THÈSE

DE MÉCANIQUE

SUR

LE MOUVEMENT DES CORPS FLOTTANTS;

PAR M. MOLINS,

ASPIRANT AU DOCTORAT ÈS-SCIENCES.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

POUR LES MATHÉMATIQUES,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1837.

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES.

THÈSE DE MÉCANIQUE,

SUR

LE MOUVEMENT DES CORPS FLOTTANTS.

Du mouvement des Corps flottants.

1. On sait quel est l'effet produit par les pressions qu'exerce un liquide pesant sur un corps qui y est plongé; les pressions latérales se détruisent et les pressions verticales ont une résultante appliquée au centre de gravité du volume plongé, dirigée en sens contraire de la pesanteur et égale au poids du volume de liquide déplacé. Il en résulte que pour l'équilibre mathématique d'un corps quelconque plongé dans un fluide plus dense que lui, il faut et il suffit que les centres de gravité du corps et du volume plongé se trouvent sur une même verticale. La recherche des positions d'équilibre d'un corps flottant consiste à déterminer les sections planes qui coupent le corps en deux parties telles qu'un volume de liquide égal à celui de l'une d'elles pèse autant que le corps, et telles aussi que les centres de gravité de ce volume et du corps entier se trouvent sur une même perpendiculaire à la section. Il est facile de résoudre ce problème pour des corps réguliers tels qu'un prisme, une sphère, un ellipsoïde, etc.

1

Nous ne faisons que rappeler les conditions de l'équilibre des corps flottants; notre objet est d'étudier le mouvement que prend un corps flottant de forme quelconque lorsqu'on l'a écarté fort peu de sa position d'équilibre, ce qui nous amènera à examiner dans quel cas le corps tend à revenir à sa première position, et dans quel cas il tend à s'en éloigner de plus en plus, c'est-à-dire dans quels cas l'équilibre est stable ou instable. Nous considérerons en outre le liquide comme n'exerçant qu'un effet hydrostatique, ce qui revient à dire que nous n'aurons pas égard à la résistance qui naît de son mouvement.

2. Supposons donc qu'un corps flotte en équilibre à la surface d'un liquide, et qu'après l'avoir écarté très peu de cette position on lui imprime une faible impulsion, le problème à résoudre consiste à déterminer la nature du mouvement qu'il prendra en vertu de cette impulsion initiale, de son poids et de la pression verticale qu'exerce le liquide. La position du corps à un instant quelconque serait déterminée si l'on pouvait connaître celle du centre de gravité et d'une certaine section du corps passant par ce point et primitivement désignée; parmi les diverses sections que l'on peut prendre on choisira de préférence une de celles qui contiennent deux des axes principaux relatifs au centre de gravité. Les équations par lesquelles on déterminera la position du corps seront celles du mouvement d'un corps entièrement libre sollicité par la pesanteur et par la pression du liquide; on exprimera donc 1°. que le mouvement du centre de gravité est le même que si la masse entière du corps y était réunie et qu'on y transportât parallèlement à elles-mêmes toutes les forces qui le sollicitent; 2°. que le mouvement de rotation autour du centre de gravité est le même, à un instant quelconque, que si ce point était rendu fixe. Remarquons d'ailleurs que les forces accélératrices étant verticales, il n'y a lieu à considérer, pour le centre de gravité, que son mouvement dans le sens vertical.

Cela posé, G (fig. 1) étant la position du centre de gravité du corps (homogène ou hétérogène) à une époque quelconque du mouvement; soient $Gx_{\prime}$, $Gy_{\prime}$, $Gz_{\prime}$, les axes principaux relatifs à ce point, MN la section du corps par la surface du liquide quand il était en équilibre, M'N' le plan actuel de flottaison, H le centre de gravité du volume MIN primitivement déplacé, G' celui de la section MN. La position du corps sera rapportée à trois axes rectangulaires fixes ox, oy, oz dont les deux premiers sont situés dans le plan horizontal du niveau du liquide, et dont le troisième est vertical. Puisque MN était le plan de flottaison à l'époque de l'équilibre, la droite GH qui joint les centres de gravité du corps et du volume plongé doit être perpendiculaire à ce plan; nous supposerons que l'axe principal Gz' soit aussi perpendiculaire à ce plan, c'est-à-dire qu'il coïncide avec GH; nous indiquerons d'ailleurs la marche à suivre dans le cas où $Gz_{,}$ n'est point perpendiculaire au plan MN.

Nous désignerons par a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', les cosinus des angles que font les trois axes mobiles $Gx_{,}$, $Gy_{,}$, $Gz_{,}$, avec chacun des axes Ox, Oy, Oz, ou avec leurs parallèles Gx', Gy', Gz', menées par le point G, et par h le z du point G. On sait que l'on peut faire dépendre la détermination de ces neuf cosinus de celle de trois quantités qui sont : l'angle que fait le plan $x_{,}y_{,}$ avec le plan $x'y'$, l'angle que fait avec Gx' la trace du premier plan sur le second, et l'angle que $Gx_{,}$ fait avec cette même trace. Nous appellerons θ, ψ, φ ces trois angles, dont le premier est compris entre $0°$ et $180°$, et dont les deux autres peuvent croître indéfiniment, mais peuvent toujours être supposés positifs et compris entre $0°$ et $360°$. Comme l'emploi de ces angles sera très fréquent, il ne sera pas inutile de bien expliquer comment leur connaissance déterminera sans ambiguité la position du corps. A partir de Gx' et dans le sens indiqué par la flèche f (fig. 2) on fera dans le plan $x'y'$ un angle $KGx' = \psi$; cet angle pouvant prendre toutes les valeurs depuis $0°$ jusqu'à $360°$, il s'ensuit que la droite GK qui est l'intersection des plans $x'y'$, $x_{,}y_{,}$ pourra occuper toutes les positions dans le plan $x'y'$. En second lieu on mènera dans le plan $x_{,}y_{,}$ dont la position n'est pas encore fixée et dans le sens de la flèche f' une droite $Gx_{,}$ faisant avec GK un angle $KGx_{,} = \varphi$; l'angle φ pouvant avoir toutes les valeurs depuis $0°$ jusqu'à $360°$, on voit que l'axe $Gx_{,}$ pourra occuper toutes les positions dans le plan $x_{,}y_{,}$, et cette droite sera située au-dessus ou au-dessous du plan $x'y'$ suivant que l'angle φ sera plus grand ou moindre que 180°. Enfin l'on fera tourner le plan $KGx_{,}$ autour de GK de manière que la droite $Gx_{,}$ s'élève ou s'abaisse au-dessous du plan $x'y'$ selon que l'angle φ est moindre ou plus grand que 180° et jusqu'à ce que l'angle dièdre formé avec la partie KGx' par la partie du plan $x_{,}y_{,}$ qui s'élève au-dessus du plan $x'y'$, soit égale à l'angle θ qui est aigu ou obtus mais moindre que 180°. Il ne restera plus qu'à mener dans le plan $x_{,}y_{,}$ une perpendiculaire $Gy_{,}$ à $Gx_{,}$ de manière que l'angle qu'elle formera avec Gx' soit égal à $\varphi + 90°$, et puis une perpendiculaire $Gz_{,}$ au plan $x_{,}y_{,}$ qui sera située au-dessus ou au-dessous du plan $x'y'$ selon que l'angle θ sera aigu ou obtus.

Maintenant puisque les trois angles θ, ψ, φ déterminent la position du corps ou des axes $Gx_{,}$, $Gy_{,}$, $Gz_{,}$, il s'ensuit qu'il doit être possible d'exprimer les neuf cosinus $a, b, c, \ldots$ en fonction de ces angles, en donnant à ces derniers la signification que nous venons d'expliquer. Les formules auxquelles on arrive, connues sous le nom de *formules d'Euler*, s'obtiennent aisément par la considération de plusieurs triangles sphériques ; les voici :

$$
\begin{aligned}
a &= \cos\theta \sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi, \\
b &= \cos\theta \sin\psi \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi, \\
c &= \sin\theta \sin\psi, \\
a' &= \cos\theta \cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi, \\
b' &= \cos\theta \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi, \\
c' &= \sin\theta \cos\psi, \\
a'' &= - \sin\theta \sin\varphi, \\
b'' &= - \sin\theta \cos\varphi, \\
c'' &= \cos\theta.
\end{aligned}
$$

3. Ces préliminaires étant posés, abordons le problème du mouvement du corps flottant. Nous désignerons sa masse par M et nous déterminerons le mouvement de son centre de gravité en exprimant que la quantité $M\frac{d^2h}{dt^2}$ est égale à la résultante des forces qui sollicitent le corps.

Ces forces sont le poids du corps et la résultante des pressions du liquide qui agit en sens inverse de la pesanteur et qui se décompose en deux parties, dont l'une est égale et contraire au poids du corps, et dont l'autre est égale au poids d'un volume de liquide égal à celui de la nouvelle partie plongée. Nous allons calculer cette nouvelle force, et pour cela nous formerons l'expression du volume compris entre les sections MN, M'N'. Nous appellerons V le volume primitivement plongé à l'époque de l'équilibre, ρ la densité du liquide, σ la surface de la section MN, s, t, u les coordonnées du point G' par rapport aux axes $Gx_{,}$, $Gy_{,}$, $Gz_{,}$, et enfin U le z du même point relatif aux axes fixes. On pourra remplacer M par ρV, et l'on aura visiblement

$$U = a''s + b''t + c''u + h.$$

Quant au volume MNM'N', pour l'obtenir on le décomposera en une infinité de cylindres verticaux dont un quelconque aura pour expression $zd\lambda\cos\theta$, en désignant par $d\lambda$ un élément infiniment petit de la surface MN et par z sa distance au plan M'N'. Ce volume est donc égal à

$$\cos\theta\int zd\lambda = -\sigma U\cos\theta = -\sigma\cos\theta\,(a''s + b''z + c''u + h),$$

et l'on aura le poids de ce volume de liquide en multipliant cette expression par ρg, g étant la gravité. Il suit de là que le mouvement du centre de gravité dans le sens vertical dépendra de l'équation

$$(1)\qquad V\frac{d^2h}{dt^2} = -g\sigma\cos\theta\,(a''s + b''t + c''u + h),$$

qui donne une relation entre la quantité h et les angles θ, ψ, φ par la substitution des valeurs de a'', b'', c''. On remarquera que dans la détermination du volume MNM'N', on le considère comme un cylindre tronqué dont les bases sont la section MN et sa projection sur le plan M'N', supposition qui approche d'autant plus de l'exactitude que les quantités h, θ sont plus petites, il est facile de voir que l'erreur est du second ordre par rapport à ces quantités.

Les quatre quantités h, θ, ψ, φ sont liées entre elles par trois nouvelles relations qui exprimeront le mouvement de rotation autour du centre de gravité. Rappelons d'abord quelques considérations générales relatives au mouvement de rotation.

