COURS

DE

MATHÉMATIQUES,

A L'USAGE

DE LA MARINE ET DE L'ARTILLERIE,

PAR BEZOUT;

SECONDE PARTIE,

CONTENANT, LA GÉOMÉTRIE, LA TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE ET LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

NOTES SUR LA GÉOMÉTRIE,

ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE ET PROBLÈMES;

PAR A.-A.-L. REYNAUD,

Docteur ès-Sciences.

SECONDE ÉDITION.

UNIVERSITÉ DE PARIS
FACULTÉ DES SCIENCES
1237 / TRES0047
CABINET DU DÉPARTEMENT
DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

PARIS, 192

Mme Ve COURCIER, Impr.-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1812.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

OUVRAGES DE M. REYNAUD.

1°. *Arithmétique*, à l'usage des Ingénieurs du Cadastre, vol. in-8.
2°. *Arithmétique*, à l'usage des Elèves qui se destinent à l'École Polytechnique, (6e édition).
3°. *Elémens d'Algèbre*, 1ere section (3e édition).
4°. *Elémens d'Algèbre*, 2e section (1ere édition).
5°. *Trigonométrie analytique*, suivie des Tables de Logarithmes de M. Lalande.
6°. *Fragmens sur l'Algèbre et la Trigonométrie*, épuisé. (Cet Ouvrage se trouve renfermé dans l'Algèbre.)
7°. *Manuel de l'Ingénieur du Cadastre*, par MM. POMMIÉS et REYNAUD.
8°. *Traité d'Arpentage* de LAGRIVE, avec les Notes de REYNAUD.

NOTES SUR BEZOUT PAR M. REYNAUD.

9°. *Arithmétique de* BEZOUT, avec Notes (6e édition).
10°. *Géométrie de* BEZOUT, avec Notes (2e édition).
11°. *Elémens d'Algèbre de* BEZOUT, avec Notes.
12°. Traité de *Navigation* avec *Notes* (sous presse).

NOTA. Dans les *Notes*, les *signes* (B, n°), (n°), indiquent respectivement des renvois, à la Géométrie de Bezout, et aux *Notes* sur la Géométrie.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

PRÉFACE.

Cette seconde Partie comprend, ainsi que le titre l'annonce, les Élemens de Géométrie, la Trigonométrie rectiligne, et la Trigonométrie sphérique.

Je ne m'arrêterai point à rassembler ici les raisons qui doivent engager les Élèves destinés à la Marine, à se rendre familiers les principes répandus dans ce livre : s'il est un art auquel l'application des Mathématiques soit plus utile qu'à un autre, c'est la Navigation : dussé-je me répéter, je dois dire que ces sciences, qui sont utiles dans d'autres parties, sont indispensables dans celle-ci.

Il ne faut pas en conclure, cependant, qu'un livre de Géométrie élémentaire destiné à cet objet, doive rassembler un grand nombre de propositions. S'il suffisait, pour bien inculquer les principes d'une science, de donner ce qui est essentiellement nécessaire au but qu'on se propose, ceux qui connaissent un peu la Géométrie, savent qu'on y satisferait en peu de mots. Mais l'expérience démontre qu'un pareil livre serait utile seulement à ceux qui ont acquis déjà des connaissances, et qu'il n'imprimerait que de faibles traces dans l'esprit des Commençans.

D'un autre côté, il n'y a pas moins d'inconvéniens à trop multiplier les conséquences, surtout quand elles ne sont (comme il arrive souvent) que de nouvelles traductions des principes. Il n'est pas douteux que des Élémens destinés à un grand nombre de lecteurs, doivent suppléer aux conséquences que plusieurs n'auront pas le loisir et peut-être la faculté d'en tirer; mais il faut prendre garde aussi que ceux pour qui cette attention est nécessaire, sont

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

le moins en état de soutenir la multitude des propositions. Le seul parti qu'il y ait à prendre, est, ce me semble, d'aller un peu plus loin que les principes, de s'arrêter aux conséquences utiles, et de fixer ces deux choses dans l'esprit, par des applications; c'est ce que j'ai tâché de faire.

J'ai partagé la Géométrie en trois sections, dont la première traite des Lignes, des Angles, de leur mesure, des rapports des Lignes, etc. La seconde considère les Surfaces, leur mesure et leurs rapports. La troisième est destinée aux Solides ou Corps, et renferme les principes nécessaires pour les mesurer et comparer leurs capacités. Dans la Trigonométrie rectiligne, j'ai donné quelques propositions, qui ne sont pas essentiellement nécessaires pour le moment; mais elles sont au moins utiles et le seront encore plus par la suite : d'ailleurs, quelques-unes trouvent leur application dès la Trigonométrie sphérique. Dans celle-ci, je me suis proposé de réduire à un moindre nombre, les principes dont on fait dépendre communément la résolution des Triangles sphériques. Je n'entrerai pas dans un plus grand détail; c'est dans l'ouvrage même qu'il faut le chercher. Ceux qui ne veulent lire que la Préface, ne gagneraient pas beaucoup au temps que je perdrais à cette aualyse; et ceux qui liront l'ouvrage, en jugeront mieux que par ce que je pourrais en dire ici.

Dois-je me justifier d'avoir négligé l'usage des mots : *Axiome*, *Théorème*, *Lemme*, *Corollaire*, *Scholie*, *etc.* ? Deux raisons m'ont déterminé : la première est que l'usage de ces mots n'ajoute rien à la clarté des démonstrations; la seconde est que cet appareil peut souvent faire prendre le change à des Commençans, en leur persuadant qu'une proposition revêtue du nom de *Théorème*,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

doit être une proposition aussi éloignée de leurs connaissances, que le nom l'est de ceux qui leur sont familiers. Cependant, afin que ceux de mes lecteurs qui ouvriront d'autres livres de Géométrie ne s'imaginent pas qu'ils tombent dans un pays inconnu, je crois devoir les avertir que,

Axiome, signifie une proposition évidente par elle-même,

Théorème, une proposition qui fait partie de la science dont il s'agit, mais dont la vérité, pour être apperçue, exige un discours raisonné qu'on appelle *Démonstration*.

Lemme (*), est une proposition qui ne fait pas essentiellement partie de la Théorie dont il s'agit, mais qui sert à faciliter le passage d'une proposition à une autre,

Corollaire, est une conséquence que l'on tire d'une proposition qu'on vient d'établir,

Scholie, est une remarque sur quelque chose qui précède, ou une récapitulation de ce qui précède,

Problème, est une question dans laquelle il s'agit ou d'exécuter quelque opération, ou de démontrer quelque proposition.

AVERTISSEMENT.

Les nombres qu'on trouvera entre deux parenthèses, indiqueront à quel numéro du Livre même il faut aller chercher la proposition que le lecteur doit se rappeler dans cet endroit; et ceux qui sont précédés du mot Arith. *renvoient à pareil numéro de l'Arithmétique.*

(*) Un *Lemme* est souvent une proposition empruntée d'une autre science.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

AVIS RELATIF AUX NOTES.

L'ARITHMÉTIQUE, l'*Algèbre* et la *Géométrie*, servant de bases à toutes les parties des Mathématiques, il est nécessaire d'en présenter les Élémens avec l'ordre, la clarté et la rigueur qui caractérisent les sciences exactes. Je travaille depuis plusieurs années à un Cours complet de Mathématiques. La rédaction de cet Ouvrage n'étant pas terminée et desirant profiter des avis des professeurs qui veulent bien me donner des conseils, j'ai cru devoir commencer par publier le résultat de mes recherches dans des *notes* détachées. Étant chargé depuis dix ans des examens intérieurs de l'École Polytechnique (*), j'ai fait des efforts multipliés pour m'assurer des difficultés qui arrêtent les Élèves. J'ai reconnu que la plus grande partie de ces difficultés tenait aux Élémens. J'ai donc cherché à réunir dans des *Notes*, tout ce qui peut être utile aux Élèves qui se destinent à subir des examens. J'ai surtout cherché à fortifier l'esprit des Commençans, en résolvant un grand nombre de problèmes.

