque emprunt est divisé en autant de séries que la durée de son amortissement comprend d'années, plus 100. Par exemple, celui de 1878, qui est remboursé en 75 ans, contient 175 séries ; celui de 1881, qui est remboursé en 72 ans, en contient 172 ; et ainsi de suite pour les autres, de telle sorte que dans n'importe quelle année, il reste pour chaque emprunt le même nombre de séries à amortir.

Ainsi, de 1878 à 1884, il y a eu quatre emprunts émis : en 1887, il reste dans chacun d'eux 167 séries à rembourser. De cette manière, ces diverses émissions se confondent à la Bourse en une seule et même valeur.

241. *Emprunt de 1878, remboursable en 75 ans — de 1879 à 1953.*

Capital nominal : 549 850 000 fr. divisé en 175 séries.

Capital réel : 439 878 547 fr.

Rentes inscrites : 16 495 500 fr. (jouissance du 16 juillet 1878) émises au cours moyen de 80.

Amortissement.

(*Journal officiel* du 5 novembre 1878, page 10 176.)

De 1879 à 1907.	Par an,	1	série formant	3 142 000 fr.	pendant	29	ans,	29	séries formant	91 118 000 fr.
De 1908 à 1925.	—	2	—	6 284 000	—	18	—	36	—	113 112 000
De 1926 à 1938.	—	3	—	9 426 000	—	13	—	39	—	122 538 000
De 1939 à 1945.	—	4	—	12 568 000	—	7	—	28	—	87 976 000
De 1946 à 1950.	—	5	—	15 710 000	—	5	—	25	—	78 550 000
De 1951 à 1953.	—	6	—	18 852 000	—	3	—	18	—	56 556 000
						75	—	175	—	549 850 000

242. *Emprunt de 1881 remboursable en 72 ans — de 1882 à 1953.*

Capital nominal : 1 201 162 000 fr. divisé en 172 séries.

Capital réel : 999 967 365 fr.

Rentes inscrites : 36 034 860 fr. (jouissance du 16 avril 1881) émises au cours moyen de 83,25.

Amortissement.

(*Journal officiel* du 3 mars 1882, page 1179.)

De 1882 à 1907.	Par an,	1 série	formant	6 983 500 fr.	pendant	26 ans,	26 séries	formant	181 571 000 fr.
De 1908 à 1925.	—	2	—	13 967 000	—	18	— 36	—	251 406 000
De 1926 à 1938.	—	3	—	20 950 500	—	13	— 39	—	272 356 500
De 1939 à 1945.	—	4	—	27 934 000	—	7	— 28	—	195 538 000
De 1946 à 1950.	—	5	—	34 917 500	—	5	— 25	—	174 587 500
De 1951 à 1953.	—	6	—	41 901 000	—	3	— 18	—	125 703 000
						72	— 172	—	1 201 162 000 fr.

243. *Emprunt de 1883 remboursable en 70 ans — de 1884 à 1953.*

Capital nominal : 1 348 780 000 fr. divisé en 170 séries.

Capital réel : 1 085 992 641 fr. 69 c.

Rentes inscrites : 40 463 400 fr. { 37 487 550 fr. (jouissance du 16 janvier 1883) émises au cours moyen de 80,50.
2 975 850 fr. (jouissance du 16 avril 1883) émises au cours moyen de 80,675.

Amortissement.

(*Journal officiel* du 7 février 1884, page 676.)

De 1884 à 1907.	Par an,	1 série	formant	7 934 000 fr.	pendant	24 ans,	24 séries	formant	190 416 000 fr.
De 1908 à 1925.	—	2	—	15 868 000	—	18	— 36	—	285 624 000
De 1926 à 1938.	—	3	—	23 802 000	—	13	— 39	—	309 426 000
De 1939 à 1945.	—	4	—	31 736 000	—	7	— 28	—	222 152 000
De 1946 à 1950.	—	5	—	39 670 000	—	5	— 25	—	198 350 000
De 1951 à 1953.	—	6	—	47 604 000	—	3	— 18	—	142 812 000
						70	— 170	—	1 348 780 000 fr.

244. En 1884, il y a eu un emprunt divisé en deux parties bien distinctes : l'une dont le remboursement a commencé en 1884, l'autre dont le remboursement a commencé en 1885. Dans le *Journal officiel*, ces deux parties sont réunies; dans ce résumé, j'aime mieux les séparer pour lui donner plus de clarté.

Emprunt de 1884 (1re partie) remboursable en 70 ans — de 1884 à 1953.

Capital nominal : 444 125 000 fr. divisé en 170 séries.

Capital réel : 354 772 067 fr. 44 c.

Rentes inscrites : 13 323 750 fr. (jouissance du 16 janvier 1884) émises au cours moyen de 79,88.

Amortissement.

(*Journal officiel* du 27 janvier 1885, page 491.)

De 1884 à 1907.	Par an,	1	série formant	2 612 500 fr.	pendant	24	ans,	24	séries formant	62 700 000 fr.
De 1908 à 1925.	—	2	—	5 225 000	—	18	—	36	—	94 050 000
De 1926 à 1938.	—	3	—	7 837 500	—	13	—	39	—	101 887 500
De 1939 à 1945.	—	4	—	10 450 500	—	7	—	28	—	73 150 000
De 1946 à 1950.	—	5	—	13 062 500	—	5	—	25	—	65 312 500
De 1951 à 1953.	—	6	—	15 675 000	—	3	—	18	—	47 025 000
						70	—	170	—	444 125 000 fr.

245. *Emprunt de 1884 (2e partie) remboursable en 69 ans — de 1885 à 1953.*

Capital nominal : 526 773 000 fr. divisé en 169 séries.

Capital réel : 403 970 265 fr. 32 c.

Rentes inscrites : 15 803 190 fr. (jouissance du 16 avril 1884) émises au cours moyen de 76,687.

Amortissement.

(*Journal officiel* du 27 janvier 1885, page 491.)

De 1884 à 1907.	Par an,	1	série formant	3 117 000 fr.	pendant	23	ans,	23	séries formant	71 691 000 fr
De 1908 à 1925.	—	2	—	6 234 000	—	18	—	36	—	112 212 000
De 1926 à 1938.	—	3	—	9 351 000	—	13	—	39	—	121 563 000
De 1939 à 1945.	—	4	—	12 468 000	—	7	—	28	—	87 276 000
De 1946 à 1950.	—	5	—	15 585 000	—	5	—	25	—	77 925 000
De 1951 à 1953.	—	6	—	18 702 000	—	3	—	18	—	56 106 000
						69	—	169	—	526 773 000 fr.

246. *Total des émissions du 3 p. 100 amortissable.*

DATE des emprunts.	CAPITAL nominal.	CAPITAL réel.	RENTES inscrites.
Emprunt de 1878.	549 850 000f	439 878 547f 00	16 495 500f
— de 1881.	1 201 162 000	999 967 365 00	36 034 860
— de 1883.	1 348 780 000	1 085 992 641 69	40 463 400
— de 1884 (1re pie) .	444 125 000	354 772 067 44	13 323 750
— de 1884 (2e pie) .	526 773 000	403 970 265 32	15 803 190
TOTAUX.	4 070 690 000f	3 284 580 884f 45	122 120 700f

Je vais chercher maintenant, pour l'un de ces emprunts, le taux effectif d'intérêt auquel il revient à l'emprunteur et le taux d'intérêt moyen que reçoit le porteur d'un titre.

Je ferai ces calculs pour l'emprunt de 1878.

247[1]. *Taux effectif d'intérêt* ou taux d'intérêt que reçoit le porteur d'un titre égal de rente (15 fr. par exemple) dans chaque série.

Je suppose une personne achetant à l'émission un titre de rente de 15 fr. dans chacune des 175 séries qui composent l'emprunt. Le taux d'intérêt auquel elle place son capital est le même que celui que paie l'emprunteur puisque les séries sont d'égale valeur et que le porteur des divers titres de 15 fr. reçoit un remboursement égal dans chacune d'elles.

Je vais chercher ce que vaut, à l'émission, le total des primes de remboursement dans toutes ces séries et le taux d'intérêt qui en résulte.

Pour simplifier le calcul, je supposerai chaque titre de 3 fr. de rente.

Je peux considérer l'ensemble de ces séries comme composé de :

1°	29+18+13+7+5+3 ou 75	séries	remboursables	depuis	1879	jusqu'à	1953
2°	18+13+7+5+3 ou 46	—	—	—	1908	—	1953
3°	13+7+5+3 ou 28	—	—	—	1926	—	1953
4°	7+5+3 ou 15	—	—	—	1939	—	1953
5°	5+3 ou 8	—	—	—	1946	—	1953
6°	3	—	—	—	1951	—	1953
	Total. . . . 175 séries.						

Calculons ce que vaut à la fin (1953) le total des primes de remboursement dans chacun de ces six groupes.

Soit p cette prime (pour l'emprunt de 1878 émis à 80, cette prime $p = 20$), r' l'intérêt de 1 fr. par trimestre.

Pour le premier groupe :

La 1re prime p est remboursée 74 ans ou 4×74 trimestres avant la fin. Elle vaudra à la fin. . . . . $p\,(1+r')^{4 \times 74}$

La 2e prime p est remboursée 73 ans ou 4×73 trimestres avant la fin. Elle vaudra à la fin. . . . . $p\,(1+r')^{4 \times 73}$

. . . .

. . . .

La 75e prime p est remboursée à la fin de l'emprunt. Elle vaudra à la fin . . . . p

1. La formule que je vais calculer a été donnée dans la *Revue économique et financière,* numéro du 4 avril 1885. Elle est due à M. Vintéjoux, professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis.

