THÈSE

DE MÉCANIQUE,

SOUTENUE LE 9 MARS 1811,

DEVANT LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS;

SUIVIE DU PROGRAMME

DE LA THÈSE D'ASTRONOMIE,

Qui a été soutenue le 23 Mars 1811, devant la même Faculté;

PAR PIERRE-MARIE BOURDON,

Docteur ès-Sciences et Professeur de Mathématiques au Lycée Charlemagne.

PARIS,

Chez COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1811.

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES.

MM. LACROIX .... Professeur de Calcul différent. et intégral.
(*Doyen de la Faculté*).

BIOT..................... Professeur d'Astronomie.
DINET.................... Professeur adjoint.

POISSON.................. Professeur de Mécanique.

FRANCŒUR.............. Professeur d'Algèbre supérieure.

THENARD .... Professeur de Chimie.

GAY-LUSSAC .... Professeur de Physique.
HACHETTE.... .... Professeur adjoint.

HAUY.................... Professeur de Minéralogie.
BRONGNIARD........... Professeur-adjoint.

DESFONTAINES .... Professeur de Botanique.
MIRBEL.................. Professeur-adjoint.

GEOFFROY-ST-HILAIRE... Professeur de Zoologie.
DUVERNOY.............. Professeur-adjoint.

A SON AMI ET ANCIEN CONDISCIPLE,

D. S. POISSON,

Professeur de Mécanique à la Faculté des Sciences et à l'École Polytechnique, adjoint au Bureau des Longitudes.

P. M. BOURDON.

AVERTISSEMENT.

CETTE Thèse, la première qui ait été soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris, n'est publiée que d'après le conseil de plusieurs membres de la Faculté, qui ont pensé qu'elle pourrait être de quelqu'utilité aux personnes qui, comme l'Auteur, aspirent au Doctorat.

Elle est divisée en deux Parties.

Dans la première, l'Auteur a exposé la Théorie des axes principaux des corps solides, d'une manière nouvelle, quant à leur détermination et à l'examen des cas particuliers.

La seconde Partie renferme la Théorie du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe; elle n'est, à peu de chose près, qu'un extrait du *Traité de Mécanique* de M. POISSON (*). L'Auteur pouvait-il, en effet, choisir un meilleur guide que l'ouvrage d'un Géomètre dont les Mémoires académiques ont déjà assigné sa place auprès des Savans du premier ordre.

(*) Cet ouvrage, actuellement sous presse, se trouve chez COURCIER, imprimeur-libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

On trouvera à la fin de cette Thèse, le Programme tel qu'il a été présenté à la Faculté des Sciences, suivi du Programme de la Thèse d'Astronomie, qui a été également soutenue devant la Faculté, et à laquelle les occupations multipliées de l'Auteur ne lui ont pas permis de donner par écrit tous les développemens dont elle était susceptible.

THÈSE
DE MÉCANIQUE.

Nous prenons pour sujet le mouvement d'un corps solide, sollicité par des forces accélératrices quelconques, et assujéti à tourner autour d'un point fixe. Mais les lois de ce mouvement étant intimement liées avec la théorie des momens d'inertie et des axes principaux, nous commencerons par exposer l'ensemble des principes relatifs à cette théorie.

DES MOMENS D'INERTIE ET DES AXES PRINCIPAUX.

1. Rappelons d'abord en peu de mots les lois du mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe.

Si l'on suppose qu'un corps solide reçoive une impulsion capable de communiquer à ses élémens, s'ils étaient libres, des vitesses égales, parallèles et dirigées dans un plan perpendiculaire à un axe fixe, et qu'en vertu de cette impulsion seule, le corps tourne autour de cet axe, on sait que l'équation d'un semblable mouvement est

$$\omega S . r^2 dm = Mvh ,$$

M désignant la masse du corps, dm un de ses élémens, v la vitesse imprimée à chacun d'eux, r la distance de dm à l'axe fixe, h la distance du centre de gravité du corps à un plan passant par l'axe et parallèle à la direction de la vitesse v; enfin ω la vitesse angulaire commune à tous les points du système, en vertu de leur liaison réciproque, et que l'équation précédente fera connaître dans chaque cas particulier.

2. Soit en second lieu une force accélératrice φ agissant sur l'élément dm; appelons δ l'angle que forme la direction de cette force accélératrice avec la tangente au cercle dont le rayon est r et que ce point matériel tend à décrire.

L'équation du mouvement d'un corps sollicité par des forces accélératrices données, et assujéti à tourner autour d'un axe fixe, est

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{S \cdot r\varphi \cos \delta dm}{Sr^2 dm},$$

équation qui fait connaître la force accélératrice dont chaque point du système est animé au bout d'un temps quelconque.

Dans les équations précédentes, les expressions affectées du signe S représentent des intégrales qui doivent être prises dans toute l'étendue du corps solide, par rapport à l'élément dm.

Nous nous proposons de considérer en particulier l'intégrale $S.r^2dm$ qui représente *la somme des produits des élémens matériels, multipliés respectivement par les quarrés de leurs distances à l'axe fixe*, et que l'on appelle *moment d'inertie* du corps par rapport à l'axe fixe.

3. Concevons le corps solide rapporté à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, ce dernier étant pris pour l'axe fixe, r^2 devient alors égal à x^2+y^2, et en désignant par ρ la densité du corps, auquel cas $\rho dxdydz$ peut représenter l'élément dm, on a pour l'intégrale ci-dessus $S(x^2+y^2)\rho dxdydz$; c'est à proprement parler, une intégrale triple que l'on obtient dans chaque cas particulier, toutes les fois que l'équation de la surface et la loi de la densité du corps sont connues.

Cela posé, nous allons faire voir que dans un corps solide quelconque, il existe toujours un système de trois axes rectangulaires, tel, que les momens d'inertie relatifs à ces axes étant connus, on peut par de simples formules, en conclure le moment d'inertie relatif à un nouvel axe de position et de direction quelconques par rapport aux axes primitifs.

4. Premièrement, dès que l'on a obtenu le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe quelconque passant par le centre de gravité, on en déduit facilement l'expression de celui qui correspond à un tout autre axe parallèle au premier.

Soient $S.r^2dm$, $S.r'^2dm$ ces deux momens d'inertie, et a la distance du centre de gravité au second axe, la formule est

$$S.r'^2dm = S.r^2dm + Ma^2,$$

Sr^2dm étant par sa nature une quantité essentiellement positive, on peut désigner le rapport $\frac{S.r^2dm}{M}$ par K^2, et la formule se change en celle-ci

$$S.r'^2dm = M(K^2 + a^2).$$

Ce résultat indique que le plus petit de tous les momens d'inertie relatifs à des axes parallèles, correspond à celui qui passe par le centre de gravité.

5. En second lieu, concevons le corps solide rapporté à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, O étant l'origine. Appelons α, β, γ les angles que forme avec ces trois axes, une droite quelconque passant par l'origine, p la distance de l'élément dm à ce nouvel axe. On a pour l'expression du moment d'inertie relatif à cet axe,

$$\begin{aligned} S.p^2dm = {} & \sin^2\alpha\, S.x^2dm + \sin^2\beta\, S.y^2dm + \sin^2\gamma\, S.z^2dm \\ & - 2\cos\alpha\cos\beta\, S.xydm - 2\cos\alpha\cos\gamma\, S.xzdm \\ & - 2\cos\beta\cos\gamma\, S.yzdm, \end{aligned}$$

formule qui donnera immédiatement le moment d'inertie relatif à un axe quelconque passant par l'origine, dès que l'on connaîtra les six intégrales qui y entrent et qui s'étendent à la masse entière du corps.

Elle se simplifierait beaucoup si les trois axes primitifs étaient choisis de manière que l'on eût

$$S.xydm = 0, \quad S.xzdm = 0, \quad S.yzdm = 0.$$

Admettons pour le moment qu'un semblable système existe dans tout corps solide, et prenons-le pour celui des axes primitifs, la formule devient

$$S.p^2dm = \sin^2\alpha\, S.x^2dm + \sin^2\beta\, S.y^2dm + \sin^2\beta\, S.z^2dm.$$

Supposons en outre que l'on connaisse déjà les momens d'inertie du corps par rapport à ces trois axes, ensorte que l'on ait

$$A = S(y^2+z^2)\,dm, \quad B = S(x^2+z^2)\,dm, \quad C = S(x^2+y^2)\,dm;$$

il en résulte

$$S.p^2dm = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma.$$

On pourra toujours, au moyen de cette formule et de celle du n° 4, obtenir le moment d'inertie d'un corps relatif à un axe quelconque, dès que l'on connaîtra les quantités A, B, C.

On appelle *axes principaux* d'un corps solide, le système des trois axes pour lesquels on a simultanément $S.xydm = 0$, $S.xzdm = 0$, $S.yzdm = 0$, et *momens d'inertie principaux*, les momens d'inertie qui s'y rapportent.

6. En supposant que A soit le plus grand des trois momens d'inertie principaux, et C le plus petit, la formule ci-dessus peut, à cause de la relation $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, se mettre sous la forme

$$S.p^2dm = A - (A - B)\cos^2\beta - (A - C)\cos^2\gamma$$
$$S.p^2dm = C + (A - C)\cos^2\alpha + (B - C)\cos^2\beta,$$

ce qui prouve que le plus grand et le plus petit des trois momens d'inertie principaux A, B, C sont le plus grand et le plus petit de tous ceux qui se rapportent à des axes passant par la même origine. Ainsi on peut dire (n° 4) que le plus petit de tous les momens d'inertie qu'un corps solide puisse avoir, est le plus petit des momens rapportés aux trois axes principaux qui passent par le centre de gravité.