La réputation méritée des Ouvrages de *Bezout*, et l'indulgence du public pour mes *Notes* sur l'Arithmétique et sur l'Algèbre, m'ont déterminé à compléter également toutes les autres parties du Cours de Bezout.

Mes *Notes sur la Géométrie* sont divisées en trois parties. La première partie est destinée à *donner plus de rigueur à des démonstrations de Bezout*. La seconde, offre une *collection nombreuse de problèmes et de théorèmes, de Géométrie et de Trigonométrie*. La troisième renferme la *Théorie*

(*) En qualité de Répétiteur.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

des plans, les propositions de Géométrie qui sont utiles dans toutes les parties des Mathématiques, les *difficultés proposées dans les examens* et les Élémens de la *Géométrie descriptive*.

La Méthode des infiniment petits, suivie par Bezout, a l'avantage de simplifier les démonstrations, en conduisant naturellement au résultat; on l'a néanmoins abandonnée, parce que les principes sur lesquels elle repose, quoique rigoureux, laissent des doutes dans l'esprit des Commençans. Les Élèves sentent bien qu'ils approchent autant qu'ils veulent de la vérité, mais leur esprit serait plus satisfait s'ils étaient certains de l'atteindre. La démonstration par l'*absurde* lève tous les doutes, elle prouve rigoureusement qu'une vérité existe, mais elle a l'inconvénient de ne pas laisser apercevoir la marche des inventeurs. J'ai cherché, en alliant ces deux méthodes, à profiter de leurs avantages, sans tomber dans les inconvéniens qu'elles présentent isolément. La considération des infiniment petits conduit aux valeurs des quantités. On prévoit que si ces valeurs ne sont pas exactes, elles ne peuvent donner que des erreurs très-petites; je démontre ensuite par l'*absurde*, que ces valeurs sont rigoureusement exactes. Cette marche présente le double avantage de donner à l'Élève un moyen facile de retrouver les propositions de Géométrie qu'il a connues, sans avoir besoin de surcharger sa mémoire des différens résultats auxquels il doit parvenir, et de préparer l'esprit à la considération de l'infini, si utile dans toutes les parties des Mathématiques.

Les difficultés réelles de la Géométrie, tiennent aux définitions et aux propriétés de la ligne droite, des parallèles, des triangles, et des plans. Par exemple, on peut nommer *ligne droite*, la plus courte distance entre deux

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

points, mais on n'est pas en droit d'en conclure qu'on ne peut mener qu'une seule ligne droite par deux points. Les plus grands géomètres ont fait des tentatives inutiles pour démontrer cette propriété. Les parallèles offrent des difficultés du même genre, car la définition de ces lignes repose sur celle du plan, et les propriétés du plan dépendent de la théorie des parallèles. De sorte qu'on n'est pas encore parvenu à démontrer rigoureusement toute la Géométrie; mais on a déjà franchi les plus grands obstacles, et les Traités de MM. *Legendre* et *Lacroix*, renferment tout ce qu'on peut desirer.

D'après l'opinion de M. *Legendre*, j'ai distingué les *égalités absolues*, des *égalités relatives*. Ainsi, *deux quantités qui peuvent coïncider exactement, sont* ÉGALES; tandis que *deux quantités* ÉQUIVALENTES, *sont des quantités qui ne peuvent pas coïncider, quoiqu'elles soient égales*. Ainsi, deux cercles de même rayon, sont égaux et lorsque la surface d'un cercle est égale à celle d'un triangle, ces deux figures sont *équivalentes*. Enfin, pour abréger le discours, nous adopterons quelques expressions peu exactes, mais qui sont reçues dans les différens traités de Géométrie. Par exemple, lorsque nous dirons tirez AB, ou joignez AB, il faudra sous-entendre, tirez une droite AB par les points A et B, ou joignez les points A et B par une droite AB. La perpendiculaire sur le milieu d'une droite, sera la perpendiculaire à cette droite, menée par le milieu de la droite, et le plan perpendiculaire sur le milieu d'une droite, sera un plan mené par le milieu de la droite, perpendiculairement à cette droite. Lorsque deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre, on dit que ces plans sont *rectangulaires*. Pour désigner la *circonférence* ou la *surface* d'un cercle, dont le rayon sera r, nous dirons, circonférence r, ou cercle r.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

ÉLÉMENS

DE

GÉOMÉTRIE.

1. L'ESPACE que les corps occupent a toujours les trois dimensions : *longueur*, *largeur* et *profondeur* ou *épaisseur*.

Quoique ces trois dimensions se trouvent toujours ensemble dans tout ce qui est corps, néanmoins nous les séparons assez souvent par la pensée : c'est ainsi que lorsque nous pensons à la profondeur d'une rivière, d'une rade, etc., nous ne sommes point occupés de sa longueur ni de sa largeur; pareillement, quand nous voulons juger de la quantité de vent qu'une voile peut recevoir, nous ne nous occupons que de sa longueur et de sa largeur, et point du tout de son épaisseur.

Nous distinguerons donc trois sortes d'étendue; savoir,

L'étendue en longueur seulement, que nous appellerons *ligne;*

L'étendue en longueur et largeur seulement, que nous nommerons *surface* ou *superficie;*

Enfin, l'étendue en longueur, largeur et profondeur, que nous nommerons indifféremment *volume*, *solide*, *corps*.

Nous examinerons successivement les propriétés de ces trois sortes d'étendue; c'est là l'objet de la science qu'on appelle *Géométrie*.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

PREMIÈRE SECTION.

Des Lignes.

2. Les extrémités d'une ligne se nomment des *points*. On appelle aussi de ce nom les endroits où une ligne est coupée; ou encore, ceux où des lignes se rencontrent.

On peut considérer le point comme une portion d'étendue qui aurait infiniment peu de longueur, de largeur et de profondeur.

La trace d'un point qui serait mu de manière à tendre toujours vers un seul et même point, est ce qu'on appelle une *ligne droite*. C'est le plus court chemin pour aller d'un point à un autre; *AB* (*fig.* 1) est une ligne droite.

On appelle, au contraire, *ligne courbe*, la trace d'un point qui, dans son mouvement, se détourne infiniment peu, à chaque pas.

On voit donc qu'il n'y a qu'une seule espèce de ligne droite, mais qu'il y a une infinité de courbes différentes.

3. Pour tracer une ligne droite d'une étendue médiocre, comme lorsqu'il s'agit de conduire par les deux points *A* et *B* (*fig.* 1) une ligne droite sur le papier, on sait qu'on emploie une règle qu'on applique sur les deux points *A* et *B*, ou très-près, et à distances égales de ces deux points, et qu'avec un crayon ou une plume qu'on fait glisser le long de cette règle, on trace la ligne *AB*.

Mais lorsqu'il s'agit de tracer une ligne un peu grande, on fixe au point *A* l'extrémité d'une ficelle que l'on frotte avec un morceau de craie; et appliquant un autre de ses points sur le point *B*, on pince la ficelle pour l'élever au-dessus de *AB*, et la laissant aller, elle marque, en s'appliquant sur la surface, une trace qui est la ligne droite dont il s'agit.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Quand il est question d'une ligne fort grande, mais dont les extrémités peuvent être vues l'une de l'autre, on se contente de marquer entre ces deux extrémités, un certain nombre de points de cette ligne. Par exemple, lorsqu'on veut prendre des alignemens sur le terrain, on place à l'une des extrémités *B* (*fig.* 2) un bâton ou jalon *BD*, que, par le moyen d'un fil-à-plomb, on rend le plus vertical que faire se peut; on en fixe un autre de la même manière au point *A*, et se plaçant à ce même point *A*, on fait placer successivement plusieurs autres jalons, à différens points *C*, *C*, etc. entre *A* et *B*, de manière qu'appliquant l'œil le plus près qu'il est possible du jalon *AD*, et regardant le jalon *BD*, celui *CD* dont il s'agit, paraisse confondu avec *BD*; alors tous les points *C*, *C*, *C*, etc, déterminés de cette manière, sont dans la ligne droite *AB*.