Quand un corps tourne autour d'un point, il existe dans son intérieur une ligne droite qui reste immobile pendant un instant infiniment petit et autour de laquelle se fait la rotation; on l'appelle pour cette raison axe instantané de rotation. On démontre que la vitesse de rotation autour de l'axe instantané se décompose en trois vitesses de rotation autour de trois axes rectangulaires passant par le point fixe, de telle sorte que connaissant la vitesse de rotation du corps et la direction de l'axe instantané on en peut conclure la vitesse de rotation autour des trois axes, et réciproquement de ces trois composantes de la vitesse on peut conclure la vitesse de rotation autour de l'axe instantané et la direction de cet axe. Le problème du mouvement de rotation est ainsi ramené à la détermination des composantes de la vitesse de rotation autour de trois axes fixes dans l'intérieur du corps, par exemple, autour des trois axe principaux relatifs au point fixe. Nous désignerons par p, q, r les composantes de la vitesse de rotation autour des axes $Gx_{,}$, $Gy_{,}$, $Gz_{,}$; ce sont des fonctions connues de θ, ψ, φ.

$$pdt = \sin\varphi \sin\theta \, d\psi - \cos\varphi \, d\theta,$$
$$qdt = \cos\varphi \sin\theta \, d\psi + \sin\varphi \, d\theta,$$
$$rdt = d\varphi - \cos\theta \, d\psi.$$

Nous représenterons GH par n qui sera une quantité positive ou négative suivant que le point H sera au-dessus ou au-dessous du point G; on aura pour les composantes parallèles aux axes $Gx_{,}$, $Gy_{,}$, $Gz_{,}$ de la force $\rho g V$ qui exprime le poids du volume de liquide MIN

$$\rho g V a'', \quad \rho g V b'', \quad \rho g V c'',$$

et les moments de cette force par rapport aux mêmes axes sont: $-\rho g V b'' n$ par rapport à $Gx_{,}$, $\rho g V a'' n$ par rapport à $Gy_{,}$, et zéro par rapport à $Gz_{,}$. En second lieu désignons par V' le volume MNM'N' et par $X_{,}$, $Y_{,}$, $Z_{,}$, les coordonnées du centre de gravité de ce volume par rapport aux axes principaux; les composantes de la force $\rho V' g$ seront

$$\rho V' g a'', \quad \rho V' g b'', \quad \rho V' g c''$$

et les moments par rapport aux mêmes axes

$$\rho g \mathrm{V}'(c''\mathrm{Y}_{,}-b''\mathrm{Z}_{,}),\ \rho g \mathrm{V}'(a''\mathrm{Z}_{,}-c''\mathrm{X}_{,}),\ \rho g \mathrm{V}'(b''\mathrm{X}_{,}-a''\mathrm{Y}_{,}).$$

Nous désignerons enfin par A, B, C les trois moments d'inertie principaux.

Si maintenant on se sert des formules générales du mouvement de rotation autour d'un point, on trouvera pour les équations du mouvement de rotation autour du centre de gravité,

$$\mathrm{C}\frac{dr}{dt}+(\mathrm{B}-\mathrm{A})\,pq=\rho g \mathrm{V}'\,(b''\mathrm{X}_{,}-a''\mathrm{Y}_{,})$$

$$\mathrm{B}\,\frac{dq}{dt}+(\mathrm{A}-\mathrm{C})\,rp=\rho g \mathrm{V}a''n+\rho g \mathrm{V}'\,(a''\mathrm{Z}_{,}-c''\mathrm{X}_{,})$$

$$\mathrm{A}\,\frac{dp}{dt}+(\mathrm{C}-\mathrm{B})\,qr=-\rho g \mathrm{V}b''n+\rho g \mathrm{V}'(c''\mathrm{Y}_{,}-b''\mathrm{Z}_{,}).$$

Il y entre trois quantités $\mathrm{V}'\mathrm{X}_{,}$, $\mathrm{V}'\mathrm{Y}_{,}$, $\mathrm{V}'\mathrm{Z}_{,}$, qui expriment les moments du volume MNM'N' par rapport aux plans des axes principaux. Pour les déterminer on exprimera que ces moments sont égaux à la somme des moments des éléments qui composent le volume V',

$$\mathrm{V}'\mathrm{X}'=\int\!\!\int\!\!\int x_{,}dx_{,}dy_{,}dz_{,},\ \mathrm{V}'\mathrm{Y}_{,}=\int\!\!\int\!\!\int y_{,}dx_{,}dy_{,}dz_{,},\ \mathrm{V}'\mathrm{Z}_{,}=\int\!\!\int\!\!\int z_{,}dx_{,}dy_{,}dz_{,}.$$

Si nous désignons par e la distance GK du point G à la section MN, l'équation du plan de cette section rapportée aux axes principaux sera $z_{,}=e$, tandis que celle du plan M'N' par rapport aux axes Gx', Gy', Gz', sera $z=-h$; mais en appelant $y_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, les coordonnées d'un point quelconque du plan M'N' par rapport aux axes principaux on aura $z=a''x_{,}+b''y_{,}+c''z_{,}$, et l'équation de ce plan deviendra $a''x_{,}+b''y_{,}+c''z_{,}=-h$. Maintenant, pour étendre les intégrales précédentes à tout le volume V', on intégrera d'abord par rapport à $z_{,}$ depuis le z de la section MN jusqu'à celui de la section M'N' ou bien depuis $z_{,}=e$ jusqu'à $z_{,}=-\frac{h}{c''}-\frac{a''}{c''}x_{,}-\frac{b''}{c''}y_{,}$. Les deux premières intégrales deviendront

$$V'X_{,}=-\left(\frac{h}{c''}+e\right)\iint x_{,}\,dx_{,}\,dy_{,}-\frac{a''}{c''}\iint x_{,}^{2}\,dx_{,}\,dy_{,}-\frac{b''}{c''}\iint x_{,}y_{,}\,dx_{,}\,dy_{,}$$
$$V'Y_{,}=-\left(\frac{h}{c''}+e\right)\iint y_{,}\,dx_{,}\,dy_{,}-\frac{a''}{c''}\iint x_{,}y_{,}\,dx_{,}\,dy_{,}-\frac{b''}{c''}\iint y_{,}^{2}\,dx_{,}\,dy_{,}$$

ou bien en observant que l'on peut remplacer $\iint x_{,}, dx_{,}, dy_{,}$ par σs et $\iint y', dx', dy'$ par σt, et désignant les trois intégrales $\iint x_{,}^{2}dx_{,}dy_{,}$, $\iint x_{,}y_{,}dx_{,}dy_{,}$, $\iint y_{,}^{2}dx_{,}dy_{,}$, par A', B', C'.

$$V'X_{,}=-\frac{1}{c''}\,[\sigma s(h+c''e)+a''A'+b''B'],$$
$$V'Y_{,}=-\frac{1}{c''}\,[\sigma t(h+c''e)+a''B'+b''C'].$$

Les quantités A', B', C' sont censées connues; elles dépendent de la nature et de l'étendue de la section MN, et de la direction des axes principaux. L'on trouvera aussi pour la quantité $V'Z_{,}$

$$V'Z_{,}=\iiint z_{,}dx_{,}dy_{,}dz_{,}=\frac{1}{2}\iint\left[\left(\frac{h}{c''}+\frac{a''}{c''}x_{,}+\frac{b''}{c''}y_{,}\right)^{2}-e^{2}\right]dx_{,}dy_{,}$$
$$=\frac{1}{2c''^{2}}[(h^{2}-c''^{2}e^{2})\sigma+a''^{2}A'+b''^{2}C'+2a''b''B'+2h\sigma(a''s+b''t)].$$

Enfin, par la substitution des valeurs de $V'X_{,}$, $V'Y_{,}$, $V'Z_{,}$, les équations du mouvement de rotation deviendront

$$(2)\left\{\begin{aligned}
&C\frac{dr}{dt}+(B-A)pq=-\frac{\rho g b''}{c''}[\sigma s(h+c''e)+a''A'+b''B']+\frac{\rho g a''}{c''}[\sigma t(h+c''e)+a''B'+b''C'],\\
&B\frac{dq}{dt}+(A-C)rp=\rho g V a''n+\frac{\rho g a''}{2c''^{2}}[\sigma(h^{2}-c''^{2}e^{2})+a''^{2}A'+b''^{2}C'+2a''b''B'+2h\sigma(a''s+b''t)],\\
&\qquad\qquad+\rho g[\sigma s(h+c''e)+a''A'+b''B'],\\
&A\frac{dp}{dt}+(C-B)qr=-\rho g V b''n-\frac{\rho g b''}{2c''^{2}}[\sigma(h^{2}-e^{2}c''^{2})+a''^{2}A'+b''^{2}C'+2a''b''B'+2h\sigma(a''s+b''t)]\\
&\qquad\qquad-\rho g[\sigma t(h+c''e)+a''B'+b''C'].
\end{aligned}\right.$$

4. Avant d'examiner aucun cas particulier, nous indiquerons comment on pourrait procéder pour traiter le cas le plus général du

mouvement des corps flottants. Dans ce qui précède on a supposé que l'un des axes principaux $Gz_{,}$ était perpendiculaire au plan de la section MN. Maintenant nous ne supposerons pas que cela ait lieu, et nous emploierons un nouveau système d'axes rectangulaires Gx'', Gy'', Gz'', dont l'un Gz'' sera perpendiculaire au plan MN. Ces nouveaux axes sont fixes dans l'intérieur des corps, et leur position, par rapport aux axes principaux, est connue. Nous désignerons par a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3. les cosinus des angles que font respectivement les nouveaux axes avec les trois axes principaux. L'équation du plan MN, par rapport aux nouveaux axes, sera $z''=e$, et celle du plan M'N', par rapport aux axes principaux, $a''x_1 + b''y_1 + c''z_1 = -h$. Pour avoir l'équation de ce dernier plan rapporté aux nouveaux axes, nous désignerons les nouvelles coordonnées par x'', y'', z'', et nous aurons les formules suivantes qu'il faudra porter dans l'équation du plan M'N',

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a_1x'' + a_2y'' + a_3z'', \\
y_1 &= b_1x'' + b_2y'' + b_3z'', \\
z_1 &= c_1x'' + c_2y'' + c_3z''.
\end{aligned}
$$

L'équation du plan devient par cette substitution

$$-h = x''(a''a_1 + b''b_1 + c''c_1) + y''(a''a_2 + b''b_2 + c''c_2) + z''(a''a_3 + b''b_3 + c''c_3),$$

ou bien

$$-h = \alpha x'' + \text{\char"03B2}y'' + \gamma z'',$$

en désignant par α, β, γ, les coefficients de x'', y'', z''. Connaissant les équations des plans des sections MN, M'N' par rapport aux axes Gx'', Gy'', Gz'', on déterminera, comme nous l'avons vu tout à l'heure, les moments du volume de liquide MNM'N' par rapport à ces mêmes axes. En désignant par X'', Y'', Z'' les coordonnées relatives aux nouveaux axes du centre de gravité de ce volume, on aura

$$V'X'' = -\frac{1}{\gamma}[\sigma s'(h+\gamma e) + \alpha A'' + \beta B''] = T,$$

$$V'Y'' = -\frac{1}{\gamma}[\sigma t'(h+\gamma e) + \alpha B'' + \beta C''] = T',$$

$$V'Z'' = \frac{1}{2\gamma^2}[(h^2 - \gamma^2 e^2)\sigma + \alpha^2 A'' + \beta^2 C'' + 2\alpha\beta B'' + 2h\sigma(\alpha s' + \beta t')] = T'';$$

s', t', u' sont les coordonnées du point G' par rapport aux nouveaux axes; A'', B'', C'' sont les valeurs des intégrales $\iint x''^2 dx'' dy''$, $B = \iint x'' y'' dx'' dy''$, $C'' = \iint y''^2 dx'' dy''$.

