N° D'ORDRE
432.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. POINCARÉ,
Ingénieur des Mines.

1re THÈSE. — SUR LES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DÉFINIES PAR LES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues, le [redacted] 1879, devant la Commission d'Examen.

MM. BOUQUET, *Président.*
OSSIAN BONNET, } *Examinateurs.*
DARBOUX,

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1879

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	MILNE EDWARDS, Professeur.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
PROFESSEURS HONORAIRES	DUMAS.	
	PASTEUR.	
PROFESSEURS	CHASLES	Géométrie supérieure.
	P. DESAINS	Physique.
	LIOUVILLE	Mécanique rationnelle.
	PUISEUX	Astronomie.
	HÉBERT	Géologie.
	DUCHARTRE	Botanique.
	JAMIN	Physique.
	SERRET	Calcul différentiel et intégral.
	H. Ste-CLAI[redacted]LE	Chimie.
	DE LACAZE-DUTHIERS	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BERT	Physiologie.
	HERMITE	Algèbre supérieure.
	BRIOT	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	BOUQUET	Mécanique physique et expérimentale.
	TROOST	Chimie.
	WURTZ	Chimie organique.
	FRIEDEL	Minéralogie.
	O. BONNET	Astronomie.
AGRÉGÉS	BERTRAND	Sciences mathématiques.
	J. VIEILLE	Sciences mathématiques.
	PELIGOT	Sciences physiques.
SECRÉTAIRE	PHILIPPON.	

5436 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, successeur de MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

A

M. OSSIAN BONNET

Hommage respectueux.

POINCARÉ.

PREMIÈRE THÈSE.

SUR LES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS

DÉFINIES PAR

LES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES.

INTRODUCTION.

Le problème de l'intégration des équations aux différences partielles a été abordé dès le siècle dernier par les géomètres; mais ce n'est qu'au commencement de ce siècle que Cauchy et Jacobi sont parvenus à ramener complètement l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre à celle des équations différentielles ordinaires.

Toutefois la question n'était point épuisée, car ce dernier problème, l'intégration des équations aux différentielles ordinaires, était loin d'être résolu. L'existence même de l'intégrale n'était pas démontrée d'une manière rigoureuse.

Cauchy aborde ce nouveau problème, et, dans le Tome XIV des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (p. 1020-1023), il imagine pour le résoudre un nouveau mode de calcul qu'il appelle *calcul des limites*, et il démontre que les équations différentielles ordinaires admettent une intégrale; il définit complètement cette intégrale, ou plutôt un élément de cette intégrale, en montrant qu'elle peut se représenter en général par une série ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable et convergentes dans de certaines limites.

C'est donc une intégration complète, mais qui ne nous fait pas connaître la valeur que prend la fonction cherchée quand on donne à cette variable une valeur quelconque, mais seulement quand le module de cette variable reste plus petit qu'une quantité donnée.

Dans le Tome XV des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, il applique les procédés du calcul des limites d'abord aux équations linéaires aux différences partielles du premier ordre (p. 44-58), puis à un système quelconque d'équations aux différences partielles d'ordre quelconque (p. 85-101). Il recherche quelle est l'intégrale de ces équations qui est assujettie à se réduire, quand l'une des variables s'annule, à certaines fonctions données des autres variables indépendantes, et il démontre que cette intégrale peut encore, en général, se représenter par une série ordonnée suivant les puissances croissantes des variables.

Enfin, dans le Tome XVI (p. 572), il recherche comment on devrait aborder le problème quand l'intégrale particulière que l'on étudie est assujettie à d'autres conditions qu'à celle de se réduire, quand l'une des variables s'annule, à certaines fonctions données des autres variables.

Dans le cas le plus général, le problème qui nous occupe a donc été complètement résolu par Cauchy.

Il a été depuis repris par deux géomètres. Dans une Thèse inaugurale, insérée dans le Tome 80 du *Journal de Crelle* (p. 1 et suivantes), M^me^ de Kowalewski a démontré de nouveau des théorèmes déjà trouvés par Cauchy; enfin M. Darboux en a inséré une démonstration nouvelle dans le Tome LXXX des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (p. 101). Toutefois, il existe encore des cas où le théorème de Cauchy ne peut pas s'appliquer et où l'intégrale soit d'une équation différentielle ordinaire, soit d'une équation aux différences partielles, ne peut se représenter par une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes des variables.

Pour les équations différentielles ordinaires, ces cas exceptionnels ont été étudiés par MM. Briot et Bouquet, dans un Mémoire intitulé *Mémoire sur les fonctions définies par les équations différentielles* et inséré dans le Tome XXXVI du *Journal de l'École Polytechnique*.

Mon but, dans ce travail, est d'étudier de même, pour les équations aux différences partielles du premier ordre, les cas exceptionnels où le théorème de Cauchy ne s'applique plus.

Ces cas sont de deux sortes : ou bien la difficulté provient, non de la forme même de l'équation proposée, mais de la manière dont est définie l'intégrale particulière que l'on étudie; ou bien elle est due à la forme de l'équation proposée. De là la division naturelle de ce travail en deux Parties. La première est destinée à l'étude des exceptions de la première sorte et nous amènera à reconnaître que l'on peut obtenir l'expression implicite de l'intégrale en égalant à zéro certaines fonctions des variables de l'intégrale et de ses dérivées du premier ordre, et que ces fonctions peuvent se représenter par des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de ces quantités.

Dans la deuxième Partie, on étudie la seconde sorte de singularités; mais je n'ai pu arriver à des résultats que quand certains coefficients satisfont à certaines conditions de signe, et j'ai été obligé de laisser de côté les cas où ces conditions ne sont pas remplies.

Avant d'aborder le problème qui est l'objet principal de ce Mémoire, j'ai dû étudier, dans des lemmes préliminaires, quelques propriétés générales des fonctions, et, en particulier, rechercher ce qui se passe quand on ne peut plus appliquer les théorèmes de MM. Briot et Bouquet, relatifs aux fonctions définies par des équations dont le second membre est zéro, et le premier membre une série ordonnée suivant les puissances croissantes des variables et des fonctions cherchées.

LEMMES PRÉLIMINAIRES.

On sait qu'une fonction z de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (ou plutôt un élément de cette fonction) est dite *holomorphe* en $x_1 - \alpha_1$, $x_2 - \alpha_2$, $\ldots$, $x_n - \alpha_n$ quand on peut la représenter dans une certaine étendue par une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de $x_1 - \alpha_1$, $x_2 - \alpha_2$, $\ldots$, $x_n - \alpha_n$ ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant des constantes données).

Pour que cela ait lieu, il faut et il suffit que la fonction z reste finie, continue et monodrome quand les modules de $x_1 - \alpha_1$, $x_2 - \alpha_2$, $\ldots$, $x_n - \alpha_n$ restent plus petits que certaines quantités données.

Théorème de MM. Briot et Bouquet.

MM. Briot et Bouquet ont démontré que, *si p fonctions* $z_1, z_2, \ldots, z_p$ *de n variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *sont définies par p équations dont le second membre est zéro et les premiers membres sont p fonctions holomorphes en* $z_1-\beta_1, z_2-\beta_2, \ldots, z_p-\beta_p, x_1-\alpha_1, x_2-\alpha_2, \ldots, x_n-\alpha_n$ (*les* α *et les* β *étant des constantes*), *si ces p équations sont satisfaites quand on fait*

$$z_1=\beta_1, \quad z_2=\beta_2, \quad \ldots, \quad z_p=\beta_p, \quad x_1=\alpha_1, \quad x_2=\alpha_2, \quad \ldots, \quad x_n=\alpha_n,$$

si pour le même système de valeurs le déterminant fonctionnel des premiers membres des p équations par rapport aux p fonctions z n'est pas nul, les p fonctions z ainsi définies sont holomorphes en $x_1-\alpha_1$, $x_2-\alpha_2, \ldots, x_n-\alpha_n$.

Je ferai dans la suite un fréquent usage de ce théorème, et je m'en servirai en particulier pour démontrer les lemmes qui vont suivre.

Définition. — Nous dirons qu'une fonction z de n variables x_1, $x_2, \ldots, x_n$ est algébroïde de degré m en $x_1-\alpha_1, x_2-\alpha_2, \ldots, x_n-\alpha_n$ quand elle satisfera à une équation de la forme

$$(z-\beta)^m + A_{m-1}(z-\beta)^{m-1}+\ldots+A_1(z-\beta)+A_0=0,$$

où $A_{m-1}, \ldots, A_1, A_0$ sont des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $x_1-\alpha_1, x_2-\alpha_2, \ldots, x_n-\alpha_n$, qui restent convergentes quand les modules de $x_1-\alpha_1, x_2-\alpha_2, \ldots, x_n-\alpha_n$ restent plus petits que certaines quantités données et qui s'annulent quand

$$x_1=\alpha_1, \quad x_2=\alpha_2, \quad \ldots, \quad x_n=\alpha_n.$$

Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons que

$$\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=\beta=0.$$

Nous pouvons toujours le faire, car, si cela n'était pas, on ferait

$$x_1=y_1+\alpha_1, \quad x_2=y_2+\alpha_2, \quad \ldots, \quad x_n=y_n+\alpha_n, \quad z=z_1+\beta,$$

et avec ces nouvelles variables on serait ramené au cas où les α et β sont nuls.

Lemme I. — *Si une fonction z est algébroïde de degré m en x_1, x_2, ..., x_n, et que l'on y remplace x_1, x_2, ..., x_n par des fonctions holomorphes en t s'annulant quand $t = 0$, la fonction z est développable en une série convergente dans une certaine étendue et ordonnée suivant les puissances croissantes de $t^{\frac{1}{p}}$, p étant un nombre entier tel que*

$$p \leqq m.$$

En effet, reprenons l'équation

$$z^m + A_{m-1} z^{m-1} + \ldots + A_1 z + A_0 = 0.$$

Remplaçons dans cette équation

$$x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_n$$

par certaines fonctions

$$\varphi_1(t), \; \varphi_2(t), \; \ldots, \; \varphi_n(t)$$

holomorphes en t et s'annulant avec cette variable. Les A deviendront des fonctions holomorphes en t et s'annuleront pour $t = 0$, puisqu'ils s'annulent pour

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

La fonction z devient ainsi une fonction de t susceptible de m valeurs. Quand on fera varier t de telle manière que le point qui représente sa valeur imaginaire sur un plan décrive un contour autour du point $t = 0$, il y aura p de ces m valeurs qui se permuteront circulairement comme les p valeurs de $t^{\frac{1}{p}}$. Il est évident que, si l'on donne à z une de ces p valeurs comme valeur initiale et qu'on fasse décrire à t un chemin tel que $t^{\frac{1}{p}}$ revienne à sa valeur primitive, z reviendra aussi à sa valeur initiale. De plus, z conserve une valeur finie quand le module de t reste inférieur à une limite donnée, et, étant une fonction continue de t, est aussi une fonction continue de $t^{\frac{1}{p}}$.

Donc z est holomorphe en $t^{\frac{1}{p}}$, et il est d'ailleurs évident que

$$p \leqq m. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Dans les deux lemmes qui vont suivre, on considérera une fonction z de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ définie par une équation

$$\varphi(z) = 0,$$

dont le premier membre $\varphi(z)$ est une série

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$$

ordonnée suivant les puissances croissantes de z et dont les coefficients A_0, A_1, ... sont des fonctions holomorphes en x_1, x_2, ..., x_n.

On supposera que, quand on fait dans les A

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

on ait

$$A_0 = A_1 = A_2 = \ldots = A_{m-1} = 0 \quad (A_m \gtrless 0).$$

Lemme II. — *Il existe m fonctions z qui satisfont à la définition précédente et qui tendent vers zéro quand x_1, x_2, ..., x_n tendent vers zéro.*

En effet, soit $\varphi_0(z)$ ce que devient $\varphi(z)$ quand on y fait

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Si l'on représente les parties réelle et imaginaire de z par les coordonnées d'un point dans un plan, on pourra toujours tracer dans ce plan un cercle C ayant pour centre le point $z = 0$ et dont le rayon R soit assez petit pour que $\varphi_0(z)$ ne s'annule pas à l'intérieur de ce cercle, si ce n'est pour $z = 0$. Ceci posé, il est évident que, si l'on prend l'intégrale

$$\int \frac{\varphi'_0(z)}{\varphi_0(z)} dz$$

le long d'un cercle quelconque C_1, concentrique à C et de rayon $R_1 < R$, cette intégrale sera égale à $2i\pi m$.

Soit maintenant $\varphi_1(z)$ ce que devient $\varphi(z)$ quand on donne à x_1, x_2, ..., x_n certaines valeurs déterminées différentes de zéro. On peut toujours prendre les modules de ces valeurs déterminées assez petits pour que :

1° $\varphi_1(z)$ diffère aussi peu qu'on veut de $\varphi_0(z)$;

2° $\varphi'_1(z)$ diffère aussi peu qu'on veut de $\varphi'_0(z)$;

3° $\dfrac{\varphi'_1(z)}{\varphi_1(z)}$ diffère aussi peu qu'on veut de $\dfrac{\varphi'_0(z)}{\varphi_0(z)}$;

4° Enfin pour que $\int \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} dz$ prise le long du cercle C_1 diffère aussi peu qu'on veut de $\int \frac{\varphi'_1(z)}{\varphi_1(z)} dz$ prise le long du même cercle, c'est-à-dire, puisque cette intégrale est toujours égale à $2i\pi$ multiplié par un nombre entier, pour qu'elle soit égale à $2i\pi m$.

Donc on peut toujours prendre les modules de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ assez petits pour que $\varphi_1(z)$ s'annule m fois dans l'intérieur du cercle C_1, *quelque petit que soit le rayon de ce cercle.*

Donc il existe m fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_m$ de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui annulent la fonction $\varphi(z)$ et qui tendent vers zéro quand $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tendent vers zéro. C. Q. F. D.

LEMME III. — *Les m fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_m$ sont algébroïdes de degré m en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.*

En effet, les m fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_m$ sont définies par les m équations

$$(1) \qquad \varphi(z_1) = 0, \quad \varphi(z_2) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi(z_m) = 0.$$

Je vais d'abord remplacer le système (1) par un autre système équivalent. A cet effet, je poserai

$$f(v) = (v - z_1)(v - z_2) \ldots (v - z_m),$$

$$f_1(v) = \frac{df}{dv},$$

$$\ldots\ldots\ldots,$$

$$f_p(v) = \frac{d^p f}{dv^p}.$$

Je poserai en outre

$$B_1 = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\varphi(z_i) f_1(z_i)}{f_1(z_i)},$$

$$B_2 = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\varphi(z_i) f_2(z_i)}{f_1(z_i)}.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$B_p = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\varphi(z_i) f_p(z_i)}{f_1(z_i)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$B_m = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\varphi(z_i) f_m(z_i)}{f_1(z_i)}.$$

Il est clair que le système

$$(2) \qquad B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad \dots, \quad B_m = 0$$

est équivalent au système (1).

Les B sont symétriques par rapport à $z_1, z_2, \dots, z_m$. De plus, ce sont des fonctions entières par rapport à ces variables. En effet, les dénominateurs $f_1(z_i)$ ne contiennent que des facteurs de la forme $z_i - z_k$ et ne contiennent ces facteurs qu'à la première puissance. Donc les B seront égaux aux quotients de fonctions holomorphes en $z_1, z_2, \dots, z_m, x_1, x_2, \dots, x_n$ par le produit de tous les facteurs tels que $z_i - z_k$. J'aurai donc démontré que les B sont eux-mêmes des fonctions holomorphes en $z_1, z_2, \dots, z_m, x_1, x_2, \dots, x_n$ si je fais voir qu'en les multipliant par $z_i - z_k$ et faisant $z_i = z_k$ on les annule. Or cela est évident, car, les B étant symétriques par rapport à z_i et à z_k, $B(z_i - z_k)$ change de signe quand on change z_i en z_k et z_k en z_i. Donc il s'annule quand $z_i = z_k$. Donc les B sont holomorphes en $x_1, x_2, \dots, x_n$, en $z_1, z_2, \dots, z_m$ et symétriques par rapport à ces m dernières variables.

Posons

$$S_1 = \Sigma z_i, \quad S_2 = \Sigma z_i^2, \quad \dots, \quad S_m = \Sigma z_i^m.$$

Ces m nouvelles variables s'annuleront en même temps que les z.

De plus, on sait que tout polynôme entier symétrique par rapport aux z et de degré p est un polynôme entier en

$$S_1, S_2, \dots, S_p, \quad \text{si } p \leqq m,$$

et en

$$S_1, S_2, \dots, S_m, \quad \text{si } p \geqq m.$$

Donc les B seront des fonctions holomorphes en $S_1, S_2, \dots, S_m, x_1, x_2, \dots, x_n$.

Les S sont donc définis en fonction des x par m équations dont le second membre est zéro et les premiers membres sont des fonctions holomorphes en $S_1, S_2, \ldots, S_m, x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui s'annulent quand

$$S_1 = S_2 = \ldots = S_m = x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Donc, en vertu du théorème de MM. Briot et Bouquet, les S seront holomorphes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si le déterminant fonctionnel des B par rapport aux S ne s'annule pas quand

$$S_1 = S_2 = \ldots = S_m = x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Il faut donc calculer le déterminant fonctionnel des B par rapport aux S pour ce système de valeurs, et pour cela calculer, toujours pour les mêmes valeurs des variables, les dérivées partielles

$$\frac{dB_p}{dS_k}.$$

1° Si $k < m - p + 1$,

$$\frac{dB_p}{dS_k} = 0.$$

En effet, si dans $\varphi(z)$ on fait

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

$\varphi(z)$ devient

$$\lambda_m z^m + \lambda_{m+1} z^{m+1} + \ldots.$$

De même on a, quand les x s'annulent,

$$(3) \qquad B_p = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\lambda_m z_i^m f_p(z_i)}{f_1(z_i)} + \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\lambda_{m+1} z_i^{m+1} f_p(z_i)}{f_1(z_i)} + \ldots.$$

Le premier terme est homogène et de degré $m - p + 1$ par rapport aux z, le second homogène et de degré $m - p + 2$, etc.

Donc, si l'on exprime maintenant les B en fonction des S, le premier terme de B_p dans le développement (3) donnera un terme en S_{m-p+1} et des termes formés par le produit de deux ou plusieurs des S_k tels que $k < m - p + 1$, mais il ne donnera pas de terme en $S_k (k < m - p + 1)$ et indépendant des autres S. Les termes suivants du développement (3) n'en donneront pas davantage pour les mêmes raisons.

Donc B_p, développé en fonction des S, ne contiendra pas de terme en S_k. Donc

$$\frac{dB_p}{dS_k} = 0.$$

Donc le déterminant fonctionnel des B par rapport aux S se réduit, au signe près, au produit des

$$\frac{dB_p}{dS_{m-p+1}}.$$

Il suffit donc, pour faire voir que le déterminant n'est pas nul, de montrer qu'aucune de ces dérivées partielles ne s'annule.

Pour calculer $\frac{dB_p}{dS_{m-p+1}}$, reportons-nous au développement (3) et cherchons d'où peut provenir, dans le développement de B_p en fonction des S, un terme en S_{m-p+1}. Il ne peut venir que du premier terme du développement (3), que nous appellerons pour abréger T_p, car les termes suivants de (3) sont homogènes par rapport aux z et de degré supérieur à $m-p+1$.

Il suffit donc de s'occuper des termes provenant de T_p; on a

$$T_p = \alpha_p S_{m-p+1} + \theta,$$

θ étant une fonction de $S_1, S_2, \ldots, S_{m-p}$ qui s'annule avec ces variables, et c'est α_p qu'il s'agit de calculer. Comme α_p est une constante indépendante des z, il suffira de calculer sa valeur en donnant aux z des valeurs quelconques, par exemple les racines de l'équation

$$z^m - z^{p-1} - 1 = 0.$$

Tous les S_k sont nuls, et $S_{m-p+1} = m-p+1$. Donc

$$T_p = \alpha_p(m-p+1).$$

Or, on a

$$2i\pi T_p = \lambda_m \int \frac{v^m f_p(v)}{f(v)}\, dv,$$

cette intégrale étant prise le long d'un cercle de rayon suffisamment grand. En effet, le résidu de la fonction sous le signe $\int$ par rapport à la racine $v = z_i$ est

$$\frac{z_i^m f_p(z_i)}{f'(z_i)}.$$

La somme des résidus de cette fonction est donc la somme de ces quantités, c'est-à-dire $\frac{T_p}{\lambda_m}$. Or, dans le cas particulier où nous nous sommes placés,

$$f(v) = v^m - v^{p-1} - 1,$$

$$f_p(v) = C_m^p v^{m-p}, \quad \text{où } C_m^p = m(m-1)\ldots(m-p+1).$$

Donc

$$\frac{1}{\lambda_m} 2i\pi T_p = C_m^p \int \frac{v^{2m-p}}{v^m - v^{p-1} - 1} dv,$$

$$\frac{1}{\lambda_m} 2i\pi T_p = C_m^p \int v^{m-p} dv + C_m^p \int \frac{v^{m-1} + v^{m-p}}{v^m - v^{p-1} - 1} dv.$$

La première intégrale est nulle; en ce qui concerne la seconde, la fonction sous le signe $\int$ est développable (puisque le rayon du cercle le long duquel on prend l'intégrale est très grand) en série ordonnée suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{v}$ et dont le premier terme est $\frac{1}{v}$. Ce premier terme donnera une intégrale $2i\pi$, les autres une intégrale nulle. Donc

$$\frac{1}{\lambda_m} 2i\pi T_p = 2i\pi C_m^p, \quad T_p = \lambda_m C_m^p, \quad \alpha_p = \frac{C_m^p \lambda_m}{m-p+1} = C_m^{p-1} \lambda_m.$$

Donc les α_p ne sont pas nuls; donc le déterminant fonctionnel des B par rapport aux S ne l'est pas non plus; donc les S sont des fonctions holomorphes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Les m valeurs de z, à savoir $z_1, z_2, \ldots, z_m$, satisfont à une équation

$$z^m + A'_{m-1} z^{m-1} + \ldots + A'_1 z + A'_0 = 0,$$

où les A' sont des polynômes entiers et symétriques par rapport à $z_1, z_2, \ldots, z_m$; ces polynômes sont donc aussi des polynômes entiers par rapport à $S_1, S_2, \ldots, S_m$, et par conséquent des fonctions holomorphes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

C'est dire que les m valeurs de z sont algébroïdes de degré m en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. C. Q. F. D.