Quand les deux extrémités *A* et *B* ne sont pas visibles l'une de l'autre, on a recours à des moyens que nous enseignerons par la suite.

4. Les lignes se mesurent par d'autres lignes; mais, en général, la mesure commune des lignes, c'est la ligne droite. Mesurer une ligne droite ou courbe, ou une distance quelconque, c'est chercher combien de fois cette ligne ou cette distance contient une ligne droite connue et déterminée, que l'on considère alors comme unité. Cette unité est absolument arbitraire; aussi y a-t-il bien des espèces de mesures différentes en fait de lignes. Indépendamment de la toise et de ses parties, dont nous avons fait connaître les subdivisions en Arithmétique, on distingue encore le pas ordinaire, le pas geométrique, la brasse, etc. pour les petites étendues; la lieue, le mille, le werste, etc. pour les grandes étendues.

Le pas ordinaire est de 2 pieds et demi.

Le pas géométrique, qu'on appelle autrement pas double, est de 5 pieds.

La brasse est de 5 pieds; on compte par brasse dans la marine, les longueurs des cordages, et les profondeurs qu'on mesure à la sonde.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

La lieue est composée d'un certain nombre de toises ou de pas géométriques. La lieue marine est de 2853 toises. Le mille, le werste, etc. sont pareillement des mesures itinéraires, dont la valeur, ainsi que celle de la lieue, n'est pas la même dans tous les pays, tant parce que chacune de ces espèces de mesures n'a pas partout le même nombre d'unités, c'est-à-dire le même nombre de pas, ou de toises, ou de pieds, etc., que parce que le pied qui sert d'unité à ces toises ou à ces pas, n'est pas de même grandeur partout.

5. Pour faciliter l'intelligence de ce que nous avons à dire sur les lignes, nous supposerons que les figures, dans lesquelles nous les considérerons, sont tracées sur une surface *plane*. On appelle ainsi une surface à laquelle on peut appliquer exactement une ligne droite dans tous les sens.

6. De toutes les lignes courbes, nous ne considérerons dans ces Elémens, que *la circonférence du cercle*. On appelle ainsi une ligne courbe *BCDFG* (*fig.* 3), dont tous les points sont également éloignés d'un même point *A*, pris dans le plan sur lequel elle est tracée. Le point *A* se nomme le *centre;* les lignes doites *AB*, *AC*, *AF*, etc. qui vont de ce point à la circonférence, se nomment *rayons;* et tous ces rayons sont égaux, puisqu'ils mesurent la distance du centre à chaque point de la circonférence.

Les lignes, comme *BD*, qui passant par le centre, se terminent de part et d'autre à la circonférence, sont appelées *diamètres;* comme chaque diamètre est composé de deux rayons, tous les diamètres sont donc égaux. Il est d'ailleurs évident que tout diamètre partage la circonférence en deux parties parfaitement égales; car si l'on conçoit la figure pliée de façon que le pli soit dans le diamètre *BD*, tous les points de *BGD* doivent s'appliquer sur *BCED*, sans quoi il y aurait des points de la circonférence qui seraient inégalement éloignés du centre.

Les portions *BC*, *CE*, *ED*, etc. de la circonférence, se

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

nommant *arcs;* et ce qu'on appelle *cercle*, c'est la surface même renfermée par la circonférence *BCFDGB*.

Une droite, comme *DF*, qui va de l'extrémité *D* d'un arc à l'autre extrémité *F*, s'appelle *corde* ou *soutendante* de cet arc.

7. Il est aisé de voir que *les cordes égales d'un même cercle ou de cercles égaux soutendent des arcs égaux, et réciproquement.* Car si la corde *DG* est égale à la corde *DF*, en imaginant qu'on transporte la corde *DG* et son arc, pour appliquer *DG* sur *DF*, il est visible que le point *D* étant commun, et le point *G* tombant alors sur le point *F*, tous les points de l'arc *DG* doivent tomber sur l'arc *DF*, puisque si quelqu'un de ces points ne tombait pas sur l'arc *DF*, l'arc *DG* n'aurait pas tous ses points également éloignés du centre *A*.

8. On est convenu de partager toute circonférence de cercle, grande ou petite, en 360 parties égales, auxquelles on a donné le nom de *degrés;* on partage le degré en 60 parties égales qu'on appelle *minutes;* chaque minute en 60 parties égales qu'on appelle *secondes;* et de toujours subdiviser de 60 en 60, en donnant aux parties, consécutivement, les noms *minutes*, *secondes*, *tierces*, *quartes*, *quintes*, etc.

La marque du degré est celle-ci. . . . . ^{o}
Celle de la minute. . . . . $'$
De la seconde. . . . . $''$
De la tierce . . . . . $'''$
De la quarte. . . . . ^{IV}

Ainsi, pour marquer 3 degrés 24 minutes 55 secondes, on écrit 3° 24′ 55″.

Cette division de la circonférence est admise généralement; mais des vues de commodité dans la pratique ont introduit dans quelques parties des Mathématiques pratiques, quelques usages particuliers dans la manière de compter les degrés et parties de degré. Les Astronomes, par exemple, comptent les degrés par trentaines, qu'ils appellent *signes*, c'est-à-dire, qu'ayant à compter 66° 42, par exemple; comme ce nombre

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

renferme 2 fois 30° et 6° 42′ de plus, ils compteraient 2 signes et 6° 42′, et ils écriraient 2^s 6° 42′.

Les Marins, pour les usages de la boussole, partagent la circonférence en 32 parties égales, dont chacune se nomme *aire* ou *rumb* de vent : chacune de ces parties est donc la 32^e partie de 360°, c'est-à-dire qu'elle est de 11° 15′; ainsi, au lieu de 45°, on dit 4 aires de vent, parce que 45° font 4 fois 11° 15′; pareillement, au lieu de 18° 27′, on dirait une aire de vent, et 7° 12′.

Des Angles et de leur Mesure.

9. Deux lignes *AB*, *AC*, qui se rencontrent, peuvent former entre elles une ouverture plus ou moins grande, comme on le voit dans les *figures* 4, 5, 6.

Cette ouverture *BAC* est ce qu'on appelle un angle; et cet angle est dit angle *rectiligne*, ou *curviligne*, ou *mixtiligne*, selon que les lignes qui se comprennent sont, ou toutes deux lignes droites, ou toutes deux lignes courbes; ou l'une, une ligne droite, et l'autre une ligne courbe.

Nous ne parlerons, pour le présent, que des angles rectilignes,

10. Pour se former une idée exacte d'un angle, il faut concevoir que la ligne droite *AB* était d'abord couchée sur *AC*, et qu'on l'a fait tourner sur le point *A* (comme une branche de compas sur sa charnière), pour l'amener dans la position *AB* qu'elle a actuellement. La quantité dont *AB* a tourné, est précisément ce qu'on appelle un angle.

D'après cette idée, on conçoit que la grandeur d'un angle ne dépend point de celle de ses côtés, ensorte que l'angle formé par les lignes *AC*, *AB*, (*fig.* 4) est absolument le même que celui que forment les lignes *AF* et *AE* qui sont une extension de celles-là : en effet la ligne *AB* et la ligne *AE* ont dû tourner chacune de la même quantité, pour venir dans leur position actuelle.

Le point *A*, où se rencontrent les deux lignes *AB*, *AC*, s'appelle le *sommet de l'angle;* et les deux lignes *AB*, *AC* en sont les côtés.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Pour désigner un angle, nous emploierons trois lettres, dont l'une marque le sommet, et les deux autres sont placées le long des côtés; et en énonçant ces lettres, nous placerons toujours celle du sommet au milieu : ainsi, pour désigner l'angle compris par les lignes AB, AC, nous dirons l'angle BAC ou CAB.