Pour compléter la théorie des momens d'inertie, il reste à démontrer l'existence des axes principaux dans un corps solide de figure quelconque

Quoique cette question soit traitée dans tous les ouvrages, nous croyons devoir lui donner un peu de développement, et exposer une méthode nouvelle qui nous paraît offrir quelques avantages sur celle qui est généralement connue.

Détermination des axes principaux dans les corps solides.

7. Nous nous proposons de démontrer que dans un corps solide quelconque, il existe toujours un système d'axes rectangulaires par rapport auxquels les intégrales $S.xydm$, $S.xzdm$, $S.yzdm$ prises dans toute l'étendue du corps, sont égales à zéro. Nous ferons voir ensuite que ce système d'axes principaux est en général unique pour chaque point de l'espace, mais que dans des cas particuliers, il en existe une infinité.

Rapportons le solide à trois axes rectangulaires quelconques Ox, Oy, Oz, O étant l'origine, et tâchons de déterminer les directions de trois nouveaux axes Ox', Oy', Oz' tels que les quantités $S.x'y'dm$, $S.x'z'dm$, $S.y'z'dm$ soient égales à zéro.

Les formules de la transformation des coordonnées qui font connaître x, y, z en fonction de x', y', z', sont

$$x = ax' + by' + cz', \quad y = a'x' + b'y' + c'z', \quad z = a''x' + b''y' + c''z'.$$

a, a', a'' sont les cosinus des angles que forme l'axe des x' avec les axes des x, y, z.

b, b', b'' et c, c', c'' ont la même acception par rapport aux axes des y' et des z'.

Mais si l'on veut au contraire obtenir x', y', z' en fonction de x, y, z, il est évident que l'on aura, en conservant les mêmes notations,

$$x' = ax + a'y + a''z, \quad y' = bx + b'y + b''z, \quad z' = cx + c'y + c''z.$$

Les quantités $a, a', a'', b, b'\ldots\ldots$ sont liées par les relations

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1 \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1 \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1 \end{array}\right\}\ldots\ldots(1) \qquad \left.\begin{array}{l} ab + a'b' + a''b'' = 0 \\ ac + a'c' + a''c'' = 0 \\ bc + b'c' + b''c'' = 0 \end{array}\right\}\ldots\ldots(2).$$

Cela posé, substituons dans les équations

$$S.x'y'dm = 0\,, \quad S.x'z'dm = 0\,, \quad S.y'z'dm = 0\,,$$

à la place de x', y', z', leurs valeurs, et faisons, pour plus de simplicité,

$$\begin{array}{lll} S.x^2dm = P\,, & S.y^2dm = P'\,, & S.z^2dm = P'', \\ S.xydm = Q\,, & S.xzdm = Q', & S.yzdm = Q''. \end{array}$$

Ces six intégrales sont des quantités données qui dépendent de la nature du corps et de la direction des axes Ox, Oy, Oz qui ont été pris arbitrairement.

On obtient les trois équations

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} Pab \\ +P'a'b' \\ +P''a''b'' \end{array}\right. + Q(ab'+ba') + Q'(ab''+ba'') + Q''(a'b''+b'a'') = 0 \\[2ex] \left\{\begin{array}{l} Pac \\ +P'a'c' \\ +P''a''c'' \end{array}\right. + Q(ac'+ca') + Q'(ac''+ca'') + Q''(c''a'+c'a'') = 0 \\[2ex] \left\{\begin{array}{l} Pbc \\ +P'b'c' \\ +P''b''c'' \end{array}\right. + Q(bc'+cb') + Q'(bc''+cb'') + Q''(b'c''+c'b'') = 0 \end{array}\right\}\ldots(3).$$

Les neuf quantités $a, a', a'', b, b', b''\ldots\ldots$ sont liées entre elles par les équations des groupes (1), (2) et (3) qui doivent par conséquent servir à les déterminer.

[Nous aurons recours à une méthode d'élimination analogue à celle dont M. Biot fait usage dans son *Traité des Surfaces du second ordre*, et nous observerons à cette occasion, que le problème de la détermination des axes principaux dans les corps solides revient, quant aux calculs, à la question qui consiste à déterminer les axes des surfaces du second ordre. La discussion des cas particuliers est absolument la même dans l'un et l'autre problème.

La solution complète du second problème est insérée dans le troisième numéro du second volume de la *Correspondance de l'Ecole Polytechnique*, numéro qui doit paraître incessamment.]

Multipliant les deux premières équations du troisième groupe respectivement par c et b, et retranchant la deuxième de la première, on a

$$\left.\begin{array}{l} P'a'(cb'-bc')+Qa(cb'-bc')+Q''a''(cb'-bc') \\ +P''a''(cb''-bc'')+Q'a(cb''-bc'')+Q''a'(cb''-bc'') \end{array}\right\}=0,$$

d'où

$$(P'a'+Qa+Q''a'')(cb'-bc')+(P''a''+Q'a+Q''a')(cb''-bc'')=0\,\ldots(4).$$

Multipliant de nouveau les mêmes équations par c' et b', puis retranchant la première de la deuxième, il vient, toute réduction faite,

$$(Pa+Qa'+Q'a'')(cb'-bc')+(P''a''+Q'a+Q''a')(b'c''-c'b'')=0\ldots(5).$$

Mais en agissant de la même manière sur les deux premières équations du groupe (2), on a aussi

$$\left.\begin{array}{l} a'(cb'-bc')+a''(cb''-bc'')=0 \\ a(cb'-bc')+a''(b'c''-c'b'')=0 \end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} \dfrac{cb''-bc''}{cb'-bc'}=-\dfrac{a'}{a''} \\ \dfrac{b'c''-c'b''}{cb'-bc'}=-\dfrac{a}{a''} \end{array}\right.$$

Substituant ces valeurs dans les équations précédentes, et réduisant, il vient enfin

$$(P''-P')a'a''-Qaa''+Q'aa'+Q''(a'^2-a''^2)=0\ldots\ldots(6),$$
$$(P''-P)aa''-Qa'a''+Q'(a^2-a''^2)+Q''aa'=0\ldots\ldots(7).$$

De ces équations, on déduit encore la suivante

$$(P'-P)aa'+Q(a^2-a'^2)-Q'a'a''+Q''aa''=0\ldots\ldots(8),$$

que l'on pourra, dans certains cas, substituer à l'une d'elles, et qui servira d'équation de condition.

Les deux équations (6) et (7) combinées avec $a^2 + a'^2 + a''^2 = 1$, donneront les valeurs de a, a', a''.

Posons

$$\frac{a}{a''} = t, \quad \frac{a'}{a''} = u, \quad \text{d'où} \quad a = a''t, \quad a' = a''u,$$

on a $\quad a'' = \frac{1}{\sqrt{1+t^2+u^2}}, \quad a' = \frac{u}{\sqrt{1+t^2+u^2}}, \quad a = \frac{t}{\sqrt{1+t^2+u^2}},$

et les équations ci-dessus se changent en celles-ci :

$$Q''u^2 + Q'ut + (P'' - P')\,u - Qt - Q'' = 0 \ldots (9),$$
$$Q't^2 + Q''ut + (P'' - P)\,t - Qu - Q' = 0 \ldots (10),$$
$$Qt^2 + (P' - P)\,ut - Qu^2 + Q''t - Q'u = 0 \ldots (11).$$

Si l'on prend la valeur de t dans la première équation et qu'on la substitue dans la seconde, le terme en u^4 disparaît, et on obtient finalement une équation du troisième degré (dont nous donnerons plus bas la forme). Or, toute équation du troisième degré ayant au moins une racine réelle, il s'ensuit que u a au moins une valeur réelle, et qu'il en est par conséquent de même de t, a, a', a''.

(Il est bon d'observer que les quantités u et t peuvent passer par tous les états de grandeur possible. En effet t, par exemple, ou sa valeur $\frac{a}{a''}$, représente la tangente de l'angle que forme avec l'axe des z la projection de l'axe des x' sur le plan des xz).

Maintenant, si l'on jette les yeux sur les équations des groupes (1), (2) et (3), on reconnaît qu'elles sont symétriques par rapport aux quantités a, a', a''; b, b', b'', c, c', c''. Ensorte que si l'on éliminait à leur tour, a, a', a'' et c, c', c'', on parviendrait à trois équations en b, b', b'' identiques avec les équations (9) et (10), et la détermination de ces quantités dépendrait de la même équation en u. Même raisonnement par rapport à c, c', c''.

Il résulte de là que l'équation finale en u, ne doit pas plutôt donner la valeur correspondante aux quantités a, a', a'' que les deux valeurs qui correspondent à b, b', b'' et c, c', c'', et par conséquent doit les donner toutes trois à la fois ; et comme une de ces racines est nécessairement réelle, il est naturel de penser que les deux

deux autres le sont également, puisqu'on ne saurait exprimer dans le calcul aucune différence entre les trois axes principaux dont on cherche la position.

Au reste voici un moyen rigoureux de démontrer la réalité de ces racines.

L'équation en u ayant au moins une valeur réelle, on peut prendre pour axe des x' la droite déterminée par les valeurs correspondantes de a, a', a'', en laissant d'ailleurs les axes des y' et des z' placés d'une manière quelconque dans un plan perpendiculaire à cet axe.

Il est évident que pour ces trois axes, les deux premières équations du groupe (3), et par conséquent les conditions $S.x'y'dm = 0$ et $S.x'z'dm = 0$ seront satisfaites. Car de même que les deux équations (6) et (7) sont une conséquence des deux premières équations de chacun des groupes (2) et (3), de même aussi les deux premières équations du groupe (3) sont une conséquence des équations (6), (7) et des deux premières équations du groupe (2).