La démonstration précédente suppose que l'équation

$$\varphi(z) = 0$$

n'a pas de racines multiples; mais il est facile de l'étendre à ce cas d'exception.

Soient encore, en effet,

$$f(v) = (v - z_1)(v - z_2)\dots(v - z_m)$$

et

$$f_p(v) = \frac{d^p f}{dv^p},$$

où $z_1, z_2, \dots, z_m$ représentent pour un instant des quantités quelconques, et soit encore

$$S_p = \Sigma z_i^p;$$

$f(v)$ et $f_p(v)$ sont des polynômes entiers par rapport à v et aux S.

Soit maintenant

$$2i\pi B_p = \int \frac{\varphi(v) f_p(v)}{f(v)} dv,$$

cette intégrale étant prise le long d'un cercle de rayon assez petit pour que $\varphi(v)$ soit convergent pour certaines valeurs des x et assez grand pour contenir les m racines de l'équation

$$\varphi(v) = 0$$

pour ces mêmes valeurs des x.

Supposons, de plus, qu'on ne donne à $z_1, z_2, \dots, z_m$ que des valeurs dont les points représentatifs soient compris à l'intérieur de ce cercle.

Cela est toujours possible.

Cette intégrale est une fonction continue des S et des x, et l'on a vu que dans le cas où tous les z sont différents, c'est-à-dire où les S ne prennent pas certains systèmes particuliers de valeurs, cette intégrale se réduit à une fonction holomorphe des S et des x. Il en est donc encore de même dans le cas où les z cessent d'être tous différents.

Pour exprimer que les z se réduisent aux m racines de l'équation

$$\varphi(z) = 0$$

en tenant compte de leur degré de multiplicité, il faut encore écrire que les B_p sont nuls, c'est-à-dire qu'il faut égaler à zéro les mêmes fonctions holomorphes des S et des x que dans le cas où il n'y a que des racines simples, c'est-à-dire que la démonstration précédente s'applique.

COROLLAIRE I. — *Si φ est une fonction algébroïde en z, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ telle, qu'une de ses valeurs s'annule quand on a à la fois*

$$z = x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

mais qu'aucune de ses valeurs ne s'annule, quel que soit z, quand on a à la fois

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

si z est défini en fonction des x par l'équation

$$\varphi = 0,$$

z est une fonction algébroïde en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

En effet, la fonction φ, étant algébroïde en z, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, est donnée par une équation

$$\varphi^m + A_{m-1}\varphi^{m-1} + \ldots + A_1\varphi + A_0 = 0,$$

où les A sont holomorphes en z, $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

L'équation $\varphi = 0$ est donc équivalente à l'équation

$$A_0 = 0.$$

Mais A_0 est une fonction holomorphe en z, $x_1, \ldots, x_n$ qui s'annule quand toutes ces variables s'annulent, puisque φ s'annule dans ce cas, mais qui ne s'annule pas, quel que soit z, quand tous les x s'annulent, puisque φ ne s'annule pas dans ce cas.

Donc A_0 contient un ou plusieurs termes contenant une puissance de z et indépendants des x.

Si z^m est celui de ces termes dont le degré est le moins élevé, on retombe sur le cas étudié dans le lemme précédent, et z est une fonction algébroïde de degré m en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE II. — *Si, dans une fonction holomorphe* F *en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on substitue à la place de ces variables n fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de p va-*

riables nouvelles $y_1, y_2, \ldots, y_p$, algébroïdes par rapport à $y_1, y_2, \ldots, y_p$ et s'annulant avec ces variables, la fonction F *devient une fonction algébroïde en $y_1, y_2, \ldots, y_p$.*

En effet, les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont respectivement susceptibles de $m_1, m_2, \ldots, m_n$ valeurs différentes. En substituant dans F un système quelconque de ces valeurs, on donne à cette fonction

$$m_1 m_2 \ldots m_n = \text{M valeurs différentes.}$$

Soient $F_1, F_2, \ldots, F_M$ ces valeurs. Les fonctions

$$\sum_{i=1}^{i=M} F_i, \quad \sum_{i=1}^{i=M} F_i^2, \quad \ldots, \quad \sum_{i=1}^{i=M} F_i^M$$

sont holomorphes par rapport aux différentes valeurs de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. De plus, elles sont symétriques par rapport aux différentes valeurs de φ_1, aux différentes valeurs de φ_2, etc.

Donc, en appelant S_{1p} la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des diverses valeurs de φ_1, S_{2p} la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des diverses valeurs de φ_2, les fonctions $\sum_{i=1}^{i=M} F_i^k$ sont holomorphes par rapport aux S, c'est-à-dire (puisque les S sont holomorphes par rapport aux y) holomorphes par rapport aux y. C'est dire que la fonction F elle-même est algébroïde en $y_1, y_2, \ldots, y_p$. C. Q. F. D.

LEMME IV. — *Si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ sont p fonctions holomorphes en $z_1, z_2, \ldots, z_p, x_1, x_2, \ldots, x_n$, si ces fonctions s'annulent quand on annule tous les z et tous les x, si les équations*

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_p = 0$$

restent distinctes quand on annule tous les x, si l'on définit les z en fonction des x par les équations

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_p = 0,$$

les p fonctions ainsi définies sont algébroïdes.

En effet, supposons $p = 2$ pour fixer les idées; z_1 et z_2 sont alors définis par les équations

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0;$$

φ_1 et φ_2 ne peuvent s'annuler identiquement tous deux quand on fait

$$z_2 = x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

car alors les équations

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

cesseraient d'être distinctes quand on annulerait tous les x et se réduiraient toutes deux à

$$z_2 = 0.$$

Supposons que ce soit φ_1 qui ne s'annule pas identiquement quand

$$z_2 = x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0;$$

on pourra (Lemme III et Corollaire I) tirer de

$$\varphi_1 = 0$$

z_1 en fonction algébroïde de $z_2, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Substituons cette valeur de z_1 dans φ_2; cette fonction deviendra algébroïde en $z_2, x_1, x_2, \ldots, x_n$ (*voir* Lemme III, Corollaire II). L'équation

$$\varphi_2 = 0$$

a donc un premier membre algébroïde en $z_2, x_1, x_2, \ldots, x_n$ et qui s'annule avec ces variables. De plus, φ_2 ne s'annule pas, quel que soit z_2, quand $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s'annulent. Ce serait dire que les équations

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0$$

cessent d'être distinctes quand les x sont nuls. Donc z_2 est défini par l'équation $\varphi_2 = 0$ en fonction algébroïde de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Il en est de même de z_1, puisque rien ne le distingue de z_2.

Le lemme est donc démontré.

Remarque. — On remarquera que dans le lemme précédent on est obligé de faire une restriction, puisque l'on suppose que les équations

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n = 0$$

restent distinctes quand les x s'annulent.

Les deux lemmes qui vont suivre ont pour but d'examiner ce qui se passe quand cette condition de restriction n'est pas satisfaite.

Lemme V. — *Si une fonction z est définie en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par une équation*

$$\varphi = 0$$

dont le premier membre est une fonction holomorphe en $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$ s'annulant avec ces variables, on peut exprimer $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$ par des fonctions algébroïdes de n variables auxiliaires $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ s'annulant avec ces variables.

En effet, toutes les dérivées partielles de φ ne sont pas nulles, sans quoi cette fonction serait identiquement nulle. Supposons que toutes les dérivées partielles d'ordre m ne soient pas nulles, mais que toutes les dérivées d'ordre inférieur à m le soient.

Si parmi ces dérivées d'ordre m qui ne s'annulent pas se trouve $\frac{d^m\varphi}{dx_1^m}$, par exemple, on pourra exprimer x_1 en fonction algébroïde de z, $x_2, x_3, \ldots, x_n$,

$$x_1 = f(z, x_2, x_3, \ldots, x_n),$$

et alors il suffira de poser

$$z = \mu_1, \quad x_2 = \mu_2, \quad x_3 = \mu_3, \quad \ldots, \quad x_n = \mu_n,$$
$$x_1 = f(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_n)$$

pour satisfaire à l'énoncé du lemme.

Si l'on a, au contraire,

$$\frac{d^m\varphi}{dz^m} = \frac{d^m\varphi}{dx_1^m} = \ldots = \frac{d^m\varphi}{dx_n^m} = 0,$$

on posera

$$\begin{aligned}
z &= \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_n y_n + \lambda_{n+1} y_{n+1}\\
x_1 &= \alpha_{1,1} y_1 + \alpha_{1,2} y_2 + \ldots + \alpha_{1,n+1} y_{n+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x_n &= \alpha_{n,1} y_1 + \alpha_{n,2} y_2 + \ldots + \alpha_{n,n+1} y_{n+1}.
\end{aligned}$$

On pourra toujours choisir les λ et les α de telle sorte que leur déterminant ne soit pas nul et qu'après la substitution

$$\frac{d^m \varphi}{dy_{n+1}^m} \gtrless 0.$$

On aura alors y_{n+1} en fonction algébroïde de $y_1, y_2, \ldots, y_n$,

$$y_{n+1} = f(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

et il suffira encore de poser

$$y_1 = \mu_1, \quad y_2 = \mu_2, \quad \ldots, \quad y_n = \mu_n,$$

$$z = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \mu_i + \lambda_{n+1} f(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n),$$

$$x_1 = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_{1,i} \mu_i + \lambda_{n+1} f,$$

$$\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$x_n = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_{n,i} \mu_i + \lambda_{n+1} f$$

pour satisfaire à l'énoncé du lemme.

Remarque. — Il faut remarquer que cette nouvelle manière de définir la fonction z ne nous en fait connaître qu'un élément plus restreint que ceux que les lemmes III et IV nous permettaient d'étudier. Des fonctions algébroïdes définies par ces lemmes nous connaissions un élément limité par ces conditions que les modules de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ restent respectivement plus petits que certaines quantités données.

Les éléments définis par le lemme V seront restreints encore par d'autres conditions, par exemple que, les modules des x restant plus petits que certaines quantités données, les modules de $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}$ soient eux-mêmes plus petits que certaines quantités données.

Lemme VI. — *Si p fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$ de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont définies par p équations*

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_p = 0$$

dont les premiers membres sont des fonctions holomorphes en $z_1, z_2, \ldots, z_p, x_1, x_2, \ldots, x_n$ *et s'annulant avec ces variables, les fonctions* $z_1, z_2, \ldots, z_p$ *et les variables anciennes* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *peuvent s'exprimer par des fonctions algébroïdes de n nouvelles variables convenablement choisies* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ *et qui s'annulent avec ces nouvelles variables.*

En effet, supposons $p = 2$, pour fixer les idées; z_1 et z_2 sont alors définis par les équations

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0.$$

En vertu du lemme V, on peut tirer de $\varphi_1 = 0$ les z et les x en fonctions algébroïdes par rapport à $n + 1$ nouvelles variables que nous appellerons $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n+1}$ et s'annulant avec ces variables. Substituons ces valeurs dans φ_2; cette fonction deviendra une fonction algébroïde de $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n+1}$ (Lemme III, Corollaire II).

On a donc

$$\varphi_2^m + A_{m-1}\varphi_2^{m-1} + \ldots + A_1\varphi_2 + A_0 = 0,$$

où les A sont holomorphes en $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n, \nu_{n+1}$. Donc, égaler φ_2 à zéro, c'est égaler A_0 à zéro.

Or, en vertu du lemme V, on peut tirer de

$$A_0 = 0$$

$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n+1}$ en fonctions algébroïdes de n variables nouvelles $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ et s'annulant avec ces variables.

Donc, les z et les x étant des fonctions algébroïdes des ν, qui sont des fonctions algébroïdes des μ, sont des fonctions algébroïdes des μ. De plus, z et les x, s'annulant quand on annule les ν, qui eux-mêmes s'annulent quand les μ sont égaux à zéro, se réduisent à zéro quand on fait

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — La remarque relative au lemme V s'applique également au lemme VI.

Généralités.

Nous nous proposons d'étudier les propriétés d'une fonction z de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui est liée à ses dérivées partielles du premier ordre, que nous appellerons

$$p_1 = \frac{dz}{dx_1}, \quad p_2 = \frac{dz}{dx_2}, \quad \ldots, \quad p_n = \frac{dz}{dx_n},$$

par une relation de la forme

$$F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0.$$

Nous supposerons, pour simplifier, que F est un polynôme entier par rapport à z, aux p et aux x, et nous poserons, conformément à l'usage,

$$Z = \frac{dF}{dz}, \quad X_i = \frac{dF}{dx_i}, \quad P_i = \frac{dF}{dp_i}.$$

Nous nous bornerons, comme l'a fait Cauchy, à étudier un élément de la fonction z, c'est-à-dire la série des valeurs que prend cette fonction quand on donne à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des séries de valeurs telles que, si

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_n$$

sont des constantes imaginaires données,

$$\beta_1, \ \beta_2, \ \ldots, \ \beta_n$$

des constantes réelles et positives, les modules de $x_1 - \alpha_1, x_2 - \alpha_2, \ldots, x_n - \alpha_n$ restent plus petits respectivement que $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

On pourra toujours supposer que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$$

car, si cela n'était pas, on poserait

$$x_1 = y_1 + \alpha_1, \quad x_2 = y_2 + \alpha_2, \quad \ldots, \quad x_n = y_n + \alpha_n,$$

et avec ces nouvelles variables on serait ramené au cas où les α sont nuls.

De même on supposera toujours que la valeur que prend la fonction z quand les x s'annulent est zéro, car, si cela n'était pas, si par exemple z prenait alors une valeur finie β, on poserait

$$z = z_1 + \beta,$$

si z prenait une valeur infinie, on poserait

$$z = \frac{1}{z_1},$$

et de toute façon on serait ramené au cas où z s'annule avec les x.

Il pourra arriver qu'on soit obligé d'étudier un élément de fonction plus restreint encore, comme on a vu que cela avait lieu, par exemple, dans les cas où s'applique le lemme V (*voir* la Remarque).

L'étude que nous nous proposons de faire de l'équation

$$F = 0$$

comprend la résolution de trois problèmes.

PROBLÈME I.

Rechercher quelles sont les intégrales z de l'équation $F = 0$ *qui sont holomorphes en* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

PROBLÈME II.

Intégrer les équations différentielles

$$(4)\qquad \frac{dz}{\Sigma_i p_i P_i} = \frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{-dp_1}{X_1 + p_1 Z} = \ldots = \frac{-dp_n}{X_n + p_n Z}:$$

1° *Sous la forme*

$$(5)\qquad \varphi_1 = k_1,\quad \varphi_2 = k_2,\quad \ldots,\quad \varphi_{2n} = k_{2n},$$

où les K *sont des constantes arbitraires, les* φ *des fonctions connues de* z, *des* x *et des* p;

2° *Sous la forme*

$$(6)\quad x_1 = \psi_1,\quad x_2 = \psi_2,\quad \ldots,\quad x_{n-1} = \psi_{n-1},\quad z = \psi_n,\quad p_1 = \psi_{n+1},\quad \ldots,\quad p_n = \psi_{2n},$$

où les ψ *sont des fonctions connues de* x_n *et de* $2n$ *constantes arbitraires.*

PROBLÈME III.

Rechercher quelle est l'intégrale

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

qui satisfait à l'équation $F = 0$ *et qui se réduit identiquement à une fonction holomorphe donnée en* $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

quand une autre fonction holomorphe donnée en $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

est égale à zéro.

Le problème peut encore s'énoncer d'une autre manière.

En effet, les deux équations

$$z - \beta = 0, \quad \theta = 0$$

nous permettent, en vertu du lemme VI, d'exprimer $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$ en fonctions algébroïdes de $n - 1$ variables auxiliaires $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$, ces fonctions s'annulant avec ces nouvelles variables, soit

$$\begin{aligned} z &= \beta_1(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \\ x_1 &= \theta_1(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n &= \theta_n(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}). \end{aligned}$$

Le problème III s'énonce alors :

Trouver une intégrale de l'équation $F = 0$ *qui se réduise identiquement à* β_1 *quand on y remplace respectivement* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *par* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$.

Cauchy et Jacobi sont arrivés à peu près en même temps à ramener la résolution du problème III à celle du problème II. Rappelons en quelques mots les résultats auxquels sont arrivés ces deux grands géomètres.

Équations linéaires.

Supposons que l'équation $F = 0$ soit de la forme

$$X_1 p_1 + X_2 p_2 + \ldots + X_n p_n - Z = 0,$$

où $X_1, X_2, \ldots, X_n, Z$ sont des fonctions connues de $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$. Les équations différentielles (4), qui portent le nom d'*équations des* *caractéristiques*, prennent alors la forme

$$(4) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{Z}.$$

Supposons que le problème II soit résolu, c'est-à-dire que l'on ait les intégrales des équations (4) sous la double forme

$$(5) \qquad \varphi_1 = K_1, \quad \varphi_2 = K_2, \quad \ldots, \quad \varphi_n = K_n,$$

$$(6) \qquad x_1 = \psi_1, \quad x_2 = \psi_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = \psi_{n-1}, \quad z = \psi_n;$$

on trouvera l'intégrale que l'on se propose de chercher dans le problème III, en substituant respectivement, dans $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, $\beta_1, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ à la place de $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$, ce qui donnera à ces fonctions φ la forme

$$\gamma_1(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \quad \gamma_2(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \ldots, \gamma_n(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1});$$

et, en substituant ensuite respectivement, dans $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ à la place de $K_1, K_2, \ldots, K_n$, on aura ainsi l'expression de z, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ en fonction de x_n et des μ. Ce sera l'expression implicite de l'intégrale cherchée, et ensuite, quand cela sera possible, on éliminera les μ entre les équations qui constituent cette expression et l'on résoudra par rapport à l'intégrale pour en avoir l'expression explicite.

Équations non linéaires.

Cauchy a fait voir d'abord, en ce qui concerne les équations non linéaires, que, si l'intégrale cherchée existe :

1° Les dérivées partielles du premier ordre $p_1, p_2, \ldots, p_n$ doivent se réduire identiquement, quand on y remplace respectivement x_1, $x_2, \ldots, x_n$ par $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$, à certaines fonctions $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ faciles à déterminer.

2° Si les équations

$$(4) \qquad \frac{dz}{\Sigma p P} = \frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{-dp_1}{X_1 + p_1 Z} = \ldots = \frac{-dp_n}{X_n + p_n Z}$$

ont été intégrées sous la double forme

$$(5)\qquad \varphi_1 = k_1, \quad \ldots, \quad \varphi_{2n} = \mathrm{K}_{2n},$$
$$(6)\qquad x_1 = \psi_1, \quad \ldots, \quad x_{2n} = \psi_{2n},$$

nous obtiendrons l'expression implicite de cette intégrale de la manière suivante.

Dans $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n}$ remplaçons respectivement

$$z, \; p_1, \; p_2, \; \ldots, \; p_n, \; x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_n$$

par

$$\beta_1, \; \omega_1, \; \omega_2, \; \ldots, \; \omega_n, \; \theta_1, \; \theta_2, \; \ldots, \; \theta_n;$$

ces fonctions φ deviendront des fonctions des μ, que nous appellerons

$$y_1, \; y_2, \; \ldots, \; y_{2n}.$$

Dans $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{2n}$, remplaçons respectivement

$$\mathrm{K}_1, \; \mathrm{K}_2, \; \ldots, \; \mathrm{K}_{2n},$$

par

$$y_1, \; y_2, \; \ldots, \; y_{2n},$$

nous aurons $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, z, p_1, p_2, \ldots, p_n$ en fonction de x_n et des μ, et ce sera l'expression implicite de l'intégrale cherchée, si cette intégrale existe.

Enfin, Cauchy a fait voir que, pour que la fonction z ainsi définie représente *réellement* une intégrale de l'équation $\mathrm{F} = 0$, il faut et il suffit que les fonctions

$$\mathrm{J}_i = \frac{dz}{d\mu_i} - p_1 \frac{dx_1}{d\mu_i} - p_2 \frac{dx_2}{d\mu_i} - \ldots - p_{n-1} \frac{dx_{n-1}}{d\mu_i}$$

soient identiquement nulles.

Remarque I. — On peut toujours supposer que $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sont algébroïdes en $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$.

En effet, les fonctions $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sont définies par

$$\mathrm{F}(\beta_1, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = 0$$

et par $n-1$ équations telles que

$$\frac{d\beta_1}{d\mu_i} = \frac{d\theta_1}{d\mu_i}\omega_1 + \frac{d\theta_2}{d\mu_i}\omega_2 + \ldots + \frac{d\theta_n}{d\mu_i}\omega_n.$$

Si ces n équations permettent d'exprimer les ω en fonctions algébroïdes des μ, il n'y a pas de difficulté.

Si au contraire cela n'a pas lieu, on pourra toujours, en vertu du lemme VI, tirer de ces n équations

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n,$$

en fonctions algébroïdes de $n - 1$ nouvelles variables

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-1}.$$

On fera jouer alors à ces variables nouvelles le rôle que jouaient μ_1, $\mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$, et il est facile de voir que β_1, les θ et les ω s'expriment en fonctions algébroïdes de $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-1}$.

Remarque II. — La remarque qui précède ne s'applique pas aux cas où $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ ne gardent pas des valeurs finies quand on annule les μ.