Quant aux moments du volume V' relatifs aux axes principaux, ils seront donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
V'X_1 &= V'X''a_1 + V'Y''a_2 + V'Z''a_3 = Ta_1 + T'a_2 + T''a_3,\\
V'Y_1 &= V'X''b_1 + V'Y''b_2 + V'Z''b_3 = Tb_1 + T'b_2 + T''b_3,\\
V'Z_1 &= V'X''c_1 + V'Y''c_2 + V'Z''c_3 = Tc_1 + T'c_2 + T''c_3,
\end{aligned}$$

dans lesquelles X_1, Y_1, Z_1 expriment comme tout à l'heure les coordonnées du centre de gravité du volume V', par rapport aux axes principaux. Il ne reste qu'à substituer ces expressions dans les équations du mouvement de rotation qui deviennent

$$(3)\begin{cases}
C\dfrac{dr}{dt} + (B-A)pq = \varrho g[T(a_1 b'' - b_1 a'') + T'(a_2 b'' - b_2 a'') + T''(a_3 b'' - b_3 a'')],\\
B\dfrac{dq}{dt} + (A-C)rp = \varrho g V a'' n + \varrho g[T(c_1 a'' - a_1 c'') + T'(c_2 a'' - a_2 c'') + T''(c_3 a'' - a_3 c'')],\\
A\dfrac{dp}{dt} + (C-B)qr = -\varrho g V b'' n + \varrho g[T(b_1 c'' - c_1 b'') + T'(b_2 c'' - c_2 b'') + T''(b_3 c'' - c_3 b'')].
\end{cases}$$

Telles sont les équations générales du mouvement de rotation. Quant au mouvement de translation on verra comme plus haut qu'il est déterminé par l'équation

$$M\frac{d^2 h}{dt^2} = -\varrho g \cos\theta'(a''s + b''t + c''u + h),$$

θ' étant l'angle formé par les axes Gz, Gz'', dont l'un est vertical et l'autre perpendiculaire au plan de la section MN; comme on a $\cos\theta' = a''a_3 + b''b_3 + c''c_3$, l'équation précédente devient

$$(4)\qquad M\frac{d^2h}{dt^2} = -\varrho g(a''a_3 + b''b_3 + c''c_3)(a''s + b''t + c''u + h).$$

Il est important de bien sentir la nécessité d'employer les nouveaux axes Gx'', Gy'', Gz'', dont l'un Gz'' est perpendiculaire au plan de la section MN; c'est afin de pouvoir évaluer les moments de la partie MNM'N' par rapport aux axes principaux. En effet, l'évaluation de ces moments suppose que le volume MNM'N' peut être regardé comme un cylindre tronqué dont les génératrices seraient parallèles à l'axe Gz''; or, cette supposition ne serait point permise si l'axe Gz'' n'était point perpendiculaire au plan MN.

Si dans les quatre équations auxquelles nous venons de parvenir, on substituait à la place de p, q, r, a'', b'', c'' leurs valeurs en fonction de θ, ψ, φ, on aurait quatre équations différentielles du second ordre entre les quantités h, θ, ψ, φ, dont la connaissance suffit pour déterminer la position du mobile. Ces équations ne sont intégrables que dans des cas particuliers; mais avant d'en considérer aucun, indiquons comment on peut déterminer les huit constantes qu'amènerait l'intégration; c'est alors que sera complétement résolu le problème général du mouvement des corps flottants.

5. Nous supposerons que le mouvement initial ait été produit par la percussion d'une masse μ animée d'une vitesse u, et qui s'est en même temps réunie à la masse du corps choqué. En ne considérant d'abord que le mouvement de translation, on exprimera que le centre de gravité du mobile se meut à l'origine comme si la masse entière y était réunie et qu'on y transportât la force μu qui résulte de la percussion. Soit τ l'angle que forme la direction de la vitesse u avec l'axe Gz, on déterminera la vitesse initiale du centre de gravité par la relation

$$\varrho V\frac{dh}{dt} = \mu u\cos\tau.$$

d'où l'on déduit $\frac{dh}{dt}=\frac{\mu u \cos \tau}{\varrho V}$. Au moyen de cette valeur on pourra déterminer une des constantes amenées par l'intégration de l'équation (4) combinée avec les équations (3) ; l'autre constante s'obtiendra à l'aide des valeurs initiales de h, θ, ψ, φ.

Au lieu de supposer que la masse choquante μ se réunisse à celle du corps choqué pour ne faire avec elle qu'un seul corps, on peut supposer qu'elle s'en sépare et c'est ce que nous admettrons dans ce qui suit. On démontre qu'en faisant abstraction du frottement qui acccompagne le choc, la percussion est la même que si une partie μ' de la masse choquée qui aurait son centre de gravité sur la normale au point de la surface où a eu lieu le choc, recevait une certaine vitesse u' commune à tous ses points ; la quantité de mouvement $\mu' u'$ se détermine d'après le mouvement du corps choquant et la forme des deux corps élastiques ou non élastiques. Dès-lors si l'on désigne par τ' l'angle fait avec Gz par la partie de la normale dont il s'agit qui est intérieure au corps, on déterminera la vitesse initiale du centre de gravité par l'équation

$$\varrho\, V \frac{dh}{dt}=\mu' u' \cos \tau'.$$

Considérons le mouvement initial de rotation autour du centre de gravité. Ce mouvement qui est produit par la percussion primitive est le même que si le centre de gravité était rendu fixe ; or l'équilibre ayant lieu entre la percussion prise en sens contraire de sa direction et les quantités de mouvement que prennent en réalité les différents points du corps, il s'ensuit que le moment de la percussion par rapport au centre de gravité doit être égal au moment principal de ces quantités de mouvement, et que les moments de ces forces par rapport aux axes principaux qui se coupent au centre de gravité doivent aussi être égaux. Désignons par f la distance du point G à la normale à la surface au point où a eu lieu le choc, le moment de la percussion par rapport à ce point sera $\mu' u' f$, quantité que nous désignerons par K ; appelons ω la vitesse du mobile autour de l'axe instantané à l'origine, α, β, γ, les angles que fait cet axe avec les axes principaux qui se coupent au centre de gravité ; α', β', γ', les angles que fait avec ces mêmes axes la perpendiculaire au plan passant par le point G et par la normale à la surface au point choqué. Les vitesses initiales autour des trois axes principaux sont $\omega\cos\alpha$, $\omega\cos\beta$, $\omega\cos\gamma$, et les moments des quantités de mouvement initiales par rapport à ces axes sont $A\omega\cos\alpha$, $B\omega\cos\beta$, $C\omega\cos\gamma$, A, B, C, représentant toujours les moments d'inertie par rapport aux axes principaux. D'un autre côté, les moments de la percussion par rapport à ces axes sont $K\cos\alpha'$, $K\cos\beta'$, $K\cos\gamma'$. On aura donc les trois relations

$$A\omega\cos\alpha = K\cos\alpha', \quad B\omega\cos\beta = K\cos\beta', \quad C\omega\cos\gamma = K\cos\gamma' ;$$

d'où l'on tire

$$\omega^2 = \frac{K^2\cos^2\alpha'}{A^2} + \frac{K^2\cos^2\beta'}{B^2} + \frac{K^2\cos^2\gamma'}{C^2}.$$

Les angles α', β', γ', étant donnés dans chaque cas, cette dernière formule déterminera la valeur de ω ; en la portant dans les trois équations précédentes, on déterminera $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Comme les quantités $\omega\cos\alpha$, $\omega\cos\beta$, $\omega\cos\gamma$ ne sont autre chose que les valeurs initiales des quantités p, q, r, on pourra à l'aide de ces valeurs et des relations qui lient p, q, r aux quantités θ, ψ, φ, déterminer $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, à l'origine du mouvement, ce qui permettra de déterminer trois des six constantes qui restent à déterminer ; les trois autres s'obtiendront à l'aide des valeurs initiales de θ, ψ, φ.

6. Examinons maintenant quelques cas particuliers. Nous supposerons que le corps est symétrique par rapport à un plan vertical FMIN, qui est aussi celui dans lequel a eu lieu l'impulsion initiale ; toutes les forces accélératrices étant verticales, il est clair que ce plan restera vertical pendant tout le mouvement, de sorte que le corps tournera autour du point G comme autour d'un axe perpen-

diculaire au plan de la section FMIN. Remarquons d'ailleurs que cet axe sera un des axes principaux du corps qui passent par le centre de gravité, à cause de la symétrie du corps par rapport au plan dont il s'agit; par suite les deux autres axes principaux seront situés dans ce plan. Nous supposerons que Gy_1 soit l'axe principal perpendiculaire au plan FMIN; si l'on a eu soin de prendre les axes Gx', Gz' dans ce plan, les axes Gy_1, Gy' se confondront. On aura alors $a = \cos\theta$, $b = 0$, $c = \sin\theta$,

$$\begin{aligned} &a' = 0, \quad b' = 1, \quad c' = 0, \\ &a'' = -\sin\theta, \quad b'' = 0, \quad c'' = \cos\theta, \\ &t = 0, \quad s = k\sin\alpha, \quad u = k\cos\alpha. \end{aligned}$$

en désignant par k la droite GG' et par α l'angle $G'GK$. L'équation (1) deviendra

$$V\frac{d^2h}{dt^2} = -g\varpi\cos\theta\,(k\cos\alpha\cos\theta - k\sin\alpha\sin\theta + h),$$

ou bien en remplaçant h par $-\zeta - k\cos(\theta + \alpha)$, ζ étant la distance du point G' au plan $M'N'$,

$$(5) \qquad V\frac{d^2\zeta}{dt^2} - Vk\sin\alpha\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\varpi\zeta = 0.$$