Cela posé, conservons l'axe des x' et faisons varier les axes des y' et des z' dans leur plan, de manière que, par rapport à ces trois nouveaux axes, on ait :

$$S.x'y''dm = 0, \quad S.x'z''dm = 0, \quad S.y''z''dm = 0$$

On a, d'après les formules connues de la transformation des coordonnées en deux dimensions :

$$y' = y'' \cos\alpha - z'' \sin\alpha, \quad z' = y'' \sin\alpha + z'' \cos\alpha,$$

α désignant l'angle que forme l'axe des y'' avec l'axe des y'. On tire de là réciproquement

$$y'' = y'\cos\alpha + z' \sin\alpha, \quad z'' = -y' \sin\alpha + z' \cos\alpha.$$

Substituant ces valeurs dans les trois équations précédentes, les deux premières se vérifient d'elles-mêmes, et on obtient pour la troisième (en posant pour abréger $S.y'^2dm = R$; $S.z'^2dm = R'$; $S.y'z'dm = S$),

$$(R' - R) \sin\alpha \cos\alpha + S(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0;$$

d'où $$\tang^2\alpha - \frac{R'-R}{S}\tang\alpha - 1 = 0.$$

Le dernier terme de cette équation étant essentiellement négatif, les deux racines sont réelles. De plus, en les désignant par t' et t'', on a $t't'' = -1$, ce qui prouve que si l'une donne la position de l'axe des y'', l'autre donne celle des z''. On voit donc que par une double transformation de coordonnées, on parvient à un système d'axes principaux tels que nous les avons définis.

Puisque nous venons de démontrer l'existence réelle d'un système de trois axes différens, par rapport auxquels les équations des groupes (1), (2), (3) seraient satisfaites, il s'ensuit, 1°. que les trois racines de l'équation en u sont réelles; 2°. que ces trois racines donnent les positions respectives des trois axes.

Il est facile de voir qu'il n'existe en général qu'un seul système d'axes principaux, qui se coupent au point O; car pour qu'il en existât plusieurs, il faudrait que l'équation en u fût d'un degré supérieur au troisième, et renfermât trois fois autant de racines réelles qu'il y aurait de ces systèmes. Mais nous allons voir que dans des cas particuliers il peut en exister une infinité.

Cas particuliers.

8. La détermination des trois valeurs de u entraîne dans des calculs très-compliqués. Mais il existe des cas où ces valeurs peuvent être obtenues facilement : c'est lorsque l'une des deux équations (9) et (10), ou toutes les deux, sont décomposables en deux facteurs du premier degré.

Or, si l'on recherche la condition qui doit avoir lieu pour que l'équation (9) soit décomposable, on trouve la relation

$$QQ'(P''-P') + Q''(Q^2-Q'^2) = 0,$$

ou, pour abréger, $$L = 0.$$

Il suffit de tirer la valeur de u de cette équation, puis d'exprimer que la quantité sous le radical est un carré parfait ; ce qui donne la relation ci-dessus.

Cette relation étant supposée exister entre les coefficiens P', P'', Q, Q', Q'', l'équation (9) peut se mettre sous la forme

$$(Q'u - Q)\,(QQ''u + QQ't + Q'Q'') = 0 \ldots\ldots (12).$$

Cela posé, le premier facteur donne $u = \frac{Q}{Q'}$; substituant dans l'équation (10), il vient

$$t^2 + \frac{QQ'' + Q'(P'' - P)}{Q'^2} - \frac{Q'^2 + Q^2}{Q'^2} = 0,$$

équation dont les deux racines sont essentiellement réelles.

Le deuxième facteur donne $u = -\frac{QQ't + Q'Q''}{QQ''}$, d'où en substituant dans l'équation (10),

$$[QQ''(P - P'') - Q^2Q' + Q'Q''^2]\,t = 0,$$

équation qui a pour valeur unique $t = 0$, ce qui donne $u = -\frac{Q'}{Q}$, et par conséquent,

$$a = 0, \quad a' = \frac{-Q'}{\sqrt{Q^2 + Q'^2}}, \quad a'' = \frac{Q}{\sqrt{Q^2 + Q'^2}}.$$

9. Si dans l'équation qui vient de donner la troisième valeur de t on suppose que le coefficient soit nul, c'est-à-dire que l'on ait

$$QQ''(P - P'') + Q'(Q''^2 - Q^2) = 0, \quad \text{ou} \quad M = 0,$$

cette équation devient identique, ce qui annonce que le système des trois axes principaux est déterminé.

Et en effet, la condition $M = 0$ étant satisfaite, l'équation (10) est aussi décomposable en deux facteurs du premier degré, et peut être mise sous la forme

$$(Q''t - Q)\,(QQ''u + QQ't + Q'Q'') = 0 \ldots (13).$$

Si l'on compare cette équation avec l'équation (12), on reconnaît qu'elles ont un facteur commun qui, égalé à zéro, donnera une infinité de valeurs pour u et t. Ainsi il existe, dans ce cas, une infinité de systèmes d'axes principaux passant par le même point; mais tous ces systèmes jouissent d'une propriété remarquable, c'est que l'un des axes de tous ces systèmes a une direction fixe dans l'espace, et tous les autres sont situés dans un plan perpendiculaire au premier.

Pour le prouver, remarquons que les équations (12) et (13) sont satisfaites,

1°. Par le système $Q'u - Q = 0$, $Q''t - Q = 0$;
2°. Par l'équation $QQ''u + QQ't + Q'Q'' = 0$.

Le premier système donne

$$u = \frac{Q}{Q'}, \quad t = \frac{Q}{Q''};$$

d'où, en désignant par a, a', a'' les cosinus des angles que forme cet axe particulier avec les axes primitifs,

$$a'' = \frac{Q'Q''}{\sqrt{Q'^2Q''^2 + Q^2Q''^2 + Q^2Q'^2}}, \quad a' = \frac{QQ''}{\sqrt{}}; \quad a = \frac{QQ'}{\sqrt{}}.$$

Désignons maintenant par $b_\circ$, $b_,$, $b_{,,}$; $c_\circ$, $c_,$, $c_{,,}$ les cosinus relatifs aux deux autres axes conjugués avec celui-ci.

Comme ces trois axes sont rectangulaires, on a les relations

$$ab_\circ + a'b_, + a''b_{,,} = 0, \quad ac_\circ + a'c_, + a''c_{,,} = 0,$$

ou mettant à la place de a, a', a'' les valeurs que l'on vient de trouver

$$QQ'b_\circ + QQ''b_, + Q'Q''b_{,,} = 0, \quad QQ'c_\circ + QQ''c_, + Q'Q''c_{,,} = 0;$$

et si pour déterminer les quantités $b_\circ\, b_,\, b_{,,}$, $c_\circ\, c_,\, c_{,,}$, on fait

$$b_\circ = b_{,,}t, \quad b_, = b_{,,}u; \quad \text{puis} \quad c_\circ = c_{,,}t, \quad c_, = c_{,,}u,$$

les deux équations ci-dessus se réduisent à

$$QQ''u + QQ't + Q'Q'' = 0,$$

qui est précisément celle dont on doit tirer les valeurs de u et de t propres à donner tous les axes autres que celui qui correspond à $u = \frac{Q}{Q'}$; $t = \frac{Q}{Q''}$.

Concluons de là que lorsque les conditions

$$QQ'(P'' - P') + Q''(Q^2 - Q'^2) = 0 \quad \text{ou} \quad L = 0$$
$$QQ''(P - P'') + Q'(Q''^2 - Q^2) = 0 \quad \text{ou} \quad M = 0$$

existent simultanément, le nombre des systèmes d'axes principaux est infini. Mais tous ces systèmes ont pour axe commun la ligne déterminée par les équations

$$u = \frac{Q}{Q'}, \quad \text{et} \quad t = \frac{Q}{Q''}.$$

Remarquons en passant que les conditions $L = 0$, $M = 0$ renferment la suivante

$$Q'Q''(P' - P) + Q(Q'^2 - Q''^2) = 0 \quad \text{ou} \quad N = 0,$$

et qu'avec cette condition l'équation (11) peut se mettre sous la forme

$$(Q'u - Q''t)(QQ''u + QQ't + Q'Q'') = 0.$$

10. Pour découvrir plus facilement la nature du solide pour lequel les équations $L=0$, $M=0$, $N=0$ sont satisfaites, observons que, puisqu'on est certain que dans tout corps solide, il existe au moins un système d'axes principaux, on peut supposer que ce système soit celui des axes Ox, Oy, Oz, que l'on avait pris d'abord arbitrairement, et chercher ensuite les conditions nécessaires pour qu'il en existe un ou plusieurs autres.

On a dans cette hypothèse,

$$Q = S.xydm = 0, \quad Q' = S.xzdm = 0, \quad Q'' = S.yzdm = 0.$$

En outre si l'on désigne (n° 5) par A, B, C les trois momens d'inertie pris par rapport aux axes principaux des x, y, z, on a les relations

$$P = S.x^2dm = \frac{B+C-A}{2}, \quad P' = S.y^2dm = \frac{A+C-B}{2}, \quad P'' = S.z^2dm = \frac{A+B-C}{2},$$

d'où

$$P'' - P' = B - C, \quad P'' - P = A - C, \quad P' - P = A - B.$$

Les équations (6), (7), (8) deviennent alors

$$(B-C)a'a'' = 0 \ldots (14) \mid (A-C)aa'' = 0 \ldots (15) \mid (A-B)aa' = 0 \ldots (16).$$

Cela posé, 1°. si les trois quantités A, B, C sont inégales, il faut et il suffit pour que ces trois équations soient satisfaites, que deux quelconques des quantités a, a', a'' soient nulles, et la troisième est nécessairement égale à 1 d'après l'équation $a^2 + a'^2 + a''^2 = 1$.