Remarque III. — Parmi les intégrales des équations des caractéristiques mises sous la forme.

$$\varphi_1 = K_1, \quad \varphi_2 = K_2, \quad \ldots, \quad \varphi_{2n} = K_{2n}, \tag{5}$$

il y en a une, φ_{2n}, par exemple, qui n'est autre que le premier membre F de l'équation $F = 0$. Donc, quand on prendra les intégrales des équations (4) sous la seconde forme

$$x_1 = \psi_1, \quad x_2 = \psi_2, \quad \ldots, \quad p_n = \psi_{2n}, \tag{6}$$

on pourra remplacer partout, dans $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{2n}$, K_{2n} par zéro.

Propriétés des fonctions J.

On a vu que la méthode de Cauchy pour l'intégration des équations aux différences partielles était soumise à une restriction.

La fonction à laquelle elle conduit ne représente l'intégrale cherchée que si certaines fonctions $J_1, J_2, \ldots, J_{n-1}$ sont identiquement nulles.

Or Cauchy a démontré :

1° Que ces fonctions sont nulles quand on y remplace x_n par

$$\theta_n(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1});$$

2° Qu'elles satisfont à l'équation

$$P_n \frac{dJ}{dx_n} = JZ,$$

c'est-à-dire que, J_0 étant la valeur de J quand $x_n = \zeta_n$,

$$J = J_0 e^{\int \frac{Z}{P_n} dx_n}$$

Supposons que l'on ait donné aux μ des valeurs quelconques, par exemple

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{n-1} = 0;$$

l'intégrale sera prise depuis la valeur de x_n, qui correspond à $x_n = \zeta_n$, c'est-à-dire depuis zéro, jusqu'à une valeur quelconque de cette variable.

Si $P_n \gtrless 0$, il est évident que l'intégrale

$$\int dx_n \frac{Z}{P_n}$$

conserve une valeur finie et déterminée, et, par conséquent, puisque

$$J_0 = 0,$$

que J est identiquement nul.

Si $P_n = 0$, mais que P_i par exemple ne soit pas nul, on fera jouer à x_i le rôle qu'on avait fait jouer à x_n, c'est-à-dire que, au lieu de résoudre les équations

(5) $$\varphi_1 = K_1, \quad \ldots, \quad \varphi_{2n} = K_{2n}$$

en fonction de x_n pour les amener à la forme

(6) $$x_1 = \psi_1, \quad x_2 = \psi_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = \psi_{n-1}, \quad z = \psi_n, \quad p_1 = \psi_{n+1}, \quad \ldots,$$

on les résoudra en fonction de x_i; l'intégrale $\int dx_n \frac{Z}{P_n}$ sera remplacée par l'intégrale $\int dx_i \frac{Z}{P_i}$, qui conservera une valeur finie, et les fonctions J seront encore nulles.

Si

$$P_1 = P_2 = \ldots = P_n = 0,$$

mais que

$$X_i + p_i Z \gtrless 0,$$

on résoudra les équations (5) en fonction de p_i, et à la place de l'intégrale $\int dx_n \frac{Z}{P_n}$ on rencontrera l'intégrale $\int dp_i \frac{Z}{X_i + p_i Z}$, dont la valeur est aussi finie.

Dans ce cas encore, les fonctions J seront identiquement nulles.

On n'a donc à se préoccuper de la condition de restriction relative aux fonctions J que dans les cas où l'on a à la fois

$$P_1 = P_2 = \ldots = P_n = 0,$$
$$X_1 + p_1 Z = X_2 + p_2 Z = \ldots = X_n + p_n Z = 0.$$

PREMIÈRE PARTIE.

ÉTUDE DES CAS OU L'ON N'A PAS A LA FOIS

$$P_1 = P_2 = \ldots = P_n = 0,$$
$$X_1 + p_1 Z = X_2 + p_2 Z = \ldots = X_n + p_n Z = 0.$$

Dans ces cas on n'a pas, comme on vient de le voir, à se préoccuper de la condition relative aux J.

On suppose d'abord :

1° Qu'on veuille étudier une intégrale autour du point

$$z = x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

cette intégrale étant assujettie à se réduire à

$$\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

quand on a

$$\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

β et θ étant des fonctions holomorphes des x qui s'annulent avec ces variables ;

2° Que les fonctions $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$ auxquelles les dérivées p_1,

$p_2, \ldots, p_n$ sont assujetties à se réduire, comme on l'a vu plus haut, quand

$$\theta = 0,$$

prennent, quand les x s'annulent, des valeurs finies

$$y_1, y_2, \ldots, y_n;$$

3° Qu'en substituant

$$0, 0, 0, \ldots, 0, y_1, y_2, \ldots, y_n,$$

dans

$$P_1, P_2, \ldots, P_n,$$
$$X_1 + p_1 Z, \ldots, X_n + p_n Z,$$

à la place de

$$z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n,$$

toutes ces fonctions ne s'annulent pas à la fois.

PROBLÈME I.

Le problème I a été résolu successivement par Cauchy, par M^me^ de Kowalewski et par M. Darboux.

Théorème de M^me^ de Kowalewski. — *Si $\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se réduit identiquement à x_n, c'est-à-dire si l'on a à étudier une intégrale qui se réduit à β pour $x_n = 0$, cette intégrale est holomorphe, pourvu que*

$$P_n \gtrless 0.$$

(*Journal de Crelle*, t. 80, p. 13).

PROBLÈME II.

I. *Intégrer les équations* (4) *sous la forme* (5).

Cela revient à chercher $2n$ intégrales distinctes de l'équation linéaire

$$(7) \qquad \sum_i \frac{d\varphi}{dp_i}(X_i + p_i Z) - \sum_i \frac{d\varphi}{dx_i} P_i - \frac{d\varphi}{dz} \sum_i P_i p_i = 0.$$

Or un au moins des coefficients de cette équation, P par exemple, est différent de zéro.

Cherchons donc $2n$ intégrales de l'équation (7) assujetties à se réduire respectivement, quand $x_1 = 0$, à

$$\begin{gathered} f_1(x_2, x_3, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n), \\ f_2(x_2, x_3, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_{2n}(x_2, x_3, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n). \end{gathered}$$

1° Où $f_1, f_2, \ldots, f_{2n}$ sont des fonctions holomorphes en $x_2, x_3, \ldots, x_n, z, p_1 - y_1, p_2 - y_2, \ldots, p_n - y_n$.

2° Où f_{2n} n'est autre chose que ce que devient le premier membre de $F = 0$ quand on y fait $x_1 = 0$.

3° Où le déterminant fonctionnel des f par rapport à

$$x_2, \; x_3, \; \ldots, \; x_n, \; z, \; p_1, \; p_2, \; \ldots, \; p_n$$

ne s'annule pas quand ces variables se réduisent respectivement à

$$0, \; 0, \; \ldots, \; 0, \; 0, \; y_1, \; y_2, \; \ldots, \; y_n.$$

On peut toujours faire toutes ces suppositions.

Or, en vertu du théorème de M[me] de Kowalewski, les $2n$ intégrales ainsi définies sont holomorphes en

$$x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_n, \; z, \; p_1 - y_1, \; p_2 - y_2, \; \ldots, \; p_n - y_n,$$

et, d'ailleurs, la dernière se réduit à F.

Les intégrales cherchées du système (4) sont donc

$$\varphi_1 = K_1, \quad \varphi_2 = K_2, \quad \ldots, \quad \varphi_{2n-1} = K_{2n-1}, \quad F = K_{2n},$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n-1}$ sont holomorphes en $x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1 - y_1, \ldots, p_n - y_n$.

II. Soit maintenant à *amener les intégrales du système* (4) *sous la forme* (6).

Cela revient à résoudre le système (5) par rapport à toutes les variables qui y entrent en fonction de l'une d'elles, en fonction de x_1 par exemple.

Or le déterminant fonctionnel des φ par rapport à $x_2, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$ n'est autre chose pour les valeurs initiales que le déterminant fonctionnel des f par rapport aux mêmes variables, qui n'est pas nul, par hypothèse.

Donc le théorème de MM. Briot et Bouquet s'applique, et l'on peut exprimer $x_2, x_3, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n$ en fonctions holomorphes de x_1 et des K :

$$(6) \qquad z = \psi_1, \quad x_2 = \psi_2, \quad \ldots, \quad x_n = \psi_n, \quad p_1 = \psi_{n+1}, \quad \ldots, \quad p_n = \psi_{2n}.$$

PROBLÈME III.

PREMIER CAS.

THÉORÈME I. — *Dans le cas où*

$$\sum_i \mathrm{P}_i \frac{d\theta}{dx_i}$$

ne s'annule pas pour les valeurs initiales des variables, l'intégrale z est holomorphe.

En effet, faisons un changement de variables en posant

$$(8) \qquad y = \theta(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Puisque

$$(9) \qquad \sum \mathrm{P}_i \frac{d\theta}{dx_i} \gtrless 0,$$

toutes les valeurs initiales des $\dfrac{d\theta}{dx_i}$ ne sont pas nulles; soit, par exemple,

$$\frac{d\theta}{dx_1} \gtrless 0.$$

On pourra résoudre alors l'équation (8) par rapport à x_1, et l'on aura

$$x_1 = \mathrm{G}(y, x_2, \ldots, x_n),$$

G étant holomorphe.

Soient $q_1, q_2, \ldots, q_n$ les nouvelles dérivées partielles de z par rapport à

$$y, x_2, \ldots, x_n;$$

on aura

$$p_1 = q_1 \frac{d\theta}{dx_1},$$

$$p_2 = q_1 \frac{d\theta}{dx_2} + q_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_n = q_1 \frac{d\theta}{dx_n} + q_n.$$

Soient $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ les dérivées de F par rapport à $q_1, q_2, \ldots, q_n$; on aura

$$Q_1 = \sum P_i \frac{d\theta}{dx_i} \gtrless 0.$$

L'intégrale cherchée est donc assujettie à se réduire à une fonction

$$\beta[G(y, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n],$$

qui est holomorphe en $y, x_2, \ldots, x_n$ quand

$$y = 0,$$

et d'ailleurs

$$Q_1 \gtrless 0.$$

Donc le théorème de M^me^ de Kowalewski s'applique, et z est holomorphe en $y, x_2, \ldots, x_n$, et par conséquent aussi en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

C. Q. F. D.

Interprétation géométrique. — Supposons que l'on n'ait que deux variables indépendantes x et y; l'intégrale

$$z = f(x, y)$$

peut alors être considérée comme représentant une surface S.

Il est facile, dans ce cas, de trouver une interprétation géométrique de la condition (9).

L'équation $F = 0$ signifie qu'au point

$$x = y = z = 0,$$

c'est-à-dire à l'origine, le plan tangent P à la surface S est tangent à un cône donné C.

Dire que l'intégrale z est assujettie à se réduire à β quand on a $\theta = 0$, c'est dire que S est assujetti à passer par une courbe donnée A qui passe elle-même par l'origine, et par conséquent que le plan P passe par la tangente à l'origine T à la courbe A.

On obtiendra donc le plan P en menant par T un plan tangent à C. On pourra en général en mener plusieurs, c'est-à-dire que par la courbe A on pourra faire passer plusieurs surfaces S.

Considérons une de ces surfaces. Dire que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont finis, c'est dire que le plan P correspondant n'est pas parallèle à l'axe des z. Dire que

$$\sum P_i \frac{d\theta}{dx_i} \gtrless 0,$$

c'est dire que T n'est pas sur le cône C.

A ces conditions, la surface S est représentable par une équation où z est égalé à une fonction holomorphe d'x et d'y.

DEUXIÈME CAS.

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ restent finis, mais la condition (9) n'est pas remplie.

Géométriquement, c'est dire que le plan P ne passe pas par l'axe des z, mais que T est sur le cône C.

Supposons d'abord que l'équation $F = 0$ est linéaire.

THÉORÈME II. — Dans ce cas, *l'intégrale z peut s'exprimer en égalant à zéro une fonction φ holomorphe par rapport à z et aux x, et s'annulant avec ces variables, pourvu que, si*

$$\varphi_1 = K_1, \quad \ldots, \quad \varphi_n = K_n$$

représentent les intégrales du système (4), si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ s'annulent avec z et les x, $z - \beta$ et θ ne s'annulent pas identiquement à la fois quand tous les φ sont nuls.

En effet, si une pareille expression de l'intégrale existe, elle pourra s'écrire

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0; \tag{10}$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, étant les fonctions qui, égalées à des constantes, représentent les intégrales du système (4), sont, comme on l'a vu (résolution du Problème II), holomorphes par rapport à z et aux x et s'annulent avec ces variables.

De plus, Φ devra être identiquement nul quand on aura à la fois

$$(11) \qquad z - \beta = 0, \quad \theta = 0.$$

Faisons un changement de variables en prenant pour variables nouvelles x_1, φ_1, φ_2, ..., φ_n; nous aurons

$$(6) \qquad z = \psi_1, \quad x_2 = \psi_2, \quad \ldots, \quad x_n = \psi_n,$$

les ψ étant holomorphes par rapport à x_1 et aux φ et s'annulant avec ces variables. (*Voir* la résolution du Problème II.)

Les équations (11) deviennent alors

$$B = 0, \quad C = 0,$$

B et C étant holomorphes par rapport à x_1 et aux φ et s'annulant avec ces variables.

On trouverait l'intégrale (10) en éliminant x_1 entre ces deux équations.

Or B et C ne peuvent être identiquement nuls, quel que soit x_1 quand les φ s'annulent, sans quoi l'on aurait identiquement

$$z - \beta = 0, \quad \theta = 0$$

quand

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n = 0,$$

ce qui est contraire aux hypothèses faites en commençant.

On pourra donc tirer (Lemme III) de $C = 0$, par exemple, x_1 en fonction algébroïde des φ; si l'on substitue cette valeur de x_1 dans B, cette dernière fonction devient algébroïde par rapport aux φ, c'est-à-dire qu'elle est liée aux φ par une équation de la forme

$$B^m + A_{m-1} B^{m-1} + \ldots + A_1 B + A_0 = 0,$$

où les A sont holomorphes par rapport aux φ.

L'équation $B = 0$ est alors équivalente à $A_0 = 0$, et le premier membre de cette équation, qui n'est autre que l'intégrale (10) cherchée, est holomorphe par rapport aux φ.

Donc, si l'on remplace les φ par leurs valeurs, A_0 devient une fonction Φ holomorphe en z, x_1, x_2, ..., x_n et s'annulant avec ces variables, et l'intégrale cherchée s'exprime en égalant cette fonction à zéro, ce qu'il fallait démontrer.

TROISIÈME CAS.

Les y restent finis, la condition (9) n'est pas remplie, mais l'équation $F = 0$ n'est pas linéaire.

Théorème III. — Dans ce cas, *l'intégrale z peut s'exprimer en égalant à zéro $n+1$ fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}$ holomorphes par rapport à z, x_1, x_2, ..., x_n, $p_1 - y_1$, $p_2 - y_2$, ..., $p_n - y_n$ et s'annulant avec ces variables, pourvu que, si*

$$\varphi_1 = K_1, \quad \varphi_2 = K_2, \quad \ldots, \quad \varphi_{2n} = K_{2n}$$

représentent les intégrales du système IV, si φ_1, φ_2, ..., φ_{2n} s'annulent quand z et les x se réduisent à zéro et les p aux y, $z - \beta$, $p_1 - \omega_1$, $p_2 - \omega_2$, ..., $p_n - \omega_n$, θ ne s'annulent pas identiquement à la fois quand

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_{2n} = 0.$$

En effet, en raisonnant comme on l'a fait pour le théorème précédent, on verrait que pour obtenir l'intégrale cherchée il suffit :

1° De changer de variables en posant

$$z = \psi_1, \quad x_2 = \psi_2, \quad \ldots, \quad x_n = \psi_n, \quad p_1 = \psi_{n+1}, \quad \ldots, \quad p_n = \psi_{2n},$$

les ψ étant les fonctions qui sont définies dans la résolution des équations (4) sous la forme (6);

2° De faire cette substitution dans les premiers membres des équations

$$z - \beta = 0, \quad p_1 - \omega_1 = 0, \quad \ldots, \quad p_n - \omega_n = 0, \quad \theta = 0,$$

qui deviennent alors

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad \ldots, \quad B_{n+1} = 0, \quad B_{n+2} = 0,$$

les B étant des fonctions holomorphes de x_1 et des φ s'annulant avec ces variables;

3° D'éliminer x_1 entre ces $n+2$ équations.

Or B_1, B_2, ..., B_{n+2} ne peuvent être identiquement nuls à la fois, quel que soit x_1, quand les φ s'annulent, à cause de la condition de restriction posée au début. Supposons, par exemple, que ce soit B_{n+2} qui ne s'annule pas identiquement dans ce cas.

On pourra tirer de $B_{n+2}=0$ x_1 en fonction algébroïde des φ; substituant cette valeur de x_1 dans B_1, B_2, ..., B_{n+1}, ces fonctions deviennent algébroïdes par rapport aux φ (Corollaire II du Lemme III).

L'intégrale s'exprime donc en égalant à zéro $n+1$ fonctions algébroïdes des φ, ou, ce qui revient au même, en annulant $n+1$ fonctions holomorphes des φ ou, ce qui revient encore au même, $n+1$ fonctions holomorphes en z, x_1, x_2, ..., x_n, p_1-y_1, p_2-y_2, ..., p_n-y_n.

C. Q. F. D.

Théorème IV. — *Si, dans le troisième cas, z ou les p ne prennent pas une forme indéterminée quand les x s'annulent, z est une fonction algébroïde des x.*

En effet, on vient de voir que l'intégrale cherchée s'exprimait en égalant à zéro $n+1$ fonctions holomorphes en z, x_1, x_2, ..., x_n, p_1-y_1, p_2-y_2, ..., p_n-y_n et s'annulant quand on égale z et les x à zéro et les p aux y.

Soient

$$H_1=H_2=H_3=\ldots=H_{n+1}=0$$

ces $n+1$ équations. Si ces équations restent distinctes quand les x s'annulent, on pourra leur appliquer le lemme IV.

Mais dire qu'elles ne sont pas distinctes, c'est dire que z ou les p cessent d'être déterminés quand les x s'annulent. Or cela n'a pas lieu, par hypothèse; donc le lemme IV est applicable, donc z est une fonction algébroïde des x.

C. Q. F. D.

Remarque I. — Il est facile, dans le cas de deux variables, de trouver une interprétation géométrique des conditions de restriction posées dans l'énoncé du théorème précédent.

Dire en effet que z cesse d'être déterminé quand x et y s'annulent, c'est dire que la surface S passe par l'axe des z.

Dire que p et q cessent d'être déterminés quand x et y s'annulent, c'est dire que la surface S présente un point conique à l'origine.

Si aucun de ces deux cas ne se présente, le théorème IV est applicable.

Remarque II. — Dans le second cas, les $n+1$ équations

$$H = 0$$

se réduisent à une seule où n'entrent pas les p.

Le théorème IV sera donc applicable toutes les fois que z ne deviendra pas indéterminé quand on annulera les x.

Théorème V. — Dans le deuxième et le troisième cas, *l'intégrale cherchée peut s'exprimer en égalant z et les x à des fonctions algébroïdes de n nouvelles variables $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$.*

En effet, il suffit, pour démontrer ce théorème, de se reporter aux équations

$$H_1 = H_2 = \ldots = H_n = 0$$

et de leur appliquer le lemme VI.

Les premiers membres de ces équations sont holomorphes par rapport à $z, p_1 - y_1, p_2 - y_2, \ldots, p_n - y_n, x_1, \ldots, x_n$. Donc $z, x_1, \ldots, x_n$ peuvent s'exprimer en fonctions algébroïdes de n variables auxiliaires $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$.

Exemple I. — Soit à trouver une intégrale de l'équation

$$p + q = 1$$

qui se réduise à $x + x^3$ quand on y fait

$$y = x + x^2.$$

Les équations (4), qui s'écrivent

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{1},$$

ont pour intégrales

(5) $$z - x = K_1, \quad y - x = K_2,$$

(6) $$z = x + K_1, \quad y = x + K_2.$$

En remplaçant z et y par leurs valeurs (6) dans les équations

$$z = x + x^3, \quad y = x + x^2,$$

il vient

$$K_1 = x^3, \quad K_2 = x^2,$$

ou, éliminant x,

$$K_1^2 = K_2^3,$$

ou

$$(z - x)^2 = (y - x)^3.$$

On était placé dans le second cas, car l'équation proposée est linéaire et

$$P \frac{d\theta}{dx} + Q \frac{d\theta}{dy} = 1 - 1 = 0.$$

C'est pourquoi on est arrivé à exprimer l'intégrale en égalant à zéro une fonction holomorphe en x, y, z :

$$(z - x)^2 - (y - x)^3;$$

de plus, cette fonction ne s'annule pas, quel que soit z, quand $x = y = 0$.

Donc le théorème IV s'applique et z est algébroïde en x et en y.

Exemple II. — Soit à trouver une intégrale de l'équation

$$p + q(1 - 2z) = 1$$

qui se réduise à $\frac{x}{2}$ quand on fait

$$y = x.$$

On est encore placé dans le second cas, car l'équation est linéaire et la condition (9) n'est pas remplie. Le théorème II s'applique donc.

Les équations (4), qui s'écrivent

$$\frac{dx}{1} = \frac{dz}{1} = \frac{dy}{1 - 2z},$$

ont pour intégrales

(5) $$z - x = K_1, \quad z^2 + y - x = K_2,$$

(6) $$z = x + K_1, \quad y = x + K_2 - (x + K_1)^2;$$

en remplaçant y et z par leurs valeurs (6) dans les équations

$$y - x = 0, \quad z - \frac{x}{2} = 0,$$

il vient

$$K_2 - (x + K_1)^2 = 0, \quad x = -2K_1,$$

ou, éliminant x,

$$K_2 - K_1^2 = 0,$$

ou

$$(z^2 + y - x) - (z - x)^2 = 0, \tag{12}$$

qui est l'intégrale cherchée, exprimée par une équation dont le second membre est zéro et le premier une fonction holomorphe en x, y, z.