Pour voir ce que deviennent les équations (2), remarquons que les angles φ, ψ, étant ici égaux à 90°, rendent nulles les expressions de p et r et donnent $q = d\theta$; en outre la quantité $B' = \int\int x_1 y_1 dx_1 dy_1$ est nulle, à cause que la trace du plan FMIN sur la section MN divise celle-ci en deux parties symétriques. Il en résulte que les seconds membres de la première et de la troisième des équations (2) sont nuls, et comme p et r le sont aussi, ces équations deviennent $\frac{dr}{dt} = 0$, $\frac{dp}{dt} = 0$, ce qui n'apprend rien de nouveau. Mais la deuxième des équations (2) devient, en négligeant les termes du second ordre en θ et ζ,

$$B\frac{dq}{dt} = -\rho g V n\theta - \tfrac{1}{2}\rho g\theta\sigma(h^2-e^2) + \rho g[(h+e)\sigma k \sin\alpha - A'\theta];$$

ou bien en rejetant le second terme à cause que

$$h^2 - e^2 = \zeta^2 + k^2\theta^2\sin^2\alpha + 2k\zeta\cos\alpha - 2k\zeta\sin\alpha - 2k^2\theta\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$(6)\qquad B\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\rho g[\theta(Vn + A' + \sigma k^2\sin^2\alpha) + \sigma k\zeta\sin\alpha].$$

Les équations (5) et (6) montrent que les mouvements de rotation et de translation ne sont pas indépendants l'un de l'autre, ils sont intimement liés entre eux. Mais veut-on les rendre indépendants, on n'a qu'à supposer $\alpha = 0$, c'est-à-dire que la droite GH passe en G', les équations deviennent

$$(7)\qquad \frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{g\sigma\zeta}{V} = 0,$$

$$(8)\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\rho g\theta(Vn+A')}{B} = 0.$$

Il est facile d'arriver directement à ces deux dernières équations en supposant le corps symétrique par rapport à la section FMIN qui contient la droite GH, et par rapport à la section passant par la même droite et perpendiculaire à la première, ce qui revient à supposer que GHZ_1 est un des axes principaux qui passent au point G ainsi que la perpendiculaire Gy_1 au plan FMIN. Comme ces nouveaux calculs n'offriraient maintenant aucun intérêt, nous n'insisterons pas davantage à ce sujet; nous nous bornerons à tirer quelques conséquences des équations (7) et (8). Leur intégration n'offre aucune difficulté, on trouve

$$\zeta = \varkappa\cos t\sqrt{\frac{g\sigma}{V}},\quad \theta = \omega\cos t\sqrt{\frac{\rho g(Vn+A')}{B}},$$

χ et ω étant les valeurs initiales de ζ et θ. La première de ces formules montre que le centre de gravité du corps dont la distance au plan MTN' est exprimée par $\zeta + e$ se meut verticalement comme un pendule simple dont la longueur serait $\frac{V}{\sigma}$. La seconde montre que la droite $Gz_{,}$ qui fait avec la verticale Gz' l'angle désigné par θ, exécute des oscillations de part et d'autre de cette verticale à la manière d'un pendule simple dont la longueur serait $\frac{B}{\varrho(Vn + A')}$.

Il est important de remarquer que pour que θ ne croisse pas indéfiniment, c'est-à-dire pour la stabilité du mouvement il faut et il suffit que la quantité $Vn + A'$ soit positive; car si elle était négative, l'angle θ serait exprimé par le cosinus d'une quantité imaginaire, et si l'on convertissait ce cosinus en quantités exponentielles, on trouverait que l'angle θ pourrait croître indéfiniment avec t. Or la quantité n étant positive ou négative selon que le point H se trouve au-dessus ou au-dessous du point G par rapport au plan $x_{,}Gy_{,}$, il en faut conclure que toutes les fois que le centre de gravité du corps est plus bas que celui du volume de liquide qu'il déplace dans l'état d'équilibre, cet équilibre est stable, car des impulsions très petites imprimées au mobile ne peuvent que le faire osciller très peu autour de la position initiale. Mais si le point H est plus bas que le point G l'équilibre pourra bien n'être pas stable; pour qu'il le soit il faut et il suffit que la quantité $Vn + A'$ soit positive; si le contraire avait lieu, on serait sûr de l'instabilité de l'équilibre; il faudra donc, pour chaque corps chercher la valeur de la quantité $Vn + A$ et voir si elle est positive ou négative.

La stabilité de l'équilibre d'un corps flottant ne peut être relative qu'à tel ou tel liquide; si le corps est placé dans un liquide plus dense, le centre de gravité du volume de liquide déplacé s'abaisse relativement à celui du corps, et l'équilibre qui était établi peut fort bien ne plus l'être; mais si l'équilibre est stable quand le corps est plongé dans un liquide pour lequel le point H est plus élevé que le point G, on peut affirmer qu'il est également stable dans un liquide moins dense.

7. Ce que nous venons de dire semble supposer que le corps a une forme particulière en vertu de laquelle il est symétrique par rapport à deux sections passant par GH, perpendiculaires entre elles. Il n'en est pas ainsi, les conclusions précédentes sont générales et donnent la règle qui sert à reconnaître la stabilité ou l'instabilité de l'équilibre d'un corps de forme quelconque flottant dans un liquide.

Pour le démontrer, on s'appuie sur la considération de la somme des forces vives des différents points des corps flottants à une époque quelconque du mouvement. On supposera que le centre de gravité K de la section MN (fig. 3) se trouve sur la droite GH; par ce point K soit mené un plan horizontal qui coupe le plan MN suivant la droite TKT'. Nous désignerons toujours par σ l'aire de la section MN qui est fixe dans l'intérieur du corps, par θ l'angle qu'elle fait avec un plan horizontal, par e, n les distances GK, GH, par ζ la distance du point K au plan M'N' qui est le plan de flottaison, par $d\lambda$ un élément de l'aire σ, et par z, l les distances de cet élément au plan M'N' et à la droite TT'. Nous appellerons en outre u la vitesse d'un élément quelconque du corps dm, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, les composantes de cette vitesse par rapport à trois axes rectangulaires dont l'un (l'axe des z) soit dirigé dans le sens de la pesanteur, Z la force verticale qui sollicite l'élément dm. Les forces perdues par cet élément dans l'instant dt sont $-\frac{d^2x}{dt^2}dm$, $-\frac{d^2y}{dt^2}dm$, $\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)dm$, car les forces accélératrices qui agissent sur le corps étant toutes verticales, leurs composantes parallèles aux axes des x et des y sont nulles. Appliquant le principe des vitesses virtuelles à ces quantités de mouvement perdues qui doivent se faire équilibre, on aura la relation

$$\int\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx+\frac{d^2y}{dt^2}dy+\frac{d^2z}{dt^2}dz\right)dm=\int Zdzdm,$$

ou bien en remarquant que la quantité qui est sous le signe intégral du premier membre est égale à $\frac{1}{2}u^2dm$,

$$\int u^2dm=2\int Zdzdm+c=2\int Zzdm+c,$$

c étant une constante arbitraire qu'on déterminera d'après la position initiale et le mouvement initial du mobile.

La force verticale Z qui sollicite l'élément dm se compose de deux parties pour toute la portion du corps qui est plongée; c'est d'abord la gravité g qui agit sur tous les points du corps, et en second lieu, une force agissant en sens contraire de la pesanteur égale au poids d'un volume de liquide égal au volume de l'élément. En désignant par dv le volume de l'élément, on aura donc pour cette force $gdm - \rho gdv$, et par conséquent,

$$\int Zzdm = \int gzdm - \int \rho gzdv,$$

la première des intégrales du second membre s'étendant au corps tout entier et la seconde à la partie plongée seulement. Si l'on remarque que la distance du point G au plan M'N' est égale à $\zeta + e\cos\theta$, la valeur de la première intégrale sera

$$Mg(\zeta + e\cos\theta) = \rho Vg(\zeta + e\cos\theta),$$

M étant la masse du corps et V le volume MIN primitivement plongé.

Quant à la seconde intégrale, elle se composera de deux parties relatives, l'une au volume V et l'autre au volume compris entre la section MN et le plan de flottaison M'N'. En observant que la distance du point H au plan M'N' est égale à $\zeta + (e - n)\cos\theta$, la partie de cette seconde intégrale relative au volume V sera... $V[\zeta + (e \mp n)\cos\theta]$, quantité qui devant être prise avec le signe — détruit évidemment la première intégrale obtenue, en laissant pour reste $\pm \rho gVn\cos\theta$, le signe + devant être pris quand le point H est au-dessus du point G et le signe — dans le cas contraire. Donc, si nous désignons par ρgk la partie de la seconde intégrale relative au volume MNM'N', nous aurons

$$\int Zzdm = \pm \rho gVn\cos\theta - \rho gk.$$

Pour déterminer la quantité k, nous décomposerons le volume

MNM′N′ en une infinité de cylindres verticaux que nous couperons eux-mêmes par une infinité de plans horizontaux; le volume d'un élément quelconque d'un des cylindres verticaux sera exprimé par $dzd\lambda\cos\theta$ et son moment par rapport au plan M′N′ par $zdzd\lambda\cos\theta$, quantité dont l'intégrale sera $\frac{1}{2}\cos\theta\int z^2d\lambda$, z désignant comme nous l'avons déjà dit la distance de l'élément $d\lambda$ au plan M′N′. Cette quantité z peut d'ailleurs être remplacée par l'expression $\zeta+l\sin\theta$ dans laquelle l distance de l'élément $d\lambda$ à la droite TT′ est une quantité positive ou négative, suivant que cet élément est au-dessous ou au-dessus du plan M″N″; la quantité k deviendra

$$K=\frac{1}{2}\sigma\zeta^2\cos\theta+\zeta\sin\theta\cos\theta\int ld\lambda+\frac{1}{2}\sin^2\theta\cos\theta\int l^2d\lambda,$$

ou en supprimant le second terme qui est nul à cause que le centre de gravité de l'aire σ se trouve sur TT′,

$$K=\frac{1}{2}\sigma\zeta^2\cos\theta+\frac{1}{2}\sin^2\theta\cos\theta\int l^2d\lambda.$$

Donc enfin,

$$\int u^2dm=\pm 2\rho g\,\mathrm{V}n\cos\theta-\rho g\sigma\zeta^2\cos\theta-\rho g\sin^2\theta\cos\theta\int l^2d\lambda+c.$$

c étant une constante arbitraire, ou bien encore en négligeant les termes du troisième ordre en ζ et θ, transposant et comprenant le terme $\pm 2\rho g\mathrm{V}n$ dans la constante arbitraire,

$$\int u^2dm+\rho g\,[\sigma\zeta^2+\theta^2(\int l^2d\lambda\pm \mathrm{V}n)]=c.$$