Ces termes forment une progression géométrique dans laquelle le premier terme

$$a = p$$

le dernier terme

$$l = p\,(1 + r')^{4 \times 74}$$

et la raison

$$q = (1 + r')^4$$

Donc en appliquant la formule (n° 176)

$$S = \frac{lq - a}{q - 1}$$

j'aurai, pour la somme des termes du premier groupe :

$$S_1 = \frac{p\,(1 + r')^{4 \times 74}\,(1 + r')^4 - p}{(1 + r')^4 - 1} = \frac{p\,(1 + r')^{4 \times 74 + 4} - p}{(1 + r')^4 - 1}$$

$$S_1 = \frac{p\,(1 + r')^{4(74+1)} - p}{(1 + r')^4 - 1} = \frac{p\left[(1 + r')^{4 \times 75} - 1\right]}{(1 + r')^4 - 1}$$

Pour le deuxième groupe :

La 1re prime p est remboursée 45 ans ou 4×45 trimestres avant la fin. Elle vaudra à la fin. . . . . $p\,(1 + r')^{4 \times 45}$

La 2e prime p est remboursée 44 ans ou 4×43 trimestres avant la fin. Elle vaudra à la fin. . . . . $p\,(1 + r')^{4 \times 44}$

. . . .

. . . .

La 46e prime p est remboursée à la fin de l'emprunt. Elle vaudra à la fin. . . . . p

La somme de ces termes est :

$$S_2 = \frac{p\,(1 + r')^{4 \times 45}\,(1 + r')^4 - p}{(1 + r')^4 - 1} = \frac{p\left[(1 + r')^{4 \times 46} - 1\right]}{(1 + r')^4 - 1}.$$

Pour le troisième groupe :

La 1re prime p est remboursée 27 ans ou 4×27 trimestres avant la fin. Elle vaudra à la fin. . . . . $p\,(1 + r')^{4 \times 27}$

. . . .

. . . .

La 28e prime p est remboursée à la fin de l'emprunt. Elle vaudra à la fin . . . . p

$$S_3 = \frac{p\,(1 + r')^{4 \times 27}\,(1 + r')^4 - p}{(1 \times r')^4 - 1} = \frac{p\left[(1 + r')^{4 \times 28} - 1\right]}{(1 + r')^4 - 1}$$

Pour le quatrième groupe :

La 1^re^ prime p est remboursée 14 ans ou 4×14 trimestres avant la fin. Elle vaudra à la fin. . . . . $p(1+r')^{4 \times 14}$

. . . .

. . . .

La 15^e^ prime p est remboursée à la fin de l'emprunt. Elle vaudra à la fin . . . . p

$$S_4 = \frac{p(1+r')^{4 \times 14}(1+r')^4 - p}{(1+r')^4 - 1} = \frac{p\left[(1+r')^{4 \times 15} - 1\right]}{(1+r')^4 - 1}$$

Pour le cinquième groupe :

La 1^re^ prime p est remboursée 7 ans ou 4×7 trimestres avant la fin. Elle vaudra à la fin . . . . $p(1+r')^{4 \times 7}$

. . . .

. . . .

La 8^e^ prime p est remboursée à la fin de l'emprunt. Elle vaudra à la fin . . . . p

$$S_5 = \frac{p(1+r')^{4 \times 7}(1+r')^4 - p}{(1+r')^4 - 1} = \frac{p\left[(1+r')^{4 \times 8} - 1\right]}{(1+r')^4 - 1}$$

Pour le sixième groupe :

La 1^re^ prime p est remboursée 2 ans ou 4×2 trimestres avant la fin. Elle vaudra à la fin . . . . $p(1+r')^{4 \times 2}$

. . . .

. . . .

La 3^e^ prime p est remboursée à la fin de l'emprunt. Elle vaudra à la fin . . . . p

$$S_6 = \frac{p(1+r')^{4 \times 2}(1+r')^4 - p}{(1+r')^4 - 1} = \frac{p\left[(1+r')^{4 \times 3} - 1\right]}{(1+r')^4 - 1}$$

Le total de ces six sommes donnera la valeur des 175 primes de remboursement à la fin de l'emprunt.

Cette valeur, au moment de l'émission, sera égale à ce total divisé par :

$$(1+r')^{4 \times 75}$$ (Voir n° 194-2°).

et pour un seul titre elle sera la 175^e^ partie de cette expression, c'est-à-dire :

$$= \frac{\frac{p[(1+r')^{4\times75}-1]}{(1+r')^4-1}+\frac{p[(1+r')^{4\times46}-1]}{(1+r')^4-1}+\frac{p[(1+r')^{4\times28}-1]}{(1+r')^4-1}+\frac{p[(1+r')^{4\times15}-1]}{(1+r')^4-1}+\frac{p[(1+r')^{4\times8}-1]}{(1+r')^4-1}+\frac{p[(1+r')^{4\times3}-1]}{(1+r')^4-1}}{175\,(1+r')^{4\times75}}$$

$$p = \frac{p\left[1+r')^{4\times75}+(1+r')^{4\times46}+(1+r')^{4\times28}+(1+r')^{4\times15}+(1+r')^{4\times8}+(1+r')^{4\times3}-6\right]}{175\,(1+r')^{4\times75}\left[(1+r')^4-1\right]}$$

Il s'agit d'abord d'obtenir r' en faisant

$$p = 20.$$

Les intérêts étant de 75 cent. par trimestre par titre de 3 fr. de rente, et le prix d'émission étant de 80, le taux d'intérêt trimestriel est égal à :

$$\frac{0,75\times100}{80}=\frac{15}{16}=0,9375$$

Donc :

$$r' = 0,009375$$

Je calcule maintenant la grande parenthèse (que j'appelle Σ) du numérateur.

$$\text{Log}\,(1+r') = \text{Log}\,1,009375 = 0,004052545.$$

$\text{Log}(1+r')^{4\times75}=300\times0,004052545=1,21576350,\ (1+r')^{4\times75}=16,434765$
$\text{Log}(1+r')^{4\times46}=184\times0,004052545=0,74566828,\ (1+r')^{4\times46}=\ 5,567604$
$\text{Log}(1+r')^{4\times28}=112\times0,004052545=0,45388504,\ (1+r')^{4\times28}=\ 2,843708$
$\text{Log}(1+r')^{4\times15}=\ 60\times0,004052545=0,24315270,\ (1+r')^{4\times15}=\ 1,750462$
$\text{Log}(1+r')^{4\times\ 8}=\ 32\times0,004052545=0,12968144,\ (1+r')^{4\times\ 8}=\ 1,347974$
$\text{Log}(1+r')^{4\times\ 3}=\ 12\times0,004052545=0,04863054,\ (1+r')^{4\times\ 3}=\ 1,118486$

Total. 29,062999
Moins. 6

$\Sigma =$ 23,062999

D'ailleurs :

$$\text{Log}\,(1+r')^4 = 4\times0,00405245 = 0,01621018$$
$$(1+r')^4 = 1,0380065$$
$$(1+r')^4 - 1 = 0,0380065$$

De la formule de p' donnée plus haut, on tire :

$$\text{Log}\, p' = \text{Log}\, p + \text{Log}\, \Sigma - \left[\text{Log}\, 175 + \text{Log}(1+r')^{4\times 75} + \text{Log}\left[(1+r')^4 - 1\right]\right]$$

$$\begin{array}{rl}
\text{Log}\, p = \text{Log}\, 20 = & 1{,}30103000 \\
\text{Log}\, \Sigma = \text{Log}\, 23{,}062999 = & 1{,}36291578 \\
\hline
 & 2{,}66394578
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r}
\text{Log}\, 175 = 2{,}24303805 \\
\text{Log}\, (1+r')^{4\times 75} = 1{,}21576350 \\
\text{Log}\left[(1+r')^4 - 1\right] = \text{Log}\, 0{,}0380065 = \bar{2}{,}57985790
\end{array}\right\} 2{,}03865945$$

$$\text{Log}\, p' = 0{,}62528633$$

$$p' = 4{,}219746$$

Alors le prix d'émission revient en réalité à :

$$80 - 4{,}219746 = 75{,}780254$$

et le taux d'intérêt effectif par an, à :

$$\frac{3 \times 100}{75{,}780254} = 3{,}958815.$$

Remarque. — Cette méthode est applicable aux autres emprunts et à une époque quelconque. Ainsi, par exemple, si l'on voulait savoir ce que représente la prime de remboursement après le tirage de 1886, où il ne reste plus que 67 années avant la fin de l'opération, et par suite, 167 séries, il suffirait de remplacer dans la somme S_1 la puissance 4×75 par 4×67.

Les autres formules resteraient absolument les mêmes en donnant à p la valeur qui résulterait du cours, en déduisant de là r', et en mettant au dénominateur 167 au lieu de 175.

248. *Taux d'intérêt moyen que reçoit le porteur d'un titre.*

L'année moyenne est celle à la fin de laquelle la moitié des 175 séries aura été remboursée. En consultant le tableau du n° 241, j'établirai facilement que 89 séries (à peu près la moitié de 175) seront remboursées à la fin de l'année 1933, qui est la 55^e à partir de l'émission. C'est elle que je prendrai pour année moyenne.

Le taux d'intérêt trimestriel étant de

$$0{,}9375 \qquad (\text{N}^{\circ}\ 247.)$$

et la prime de remboursement valant 20 fr. dans 55 ans ou 220 trimestres, sa valeur à l'émission sera :

$$\frac{20}{\overline{1,009375}^{220}}$$

$$\text{Log } 20 = 1,3010300$$

$$\text{Log } \overline{1,009375}^{220} = 0,8915599$$

$$0,4094701$$

qui est le log de 2,567262.

Le prix d'émission revient donc en réalité à :

$$80 - 2,567262 = 77,432738$$

et le taux moyen d'intérêt par an à :

$$\frac{3 \times 100}{77,432738} = 3,87433$$

Remarque. — La différence entre ce taux et celui trouvé dans le numéro précédent provient de la même cause que celle que j'ai signalée dans une question traitée plus haut (n° 231-9°) ; aussi n'y reviendrai-je pas.

249. *Parité du 3 p. 100 ordinaire avec le 3 p. 100 amortissable.* Pour établir la parité entre ces deux rentes, il faut d'abord remarquer que, comme le 3 p. 100 ordinaire se paie 15 jours avant le 3 p. 100 amortissable, le chiffre de son cours doit être diminué de 15 jours d'intérêts.