Mais ici l'équation (12) est satisfaite, quel que soit z, quand

$$x = y = 0.$$

Le théorème IV ne s'applique donc pas.

Exemple III. — Soit à trouver l'intégrale de

$$p^2 + q = x + y,$$

qui se réduit à $\frac{x}{2}$ pour $y = \frac{x}{2}$.

Les dérivées partielles p et q sont alors assujetties à se réduire quand $y = \frac{x}{2}$:

$$p = \quad 1 \pm \sqrt{3x},$$
$$q = -1 \mp 2\sqrt{3x}.$$

Les valeurs initiales de p et q sont 1 et -1, et par conséquent finies; de plus, la condition (9) n'est pas remplie; on est donc dans le troisième cas, et le théorème III s'applique.

Les équations (4), qui s'écrivent

$$\frac{dp}{1} = \frac{dq}{1} = \frac{dx}{2p} = \frac{dy}{1},$$

ont pour intégrales

$$y - p = K_1, \quad q = p = K_2, \quad p^2 + q - x - y = K_3, \tag{5}$$

$$q = K_2 + p, \quad y = K_1 + p, \quad x = p^2 + K_2 - K_1 - K_3. \tag{6}$$

Si, dans les équations

$$y = \frac{x}{2}, \quad (p-1)^2 - 3x = 0,$$

on remplace q, y et x par leurs valeurs (6), il vient

$$2K_1 + 2p = p^2 + K_2 - K_1 - K_3,$$
$$(p-1)^2 - 3p^2 - 3K_2 + 3K_1 + 3K_3 = 0.$$

Ces équations peuvent s'écrire

$$2K_1 + 1 = (p-1)^2 + \alpha, \quad (p-1)^2 = 3p^2 + 3\alpha;$$

en posant, pour abréger,

$$K_2 - K_1 - K_3 = \alpha,$$

d'où

$$2K_1 + 1 - 4\alpha = 3p^2.$$

(13) $$p = \sqrt{\frac{2K_1 + 1 - 4\alpha}{3}},$$

et remplaçant dans la première équation p par sa valeur, il vient

(14) $$\frac{4}{3}(2K_1 + 1 - 4\alpha) = \left(\frac{2K_1 + 1 - 4\alpha}{3} + \alpha - 2K_1\right)^2.$$

Si dans cette relation on remplace α par $K_2 - K_1 - K_3$, puis K_1 et K_2 par leurs valeurs (5), K_3 par zéro, ce qui peut toujours se faire, puisque

$$p^2 + q - x - y = 0;$$

on aura une équation entre p, q, x, y dont les deux membres sont holomorphes par rapport à ces variables.

Cette relation, jointe à

$$p^2 + q - x - y = 0,$$

définit p et q en fonction de x et de y.

Si dans l'équation

$$z = \frac{x}{2}$$

on avait remplacé z et x par leurs valeurs (6), puis p par sa valeur (13), puis K_1, K_2, K_3 par leurs valeurs (5), on aurait obtenu une équation dont les deux membres auraient été holomorphes par rapport à z, x, y, p, q.

z, p et q se seraient alors trouvés définis par trois équations ayant leurs deux membres holomorphes en z, x, y, p, q, comme l'exige le théorème III.

Voyons maintenant si le théorème IV s'applique.

Pour cela, voyons si, en substituant dans l'équation (14), à la place de α, $K_1 - K_2 - K_3$, à la place de K_1, K_2, K_3 leurs valeurs (5), enfin, en faisant $x = y = 0$, l'équation en p et en q que l'on obtient ainsi est distincte de $p_2 + q = 0$. Mais si, dans les expressions (5), on fait

$$x = y = 0,$$

il vient

$$K_1 = -p, \quad \alpha = -p^2.$$

L'équation (14) transformée ne contient pas q; donc elle est distincte de $p_2 + q = 0$, pourvu qu'elle ne se réduise pas à une identité. Or on voit facilement que son premier membre est du degré 2 en p, tandis que le second membre est du degré 4. Donc les deux équations sont distinctes. Donc, en vertu du lemme IV, on peut tirer de l'équation (14) non transformée et de

$$p^2 + q = x + y,$$

p et q en fonctions algébroïdes de x et de y.

Donc z sera aussi une fonction algébroïde de x et y. Donc le théorème IV s'applique.

Calcul des coefficients.

Dans les exemples qui précèdent, on a formé les fonctions H_1, H_2, ..., H_{n+1} qui, égalées à zéro, donnent l'expression de l'intégrale par la méthode même qui a servi à en démontrer l'existence; mais, en général, il est préférable d'en calculer directement les coefficients par le procédé que je vais exposer rapidement.

Équations linéaires sans terme constant.

Soit l'équation

$$X_1 \frac{d\varphi}{dx_1} + X_2 \frac{d\varphi}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{d\varphi}{dx_n} = 0,$$

et soit à en trouver une intégrale qui se réduise à

$$\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

quand on a

$$\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

On a vu que pour trouver cette intégrale il faut :

1° Remplacer $x_2, \ldots, x_n$ par les expressions

(6) $$x_2 = \psi_2, \quad \ldots, \quad x_n = \psi_n:$$

les expressions $\varphi - \beta$, θ deviennent alors holomorphes par rapport à x_1 et à $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$;

2° Résoudre par rapport à x_1 l'équation

$$\theta = 0$$

ainsi transformée et remplacer x_1 par sa valeur dans l'équation

$$\varphi - \beta = 0,$$

également transformée;

3° Remplacer dans l'équation

$$\varphi - \beta = 0,$$

après cette double transformation, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ par leurs valeurs en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si dans l'équation $\theta = 0$, après sa transformation, la première des dérivées partielles de θ par rapport à x_1, qui ne s'annule pas avec les x, est $\frac{d^m\theta}{dx_1^m}$; cette équation donne x_1 en fonction algébroïde de degré m, de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$; donc φ est également algébroïde de degré m en $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$, et par conséquent en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si, par exemple, on a

$$\frac{d\theta}{dx_1} = 0, \quad \frac{d^2\theta}{dx_1^2} \lessgtr 0$$

quand les x sont nuls, φ sera donné par une équation de la forme

$$\varphi^2 + A_1\varphi + A_0 = 0,$$

où A_0 et A_1 sont holomorphes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Ce sont les coefficients des deux séries A_0, A_1 qu'il s'agit de calculer.

Pour que ce qui suit soit plus clair, nous emploierons les notations suivantes.

Nous poserons

$$\Delta u = X_1 \frac{du}{dx_1} + X_2 \frac{du}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{du}{dx_n},$$

u étant une fonction quelconque

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u), \quad \ldots, \quad \Delta^m u = \Delta(\Delta^{m-1} u).$$

De plus, nous remarquerons que, dans les calculs qui servent à démontrer l'existence des fonctions A_0, A_1, on a employé deux systèmes de variables :

$$(14) \qquad x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

$$(15) \qquad x_1, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}.$$

Nous représenterons les dérivées partielles par le symbole d quand les variables (14) seront choisies comme variables indépendantes, par le symbole ∂ quand ce seront les variables (15) qui joueront le même rôle.

Cela posé, voyons d'abord ce que signifient les conditions

$$(16) \qquad \frac{\partial\theta}{\partial x_1} = \frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2} = \ldots = \frac{\partial^{m-1}\theta}{\partial x_1^{m-1}} = 0, \quad \frac{\partial^m\theta}{\partial x_1^m} \gtrless 0,$$

qui doivent être remplies pour que φ soit algébroïde de degré m. On a

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_1} = \frac{d\theta}{dx_1} + \frac{d\theta}{dx_2}\frac{d\psi_2}{dx_1} + \frac{d\theta}{dx_3}\frac{d\psi_3}{dx_1} + \ldots + \frac{d\theta}{dx_n}\frac{d\psi_n}{dx_1}.$$

Or

$$\frac{1}{X_1} = \frac{\frac{d\psi_2}{dx_1}}{X_2} = \ldots = \frac{\frac{d\psi_n}{dx_1}}{X_n}.$$

Donc

$$X_1 \frac{\partial\theta}{\partial x_1} = X_1 \frac{d\theta}{dx_1} + \ldots + X_n \frac{d\theta}{dx_n} = \Delta\theta.$$

Or X_1 n'est pas nul, on peut toujours le supposer. Donc la condition

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_1} = 0$$

équivaut à

$$\Delta\theta = 0.$$

De même,

$$X_1^2 \frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2} + X_1 \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \frac{\partial\theta}{\partial x_1} = \Delta^2\theta.$$

Donc les conditions

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_1} = \frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2} = 0$$

équivalent à

$$\Delta\theta = \Delta^2\theta = 0.$$

Donc les conditions (16) équivalent à

$$\Delta\theta = \Delta^2\theta = \ldots = \Delta^{m-1}\theta = 0, \quad \Delta^m\theta \gtrless 0.$$

Donc, si le premier des $\Delta\theta$, qui ne s'annule pas avec les x, est $\Delta^m\theta$, φ est algébroïde de degré m par rapport aux x et s'exprime par l'équation

$$\varphi^m + A_{m-1}\varphi^{m-1} + \ldots + A_1\varphi + A_0 = 0.$$

Je dis qu'on a identiquement

$$\beta^m + A_{m-1}\beta^{m-1} + \ldots + A_1\beta + A_0 = \lambda\theta,$$

λ étant une fonction holomorphe par rapport aux x, et, de plus,

$$\Delta A_0 = \Delta A_1 = \ldots = \Delta A_{m-1} = 0.$$

En effet, posons

$$\theta_1 = \theta(x_1, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$$

et considérons θ_1 comme une nouvelle variable. On peut tirer x_1, en fonction algébroïde de degré m, de $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ et de θ_1.

Soient

$$x'_1,\ x''_1,\ \ldots,\ x_1^{(m)}$$

les m valeurs de x_1; toute fonction symétrique de ces m valeurs est holomorphe en $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, \theta_1$.

Soient

$$\beta',\ \beta'',\ \ldots,\ \beta^{(m)}$$

les m valeurs que prend β quand on y remplace x_1 par

$$x'_1,\ x''_1,\ \ldots,\ x_1^{(m)}.$$

Soient $B_0, B_1, \ldots, B_{m-1}$ les coefficients de l'équation

$$\beta^m + B_{m-1}\beta^{m-1} + \ldots + B_1\beta + B_0 = 0, \tag{17}$$

à laquelle satisfont ces m valeurs de β.

Ces B seront des fonctions holomorphes en $x'_1, \ldots, x_1^{(m)}$ et en $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, et symétriques par rapport aux m premières variables. Donc ce seront des fonctions holomorphes en $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, \theta_1$.

Éliminer x_1 entre les équations

$$\theta = 0, \quad \varphi - \beta = 0,$$

où l'on considère les variables (15) comme variables indépendantes, c'est éliminer θ_1 entre

$$\theta_1 = 0,$$

$$\varphi^m + B_{m-1}\varphi^{m-1} + \ldots + B_1\varphi + B_0 = 0.$$

Donc, en faisant $\theta_1 = 0$ dans

$$B_0,\ B_1,\ \ldots,\ B_{m-1},$$

ces fonctions se réduisent à

$$A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_{m-1}.$$

Les A étant fonctions des φ seulement, on a identiquement

$$\Delta A_0 = \Delta A_1 = \ldots = \Delta A_{m-1} = 0.$$

De plus, on a identiquement

$$B_0 = A_0 + \lambda_0 \theta_1, \quad B_1 = A_1 + \lambda_1 \theta_1, \quad \ldots, \quad B_{m-1} = A_{m-1} + \lambda_{m-1} \theta_1,$$

les λ étant holomorphes en $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \theta_1$. Or β satisfait identiquement à l'équation (17). Donc on a identiquement

$$\beta^m + A_{m-1}\beta^{m-1} + \ldots + A_1\beta + A_0 = \lambda\theta_1,$$

λ étant holomorphe en $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \theta_1$, ou, en reprenant les variables (14),

$$(18) \qquad \beta^m + A_{m-1}\beta^{m-1} + \ldots + A_1\beta + A_0 = \lambda\theta,$$

λ étant holomorphe en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. C. Q. F. D.

L'existence des fonctions A qui satisfont à ces conditions est démontrée; il reste à trouver leurs coefficients. Pour cela, nous supposerons que l'on n'ait que trois variables x_1, x_2, x_3 et que

$$\Delta\theta = 0, \quad \Delta^2\theta \gtrless 0,$$

c'est-à-dire $m = 2$.

Prenons le Δ des deux membres de l'équation (18); il viendra, puisque $\Delta A_0 = \Delta A_1 = 0$,

$$(19) \qquad \Delta\beta^2 + A_1\Delta\beta = \lambda\Delta\theta + \theta\Delta\lambda.$$

Cette équation et celles que l'on obtient en la différentiant un nombre quelconque de fois par rapport à chacune des variables nous donneront, quand on y annulera les x, des relations entre les coefficients de A_1 et de λ, et ce sont ces relations qui vont nous servir à les déterminer.

Si U est la différence des deux membres de l'équation (19), on calculera donc les coefficients de A_1 et de λ à l'aide des équations

$$0 = \frac{dU}{dx_1} = \frac{dU}{dx_2} = \frac{dU}{dx_3} = \frac{d^2U}{dx_1^2} = \frac{d^2U}{dx_1 dx_2} = \ldots,$$

où

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Mais on peut remplacer le système

$$\frac{dU}{dx_1} = \frac{dU}{dx_2} = \frac{dU}{dx_3} = 0$$

par le système

$$\frac{dU}{dx_1} = \frac{dU}{dx_2} = \Delta U = 0,$$

et le système

$$\frac{d^2U}{dx_1^2} = \frac{d^2U}{dx_2^2} = \frac{d^2U}{dx_3^2} = \frac{d^2U}{dx_1 dx_2} = \frac{d^2U}{dx_1 dx_3} = \frac{d^2U}{dx_2 dx_3} = 0$$

par

$$\frac{d^2U}{dx_1^2} = \frac{d^2U}{dx_1 dx_2} = \frac{d^2U}{dx_2^2} = \frac{d\Delta U}{dx_1} = \frac{d\Delta U}{dx_2} = \Delta^2 U = 0,$$

et ainsi de suite.

Ce seront ces nouveaux systèmes que nous emploierons à la place des anciens.

PREMIER CAS.

$$\Delta\beta \gtrless 0.$$

Dans ce cas, l'équation $U = 0$ donne $A_1 = 0$; l'équation $\Delta^m U = 0$ ne contient que

$$A_1, \ \lambda, \ \Delta\lambda, \ \ldots, \ \Delta^{m-1}\lambda.$$

Les équations

$$0 = \Delta U = \Delta^2 U = \Delta^3 U = \ldots$$

nous fourniront donc

$$\lambda, \ \Delta\lambda, \ \Delta^2\lambda, \ \ldots.$$

L'équation $\frac{dU}{dx_1} = 0$ ne contient que A_1 et $\frac{dA_1}{dx_1}$; elle permet donc de calculer ce dernier coefficient.

L'équation $\frac{d\Delta^m U}{dx_1} = 0$ ne contient que A_1, des termes de la forme

$$\Delta^p\lambda \quad \text{et} \quad \frac{dA_1}{dx_1}, \quad \frac{d\lambda}{dx_1}, \quad \frac{d\Delta\lambda}{dx_1}, \quad \ldots, \quad \frac{d\Delta^{m-1}\lambda}{dx_1}.$$

Les équations

$$o = \frac{d\Delta U}{dx_1} = \frac{d\Delta^2 U}{dx_1} = \ldots$$

nous permettront donc de calculer

$$\frac{d\lambda}{dx_1}, \quad \frac{d\Delta\lambda}{dx_1}, \quad \ldots.$$

De même, si D est le symbole d'un nombre quelconque de différentiations par rapport à x_1 et à x_2, les équations

$$o = DU = D(\Delta U) = D(\Delta^2 U) = \ldots$$

permettront de calculer

$$DA_1 = D\lambda = D(\Delta\lambda) = \ldots,$$

pourvu que l'on ait résolu préalablement le même problème pour les différentielles de A_1, λ, $\Delta\lambda$, ..., d'ordre inférieur à celui de D.

Quand on connaîtra les coefficients de A_1 et de λ, rien ne sera plus facile que de calculer ceux de A_0, et alors φ sera connu, puisqu'il suffira de poser

$$\varphi^2 + A_1\varphi + A_0 = o.$$

DEUXIÈME CAS.

$$\Delta\beta \gtrless o, \quad \Delta\theta = \Delta^2\theta = o, \quad \Delta^3\theta \gtrless o.$$

Dans ce cas, φ se présente sous la forme

$$\varphi^3 + A_2\varphi + A_1\varphi + A_0 = o,$$

et l'on a identiquement

$$\beta^3 + A_2\beta^2 + A_1\beta + A_0 = \lambda\theta,$$

$$\Delta A_2 = \Delta A_1 = \Delta A_0 = o.$$

On part, comme précédemment, de l'équation

$$U = \Delta\beta^3 + A_2\Delta\beta^2 + A_1\Delta\beta - \lambda\Delta\theta - \theta\Delta\lambda = o$$

et des équations obtenues en la différentiant, et l'on voit facilement que

$$
\begin{array}{rcl}
U = 0 & \text{donne} & A_1, \\
\Delta U = 0 & \text{»} & A_2, \\
\Delta^2 U = 0 & \text{»} & \lambda, \\
\Delta^3 U = 0 & \text{»} & \Delta\lambda, \\
\dots\dots\dots & \text{»} & \dots, \\
\dfrac{dU}{dx_1} = 0 & \text{»} & \dfrac{dA_1}{dx_1}, \\
\dfrac{d\Delta U}{dx_1} = 0 & \text{»} & \dfrac{dA_2}{dx_1}, \\
\dfrac{d\Delta^2 U}{dx_1} = 0 & \text{»} & \dfrac{d\lambda}{dx_1}, \\
\dfrac{d\Delta^3 U}{dx_1} = 0 & \text{»} & \dfrac{d\Delta\lambda}{dx_1}, \\
\dots\dots\dots & \text{»} & \dots\dots;
\end{array}
$$

et, en général,

$$
\begin{array}{rcl}
DU = 0 & \text{donne} & DA_1, \\
D\Delta U = 0 & \text{»} & DA_2, \\
D\Delta^2 U = 0 & \text{»} & D\lambda, \\
D\Delta^3 U = 0 & \text{»} & D\Delta\lambda, \\
\dots\dots\dots & \text{»} & \dots\dots
\end{array}
$$

Connaissant A_1, A_2 et λ, on connaitra donc A_n.

TROISIÈME CAS.

$$\Delta\beta = \Delta\theta = 0, \quad \Delta^2\beta \gtrless 0, \quad \Delta^2\theta \gtrless 0.$$

Dans ce cas, l'équation

$$U = 0$$

se réduit à une identité.

Les équations de la forme $DU = 0$ ne contiennent plus DA_1, mais seulement des dérivées de A_1 d'ordre inférieur à celui de D.

Dans ce cas,

$$
\begin{array}{rcl}
\Delta^2 U = \dfrac{dU}{dx_1} = \dfrac{dU}{dx_2} = \Delta U = 0 & \text{donne} & A_1,\ \lambda,\ \Delta\lambda, \\
\Delta^3 U = 0 & \text{»} & \Delta^2\lambda, \\
\Delta^4 U = 0 & \text{»} & \Delta^3\lambda, \\
\ldots\ldots\ldots & \text{»} & \ldots, \\
D_2 U = D_1 \Delta U = D_1 \Delta^2 U = 0 & \text{»} & D_1 A_1,\ D_1\lambda,\ D_1\Delta\lambda, \\
D_1 \Delta^3 U = 0 & \text{»} & D_1\Delta^2\lambda, \\
D_1 \Delta^4 U = 0 & \text{»} & D_1\Delta^3\lambda, \\
\ldots\ldots\ldots & \text{»} & \ldots\ldots, \\
D_3 U = D_2 \Delta U = D_2 \Delta^2 U = 0 & \text{»} & D_2 A_1,\ D_2\lambda,\ D_2\Delta\lambda, \\
D_2 \Delta^3 U = 0 & \text{»} & D_2\Delta^2\lambda, \\
D_2 \Delta^4 U = 0 & \text{»} & D_2\Delta^3\lambda, \\
\ldots\ldots\ldots & \text{»} & \ldots\ldots
\end{array}
$$

Dans le Tableau précédent, D_1 est le symbole d'une seule différentiation par rapport à x_1 ou à x_2, D_2 celui d'une double différentiation par rapport aux mêmes variables, etc.

Il est à remarquer que l'on a ici plus d'équations qu'il n'en faudrait pour déterminer les inconnues que l'on cherche; mais elles sont évidemment compatibles, puisque l'existence des séries A_0, A_1, λ est démontrée.

Il est plus rapide de calculer de la façon suivante. Introduisons une nouvelle variable α, et supposons que l'on ait à rechercher des fonctions A_1, A_0, λ de x_1, x_2, x_3 et α satisfaisant aux conditions

$$(\beta + \alpha\gamma)^2 + A_1(\beta + \alpha\gamma) + A_0 = \lambda\theta, \quad \Delta A_0 = \Delta A_1 = 0,$$

γ étant une fonction donnée de x_1, x_2, x_3 telle que

$$\Delta\gamma \gtrless 0 \quad \text{pour} \quad x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Dans ce cas, si

$$U = \Delta(\beta + \alpha\gamma)^2 + A_1\Delta(\beta + \alpha\gamma) - \Delta(\lambda\theta) = 0,$$

l'équation

$$
\begin{array}{lcl}
o = \dfrac{dU}{d\alpha} & \text{donnera} & A_1, \\
o = \Delta U & » & \lambda, \\
o = \Delta^2 U & » & \Delta\lambda, \\
\ldots\ldots\ldots & » & \ldots, \\
o = \dfrac{d^2 U}{d\alpha^2} & » & \dfrac{dA_1}{d\alpha}, \\
o = \dfrac{d^2 \Delta U}{d\alpha^2} & » & \dfrac{d\lambda}{d\alpha}, \\
o = \dfrac{d\Delta^2 U}{d\alpha} & » & \dfrac{d\Delta\lambda}{d\alpha}, \\
\ldots\ldots\ldots & » & \ldots, \\
o = \dfrac{d^2 U}{d\alpha\, dx_1} & » & \dfrac{dA_1}{dx_1}, \\
o = \dfrac{d\Delta U}{dx_1} & » & \dfrac{d\lambda}{dx_1}, \\
o = \dfrac{d\Delta^2 U}{dx_1} & » & \dfrac{d\Delta\lambda}{dx_1}, \\
\ldots\ldots\ldots & » & \ldots\ldots
\end{array}
$$

En général, la série d'équations

$$o = \frac{d}{d\alpha} DU = D\Delta U = D\Delta^2 U = \ldots$$

nous donnera

$$DA_1,\ D\lambda,\ D\Delta\lambda,\ D\Delta^2\lambda,\ \ldots.$$

Il est à remarquer que A_1 est un polynôme du premier degré, λ un polynôme du second degré en α.