Cette attention est principalement nécessaire lorsque plusieurs angles ont leur sommet au même point, car si dans la *figure* 4, par exemple, on disait simplement l'angle A, on ne saurait si l'on veut parler de l'angle BAC, ou de l'angle BAD; mais lorsqu'il n'y a qu'un seul angle, comme dans la *figure* 4*, on peut dire simplement l'angle a; c'est-à-dire, le désigner par la lettre de son sommet.

11. Puisque l'angle BAC (*fig.* 4) n'est autre chose que la quantité dont le côté AB aurait dû tourner sur le point A, pour venir de la position AC dans la position AB; et que dans ce mouvement chaque point de AB, le point B, par exemple, restant toujours également éloigné de A, décrit nécessairement un arc de cercle qui augmente ou diminue précisément dans le même rapport que l'angle augmente ou diminue; il est naturel de prendre cet arc pour mesure de l'angle; mais comme chaque point de AB décrit un arc de longueur différente, ce n'est point la longueur même de l'arc qu'il faut prendre, mais le nombre de ses degrés et parties de degré, qui sera toujours le même pour chaque arc décrit par chaque point de AB, puisque tous ces points commençant, continuant et finissant leur mouvement dans le même temps, font nécessairement le même nombre de pas, toute la différence qu'il y a, c'est que les points les plus éloignés du point A, font des pas plus grands. Nous pouvons donc dire que.....

12. *Un angle quelconque* BAC (fig. 4) *a pour mesure le nombre des degrés et parties de degré de l'arc compris entre ses côtés, et décrit de son sommet comme centre.*

Ainsi, quand par la suite nous dirons : Un tel angle a pour mesure un tel arc, on doit entendre qu'il a pour mesure le nombre des degrés et parties de degré de cet arc.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

13. Donc, *pour diviser un angle en plusieurs parties égales*, il ne s'agit que de diviser l'arc qui lui sert de mesure, en autant de parties égales, et de tirer par les points de division, des lignes au sommet de cet angle. Nous parlerons plus bas de la division des arcs.

14. Et *pour faire un angle égal à un autre;* par exemple, pour faire un point a de la ligne ac (*fig.* 4*) un angle égal à l'angle BAC (*fig.* 4), il faut, d'une ouverture de compas arbitraire, et du point a comme centre, décrire un arc indéfini cb; posant ensuite la pointe du compas sur le sommet A de l'angle donné BAC, on décrira, de la même ouverture, l'arc BC compris entre les deux côtés de cet angle, et ayant pris avec le compas, la distance de C à B, on la portera de c en b, ce qui donnera le point b par lequel, et par le point a tirant la ligne ab, on aura l'angle bac égal à BAC.

En effet l'angle bac a pour mesure bc (12) et l'angle BAC a pour mesure BC. Or ces deux arcs sont égaux, puisque, appartenant à des cercles égaux, ils ont d'ailleurs des cordes égales (7); car la distance de b à c a été faite la même que celle de B à C.

15. L'angle BAC (*fig.* 5) se nomme angle droit, lorsque l'un AB de ses côtés ne penche ni vers l'autre côté AC, ni vers son prolongement AD.

On l'appelle angle *aigu* (*fig.* 4) lorsque l'un AB de ses côtés penche plus vers l'autre côté AC, que vers son prolongement AD.

Enfin on l'appelle *obtus* (*fig.* 6) lorsqu'un côté AB penche plus vers le prolongement de l'autre côté AC, que vers ce côté même.

16. Concluons de ce qui a été dit (12) sur la mesure des angles, 1°. *qu'un angle droit a pour mesure* 90°; *un angle aigu, moins que* 90°, et *un angle obtus, plus que* 90°.

Car si la ligne AE (*fig.* 3) ne penche ni vers AB, ni vers son prolongement AD, les deux angles BAE, DAE seront égaux : donc les arcs BE et DE, qui leur servent de

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

mesure, seront aussi égaux; or ces deux arcs composant ensemble la demi-circonférence, valent ensemble 180°; donc chacun d'eux est de 90°; donc aussi les deux angles *BAE*, *DAE* sont chacun de 90°. D'après cela, il est évident que *BAC* est de moins, et *BAF* de plus que 90°.

17. 2°. *Les deux angles* BAC, BAD, (fig. 4, 5 et 6) *que forme une ligne droite* AB *tombant sur une autre droite* CD, *valent toujours ensemble* 180°. Car on peut toujours regarder le point *A* (*fig.* 4) comme le centre d'un cercle, dont *CD* est alors un diamètre : or les deux angles *BAC*, *BAD* ont pour mesure les deux arcs *BC* et *BD*, qui composent la demi-circonférence; ils valent donc ensemble 180°, ou autant que deux angles droits.

18. 3°. *Que si d'un même point* A (fig. 3) *on tire tant de droites* AC, AE, AF, AD, AG, etc. *qu'on voudra, tous les angles* BAC, CAE, EAF, FAD, DAG, GAB, *qu'elles comprennent, ne feront jamais que* 360°, car ils ne peuvent occuper plus que la circonférence.

19. Deux angles tels que *BAC* et *BAD* (*fig.* 4), qui pris ensemble font 180°, sont dits *supplément* l'un de l'autre; ainsi *BAC* est le supplément de *BAD*, et *BAD* est le supplément de *BAC*; parce que l'un de ces angles est celui qu'il faudrait ajouter à l'autre pour faire 180°.

Les angles égaux auront donc des supplémens égaux; et ceux qui auront des supplémens égaux, seront égaux.

20. Concluons de là *que les angles* BAC, EAD, (*fig.* 7) *opposés au sommet, et formés par les deux droites* BD *et* EC, *sont égaux.*

Car *BAC* a pour supplément *CAD*, et *EAD* a aussi pour supplément *CAD*.

21. On appelle *complément* d'un angle ou d'un arc, ce dont cet arc est plus petit ou plus grand que 90°. Ainsi (*fig.* 3) l'angle *BAC* a pour complément *CAE*; l'angle *BAF* a pour

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

complément *FAE*. Le complément est donc ce qu'il faut ajouter à un angle, ou ce qu'il faut en retrancher, pour qu'il vaille 90°.

Les angles aigus qui auront des complémens égaux, seront donc égaux, et réciproquement, il en sera de même des angles obtus.

On rencontre sans cesse les angles, tant dans la théorie que dans la pratique. Nous aurons assez d'occasions par la suite de nous convaincre qu'on les rencontre à chaque pas dans la théorie. Quant à la pratique, nous ferons remarquer que c'est par les angles qu'on juge de la route que suit un navire; qu'on distingue si un navire qu'on rencontre en mer, a le vent sur nous, ou si nous l'avons sur lui; c'est par les angles qu'on détermine les positions des objets les uns à l'égard des autres; c'est en variant les angles que les voiles et le gouvernail font avec la quille, qu'on produit les différentes évolutions du navire, qu'on change sa route, et qu'on accélère ou qu'on retarde son mouvement. C'est encore par la mesure des angles qu'on parvient à déterminer en mer, en quel lieu on est.

Les instrumens qui servent à mesurer les angles, ou à former des angles, tels qu'on le juge à propos, sont en assez grand nombre; nous allons faire connaître les principaux.