De cette relation résulte la condition énoncée précédemment pour la stabilité de l'équilibre. En effet, la constante c doit être fort petite puisqu'on la déterminerait à l'aide des valeurs initiales de ζ, θ, u, qui par hypothèse, sont très petites; d'où il suit immédiatement que s'il faut prendre le signe supérieur pour $\mathrm{V}n$, les valeurs de θ et ζ resteront constamment très petites pendant toute la durée du mouvement, car si θ et ζ pouvaient prendre des valeurs considérables, le second terme du premier membre l'emporterait sur la constante c, et la somme des forces vives $\int u^2 dm$ serait égale à une quantité négative, ce qui est absurde. Concluons de là que l'équilibre sera stable toutes les fois que le centre de gravité du corps sera plus bas que celui du volume de liquide déplacé. S'il faut prendre le signe inférieur pour Vn ou si le centre de gravité du corps est plus élevé que celui du volume du liquide déplacé, l'équilibre n'est nécessairement ni stable, ni instable. Il sera stable si pendant toute la durée du mouvement la quantité $\int l^2 d\lambda - Vn$ reste positive, ou si la plus petite valeur que puisse avoir $\int l^2 d\lambda$ est plus grande que Vn; il pourra être instable si pendant le mouvement la quantité $\int l^2 d\lambda$ devient moindre que Vn, parce que le second terme du premier membre de la relation trouvée pourra rester fort petit, bien que ζ et θ prennent des valeurs considérables. Il faudra donc pour chaque corps, chercher la plus petite valeur de la quantité $\int l^2 d\lambda$, qui est variable avec la position de la droite TT' dans le plan de l'aire MN, et voir si elle est plus grande ou moindre que Vn. Pour un vaisseau, le minimum de la quantité $\int l^2 d\lambda$, est relatif à la ligne menée dans le plan de flottaison qui va de la proue à la poupe; on partagera donc la section à fleur d'eau en éléments infiniment petits, on multipliera chacun d'eux par le carré de sa distance à la ligne dont il s'agit, et l'on fera la somme de tous ces produits par l'intégration. Si cette somme est supérieure au produit du volume d'eau déplacé multiplié par la distance du centre de gravité de ce volume au centre de gravité du corps, on en conclura que l'équilibre du vaisseau est stable, c'est-à-dire que de très petites impulsions ne peuvent le faire chavirer, soit que le centre de gravité du volume déplacé soit plus haut ou plus bas que celui du corps.

L'équation de laquelle on a déduit ces dernières conséquences suppose que le centre de gravité de la section MN se trouve sur la droite GH; aussi l'on ne devra pas s'étonner que ces conséquences puissent ne pas avoir lieu lorsque cette condition ne sera pas remplie. Or soit toujours K le point de rencontre de GH avec le plan MN, et désignons la distance du centre de gravité de cette section à la droite TT' par δ, quantité que nous regarderons comme positive ou négative selon que ce centre de gravité sera plus bas ou plus élevé que le point K. Il est clair que la distance d'un élément $d\lambda$ de la section MN à la droite TT′ se composera de la quantité δ positive ou négative et d'une quantité l' égale à la distance de cet élément à la parallèle à TT′ menée par le centre de gravité de la section. L'on aura alors

$$\int l d\lambda = \int l' d\lambda + \int \delta d\lambda = \sigma\delta,$$

la quantité $\int l' d\lambda$ étant nulle. Par conséquent la quantité K deviendra

$$K = \tfrac{1}{2}\sigma\zeta^2 \cos^2\theta + \sigma\delta\zeta \sin\theta \cos\theta + \tfrac{1}{2}\cos\theta \sin^2\theta \int l^2 d\lambda,$$

ou bien en développant les sinus et cosinus en fonction de l'arc et négligeant les termes du troisième ordre en θ, ζ,

$$K = \tfrac{1}{2}\zeta^2\sigma + \sigma\delta\zeta\theta + \tfrac{1}{2}\theta^2 \int l^2 d\lambda.$$

Enfin l'on aura

$$\int u^2 dm + \rho g[2\sigma\delta\zeta\theta + \sigma\zeta^2 + \theta^2(\int l^2 d\lambda \pm Vn)] = c.$$

Cette équation différant de celle trouvée plus haut par le terme $2\rho g\sigma\delta\zeta\theta$, qui peut être positif ou négatif, on ne peut plus dire que l'équilibre est nécessairement stable lorsque le centre de gravité du corps est plus bas que celui du volume de liquide déplacé, à moins toutefois que la quantité δ ne soit très petite, ou que le centre de gravité de la section MN ne soit très voisin de la droite TT′.

8. Jusqu'ici nous avons supposé que l'impulsion initiale imprimée au mobile était fort petite, ce qui nous a permis de négliger les termes du second ordre en ζ et θ. Nous allons examiner un cas particulier où l'impulsion initiale sera quelconque, et où il ne sera pas permis, par conséquent, de regarder le volume MNM′N′ comme un cylindre tronqué; c'est le cas d'une sphère hétérogène qui flottait d'abord en équilibre à la surface d'un liquide, et à laquelle on a fait éprouver

une perturbation quelconque. Comment se mouvra le centre de gravité, et quel sera le mouvement de rotation de la sphère autour de ce point?

Les notations seront les mêmes que précédemment, seulement nous désignerons par V' le volume MFN, fig. 4, et par V'' le volume M'FN', par r le rayon de la sphère, par ξ la distance du centre au plan M'N' et par f la distance de ce centre à la section MN. Il faut remarquer que la droite GH étant perpendiculaire au plan du petit cercle MN, passe au centre de ce cercle et à celui de la sphère. Le mouvement vertical du centre de gravité se déterminera à l'aide de l'expression du volume $V'-V''$, car l'équation de ce mouvement serait, en observant que la distance du point G au plan M'N' est égale à $\xi+(e-f)\cos\theta$,

$$\varrho V\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}-(e-f)\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}-(e-f)\cos\theta\frac{d\theta^2}{dt^2}\right)=-\varrho g\,(V'-V'').$$

Or, la détermination des volumes V', V'', en fonction de f et de ξ se fait sans aucune difficulté; ce sont des calottes sphériques dont l'expression est connue, on trouvera

$$V'=\frac{1}{3}\pi(r-f)^2(2r+f),\quad V''=\frac{1}{3}\pi(r-\xi)^2(2r+\xi).$$

Enfin, l'équation du mouvement du centre o sera

$$(a)\quad \varrho V\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}-(e-f)\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}-(e-f)\cos\theta\frac{d\theta^2}{dt^2}\right)=\frac{1}{3}\pi\varrho g[(r-\xi)^2(2r+\xi)-(r-f)^2(2r+f)].$$

Les équations du mouvement de rotation autour du centre de gravité s'obtiendront à l'aide des moments des différentes forces qui sollicitent le corps par rapport aux axes principaux qui passent au point G. D'abord les moments de la force due à la pression du volume de liquide MIN seront : zéro par rapport à Gz_1, et $\rho gn\,Va''$, $-\rho gnVb''$ par rapport aux axes Gy_1, Gx_1, car cette force est égale à ρgV et les coordonnées de son point d'application H sont $x_1=0, y_1=0, z_1=n$.

Il reste à trouver les moments de la force provenant de la pression du volume de liquide MNM'N' $=$ V'—V'', et d'abord il faut chercher les coordonnées des centres de gravité des volumes V', V'', pour en déduire celles du centre de gravité du volume V'—V''. Désignons par Z_1 la distance au point G du centre de gravité du volume V' qui se trouve sur Gz_1, on trouvera par une intégration très facile,

$$z_1 = \frac{1}{4V'} \pi (r^2 - f^2)^2 + e - f.$$

De même la distance au point o du centre de gravité du volume V'' est $\frac{1}{4V''} \pi (r^2 - \xi^2)^2$; si donc on remarque que les coordonnées du point o, par rapport aux axes Gx, Gy, Gz sont $(e-f)c$, $(e-f)c'$ $(e-f)c''$, on aura pour celles du centre de gravité du volume V'' par rapport aux mêmes axes

$$(e-f)c,\ (e-f)c',\ (e-f)c'' + \frac{\pi}{4V''}(r^2 - \xi^2)^2.$$

Par suite, les coordonnées de ce centre de gravité, par rapport aux axes principaux, seront

$$x_2 = (e-f)ca + (e-f)c'a' + (e-f)c''a'' + \frac{\pi a''}{4V''}(r^2 - \xi^2)^2,$$

$$y_2 = (e-f)cb + (e-f)c'b' + (e-f)c''b'' + \frac{\pi b''}{4V''}(r^2 - \xi^2)^2,$$

$$z^2 = (e-f)c^2 + (e-f)c'^2 + (e-f)c''^2 + \frac{\pi c''}{4V''}(r^2 - \xi^2)^2,$$

ou bien, en observant que $ca + c'a' + c''a'' = 0$, $c^2 + c'^2 + c''^2 = 1$,

$$x_2 = \frac{\pi a''}{4V''}(r^2 - \xi^2)^2,\ y_2 = \frac{\pi b''}{4V''}(r^2 - \xi^2)^2,\ z_2 = e - f + \frac{\pi c''}{4V''}(r^2 - \xi^2)^2.$$

Maintenant que nous connaissons les coordonnées des centres de gravité des volumes V', V'', on en conclura les coordonnées X', Y', Z', du centre de gravité du volume V'—V''

$$X' = \frac{-V''x_2}{V' - V''}\ Y' = \frac{-V''y_2}{V' - V''}\ Z' = \frac{V'z_1 - V''z_2}{V' - V''},$$

ou bien en remplaçant z_1, x_2, y_2, z_2, par leurs valeurs

$$
\begin{aligned}
(V'-V'')\,X' &= -\frac{\pi a''}{4}(r^2-\xi^2)^2,\\
(V'-V'')\,Y' &= -\frac{\pi b''}{4}(r^2-\xi^2)^2,\\
(V'-V'')\,Z' &= (V'(e-f) + \frac{\pi}{4}(r^2-f^2)^2 - V''(e-f) - \frac{\pi c''}{4}(r^2-\xi^2)^2\\
&= (V'-V'')(e-f) + \frac{\pi}{4}(r^2-f^2)^2 - \frac{\pi c''}{4}(r^2-\xi^2)^2.
\end{aligned}
$$

On remarque aussi que les composantes de la force $\rho g(V'-V'')$, par rapport aux axes principaux sont

$$\rho g a''(V'-V''),\quad \rho g b''(V'-V''),\quad \rho g c''(V'-V''),$$

par suite les moments de cette force par rapport à ces axes, seront : zéro par rapport à Gz_1 et

$$\rho g a''(e-f)\ (V'-V'') + \rho g\ \frac{\pi a''}{4}(r^2-f^2)^2 \text{ par rapport à } Gy_1,$$

$$-\rho g b''(e-f)\ (V'-V) - \rho g\ \frac{\pi b''}{4}\ (r^2-f^2)^2 \text{ par rapport à } Gx_1.$$

Donc enfin, l'on aura pour les équations du mouvement de rotation autour du point G

$$
\begin{aligned}
&Cdr + (B-A)pqdt = 0,\\
&Bdq + (A-C)rpdt = \rho g a''\left[Vn + (e-f)(V'-V'') + \frac{\pi}{4}(r^2-f^2)^2\right]dt,\\
&Adp + (C-B)qrdt = -\rho g b''\left[Vn + (e-f)(V'-V'') + \frac{\pi}{4}(r^2-f^2)^2\right]dt,
\end{aligned}
$$

On peut les simplifier en remarquant que la quantité $Vn + V'(e-f) + \frac{\pi}{4}(r^2-f^2)^2$ est la somme des moments du volume V, V' par rapport au point G, et qu'elle est par conséquent égale au volume de la sphère $V+V'$ multiplié par la distance de son centre au point G, ou à $(V+V')(e-f)$. Par où l'on voit que les équations précédentes deviendront

$$(b)\ \begin{cases} Cdr + (B-A)\,pqdt = 0, \\ Bdq + (A-C)\,rpdt = \rho g a''\,(V+V'-V'')\,(e-f)\,dt, \\ Adp + (C-B)\,qrdt = -\,\rho g b''\,(V+V'-V'')\,(e-f)\,dt. \end{cases}$$

La quantité $V+V'-V''$ qui représente le volume plongé étant une fonction de ξ, il s'ensuit que le mouvement de rotation dépend du mouvement de translation, et réciproquement l'équation (a) renfermant θ et ξ, il en résulte que le mouvement de translation dépend du mouvement de rotation.