Quand on aura ainsi trouvé A_0, A_1, λ en fonction de α, x_1, x_2, x_3, on y fera $\alpha = o$, et l'on aura les valeurs cherchées de A_0, A_1, λ en fonction de x_1, x_2, x_3.

QUATRIÈME CAS.

$$\Delta\beta = \Delta\theta = \Delta^2\theta = o, \quad \Delta^3\theta \gtrless o.$$

Dans ce cas, posant encore

$$U = \Delta(\beta + \alpha\gamma)^3 + A_2\Delta(\beta + \alpha\gamma)^2 + A_1\Delta(\beta + \alpha\gamma) - \Delta(\lambda\theta) = o,$$

on calculera les coefficients de A_1, A_2, λ à l'aide des équations $U = 0$ et de celles qu'on en tire par différentiations successives.

L'équation

$$
\begin{array}{lcl}
\dfrac{d}{d\alpha} DU = 0 & \text{donnera} & DA_1, \\
\dfrac{d}{d\alpha} D\Delta U = 0 & \text{»} & DA_2, \\
D\Delta^2 U = 0 & \text{»} & D\lambda, \\
D\Delta^3 U = 0 & \text{»} & D\Delta\lambda, \\
\ldots\ldots\ldots & \text{»} & \ldots,
\end{array}
$$

et, faisant ensuite $\alpha = 0$, on aura les valeurs cherchées de A_0, A_1, A_2, λ.

Équations linéaires à termes constants.

Soit à trouver une intégrale de l'équation

$$X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{dz}{dx_n} = Z,$$

où $X_1, X_2, \ldots, X_n$, Z sont holomorphes en $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Cette intégrale étant assujettie à se réduire à

$$\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

quand

$$\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

cela revient à chercher une intégrale φ de l'équation

$$X_1 \frac{d\varphi}{dx_1} + X_2 \frac{d\varphi}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{d\varphi}{dx_n} + Z \frac{d\varphi}{dz} = 0,$$

qui se réduise à $z - \beta$ quand $\theta = 0$, ce qui se fait comme on vient de le voir.

Si cette intégrale φ s'exprime par une fonction algébroïde de z et des x,

$$\varphi^2 + A_1 \varphi + A_0 = 0,$$

$A_0 = 0$ est l'équation qui nous donne l'expression implicite de z en fonction des x.

La condition pour que le théorème IV soit applicable pour que z, par exemple, soit algébroïde de degré m, c'est que le coefficient de z^m dans A_0, coefficient que l'on calcule comme on vient de le voir, ne soit pas nul.

Équations non linéaires.

Soit à trouver une intégrale de

$$F = 0,$$

qui se réduise à β quand $\theta = 0$, on calculera les fonctions ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_n$, auxquelles $p_1, p_2, \ldots, p_n$ doivent se réduire quand $\theta = 0$; puis on cherchera, par les procédés que je viens d'exposer, $n+1$ intégrales de

$$\sum (X_i + p_i Z) \frac{d\varphi}{dp_i} - \sum \left(\frac{d\varphi}{dx_i} + p_i \frac{d\varphi}{dz}\right) \frac{dF}{dp_i} = 0,$$

qui se réduisent respectivement à

$$z - \beta,\ p_1 - \omega_1,\ p_2 - \omega_2,\ \ldots,\ p_n - \omega_n$$

quand

$$\theta = 0.$$

On obtiendra ainsi m fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}$, qui seront données par des équations de la forme

$$\varphi_i^m + A_{m-1}\varphi_i^{m-1} + \ldots + A_1\varphi_i + A_0 = 0,$$

où les termes A_0 se réduiront respectivement à

$$H_1,\ H_2,\ \ldots,\ H_{n+1},$$

qui seront des fonctions holomorphes par rapport à z, aux x et aux p.

Les équations

$$H_1 = H_2 = \ldots = H_n = H_{n+1} = 0$$

renfermeront l'expression implicite de l'intégrale.

CINQUIÈME CAS.

Les ω ne restent pas finis, mais restent déterminés quand les x s'annulent.

Si l'intégrale est assujettie à se réduire à β quand $\theta = 0$, les ω nous seront donnés par les équations

$$(20)\quad \begin{cases} F_1 = 0, \\ \omega_1 - \dfrac{d\beta}{dx_1} = \lambda \dfrac{d\theta}{dx_1}, \\ \omega_2 - \dfrac{d\beta}{dx_2} = \lambda \dfrac{d\theta}{dx_2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \omega_n - \dfrac{d\beta}{dx_n} = \lambda \dfrac{d\theta}{dx_n}, \end{cases}$$

où $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ sont les inconnues cherchées, λ un paramètre à éliminer et F_1 ce que devient F quand on y remplace z par β et p_1, $p_2, \dots, p_n$ par $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$.

Si, dans les équations (20), on fait

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = z = 0,$$

ces équations deviennent algébriques; elles donnent donc toujours

$$\frac{\omega_1}{A_1} = \frac{\omega_2}{A_2} = \dots = \frac{\omega_n}{A_n} = \frac{1}{A_{n+1}},$$

$A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ étant des fonctions algébriques des coefficients de F_1, de β et de θ, qui restent finies quand ces coefficients restent eux-mêmes finis.

Si

$$A_{n+1} \lessgtr 0,$$

$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, c'est-à-dire les valeurs que prennent $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ pour $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, sont finis et déterminés. C'est ce que nous avons toujours supposé jusqu'ici.

Si, au contraire,

$$A_{n+1} = 0,$$

les γ ne restent pas finis; supposons que l'on n'ait pas à la fois

$$A_1 = A_2 = \dots = A_n = A_{n+1} = 0;$$

soit, par exemple,

$$A_1 \gtrless 0.$$

On changera de variables, et, au lieu de considérer z comme fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on considérera x_1 comme fonction de $z, x_2, \ldots, x_n$.

Soient $q_1, q_2, \ldots, q_n$ les dérivées de x_1 par rapport à $z, x_2, \ldots, x_n$: soient $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_n$ les valeurs que prennent ces dérivées quand on fait $\theta = 0$; soit F_2 ce que devient F_1 quand on y remplace $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ par $\frac{1}{\omega'_1}, -\frac{\omega'_2}{\omega'_1}, -\frac{\omega'_3}{\omega'_1}, \ldots, -\frac{\omega'_n}{\omega'_1}$, puis qu'on rend la fonction ainsi obtenue entière en la multipliant par une puissance convenable de ω'_1.

$\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_n$ seront donnés par les équations

$$
\begin{gathered}
F_2 = 0, \\
1 - \omega'_1 \frac{d\beta}{dx_1} = \lambda \frac{d\theta}{dx_1} \omega'_1, \\
\frac{d\beta}{dx_2} + \frac{d\beta}{dx_1} \omega'_2 + \lambda \frac{d\theta}{dx_1} \omega'_2 = 0, \\
\frac{d\beta}{dx_3} + \frac{d\beta}{dx_1} \omega'_3 + \lambda \frac{d\theta}{dx_1} \omega'_3 = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\frac{d\beta}{dx_n} + \frac{d\beta}{dx_1} \omega'_n + \lambda \frac{d\theta}{dx_1} \omega'_n = 0,
\end{gathered}
$$

ou

$$
\begin{gathered}
F_2 = 0, \\
1 - \omega'_1 \frac{d\beta}{dx_1} = \lambda \omega'_1 \frac{d\theta}{dx_1}, \\
\omega'_2 + \omega'_1 \frac{d\beta}{dx_2} + \lambda \omega'_1 \frac{d\theta}{dx_2} = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\omega'_n + \omega'_1 \frac{d\beta}{dx_n} + \lambda \omega'_1 \frac{d\theta}{dx_n} = 0,
\end{gathered}
$$

d'où

$$
\frac{1}{\Delta_1} = \frac{-\omega'_2}{\Delta_2} = \frac{-\omega'_3}{\Delta_3} = \cdots = \frac{-\omega'_n}{\Delta_n} = \frac{\omega'_1}{\Delta_{n+1}} ;
$$

$\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_n$ restent donc finis et déterminés quand

$$
x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.
$$

Il en résulte que l'on est ramené aux cas déjà étudiés, et que l'on peut obtenir l'expression implicite de l'intégrale en égalant à zéro $n+1$ fonctions holomorphes en $z, x_1, x_2, \ldots, x_n, q_1-\gamma'_1, q_2-\gamma'_2, \ldots, q_n-\gamma'_n$, $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_n$ étant ce que deviennent $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_n$ pour

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = z = 0.$$

C'est une propriété analogue au théorème III.

Exemple. — Soit l'équation

$$p_1^2 - p_2^2 = 1,$$

et supposons qu'on veuille étudier l'intégrale de cette équation, qui est assujettie à se réduire à

$$2x_1 + x_1^2$$

quand on y fait

$$x_2 = x_1 + x_1^2.$$

ω_1 et ω_2 sont donnés par les équations

$$\omega_1^2 - \omega_2^2 = 1, \quad 2 + 2x_1 = \omega_1 + \omega_2(1+2x_1);$$

on en tirerait deux valeurs de ω_1 et deux valeurs de ω_2 en fonctions de x_1, et il est aisé de voir que, quand x_1 s'annule, l'une des valeurs de ω_1 et l'une des valeurs de ω_2 deviennent infinies.

Considérons alors x_2 comme fonction de x_1 et de z.

Soit

$$q_1 = \frac{dx_2}{dx_1}, \quad q_2 = \frac{dx_2}{dz},$$

d'où

$$p_1 = \frac{-q_1}{q_2}, \quad p_2 = +\frac{1}{q_2}.$$

L'équation donnée devient

$$q_1^2 - 1 = q_2^2,$$

et il s'agit d'étudier l'intégrale de cette équation, qui se réduit à $x_1 + x_1^2$ quand on fait $z = x_1 + 2x_1^2$; ω'_1 et ω'_2 sont alors donnés par

$$\omega_1'^2 - \omega_2'^2 = 1, \quad 1 + 2x_1 = \omega'_1 + \omega'_2(2+2x_1),$$

qui, pour $x_1 = 0$, se réduisent à

$$\gamma_1'^2 - \gamma_2'^2 = 1, \quad 1 = \gamma_1' + 2\gamma_2',$$

d'où

$$\gamma_2' = 0, \quad \gamma_1' = 1,$$

$$\frac{dF}{dq_1} = 2q_1 = 1, \quad \frac{dF}{dq_2} = 2q_2, \quad \varphi = -z + 2x_1 + x_1^2,$$

$$\frac{d\varphi}{dx_1} = 2 + 2x_1, \quad \frac{d\varphi}{dz} = -1.$$

Pour $x_1 = 0$, il vient

$$\frac{dF}{dq_1} = 2, \quad \frac{dF}{dq_2} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dx_1} = 2, \quad \frac{d\varphi}{dz} = -1,$$

et enfin

$$\frac{dF}{dq_1}\frac{d\varphi}{dx_1} + \frac{dF}{dq_2}\frac{d\varphi}{dz} = 4.$$

Donc la condition (9), qui se réduit ici à

$$\frac{dF}{dq_1}\frac{d\varphi}{dx_1} + \frac{dF}{dq_2}\frac{d\varphi}{dz} \gtrless 0,$$

est remplie.

Donc x_2 est fonction holomorphe de x_1 et de z.

Soient

(21) $$x_2 = q_1 x_1 + q_2 z + \frac{r_1}{1.2} x_1^2 + s_1 x_1 z + \frac{t_1}{1.2} z^2 + \ldots$$

les premiers termes de la série qui représente cette fonction. q_2 est nul; q_1 est égal à 1, comme on l'a déjà vu; quant à r_1, s_1, t_1, nous les obtiendrons de la manière suivante. Différentions

$$q_1^2 - q_2^2 = 1$$

par rapport à x et à z, puis faisons $x = z = 0$; il viendra

(22) $$q_1 r_1 - q_2 s_1 = 0, \quad q_1 s_1 - q_2 t_1 = 0.$$

Faisons maintenant dans (21)

$$x_2 = x_1 + x_1^2, \quad z = 2x_1 + x_1^2.$$

et égalons les coefficients de x_1^2; nous aurons

(23) $$1 = \frac{r_1}{2} + 2s_1 + 2t_1 + q_2,$$

mais, si nous remarquons que, pour $x_1 = 0$, $q_1 = 1$, $q_2 = 0$, nous verrons que les équations (22) et (23) se réduisent à

$$r_1 = s_1 = 0, \quad t_1 = \frac{1}{2}.$$

Donc t_1 n'est pas nul; donc, en vertu du lemme III, z est algébroïde de degré 2 en x_1 et en x_2.

Interprétation géométrique. — A quoi correspond géométriquement le cas que nous venons d'examiner quand on n'a que trois variables x_1, x_2 et z et que, par conséquent, toute expression de z est fonction de x_1 et de x_2?

Il est aisé de voir, en se reportant à ce qui a été dit à ce sujet à propos des cas précédents et reprenant les mêmes notations, que le plan tangent P, mené par la droite T au cône C, est alors parallèle à l'axe des z; mais, comme il ne peut être en même temps parallèle aux trois axes de coordonnées, on peut toujours employer un artifice, qui consiste à étudier la surface S, non plus comme définie par une équation où z est égalé à une fonction de x_1 et de x_2, mais comme définie par une équation où x_2, par exemple, est égalé à une fonction de x_1 et de z. Comme le plan P n'est plus alors parallèle à l'axe des x_2, la difficulté a disparu. Tel est le sens géométrique de l'artifice analytique qui vient de nous permettre de tourner la difficulté.

SIXIÈME CAS.

$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ ne restent pas déterminés quand

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

C'est ce qui arrive quand

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A_{n+1} = 0$$

et que, par conséquent, les équations

$$
(24)\quad \begin{cases} F_1 = 0, \\ \omega_1 - \dfrac{d\beta}{dx_1} = \lambda \dfrac{d\theta}{dx_1}, \\ \omega_2 - \dfrac{d\beta}{dx_2} = \lambda \dfrac{d\theta}{dx_2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \omega_n - \dfrac{d\beta}{dx_n} = \lambda \dfrac{d\theta}{dx_n} \end{cases}
$$

ne restent pas distinctes quand on y annule les x.

Soit $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ un système quelconque de valeurs qui, substitué à la place de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ dans les équations (24), y satisfont quand les x s'annulent.

Supposons qu'on veuille étudier un élément de la fonction z tel que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soient suffisamment voisins de zéro et que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ soient suffisamment voisins de $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$; par exemple, supposons que l'on se trouve dans le cas de deux variables et que

$$z = f(x_1, x_2)$$

soit considéré comme représentant une surface. Puisque p_1 et p_2 ne sont pas déterminés quand

$$z = x_1 = x_2 = 0,$$

la surface présente un point conique à l'origine, et l'on se propose d'étudier, non pas toute la partie de la surface qui est suffisamment voisine du point conique, mais la partie de cette surface qui est limitée par deux courbes se croisant à l'origine.

Il est clair que l'on obtiendra l'intégrale cherchée en égalant à zéro n intégrales de l'équation

$$
(25)\quad \sum \left(\frac{dF}{dx_i} + p_i \frac{dF}{dz}\right) \frac{d\varphi}{dp_i} - \sum \frac{dF}{dp_i} \left(\frac{d\varphi}{dx_i} + p_i \frac{d\varphi}{dz}\right) = 0,
$$

qui se réduisent respectivement à

$$(26)\quad \left\{\begin{array}{l} z-\beta, \\ \left(p_1-\dfrac{d\beta}{dx_1}\right)\dfrac{d\theta}{dx_2}-\dfrac{d\theta}{dx_1}\left(p_2-\dfrac{d\beta}{dx_2}\right), \\ \left(p_1-\dfrac{d\beta}{dx_1}\right)\dfrac{d\theta}{dx_3}-\dfrac{d\theta}{dx_1}\left(p_3-\dfrac{d\beta}{dx_3}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \left(p_1-\dfrac{d\beta}{dx_1}\right)\dfrac{d\theta}{dx_n}-\dfrac{d\theta}{dx_1}\left(p_n-\dfrac{d\beta}{dx_n}\right) \end{array}\right.$$

quand on a

$$\theta=0.$$

Les expressions (26) sont holomorphes en $x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1-\gamma_1, p_2-\gamma_2, \ldots, p_n-\gamma_n$.

Donc les n intégrales de l'équation (25) sont algébroïdes par rapport aux mêmes variables. Si ces intégrales sont $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, les équations

$$\varphi_1=\varphi_2=\ldots=\varphi_n=0$$

sont équivalentes à n équations

$$(27)\qquad \mathrm{H}_1=\mathrm{H}_2=\ldots=\mathrm{H}_n=0,$$

où les H sont holomorphes en $x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1-\gamma_1, p_2-\gamma_2, \ldots, p_n-\gamma_n$.

Les équations (27), jointes à l'équation proposée

$$\mathrm{F}=0,$$

fournissent l'expression implicite de l'intégrale cherchée z et de ses dérivées du premier ordre $p_1, p_2, \ldots, p_n$ en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, c'est-à-dire que le théorème III est toujours applicable.

DEUXIÈME PARTIE.

ÉTUDE DES CAS OÙ L'ON A A LA FOIS

$$P_1 = P_2 = \ldots = P_n = 0,$$
$$X_1 + p_1 Z = X_2 + p_2 Z = \ldots = X_n + p_n Z = 0.$$

PREMIÈRE SECTION.

L'équation proposée est de la forme

$$X_1 p_1 + X_2 p_2 + \ldots + X_n p_n = \lambda_1 z, \tag{1}$$

où $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des fonctions holomorphes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, exprimables par des séries dont les termes de degré zéro sont nuls et dont les termes du premier degré se réduisent respectivement à

$$\lambda_1 x_1, \ \lambda_2 x_2, \ \ldots, \ \lambda_n x_n.$$

Hypothèse I. — Si l'on représente les parties réelles et imaginaires de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ par les coordonnées de n points dans un plan, ces n points sont tous d'un même côté d'une certaine droite passant par l'origine, ou, ce qui revient au même, le polygone convexe à l'intérieur duquel se trouvent les points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ne contient pas l'origine.

Hypothèse II. — Les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ne satisfont à aucune relation de la forme

$$m_2\lambda_2 + m_3\lambda_3 + \ldots + m_n\lambda_n = \lambda_1$$

où $m_2, m_3, \ldots, m_n$ sont des nombres entiers positifs.

THÉORÈME I. — *Si ces hypothèses sont satisfaites, le module de l'expression*

$$\frac{\sum m_i\lambda_i - \lambda_1}{\sum m_i - 1}$$

est toujours plus grand qu'un certain nombre positif K, *quand on donne aux* m_i *des valeurs entières et positives, mais d'ailleurs quelconques.*

En effet :

1° Cette expression n'est jamais nulle, car, pour qu'elle le fût, il faudrait que l'on eût

$$\Sigma\, m_i\lambda_i - \lambda_1 = 0.$$

Or, toutes les fois que $m_1 > 0$, le point dont les coordonnées sont les parties réelles et imaginaires de

$$\frac{\Sigma\, m_i\lambda_i - \lambda_1}{\Sigma\, m_i - 1}$$

est à l'intérieur du polygone convexe qui enveloppe tous les points λ_i; or ce polygone n'enveloppe pas l'origine.

Si au contraire $m_1 = 0$, on n'aura pas non plus

$$m_2\lambda_2 + m_3\lambda_3 + \ldots + m_n\lambda_n - \lambda_1 = 0,$$

en vertu de l'hypothèse II.

Donc

$$\frac{\Sigma\, m_i\lambda_i - \lambda_1}{\Sigma\, m_i - 1} \gtrless 0.$$

2° Cette expression ne tend pas vers zéro quand les m tendent vers l'infini d'une manière quelconque, mais en restant entiers positifs.

En effet, supposons que $m_1, m_2, \ldots, m_n$ tendent vers l'infini, de manière que

$$\lim \frac{m_i}{m_1} = \frac{\alpha_i}{\alpha_1},$$

où les α_i et α_1 sont des quantités finies, déterminées, positives et d'ailleurs quelconques.

On aura

$$\lim \frac{\Sigma\, m_i\lambda_i - 1}{\Sigma\, m_i - 1} = \frac{\Sigma\, \alpha_i\lambda_i}{\Sigma\, \alpha_i}.$$

Or $\dfrac{\Sigma\, \alpha_i\lambda_i}{\Sigma\, \alpha_i}$ est représenté par le centre de gravité de n masses égales respectivement à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et placées aux points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Ce centre de gravité est à l'intérieur du polygone circonscrit aux points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Donc

$$\frac{\sum \alpha_i \lambda_i}{\sum \alpha_i} \gtrless 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Donc on peut choisir un nombre positif K tel que

$$\operatorname{mod} \frac{\sum m_i \lambda_i - \lambda_i}{\sum m_i - 1} > \mathrm{K}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème II. — *Il existe une infinité de fonctions holomorphes qui satisfont à l'équation*

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} p_i \left(x_i - \frac{\mathrm{M}'\mathrm{S}^2}{1 - \alpha \mathrm{S}} \right) = z,$$

où $\mathrm{S} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

En effet, faisons dans l'équation (2)

$$z = x_i - x_k;$$

il vient

$$p_i = 1, \quad p_k = -1,$$

et l'on voit aisément que l'équation est satisfaite.