Même raisonnement par rapport aux quantités b, b', b'', c, c', c''.

Par exemple, si l'on pose $a'=0$; $a''=0$ d'où $a=1$. Il en résultera, en ayant d'ailleurs égard aux équations des groupes (1) et (2)

$$b'=1\,,\ b''=0\,,\ b=0 \quad \text{et} \quad c'=0,\ c''=1\,,\ c=0\,,$$

ou bien $\quad b'=0\,,\ b''=1\,,\ b=0 \quad$ et $\quad c'=1\,,\ c''=0\,,\ c=0.$

Or il est évident, d'après ces valeurs, que les nouveaux axes coïncident avec les anciens.

Ainsi toutes les fois que les trois momens d'inertie d'un corps, par rapport à un système d'axes principaux, sont inégaux, ce système est unique pour le même point.

2°. Si deux des quantités A, B, C sont égales, que l'on ait, par exemple, $A=B$, l'équation (16) se vérifie d'elle-même; mais les deux équations (14) et (15) deviennent

$$(A-C)\,a'a''=0\,, \quad (A-C)\,aa''=0.$$

Pour que ces équations soient satisfaites, il faut et il suffit que l'on ait $a''=0$, a et a' restant indéterminées, ou bien

$$a=0\,,\quad a'=0\,;\quad \text{d'où} \quad a''=1.$$

Il en est de même par rapport aux quantités b, b', b''; c, c' c''.

On peut poser, par exemple,

$a''=0$, a et a' restant indéterminées;
$b''=0$, b et b' restant indéterminées;

mais alors on a nécessairement

$$c''=1\,,\quad c'=0\,,\quad c=0.$$

Ce système de valeurs indique évidemment que le nouvel axe des z se confond avec l'ancien, et que les deux autres axes peuvent prendre une position quelconque dans le plan des xy.

On pourrait prendre encore

$$a''=1\,,\quad a'=0\,,\quad a=0\,;$$

et en ayant égard aux équations du groupe (2), il en résulterait

$b''=0$, b, b' restant indéterminées;
$c''=0$, c, c' restant indéterminées;

c'est-à-dire que le nouvel axe des x' se confondrait avec l'ancien axe des z, et les deux autres axes pourraient prendre une position quelconque dans le plan des xy.

Remarquons que cet axe, dont la direction reste fixe dans l'espace, est perpendiculaire au plan des deux axes, par rapport auxquels on a supposé les momens d'inertie égaux.

Ainsi, toutes les fois que deux quelconques des quantités A, B, C sont égales, le nombre des systèmes d'axes principaux est infini. Mais tous ces systèmes ont un axe commun, celui qui est perpendiculaire au plan des deux axes auxquels correspondent deux momens d'inertie égaux.

La formule du n° (6),

$$S.p^2dm = A - (A - B)\cos^2\beta - (A - C)\cos^2\gamma,$$

se réduit dans l'hypothèse de $A = B$, à

$$S.p^2dm = A - (A - C)\cos^2\gamma.$$

Or pour tous les axes situés dans le plan xy, on a

$$\cos\gamma = 0, \quad \text{d'où} \quad S.p^2dm = A;$$

ce qui prouve que tous les momens d'inertie pris par rapport à ces axes sont égaux.

3°. Si l'on suppose $A = B = C$ les trois équations (14), (15), (16) se vérifient d'elles-mêmes. Ainsi les quantités a, a',... restent indéterminées; et en effet, les équations du groupe (3) se réduisent à $0 = 0$. Ainsi, dans ce cas, si l'on mène arbitrairement par le point O trois axes rectangulaires, on obtiendra un système d'axes principaux.

D'ailleurs, la formule du n° 5 se réduisant à $Sp^2dm = A$, prouve que tous les momens d'inertie sont égaux.

---

11. Dans la discussion des cas particuliers, nous n'avons fait aucun usage de l'équation en u, parce qu'elle est très-compliquée. Cependant, pour ne rien laisser à desirer sur cette matière, nous croyons devoir faire connaître une forme sous laquelle elle est susceptible d'être mise, et qui en rend la discussion assez simple.

En supposant toujours, comme nous en sommes convenus précédemment,

$$L = QQ'(P''-P') + Q''(Q^2 - Q'^2)$$
$$M = QQ''(P - P'') + Q'(Q''^2 - Q^2)$$
$$N = Q'Q''(P' - P) + Q(Q'^2 - Q''^2);$$

[les quantités L, M, N sont évidemment liées entre elles par la relation

$$LQ'' + MQ' + NQ = 0 \ldots (X)]$$

on parvient après quelques transformations, à l'équation

$$NQ''u^3 + [N(P'' - P') + MQ'' - LQ']u^2$$
$$+ [LQ + M(P'' - P') + NQ'']u - MQ'' = 0$$

(voyez le Tableau ci-joint pour la formation de cette équation).

Soit, 1°. $N = 0$, l'une des valeurs de u devient infinie. Quant aux deux autres, elles seront données par l'équation

$$(MQ'' - LQ')u^2 + [LQ + M(P'' - P')]u - MQ'' = 0,$$

qui devient, à cause de la relation (X) d'où l'on tire $L = -\frac{Q'}{Q''}M$,

$$u^2 + \frac{Q''(P'' - P') - QQ'}{Q'^2 + Q''^2}u - \frac{Q''^2}{Q''^2 + Q'^2} = 0.$$

On parviendrait à cette même équation en remontant à l'équation (11) qui, dans le cas de $N = 0$, peut être mise sous la forme

$$(Q'u - Q''t)(Q''Qu + QQ't + Q'Q'') = 0.$$

Le premier facteur donne $t = \frac{Q'}{Q''}u$, d'où en substituant dans l'équation (9),

$$u^2 + \frac{Q''(P'' - P') - QQ'}{Q'^2 + Q''^2}u - \frac{Q''^2}{Q''^2 + Q'^2} = 0.$$

Le deuxième facteur donne $t = -\frac{QQ''u - Q'Q''}{QQ'}$, d'où en substituant dans l'équation (9),

$$[QQ'(P'' - P') + Q''(Q^2 - Q'^2)]u = 0,$$

équation qui a pour valeur $u = 0$, d'où l'on déduit $t = -\frac{Q''}{Q}$.

Mais ce système de valeurs est étranger, car en le substituant dans l'équation (10), on reconnaît qu'elle n'est pas satisfaite.

Ce

$$L = QQ'(P''-P') + Q''(Q^2-Q'^2)$$
$$M = QQ''(P-P') + Q'(Q''^2-Q^2)$$
$$N = Q'Q''(P'-P) + Q(Q'^2-Q''^2)$$

Nota. Les termes soulignés sont ceux sur lesquels on a opéré des réductions.

Equation en u.

En éliminant t entre les deux équations (9) et (10), on trouve une équation de la forme

$$Au^3 + Bu^2 \underline{+} Cu + D = 0.$$

$$A = 2Q'Q''(\underline{P''}-P') - Q'Q''(\underline{P''}-P) + QQ''^2 - Q'Q''(\underline{P''}-P') - QQ'^2 = Q'Q''(P-P') + Q(Q''^2-Q'^2) = -N$$

$$B = Q'(P''-P')^2 - 2\underline{Q'Q''^2} + QQ''(\underline{P''}-P) - Q'(P''-P)(P''-P') + QQ''(P''-P') + \underline{Q'Q''^2} + 2Q^2\underline{Q'} - Q'^3 = \frac{LQ' - MQ'' - N(P''-P')}{Q''}$$

Réduction du coefficient B.

$$\begin{aligned}
&\underbrace{QQ''(P''-P) + Q'(Q^2-Q''^2)}_{-M} + Q'(\underline{P''}-P')^2 - Q'(P''-\underline{P})(P''-P') + QQ''(P''-P') + Q^2Q' - Q'^3 \\
&\qquad + Q'(P''-\underline{P')}(P-P') + QQ''(\underline{P''}-P') + Q^2Q' - Q'^3 \\
&\qquad \underbrace{\frac{P''-P'}{Q''}\left[Q'Q''(P-P') + QQ''^2 - QQ'^2\right]}_{\frac{-N(P''-P')}{Q''}} + \frac{QQ'^2(P''-P')}{\underline{Q''}} + Q^2\underline{Q'} - Q'^3 \\
&\qquad + \underbrace{\frac{Q'}{Q''}\left[QQ'(P''-P') + Q''(Q^2-Q'^2)\right]}_{+\frac{LQ'}{Q''}}.
\end{aligned}$$

$$C = -2Q'Q''(\underline{P''}-P') + Q(P''-P)(P''-P') + Q'\underline{Q''}(P''-P) - \underline{QQ''^2} - Q^3 + 2\underline{QQ'^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{NQ'' - M(P''-P') - LQ}{Q''}$$

Réduct. du coefficient C.

$$\begin{aligned}
&\underbrace{Q'Q''(P'-P) + Q(Q'^2-Q''^2)}_{+N} - Q'Q''(\underline{P''}-P') + Q(P''-\underline{P)}\,(P''-P') - Q^3 + QQ'^2 \\
&\qquad + \underbrace{\frac{P''-P'}{Q''}\left[QQ''(P''-P) - Q'Q''^2 + Q'Q^2\right]}_{-\frac{M(P''-P')}{Q''}} - \frac{Q'Q^2(P''-P')}{\underline{Q''}} - \underline{Q^3} + \underline{QQ'^2} \\
&\qquad - \underbrace{\frac{Q}{Q''}\left[QQ'(P''-P') + Q''Q^2 - Q''Q'^2\right]}_{-\frac{QL}{Q''}}
\end{aligned}$$

$$D = Q'Q''^2 - QQ''(P''-P) - Q'Q^2 = +M.$$

Ainsi l'équation est de la forme

$$NQ''u^3 + \left[N(P''-P') + MQ'' - LQ'\right]u^2 + \left[M(P''-P') + LQ - NQ''\right]u - MQ'' = 0.$$

Ce système étranger provient de la manière dont l'équation (11) a été formée avec les équations (9) et (10).