Les équations (b) étant multipliées par c'', b'', a'', et ensuite ajoutées, donnent

$$0 = [c''dr + (a''q - b''p)rdt]C + [b''dq + (c''p - a''r)qdt]B + [a''dp + (b''r - c''q)pdt]A,$$

ou bien, en remplaçant les quantités $(a''q-b''p)dt$, $(c''p-a''r)dt$, $(b''r-c''q)dt$ par dc'', db'', da'',

$$Cdrc'' + Bdqb'' + Adpa'' = 0,$$

et en intégrant et désignant par l une constante arbitraire

$$Crc'' + Bqb'' + Apa'' = l.$$

Comme les quantités Ap, Bq, Cr, expriment les moments des quantités de mouvement du mobile par rapport aux axes principaux, il s'ensuit que la quantité $Crc''+Bqc''+Apa''$ exprime le moment de ces quantités de mouvement par rapport à l'axe vertical Gz, et la dernière équation prouve que ce moment est constant.

9. Examinons quelques cas particuliers, et d'abord celui où $e=f$, c'est-à-dire celui où le centre de gravité de la sphère coïncide avec son centre; les mouvements de translation et de rotation deviennent

indépendants l'un de l'autre et se déterminent séparément. D'abord l'équation (a) devient

$$V\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{1}{3}\pi g\left[(r-\xi)^2(2r+\xi)-(r-f)^2(2r+f)\right]$$
$$= \frac{1}{3}\pi g\left(\frac{1}{4}\xi^4 - \frac{3}{2}r^2\xi^2 + 3r^2f\xi - f^3\xi\right) + \chi,$$

χ étant une constante arbitraire qui se déterminera d'après la vitesse initiale et la position du centre de gravité. Cette équation donnera dt en fonction de ξ et $d\xi$ sous la forme $dt = d\xi F d\xi$, et l'intégration de cette équation fera connaître t en fonction de ξ, et par suite ξ en fonction de t.

Quant aux équations (b) elles deviennent,

$$\begin{aligned} Cdr + (B-A)\,pq\,dt &= 0,\\ Bdq + (A-C)\,rp\,dt &= 0,\\ Adp + (C-B)\,qr\,dt &= 0. \end{aligned}$$

Si on les ajoute après les avoir multipliées par r, q, p, on aura $Crdr + Bqdq + Apdp = 0$, et en intégrant et désignant par h une constante arbitraire,

$$Cr^2 + Bq^2 + Ap^2 = h.$$

Il faut maintenant remarquer que si l'on fait abstraction de tout frottement, la percussion initiale est normale à la surface de la sphère, et passe conséquemment à son centre, d'où il résulte qu'à l'origine le mouvement de rotation autour du centre de gravité est nul ainsi que p, q, r. Donc la constante h est nulle, et la sphère n'aura pendant toute la durée du mouvement aucun mouvement de rotation; c'est d'ailleurs ce qu'on pouvait prévoir puisque la force verticale qui résulte de la pression du liquide, passe constamment au centre de la sphère.

Considérons encore le cas où le centre de gravité serait un point fixe, l'axe Gz_1 étant un axe de figure du corps. La quantité ξ est alors constante, et il en est de même de la quantité.........

$(e-f)(V+V'-V'')$ que nous désignerons par γ. Les équations (*b*) deviendront, en remarquant que $A=B$ puisque Gz_1 est un axe de figure,

$$(c)\quad \begin{cases} Cdr=0, \\ Adq+(A-C)\,rpdt=\rho g\gamma a''dt, \\ Adp+(C-A)\,qrdt=-\rho g\gamma b''dt. \end{cases}$$

De la première on déduit que la vitesse de rotation autour de l'axe de figure est constante; nous la désignerons par λ.

Multipliant les équations (*c*) par c'', b'', a'', et les ajoutant, il vient

$$Cdrc''+Ad.qb''+Ad.pa''=0,$$

ou en intégrant et remplaçant a'', b'', c'', par leurs valeurs en fonction de θ et φ,

$$(d)\qquad C\lambda\cos\theta-A(p\sin\theta\sin\varphi+q\sin\theta\cos\varphi)=\mu,$$

μ étant une constante arbitraire qui exprime le moment des quantités de mouvement du mobile par rapport à l'axe vertical Gz. Ce moment est donc constant, mais il n'en est pas de même des moments relatifs aux deux autres axes Gx, Gy.

Les deux dernières équations (*c*) étant ajoutées après qu'on les a multipliées respectivement par q,p, donnent, en ayant soin de mettre pour a'', b'', leurs valeurs,

$$A(pdp+qdq)=\rho g\gamma(p\sin\theta\cos\varphi-q\sin\theta\sin\varphi)\,dt,$$

ou bien en remarquant que la substitution des valeurs de p et q dans le second membre, donne $-\sin\theta\, d\theta=(p\sin\theta\cos\varphi-q\sin\theta\sin\varphi)dt$,

$$A(pdp+qdq)=-\rho g\gamma\sin\theta\, d\theta.$$

En intégrant et désignant par h une constante arbitraire,

$$(e)\qquad A(p^2+q^2)=2\rho g\gamma\cos\theta+h.$$

Enfin, si dans les équations (*d*), (*e*), on met pour p et q leurs valeurs,

4..

l'on obtiendra

$$(f) \quad \begin{cases} C\lambda \cos\theta - A \sin^2\theta \dfrac{d\psi}{dt} = \mu, \\ A\left(\sin^2\theta \dfrac{d\psi^2}{dt^2} + \dfrac{d\theta^2}{dt^2}\right) = 2\rho g\gamma \cos\theta + h, \end{cases}$$

à quoi il faut joindre l'équation

$$(g) \qquad d\varphi = \lambda dt + \cos\theta\, d\psi,$$

déduite de la relation $rdt = d\varphi - \cos\theta\, d\psi$.

Les équations (f), (g) serviront à déterminer $d\psi$, $d\varphi$, dt en fonction de θ et $d\theta$, de sorte que chacune de ces quantités se présentera sous la forme $F(\theta)\, d\theta$. L'intégration des nouvelles formules fera connaître ψ, φ, t en fonction de θ, et de nouvelles constantes arbitraires qu'on déterminera d'après les valeurs initiales de θ, φ, ψ. Quant aux constantes λ, μ, h, on les déterminera d'après la direction primitive de l'axe $Gz_{\prime}$ et d'après les moments des quantités de mouvement initiales par rapport aux axes principaux. Si l'on suppose que l'angle φ soit nul à l'origine, et que l'angle θ soit égal à α, l'on aura $a'' = 0$, $b'' = -\sin\alpha$, $c'' = \cos\alpha$; et si l'on désigne par ε, ε', ε'', les moments des quantités de mouvement initiales, on aura $\varepsilon'' = C\lambda$, d'où l'on déduira la valeur de la constante λ. Le moment de ces mêmes quantités de mouvement, par rapport à l'axe vertical Gz, est égal à $\varepsilon a'' + \varepsilon' b'' + \varepsilon'' c'' = -\varepsilon' \sin\alpha + \varepsilon'' \cos\alpha$; par conséquent, on a $\mu = -\varepsilon' \sin\alpha + \varepsilon'' \cos\alpha$, formule qui donne la valeur de la constante μ. Enfin, le moment principal des quantités de mouvement initiales est égal à $\sqrt{A^2p^2 + A^2q^2 + C^2r^2}$ ou bien à $\sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + C^2r^2}$; donc on a $A^2(p^2 + q^2) = \varepsilon^2 + \varepsilon'^2$, ou bien en mettant à la place de $A(p^2 + q^2)$ la valeur donnée par l'équation (e), ...

$2\rho g\gamma \cos\alpha + h = \frac{1}{A}(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2)$, d'où l'on déduira la valeur de la constante h.

10. Nous venons de considérer le mouvement de rotation d'un corps de forme sphérique autour de son centre; supposons maintenant qu'une sphère attachée à l'extrémité d'une tige dont la masse est né-

gligeable relativement à la sienne, ne puisse prendre qu'un mouvement de rotation autour d'un axe horizontal; c'est un pendule composé dont on sait déterminer le mouvement dans le vide ou dans un milieu résistant; proposons-nous de déterminer le mouvement de ce pendule en supposant que la sphère plonge en partie dans un liquide pesant; nous ferons abstraction, comme nous l'avons fait jusqu'ici, du mouvement du liquide; en outre, la sphère sera supposée homogène.

Par le centre C de la sphère (fig. 5) on mène un plan perpendiculaire à l'axe horizontal zz', et l'on prend pour axes coordonnés les droites Ox, Oy dont l'une horizontale et l'autre verticale, comprises dans ce plan; on appellera r le rayon de la sphère, h la distance OH, l la longueur OC, θ l'angle COx, ρ la densité du liquide; on désignera par V un volume de liquide dont le poids soit égal à celui de la sphère, et par V′ le volume MIN qui est plongé; la masse de la sphère est alors exprimée par ρV. Nous supposerons que la sphère ne soit plongée qu'en partie, et pour cela il faut que h soit moindre que $l+r$, mais plus grand que $l-r$.