22. L'instrument représenté par la *figure* 8, et qu'on appelle *rapporteur*, sert à mesurer les angles sur le papier, et à former sur le papier les angles dont on peut avoir besoin. L'usage en est commode et fréquent. C'est un demi-cercle de cuivre ou de corne, divisé en 180°. Le centre de cet instrument est marqué par une petite échancrure *C*. Quand on veut mesurer un angle tel que *BAC* (*fig.* 4, 5, 6) on applique le centre *C* sur le sommet *A* de l'angle qu'on veut mesurer, et le rayon *CB* du même instrument, sur l'un *AC* des côtés de cet angle; alors le côté *AB* prolongé, s'il est nécessaire, fait connaître par celle des divisions de l'instrument, par laquelle il passe, de combien de degrés est l'arc du rapporteur compris entre les côtés de l'angle *BAC*, et par conséquent (12) de combien de degrés est cet angle *BAC*.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Pour faire, avec le même instrument, un angle d'un nombre déterminé de degrés, on applique le rayon *CB* de l'instrument sur la ligne qui doit servir de côté à l'angle qu'on veut former, et de manière que le centre *C* soit sur le point où cet angle doit avoir son sommet; puis cherchant sur les divisions de l'instrument le nombre de degrés en question, on marque sur le papier un point en cet endroit; par ce point et par le sommet, on tire une ligne droite, qui fait alors avec la première, l'angle demandé.

23. Pour mesurer les angles sur le terrain, on emploie l'instrument représenté par la *figure* 9; on le nomme *graphomètre.* C'est un demi-cercle divisé en 180°, et sur lequel on marque même les demi-degrés, selon la grandeur de son diamètre. Le diamètre *DB* fait corps avec l'instrument; mais le diamètre *EC*, qu'on nomme *alidade*, n'y est assujéti que par le centre *A* autour duquel il peut tourner et parcourir par son extrémité *C* toutes les divisions de l'instrument. Chacun de ces deux diamètres est garni à ses deux extrémités, de pinnules, à travers lesquelles on regarde les objets. L'instrument est porté par un pied, et peut, sans rien changer à la position du pied, être incliné dans tous les sens, selon qu'on en a besoin.

Quand on veut mesurer l'angle que forment deux lignes droites tirées d'un point *A* où l'on est, à deux autres objets *F* et *G*, on place le centre du graphomètre en *A*, et on dispose l'instrument de manière que regardant à travers les pinnules du diamètre fixe *DAB*, on aperçoive l'un *F* de ces deux objets, et qu'en même temps l'autre objet *G* se trouve dans le prolongement du plan de l'instrument, ce qu'on fait en inclinant plus ou moins le graphomètre; alors on fait mouvoir l'alidade *EC*, jusqu'à ce qu'on puisse apercevoir l'objet *G* à travers les pinnules *E* et *C*; l'arc *BC* compris entre les deux diamètres, est alors la mesure de l'angle *GAF*.

On voit aussi, d'après ce que nous venons de dire, comment on peut former sur le terrain un angle d'un nombre déterminé de degrés. On fait le plus souvent sur la largeur, et à l'extrémité

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

du diamètre mobile, des divisions qui, selon la manière dont elles correspondent aux divisions mêmes de l'instrument, servent à connaître les parties de degré de 5 en 5 minutes, ou de 3 en 3.

Cet instrument est aussi, le plus souvent, garni d'une *boussole* ordinaire ou simple : on la voit dans la même *figure* 9.

L'aiguille aimantée qui en fait la pièce principale, est soutenue en son milieu sur un pivot sur lequel elle a toute la mobilité possible. Comme sa propriété est de rester constamment dans une même position, ou d'y revenir quand elle en a été écartée (au moins dans un même lieu, et pendant un assez long intervalle de temps), on l'emploie utilement sur ces sortes d'instrumens, pour déterminer la position des objets à l'égard des points cardinaux, ou à l'égard de la ligne nord et sud, avec laquelle elle fait toujours le même angle dans un même lieu. Sur le bord de la cavité qui renferme l'aiguille, on marque communément les 360° de la circonférence. Quand on tourne l'instrutement, l'aiguille, par la propriété qu'elle a de revenir dans une même situation, marque, par la nouvelle division à laquelle elle répond, de combien de degrés l'instrument a tourné.

On emploie aussi la boussole ordinaire sans le graphomètre, mais c'est seulement pour déterminer grossièrement les points de détails d'un plan ou d'une carte, dont les points principaux ont été fixés avec exactitude, de la manière que nous exposerons par la suite.

24. *La boussole marine*, ou le *compas de mer*, ou encore le *compas de variation* (*fig.* 10) ne diffère guère de la boussole ordinaire que par une suspension qui lui est propre, et qui a pour objet de faire que les parties de cette machine, qui servent à la mesure des angles, ne participent à d'autres mouvemens du vaisseau qu'à ceux qu'il peut avoir pour tourner horizontalement. Lorsqu'elle n'est employée qu'à connaître la direction de la quille du vaisseau, on l'appelle *compas de route*. Elle est renfermée dans une espèce d'armoire qu'on appelle *habitacle*, et qui est située dans le sens de la largeur du vaisseau. L'aiguille n'est pas isolée sur son pivot, comme dans

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

la boussole ordinaire, elle serait trop sujette à vaciller; on la charge d'un morceau de talc taillé en rond, et collé entre deux morceaux de papier; et on trace dessus la rose des vents, c'est-à-dire, qu'on en partage la circonférence en rumbs de vent. On conçoit donc que si le vaisseau vient à tourner d'une certaine quantité, comme l'aiguille reste toujours ou revient toujours à la même situation, elle ne répondra plus au même point de l'habitacle : en observant donc quel est le rumb de vent qui répond à celui qu'occupait d'abord l'aiguille, on connaîtra de combien le vaisseau a tourné. On pourra donc s'en servir pour ramener et retenir constamment le vaisseau dans une même direction.

Quand on emploie la boussole à *relever* les objets, c'est-à-dire à reconnaître l'*aire de vent* à laquelle ils répondent, on l'appelle *compas de variation* : ce nom lui vient d'un autre usage dont ce n'est pas ici le lieu de parler. Alors on la garnit de deux pinnules *A* et *B* (*fig.* 10), par lesquelles on vise aux objets dont on veut connaître la situation. En mer, il faut deux observateurs; l'un qui tourne et ajuste le compas de variation de manière à apercevoir l'objet; et pendant ce temps, l'autre observe quelle est la position de l'aiguille à l'égard de la ligne *DE*, qui est un fil tendu à angles droits sur la ligne qu'on conçoit passer par *A* et *B*.

Des Perpendiculaires et des Obliques.

25. Nous avons dit (15) que la ligne *AB* (*fig.* 5), qui ne penche ni vers *AC*, ni vers *AD*, formait, avec ces deux parties, des angles qu'on appelle *droits*.

Cette même ligne *AB* est aussi ce qu'on appelle *une perpendiculaire* à la ligne *AC* ou *DC*, ou *AD*.

D'après cette définition, on doit regarder comme vérités évidentes, les trois propositions suivantes.

26. 1°. *Quand une ligne* AB (*fig.* 11) *est perpendiculaire sur une autre ligne* CD, *celle-ci est aussi perpendiculaire sur la ligne* AB.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Car lorsque *AB* est perpendiculaire sur *CD*, les angles *AEC*, *AED*, sont égaux; or *AED* est égal à *BEC* (20); donc *AEC* est égal à *BEC*; donc la ligne *CE* ou *CD* ne penche ni vers *AE* ni vers *BE*; donc elle est perpendiculaire à *AB*.

27. 2°. *D'un même point* E, *pris dans une ligne* CD, *on ne peut élever qu'une seule perpendiculaire à cette ligne.*

28. 3°. *Et d'un même point* A, *pris hors d'une ligne* CD, *on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire à cette ligne.*

Car on conçoit qu'il n'y a qu'un seul cas où une ligne passant par le point *E* ou par le point *A*, puisse ne pencher ni vers *ED*, ni vers *EC*.