Or en 3 mois ou 90 jours, l'intérêt est de 75 cent.
en 15 jours, il sera de

$$\frac{0,75 \times 15}{90} = 0 \text{ fr. } 125.$$

Cela posé, le cours du 3 p. 100 ordinaire correspondant à celui du 3 p. 100 amortissable calculé au n° 247, est égal à

$$75,780 - 0,125 = 75,655$$

ce qui fait avec le cours du 3 p. 100 amortissable, 80, un écart de

$$80 - 75,655 = 4 \text{ fr. } 345$$

pour le porteur d'un titre dans chaque série de l'amortissable.

Pour le porteur d'un seul titre (n° 248), le cours du 3 p. 100 ordinaire correspondant à celui du 3 p. 100 amortissable est égal à

$$77,433 - 0,125 = 77,308$$

ce qui fait avec ce dernier un écart de

$$80 - 77{,}308 = 2 \text{ fr. } 692.$$

250. *Tableau d'amortissement des cinq emprunts*. (Les tirages se font le 1er mars de chaque année, et les remboursements le 16 avril suivant.)

ANNÉES.	EMPRUNT de 1878.	EMPRUNT de 1881.	EMPRUNT de 1883.	EMPRUNT de 1884 (1re pie).	EMPRUNT de 1884 (2e pie).	TOTAUX par année.
1879	3 142 000	»	»	»	»	3 142 000
1880	3 142 000	»	»	»	»	3 142 000
1881	3 142 000	»	»	»	»	3 142 000
1882	3 142 000	6 983 500	»	»	»	10 125 500
1883	3 142 000	6 983 500	»	»	»	10 125 500
1884	3 142 000	6 983 500	7 934 000	2 612 500	»	20 672 000
1885	3 142 000	6 983 500	7 934 000	2 612 500	3 117 000	23 789 000
1886	3 142 000	6 983 500	7 934 000	2 612 500	3 117 000	23 789 000
1887	3 142 000	6 983 500	7 934 000	2 612 500	3 117 000	23 789 000
1888	3 142 000	6 983 500	7 934 000	2 612 500	3 117 000	23 789 000
1889	3 142 000	6 983 500	7 934 000	2 612 500	3 117 000	23 789 000
1890	3 142 000	6 983 500	7 934 000	2 612 500	3 117 000	23 789 000
1891	3 142 000	6 983 500	7 934 000	2 612 500	3 117 000	23 789 000
1892	3 142 000	6 983 500	7 934 000	2 612 500	3 117 000	23 789 000
1893	3 142 000	6 983 500	7 934 000	2 612 500	3 117 000	23 789 000
1894	3 142 000	6 983 500	7 934 000	2 612 500	3 117 000	23 789 000
1895	3 142 000	6 983 500	7 934 000	2 612 500	3 117 000	23 789 000
1896	3 142 000	6 983 500	7 934 000	2 612 500	3 117 000	23 789 000
1897	3 142 000	6 983 500	7 934 000	2 612 500	3 117 000	23 789 000
1898	3 142 000	6 983 500	7 934 000	2 612 500	3 117 000	23 789 000
1899	3 142 000	6 983 500	7 934 000	2 612 500	3 117 000	23 789 000
1900	3 142 000	6 983 500	7 934 000	2 612 500	3 117 000	23 789 000
1901	3 142 000	6 983 500	7 934 000	2 612 500	3 117 000	23 789 000
1902	3 142 000	6 983 500	7 934 000	2 612 500	3 117 000	23 789 000
1903	3 142 000	6 983 500	7 934 000	2 612 500	3 117 000	23 789 000
1904	3 142 000	6 983 500	7 934 000	2 612 500	3 117 000	23 789 000
1905	3 142 000	6 983 500	7 934 000	2 612 500	3 117 000	23 789 000
1906	3 142 000	6 983 500	7 934 000	2 612 500	3 117 000	23 789 000
1907	3 142 000	6 983 500	7 934 000	2 612 500	3 117 000	23 789 000
1908	6 284 000	13 967 000	15 868 000	5 225 000	6 234 000	47 578 000
1909	6 284 000	13 967 000	15 868 000	5 225 000	6 234 000	47 578 000
1910	6 284 000	13 967 000	15 868 000	5 225 000	6 234 000	47 578 000
1911	6 284 000	13 967 000	15 868 000	5 225 000	6 234 000	47 578 000
1912	6 284 000	13 967 000	15 868 000	5 225 000	6 234 000	47 578 000
1913	6 284 000	13 967 000	15 868 000	5 255 000	6 234 000	47 578 000
1914	6 284 000	13 967 000	15 868 000	5 225 000	6 234 000	47 578 000
1915	6 284 000	13 967 000	15 868 000	5 225 000	6 234 000	47 578 000
A reporter	141 390 000	293 307 000	317 360 000	104 500 000	121 563 000	978 120 000

ANNÉES.	EMPRUNT de 1878.	EMPRUNT de 1881.	EMPRUNT de 1883.	EMPRUNT de 1884 (1re pie).	EMPRUNT de 1884 (2e pie).	TOTAUX par année.
Report. .	141 390 000	293 307 000	317 360 000	104 500 000	121 563 000	978 120 000
1916	6 284 000	13 967 000	15 868 000	5 225 000	6 234 000	47 578 000
1917	6 284 000	13 967 000	15 868 000	5 225 000	6 234 000	47 578 000
1918	6 284 000	13 967 000	15 868 000	5 225 000	6 234 000	47 578 000
1919	6 284 000	13 967 000	15 868 000	5 225 000	6 234 000	47 578 000
1920	6 284 000	13 967 000	15 868 000	5 225 000	6 234 000	47 578 000
1921	6 284 000	13 967 000	15 868 000	5 225 000	6 234 000	47 578 000
1922	6 284 000	13 967 000	15 868 000	5 225 000	6 234 000	47 578 000
1923	6 284 000	13 967 000	15 868 000	5 225 000	6 234 000	47 578 000
1924	6 284 000	13 967 000	15 868 000	5 225 000	6 234 000	47 578 000
1925	6 284 000	13 967 000	15 868 000	5 225 000	6 234 000	47 578 000
1926	9 426 000	20 950 500	23 802 000	7 837 500	9 351 000	71 367 000
1927	9 426 000	20 950 500	23 802 000	7 837 500	9 351 000	71 367 000
1928	9 426 000	20 950 500	23 802 000	7 837 500	9 351 000	71 367 000
1929	9 426 000	20 950 500	23 802 000	7 837 500	9 351 000	71 367 000
1930	9 426 000	20 950 500	23 802 000	7 837 500	9 351 000	71 367 000
1931	9 426 000	20 950 500	23 802 000	7 837 500	9 351 000	71 367 000
1932	9 426 000	20 950 500	23 802 000	7 837 500	9 351 000	71 367 000
1933	9 426 000	20 950 500	23 802 000	7 837 500	9 351 000	71 367 000
1934	9 426 000	20 950 500	23 802 000	7 837 500	9 351 000	71 367 000
1935	9 426 000	20 950 500	23 802 000	7 837 500	9 351 000	71 367 000
1936	9 426 000	20 950 500	23 802 000	7 837 500	9 351 000	71 367 000
1937	9 426 000	20 950 500	23 802 000	7 837 500	9 351 000	71 367 000
1938	9 426 000	20 950 500	23 802 000	7 837 500	9 351 000	71 367 000
1939	12 568 000	27 934 000	31 736 000	10 450 000	12 468 000	95 156 000
1940	12 568 000	27 934 000	31 736 000	10 450 000	12 468 000	95 156 000
1941	12 568 000	27 934 000	31 736 000	10 450 000	12 468 000	95 156 000
1942	12 568 000	27 934 000	31 736 000	10 450 000	12 468 000	95 156 000
1943	12 568 000	27 934 000	31 736 000	10 450 000	12 468 000	95 156 000
1944	12 568 000	27 934 000	31 736 000	10 450 000	12 468 000	95 156 000
1945	12 568 000	27 934 000	31 736 000	10 450 000	12 468 000	95 156 000
1946	15 710 000	34 917 500	39 670 000	13 062 500	15 585 000	118 945 000
1947	15 710 000	34 917 500	39 670 000	13 062 500	15 585 000	118 945 000
1948	15 710 000	34 917 500	39 670 000	13 062 500	15 585 000	118 945 000
1949	15 710 000	34 917 500	39 670 000	13 062 500	15 585 000	118 945 000
1950	15 710 000	34 917 500	39 670 000	13 062 500	15 585 000	118 945 000
1951	18 852 000	41 901 000	47 604 000	15 675 000	18 702 000	142 734 000
1952	18 852 000	41 901 000	47 604 000	15 675 000	18 702 000	142 734 000
1953	18 852 000	41 901 000	47 604 000	15 675 000	18 702 000	142 734 000
Totaux. .	549 850 000	1 201 162 000	1 348 780 000	444 125 000	526 773 000	4 070 690 000

ÉNONCÉS DE PROBLÈMES A RÉSOUDRE.

§ 1. — *Intérêts composés.*

A quelle somme s'élèvent, au bout de 8 ans, 4,000 fr. placés à intérêts composés, à 3 p. 100, et quel est le capital qui, placé à 3 p. 100 à intérêts simples, produirait la même somme au bout du même temps ?

(5 067 fr. 08 c. — 4 086 fr. 35 c.)

Au bout de combien de temps un capital placé à intérêts composés est-il doublé : 1° à 5 p. 100 ; 2° à 4 p. 100 ?

(1° 14 ans 2 mois 14 jours. — 2° 17 ans 8 mois 2 jours.)

§ 2. — *Assurances.*

Une personne âgée de 18 ans contracte une assurance de 75 000 fr. payables à son décès. Quelle est la somme qu'elle verse annuellement, le taux étant de 4 $^1/_4$ p. 100 ?

(825 fr. 17 c.)