Soit maintenant

$$z = f(\mathrm{S}) = \mathrm{S} \left(\frac{1}{1 - \mathrm{HS}} \right) \frac{\mathrm{H} - \alpha}{\mathrm{H}},$$

où $\mathrm{H} = n\mathrm{M} + \alpha$, d'où

$$f'(\mathrm{S}) = \left[\frac{1 - \alpha \mathrm{S}}{\mathrm{S} - (n\mathrm{M} + \alpha)\mathrm{S}^2} \right] z;$$

il viendra

$$p_i = f'(\mathrm{S}),$$

et, par conséquent, le premier membre de l'équation (2) s'écrira

$$f'(\mathrm{S}) \left(\sum x_i - \frac{n\mathrm{M}\mathrm{S}^2}{1 - \alpha \mathrm{S}} \right) = f'(\mathrm{S}) \frac{\mathrm{S} - (n\mathrm{M} + \alpha)\mathrm{S}^2}{1 - \alpha \mathrm{S}} = z.$$

Donc la fonction $f(\mathrm{S})$, qui est une fonction holomorphe, satisfait également à l'équation donnée.

Il en sera de même des fonctions

$$(3) \qquad K_1 f(S) + K_2(x_2 - x_1) + K_3(x_3 - x_1) + \ldots + K_n(x_n - x_1),$$

où K_1, K_2, ..., K_n sont des constantes quelconques.

Corollaire I. — *Parmi ces fonctions, il y en a une qui est représentée par une série dont les termes du premier degré se réduisent à x_1.*

En effet, $f(S)$ est représenté par une série dont le premier terme est S.

Si donc on fait dans l'expression (3)

$$K_1 = \frac{1}{n}, \quad K_2 = K_3 = \ldots = K_n = -\frac{1}{n},$$

cette expression devient une série que nous appellerons $\varphi(x)$, et dont les termes du premier degré se réduisent à x_1.

Corollaire II. — *Si* M *et* α *sont réels positifs,* H *et* $\frac{H-\alpha}{H}$ *seront réels positifs, et tous les coefficients de la série* $\varphi(x)$ *sont réels et positifs.*

Théorème III. — *Si les hypothèses I et II sont satisfaites, l'équation* (1) *admet une intégrale holomorphe, et une seule, dont les termes du premier degré se réduisent à* x_1.

1° Il existe une série, et une seule, qui satisfait formellement à l'équation (1) et dont les termes du premier degré se réduisent à x_1.

En effet, si une pareille série existe, on obtiendra le coefficient du terme en

$$x_1^{m_1}, \; x_2^{m_2}, \; \ldots, \; x_n^{m_n},$$

en différentiant l'équation (1) m_1 fois par rapport à x_1, ..., m_n fois par rapport à x_n, et en égalant les x à zéro.

Posons, pour abréger,

$$DU = \frac{d^{m_1+m_2+\ldots+m_n} U}{dx_1^{m_1} dx_2^{m_2} \ldots dx_n^{m_n}};$$

on aura

$$DX_r p_r = [(X_r)_1 + (p_r)_1]^{m_1} [(X_r)_2 + (p_r)_2]^{m_2} \ldots [(X_r)_n + (p_r)_n]^{m_n},$$

équation dont le second membre est une expression symbolique où l'on convient d'effectuer la multiplication d'après les règles ordinaires du calcul et de remplacer après l'opération

$$(X_r)_1^{\lambda_1}(X_r)_2^{\lambda_2}\ldots(X_r)_n^{\lambda_n} \quad \text{par} \quad \frac{d^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}X_r}{dx_1^{\lambda_1}dx_2^{\lambda_2}\ldots dx_n^{\lambda_n}},$$

et de même pour p_r.

Donc on a

$$D(X_r p_r) = X_r\frac{dDz}{dx_r} + m_1\frac{dX_r}{dx_1}D_1 z + m_2\frac{dX_r}{dx_2}D_2 z + \ldots + m_n\frac{dX_r}{dx_n}D_n z + \Sigma B.$$

Dans cette expression, $D_i U$ représente une dérivée partielle de U qui ne diffère de DU que parce qu'une différentiation par rapport à x_i a été remplacée par une différentiation par rapport à x_r, de telle façon que

$$D_1 U = \frac{d}{dx_r}\frac{d^{m_1+m_2+\ldots+m_n-1}U}{dx_1^{m_1-1}dx_2^{m_2}dx_3^{m_3}\ldots dx_n^{m_n}}.$$

Les B sont des termes formés d'un coefficient positif d'une dérivée de X_r d'ordre supérieur au premier et d'une dérivée de z d'ordre inférieur à $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$.

Si l'on annule les x, X_r s'annule ainsi que ses dérivées du premier ordre, excepté $\frac{dX_r}{dx_r}$, qui se réduit à λ_r. On a donc

$$D(X_r p_r) = m_r\lambda_r Dz + \Sigma B,$$

et Dz est donné par l'équation

$$\Sigma D(X_r p_r) = \lambda_1 Dz$$

ou

(4) $$(m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_n\lambda_n - \lambda_1)Dz + \Sigma B = 0.$$

Si l'on connaît les dérivées d'ordre inférieur à celui de Dz, cette équation permettra de calculer Dz, puisque

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_n\lambda_n - \lambda_1 \gtrless 0.$$

Donc, si l'on connaissait les dérivées du premier ordre, on pourrait calculer toutes les autres et l'on ne trouverait pour elles qu'une seule valeur.

Or les dérivées du premier ordre sont données par l'équation

$$(\lambda_i - \lambda_1)p_i = 0.$$

Si $i \gtrless 1$,

$$p_i = 0;$$

si $i = 1$, l'équation est indéterminée. On peut choisir pour p_1 telle valeur que l'on veut, et, en particulier, on peut faire

$$p_1 = 1.$$

Donc il existe une série satisfaisant formellement à l'équation (1), dont les termes du premier degré se réduisent à x_1, et il n'y en a qu'une.

2° L'équation (2) admet également une série qui lui satisfait formellement et dont les termes du premier degré se réduisent à x_1, et elle n'en admet qu'une, car elle est de la forme (1).

Les coefficients de cette série sont donnés par les équations

(5) $$(m_1 + m_2 + \ldots + m_n - 1)\mathrm{D}z + \Sigma \mathrm{B}_1 = 0,$$

où les B_1 sont formés avec les dérivées partielles des coefficients des p dans l'équation (2) comme les B avec les dérivées partielles des X.

Cette série ne peut être autre que $\varphi(x)$; elle est donc convergente.

3° On peut former une équation auxiliaire qui soit de la forme (2) et qui nous aidera à démontrer la convergence de la série définie pa les équations (4).

Soit, en effet,

$$\mathrm{S} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n;$$

supposons que l'on ait toujours

$$\text{mod.}\,\frac{\Sigma m_i\lambda_i - \lambda_1}{\Sigma m_i - 1} > \mathrm{K} \quad (\mathrm{K} \text{ étant positif}),$$

ce qui est toujours possible, d'après le théorème I.

Supposons que les fonctions $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$ restent holomorphes quand les modules de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ restent plus petits que $\frac{1}{\alpha}$ (α étant réel positif) et qu'en même temps les modules de ces fonctions X_1, $X_2, \ldots, X_n$ restent plus petits que $\frac{M}{\alpha^2 K}$ (M étant réel positif).

Soit

$$X'_r = x_r - \frac{MS^2}{1 - \alpha S}.$$

L'équation

$$\Sigma X'_r p'_r = z'$$

est de la forme (2); elle admet donc une intégrale holomorphe

$$z' = \varphi(x),$$

dont les termes du premier degré se réduisent à x_1 et dont on peut calculer les coefficients à l'aide des équations (5) ou des équations

$$(5\ bis) \qquad K(m_1 + m_2 + \ldots + m_n - 1) Dz' + \Sigma K B_1 = 0.$$

4° Toutes les dérivées partielles de KX'_r d'ordre supérieur au premier sont réelles, négatives et de module supérieur à la dérivée correspondante de X_r.

5° Les Dz' sont positifs et leurs modules sont plus grands que ceux des Dz correspondants.

En effet, supposons que cela soit vrai pour les dérivées d'ordre inférieur à celui de Dz : je dis que cela sera vrai également pour Dz.

En effet, soient B_i l'un des termes B, B_{1i} le terme B_1 correspondant :

$$B_i = h \Delta(X_r) \Delta_1(z),$$

où Δ représente une dérivée d'ordre supérieur à 1 et Δ_1 une dérivée d'ordre inférieur à celui de Dz ; de même,

$$KB_{1i} = h \Delta(KX'_r) \Delta_1(z').$$

$\Delta_1(z')$ est positif et de module plus grand que celui de $\Delta_1(z)$; $\Delta(KX'_r)$ est négatif et de module plus grand que celui de $\Delta(X_r)$. Donc KB_{1i} est négatif et de module plus grand que celui de B_i.

Donc $\Sigma K B_1$ est négatif et de module plus grand que celui de ΣB.

De plus,

$$K(m_1 + m_2 + \ldots + m_n - 1)$$

est positif et de module plus petit que celui de

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_n\lambda_n - \lambda_1.$$

Donc

$$-\frac{K\Sigma B_1}{K(m_1 + m_2 + \ldots + m_n - 1)},$$

c'est-à-dire Dz' est positif et de module plus grand que celui de

$$-\frac{\Sigma B}{\Sigma m_i\lambda_i - \lambda_1},$$

c'est-à-dire de Dz.

Or la série

$$\sum \frac{Dz' x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}}{1.2\ldots m_1 . 1.2 \ldots m_2 \ldots 1.2\ldots m_n}$$

est convergente.

Donc la série

$$\sum \frac{Dz\, x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}}{1.2\ldots m_1 . 1.2 \ldots m_2 \ldots 1.2\ldots m_n}$$

l'est également. C. Q. F. D.

DEUXIÈME SECTION.

Des cas où l'équation proposée est de la forme

$$X_1 p_1 + X_2 p_2 + \ldots + X_n p_n = Z.$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$, Z sont des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$, s'annulant avec ces variables et contenant des termes du premier degré par rapport aux x et à z.

PREMIER CAS.

Soit à intégrer les équations différentielles

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n},$$

où l'on suppose les X indépendants de z et où les termes du premier degré de X_i s'écrivent

$$\Sigma \alpha_{ik} x_k.$$

Pour cela, nous envisagerons l'équation

$$(15) \qquad X_1 p_1 + X_2 p_2 + \ldots + X_n p_n = S z,$$

où S est égalé à l'une des racines de l'équation

$$(16) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} - S & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - S & \alpha_{23} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \ldots & \alpha_{nn} - S \end{vmatrix} = 0.$$

Nous appellerons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les n racines de cette équation (16).

Hypothèse I. — L'équation (16) n'a pas de racines multiples.

Hypothèse II. — Si l'on représente les parties réelles et imaginaires des λ par les coordonnées de n points dans un plan, ces n points sont d'un même côté d'une certaine droite passant par l'origine.

Hypothèse III. — L'un des λ n'est pas égal à une fonction linéaire à coefficients positifs des autres λ.

Lemme I. — *Si l'hypothèse I est satisfaite, on peut ramener par un changement de variables l'étude de l'équation* (15) *à celle d'une équation de même forme, mais où les termes du premier degré de* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *se réduisent respectivement à*

$$\lambda_1 x_1, \quad \lambda_2 x_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n x_n,$$

c'est-à-dire à une équation de la forme (1).

Soit, en effet, un changement linéaire de variables

$$(17) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \beta_{11} y_1 + \beta_{12} y_2 + \ldots + \beta_{1n} y_n, \\ x_2 = \beta_{21} y_1 + \beta_{22} y_2 + \ldots + \beta_{2n} y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \beta_{n1} y_1 + \beta_{n2} y_2 + \ldots + \beta_{nn} y_n. \end{array} \right.$$

Si le déterminant des β n'est pas nul, on pourra écrire les équations (17) sous la forme

$$(18) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = \gamma_{11} x_1 + \gamma_{12} x_2 + \ldots + \gamma_{1n} x_n, \\ y_2 = \gamma_{21} x_1 + \gamma_{22} x_2 + \ldots + \gamma_{2n} x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n = \gamma_{n1} x_1 + \gamma_{n2} x_2 + \ldots + \gamma_{nn} x_n. \end{array} \right.$$

Les équations

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{Sz}$$

deviennent, après la transformation,

$$(19) \qquad \frac{dy_1}{\Sigma\gamma_{1i}X_i} = \frac{dy_2}{\Sigma\gamma_{2i}X_i} = \ldots = \frac{dy_n}{\Sigma\gamma_{ni}X_i} = \frac{dz}{Sz}.$$

Les conditions pour que les termes du premier degré de $\Sigma\gamma_{1i}X_i$ se réduisent à $\lambda_1 y_1$ s'écrivent

$$\frac{\gamma_{11}\alpha_{11} + \gamma_{12}\alpha_{12} + \ldots + \gamma_{1n}\alpha_{1n}}{\gamma_{11}} = \frac{\gamma_{11}\alpha_{21} + \gamma_{12}\alpha_{22} + \ldots + \gamma_{1n}\alpha_{nn}}{\gamma_{12}} = \ldots$$
$$= \frac{\gamma_{11}\alpha_{n1} + \gamma_{12}\alpha_{n2} + \ldots + \gamma_{1n}\alpha_{nn}}{\gamma_{1n}} = \lambda_1,$$

d'où

$$\begin{gathered}(\alpha_{11} - \lambda_1)\gamma_{11} + \alpha_{12}\gamma_{12} + \ldots + \alpha_{1n}\gamma_{1n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_{n1}\gamma_{11} + \alpha_{n2}\gamma_{12} + \ldots + (\alpha_{nn} - \lambda_1)\gamma_{1n} = 0.\end{gathered}$$

Ces équations, qui sont linéaires par rapport aux γ_{1i}, conduisent pour ces variables à des valeurs différentes de zéro, car le déterminant auquel elles conduisent est nul, puisque λ_1 est l'une des racines de l'équation (16).

La condition que les termes du premier degré de $\Sigma\gamma_{ki}X_i$ se réduisent à $\lambda_k y_k$ permettrait de même de calculer les γ_{ki}.

D'après un théorème connu, l'équation (16) n'ayant pas de racines multiples, le déterminant des γ n'est pas nul. Donc des valeurs des γ on pourra déduire celles des β.

Donc on aura pu choisir les coefficients du changement de variables (17) de telle façon que les conditions posées à l'énoncé du lemme soient satisfaites, c'est-à-dire qu'après la transformation l'équation (15) devienne

$$\Sigma\gamma_{1i}X_i q_1 + \Sigma\gamma_{2i}X_i q_2 + \ldots + \Sigma\gamma_{ni}X_i q_n = Sz$$

ou

$$(20) \qquad Y_1 q_1 + Y_2 q_2 + \ldots + Y_n q_n = Sz,$$

où

$$q_1 = \frac{dz}{dy_1}, \quad q_2 = \frac{dz}{dy_2}, \quad \ldots, \quad q_n = \frac{dz}{dy_n},$$

et où les termes du premier degré des Y se réduisent respectivement à

$$\lambda_1 y_1, \; \lambda_2 y_2, \; \ldots, \; \lambda_n y_n. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Lemme II. — *Si l'hypothèse II est satisfaite pour l'équation* (15), *elle l'est également pour l'équation* (20), *et réciproquement.*

Car l'équation (16), tirée de l'équation (15), a les mêmes racines que l'équation analogue tirée de l'équation (20).

Lemme III. — *S'il existe une série, ordonnée suivant les puissances des x, qui satisfait formellement à l'équation* (15), *cette série satisfera formellement à l'équation* (20) *après qu'on y aura remplacé les x par leurs valeurs en fonction des y, et réciproquement.*

Lemme IV. — *Pour que l'équation* (15) *admette une intégrale holomorphe, il faut et il suffit que l'équation* (20) *en admette une.*

Car toute fonction holomorphe par rapport à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est également une fonction holomorphe de n combinaisons linéaires de ces variables,

$$\gamma_{i1} x_1 + \gamma_{i2} x_2 + \ldots + \gamma_{in} x_n,$$

pourvu que le déterminant des γ ne soit pas nul.

Théorème V. — *Si les hypothèses I, II et III sont satisfaites pour l'équation* (15), *cette équation admet une intégrale holomorphe différente de zéro.*

En effet, dans ce cas, l'équation (20), qui est de la forme (1), satisfait aussi aux hypothèses I et II, c'est-à-dire aux hypothèses I et II de la Première Section. Elle a donc une intégrale holomorphe différente de zéro, d'après le théorème III. Donc, d'après le lemme IV, l'équation (15) admet aussi une intégrale holomorphe.

PROBLÈME II.

Pour résoudre ce problème, nous allons nous servir d'un théorème dont l'énoncé nous a été communiqué par M. Darboux.

Théorème VI. — *Si les conditions posées à l'énoncé du théorème V sont satisfaites, les équations*

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}$$

ont des intégrales de la forme

$$\frac{T_1^{\frac{1}{\lambda_1}}}{K_1} = \frac{T_2^{\frac{1}{\lambda_2}}}{K_2} = \ldots = \frac{T_n^{\frac{1}{\lambda_n}}}{K_n},$$

où les T *sont des fonctions holomorphes des* x *et les* K *des constantes arbitraires.*

En effet, considérons les deux équations

$$X_1 p_1 + X_2 p_2 + \ldots + X_n p_n = \lambda_1 z,$$
$$X_1 p'_1 + X_2 p'_2 + \ldots + X_n p'_n = \lambda_2 z'.$$

Soient

$$z = T_1, \quad z' = T_2$$

deux intégrales holomorphes de ces deux équations; la fonction

$$\varphi = \frac{T_1^{\frac{1}{\lambda_1}}}{T_2^{\frac{1}{\lambda_2}}},$$

satisfera à l'équation

$$X_1 \frac{d\varphi}{dx_1} + X_2 \frac{d\varphi}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{d\varphi}{dx_n} = 0,$$

c'est-à-dire que

$$\frac{T_1^{\frac{1}{\lambda_1}}}{K_1} = \frac{T_2^{\frac{1}{\lambda_2}}}{K_2},$$

où K_1 et K_2 sont des constantes arbitraires, sera une intégrale des équations

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème VII. — *Si les conditions posées à l'énoncé du théorème V sont satisfaites, les intégrales des équations*

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dt}{t} \tag{27}$$

peuvent s'exprimer en égalant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *à n fonctions holomorphes en* $K_1 t^{\lambda_1}, K_2 t^{\lambda_2}, \ldots, K_n t^{\lambda_n}, K_1, K_2, \ldots, K_n$ *étant des constantes arbitraires.*

En effet, les intégrales des équations (27) s'écrivent

$$\frac{T_1^{\frac{1}{\lambda_1}}}{K_1} = \frac{T_2^{\frac{1}{\lambda_2}}}{K_2} = \ldots = \frac{T_n^{\frac{1}{\lambda_n}}}{K_n} = t,$$

d'où

$$(28) \qquad T_1 = K_1^{\lambda_1} t^{\lambda_1}, \quad T_2 = K_2^{\lambda_2} t^{\lambda_2}, \quad \ldots, \quad T_n = K_n^{\lambda_n} t^{\lambda_n}.$$

Remplaçons dans $T_1, T_2, \ldots, T_n$ les x par leurs valeurs (17), puis résolvons les équations (28) par rapport aux y; $T_1, T_2, \ldots, T_n$ ne contiennent respectivement, en fait de termes du premier degré, que des termes en $y_1, y_2, \ldots, y_n$, et aucun de ces termes n'est nul.

Donc les équations (28) donneront les y en fonction holomorphes de $K_1^{\lambda_1} t^{\lambda_1}, K_2^{\lambda_2} t^{\lambda_2}, \ldots, K_n^{\lambda_n} t^{\lambda_n}$.

Donc les x sont aussi des fonctions holomorphes de ces mêmes quantités. C. Q. F. D.

PROBLÈME I.

DEUXIÈME CAS.

L'équation est de la forme générale

$$(29) \qquad X_1 p_1 + X_2 p_2 + \ldots + X_n p_n = Z,$$

mais les conditions posées à l'énoncé du théorème V sont remplies pour l'équation

$$X_1 \frac{d\varphi}{dx_1} + X_2 \frac{d\varphi}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{d\varphi}{dx_n} + Z \frac{d\varphi}{dz} = S\varphi.$$

Théorème VIII. — *L'équation* (29) *admet* en général $n+1$ *intégrales holomorphes.*

En effet, les équations

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{Z}$$

admettent, en vertu du théorème VI, des intégrales de la forme

$$\frac{T_1^{\frac{1}{\lambda_1}}}{K_1} = \frac{T_2^{\frac{1}{\lambda_2}}}{K_2} = \ldots = \frac{T_n^{\frac{1}{\lambda_n}}}{K_n} = \frac{T_{n+1}^{\frac{1}{\lambda_{n+1}}}}{K_{n+1}}.$$

Donc les valeurs de z, tirées des équations

$$(30) \qquad T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad \ldots, \quad T_n = 0, \quad T_{n+1} = 0$$

seront des intégrales de l'équation (29).

Or, *en général*, les quantités $\frac{dT_1}{dz}$, $\frac{dT_2}{dz}$, $\ldots$, $\frac{dT_n}{dz}$, $\frac{dT_{n+1}}{dz}$ ne seront pas nulles quand z et les x s'annuleront.

On pourra donc tirer des équations (30), de $n+1$ manières, z en fonction holomorphe des x. C. Q. F. D.

PROBLÈME III.