29. *Les lignes qui partant du point* A, *s'écarteront également de la perpendiculaire, seront égales; et plus ces lignes s'écarteront de la perpendiculaire, plus elles seront longues, et par conséquent la perpendiculaire est la plus courte de toutes.*

Supposons que *EG* soit égal à *EF*; si l'on renverse la *figure AEG* sur la *figure AEF*; la ligne *AE* restant commune à toutes les deux, il est clair qu'à cause de l'angle *AEG* égal à l'angle *AEF*, la ligne *EG* s'appliquera sur *EF*, et que le point *G* tombera sur le point *F*, puisque *EG* est supposé égal à *EF*; donc *AG* s'appliquera exactement sur *AF*; donc ces deux lignes sont égales.

Quant à la seconde partie de la proposition, il est évident que le point *C* de la ligne *CE*, étant supposé plus loin de *AB*, que le point *F* de la même ligne *CE*, est nécessairement plus éloigné de tel point de *AB* qu'on voudra, que le point *F* ne peut l'être du même point; donc *AC* est plus grande que *AF*; donc aussi la perpendiculaire est la plus courte de toutes.

30. Les lignes *AF*, *AC*, *AG*, sont dites *obliques* à l'égard de la perpendiculaire *AE* et de la ligne *CD*; et en général une ligne est oblique à une autre, quand elle fait, avec cette autre, un angle ou aigu ou obtus.

31. Puisque (29) les obliques *AF*, *AG* sont égales lorsqu'elles s'éloignent également de la perpendiculaire, il faut en conclure que *lorsqu'une ligne est perpendiculaire sur le*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

milieu E *d'une autre ligne* FG, *chacun de ses points est autant éloigné de l'extrémité* F, *que de l'extrémité* G; car il est évident que ce qu'on a dit du point *A* s'applique également à tout autre point de la ligne *AD* ou *AB*.

32. Il n'est pas moins évident qu'il *n'y a que les points de la perpendiculaire* AE *sur le milieu de* FG, *qui puissent être également éloignés de* F *et de* G; car tout point qui sera à droite ou à gauche de la perpendiculaire, est évidemment plus près de l'un de ces points que de l'autre.

Donc, pour qu'une ligne soit perpendiculaire sur une autre, il suffit qu'elle passe par deux points dont chacun soit également éloigné de deux points pris dans cette autre.

33. Concluons de là, 1°. que *pour élever une perpendiculaire sur le milieu d'une ligne* AB (*fig.* 12), il faut poser une pointe du compas en *B*, et d'une ouverture plus grande que la moitié de *AB*, tracer un arc *IK*; poser ensuite la pointe du compas en *A*, et de la même ouverture, tracer un arc *LM* qui coupe le premier au point *C*, qui sera également éloigné de *A* et de *B*. On déterminera ensuite, de la même manière, un autre point *D*, soit au-dessous, soit au-dessus de *AB*, et en prenant la même ou une autre ouverture de compas. Enfin on tirera par les deux points *C* et *D* la ligne *CD* (32) qui sera perpendiculaire sur le milieu de *AB*.

34. 2°. *Si d'un point* E, *pris hors de la ligne* AB (*fig.* 13), *on veut mener une perpendiculaire à cette ligne*, on placera la pointe du compas en *E*, et d'une ouverture plus grande que la plus courte distance à la ligne *AB*, on tracera avec l'autre pointe, deux petits arcs qui coupent *AB* aux points *C* et *D*; puis de ces deux points comme centres, et d'une ouverture de compas plus grande que la moitié de *CD*, on tracera deux arcs qui se coupent en un point *F*, par lequel et par le point *E*, on tirera la ligne *EF*, qui sera perpendiculaire sur *AB* (32), puisqu'elle aura deux points *E* et *F* également éloignés, chacun des deux points *C* et *D* de la ligne *AB*.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

35. Si le point *E*, par lequel on veut que la perpendiculaire passe, était sur la ligne même *AB*, on opérerait encore de la même manière. *Voyez* figure 14.

Enfin si le point *E* était tellement placé qu'on ne pût marquer commodément qu'un des deux points *C* ou *D*, on prolongerait la ligne *AB*, et on opérerait encore de même : *voyez* figures 15 et 16. La *figure* 16 est pour le cas où l'on veut élever une perpendiculaire à l'extrémité de la ligne *AB*.

Des Parallèles.

36. Deux lignes droites, tracées sur un même plan, sont dites *parallèles*, lorsqu'elles ne peuvent jamais se rencontrer, à quelque distance qu'on les imagine prolongées.

Deux lignes parallèles ne font donc point d'angle entre elles.

Donc deux parallèles sont partout également éloignées l'une de l'autre; car il est évident que si en quelqu'endroit elles se trouvaient plus près qu'en un autre, elles seraient inclinées l'une à l'autre, et que par conséquent elles pourraient enfin se rencontrer.

D'après ces notions, il est aisé d'établir les cinq propositions suivantes.

37. 1°. *Lorsque deux lignes parallèles* AB *et* CD (fig. 17), *sont coupées par une troisième ligne* EF (*qu'on appelle alors* sécante) *les angles* BGE, DHE, *ou* AGH, CHF, *qu'elles forment d'un même côté, avec cette ligne, sont égaux.* Car les lignes *AB* et *CD* n'ayant aucune inclinaison entre elles (36), doivent nécessairement être également inclinées d'un même côté, chacune à l'égard de toute la ligne à laquelle on les comparera.

38. 2°. *Les angles* AGH, GHD, *sont égaux.* Car on vient de voir que *AGH* est égal à *CHF*; or *CHF* (20) est égal à *GHD*; donc *AGH* est égal à *GHD*.

39. 3°. *Les angles* BGE, CHF *sont égaux;* car *BGE* est égal à *AGH* (20) : or, on a vu (37) que *AGH* est égal à *CHF*; donc *BGE* est égal à *CHF*.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

40. 4°. *Les angles* BGH, DHG *ou* AGH, CHG *sont supplémens l'un de l'autre;* car *BGH* est supplément de *BGE* qui (37) est égal à *DHG.*

41. 5°. *Les angles* BGE, DHF *ou* AGE, CHF *sont supplémens l'un de l'autre;* car *DHF* a pour supplément *DHG* qui (37) est égal à *BGE.*

42. Chacune de ces cinq propriétés a toujours lieu, lorsque deux lignes parallèles sont rencontrées par une troisième; et réciproquement, *toutes les fois que deux lignes droites auront dans leur rencontre avec une troisième, l'une quelconque de ces cinq propriétés, on doit conclure qu'elles sont parallèles;* cela se démontre d'une manière absolument semblable.

On a donné aux angles dont nous venons d'examiner les propriétés, des noms qui peuvent servir à fixer ces propriétés dans la mémoire. Les angles *BGE, FHC,* se nomment *alternes-externes,* parce qu'ils sont de différens côtés de la ligne *EF,* et qu'ils sont tous deux hors des parallèles. Les angles *AGH, GHD* s'appellent *alternes-internes,* parce qu'ils sont de différens côtés de la ligne *EF,* et tous deux entre les parallèles. Les angles *BGH, DHG* s'appellent *internes d'un même côté,* parce qu'ils sont entre les parallèles; et d'un même côté de la sécante *EF.* Enfin les angles *BGE, DHF* se nomment *externes d'un même côté,* parce qu'ils sont hors des parallèles, et d'un même côté de la sécante.

43. Des propriétés que nous venons de démontrer, on peut conclure, 1°. *que si deux angles* ABC, DEF (fig. 18), *tournés d'un même côté, ont leurs côtés parallèles, ils seront égaux.* Car si l'on imagine le côté *DE* prolongé jusqu'à ce qu'il rencontre *BC* en *G,* les angles *ABC, DGC* seront égaux (37), et par la même raison l'angle *DGC* sera égal à l'angle *DEF;* donc *ABC* est égal à *DEF.*

44. 2°. Que *pour mener, par un point donné* C, *une ligne* CD (fig. 19), *parallèle à une ligne* AB, il faut, par le point *C,* tirer arbitrairement la ligne indéfinie *CEF* qui coupe *AB*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

en un point quelconque E; mener, selon ce qui a été enseigné (14), par le point C, la ligne CD qui fasse avec CE, l'angle ECD égal à l'angle FEB que celle-ci fait avec AB; la ligne CD tirée de cette manière sera parallèle à AB (37).