Une personne contracte une assurance de 125 000 fr. payables à son décès. Elle paie chaque année 2 500 fr. Le taux étant de 4 $^1/_2$ p. 100, combien est-elle supposée devoir faire de versements, et quel est son âge ?

(26 versements. — 36 ans.)

§ 3. — *Subventions.*

Une personne a payé 350 fr. une action émise par une compagnie. Cette action lui a rapporté 25 fr. par an pendant 30 années, après lesquelles la compagnie ayant fait faillite, le souscripteur perd son capital. En supposant qu'il a toujours à sa disposition un placement à 5 p. 100, à intérêts composés, on demande s'il a gagné ou perdu à acheter l'action ci-dessus, et combien ?

(Il a gagné 148 fr. 29 c.)

Un homme âgé de 30 ans 4 mois et 15 jours possède une maison valant 300 000 fr., et dont le revenu net est égal à 5 p. 100 de sa valeur. Ce revenu ne lui suffisant pas, il emprunte à la fin de chaque année 3 500 fr., à 6 p. 100, à intérêts composés. On demande à quel âge il sera complètement ruiné, en supposant qu'il ait commencé ses emprunts à l'âge indiqué ci-dessus.

(61 ans 6 mois 20 jours.)

§ 4. — *Amortissements.*

Le Ministre des travaux publics a été autorisé, par la loi du 11 juin 1863, à remplacer la subvention de 3 millions de francs, promise à la Compagnie des chemins de fer de l'Est, par des demi-annuités semestrielles, payables les 15 janvier et 15 juillet de chaque année, à partir du 15 janvier 1866. La durée de ces annuités étant de 89 ans, et le taux de 4 $^1/_2$ p. 100 par an, calculer : 1° la demi-annuité, a; 2° l'intérêt du premier semestre, i_1; 3° et 4° le premier et le dernier amortissement, α_1 et α_n ; 5° le semestre moyen du remboursement, m.

(1° $a = 68811$ fr.; 2° $i_1 = 67500$ fr.; 3° $\alpha_1 = 1311$ fr.; 4° $\alpha_n = 67296$ fr. 80 c.; 5° $m = 148$.)

Le Ministre des travaux publics a été autorisé, par la loi du 26 juillet 1868, à rembourser par des demi-annuités semestrielles de 106 991 fr. 91 c. chacune, payables les 1er avril et 1er octobre de chaque année, à partir du 1er avril 1870, une avance faite par la Compagnie du chemin de fer de Paris à Orléans.

La durée de ces annuités étant de 87 ans, et le taux de 4 $^1/_2$ p. 100 par an, calculer : 1° le montant de l'avance, A ; 2° l'intérêt du premier semestre, i_1; 3° et 4° le premier et le dernier amortissement, α_1 et α_n ; 5° le semestre moyen du remboursement, m.

(1° A $= 4\,656\,170$ fr.; 2° $i_1 = 104\,763$ fr. 38 c.; 3° $\alpha_1 = 2\,228$ fr. 53 c.; 4° $\alpha_n = 104\,637$ fr. 56 c.; 5° $m = 144$.)

La Compagnie des chemins de fer de Paris-Lyon-Méditerranée a émis, le 1er octobre 1854, 80 000 obligations remboursables à 1 250 fr., en 50 tirages annuels, à partir du 1er septembre 1855. Elles produisent un intérêt de 50 fr., payables par moitié les 1er avril et 1er octobre de chaque année. Les remboursements des obligations sorties aux tirages ont lieu les 1er octobre qui suivent les époques des tirages. Sachant que l'intérêt effectif de cet emprunt, y compris la prime de remboursement, ressort à 5 p. 100 par an, calculer : 1° l'annuité, a; 2° le montant réel de l'emprunt, A'; 3° le cours d'émission, c; 4° l'intérêt de la première année, i_1; 5° et 6° le premier et le dernier amortissement, α_1 et α_n; 7° l'année moyenne du remboursement, m; 8° la valeur d'une obligation, v, à la fin de la 40e année; 9° le taux d'intérêt moyen, ρ, que reçoit le porteur d'un titre.

(1° $a = 4\,655\,020$ fr.; 2° $A' = 84\,981\,670$ fr.; 3° $c = 1\,062$ fr. 27 c.; 4° $i_1 = 4\,000\,000$ de fr.; 5° $\alpha_1 = 655\,020$ fr.; 6° $\alpha_n = 4\,475\,980$ fr.; 7° $m = 36$; 8° $v = 1\,190$ fr.; 9° $\rho = 4{,}868$ p. 100.)

La Compagnie du chemin de fer du Dauphiné a émis, en 1858, 173 000 obligations au cours de 267 fr. 05 c., remboursables à 500 fr. et rapportant 15 fr. d'intérêts, payables par moitié les 1er janvier et 1er juillet de chaque année, à partir du 1er janvier 1859. Les tirages se font en octobre, et les remboursements ont lieu les 1er janvier qui suivent les époques des tirages. Sachant que l'annuité est de 2 741 952 fr., calculer : 1° le montant réel de l'emprunt, A'; 2° le nombre d'années que dure le remboursement, n; 3° le taux d'intérêt effectif, r', y compris la prime de remboursement; 4° l'intérêt de la première année, i_1; 5° et 6° le premier et le dernier amortissement, α_1 et α_n; 7° l'année moyenne du remboursement, m; 8° la valeur d'une obligation, v, à la fin de la 60e année; 9° le taux d'intérêt moyen, ρ, que reçoit le porteur d'un titre.

(1° $A' = 46\,199\,650$ fr.; 2° $n = 99$; 3° $100\,r' = 5{,}91493$ p. 100 par an; 4° $i_1 = 2\,595\,000$ fr.; 5° $\alpha_1 = 146\,952$ fr.; 6° $\alpha_n = 2\,662\,089$ fr.; 7° $m = 77$; 8° $v = 375$ fr. 178; 9° $\rho = 5{,}6866$ p. 100 par an.)

La ville de Paris a émis, le 25 juillet 1865, 6 millions d'obligations au prix de 450 fr., et remboursables à 500 fr. en 60 ans, par tirages semestriels, à partir du 1er février 1866.

Chacune d'elles donne droit : 1° à un intérêt de 20 fr. payables par moitié les 1er février et 1er août de chaque année; 2° à des lots s'élevant à 1 140 000 fr. par an, répartis entre 4 tirages trimestriels, le 15 mars, le 15 juin, le 15 septembre et le 15 décembre de chaque année : chaque tirage comprend un lot de 150 000 fr., un de 50 000 fr., 4 de 10 000 fr., 5 de 5 000 fr. et 10 de 2 000 fr. Le premier tirage a lieu le 15 septembre 1865.

Le remboursement des lots a lieu le 1er février et le 1er août qui suivent les époques des tirages : le montant du remboursement au pair des obligations est compris dans les lots. Calculer : 1° la valeur réelle, l, des lots d'un semestre; 2° la demi-annuité semestrielle, a; 3° le montant réel de l'emprunt, A'; 4° le taux d'intérêt effectif, r', y compris la prime de remboursement et la valeur des lots; 5° l'intérêt du premier semestre, i_1 ; 6° l'amortissement du premier semestre, α_1 ; 7° l'amortissement du dernier semestre, α_n ; 8° le semestre moyen du remboursement, m.

(1° $l = 549\,000$ fr. ; 2° $a = 6\,614\,430$ fr. ; 3° $A' = 270\,000\,000$ de fr. ; 4° $100\,r' = 5{,}038$ p. 100 par an ; 5° $i_1 = 6\,000\,000$ de fr. ; 6° $\alpha_1 = 614\,430$ fr. ; 7° $\alpha_n = 6\,484\,735$ fr. ; 8° $m = 89$.)

Le Crédit foncier de France a émis, le 7 octobre 1879, un emprunt de 1800000 obligations, remboursables à 500 fr. en 60 ans, et rapportant 15 fr. d'intérêt annuel, payables par moitié le 1er mai et le 1er novembre de chaque année, à partir du 1er mai 1880. De plus, elles participent à 6 tirages par an, les 5 janvier, 5 mars, 5 mai, 5 juillet, 5 septembre et 5 novembre, comprenant les lots suivants :

2	obligations	remboursées par	100 000 fr.	chacune ;
1	—	—	25 000 fr.	—
2	—	—	10 000 fr.	—
5	—	—	5 000 fr.	—
90	—	—	1 000 fr.	—

Le premier de ces tirages a lieu le 5 janvier 1880, et le dernier le 5 septembre 1939 : le paiement des lots a lieu le premier jour du mois qui suit l'époque du tirage.

Les tirages d'amortissements ont lieu les 5 mars et 5 septembre de chaque année, à partir du 5 septembre 1880 jusqu'au 5 septembre 1939 et les remboursements se font les 1er mai et 1er novembre suivants.

Sachant que le prix d'émission a été de 490 fr., payables comme suit :

20 fr., en souscrivant, le 1er octobre 1879 ;
30 fr., à la délivrance des titres, du 1er au 15 novembre 1879 ;
50 fr., du 1er au 15 février 1880 ;
50 fr., du 1er au 15 avril 1880 ;
50 fr., du 1er au 15 octobre 1880 ;
50 fr., du 1er au 15 avril 1881 ;
50 fr., du 1er au 15 octobre 1881 ;
50 fr., du 1er au 15 avril 1882 ;
50 fr., du 1er au 15 octobre 1882 ;
et 90 fr., du 1er au 15 avril 1883.

calculer : 1° le cours réel d'émission, c ; 2° la valeur réelle du montant des lots par semestre, l ; 3° la demi-annuité semestrielle, a ; 4° le montant réel de l'emprunt, A' ; 5° le taux d'intérêt effectif, r', y compris la prime de remboursement et la valeur des lots; 6° l'intérêt du premier semestre, i_1; 7° l'amortissement du premier semestre, α_1; 8° l'amortissement du dernier semestre, α_n; 9° le semestre moyen du remboursement, m.