Soit à trouver une intégrale z de l'équation (29) *qui se réduise à une fonction donnée* $\psi(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1})$ *quand on y remplace respectivement* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *par des fonctions données* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ *de* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$.

On suppose, comme dans la première Partie, que les fonctions ψ, θ_1, θ_2, $\ldots$, θ_n sont algébroïdes et s'annulent avec les μ.

Reprenons les équations

$$(30) \qquad T_1 = K_1 t^{\lambda_1}, \quad T_2 = K_2 t^{\lambda_2}, \quad \ldots, \quad T_{n+1} = K_{n+1} t^{\lambda_{n+1}},$$

$$(31) \qquad \begin{cases} z = f(K_1 t^{\lambda_1}, K_2 t^{\lambda_2}, \ldots, K_{n+1} t^{\lambda_{n+1}}), \\ x_1 = f_1(K_1 t^{\lambda_1}, K_2 t^{\lambda_2}, \ldots, K_{n+1} t^{\lambda_{n+1}}), \\ x_2 = f_2(K_1 t^{\lambda_1}, K_2 t^{\lambda_2}, \ldots, K_{n+1} t^{\lambda_{n+1}}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = f_n(K_1 t^{\lambda_1}, \ldots, K_{n+1} t^{\lambda_{n+1}}). \end{cases}$$

Il faut, pour trouver l'intégrale, remplacer dans les équations (30) z par ψ, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$; et enfin t par une nouvelle variable auxiliaire ν analogue aux μ.

$T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}$ deviennent alors algébroïdes par rapport aux μ;

de plus

$$(32)\quad \begin{cases} K_1 = y^{-\lambda_1} T_1(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \\ K_2 = y^{-\lambda_2} T_2(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ K_{n+1} = y^{-\lambda_{n+1}} T_{n+1}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}). \end{cases}$$

Il faut ensuite remplacer dans les équations (31) les K par leurs valeurs (32); on y posera ensuite

$$\frac{t}{y} = \mu_n.$$

z, x_1, x_2, ..., x_n s'expriment alors en fonctions algébroïdes de μ_1, μ_2, ..., μ_{n-1}, $\mu_n^{\lambda_1}$, $\mu_n^{\lambda_2}$, ..., $\mu_n^{\lambda_{n+1}}$ et s'annulent avec ces variables.

TROISIÈME SECTION.

L'équation n'est pas linéaire.

Nous supposerons que, si l'équation proposée s'écrit

$$F = 0,$$

si X_1, X_2, ..., X_n, Z, P_1, P_2, ..., P_n sont les dérivées du premier ordre de F par rapport à x_1, x_2, ..., x_n, z, p_1, p_2, ..., p_n, l'équation

$$(33)\quad \begin{cases} (X_1 + p_1 Z)\dfrac{d\varphi}{dp_1} + (X_2 + p_2 Z)\dfrac{d\varphi}{dp_2} + \ldots + (X_n + p_n Z)\dfrac{d\varphi}{dp_n} \\ \quad - P_1 \dfrac{d\varphi}{dx_1} - P_2 \dfrac{d\varphi}{dx_2} - \ldots - P_n \dfrac{d\varphi}{dx_n} - (\Sigma p P + F)\dfrac{d\varphi}{dz} = S\varphi \end{cases}$$

satisfait aux conditions posées à l'énoncé du théorème V.

Nous supposerons que l'intégrale que l'on cherche se réduise à $\psi(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1})$ quand on y remplace x_1, x_2, ..., x_n par θ_1, θ_2, ..., θ_n, et que, dans le même cas, p_1, p_2, ..., p_n se réduisent aussi à des fonctions connues ω_1, ω_2, ..., ω_n de μ_1, μ_2, ..., μ_{n-1}.

On peut toujours supposer que, quand μ_1, μ_2, ..., μ_{n-1} s'annulent, ω_1, ω_2, ..., ω_n s'annulent aussi, car, s'ils se réduisaient à γ_1, γ_2, ..., γ_n, on poserait

$$z = z' + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \ldots + \gamma_n x_n,$$

et l'on serait ramené au cas où les ω s'annulent.

Quand on fait

$$z = x_1 = x_2 = \ldots = x_n = p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 0,$$

on a

$$X_1 + p_1 Z = X_2 + p_2 Z = \ldots = X_n + p_n Z = P_1 = P_2 = \ldots = P_n = 0.$$

Mais quand l'équation (33) satisfait aux conditions posées à l'énoncé du théorème V, toutes ces quantités ne peuvent être nulles à la fois quand on donne à z, aux x et aux p des valeurs suffisamment voisines de zéro et annulant F, c'est-à-dire que les équations

$$\begin{gathered} F = 0, \\ X_1 + p_1 Z = X_2 + p_2 Z = \ldots = X_n + p_n Z = 0, \\ P_1 = P_2 = \ldots = P_n = 0 \end{gathered}$$

sont distinctes, car, si elles ne l'étaient pas, le déterminant fonctionnel des premiers membres de ces équations par rapport à z, x_1, x_2, ..., x_n, p_1, p_2, ..., p_n serait nul.

Or l'équation qui correspond à l'équation (16) est formée en égalant à zéro un déterminant qui ne diffère de ce que deviendrait ce déterminant fonctionnel quand on y annulerait z, les x et les p, que parce que certains termes seraient diminués de l'inconnue S.

Donc, si le déterminant fonctionnel était nul, cette équation admettrait une racine nulle. Donc elle ne satisferait pas aux conditions posées à l'énoncé du théorème V.

PROBLÈME II.

Les équations

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{\Sigma p P + F} = \frac{-dp_1}{X_1 + p_1 Z} = \ldots = \frac{-dp_n}{X_n + p_n Z}$$

admettent, d'après ce qu'on a vu dans la deuxième section des intégrales de la forme

(34) $$T_1 = K_1 t^{\lambda_1}, \quad T_2 = K_2 t^{\lambda_2}, \quad \ldots, \quad T_{2n+1} = K_{2n+1} t^{\lambda_{2n+1}},$$

où les K sont des constantes arbitraires, t une variable auxiliaire, les λ des constantes données, les T des fonctions holomorphes de z, des x et des p s'annulant avec ces variables.

Ces intégrales peuvent se mettre sous la forme

$$(35)\quad \begin{cases} z = f, & x_1 = f_1, \quad \ldots, \quad x_n = f_n, \\ p_1 = f_{n+1}, & p_2 = f_{n+2}, \quad \ldots, \quad p_n = f_{2n}, \end{cases}$$

où les f sont des fonctions holomorphes de $K_1 t^{\lambda_1}$, $K_2 t^{\lambda_2}$, ..., $K_{2n+1} t^{\lambda_{2n+1}}$ s'annulant avec ces variables.

PROBLÈME III.

Soit à trouver une intégrale de

$$F = 0$$

qui se réduise à

$$\beta(\mu_1, \mu_2 \ldots, \mu_{n-1})$$

quand on y fait

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta_1(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \\ x_2 &= \theta_2(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n &= \theta_n(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \end{aligned}$$

β et les θ étant des fonctions holomorphes des μ s'annulant avec ces variables.

Quand on fait

$$x_1 = \theta_1, \quad x_2 = \theta_2, \quad \ldots, \quad x_n = \theta_n,$$

les p se trouvent assujettis à se réduire à certaines fonctions des μ : ω_1, ω_2, ..., ω_n.

Ces fonctions sont déterminées par les équations

$$(37)\quad \begin{cases} F(\beta, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = 0, \\ \dfrac{d\beta}{d\mu_1} = \omega_1 \dfrac{d\theta_1}{d\mu_1} + \omega_2 \dfrac{d\theta_2}{d\mu_1} + \ldots + \omega_n \dfrac{d\theta_n}{d\mu_1}, \\ \dfrac{d\beta}{d\mu_2} = \omega_1 \dfrac{d\theta_1}{d\mu_2} + \omega_2 \dfrac{d\theta_2}{d\mu_2} + \ldots + \omega_n \dfrac{d\theta_n}{d\mu_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{d\beta}{d\mu_{n-1}} = \omega_1 \dfrac{d\theta_1}{d\mu_{n-1}} + \omega_2 \dfrac{d\theta_2}{d\mu_{n-1}} + \ldots + \omega_n \dfrac{d\theta_n}{d\mu_{n-1}}. \end{cases}$$

PREMIER CAS.

Les équations (37) donnent les ω en fonctions algébroïdes des μ.

Ce cas ne présente pas de difficulté spéciale, et l'on verra plus loin comment on le traite.

DEUXIÈME CAS.

Les équations (37) ne donnent pas les ω en fonctions algébroïdes des μ.

Les deux membres de chacune des équations (37) sont holomorphes par rapport aux μ et aux ω. Donc, en vertu du lemme VI (Ire Partie), on peut en tirer les ω et les μ en fonctions algébroïdes par rapport à $n-1$ nouvelles variables

$$\nu_1, \ \nu_2, \ \ldots, \ \nu_{n-1}$$

et s'annulant avec ces variables.

Donc β, les θ et les ω seront algébroïdes par rapport aux ν et s'annuleront avec eux. On est donc ramené au premier cas.

Exemple. — Un exemple fera mieux comprendre ce qui précède. Soit l'équation

$$p_3^2 = p_1^2 + p_2^2.$$

Soit à trouver une intégrale de cette équation se réduisant à

$$\mu_1^3 + \mu_2^3$$

quand

$$x_3 = 0,$$

$$x_2 = \mu_2^2,$$

$$x_1 = \mu_1^2 + \mu_2\mu_1.$$

Les équations (37) s'écrivent

$$\omega_3^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2,$$

$$3\mu_1^2 = \omega_1(2\mu_1 + \mu_2),$$

$$3\mu_2^2 = \omega_2\mu_2 + \omega_1\mu_1.$$

On ne peut tirer de ces équations les ω en fonctions algébroïdes des μ.

Mais posons

$$\omega_1 = \nu_1, \quad \omega_2 = \nu_2;$$

il viendra

$$\omega_3^2 = \nu_1^2 + \nu_2^2,$$
$$3\mu_1^2 = \nu_1(2\mu_1 + \mu_2),$$
$$3\mu_2^2 = \nu_2\mu_2 + \nu_1\mu_1,$$

d'où

$$3(3\mu_1^2 - 2\nu_1\mu_1)^2 = \nu_1\nu_2(3\mu_1^2 - 2\nu_1\mu_1) + \nu_1^3\mu_1,$$
$$3(3\mu_2^2 - \nu_2\mu_2)^2 = \nu_1^2(3\mu_2^2 - \nu_2\mu_2 + \nu_1\mu_2),$$

équations qui définissent μ_1 et μ_2 en fonctions algébroïdes des ν. De même, μ_2^2, $\mu_1^2 + \mu_2\mu_1$, $\mu_1^3 + \mu_2^3$ s'exprimeraient en fonctions algébroïdes des ν.

CAS GÉNÉRAL.

Dans tous les cas on peut donc supposer :

1° Que les θ, β et les ω sont algébroïdes par rapport aux μ;

2° Qu'ils s'annulent avec ces variables.

On peut toujours supposer que les équations de la forme

$$\theta_i^m + A_{m-1}\theta_i^{m-1} + \ldots + A_1\theta_i + A_0,$$

qui définissent les θ par exemple, de même que celles qui définissent β et les ω, sont irréductibles, c'est-à-dire ne sont pas un produit de deux équations de même forme.

On remarquera que, pour un même système de valeurs des μ, β, les θ et les ω sont susceptibles de plusieurs valeurs.

Soit

$$\mu_{1,0}, \ \mu_{2,0}, \ \ldots, \ \mu_{n-1,0}$$

un système fixe de valeurs des μ.

Soit

$$\beta_0, \ \theta_{1,0}, \ \theta_{2,0}, \ \ldots, \ \theta_{n,0}, \ \omega_{1,0}, \ \omega_{2,0}, \ \ldots, \ \omega_{n,0}$$

un système fixe de valeurs de β, des θ et des ω, tel qu'en substituant dans les équations (37), à la place de

$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \ldots, \ \mu_{n-1}, \quad \beta, \quad \theta_1, \quad \theta_2, \quad \ldots, \ \theta_n, \quad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \ \omega_n,$$
$$\mu_{1,0}, \ \mu_{2,0}, \ \ldots, \ \mu_{n-1,0}, \ \beta_0, \ \theta_{1,0}, \ \theta_{2,0}, \ \ldots, \ \theta_{n,0}, \ \omega_{1,0}, \ \omega_{2,0}, \ \ldots, \ \omega_{n,0},$$

ces équations se trouvent satisfaites.

Supposons maintenant que l'on fasse varier les μ d'une manière quelconque en partant du système fixe de valeurs

$$\mu_{1,0}, \mu_{2,0}, \ldots, \mu_{n-1,0}$$

pour aboutir au système quelconque de valeurs

$$\mu_{1,1}, \mu_{2,1}, \ldots, \mu_{n-1,1}.$$

Supposons que β, les θ et les ω varient d'une manière continue en même temps que les μ en partant du système initial de valeurs

$$\beta_0, \theta_{1,0}, \theta_{2,0}, \ldots, \theta_{n,0}, \omega_{1,0}, \omega_{2,0}, \ldots, \omega_{n,0},$$

et qu'ils deviennent égaux respectivement à

$$(37\ bis) \qquad \beta_1, \theta_{1,1}, \theta_{2,1}, \ldots, \theta_{n,1}, \omega_{1,1}, \omega_{2,1}, \ldots, \omega_{n,1}$$

quand les μ deviennent égaux respectivement à

$$\mu_{1,1}, \mu_{2,1}, \ldots, \mu_{n-1,1}.$$

Nous appellerons les valeurs (37 *bis*) valeurs correspondantes de p, des θ et des ω.

Pour résoudre le problème III, il faut d'abord remplacer dans les T

$$z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$$

par

$$\beta, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n;$$

il viendra

$$T_1 = \psi_1, \quad T_2 = \psi_2, \quad \ldots, \quad T_{2n+1} = \psi_{2n+1},$$

les ψ étant algébroïdes par rapport aux μ. Si l'on n'a substitué à z, aux x et aux p, dans les T, que des valeurs correspondantes de β, des θ et des ω, les équations qui définissent les ψ sont irréductibles.

On appellera système de valeurs correspondantes des ψ un système de valeurs de ces fonctions obtenu en substituant dans les T un même système de valeurs correspondantes de β, des θ et des ω.

Il faut ensuite, comme on l'a vu dans la Section précédente, remplacer dans les équations (35) les T par les ψ et t par μ_n.

z, les x et les p s'expriment alors par des fonctions algébroïdes en $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}, \mu_n^{\lambda_1}, \mu_n^{\lambda_2}, \ldots, \mu_n^{\lambda_{2n+1}}$.

Si l'on a eu soin de ne donner dans cette substitution aux ψ que des valeurs correspondantes, les équations qui définissent z, les x et les p sont irréductibles. On dira encore que des valeurs de z, des x et des p sont correspondantes quand on les aura obtenues par la substitution dans les équations (35) d'un même système de valeurs correspondantes des ψ. Les expressions de z, des x et des p que l'on vient d'obtenir donnent-elles l'expression implicite de l'intégrale cherchée?

Pour que cela soit, il faut et il suffit que l'on ait identiquement

$$\frac{dz}{dx_1} = p_1, \quad \frac{dz}{dx_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{dz}{dx_n} = p_n.$$

1° Je dis que ces conditions sont remplies, pourvu que les μ ne prennent pas certains systèmes particuliers de valeurs.

En effet, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \beta, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ ne sont pas tous identiquement nuls. Il en résulte que, pourvu qu'on ne donne pas à μ_1, $\mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ des valeurs qui satisfassent *au moins à une* relation donnée

$$\gamma(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}) = 0,$$

on n'aura pas à la fois

$$\beta = \omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_n = \theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_n = 0.$$

On pourra toujours choisir les μ d'une infinité de manières, de telle façon que les modules de β, des ω, des θ soient aussi petits que l'on veut et que les μ ne satisfassent pas à

$$\gamma = 0.$$

Dans ce cas, comme on l'a vu au commencement de cette Section, les fonctions

$$\mathrm{F},\ \mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \ldots,\ \mathrm{P}_n,$$

$$\mathrm{X}_1 + p_1\mathrm{Z},\ \mathrm{X}_2 + p_2\mathrm{Z},\ \ldots,\ \mathrm{X}_n + p_n\mathrm{Z}$$

ne s'annuleront pas à la fois quand on y remplacera z, les p et les x par β, les ω et les θ. Mais alors les fonctions J sont identiquement nulles, comme on l'a vu dans les *Généralités* (I^re Partie); les équations qui donnent $z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ en fonction des μ sont bien l'expression implicite de l'intégrale, et, par conséquent,

$$\frac{dz}{dx_1}=p_1,\quad \frac{dz}{dx_2}=p_2,\quad \ldots,\quad \frac{dz}{dx_n}=p_n.$$

Supposons maintenant que l'on donne à

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_{n-1}$$

des valeurs qui annulent à la fois

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n,\ \beta,\ \theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_n,$$

et voyons si les expressions que nous avons trouvées représentent encore réellement l'intégrale cherchée.

Interprétation géométrique. — Supposons que l'on n'ait que deux variables indépendantes x_1 et x_2, et que, par conséquent, l'intégrale soit susceptible de représenter une surface S.

Il s'agit de déterminer la surface S de telle façon qu'elle passe par une courbe donnée C, passant elle-même par l'origine, et qu'en chacun de ses points son plan tangent P soit tangent à un cône donné. Nous avons trouvé une expression de la surface S en égalant z, x_1, x_2 à certaines fonctions de deux variables auxiliaires μ_1 et μ_2.

Si, donnant à μ_1 une valeur constante qui n'annule pas

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \beta,\ \theta_1,\ \theta_2,$$

on continue à considérer μ_2 comme une variable, ces expressions de z, x_1, x_2 en fonction de μ_1 et μ_2 définiront une courbe K_m passant par le point

$$[z=\beta(\mu_1),\ x_1=\theta_1(\mu_1),\ x_2=\theta_2(\mu_1)],$$

qui est sur la courbe C et que nous appellerons m, et passant aussi par l'origine.

Nous avons vu que, si la surface S cherchée existe, la courbe K_m en fait partie, et qu'effectivement, tout le long de cette courbe, la surface engendrée par les courbes K_m satisfait aux conditions de la définition de la surface S.

Supposons maintenant que μ_1 tende vers une valeur qui annule à la fois les ω, β et les θ, par exemple vers zéro, c'est-à-dire que le point m se déplace sur la courbe C en se rapprochant indéfiniment de l'origine.

Dans ce cas, ou bien μ_2 restera fini, et alors z, x_1 et x_2 tendront vers zéro, ou bien μ_2 augmentera indéfiniment et z, x_1, x_2 tendront vers des limites finies, c'est-à-dire que, quand le point m tendra vers l'origine, la courbe K_m se rapprochera indéfiniment d'une certaine courbe limite K_0.

Il s'agit de faire voir :

1° Qu'à l'origine, c'est-à-dire quand

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 \gtrless \infty$$

ou quand

$$\mu_1 \gtrless 0, \quad \mu_2 = 0,$$

la surface engendrée par les courbes K_m et par la courbe K_0 satisfait aux conditions de la définition de la surface S ;

2° Que le long de la courbe K_0, c'est-à-dire quand

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = \infty,$$

cette surface satisfait encore à ces conditions.

Hypothèse I. — Supposons donc d'abord que les équations

$$\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_{n-1} = 0$$

soient distinctes, ce qui est le cas le plus général. Alors, pour que l'on ait

$$\beta = \omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_n = \theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_n = 0,$$

et par conséquent

$$0 = F = P_1 = P_2 = \ldots = P_n = X_1 + p_1 Z = X_2 + p_2 Z = \ldots = X_n + p_n Z,$$

il faudra que l'on ait

$$(\alpha) \qquad \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_{n-1} = 0.$$

Donc, toutes les fois que ces conditions (α) ne seront pas remplies, on aura, si $\mu_n \gtrless 0$,

$$\frac{dz}{dx_1} = p_1, \quad \frac{dz}{dx_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{dz}{dx_n} = p_n.$$

Hypothèse II. — On peut toujours supposer que les parties réelles des quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2n+1}$ sont positives, car on a supposé que, si α_i

et β_i sont les parties réelle et imaginaire de λ_i, les points dont les coordonnées sont α_i et β_i sont d'un même côté d'une certaine droite passant par l'origine, c'est-à-dire que l'on a, quel que soit i,

$$A\alpha_i + B\beta_i > 0,$$

A et B étant deux constantes réelles indépendantes de i.

Si les parties réelles des λ_i n'étaient pas positives, on multiplierait l'équation $F = 0$ par $A - iB$.

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2n+1}$ deviendraient alors

$$(A - iB)\lambda_1,\ (A - iB)\lambda_2,\ \ldots,\ (A - iB)\lambda_{2n+1},$$

dont les parties réelles sont

$$A\alpha_1 + B\beta_1,\ A\alpha_2 + B\beta_2,\ \ldots,\ A\alpha_{2n+1} + B\beta_{2n+1},$$

et sont par conséquent positives.

Cas à examiner.

Le cas où l'on n'a pas

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{n-1} = 0$$

ou bien

$$\mu_n = 0$$

ayant été examiné, il nous reste trois cas à considérer :

1° $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{n-1} = 0,\ \ \mu_n = \infty$;

2° $\mu_n = 0$; mais on n'a pas à la fois

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{n-1} = 0;$$

3° μ_n est fini et de plus

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{n-1} = 0.$$

PREMIER CAS.

Rappelons de quelle manière on a obtenu l'expression implicite de l'intégrale.

Dans les T, on a remplacé z, les x et les p par β, les θ et les ω, et les T sont devenus égaux à des fonctions ψ des μ, définies par des équations de la forme

$$\psi_i^m + \mathrm{A}_{m-1}^{(i)}\,\psi_i^{m-1} + \ldots + \mathrm{A}_1^{(i)}\,\psi_i + \mathrm{A}_0^{(i)} = 0,$$

où les A sont des fonctions holomorphes des μ s'annulant avec ces variables.