Au reste chacune des cinq propriétés établies ci-dessus, peut fournir une manière de mener une parallèle.

45. Les perpendiculaires et les parallèles, dont nous venons de parler successivement, sont d'un usage très-fréquent dans toutes les parties pratiques des Mathématiques. Les perpendiculaires sont nécessaires dans la mesure des surfaces, et dans celle des solidités ou capacités des corps; elles reviennent à chaque pas dans toutes les opérations de l'Architecture navale. Comme l'angle droit est facile à construire, on fait, autant qu'on le peut, dépendre la construction des *figures*, plutôt des perpendiculaires que de toute autre ligne.

Les parallèles, outre leur grand usage dans la théorie, pour démontrer facilement un grand nombre de propositions, sont la base de plusieurs opérations utiles. On les emploie beaucoup dans le pilotage, principalement pour marquer, sur les cartes maritimes, la route qu'a tenue un vaisseau pendant sa navigation, ce qu'on appelle *pointer* ou *faire le point*. Nous en dirons un mot par la suite.

Des Lignes droites, considérées par rapport à la circonférence du Cercle; et des circonférences de Cercle, considérées les unes à l'égard des autres.

46. La courbure uniforme du cercle met en droit de conclure, sans qu'il soit besoin d'en donner une démonstration rigoureuse,.....

1°. Qu'*une ligne droite ne peut rencontrer une circonférence en plus de deux points.*

2°. Que, *dans un même demi-cercle, la plus grande corde soutend toujours le plus grand arc, et réciproquement.*

On appelle, en général, *sécante* (fig. 20), toute ligne, comme

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

DE, qui rencontre le cercle en deux points, et qui est en partie au-dehors; et on appelle *tangente*, celle qui ne fait que s'appliquer contre la circonférence : telle est *AB*.

47. *Une tangente ne peut rencontrer la circonférence qu'en un seul point :* car si elle la rencontrait en deux points, elle entrerait dans le cercle, puisque de ces deux points il serait possible de tirer au centre deux rayons ou lignes égales, entre lesquelles on peut toujours concevoir une perpendiculaire sur la ligne qui joint ces deux points; et comme cette perpendiculaire (29) serait plus courte que chacun des deux rayons, on voit que la tangente aurait des points plus près du centre que ceux où elle rencontre le cercle; elle entrerait donc dans le cercle, ce qui est contre la définition que nous venons d'en donner.

La tangente n'ayant qu'un point de commun avec le cercle, il s'ensuit que le rayon *CA* (*fig.* 21) qui va au point d'attouchement, est la plus courte ligne qu'on puisse tirer du centre à la tangente; que par conséquent (29) il est perpendiculaire à la tangente. Donc réciproquement *la tangente en un point quelconque* A *du cercle, est perpendiculaire à l'extrémité du rayon* CA *qui passe par ce point.*

48. On voit donc que *pour mener une tangente à un point donné* A *sur le cercle*, il faut tirer à ce point un rayon *CA*, et mener, suivant la méthode donnée (35), une perpendiculaire à son extrémité.

49. *Donc si plusieurs cercles* (fig. 22) *ont leurs centres sur la même ligne droite* AC, *et passent tous par le même point* A, *ils auront tous pour tangente commune la ligne* TG *perpendiculaire à* CA, *et se toucheront par conséquent tous.*

50. Ainsi, *pour décrire un cercle d'une grandeur déterminée, et qui touche un cercle donné* BAD (fig. 23) *en un point donné* A, il faut, par le centre *C* et par le point *A*, tirer le rayon *CA* qu'on prolongera indéfiniment; puis du point *A* vers *T* ou vers *V* (selon qu'on voudra que l'un des cercles

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

embrasse) l'autre, ou ne l'embrasse point, porter la grandeur du rayon du second cercle; après quoi du centre T ou V, et du rayon TA ou VA, on décrira la circonférence EF.

51. *La perpendiculaire élevée sur le milieu d'une corde passe toujours par le centre du cercle, et par le milieu de l'arc soutendu par cette corde* (fig. 24.).

Car elle doit passer par tous les points également éloignés des extrémités A et B (32); or il est évident que le centre est également éloigné des deux extrémités A et B, qui sont deux points de la circonférence; donc elle passe par le centre.

Il n'est pas moins évident qu'elle doit passer par le milieu de l'arc; car si E est le milieu de l'arc, les arcs égaux AE, BE ayant des cordes égales (7), le point E est également éloigné de A et de B; donc la perpendiculaire doit passer par le point E.

52. Le centre, le milieu de l'arc, et le milieu de la corde étant tous trois sur une même ligne droite, toutes les fois qu'une ligne droite passera par deux de ces trois points, on pourra en conclure qu'elle passe par le troisième.

Et comme on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire sur le milieu de la corde, on doit conclure que si une perpendiculaire sur une corde, passe par l'un quelconque de ces trois points, elle passe nécessairement par les deux autres.

De ces propriétés on peut conclure,

53. 1°. *Le moyen de diviser un angle ou un arc en deux parties égales.*

Pour diviser l'angle BAC (*fig.* 25) en deux parties égales, on décrira de son sommet A comme centre, et d'un rayon arbitraire, l'arc DE; puis des points D et E, pris successivement pour centre, et d'un même rayon, on tracera deux arcs qui se coupent en un point G, par lequel et par le point A on tirera AG, qui (32), étant perpendiculaire sur le milieu de la corde DE, divisera en deux parties égales l'arc DIE (51), et par conséquent aussi l'angle BAC, puisque les deux angles

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

partiels *BAG*, *CAG* ont (12) pour mesure les deux arcs égaux *DI*, *EI*.

54. 2°. *Le moyen de faire passer une circonférence de cercle par trois points donnés qui ne soient pas en ligne droite.*

Soient *A*, *B*, *C*, (*fig.* 26) ces trois points; en tirant les lignes droites *AB*, *BC*, elles seront deux cordes du cercle qu'il s'agit de décrire.

Elevez une perpendiculaire (33) sur le milieu de *AB*; faites la même chose sur le milieu *BC*; le point *I* où se couperont ces deux perpendiculaires, sera le centre. Car ce centre doit être sur *DE* (51), et par la même raison il doit être sur *FG*; il doit donc être à leur rencontre *I*, qui est le seul point commun qu'aient ces deux lignes.

55. S'il était question de *retrouver le centre d'un cercle*, ou *d'un arc déjà décrit*, on voit donc qu'il n'y aurait qu'à marquer trois points à volonté sur cet arc, et opérer comme on vient de l'enseigner.

56. Puisqu'on ne trouve qu'un seul point *I* qui satisfasse à la question, il faut en conclure que par trois points donnés on ne peut faire passer qu'un seul cercle, et par conséquent, que *deux circonférences de cercle ne peuvent se rencontrer en trois points sans se confondre.*

57. 3°. *Le moyen de faire passer par un point donné* B (fig. 27 *et* 28) *une circonférence de cercle qui en touche une autre dans un point donné* A.

Il faut, par le centre *C* de la circonférence donnée, et par le point *A* ou l'on veut qu'elle soit touchée, tirer le rayon *CA* qu'on prolongera de part ou d'autre, selon qu'il sera nécessaire, joindre le point *A* au point *B* par lequel on veut faire passer la circonférence cherchée, et élever sur le milieu de *AB*, une perpendiculaire *MN* qui coupera *AC* ou son prolongement, en *D*. Ce point *D* sera le centre, et *AD* ou *BD* sera le rayon du cercle demandé; car, puisque la circonférence qu'on veut décrire, doit passer par le point *A* et par le

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

point B, son centre doit être sur MN (51); d'ailleurs, puisque cette même circonférence doit toucher en A, son centre doit être sur CA (49) ou sur son prolongement; il est donc au point d'intersection de CD et de MN.