Remarque. — Dans cet emprunt, 1° il n'y a pas de remboursement au pair pendant le premier semestre, il n'y a que 300 obligations remboursées avec lots; il faut, pour calculer l'annuité a, déduire du montant nominal de l'emprunt celui de ces 300 obligations et ne prendre que 119 semestres pour durée de l'emprunt; 2° le tirage avec lots, du 5 novembre 1939, qui devrait être le dernier, étant supprimé, puisqu'on s'arrête à celui du 5 septembre 1939, il faut, dans le calcul de l'intérêt effectif, déduire de la demi-annuité réelle une somme qui, payée pendant 120 semestres, représente au bout de ce temps la valeur du montant des lots compris dans le tirage supprimé.

En tenant compte de ces deux remarques, on arrive aux solutions indiquées ci-dessous :

(1° $c = 469$ fr. 038333; 2° $l = 932\,700$ fr.; 3° $a = 16\,263\,060$ fr.; 4° $A' = 844\,350\,000$ fr.; 5° $100\,r' = 3{,}58$ p. 100 par an; 6° i_1 représentant l'intérêt du premier semestre où les remboursements s'effectuent régulièrement, celui du 1er mai au 1er novembre 1880, $i_1 = 13\,497\,750$ fr.; 7° α_1, représentant l'amortissement de ce même semestre, $\alpha_1 = 2\,765\,310$ fr.; 8° α_n, l'amortissement du dernier semestre n'est pas modifié par la suppression du tirage du 5 novembre 1939, parce que le tirage du 5 septembre précédent comprend, en plus de ce qu'il doit comprendre, le remboursement au pair des 100 obligations qui auraient dû être tirées avec lots le 5 novembre 1939; donc $\alpha_n = 16\,022\,719$ fr.; 9° $m = 83$.)

ÉNONCÉS DE PROBLÈMES DONNÉS AUX EXAMENS DE L'INSPECTION GÉNÉRALE DES FINANCES ET DE LA COUR DES COMPTES.

Un navire jaugeant 312$^{\text{tonneaux}}$,46 a été nolisé au prix de 41 fr. 15 c. par tonneau et par mois, plus une gratification de 140 fr. 30 c. par 100 tonneaux. Il a été employé pendant 1 an, 5 mois et 20 jours. Combien y a-t-il à payer en totalité? (*Cour des Comptes*, 1864.)

(227 591 fr. 60 c.)

3 francs de France valent 54 deniers de Hollande, 90 deniers de Hollande valent 3 livres de Gênes, 60 livres de Gênes valent 80 livres de Piémont, 20 livres de Piémont valent 1 livre sterling d'Angleterre, 40 livres sterling valent 230 ducats de Naples. Combien 100 francs valent-ils de ducats de Naples? (*Cour des Comptes*, 1864.)

(23.)

Un débiteur doit 1000, 1500 et 2000 fr. respectivement payables au bout de 2 ans, 4 ans et 6 ans. Il ne veut faire qu'un seul paiement de 4500 fr. A quelle époque devra-t-il le faire, le taux étant de 5 p. 100? (*Cour des Comptes*, 1864.)

(4 ans 5 mois 10 jours.)

Un approvisionnement de vin est calculé pour 11800 hommes pendant 71 jours à raison de $0^l,65$ par homme et par jour. Combien durera-t-il, le nombre des consommateurs étant élevé à 20570, et la ration quotidienne réduite à $0^l,48$? (*Cour des Comptes*, 1868.)

(55 jours.)

La série des prix pour l'exécution de divers travaux et fournitures contient les prix suivants :

Bois de chêne, mètre cube	$62^f 55$
Planche, mètre carré.	6 72
Fonte, kilogramme	1 67
Maçonnerie, mètre cube	33 40

Un entrepreneur soumissionne ces travaux et fournitures aux prix de la série avec un rabais de 7,39 p. 100. Il a fourni $41^{mc},97$ de bois de chêne; les planches nécessaires pour couvrir la surface d'une salle de $12^m,65$ de long sur $8^m,53$ de large; $832^k,45$ de fonte; la maçonnerie d'un mur de $0^m,75$ d'épaisseur, de $8^m,50$ de longueur et de $3^m,60$ de hauteur. Quelle est la somme qui lui est due? (*Cour des Comptes*, 1868.)

(5100 fr. 09 c.)

Une commune possède en fonds placés au Trésor au 1^{er} janvier une somme de 165000 fr.; elle ajoute à ce placement, le 5 février, 21363 fr.; le 26 juin, 35309 fr.; le 3 août, 45090 fr. D'un autre côté, elle opère le retrait des sommes suivantes : le 8 mars, 18250 fr.; le 17 avril, 5146 fr.; le 9 juillet, 60205 fr.; le 15 décembre, 56000 fr. On alloue à la commune, pour ses fonds, un intérêt de $3\,^1/_3$

p. 100 pendant qu'ils sont déposés au Trésor. Quel sera le chiffre des intérêts dus à la commune, à la fin de l'année, l'intérêt court à dater du lendemain du placement et n'est pas compté le jour du retrait, tous les mois étant de 30 jours? (*Cour des Comptes,* 1868.)

(5 975 fr. 35 c.)

Un capitaliste a prêté le 1er janvier 1870 une somme de 150 000 fr. aux conditions suivantes : l'intérêt de ses fonds lui est payé à 5 p. 100 tous les 1er janvier à partir du 1er janvier 1871 ; la somme prêtée lui est remboursée par 50 000 fr. les 1er janvier 1871, 1872 et 1873, de sorte qu'à cette dernière date l'opération est terminée ; il reçoit, en outre, à chaque paiement de 50 000 fr. une prime de 2 000 fr.

En admettant que ce capitaliste ait toujours à sa disposition, pour les fonds qu'il a en caisse, un placement à 7 p. 100, on demande ce qu'il a gagné ou perdu à prêter son argent aux conditions indiquées? (*Inspection des finances,* 1870.)

(Il a perdu 144 fr. 90 c.)

Trois sommes placées chez un banquier à 3,15 p. 100 par an ont produit : la première 524 fr. en 6 mois, la seconde 248 fr. en 4 mois, la troisième 177 fr. en 3 mois. A quel taux aurait-il fallu placer le même capital pour retirer en 5 mois le même intérêt? (*Inspection des finances,* 1872.)

(2,87 p. 100.)

Un particulier qui a un compte courant au Crédit foncier a fait les opérations suivantes : il a versé 3 850 fr. le 20 janvier, 4 940 fr. le 15 mars, 18 290 fr. le 19 mai. Il a retiré 5 425 fr. le 26 mars, 19 850 fr. le 19 juin. Son compte courant qui est arrêté définitivement le 30 juillet présente un solde créditeur de 2 524 fr. Quel est le taux annuel d'intérêt, tous les mois de l'année étant supposés de 30 jours? (*Inspection des finances,* 1872.)

(2,55 p. 100.)

La rente 3 p. 100 est à 56,30 et la rente 5 p. 100 à 91,40. Quel est le taux de l'intérêt rapporté par l'une et par l'autre? — On vend 10 000 fr. de cette rente 3 p. 100 et on achète en même temps 10 000 fr. de la rente 5 p. 100. Quelle somme donnera l'agent de change chargé des deux opérations, la commission étant de $^1/_8$ p. 100, et le timbre des bordereaux de 60 cent.? (*Inspection des finances,* 1873.)

(4 630 fr. 90 c.)

On a 12 hectolitres de vin dont la richesse alcoolique est de 11 p. 100. On demande la quantité d'alcool à 85° qu'il faut verser dans ce vin pour que la partie alcoolique de ce mélange soit de 18 p. 100? (*Inspection des finances,* 1873.)

($1^{\text{hectol}},25$.)

La Société générale ouvre un compte courant à un particulier au taux de 3 p. 100. Elle a reçu pour lui, le 16 août 1873, 2347 fr.; le 23 septembre, 5230 fr. 75 c.; le 27 novembre, 1787 fr. 50 c., et au règlement du 30 juin 1873, elle lui devait 3455 fr. 90 c.

D'un autre côté, elle a payé pour lui, le 27 juillet 1873, 2500 fr.; le 15 octobre 5400 fr.; le 28 décembre, 1700 fr. Quel sera le règlement de ce compte courant au 31 décembre 1873, en admettant que tous les mois soient de 30 jours, que l'année ait 360 jours, et que le jour de l'opération porte intérêt? (*Inspection des finances,* 1874.)

(Solde créditeur : 3280 fr. 50 c.)

Le contingent de l'impôt foncier est de 1000 fr. dans une commune. On trouve à la matrice cadastrale que le territoire de cette commune comprend 1600 parcelles à 5 fr. de revenu, 200 à 10 fr., 40 à 15 fr. 1° On demande quelle sera la cotisation d'une parcelle de chacune de ces trois catégories. 2° On suppose qu'une loi nouvelle permette d'évaluer sans révision du revenu des parcelles cotisées antérieurement toutes les terres classées comme improductives lors de la confection du cadastre. On trouve ainsi comme nouvelles parcelles imposables 400 à 5 fr., 20 à 10 fr. et 10 à 15 fr. On demande de combien il faut augmenter le contingent pour que la cotisation des anciennes parcelles ne soit pas modifiée, c'est-à-dire pour que cette augmentation du contingent soit supportée par les nouvelles parcelles, sans surcharge ni dégrèvement pour les anciennes? (*Inspection des finances,* 1874.)

(1° 0,472; 0,943; 1,415; 2° 1221 fr. 70 c.)

Un capitaliste a placé, le 1er janvier 1873, en rente 3 p. 100, une somme de 37500 fr. Il a placé successivement, de la même manière, à chaque échéance, tous les arrérages qui lui ont été payés, et a vendu, le 1er janvier 1874, toutes les inscriptions dont il se trouvait propriétaire. Calculer la somme totale à la disposition de ce capitaliste après la vente effectuée le 1er janvier 1874. On suppose que le cours reste invariable à 75, et que les inscriptions délivrées peuvent comprendre une fraction quelconque de rente, inférieure même à 1 fr. ? (*Inspection des finances*, 1875.)