2°. Soit $M=0$, il en résulte

$$u=0 \ldots\ldots NQ''u^2+[N(P''-P')-LQ']u+LQ-NQ''=0,$$

ou, à cause de $L=-\frac{Q}{Q''}N$,

$$u^2+\frac{Q''(P''-P')+QQ'}{Q''^2}u-\frac{Q^2+Q''^2}{Q''^2}=0,$$

équation à laquelle on parviendrait facilement (n° 8), en observant que l'équation (10) peut, dans ce cas, être mise sous la forme

$$(Q''t-Q)(QQ''u+QQ't+Q'Q'')=0.$$

3°. Soit $L=0$, il en résulte

$$NQ''u^3+[N(P''-P')+MQ'']u^2+[M(P''-P')-NQ'']u-MQ''=0,$$

ou, à cause de $M=-\frac{Q}{Q'}N$,

$$Q'Q''u^3+[Q'(P''-P')-QQ'']u^2-[Q(P''-P')+Q'Q'']u+QQ''=0.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$Q''u^2(Q'u-Q)+(P''-P')u(Q'u-Q)-Q''(Q'u-Q)=0,$$

d'où $\quad Q'u-Q=0 \quad$ et $\quad u^2+\frac{(P''-P')}{Q''}u-1=0.$

Et en effet, d'après la condition $L=0$, l'équation (9) peut se mettre sous la forme

$$(Q'u-Q)(QQ''u+QQ't+Q'Q'')=0,$$

équation qui est satisfaite en posant $Q'u-Q=0$.

4°. Enfin, supposons que les conditions $L=0$, $M=0$, $N=0$ soient satisfaits simultanément; l'équation en u se réduit à $0=0$, et u reste entièrement indéterminé.

Cette indétermination tient, comme nous l'avons déjà vu, à l'existence d'un facteur commun entre les équations (9), (10) et (11).

Des axes principaux de rotation.

12. Les axes principaux dont la considération est si utile dans la théorie des momens d'inertie, jouissent d'une propriété très-importante en mécanique, et qui leur a fait donner le nom d'*axes principaux de rotation.*

Lorsqu'un corps solide tourne autour d'un axe fixe, en vertu d'une impulsion primitive, chacun de ses élémens exerce sur l'axe une pression due à sa force centrifuge, et il en résulte en général une pression totale que l'on peut facilement déterminer.

Concevons le solide rapporté à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, et prenons l'axe fixe pour l'axe des z; la force centrifuge de l'élément dm a, comme on le sait, pour expression le carré de sa vîtesse divisé par sa distance à l'axe fixe. Dans le cas que nous considérons, cette expression est donc $\frac{(r\omega)^2}{r}$ ou $r\omega^2$; ω désignant la vîtesse angulaire et r la distance à l'axe fixe.

La *force motrice* ou la pression exercée sur l'axe, est donc $r\omega^2 dm$. Ainsi on a pour les composantes de cette pression, parallèles aux axes des x et des y,

$$r\omega^2 dm \times \frac{x}{r}, \quad \text{ou} \quad \omega^2 x dm \quad \text{et} \quad \omega^2 y dm.$$

Si l'on désigne par α et β les coordonnées du centre de gravité, parallèles à ces axes, $\omega^2 S.xdm$ ou $\omega^2 M\alpha$ et $\omega^2 S.ydm$ ou $\omega^2 M\beta$ expriment les deux résultantes de toutes les pressions décomposées suivant les mêmes axes.

Enfin on a, pour déterminer les distances z', z'' à l'origine des points d'application de ces deux résultantes, les équations

$$M\alpha z' = S.xzdm, \quad M\beta z'' = S\,yzdm.$$

Lorsque les distances z' et z'' seront égales, les deux résultantes se réduiront à une seule égale à $\omega^2 M\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

Actuellement, supposons que l'axe fixe Oz soit un des trois axes principaux qui se coupent au centre de gravité G; on a, dans cette hypothèse, $\alpha=0$, $\beta=0$.

Soit d'ailleurs γ la distance du point G au point O, transportons l'origine des coordonnées au point G, sans changer la direction des axes, les coordonnées de dm deviendront x, y et $z-\gamma$, et comme la ligne Gz est un *axe principal*, on aura

$$S.x\,(z-\gamma)\,dm = S.xzdm - \gamma S.xdm = 0,$$
$$S.y\,(z-\gamma)\,dm = S.yzdm - \gamma S.ydm = 0,$$

et par conséquent,

$$S.xzdm = 0, \quad S.yzdm = 0,$$

à cause de

$$S.xdm = M\alpha = 0, \quad S.ydm = M\beta = 0.$$

La résultante $\omega^2 M\alpha$ des forces dirigées dans le plan des xz, et la somme $\omega^2 S.xzdm$ de leurs momens, étant nulles, ces forces se font équilibre indépendamment de l'axe fixe. Il en est de même des forces dirigées dans le plan des yz.

Ainsi, dans l'hypothèse actuelle, les forces centrifuges des points matériels n'exercent aucune pression sur l'axe de rotation, ensorte que si l'axe devenait libre, le corps tournerait autour de cet axe comme auparavant, et comme si l'axe était fixe.

Si la ligne Oz ne passe pas par le centre de gravité, mais qu'elle soit un des axes principaux du corps qui se coupent au point O, on n'a plus $\alpha=0$, $\beta=0$; mais on a toujours $S.xzdm=0$; $S.yzdm=0$; d'où l'on déduit $z'=z''=0$, c'est-à-dire que les deux résultantes se réduisent dans ce cas à une seule $\omega^2 M\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ qui passe par l'origine. Il suffirait donc de fixer ce point, en laissant d'ailleurs l'axe parfaitement libre, pour que le corps tournât autour de cet axe, comme s'il était fixe.

Il est aisé de voir que cette double propriété ne peut appartenir qu'aux axes principaux du solide. Pour tout autre axe, ou la pression ne serait pas nulle, ou elle ne passerait pas par l'origine, et cet axe serait déplacé par la pression exercée lorsque l'on ne conserverait que l'origine fixe.

C..

MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE.

13. Avant de rechercher les équations de ce mouvement, commençons par le considérer en lui-même, c'est-à-dire, indépendamdamment des forces accélératrices qui le produisent.

Rapportons le solide à trois axes Ox, Oy, Oz situés d'une manière quelconque dans l'espace, et considérons trois autres axes rectangulaires Ox', Oy', Oz' fixes dans le corps, mais mobiles avec lui. O est supposé le point fixe.

On a (n° 7) entre les coordonnées x, y, z, x', y', z', les relations

$$x = ax' + by' + cz', \quad y = a'x' + b'y' + c'z', \quad z = a''x' + b''y' + c''z' \ldots (1);$$

et entre les quantités $a, a', a'' \ldots\ldots$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1 \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1 \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1 \end{array}\right\} \ldots\ldots (2) \qquad \left.\begin{array}{l} ab + a'b' + a''b'' = 0 \\ ac + a'c' + a''c'' = 0 \\ bc + b'c' + b''c'' = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (3),$$

auxquelles nous joignons les suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} aa' + bb' + cc' = 0 \\ aa'' + bb'' + cc'' = 0 \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (4),$$

qui sont implicitement comprises dans les deux premiers groupes, et dont nous aurons occasion de faire usage.

Les relations qui existent entre les quantités $a, a' \ldots$ ne laissent que trois d'entre elles arbitraires. Aussi a-t-on coutume de les exprimer toutes en fonction de trois autres quantités indépendantes entre elles.

La première est l'angle ψ que l'intersection des plans $x'y'$ et xy forme avec l'axe des x.

La deuxième est l'angle φ, que l'axe des x' fait avec cette intersection.

La troisième enfin, est l'angle θ des deux plans xy et $x'y'$.

On conçoit en effet que ces trois angles étant connus, la position des trois axes Ox', Oy', Oz' est entièrement déterminée.

Ces valeurs de a, a', a''..... généralement connues, sont

$$\left.\begin{array}{l|l|l} a = \cos\theta\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi & b = \cos\theta\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi & c = \sin\theta\sin\psi \\ a' = \cos\theta\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi & b' = \cos\theta\cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi & c' = \sin\theta\cos\varphi \\ a'' = -\sin\theta\sin\varphi & b'' = -\sin\theta\cos\varphi & c'' = \cos\theta \end{array}\right\}(5).$$

14. Cela posé, puisqu'à chaque instant le mobile change de position par rapport aux axes des x, y, z, les quantités a, a', a'' doivent être regardées comme des fonctions du tems. Il en est de même des coordonnées x, y, z qui sont d'ailleurs variables d'un point à un autre du corps. Quant aux coordonnées x', y', z', elles varient d'un point à un autre du corps, mais elles sont constantes pour un même point, pendant toute la durée du mouvement.