On a ensuite, dans les équations

$$\mathrm{T}_i = \mathrm{K}_i t^{\lambda_i},$$

remplacé les K_i par ψ_i et t par μ_n, et les T se sont trouvés définis par les équations

$$(38) \qquad \mathrm{T}_i^m + \mathrm{A}_{m-1}^{(i)}\,\mu_n^{\lambda_i}\mathrm{T}_i^{m-1} + \ldots + \mathrm{A}_1^{(i)}\,\mu_n^{(m-1)\lambda_i}\mathrm{T}_i + \mathrm{A}_0^{(i)}\,\mu_n^{m\lambda_i} = 0.$$

Il est clair que, si l'on annule μ_n ou si l'on annule les $n-1$ premiers μ sans rendre μ_n infini, on annule les T, et par conséquent z, les x et les p.

Nous allons d'abord supposer que μ_n tende vers l'infini en même temps que les autres μ tendent vers zéro.

Les équations (38) nous donnent une expression implicite de l'intégrale.

Dans les équations, les A sont des séries ordonnées suivant les puissances croissantes des μ, de sorte qu'on peut poser

$$\mathrm{A} = \Sigma\chi,$$

où

$$\chi = \mathrm{K}_1\,\mu_1^{\beta_1}\mu_2^{\beta_2}\ldots\mu_{n-1}^{\beta_{n-1}},$$

où K_1 est une constante, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ des nombres entiers.

L'équation (38) pourra alors s'écrire

$$\Sigma\chi\mathrm{T}_i^{m-\mathrm{K}}\mu_n^{\mathrm{K}\lambda_i} = 0.$$

Supposons que l'on fasse le changement de variables

$$(49) \quad \mu_1 = \nu^{\alpha_1}, \quad \mu_3 = \nu^{\alpha_2}\xi_2, \quad \mu_2 = \nu^{\alpha_3}\xi_3, \quad \ldots, \quad \mu_{n-1} = \nu^{\alpha_{n-1}}\xi_{n-1}, \quad \mu_n = \nu^{-1}\xi_n,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ sont des constantes dont les parties réelles sont positives et que l'on déterminera plus loin. L'équation (38) s'écrira alors

$$\Sigma\Xi\xi_n^{\mathrm{K}\lambda_i}\nu^{\mathrm{K}\delta}\mathrm{T}_i^{m-\mathrm{K}} = 0,$$

où

$$\Xi = K_1 \xi_2^{\beta_2} \xi_3^{\beta_3} \ldots \xi_{n-1}^{\beta_{n-1}}$$

et

$$\delta = \frac{\beta_1}{K}\alpha_1 + \frac{\beta_2}{K}\alpha_2 + \ldots + \frac{\beta_{n-1}}{K}\alpha_{n-1} - \lambda_i.$$

Remarquons que, dans cette expression,

$$\frac{\beta_1}{K}, \frac{\beta_2}{K}, \ldots, \frac{\beta_{n-1}}{K}$$

sont réels positifs, tandis que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \lambda_i$ sont imaginaires.

On peut toujours choisir les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ de telle façon qu'un ou plusieurs des δ soient nuls pendant que les autres ont leur partie réelle positive.

En effet, posons

$$\alpha_1 = h_1\alpha + ik_1, \quad \alpha_2 = h_2\alpha + ik_2, \quad \ldots, \quad \alpha_{n-1} = h_{n-1}\alpha + ik_{n-1},$$
$$\lambda_1 = \eta_1 + i\zeta_1, \qquad \lambda_2 = \eta_2 + i\zeta_2, \qquad \ldots, \quad \lambda_{2n+1} = \eta_{2n+1} + i\zeta_{2n+1}.$$

Dans ces expressions, $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$ sont des quantités positives et d'ailleurs quelconques, choisies arbitrairement; α et les k sont les inconnues qu'il s'agit de déterminer; les η et les ζ sont les parties réelles et imaginaires des λ.

Dans chacune des équations (38) et dans chacun des coefficients A qui y entrent, prenons chacun des termes χ et considérons le δ correspondant

$$\delta = \frac{\beta_1}{K}\alpha_1 + \frac{\beta_2}{K}\alpha_2 + \ldots + \frac{\beta_{n-1}}{K}\alpha_{n-1} - \lambda_i,$$

dont la partie réelle est

$$\alpha\left(\frac{\beta_1}{K}h_1 + \frac{\beta_2}{K}h_2 + \ldots + \frac{\beta_{n-1}}{K}h_{n-1}\right) - \eta_i.$$

Considérons les diverses quantités

(40) $$\frac{K\eta_i}{\beta_1 h_1 + \beta_2 h_2 + \ldots + \beta_{n-1} h_{n-1}};$$

comme

$$K \gtreqless m;$$

ces quantités ne peuvent devenir plus grandes que

$$\frac{m_1 \eta}{h},$$

h étant le plus petit des nombres $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$;
η étant le plus grand des nombres $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{2n+1}$;
m_1 étant le plus grand des nombres m correspondant à chacune des équations (38).

Il y aura donc une ou plusieurs des quantités (40) qui seront plus grandes que toutes les autres.

PREMIER CAS.

En général, il n'y en a qu'une. Soient

$$\beta_{1,0}, \beta_{2,0}, \ldots, \beta_{n-1,0}, K_0, \eta_0$$

les valeurs correspondantes de

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, K, \eta_i;$$

on posera

$$\alpha = \frac{K_0 \eta_0}{\beta_{1,0} h_1 + \beta_{2,0} h_2 + \ldots + \beta_{n-1,0} h_{n-1}}.$$

La partie réelle du δ correspondant sera

$$\frac{1}{K}(\beta_{1,0} h_1 + \beta_{2,0} h_2 + \ldots + \beta_{n-1,0} h_{n-1})\alpha - \eta_0 = 0;$$

la partie réelle des autres δ sera

$$(41) \qquad \frac{1}{K}(\beta_1 h_1 + \beta_2 h_2 + \ldots + \beta_{n-1} h_{n-1})\alpha - \eta_i,$$

et elle sera positive, puisque

$$\alpha = \frac{K_0 \eta_0}{\beta_{1,0} h_1 + \beta_{2,0} h_2 + \ldots + \beta_{n-1,0} h_{n-1}} > \frac{K \eta_i}{\beta_1 h_1 + \beta_2 h_2 + \ldots + \beta_{n-1} h_{n-1}}.$$

Quant aux quantités $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$, on les assujettira à la condition

$$\frac{1}{K}(\beta_{1,0} k_1 + \beta_{2,0} k_2 + \ldots + \beta_{n-1,0} k_{n-1}) - \zeta_0 = 0,$$

ζ_0 étant la partie imaginaire du λ dont η_0 est la partie réelle.

Alors tous les δ ont leur partie réelle positive, excepté celui qui correspond à $\beta_{1,0}, \beta_{2,0}, \ldots, \beta_{n-1,0}, \eta_0 + i\zeta_0$, et qui est nul.

Si donc on fait la substitution (39) dans les équations (38), ces équations prennent la forme

$$(38\ bis) \qquad \mathrm{o} = \mathrm{T}_i^m + \xi_n^{\lambda_i}\mathrm{T}_i^{m-1}\mathrm{A}'^{(i)}_{m-1} + \ldots + \mathrm{T}_i\mathrm{A}'^{(i)}\xi_n^{(m-1)\lambda_i} + \mathrm{A}'^{(i)}_0\xi_n^{m\lambda_i},$$

où les A′ sont holomorphes par rapport à $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{n-1}$ et à diverses puissances de ν, dont les exposants ont leurs parties réelles positives.

De plus, dans l'une au moins des équations (38 *bis*), l'un au moins des A′ ne s'annule pas avec ν, quels que soient les ξ.

DEUXIÈME CAS.

Plusieurs des quantités (40) sont égales entre elles et plus grandes que toutes les autres.

Si le nombre de ces quantités n'est pas supérieur à $n-1$, il n'y aura pas de difficulté; mais, quel qu'il soit d'ailleurs, on pourra tourner la difficulté, comme on va le voir.

Égalons encore α à ce nombre positif, qui est égal à plusieurs des quantités (40) et plus grand que toutes les autres. L'expression (41) sera encore nulle pour les δ qui correspondent à une quantité (40) égale à α, positive pour tous les autres. On posera encore

$$(42) \qquad \frac{1}{\mathrm{K}}(\beta_1 k_1 + \beta_2 k_2 + \ldots + \beta_{n-1} k_{n-1}) - \zeta_i = \mathrm{o},$$

où l'on donnera aux β et à ζ_i les valeurs qui correspondent aux δ dont on vient d'annuler la partie réelle.

Si le nombre des équations (42) est

$$< n - 1 \quad \text{ou} \quad = n - 1,$$

on pourra choisir les k de façon à satisfaire à ces équations, et, comme dans le cas précédent, les équations (38) seront ramenées à la forme (38 *bis*).

Si le nombre des équations (42) est

$$> n - 1,$$

on ne pourra plus choisir les k de cette manière, mais on pourra le faire de telle sorte que tous les δ aient leurs parties imaginaires positives, excepté un nombre fini d'entre eux, que tous ceux dont la partie réelle est déjà nulle aient leur partie imaginaire positive, excepté un ou plusieurs dont la partie imaginaire devra être nulle.

En effet, soit par exemple

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_{n-1}.$$

La partie imaginaire d'un δ s'écrit

$$\frac{1}{K} k_1 \sum \beta - \zeta_i. \tag{42 bis}$$

Considérons d'abord ceux des δ dont la partie réelle est déjà nulle : pour l'un au moins d'entre eux, ζ_i est positif, sans quoi on changerait $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$; donc, pour $k_1 = 0$, toutes les expressions (42 *bis*) ne sont pas positives ; pour k_1 positif et très grand, elles le sont toutes. On pourra donc choisir k_1 positif de telle sorte qu'il annule une ou plusieurs des expressions (42 *bis*) en laissant les autres positives.

Considérons maintenant ceux des δ dont la partie réelle est positive : il n'y en aura qu'un nombre fini pour lesquels

$$\sum \beta < \frac{\text{le plus grand des } \zeta_i \times \text{le plus grand des K}}{k_1}$$

et, par conséquent, dont la partie imaginaire peut être nulle ou négative. Tous les autres δ auront leur partie imaginaire positive.

Posons maintenant

$$\nu = \nu_1^{1-ib}.$$

Dans ce cas, les équations (38) s'écrivent

$$\sum \Xi \zeta_u^{K\lambda_i} \nu_1^{K\delta_1} T_i^{m-K} = 0,$$

où

$$\delta_1 = (1 - ib)\delta;$$

si $\delta = \varepsilon + i\varepsilon$,

$$\delta_1 = (\varepsilon + b\varepsilon_1) + i(\varepsilon_1 - b\varepsilon).$$

1° Pour un nombre fini des quantités δ,

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = 0;$$

alors

$$\varepsilon + b\varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_1 - b\varepsilon = 0, \quad \delta_1 = 0.$$

2° Pour un nombre fini des quantités δ,

$$\varepsilon = 0, \quad \varepsilon_1 > 0,$$

alors

$$\varepsilon + b\varepsilon_1 > 0,$$

si $b > 0$.

3° Pour un nombre fini des quantités δ,

$$\varepsilon > 0, \quad \varepsilon_1 \gtreqless 0;$$

on pourra alors toujours choisir b positif et assez petit pour que

$$\varepsilon + b\varepsilon_1 > 0.$$

4° Pour un nombre fini ou infini des quantités δ,

$$\varepsilon > 0, \quad \varepsilon_1 > 0;$$

si $b > 0$,

$$\varepsilon + b\varepsilon_1 > 0.$$

En résumé, tous les δ_1 ont leur partie réelle positive, excepté un ou plusieurs qui sont nuls. Les équations (38) prennent donc encore ici la forme (38 *bis*), c'est-à-dire que les T sont fonctions algébroïdes de $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{n-1}$, de diverses puissances de ξ_n et de ν_1, dont les exposants ont leur partie réelle positive, et que tous les T ne s'annulent pas, quels que soient les ξ, quand ν_1 s'annule.

CAS GÉNÉRAL.

Dans les deux cas qu'on vient d'examiner, les équations (38) ont été ramenées aux équations (38 *bis*). En résolvant ces équations (38 *bis*) par rapport aux x, à z et aux p, on trouvera

$$(43) \qquad \begin{cases} z = \beta', \; x_1 = \theta'_1, \quad x_2 = \theta'_2, \quad \ldots, \quad x_n = \theta'_n, \\ \qquad\qquad p_1 = \omega'_1, \quad p_2 = \omega'_2, \quad \ldots, \quad p_n = \omega'_n. \end{cases}$$

Ces équations donnent l'expression implicite de l'intégrale, pourvu que l'on n'ait pas

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{n-1} = 0 \quad \text{ou} \quad \mu_n = 0,$$

c'est-à-dire pourvu que

$$\nu \gtrless 0, \quad \xi_2 \gtrless 0, \quad \xi_3 \gtrless 0, \quad \ldots, \quad \xi_n \gtrless 0.$$

Les équations (38 *bis*) montrent que, quand les ξ tendent d'une certaine manière vers certaines valeurs différentes de zéro,

$$\xi_{2,0}, \quad \xi_{3,0}, \quad \ldots, \quad \xi_{n,0},$$

pendant que ν tend d'une certaine manière vers zéro, les T tendent vers certaines valeurs finies et différentes de zéro,

$$T_{1,0}, \quad T_{2,0}, \quad \ldots, \quad T_{2n+1,0},$$

et que, par conséquent, z, les x et les p tendent vers certaines valeurs finies et différentes de zéro,

$$z_0, \quad x_{1,0}, \quad x_{2,0}, \quad \ldots, \quad x_{n,0}, \quad p_{1,0}, \quad p_{2,0}, \quad \ldots, \quad p_{n,0}.$$

Ces valeurs satisfont évidemment à l'équation

$$F(z_0, x_{1,0}, x_{2,0}, \ldots, x_{n,0}, p_{1,0}, p_{2,0}, \ldots, p_{n,0}) = 0,$$

car F est une fonction continue de z, des x et des p, et l'on a vu qu'on pouvait satisfaire à l'équation $F = 0$ en donnant à ces variables des valeurs aussi voisines que l'on veut de

$$z_0, \quad x_{1,0}, \quad x_{2,0}, \quad \ldots, \quad x_{n,0}, \quad p_{1,0}, \quad p_{2,0}, \quad \ldots, \quad p_{n,0}.$$

Il reste à faire voir que, pour

$$x_1 = x_{1,0}, \quad x_2 = x_{2,0}, \quad \ldots, \quad x_n = x_{n,0},$$

on a

$$\frac{dz}{dx_1} = p_1, \quad \frac{dz}{dx_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{dz}{dx_n} = p_n,$$

ou que l'on peut prendre ν et les ξ assez voisins de leurs limites pour que

$$z - z_0 = (x_1 - x_{1,0})(p_{1,0} + \varepsilon_1) + (x_2 - x_{2,0})(p_{2,0} + \varepsilon_2) + \ldots + (x_n - x_{n,0})(p_{n,0} + \varepsilon_n),$$

où les modules de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ sont aussi petits que l'on veut.

Or on a

$$p_1 = \frac{dz}{dx_1}, \quad p_2 = \frac{dz}{dx_2}, \quad \ldots, \quad p_n = \frac{dz}{dx_n}$$

toutes les fois que

$$\nu \gtrless 0.$$

Considérons un instant $\nu, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ comme des fonctions holomorphes quelconques d'une variable t qui tendent vers

$$0, \; \xi_{2,0}, \; \xi_{3,0}, \; \ldots, \; \xi_{n,0}$$

quand t tend vers zéro.

Remarque. — Remarquons qu'on peut toujours supposer que, pour $t = 0$,

$$\frac{dz}{dt}, \; \frac{dx_1}{dt}, \; \frac{dx_2}{dt}, \; \ldots, \; \frac{dx_n}{dt}$$

ne tendent pas vers l'infini.

En effet, un des T est donné par l'équation

$$\text{(39)} \qquad T^m + A_{m-1} T^{m-1} + \ldots + A_1 T + A_0 = 0,$$

où les A sont des fonctions holomorphes de diverses puissances de t dont les exposants ont leurs parties réelles positives.

Si T_0 est la valeur de T pour $t = 0$, on aura

$$(T - T_0)^m + B_{m-1}(T - T_0)^{m-1} + \ldots + B_1(T - T_0) + B_0 = 0,$$

où les B sont de même forme que les A.

Soit $t^{K(\alpha_K + i\beta_K)}$ celle des puissances de t qui entre dans le développement de B_{m-K} et dont la partie réelle est la plus petite. Si tous les α_K sont plus grands que 1, $\frac{T - T_0}{t}$ tend vers zéro quand t tend vers zéro; or on peut toujours supposer que tous les α_K sont plus grands que 1, car, si cela n'était pas, on poserait

$$t = \tau^\lambda,$$

λ étant un nombre plus grand que tous les $\frac{1}{\alpha_K}$, et l'on aurait

$$t^{K(\alpha_K + i\beta_K)} = \tau^{K(\lambda\alpha_K + i\lambda\beta_K)},$$

où $\lambda\alpha_K > 1$.

Donc on peut toujours supposer que pour $t = 0$ on a

$$\frac{dT}{dt} = 0,$$

et par conséquent

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = \ldots = \frac{dx_n}{dt} = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cela posé, soient t_1 une valeur quelconque de t; $z_1, x_{1,1}, x_{2,1}, \ldots, x_{n,1}$ les valeurs correspondantes de z et des x; on aura

$$z_1 - z_0 = \int_0^{t_1} dt \left(\frac{dx_1}{dt} p_1 + \frac{dx_2}{dt} p_2 + \ldots + \frac{dx_n}{dt} p_n \right).$$

Cette intégrale existe, puisque les quantités sous le signe $\int$ restent finies.

Or on peut prendre t_1 assez petit pour que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ soient aussi voisins qu'on voudra de $p_{1,0}, p_{2,0}, \ldots, p_{n,0}$. Donc

$$z_1 - z_0 = \left(\int_0^{t_1} dt \frac{dx_1}{dt} \right) (p_{1,0} + \varepsilon_1) + \ldots + \left(\int_0^{t_1} dt \frac{dx_n}{dt} \right) (p_{n,0} + \varepsilon_n),$$

les modules des ε étant aussi petits que l'on voudra, c'est-à-dire

$$z_1 - z_0 = (p_{1,0} + \varepsilon_1)(x_{1,1} - x_{1,0}) + \ldots + (p_{n,0} + \varepsilon_n)(x_{n,1} - x_{n,0}).$$

C. Q. F. D.

DEUXIÈME CAS.

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ ne sont pas nuls à la fois ($\mu_n = 0$).

Dans ce cas, les équations (38) démontrent que les T s'annulent, et par conséquent aussi z, les x et les p. Je dis que l'on a en même temps

$$\frac{dz}{dx_1} = \frac{dz}{dx_2} = \ldots = \frac{dz}{dx_n} = 0.$$

Pour cela, il faut faire voir que, quels que soient les $n - 1$ premiers μ, on peut prendre μ_n assez petit pour que

$$z = \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + \ldots + \zeta_n x_n,$$

où mod. $\zeta_1 < \varepsilon_1$, mod. $\zeta_2 < \varepsilon_2$, ..., mod. $\zeta_n < \varepsilon_n$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ étant aussi petit que l'on veut. Or on a

$$z = \int_0 d\mu_n \left(\frac{dz}{dx_1}\frac{dx_1}{d\mu_n} + \frac{dz}{dx_2}\frac{dx_2}{d\mu_n} + \ldots + \frac{dz}{dx_n}\frac{dx_n}{d\mu_n} \right) \quad (^1).$$

ou, puisque, toutes les fois que $\mu_n \gtrless 0$,

$$\frac{dz}{dx_1} = p_1, \quad \frac{dz}{dx_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{dz}{dx_n} = p_n;$$

d'où

$$z = \int_0^{\mu_{n,0}} d\mu_n \sum p_i \frac{dx_i}{d\mu_n}.$$

Or, on aura pu prendre $\mu_{n,0}$ assez petit pour que, μ_n variant depuis zéro jusqu'à $\mu_{n,0}$ (de manière que son point représentatif décrive une ligne droite), on ait

$$\text{mod.}\, p_i < \varepsilon_i.$$

Dans ce cas, on aura

$$\int_0^{\mu_{n,0}} d\mu_n p_i \frac{dx_i}{d\mu_n} = \zeta_i x_i, \quad (\text{mod.}\, \zeta_i < \varepsilon_i),$$

d'où

$$z = \Sigma \zeta_i x_i. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

TROISIÈME CAS.

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{n-1} = 0, \quad \mu_n > \infty.$$

En ce cas, les T sont nuls, ainsi que les x, z et les p; je dis que

$$\frac{dz}{dx_1} = \frac{dz}{dx_2} = \ldots = \frac{dz}{dx_n} = 0.$$

---

(1) *Voir* la remarque de la page suivante.

En effet, il suffit de faire la substitution (39) pour être ramené au cas précédent.

Remarque. — La démonstration précédente (deuxième cas) suppose que $\frac{dx_1}{d\varphi_1}$, $\frac{dx_2}{d\varphi_n}$, ..., $\frac{dx_n}{d\varphi_n}$ sont finis. Or on peut toujours le supposer, ainsi qu'on l'a vu pour le premier cas.

Vu et approuvé :

Paris, le 17 juin 1879.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer :

Paris, le 17 juin 1879.

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

GRÉARD.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Démontrer qu'un ellipsoïde à trois axes inégaux peut être la forme d'équilibre relatif d'un corps fluide homogène tournant autour d'un axe d'un mouvement uniforme et dont les molécules s'attirent en raison directe des masses et en raison inverse du carré des distances.

Vu et approuvé :

Paris, le 17 juin 1879.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer :

Paris, le 17 juin 1879.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GRÉARD.

5136 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.