(39 022 fr. 65 c.)

Une personne demande, pour acquitter une dette de 793 fr. 35 c., un mandat sur la poste. Le créancier prenant à sa charge les frais de toute sorte, consistant : en affranchissement de la lettre avec un timbre de 25 cent. ; en droit de 1 p. 100 pour envoi d'article d'argent, et en droit de 25 cent. pour le timbre du mandat, quel sera le montant du mandat délivré par le receveur des postes ? (*Inspection des finances*, 1875.)

(785 fr.)

Une compagnie emprunte une somme de 1 million de francs à 5 p. 100 d'intérêt annuel. Elle désire éteindre cette dette par cinq paiements annuels égaux. Quel sera le montant de chacun d'eux ? (*Inspection des finances*, 1875.)

(230 974 fr. 80 c.)

Un négociant emploie 122 hectolitres de vin, ayant une force alcoolique naturelle de 8 p. 100, pour fabriquer du vermouth. Il y ajoute une quantité d'alcool à 72° suffisante pour que la force alcoolique du mélange soit de 17 p. 100. On demande : 1° quelle est la quantité d'alcool employée, et 2° dans le cas où le négociant aurait à payer des droits sur cet alcool à raison de 125 fr. en principal, quel serait le montant de ces droits ? (*Inspection des finances*, 1876.)

(1° $19^{\text{hectol}},964$; 2° 3 119 fr. 375.)

Un employé des douanes d'une colonie française a droit à un traitement de 8000 fr. par an, composé de deux parties distinctes, une représentant la solde d'Europe et sujette à la retenue de 5 p. 100 pour les pensions civiles, l'autre à titre de supplément colonial passible de la retenue de 3 p. 100 pour le service des Invalides de la marine. Cet employé touche pour 27 jours une somme de 577 fr. 20 c., déduction faite desdites retenues. On demande quelles fractions du traitement total correspondent respectivement à la solde d'Europe et au supplément colonial ? (*Cour des Comptes*, 1877.)

$$\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

Un entrepreneur des travaux publics en Cochinchine a effectué les fournitures suivantes décomptées en piastres, savoir $713^{\text{mc}},6$ de madriers à 50 piastres le mètre ; $239^m,15$ de planches à 14 piastres le mètre ; 729 quintaux de plomb à une piastre les 4 kilogrammes ; $68^m,60$ de gouttières à 8 piastres les 7 mètres ; 28 litres d'huile par heure pour l'éclairage des travaux pendant les nuits, en tout 23 heures 24 minutes, à 25 piastres l'hectolitre.

Tous ces prix nets résultent d'un tarif diminué de 12 $^1/_2$ p. 100. Si, au lieu de ce rabais, on opérait sur le même tarif une augmentation de 16 $^3/_4$ p. 100, quel serait le prix total des mêmes fournitures en monnaie française au change de 20 piastres pour 111 fr., et en monnaie anglaise au change de 3 livres 19 schellings 10 pence pour 100 fr. ? La livre sterling contenant 20 schellings, et le schelling 12 pence. — Négliger les millièmes. (*Cour des Comptes,* 1877.)

(425 768 fr. 38 c. — 16 995 £ 11 sch. 11 p.)

Un terrain a été vendu moyennant 300 000 fr. productifs d'intérêts simples à 4 $^1/_2$ p. 100 à partir de la date du contrat, chaque année comptant pour 365 jours. Aucune somme n'est payée au jour du contrat, mais l'acquéreur commence à se libérer par une série d'acomptes échelonnés et proportionnels, de sorte que, d'une part, les intervalles augmentent de 150 jours après chacun des 1er, 2^e et 3^e paiements, et d'autre part chacun des 2^e, 3^e et 4^e paiements est respectivement égal aux $^9/_{10}$ du précédent.

Chaque paiement étant imputé d'abord sur les intérêts, que reste-t-il dû, en principal, après le 4^e paiement effectué le dernier jour de la 8^e année et formant avec l'addition des trois premiers un total de 309 510 fr. ? (*Cour des Comptes,* 1877.)

(57 043 fr. 94 c.)

Une commune emprunte une somme de 107 000 fr. à 4 $^1/_2$ p. 100 par an pour construire une école. Elle désire éteindre cette dette par 5 paiements égaux effectués à la fin de chaque année, à partir de l'époque de l'emprunt. Quel sera le montant de chaque paiement ? (*Inspection des finances,* 1877.)

(24 373 fr. 706.)

Par son testament, un père après avoir disposé de quelques biens, dont il n'est pas question ici, en faveur de sa femme, fait le partage du reste de sa fortune entre ses quatre enfants, et attribue à chacun d'eux, savoir : au premier, des biens évalués à 44 230 fr. ; au second, des valeurs s'élevant à 25 000 fr. ; au troisième, des biens pour

33 750 fr.; et au quatrième, d'autres biens estimés 54 383 fr. Il exprime en même temps l'intention que chacun de ses enfants ait, dans la masse des biens partagés, un émolument égal à celui des autres. Quels sont les droits d'enregistrement, principal et décimes, à percevoir, lors de la présentation de ce testament au receveur, sachant que les droits en principal sont : pour le testament, de 6 p. 100; pour les soultes de partage, de 4 p. 100; et, pour les partages, que ces droits sont gradués à raison de 20 fr. par chaque somme ou valeur de 20 000 fr. ou fraction de 20 000 fr., et assis sur l'actif net partagé, c'est-à-dire sur la masse totale, déduction faite du montant des soultes? (*Inspection des finances,* 1878.)

(12 998 fr. 80 c.)

Un État fait un emprunt de 370 millions de francs en obligations 3 p. 100 remboursables à 500 fr. Le capital réel étant de 74 fr. par 100 fr. de capital nominal, quelle est la somme à inscrire annuellement au budget de cet État pour faire face au paiement des intérêts et à l'amortissement du capital en 75 ans, en effectuant des paiements égaux pendant cette durée? (*Inspection des finances,* 1878.)

(16 833 981 fr. 70 c.)

Un capitaliste a acheté le 1er janvier 1873 100 obligations produisant, à raison de 15 fr. par obligation, des intérêts payables à la fin de chaque année. Il a successivement placé, à intérêts composés, à 5 p. 100 l'an, les sommes qu'il a reçues à chaque échéance. Au 31 décembre 1876, les 100 obligations lui ont été remboursées à 500 fr. l'une.

Calculer : 1° la somme totale qu'il a eue en sa possession le 31 décembre 1876; 2° le capital qu'il aurait dû placer à intérêts composés à 5 p. 100, le 1er janvier 1873, pour avoir à sa disposition, le 31 décembre 1876, une somme égale à la première. (*Inspection des finances,* 1878.)

(1° 56 465 fr. 19 c. — 2° 46 454 fr. 29 c.)

On sait que les retenues de 5 p. 100 et autres, prescrites pour le service des pensions civiles par la loi du 9 juin 1853, ne portent que sur les $^3/_4$ des émoluments annuels des percepteurs. Quel est, en conséquence, le montant brut des émoluments annuels d'un percepteur qui subit une retenue de 547 fr. 20 c., à titre de moitié de traitement net pour cause de congé pendant 3 mois 6 jours, chaque mois comptant pour 30 jours ? (*Cour des Comptes,* 1879.)

(5 760 fr.)

Dans une instance devant le jury d'expropriation, l'administration a offert à un exproprié pour un terrain de forme rectangulaire de 1 450 mètres de long sur une largeur de 121^{m},50 une indemnité calculée à raison de 7 880 fr. l'hectare ; l'exproprié demande une somme de 62 650 fr. l'hectare, et le jury lui alloue une indemnité totale de 664 301 fr. 25 c. Les frais de la procédure s'élevant à 273 fr. 85 c., doivent être supportés par l'Administration et l'indemnitaire dans la proportion de l'offre et de la demande avec la décision du jury. Quel est, d'après cette même décision, le prix de l'hectare et à quelle somme de dépens doit être condamnée chacune des deux parties ? (*Cour des Comptes,* 1879.)

(37 706 fr. 90 c. — 149 fr. 13 c. et 124 fr. 72 c.)

Quel est le capital contenu dans 58 815 fr. 42 c., somme payée en principal et en intérêts simples au bout de 2 ans 2 mois 28 jours, chaque mois comptant pour 30 jours, et le taux de l'intérêt annuel ayant été successivement 2 p. 100 pendant 3 mois 11 jours, 4 p. 100 pendant 6 mois 22 jours, 5 p. 100 pendant 1 an 1 mois 14 jours, et 6 p. 100 pendant 3 mois 11 jours. Quel est, en outre, le taux moyen de l'intérêt annuel ? (*Cour des Comptes,* 1879.)

(53 420 fr. — 4 $^{1}/_{2}$ p. 100.)

Un particulier possède un revenu de 8 000 fr. en obligations de chemins de fer, dont les arrérages lui sont payés en deux termes égaux, le 1er janvier et le 1er juillet de chaque année. Il place ses arrérages immédiatement après les avoir touchés, en valeurs de même nature, au taux de 4 p. 100. On demande quelle somme il aura ainsi amassée, à intérêts composés, le 1er janvier 1880, le premier placement ayant eu lieu le 1er janvier 1875. (*Inspection des finances,* 1879.)

(44 674 fr. 86 c.)

Un fonctionnaire touche un traitement de 3 000 fr. sur lequel il est fait chaque mois une retenue de 3 p. 100. Ces retenues sont placées au commencement de chaque trimestre par la Caisse des retraites, à intérêts composés, à 5 p. 100 l'an. On demande le capital formé au bout de 5 ans. (*Inspection des finances,* 1880.)

(507 fr. 67 c.)

Un négociant emprunte 80 000 fr. à 6 p. 100, remboursables en 5 annuités. Après en avoir payé 3, il obtient de répartir la somme restant due, en 5 autres annuités, le taux restant le même pour la seconde opération. On demande quelle somme il doit payer pendant chacune des trois premières années, et pendant chacune des cinq autres. (*Inspection des finances*, 1880.)