Si donc on différentie les équations (1) par rapport au tems, on doit regarder x', y', z' comme constantes, et on a

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x'\frac{da}{dt} + y'\frac{db}{dt} + z'\frac{dc}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= x'\frac{da'}{dt} + y'\frac{db'}{dt} + z'\frac{dc'}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= x'\frac{da''}{dt} + y'\frac{db''}{dt} + z'\frac{dc''}{dt} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots(6).$$

Or les quantités $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ expriment les composantes de la vîtesse, parallèles aux axes Ox, Oy, Oz. Ainsi en égalant à zéro leurs valeurs, les équations en x', y', z' que l'on obtiendra, exprimeront la position par rapport aux axes Ox', Oy', Oz', des points dont la vîtesse est nulle à chaque instant. En posant

$$\left.\begin{aligned} cdb + c'db' + c''db'' &= pdt \\ cda + c'da' + c''da'' &= -qdt \\ bda + b'da' + b''da'' &= rdt \end{aligned}\right\}\ldots\ldots(7),$$

et ayant égard aux différentielles des équations (2) et (5), on trouve, toute réduction faite,

$$py' - qx' = 0, \quad rx' - pz' = 0, \quad qz' - ry' = 0\ldots\ldots(8).$$

La dernière équation est une conséquence des deux autres. Ces équations prouvent que les points dont la vîtesse est nulle à chaque instant, sont situés sur une droite passant par l'origine ; ensorte qu'à chaque instant le mobile peut être regardé comme tournant autour d'une droite qui passe par le point fixe.

Cet axe variant en général d'un instant à l'autre, on le nomme *axe instantanée de rotation.*

Toutes les fois que p, q, r seront des quantités constantes, l'*axe instantanée* passera constamment par les mêmes points du mobile; les vîtesses de ces points seront donc nulles par rapport aux axes Ox, Oy, Oz. Ainsi l'axe sera à-la-fois une droite fixe dans le mobile et dans l'espace, ensorte que le corps tournera autour de cette droite pendant toute la durée du mouvement.

La position de l'axe instantanée, par rapport aux axes Ox', Oy', Oz', est encore déterminée par les formules

$$\cos IOx' = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \ \cos IOy' = \frac{q}{\sqrt{}}, \ \cos IOz' = \frac{r}{\sqrt{}} \quad (9),$$

OI représentant cet axe.

---

15. On peut déterminer facilement la vîtesse angulaire autour de l'axe instantanée, en fonction des quantités p, q, r.

Mais avant, il est bon d'établir de nouvelles formules qui nous seront très-utiles.

En combinant les équations (7) avec les différentielles des équations (2), on exprimera da, da'..... au moyen de p, q, r. On trouve, tout calcul fait,

$$\left.\begin{array}{lll} da = (br - cq)\,dt, & db = (cp - ar)\,dt, & dc = (aq - bp)\,dt \\ da' = (b'r - c'q)\,dt, & db' = (c'p - a'r)\,dt, & dc' = (a'q - b'p)\,dt \\ da'' = (b''r - c''q)\,dt, & db'' = (c''p - a''r)\,dt, & dc'' = (a''q - b''p)\,dt \end{array}\right\} (10).$$

Il suffit pour obtenir la valeur de da, de multiplier les équations

$$\begin{aligned} a da + a' da' + a'' da'' &= 0, \\ b da + b' da' + b'' da'' &= r dt, \\ c da + c' da' + c'' da'' &= -\, q dt, \end{aligned}$$

respectivement par a, b, c, de les ajouter, et d'avoir égard aux équations (4).

On voit assez ce qu'il faudrait faire pour obtenir les valeurs de da', da'', db, db'.....

Les équations (10) donnent encore évidemment

$$pda+qdb+rdc=0, pda'+qdb'+rdc'=0, pda''+qdb''+rdc''=0 \ldots (11).$$

Cela posé, en considérant un point du corps dont les coordonnées parallèles aux axes Ox', Oy', Oz' soient $x'=0$, $y'=0$, $z'=1$, on a pour la vîtesse absolue de ce point,

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}=\frac{\sqrt{dc^2+dc'^2+dc''^2}}{dt}$$ [voyez les équat. (6)],

et par conséquent $\sqrt{p^2+q^2}$ [d'après les formules (10)].

La vîtesse angulaire sera donc

$\sqrt{p^2+q^2} : \sin IOz'$, ou $\sqrt{p^2+q^2} : \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$ [voyez les form. (9)];

ou enfin, $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$.

16. Cherchons encore en fonction de p, q, r, les vîtesses et les forces accélératrices des différens points, décomposées suivant les axes Ox', Oy', Oz'.

Puisque $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ sont les composantes des vîtesses, parallèles aux axes Ox, Oy, Oz, les composantes parallèles aux axes Ox', Oy', Oz' sont

$$a\frac{dx}{dt}+a'\frac{dy}{dt}+a''\frac{dz}{dt}; \quad b\frac{dx}{dt}+b'\frac{dy}{dt}+b''\frac{dz}{dt}; \quad c\frac{dx}{dt}+c'\frac{dy}{dt}+c''\frac{dz}{dt}.$$

On a de même pour les composantes des forces accélératrices suivant ces axes,

$$a\frac{d^2x}{dt^2}+a'\frac{d^2y}{dt^2}+a''\frac{d^2z}{dt^2}; \quad b\frac{d^2x}{dt^2}+b'\frac{d^2y}{dt^2}+b''\frac{d^2z}{dt^2}; \quad c\frac{d^2x}{dt^2}+c'\frac{d^2y}{dt^2}+c''\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Mais les équations (6) donnent, en ayant égard aux équations (10),

$$\frac{dx}{dt} = x'(br - cq) + y'(cp - ar) + z'(aq - bp)$$

ou

$$\frac{dx}{dt} = a\,(qz' - ry') + b\,(rx' - pz') + c\,(py' - qx')$$

$$\frac{dy}{dt} = a'\,(qz' - ry') + b'(rx' - pz') + c'(py' - qx')$$

$$\frac{dz}{dt} = a''(qz' - ry') + b''(rx' - pz') + c''(py' - qx');$$

d'où l'on déduit

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\,(z'dq - y'dr) + b\,(x'dr - z'dp) + c\,(y'dp - x'dq) + (qz' - ry')da + (rx' - pz')db + (py' - qx')dc$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a'(\ldots\ldots\ldots) + b'(\ldots\ldots\ldots) + c'(\ldots\ldots\ldots) + (\ldots\ldots)da' + (\ldots\ldots)db' + (\ldots\ldots)dc'$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = a''(\ldots\ldots\ldots) + b''(\ldots\ldots\ldots) + c''(\ldots\ldots\ldots) + (\ldots\ldots)da'' + (\ldots\ldots)db'' + (\ldots\ldots)dc''$$

Substituant ces valeurs dans les expressions ci-dessus, et ayant égard aux équations des groupes (2), (3) et (7), il vient

$$qz' - ry', \quad rx' - pz', \quad py' - qx' \ldots\ldots (12)$$

pour les composantes des vîtesses.

Et en appelant p', q', r' les composantes des forces accélératrices

$$\left.\begin{aligned} p'dt &= z'dq - y'dr + (py' - qz')\,qdt - (rx' - pz')\,rdt \\ q'dt &= x'dr - z'dq + (qz' - ry')\,rdt - (py' - qx')\,pdt \\ r'dt &= y'dp - x'dq + (rx' - pz')\,pdt - (qz' - ry')\,qdt \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (13).$$

Il est à remarquer que les expressions (12) qui sont nulles pour tous les points du corps situés sur l'axe instantanée de rotation, sont pour un autre point les expressions des composantes de sa vîtesse, parallèles aux axes Ox', Oy', Oz'.

---

17. Nous terminerons ces préliminaires par la recherche en fonction des mêmes quantités p, q, r de la position du *plan principal des momens*, par rapport aux axes mobiles.

On appelle ainsi un plan passant par l'origine, et pour lequel, en en considérant les *quantités de mouvement* dont les différens points du mobile sont animés, la somme des momens de leurs composantes parallèles à ce plan et projetées sur ce plan, est la plus grande possible.

On sait que pour des forces quelconques $P, P' \ldots$ en appelant Om la perpendiculaire à ce plan; sa position par rapport à des axes Ox, Oy, Oz est déterminée par les formules

$$\cos moz = \frac{L}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}, \ \cos moy = \frac{M}{\sqrt{}}, \ \cos mox = \frac{N}{\sqrt{}},$$

dans lesquelles on a

$$L = P(y\cos\alpha - x\cos\beta) + \ldots; \quad M = P(x\cos\gamma - z\cos\alpha) + \ldots;$$
$$N = P(z\cos\beta - y\cos\gamma) + \ldots.$$

Mais dans le cas que nous considérons, x, y, z doivent être remplacés par x', y', z'; $P\cos\alpha$, $P\cos\beta$, $P\cos\gamma$, par $(qz'-ry')\,dm$, $(rx'-pz')\,dm$, $(py'-qx')\,dm$; on aura donc

$$\begin{aligned} L &= S.[(qz'-ry')y'dm - (rx'-pz')x'dm] \\ M &= S.[(py'-qx')x'dm - (qz'-ry')z'dm] \\ N &= S.[(rx'-pz')z'dm - (py'-qx')y'dm], \end{aligned}$$

ou réduisant,

$$\begin{aligned} L &= qS.y'z'dm + pS.x'z'dm - rS.(x'^2+y'^2)\,dm \\ M &= pS.x'y'dm + rS.y'z'dm - qS.(x'^2+z'^2)\,dm \\ N &= rS.x'z'dm + qS.x'y'dm - pS.(y'^2+z'^2)\,dm, \end{aligned}$$

S désignant des intégrales prises par rapport à x', y', z' et à l'élément dm, et étendues à la masse entière du corps. Ces valeurs se simplifient beaucoup en prenant pour les axes coordonnés, les trois axes principaux qui se coupent au point O, puisqu'alors les intégrales $S.x'y'dm$, $S.x'z'dm$ et $S.y'z'dm$ sont nulles.