La force verticale qui sollicite le corps est une force passant par son centre, qui est la différence entre le poids de la sphère et la pression du liquide; elle est donc égale à $\rho g(V-V')$, et son moment par rapport à l'axe Ox est égal à $\rho g(V-V').l\sin\theta$. On conclut de là que l'équation du mouvement de rotation de la sphère est

$$\rho V\left(l^2+\frac{2}{5}r^2\right)\frac{d^2\theta}{dt^2}+\rho g l(V-V')\sin\theta=0,$$

le coefficient de $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ exprimant le moment d'inertie de la sphère par rapport à l'axe de rotation. Le volume V′ est une fonction de θ qui s'obtiendra à l'aide de la distance CK ou LH; comme on a évidemment $LH=l\cos\theta-h$, par suite $KI=r-h+l\cos\theta$, le volume V′ est égal, d'après une formule trouvée précédemment, à $\frac{1}{3}\pi(r-h+l\cos\theta)^2(2r+h-l\cos\theta)$, il vient, en substituant cette expression dans l'équation précédente,

$$0=\rho V\left(l^2+\frac{2}{5}r^2\right)\frac{d^2\theta}{dt^2}+\rho g l\sin\theta\left[V-\frac{1}{3}\pi(r-h+l\cos\theta)^2(2r+h-l\cos\theta)\right].$$

Multiplions le premier membre par $d\theta$; nous aurons en intégrant, et supposant nulle la vitesse initiale,

$$(\alpha)\ \frac{1}{2}\mathrm{V}\frac{d\theta^2}{dt^2}\left(l^2+\frac{2}{5}r^2\right)+gl\int\sin\theta\left[\mathrm{V}-\frac{1}{3}\pi(r-h+l\cos\theta)^2(2r+h-l\cos\theta)\right]=0,$$

l'intégrale qui forme le second terme devant être prise depuis la valeur initiale de θ, $\theta=\alpha$ jusqu'à θ. Cette intégrale s'obtient sans difficulté; elle dépend des intégrales suivantes:

$$\int\sin\theta\cos\theta d\theta=\frac{1}{2}\sin^2\theta,\int\sin\theta\cos^2\theta d\theta=-\frac{1}{3}\cos^3\theta,\int\sin\theta\cos^3\theta d\theta=\frac{1}{4}\cos^4\theta.$$

Sans nous arrêter à une substitution qui n'offre pas d'intérêt, supposons que la valeur initiale α soit très petite, et qu'en outre le poids du corps l'emporte constamment sur la pression du liquide, ce qui arrivera si le volume V' est moindre que V lorsque le pendule est dans la position verticale: dans ce cas la sphère ne fera que de très petites oscillations autour de la verticale Ox, et le volume de liquide déplacé pourra être regardé comme constant et égal à

$$\frac{1}{3}\pi(r-h+l)^2\ (2r+h-l),$$

qui correspond à $\theta=0$. L'on obtient alors

$$0=\frac{1}{2}\varrho\mathrm{V}(l^2+\frac{2}{5}r^2)\frac{d\theta^2}{dt^2}+\varrho gl(\cos\alpha-\cos\theta)\left[\mathrm{V}-\frac{1}{3}\pi(r-h+l)^2(2r+h-l)\right],$$

ou bien

$$0=\frac{d\theta^2}{dt^2}+2g(\cos\alpha-\cos\theta)\left[\frac{l}{l^2+\frac{2}{5}r^2}-\frac{\pi l(r-h+l)^2\ (2r+h-l)}{3\mathrm{V}\left(l^2+\frac{2}{5}r^2\right)}.\right]$$

On reconnaît là l'équation d'un pendule simple dont la longueur serait égale à l'unité divisée par la quantité qui multiplie $2(\cos\alpha-\cos\theta)$; la longueur de ce pendule sera plus ou moins grande suivant la valeur de h, le minimum et le maximum s'obtiendront en égalant à zéro le coefficient différentiel de la quantité......

$(r-h+l)^2(2r+h-l)$ pris par rapport à h, ce qui donne

$$(r-h+l)^2-2(r-h+l)(2r+h-l)=0,$$

équation à laquelle on peut satisfaire en posant $r-h+l=0$ ou $l-h-r=0$, d'où $h=l+r$, ou bien $h=l-r$. La première valeur de h correspond à la plus petite longueur du pendule simple; et en effet, la sphère est tout entière en dehors du liquide, et elle oscille comme dans le vide. La seconde valeur correspond au cas où la sphère serait entièrement plongée dans le liquide, et où par conséquent les oscillations se font le plus lentement.

On remarquera aussi que la longueur du pendule simple est d'autant plus grande que V est plus petit, de sorte que les oscillations sont d'autant moins rapides que le liquide est plus dense.

Nous avons supposé que le poids du corps l'emportait toujours sur la pression du liquide auquel cas θ reste toujours très petit; si au contraire la pression du liquide l'emportait, le pendule n'oscillerait plus autour de la verticale; la sphère s'élèverait d'abord d'un mouvement accéléré; mais comme à mesure qu'elle s'élève la partie plongée diminue, il y a une position où le poids du corps devient égal à la pression du liquide; au-delà de cette position le poids du corps devient prépondérant et la vitesse diminue jusqu'à devenir nulle; puis le pendule passe de nouveau par les mêmes positions en reprenant les premières vitesses. Si le plus grand écart de la sphère est assez petit pour qu'on puisse négliger les puissances de θ supérieures à la quatrième, on pourra déterminer approximativement le point le plus élevé qu'atteint le pendule, en égalant à zéro l'intégrale contenue dans l'équation (α) et y remplaçant $\cos\theta$ par $1-\frac{\theta^2}{2}+\frac{\theta^4}{24}$, $\cos\alpha$ par $1-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^4}{24}$, $\sin\theta$ par $\theta-\frac{\theta^3}{6}$; on verra que $\theta^2-\alpha^2$ sera facteur commun à tous les termes, et qu'en le supprimant on obtient une équation qui donne facilement la valeur de $\theta^2+\alpha$, par suite celle de θ qui correspond à la position la plus élevée du pendule.

11. Dans tout ce qui précède, nous avons fait abstraction du mou-

vement du liquide; nous ne l'avons considéré que dans son effet hydrostatique sur le corps qui y est plongé. Mais, outre l'effet hydrostatique, il y a un effet dynamique dont il faut tenir compte si l'on veut résoudre d'une manière complète le mouvement des corps flottants; c'est surtout quand le mouvement du corps est rapide, ou bien quand le corps a été écarté considérablement de la position initiale de l'équilibre, qu'il est nécessaire d'avoir égard au mouvement du liquide : voilà pourquoi ce que nous avons dit jusqu'ici, pour être peu éloigné de la vérité, suppose que l'écart initial est très petit. Si la loi de la résistance des fluides était connue, on pourrait évaluer la résistance qu'un liquide oppose à un corps flottant, et le problème du mouvement des corps flottants se trouverait résolu dans toute sa généralité. Pour obtenir cette loi, on a assimilé la résistance des fluides à une série de chocs exercés par les molécules du fluide sur le corps qui s'y meut, sans avoir égard à l'action des molécules les unes sur les autres, ce qui est contraire à la réalité. On trouve ainsi que la résistance en un point de la surface du corps est proportionnelle au carré de la vitesse en ce point, à la densité du fluide et à l'étendue de l'élément de la surface. Cette loi est contredite par l'expérience, qui prouve que la résistance d'un fluide sur un pendule est proportionnelle à la simple vitesse dans le cas des oscillations très petites. Notre but n'étant pas ici de tenir compte du mouvement du liquide relativement à un corps flottant, nous nous bornerons à considérer un cas particulier fort simple, en supposant la résistance du milieu proportionnelle au carré de la vitesse.

Le corps que nous considérons (fig. 6) est un pendule mobile autour d'un axe horizontal zz' et formé d'une tige très mince terminée par un cylindre droit dont les arètes sont parallèles à l'axe de rotation ; le cylindre est homogène, et plonge dans un liquide dont la densité est ρ et dont la distance à l'axe est égale à h. Comme dans le problème précédent, on prend pour axes coordonnés l'axe zz' et deux axes Oy, Ox, l'un horizontal, l'autre vertical; l'angle Cox, le rayon de la base du cylindre, sa hauteur et la longueur Co seront désignés par θ, r, ω, l. Il est facile de voir que le volume de la partie plongée est égal à

$$\omega\left[\frac{\pi r^2}{2}+(l\cos\theta-h)\sqrt{r^2-(l\cos\theta-h)^2}+r^2\text{arc sin}\,\frac{l\cos\theta-h}{r}\right].$$

Il suffit d'observer que c'est un prisme dont la hauteur est ω, et dont la base est un segment de cercle; or on trouve aisément pour l'aire d'un segment de cercle dont la corde est distante du centre d'une quantité x

$$\frac{\pi r^2}{2}+x\sqrt{r^2-x^2}+r^2\,\text{arc sin}\,\frac{x}{r};$$

et d'ailleurs cette quantité x est ici égale à $CK=l\cos\theta-h$. Nous désignerons par ρV la masse du cylindre; son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation sera $\rho V(l^2+\frac{1}{2}r^2)$; la somme des moments par rapport à ce même axe du poids du corps et de la pression verticale du liquide est égale à

$$-l\sin\theta\times\rho g\left[V-\frac{\omega\pi r^2}{2}-\omega(l\cos\theta-h)\sqrt{r^2-(l\cos\theta-h)^2}-\omega r^2\text{arcsin}\,\frac{l\cos\theta-h}{r}\right].$$

Si donc nous désignons par K la somme des moments des forces provenant de la résistance du liquide, nous aurons pour l'équation du mouvement du pendule

$$0=\frac{d^2\theta}{dt^2}\rho V\left(l^2+\frac{1}{2}r^2\right)+\left[V-\frac{\pi\omega r^2}{2}-\omega(l\cos\theta-h)\sqrt{r^2-(l\cos\theta-h)^2}-\omega r^2\text{arcsin}\frac{l\cos\theta-h}{r}\right]-K.$$

Tout se réduit à déterminer la quantité K. Pour cela, on remarquera que la partie du corps correspondante à MIR′ est la seule qui éprouve l'effet de la résistance du liquide, et cette partie de la surface peut être décomposée en une infinité de rectangles ayant pour bases les éléments de la circonférence de la base d'un cylindre et pour hauteur celle du cylindre; un quelconque de ces rectangles aura pour expression $\omega\sqrt{dx^2+dy^2}$, et l'on observera que la résistance du liquide est la même dans toute l'étendue de ce rectangle. Soit T un point quelconque de l'arc MIR′, joignons-le au point O, menons TH perpendiculaire à oT et enfin le rayon TC qui est normal à la surface. C'est suivant la droite TH que s'exerce la résistance du liquide, qui est exprimée par

$$\rho\omega\sqrt{dx^2+dy^2}\,(x^2+y^2)\,\frac{d\theta^2}{dt^2};$$

mais cette force ne produit pas tout son effet, elle se décompose parallèlement et perpendiculairement à la surface; la composante parallèle ne peut produire qu'un frottement dont nous faisons abstraction, et la seconde est égale à

$$\rho\omega\sqrt{dx^2+dy^2}\,(x^2+y^2)\cos^2\varepsilon\,\frac{d\theta^2}{dt^2},$$

en désignant par ε l'angle UTH. Il ne faut pas oublier que les coordonnées x, y doivent satisfaire à l'équation du cercle qui est

$$(x-l\cos\theta)^2+(y-l\sin\theta]^2=r^2,$$

$l\cos\theta$ et $l\sin\theta$ sont les coordonnées du centre de ce cercle. Il faut maintenant déterminer $\cos\varepsilon$; on remarquera que les coefficients de la variable x dans les équations des droites OT, CT sont $\frac{y}{x}$, $\frac{y-l\sin\theta}{x-l\cos\theta}$, celui de x dans l'équation de la droite TH est $-\frac{x}{y}$. Donc, en vertu d'une formule connue,

$$\tang\varepsilon=\frac{-\frac{x}{y}-\frac{y-l\sin\theta}{x-l\cos\theta}}{1-\frac{x(y-l\cos\theta)}{y(x-l\cos\theta)}}=\frac{l(x\cos\theta+y\sin\theta)-x^2-y^2}{l(x\sin\theta-y\cos\theta)},$$

d'où

$$\cos\varepsilon=\frac{l(x\sin\theta-y\cos\theta)}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+y^2+l^2-2l(x\cos\theta+y\sin\theta)}}.$$