(18 991 fr. 72 c. — 8 266 fr. 21 c.)

Une commune possède comme ressources extraordinaires des centimes additionnels à voter sur des droits d'octroi qui sont en principal de 90 000 fr., et en outre, le produit d'une coupe triennale de bois évalué à 8 000 fr. Elle veut faire un emprunt de 700 000 fr. en obligations de 100 fr. à 4 p. 100, amortissables en 12 ans; elle veut affecter exclusivement à l'amortissement et aux intérêts ses ressources extraordinaires. On demande combien elle devra voter de centimes additionnels, et quel sera le nombre des obligations amorties pendant chacune des cinq premières années, sachant que l'emprunt est émis un an après une coupe de bois. (*Inspection des finances*, 1881.)

(90 centimes. — 439-537-478-498-597.)

Un négociant a souscrit, le 2 janvier, trois billets comprenant en capital et intérêts à 6 p. 100 : le premier, 22 543 fr. 75 c., payable le 23 mars; le second, 43 748 fr. 90 c., payable le 15 avril; et le troisième, 17 987 fr. 45 c., payable le 29 mai. Il demande à remplacer ces trois billets par un seul égal à leur somme. On veut connaître le jour de l'échéance de ce billet unique en supposant l'année composée de 360 jours, suivant l'usage généralement adopté par le commerce; mais, pour la période de temps afférente à chacun des billets, on attribuera aux mois les nombres de jours que leur assigne le calendrier grégorien. (*Inspection des finances*, 1881.)

(18 avril.)

Un entrepreneur a présenté un mémoire constatant la livraison de divers matériaux dont le volume total équivaut à l'espace déterminé par la superficie de 1 are 20 centiares sur une hauteur de $2^{m},24$. Le poids de ces matériaux est, en moyenne, de 5 kilogr. 5 grammes par décimètre cube; et, sur leur prix total revenant en moyenne à 9 fr. 50 c. le quintal métrique, l'entrepreneur a consenti un rabais de $4\,^3/_4$ p. 100. Mais, parmi ces matériaux, les quantités ci-après, reconnues de mauvaise qualité, n'ont pas été acceptées, savoir : 624 hectolitres de chaux à 34 fr. 50 c. le mètre cube et 20 mètres carrés 40 centimètres carrés de madriers à 15 fr. le mètre. Quel est le montant du mémoire avant et après la réduction opérée par suite de ce refus? (*Cour des Comptes,* 1882.)

(125 354 fr. 82 c. — 119 400 fr. 47 c.)

La livre sterling se divise en 20 schellings, et le schelling en 12 pence : le dollar américain se divise en 100 cents. Un négociant de New-York a reçu de Londres trois envois de marchandises valant, le premier, 2 446 £ 19 sch. 5 pence, le second, 2 993 £ 14 sch. 11 pence, le troisième, 1 537 £ 16 sch. 2 pence. Quelle est la valeur totale de ces marchandises en monnaie américaine au change de 4 schellings 2 pence par dollar et en monnaie française au change de 20 dollars 14 cents pour 100 fr. ? (*Cour des Comptes,* 1882.)

($33\,496^{\text{doll}},92$. — 166 320 fr. 36 c.)

Un receveur municipal, dont le traitement normal est augmenté du dixième par application de l'article 5 du décret du 27 juin 1876, a droit, pour frais de bureau, à un supplément égal aux $^5/_{47}$ de son traitement normal, et reçoit ainsi au total, pour l'année entière, 5 670 fr. Quel est le traitement normal pour 4 mois 9 jours, chaque mois comptant pour 30 jours? (*Cour des Comptes,* 1882.)

(1 684 fr. 17 c.)

Un emprunt de 100 fr. est amorti à l'intérêt de 5 p. 100 l'an par trois annuités de 36 fr. 72 c. Décomposer chacune de ces annuités, en capital et en intérêts? (*Cour des Comptes,* 1882.)

1re année.	Intérêts : 5,00.	Capital amorti :	31,72
2e —	— 3,41.	—	33,31
3e —	— 1,75.	—	34,97

Un lingot pèse dans le vide $1^k,742$ et dans l'eau $1^k,567$. La densité de l'argent étant 10,47 et celle du cuivre 8,92, on demande, à un centigramme près, le poids de l'argent et le poids du cuivre contenus dans le lingot. (*Inspection des finances,* 1882.)

($0^k,01756$ — $1^k,72444$.)

Un emprunt a été contracté le 1er janvier 1882. Il doit être remboursé en 4 annuités de 40 000 fr. chacune, à l'échéance du 1er janvier de chacune des années suivantes. Avant la première échéance, le débiteur obtient de se libérer en un seul paiement, le 1er avril 1885.

On demande de faire connaître, à un centime près, la somme qu'il devra payer, en supposant le taux de l'intérêt à 4 $^1/_2$ p. 100, et en adoptant, pour le calcul, l'année commerciale de 360 jours. (*Inspection des finances,* 1882.)

(165 600 fr. 81 c.)

La densité d'un liquide est égale à 1,038; celle d'un second liquide à 0,994. En quelque proportion que l'on ajoute l'un de ces liquides à l'autre, le volume du premier qui entre dans le mélange se dilate de $\frac{1}{257}$, et celui du second se contracte de $\frac{1}{257}$. On les mélange de manière à obtenir un liquide de densité égale à l'unité. On demande d'exprimer à $\frac{1}{1000}$ près le rapport des deux volumes primitifs des liquides mélangés. (*Inspection des finances,* 1882.)

(0,062.)

Un commerçant a chez son banquier un compte courant à intérêts réciproques au taux de 6 p. 100. Le 1er janvier, le solde en faveur du commerçant est de 6 853 fr. 82 c.; le 5 janvier, il verse 5 830 fr.; le 10 janvier, il tire un chèque de 10 000 fr.; le 23 janvier, il remet au banquier des effets à recevoir, valeur à ce jour, pour 4453 fr. 25 c.; le 8 février, il verse 3 000 fr.; le 18 février, il retire 2 000 fr. Le 25 février, il demande le règlement de son compte, capital et intérêts. Quel est le solde de ce compte? (*Inspection des finances,* 1883.)

(8 202 fr. 79 c.)

Le capital engagé dans une usine est de 700 000 fr. dont une moitié représente le capital fixe, machine et bâtiments, l'autre le fonds de roulement. Cette usine produit annuellement 8 575 tonnes de fonte qui se vendent au prix de 125 fr. la tonne. Le prix de revient de 100 kilogrammes de fonte se décompose de la manière suivante :

1° Minerai. — 300 kilogr. à 1 fr. les 100 kilogr.	3f 00
2° Coke. — 200 kilogr. à 2 fr. les 100 kilogr.	4 00
3° Salaire des ouvriers	0 30
4° Frais généraux d'entretien.	1 40
Total du prix de revient de 100 kilogr. de fonte. .	8f 70

On compte en outre 10 p. 100 d'intérêt pour le capital fixe de l'usine, 7 p. 100 pour le fonds de roulement. 1° On demande quel est le bénéfice annuel; 2° réduire d'une même quantité le taux de l'intérêt du fonds de roulement et celui du capital fixe, de manière à pouvoir augmenter de 10 p. 100 le salaire des ouvriers sans changer le bénéfice annuel. (*Inspection des finances*, 1883.)

(266 350 fr. — Réduction de 0,3675 p. 100.)

Deux villes A et B sont distantes de 225 kilomètres. Les 100 kilogrammes de charbon coûtent 3 fr. 75 c. dans A, et 4 fr. 25 c. dans B. On demande à quelle distance de A se trouve le point de la ligne AB où le charbon coûte le même prix, qu'il vienne de A ou de B; le transport coûte 0 fr. 08 c. par tonne et par kilomètre. (*Inspection des finances*, 1883.)

($143^{k},75$.)

60 ouvriers ont mis 1 heure 4 minutes à creuser un fossé de 122 mètres de long sur 6 décimètres de large et 95 centimètres de profondeur. Le total des salaires est de 23 fr. 04 c. Quels sont, par ouvrier, 1° la quantité de déblai; 2° le prix de l'heure? (*Cour des Comptes*, 1884.)

(1° $1^{m},159$; 2° 0 fr. 36 c.)

On sait que deux décimes et demi sont ajoutés au principal des amendes de condamnation : ils appartiennent en entier à l'État qui prélève en outre 5 p. 100 pour frais de régie sur le principal des amendes ou portions d'amendes attribuées à divers. L'attribution au fonds commun sur les amendes concernant les affiches peintes est des $^3/_4$. Quelle somme a payé le débiteur d'une amende de cette nature sur laquelle le fonds commun a reçu 85 fr. 50 c.? (*Cour des Comptes*, 1884.)

(150 fr.)

Le poids d'une pièce de 5 fr. d'argent est de 25 grammes, et son titre 0,900; le titre des monnaies divisionnaires est de 0,835. Quels sont, d'après ces données 1° le poids total d'argent fin contenu dans 167 pièces de 5 fr.; 2° le nombre de pièces de 0 fr. 20 c. qu'on peut fabriquer avec ce fin; 3° quel est, en outre, le prix total de ce fin, d'après le tarif de 218 fr. 35 c. par kilogramme de matière d'argent au titre de 0,990? (*Cour des Comptes*, 1884.)

(1° $3\,757^{gr},50$; 2° 4 500; 3° 820 fr. 45 c.)

Un entrepreneur s'est libéré de sa dette, y compris les intérêts au taux annuel de 5 p. 100, en deux annuités de 7 529 fr. 27 c. Quel était le chiffre en capital? (*Cour des Comptes*, 1884.)

(14 000 fr.)

Une compagnie veut réaliser 300 millions à l'aide d'un emprunt en obligations 3 p. 100 rapportant 15 fr. d'intérêts et remboursables à 500 fr. en 60 ans. Elle veut aussi que l'annuité à payer dans chacune des 60 années soit la même que si elle empruntait 300 millions remboursables sans prime, en 60 ans, au taux de la rente perpétuelle 3 p. 100 dont le cours est 80. A quel prix devra-t-elle émettre ses obligations, et combien d'obligations amortira-t-elle dans la première année? (*Inspection des finances*, 1884.)