En représentant toujours par A, B, C les trois momens d'inertie principaux, elles deviennent

$$L = -Cr, \quad M = -Bq, \quad N = -Ap.$$

Ainsi la position du *plan principal des momens*, par rapport aux axes Ox', Oy', Oz' est donnée par les formules

$$\left.\begin{aligned}\cos mox' &= -\frac{Cr}{\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}},\\ \cos moy' &= -\frac{Bq}{\sqrt{}},\\ \cos moz' &= -\frac{Ap}{\sqrt{}}.\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(14).$$

On a encore

$$\cos mox = \cos x'ox \cos mox' + \cos y'ox \cos moy' + \cos z'ox \cos moz'$$
$$= a \cos mox' + b \cos moy' + c \cos moz'.$$

d'où l'on conclut encore

$$\left.\begin{aligned}\cos mox &= \frac{-(Apa+Bqb+Crc)}{\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}}.\\ &\text{On trouverait de même}\\ \cos moy &= \frac{-(Apa'+Bqb'+Crc')}{\sqrt{}}\\ \cos moz &= \frac{-(Apa''+Bqb''+Crc'')}{\phantom{\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}}}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(15),$$

formules qui donnent la position du plan principal des momens par rapport aux axes fixes.

Le dénominateur de chacune des expressions précédentes, ou $\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}$, est ce que l'on appelle *le moment principal*, puisque c'est la valeur de $\sqrt{L^2+M^2+N^2}$.

18. Passons maintenant à la recherche des équations du mouvement, en supposant que des forces accélératrices données agissent sur tous les points du mobile.

Quelles que soient les forces accélératrices qui agissent sur l'élément dm, on peut les réduire à trois forces X', Y', Z' dirigées parallèlement aux axes mobiles Ox', Oy', Oz'.

Cela posé, si le point matériel devenait libre, ces forces augmenteraient les vitesses parallèles à ces axes des quantités $X'dt$, $Y'dt$, $Z'dt$; mais en vertu de la liaison des points matériels, la force accélératrice de ce point a pour composantes dans le sens de ces axes, les quantités p', q', r' du n° 16; et les augmentations de vitesse qui ont réellement lieu, sont $p'dt$, $q'dt$, $r'dt$. Ainsi les vitesses perdues ou gagnées sont $(X'-p')dt$, $(Y'-q')dt$, $(Z'-r')dt$.

Mais d'après le principe de D'Alembert, *il doit y avoir équilibre dans un système de forme invariable entre les quantités de mouvement perdues ou gagnées.*

En appliquant ce principe et se rappelant les trois équations d'équilibre d'un système de points matériels autour d'un point fixe, on a pour les équations du mouvement

$$S.[y'(X'-p')\,dmdt - x'(Y'-q')\,dmdt] = 0$$
$$S.[x'(Z'-r')\,dmdt - z'(X'-p')\,dmdt] = 0$$
$$S.[z'(Y'-q')\,dmdt - y'(Z'-r')\,dmdt] = 0;$$

ou posant, pour plus de simplicité,

$$[N = S(x'Y'-y'X')dm,\ N' = S(z'X'-x'Z')dm,\ N'' = S(y'Z'-z'Y')dm]$$

$$S.(x'q'dt - y'p'dt)\,dm = Ndt$$
$$S.(z'p'dt - x'r'dt)\,dm = N'dt$$
$$S.(y'r'dt - z'q'dt)\,dm = N''dt$$

Comme en remplaçant p', q', r' par leurs valeurs (n° 16), les premiers membres renfermeraient les intégrales $S.x'y'dm$, $S.y'z'dm$, $S.y'z'dm$, il est avantageux de prendre les axes principaux pour les axes Ox', Oy', Oz', et alors en observant que l'on a

$$S.(y'^2+z'^2)dm = A,\quad S.(x'^2+z'^2\,dm = B,\quad S.(x'^2+y'^2)\,dm = C;$$

d'où l'on déduit

$$S.(x'^2-y'^2)dm = B-A,\ S.(z'^2-x'^2)dm = A-C,\ S.(y'^2-x'^2) = C-B.$$

Les équations précédentes deviennent, toute réduction faite,

$$\left.\begin{array}{l} Cdr + (B-A)\,pqdt = Ndt \\ Bdq + (A-C)\,prdt = N'dt \\ Adp + (C-B)\,qrdt = N''dt \end{array}\right\}\ldots\ldots(16).$$

19. Pour concevoir l'usage de ces formules, il faut se rappeler que l'on a d'après les équations des groupes (3) et (7),

$$pdt = -bdc - b'dc' - b''dc'',\quad qdt = adc + a'dc' + a''dc'',$$
$$rdt = bda + b'da' + b''da''.$$

Substituant dans ces équations, à la place de a, a'..., leurs valeurs (5) en fonction de ψ, φ et θ, il vient

$$\left.\begin{array}{l} pdt = \sin\varphi \sin\theta d\psi - \cos\varphi d\theta \\ qdt = \cos\varphi \sin\theta d\psi + \sin\varphi d\theta \\ rdt = d\varphi - \cos\theta d\psi \end{array}\right\} \ldots\ldots(17).$$

Observons maintenant que les forces X', Y', Z', et par conséquent N, N', N'' dépendent en général de la direction des axes Ox', Oy', Oz' ou des angles ψ, φ et θ; et ces fonctions doivent être regardées comme données dans chaque cas particulier.

Ainsi le problème du mouvement de rotation qui nous occupe, conduit à six équations différentielles du premier ordre entre p, q, r, ψ, φ, θ et le temps t.

On pourrait éliminer p, q, r, et on obtiendrait trois équations différentielles du second ordre entre ψ, φ et θ qui donneraient à chaque instant la position des trois axes principaux dans l'espace, et par suite la position du mobile. Mais il est plus commode de considérer les six équations (16) et (17).

Cas particuliers.

20. Prenons pour application le cas où la pesanteur est la seule force accélératrice qui agisse sur les différens points du mobile. En supposant l'axe Oz vertical, et désignant par g la pesanteur; par α, β, γ les coordonnées du centre de gravité, et par M la masse du corps, on a

$$X' = ga'', \quad Y' = gb'', \quad Z' = gc'', \quad S.x'dm = M\alpha, \quad S.y'dm = M\beta, \quad S.z'dm = M\gamma,$$

d'où

$$N = (\alpha b'' - \beta a'')gMdt, \quad N' = (\gamma a'' - \alpha c'')gMdt, \quad N'' = (\beta c'' - \gamma b'')gMdt.$$

Ainsi les trois équations (16) deviennent

$$\begin{array}{l} Cdr + (B - A)\,pqdt = (\alpha b'' - \beta a'')\,gMdt \\ Bdq + (A - C)\,prdt = (\gamma a'' - \alpha c'')\,gMdt \\ Adq + (C - B)\,qrdt = (\beta c'' - \gamma b'')\,gMdt. \end{array}$$

Ces dernières équations peuvent être intégrées facilement dans deux hypothèses ;

1°. Lorsque le point fixe est le centre de gravité du corps.

2°. Lorsque le corps est mis en mouvement en vertu d'une impulsion primitive, et qu'aucune force accélératrice n'agit sur lui.

Dans le premier cas on a $\alpha = 0$; $\beta = 0$; $\gamma = 0$; dans le second, $g = 0$; et comme les seconds membres des équations précédentes deviennent nuls d'après l'une ou l'autre de ces hypothèses, il s'ensuit qu'elles rentrent l'une dans l'autre quant aux calculs.

Nous considérerons en particulier la dernière.

Les équations se réduisent alors à

$$\left.\begin{aligned} Cdr + (B - A)\,pqdt &= 0 \\ Bdq + (A - C)\,prdt &= 0 \\ Adp + (C - B)\,qrdt &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (18).$$

On tire de ces équations en les multipliant par r, q, p, et les ajoutant,

$$Crdr + Bqdq + Apdq = 0,$$

d'où intégrant

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h^2.$$

En les multipliant de nouveau par Cr, Bq, Ap, et les ajoutant, on en déduit encore

$$C^2rdr + B^2qdq + A^2pdp = 0,$$

d'où intégrant

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K^2;$$

les constantes h^2 et k^2 sont essentiellement positives d'après la nature des deux premiers membres.

Ces intégrales donnent

$$\left.\begin{aligned} p^2 &= \frac{K^2 - Bh^2 + (B - C)\,Cr^2}{A\,(A - B)} \\ q^2 &= \frac{k^2 - Ah^2 + (A - C)\,Cr^2}{B\,(B - A)} \\ &\text{d'où en substituant dans la 1}^{\text{re}}\text{ des équations (18),} \\ dt &= \frac{\sqrt{AB}\,.\,Cdr}{\sqrt{[k^2 - Bh^2 + (B - C)\,Cr^2]\,.\,[Ah^2 - k^2 + (C - A)\,Cr^2]}} \end{aligned}\right\} \ldots (19),$$

Cette dernière équation donnera t en fonction de r et réciproquement, d'où l'on conclura ensuite les valeurs de p et q.

21. Les équations (18) combinées avec les équations (10) donnent lieu à de nouvelles intégrales, qui font connaître une propriété remarquable du plan principal des momens.