On observera aussi que la tangente de l'angle TUx étant égale à

$$\frac{y - l\sin\theta}{x - l\cos\theta},$$

on aura pour le sinus de cet angle

$$\frac{y - l\sin\theta}{\sqrt{x^2 + y^2 + l^2 - 2l(x\cos\theta + y\sin\theta)}}$$

et pour le cosinus

$$\frac{x - l\cos\theta}{\sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}}.$$

D'où il suit que les composantes parallèles aux axes de la résistance normale à la surface au point T sont

$$X = \varrho\omega l^2\,\frac{d\theta^2}{dt^2}\cdot\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}\,(x\sin\theta - y\cos\theta)^2(x - l\cos\theta)}{[x^2 + y^2 + l^2 - 2l\,(x\cos\theta + y\sin\theta)]^{\frac{3}{2}}},$$

$$Y = \varrho\omega l^2\,\frac{d\theta^2}{dt^2}\cdot\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}\,(x\sin\theta - y\cos\theta)^2\,(y - l\sin\theta)}{[x^2 + y^2 + l^2 - 2l\,(x\cos\theta + y\sin\theta)]^{\frac{3}{2}}}.$$

Le moment de cette force par rapport à l'axe de rotation, sera

$$Yx - Xy = \varrho\omega l^3\,\frac{d\theta^2}{dt^2}\cdot\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}\,(y\cos\theta - x\sin\theta)^3}{[x^2 + y^2 + l^2 - 2l(x\cos\theta + y\sin\theta)]^{\frac{3}{2}}}.$$

Enfin, l'intégrale de cette quantité, prise entre des limites convenables donnera la quantité k et l'équation du pendule sera

$$0 = \varrho V(l^2 + \tfrac{1}{2}r^2)\frac{d^2\theta}{dt^2} + \varrho g l\sin\theta\left[V - \frac{\pi\omega r^2}{2} - \omega(l\cos\theta - h)\sqrt{r^2 - (l\cos\theta - h)^2} - \omega r^2\,\mathrm{arc\,sin}\frac{l\cos\theta - h}{r}\right]$$

$$+ \varrho\omega l^3\,\frac{d\theta^2}{dt^2}\int\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}\,(y\cos\theta - x\sin\theta)^3}{[x^2 + y^2 + l^2 - 2l(x\cos\theta + y\sin\theta)]^{\frac{3}{2}}}.$$

On intégrera depuis l'x du point M jusqu'à l'x du point R'. Or l'x

du point M est égal à

$$l \sin \theta - \sqrt{r^2 - (l \cos \theta - h)^2},$$

et l'x du point R' est égal à

$$(l + r) \sin \theta.$$

On voit, d'après la forme de l'équation précédente, combien doit être longue et compliquée la solution complète du mouvement des corps flottants, même dans les cas les plus simples.

Vu et approuvé par la Faculté des Sciences,

Baron THÉNARD.

27 juin 1837.

Permis d'imprimer,

L'inspecteur général des Études, chargé de l'administration de l'Académie de Paris,

ROUSSELLE.

PROGRAMME

D'UNE

THÈSE D'ASTRONOMIE

SUR LA FIGURE DE LA TERRE.

PREMIÈRE PARTIE.

Détermination de la figure et des dimensions de la Terre.

La non-sphéricité de la terre résulte de la mesure des arcs du méridien correspondants à un même nombre de degrés, à 1° par exemple; ces arcs croissent depuis l'équateur jusqu'au pôle.

Cet accroissement prouve l'augmentation du rayon de courbure du méridien à partir de l'équateur, par suite l'aplatissement de la terre aux pôles et son renflement à l'équateur.

Variations de la gravité à la surface de la terre. Elles résultent de l'aplatissement polaire et de la force centrifuge produite par le mouvement de rotation; ces deux causes tendent à accroître la pesanteur depuis l'équateur jusqu'au pôle.

Application du pendule à la mesure de la pesanteur. — Les intensités de la pesanteur dans deux lieux différents sont proportionnelles aux carrés des nombres d'oscillations qu'y fait un pendule dans le même temps.

On a trouvé que la diminution totale de la pesanteur depuis le pôle jusqu'à l'équateur est de $\frac{1}{194}$; celle qui est produite par la force centrifuge est de $\frac{1}{239}$; la différence des deux résultats ou

$\frac{1}{590}$ représente l'effet de l'aplatissement, ainsi qu'on le trouve directement d'après la connaissance du rapport des axes de la terre.

La forme elliptique des méridiens est celle qui se présente le plus naturellement pour représenter l'accroissement des arcs d'un même nombre de degrés depuis l'équateur jusqu'au pôle. On démontre d'ailleurs que telle est la forme qu'eût dû prendre la terre supposée primitivement fluide et douée d'un mouvement de rotation uniforme.

Les méridiens étant regardés comme elliptiques, déterminer le rayon de courbure en un point quelconque en fonction de la latitude. On en déduit l'aplatissement d'après les mesures des arcs du méridien.

Détermination de la longueur d'un arc du méridien, connaissant les latitudes de ses extrémités. On trouve que l'arc de 1° dont le milieu est à la latitude de 45° représente assez exactement la 90e partie de la longueur du quart du méridien. Détermination du mètre, nouvelle unité de longueur.

On déduit de la longueur du quart du méridien celles des deux axes de la terre.

La formule qui donne la longueur d'un arc de 1° à une latitude quelconque au moyen de la longueur du degré équatorial, prouve que l'accroissement de cet arc est proportionel au carré du sinus de la latitude.

Détermination d'un arc de parallèle terrestre d'un nombre déterminé de degrés situé à une latitude donnée.

DEUXIÈME PARTIE.

Considérations analytiques.

La comparaison des degrés du méridien mesurés dans divers pays, fait supposer que les méridiens ne sont pas elliptiques et que la terre n'est pas un sphéroïde de révolution.

Détermination de l'ellipse qui satisfait le mieux aux mesures prises sur le méridien. — Méthode de Legendre. — Méthode de Laplace.

De la figure qu'affecte une masse fluide homogène animée d'un mouvement de rotation uniforme.

En supposant qu'elle soit celle d'un solide de révolution très peu différent de la sphère, on arrive par une analyse fondée sur la considération des séries à une équation infinie à laquelle on satisfait en supposant que la masse fluide affecte la forme d'un ellipsoïde de révolution.

On peut s'assurer à priori que la forme elliptique convient à la masse fluide, pourvu que la vitesse de rotation n'excède pas une certaine limite. Il y a même dans ce cas deux ellipsoïdes de révolution qu'on peut admettre pour la figure permanente de la masse.

Si l'on suppose que la vitesse de rotation est fort petite, on arrive à ce résultat, que l'aplatissement est égal à cinq fois la force centrifuge à l'équateur divisée par quatre fois la pesanteur à la surface.

Vu et approuvé par le Doyen de la Faculté des Sciences,

Baron THÉNARD.

27 juin 1837.

Permis d'imprimer,

L'inspecteur général des Études, chargé de l'administration de l'Académie de Paris,

ROUSSELLE.

Fig: 1.

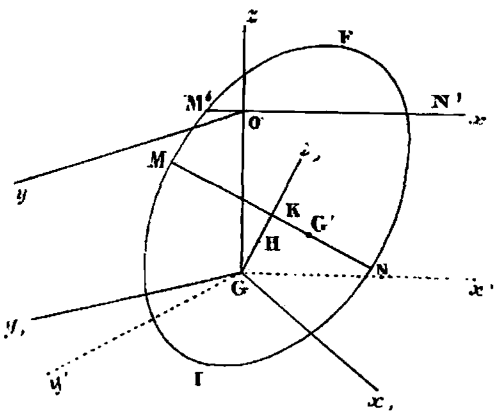

Fig: 2.

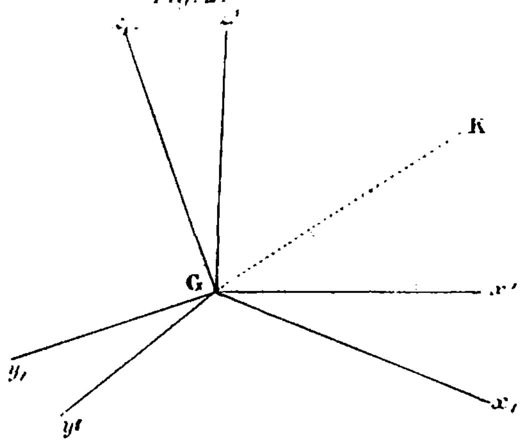

Fig: 3.

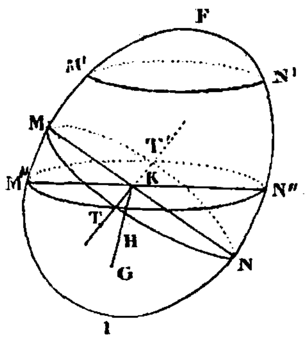

Fig. 4

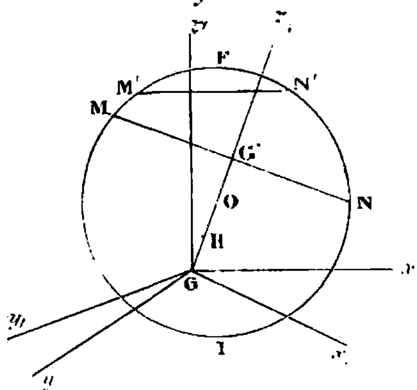

Fig: 5.

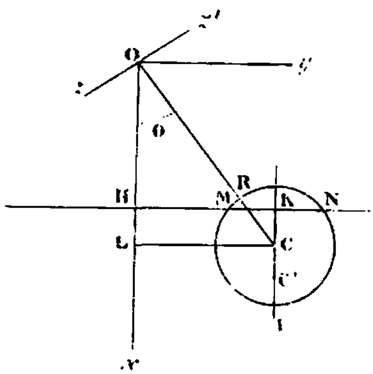

Fig: 6.