(428 fr. 86 c. — 4 290.)

Un entrepreneur a soumissionné la fourniture de 59 873 manteaux d'uniforme avec un rabais de 8 p. 100 sur la mise à prix de 46 fr. 75 c. Au moment de l'adjudication, on impose aux concurrents les conditions nouvelles suivantes : 1° payer les droits d'enregistrement à raison de 2,50 p. 100 du prix d'adjudication; 2° subir une retenue de 3 p. 100 au profit de la Caisse des invalides de la marine; 3° déposer pendant 15 mois, sans intérêts, un cautionnement égal à 2 p. 100 du montant de l'entreprise. Dans ces conditions, et sachant que le fournisseur en question est obligé d'emprunter à 6 p. 100 les fonds nécessaires à ce cautionnement, à quel taux doit-il réduire son offre de rabais s'il veut s'assurer le même bénéfice qu'avec sa première soumission? (*Inspection des finances*, 1884.)

(2,49 p. 100.)

On veut émettre un emprunt de 50 millions (capital nominal) en obligations 4 p. 100 à court terme, rapportant 20 fr. d'intérêt annuel, et remboursables à 500 fr. par voie de tirage au sort en une période de 4 années. Quel est le montant de l'annuité constante qu'exigera le service des intérêts et de l'amortissement de cet emprunt, et à quel chiffre doit-on fixer le prix d'émission pour que le taux de l'intérêt, y compris la prime de remboursement, soit égal à celui de la rente 4 $^1/_2$ p. 100, cotée au cours moyen de 109 fr. $+ \frac{1}{11}$? (*Inspection des finances*, 1884.)

(13 774 502 fr. 268 — 498 fr. 55 c.)

Une maison de banque ouvre des comptes de dépôts aux conditions suivantes : le taux d'intérêt est de 2 $^1/_2$ p. 100 et l'année de 360 jours; les dépôts portent intérêts du lendemain, les retraits de fonds, du jour même de l'opération. La banque se charge aussi de garder les titres de ses clients et d'en toucher les coupons; mais le montant de ces coupons ne prend valeur au compte du déposant que 7 jours après chaque échéance, le 8 janvier, par exemple, pour l'échéance du 1er janvier. On demande d'établir le règlement, en capital et intérêts, au 30 juin 1884, d'un compte dont le solde au 31 décembre précédent s'élevait à 3 562 fr. 50 c. et qui a donné lieu aux opérations suivantes : 16 janvier, versement de 4 230 fr.; 22 janvier, retrait de 1 537 fr. 40 c.; 28 février, versement de 3 940 fr.; 30 mars, retrait de 1 642 fr. 10 c.; 16 avril, versement de 3 200 fr.; 12 mai, retrait de 728 fr. 75 c. On supposera, en outre, que le titulaire de ce compte avait en dépôt à la banque un titre de rente française, 3 p. 100, de 1 600 fr., un titre de 4 $^1/_2$ ancien, de 800 fr., et un titre de 4 $^1/_2$ nouveau, de 1 000 fr. (*Inspection des finances*, 1885.)

(12 847 fr. 95 c.)

Quelle somme faut-il employer pour acheter 2 376 fr. de rente $4^1/_2$ p. 100 au cours de 108,65, en tenant compte de la commission de $^1/_8$ p. 100 prélevée par l'agent de change, et des frais de timbre du bordereau délivré par cet agent? (*Inspection des finances*, 1885.)

(57 440 fr. 70 c.)

A doit à B 300 000 fr. avec intérêts simples à 4 p. 100 à courir du 1er janvier 1877; il doit se libérer en versant 40 000 fr. par an, le premier versement ayant lieu le 1er janvier 1881, et le dernier comprenant le solde. Les imputations annuelles (ou le capital et les intérêts) se feront en sommes rondes de francs, les sommes inférieures à 0 fr. 50 c. n'étant pas comptées, et celles supérieures à 0 fr. 50 c. étant comptées pour 1 fr.

Au 1er janvier 1883, A et B conviennent de modifier le mode de libération; les paiements restant à faire à cette date seront escomptés à 4.75 p. 100, à intérêts composés, et la dette nouvelle sera transformée en 4 annuités calculées également à 4.75 p. 100, à intérêts composés, et à l'échéance des 1er janvier 1884, 1885, 1886 et 1887. Quelle annuité A devra-t-il payer? (*Inspection des finances*, 1885.)

(68 429 fr. 60 c.)

La Caisse des lycées reçoit de l'État une avance de 6 000 000 productive d'intérêts à raison de 1 $^1/_4$ p. 100 au profit du Trésor. Le remboursement a lieu par paiements trimestriels à raison de 2 fr. par chaque 100 fr. empruntés, pendant 30 ans. Quelle sera la situation de la Caisse vis-à-vis de l'État au bout de cette période ? (*Inspection des finances,* 1886.)

(La Caisse devra encore à l'État 16 519 fr.)

On émet un capital de 1 000 000 à 5 p. 100, amortissable en 50 années au moyen d'une annuité constante de 54 776 fr. 75 c. Quel sera, au bout de 25 ans, le capital amorti ; et, si à ce moment, on veut étendre à 50 années nouvelles la période de remboursement du capital restant dû, quelle sera l'annuité suffisante pour assurer le service des intérêts et de l'amortissement de ce capital ? (*Inspection des finances,* 1886.)

(Capital amorti : 227 946 fr. 51 c. — Annuité nouvelle : 42 290 fr. 35 c.)

Une société industrielle s'est formée au capital de 15 millions divisé en actions de 500 fr. Divers immeubles formant l'apport des fondateurs de l'entreprise ont été payés au moyen de la remise de 1 327 actions entièrement libérées ; sur les actions restantes, il n'a été versé que 125 fr. La société a dépensé 3 225 294 fr. 20 c. dont $^1/_6$ pour achat d'approvisionnements, et $^5/_6$ pour travaux proprement dits, sur lesquels la retenue de garantie d'un dixième est encore due aux entrepreneurs.

La première année d'exploitation s'est soldée par un bénéfice de 154 203 fr. 05 c. Conformément aux statuts, les fonds disponibles sont placés jusqu'à concurrence des $^4/_5$ en bons du Trésor et autres valeurs de premier ordre.

Exprimer la situation financière de la société en un bilan par actif et passif suivant l'usage commercial ? (*Inspection des finances,* 1886.)

Une commune contracte un emprunt au taux de 4 $^1/_2$ p. 100. Elle consacre à l'amortissement et au paiement des intérêts le produit annuel de 8 centimes extraordinaires qu'elle s'impose pour 12 ans. Le centime vaut 1 655 fr. On demande le montant du capital emprunté. (*Inspection des finances,* 1887.)

(12 073 fr.)

Plusieurs personnes se partagent une somme dans les conditions suivantes : la 1re prendra 1 000 fr. et la 10^e partie du reste ; la 2^e 2 000 fr. et la 10^e partie du reste ; la 3^e 3 000 fr. et la 10^e partie du reste, et ainsi de suite. Le partage fait, toutes les parts se trouvent égales. On demande quelle est la somme partagée et quel est le nombre des copartageants. (*Inspection des finances,* 1887.)

(81 000 fr. — 9.)

TABLE DES MATIÈRES

LIVRE PREMIER

NOTIONS RÉSUMÉES SUR LES OPÉRATIONS DE L'ARITHMÉTIQUE.

CHAPITRE I^{er}.

OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES ENTIERS.

CHAPITRE II.

OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS.

CHAPITRE III.

PUISSANCES ET RACINES.

CHAPITRE IV.

OPÉRATIONS ABRÉGÉES.

CHAPITRE V.

APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES.

LIVRE II

INTÉRÊTS SIMPLES. — ESCOMPTES. — TENUE DE LIVRES. COMPTES COURANTS. — ALLIAGES. — MONNAIES

CHAPITRE Ier.

RAPPORTS ET PROPORTIONS.

CHAPITRE II.

RÈGLE DE TROIS.

CHAPITRE III.

RÈGLE D'INTÉRÊT SIMPLE.

CHAPITRE IV.

RENTES FRANÇAISES.

CHAPITRE V.

RÈGLE D'ESCOMPTE.

2e section. — Escompte en dedans.

Quatre problèmes principaux.

3e section. — Échéance moyenne.

4e section. — Prix de vente et d'achat.

CHAPITRE VI.

NOTIONS RÉSUMÉES DE TENUE DES LIVRES EN PARTIE DOUBLE.

CHAPITRE VII.

COMPTES COURANTS AVEC INTÉRÊTS.

Méthodes pour établir un compte courant.

CHAPITRE VIII.

ALLIAGES ET MONNAIES. — CHANGE.

ALLIAGES.

MONNAIES.

CHANGE.

ÉNONCÉS DE PROBLÈMES A RÉSOUDRE.

LIVRE III

INTÉRÊTS COMPOSÉS ET LEURS APPLICATIONS AUX QUESTIONS D'ANNUITÉS, D'ASSURANCES ET D'AMORTISSEMENTS.

CHAPITRE Ier.

PROGRESSION PAR DIFFÉRENCE OU ARITHMÉTIQUE.

CHAPITRE II

PROGRESSION PAR QUOTIENT OU GÉOMÉTRIQUE.

CHAPITRE III.

LOGARITHMES.

CHAPITRE IV.

INTÉRÊTS COMPOSÉS.

CHAPITRE V

ASSURANCES.

CHAPITRE VI.

SUBVENTIONS.

CHAPITRE VII.

AMORTISSEMENT.

Section Ire. — Amortissement avec remboursement sans prime.

Section II. — Amortissement avec prime de remboursement.

Section IV. — 3 p. 100 amortissable.

ÉNONCÉS DE PROBLÈMES A RÉSOUDRE.