En multipliant les équations (18) par c, b, a, les ajoutant et ayant égard aux valeurs da, db, dc, il en résulte

$Cd.rc + Bd.qb + Ad.pa = 0$, ou intégrant, $Crc + Bqb + Apa = l$

on conclut par analogie............... $\begin{cases} C'rc' + Bqb' + Apa' = l' \\ Crc'' + Bqb'' + Apa'' = l''. \end{cases}$

La troisième équation n'est pas une intégrale distincte des deux autres; car en faisant leurs carrés et ayant égard aux relations des groupes (2) et (3), il vient $C^2r^2 + B^2q^2 + A^2p^2 = l^2 + l'^2 + l''^2$, équation qui rentre dans la seconde des intégrales du n° précédent, et qui donne entre les quatre constantes arbitraires l, l', l'', k la relation :

$$l^2 + l'^2 + l''^2 = k^2.$$

En comparant les intégrales que l'on vient de trouver aux formules (15), on trouve pour la position du plan principal des momens, par rapport aux axes Ox, Oy, Oz :

$$\cos mOx = -\frac{l}{k}, \quad \cos mOy = -\frac{l'}{k}, \quad \cos mOz = -\frac{l''}{k}.$$

Comme ces valeurs sont constantes, il en résulte que la perpendiculaire Om, et par conséquent *le plan principal des momens reste fixe dans l'espace* pendant le mouvement du corps solide autour du point fixe. Quant à la position de ce plan par rapport aux axes principaux, on peut l'obtenir à chaque instant au moyen des formules (14) dans lesquelles p, q, r doivent être regardées comme connues, d'après les équations (19).

22. Si dans les trois dernières intégrales trouvées, on substi-

tuait pour a, b, c.... leurs valeurs en fonction de ψ, φ et θ, on aurait trois équations entre φ, ψ, θ, p, q, r qui seraient des intégrales des équations (17); mais comme ces intégrales n'équivaudraient qu'à deux réellement distinctes, il en reste encore une à trouver.

Pour y parvenir, observons que puisque le plan principal des momens est fixe, on peut le prendre pour le plan des xy, auquel cas la perpendiculaire Om se confond avec l'axe des z.

On a alors

$$\cos mox' = \cos zox' = a'', \quad \cos moy' = b'', \quad \cos moz' = c'',$$

et les formules (14) deviennent, en ayant égard à l'une des intégrales du n° 20,

$$a'' = -\frac{Ap}{k}, \quad b'' = -\frac{Bq}{k}, \quad c'' = -\frac{Cr}{k};$$

ou, mettant pour a'', b'', c'' leurs valeurs en φ, ψ et θ,

$$\sin\theta \sin\varphi = \frac{Ap}{k}, \quad \sin\theta \cos\varphi = \frac{Bq}{k}, \quad \cos\theta = -\frac{Cr}{k};$$

équations qui s'accordent entre elles d'après la relation

$$K^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2.$$

D'un autre côté, si l'on élimine $d\theta$ entre les deux premières équations du groupe (17), et qu'on ait égard aux équations précédentes et à l'intégrale $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h^2$, on trouve

$$d\psi = \frac{h^2 - Cr^2}{k^2 - C^2r^2}\, kdt,$$

ou substituant pour dt sa valeur précédemment trouvée, on a enfin $d\psi = frdr$, équation qui, intégrée par la méthode des quadratures, donnera ψ en fonction de r, et par conséquent en fonction de t.

23. En récapitulant tout ce qui vient d'être dit, on voit que la solution complète du problème particulier que nous nous sommes

proposés de traiter, est comprise dans les équations

$$dt = Frdr,\quad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2,\quad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h^2$$

$$d\psi = frdr,\ \cos\theta = -\frac{Cr}{k},\ \sin\theta\cos\varphi = \frac{Bq}{k},\quad \text{ou}\quad \sin\theta\sin\varphi = \frac{Ap}{k}.$$

Quant aux constantes arbitraires h et k, et à celles qui doivent provenir de l'intégration des deux équations $dt = Frdr$, et $d\psi' = frdr$, leurs valeurs dépendent essentiellement des conditions initiales du mouvement.

FIN.

PROGRAMME

DE LA THÈSE DE MÉCANIQUE.

Des momens d'inertie et des axes principaux.

1. Équations du mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe, lorsque ce corps est mis en mouvement en vertu d'une impulsion primitive, et lorsqu'il est sollicité par des forces accélératrices quelconques.

2. Ce que l'on appelle moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe. De quelle nature est ce problème : déterminer le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe quelconque?

3. Formules au moyen desquelles, connaissant les momens d'inertie d'un corps par rapport à certains axes, on peut obtenir le moment d'inertie relatif à un axe quelconque. Ce que l'on appelle axes principaux d'un corps et momens d'inertie principaux.

4. Prouver que le plus grand et le plus petit des momens d'inertie d'un corps, par rapport à trois axes principaux, sont aussi le plus grand et le plus petit de tous les momens d'inertie relatifs aux axes passant par le même point, et que le plus petit de tous les momens d'inertie est celui qui correspond à l'un des trois axes principaux menés par le centre de gravité.

5. Dans un corps solide quelconque, il existe toujours un système d'axes principaux passant par un point donné.

6. Cas particuliers où le nombre des systèmes d'axes principaux passant par un même point est infini. Tous ces systèmes ont, en général, un axe commun. Déterminer la nature du solide pour lequel ces circonstances ont lieu.

7. Propriétés qui ont fait donner à ces axes le nom d'axes principaux de rotation. Mouvement d'un corps solide autour de l'un

E

des trois axes principaux passant par le centre de gravité ou par un point quelconque du solide.

Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

Pour déterminer facilement les équations du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, on conçoit le corps rapporté à trois axes rectangulaires fixes dans l'espace et qui se coupent en ce point ; puis, par la même origine, on imagine trois autres axes, fixes dans le corps, mais mobiles avec lui.

8. Détermination des points dont la vîtesse est nulle à chaque instant. Équation de l'axe instantanée de rotation. Cas particuliers où cette droite devient un axe fixe dans le mobile et dans l'espace.

9. Déterminer la vîtesse angulaire dont le mobile est animé à chaque instant, autour de l'axe instantanée de rotation.

10. Expressions de la vîtesse et de la force accélératrice d'un point quelconque décomposées parallèlement aux axes mobiles.

11. Déterminer la position du plan principal des momens par rapport aux trois axes mobiles et par rapport aux trois axes fixes.

12. Equations du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe lorsqu'il est sollicité par des forces accélératrices données. Nombre des équations absolument nécessaires.

13. Cas où la pesanteur est la seule force accélératrice qui agisse sur le mobile. Formules générales qui conviennent à ce cas.

14. Cas particuliers, 1°. où, la pesanteur agissant seule, le mobile est assujéti à tourner autour du centre de gravité supposé fixe ; 2°. où le corps tourne autour d'un point quelconque en vertu d'une impulsion primitive. Ces deux cas rentrent l'un dans l'autre quant aux calculs.

15. Intégration des équations du mouvement dans le dernier de ces cas. Prouver que le plan principal des momens est invariable pendant le mouvement. Formules qui donnent la solution complète de ce dernier cas.

Vu et approuvé,

Le doyen de la Faculté des Sciences,

LACROIX.

PROGRAMME

DE LA THÈSE D'ASTRONOMIE.

On a pris pour sujet la théorie du mouvement elliptique des planètes, suivie du principe de la gravitation universelle, et de son application à la détermination des masses de quelques planètes.

LOIS DE KÉPLER.

Conséquences que l'on en deduit.

1. Les planètes se meuvent dans des courbes planes, et leurs rayons vecteurs décrivent autour du centre du soleil des aires proportionnelles au tems.
2. Les orbites des planètes sont des ellipses dont le soleil occupe un foyer.
3. Les carrés des tems des révolutions des planètes autour du soleil sont entre eux comme les cubes des grands axes de leurs orbites.
4. Les deux premières lois étant admises comme lois d'observation, les principes de la mécanique démontrent que la force accélératrice qui retient une planète dans son orbite, est dirigée vers le centre du soleil, et que son intensité est en raison inverse du carré de la distance de l'astre au soleil.

5. Il résulte de la troisième loi que l'intensité de la force accélératrice à l'unité de distance est la même pour toutes les planètes.

PRINCIPE GÉNÉRAL DE LA GRAVITATION UNIVERSELLE.

Conséquences que l'on en déduit.

6. Toutes les molécules de la matière s'attirent mutuellement en raison directe des masses et inverse du carré des distances.
7. En admettant ce principe pour les planètes, c'est-à-dire, en les considérant comme tournant autour du soleil en vertu d'une impulsion primitive et de leur attraction vers cet astre, déterminer la nature de la trajectoire décrite par la planète. Cette courbe peut être une section conique quelconque.
8. Le genre de la trajectoire est déterminé par la grandeur de la vîtesse et la distance initiales; mais il est indépendant de la direction de la vîtesse : cette direction n'influe que sur les dimensions de l'orbite.
9. Déterminer, dans le cas du mouvement elliptique, la position de l'astre à un instant quelconque du mouvement, c'est-à-dire, trouver en fonction du tems l'expression de son rayon vecteur et de sa longitude ou de son anomalie vraie.
10. Cas où l'excentricité est très-petite. Formule que l'on obtient dans ce cas. Ce que l'on appelle équation du centre.
11. Les masses des planètes sont en général très-petites par rapport à celle du soleil.
12. Déterminer les masses des planètes qui sont accompagnées d'un satellite. Moyen particulier de déterminer la masse de la terre.

Vu et approuvé,

Le doyen de la Faculté des Sciences,

LACROIX.