58. Si au lieu d'une circonférence, c'était une ligne droite qu'il s'agît de faire toucher en un point donné A (*fig.* 29), par un cercle passant par un point donné B, l'opération serait la même, avec cette seule différence, que la ligne AC serait une perpendiculaire élevée au point A sur cette droite.

59. 4°. *Deux cordes parallèles* AB, CD (fig. 30), *interceptent entre elles, des arcs égaux* AC, BD.

Car la perpendiculaire GI qu'on abaisserait du centre G sur AB, doit (51) diviser, en deux parties égales, chacun des deux arcs AIB, CID, puisqu'elle sera en même temps perpendiculaire sur AB, et sur sa parallèle CD; donc, si des arcs égaux AI, BI, on retranche les arcs égaux CI, DI, les arcs restans AC, BD doivent être égaux.

Concluons de là, que quand une tangente HK est parallèle à une corde AB, le point d'attouchement I est précisément au milieu de l'arc AIB.

60. Les propositions que nous avons établies (56, 57 et 58), ont leur application dans l'Architecture navale, ou la construction des navires; il y est souvent question d'arcs qui doivent se toucher, ou toucher des lignes droites et passer par des points donnés. Ce que nous avons dit peut faciliter l'intelligence de quelques-unes des méthodes qu'on y prescrit. L'Architecture civile fait aussi assez souvent usage d'arcs qui se touchent.

61. La dernière proposition que nous venons de démontrer peut, entr'autres usages, servir à mener une parallèle à une ligne donnée.

Des Angles considérés dans le cercle.

62. Nous avons vu ci-dessus (12) quelle est, en général, la mesure des angles. Ce que nous nous proposons ici, n'est point de donner une nouvelle manière de les mesurer, mais

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

d'établir quelques propriétés qui peuvent nous être fort utiles par la suite, tant pour exécuter certaines opérations, que pour faciliter quelques démonstrations.

63. *Un angle* MAN (fig. 31 et 32) *qui a son sommet à la circonférence, et qui est formé par deux cordes, ou par une tangente et par une corde, a toujours pour mesure la moitié de l'arc* BFED *compris entre ses côtés.*

Menez par le centre *C*, le diamètre *FH* parallèle au côté *AM*, et le diamètre *GE* parallèle au côté *AN*; l'angle *MAN* (43) est égal à l'angle *FCE*; il aura donc la même mesure que celui qui a son sommet au centre, c'est-à-dire qu'il aura pour mesure l'arc *FE*; il ne s'agit donc que de faire voir que l'arc *FE* est la moitié de l'arc *BFED*. Or *BF* est égal à *AH* (59), à cause des parallèles *AM*, *HF*; et à cause des parallèles *AN* et *GE*, l'arc *ED* est égal à *AG*; donc *ED* plus *BF* valent *AG* plus *AH*, c'est-à-dire, *GH*; mais *GH*, comme mesure de l'angle *GCH'*, doit être égal à *FE*, mesure de l'angle *FCE* qui (20) est égal à *GCH*; donc *BF* plus *DE* valent *FE*; donc *FE* est la moitié de *BFED*; donc l'angle *MAN* a pour mesure la moitié de l'arc *BFED* qu'il comprend entre ses côtés.

Cette démonstration suppose que le centre soit entre les côtés de l'angle, ou sur l'un des côtés; mais si le centre était hors des côtés, comme il arrive pour l'angle *MAL* (*fig.* 32), il n'en serait pas moins vrai que cet angle aurait pour mesure la moitié de l'arc *BL* compris entre ses côtés. Car en imaginant la tangente *AN*, l'angle *BAL* vaut *LAN* moins *MAN*; il a donc pour mesure la différence des mesures de ces deux angles, c'est-à-dire (puisque le centre est entre leurs côtés), la moitié de *LEA* moins la moitié de *BEA*, ou la moitié de *BL*.

64. Donc, 1°. *tous les angles* BAE, BCE, BDE (fig. 33) *qui ayant leur sommet à la circonférence, comprendront entre leurs côtés le même arc, ou des arcs égaux, seront égaux;* car ils auront chacun pour mesure la moitié du même arc *BE* (63).

65. 2°. *Tout angle* BAC (fig. 34) *qui aura son sommet*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

à la circonférence, et dont les côtés passeront par les extrémités d'un diamètre, sera droit ou de 90°; car il comprendra alors entre ses côtés la demi-circonférence BOC qui est de 108°; et comme il doit en avoir la moitié pour mesure (63), il sera donc de 90°.

66. La proposition qu'on vient de démontrer (65) peut, entre plusieurs autres usages, avoir les deux suivans.

67. 1°. *Pour élever une perpendiculaire à l'extrémité* B *d'une ligne* FB (fig. 35), lorsqu'on ne peut prolonger assez cette ligne pour exécuter commodément ce qui a été enseigné (35), voici le procédé :

D'un point D pris à volonté hors de la ligne FB, et d'une ouverture égale à la distance DB, décrivez la circonférence $ABCH$, qui coupe FB en quelque point A; par ce point et par le centre D, tirez le diamètre ADC; du point C où ce diamètre coupe la circonférence, menez au point B la ligne CB, elle sera perpendiculaire à FB; car l'angle CBA qu'elle forme avec FB, a son sommet à la circonférence, et ses côtés passent par les extrémités du diamètre AC; cet angle est donc droit (65); donc CB est perpendiculaire sur FB.

68. 2°. *Pour mener d'un point donné* E (fig. 36), *hors du cercle* ABD, *une tangente à la circonférence de ce cercle*, joignez le centre C et le point E par la droite CE; décrivez sur CE, comme diamètre, la circonférence $CAED$; elle coupera la circonférence ABD, en deux points A et D, par chacun desquels et par le point E, tirant les lignes DE et AE, vous aurez les deux tangentes qu'on peut mener du point E à la circonférence ABD.

Pour se convaincre que ces lignes sont tangentes, il n'y a qu'à tirer les rayons CD et CA; les deux angles CDE, CAE ont chacun leur sommet à la circonférence $ACDE$, et les deux côtés de chacun passent par les extrémités du diamètre CE; donc (65) ces angles sont droits; donc DE et AE sont perpendiculaires à l'extrémité des rayons CD et CA; donc (47) ces lignes sont tangentes en D et en A.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

69. Si l'on prolonge le côté *BA* (*fig.* 31) indéfiniment vers *I*, on aura un angle *NAI* qui aura aussi son sommet à la circonférence ; cet angle qui n'est point formé par deux cordes, mais seulement par une corde et par le prolongement d'une autre corde, n'aura point pour mesure la moitié de l'arc *AD* compris entre ses côtés, mais la moitié de la somme des deux arcs *AD* et *AB* soutendus par le côté *AD* et par le côté *AI* prolongé; car *DAI* valant avec *DAB* deux angles droits, ces deux angles doivent avoir ensemble pour mesure la moitié de la circonférence ; or on vient de voir (63) que *DAB* avait pour mesure la moitié de *DB* ; donc *DAI* a pour mesure la moitié de *AD* et la moitié de *AB*.

70. *Un angle* BAC (fig. 37) *qui a son sommet entre le centre et la circonférence, a pour mesure la moitié de l'arc* BC *compris entre ses côtés, plus la moitié de l'arc* DE *compris entre ces mêmes côtés prolongés.*

Du point *D* où *CA* prolongé rencontre la circonférence, tirez *DF* parallèle à *AB* ; l'angle *BAC* est égal à *FDC* (37), et aura par conséquent la même mesure que celui-ci, c'est-à-dire la moitié de l'arc *FBC* (63), ou la moitié de *BC* plus la moitié de *BF*, ou [à cause que (59) *BF* est égal à *DE*], il aura pour mesure la moitié de *BC* plus la moitié de *DE*.

71. *Un angle* BAC (fig. 38) *qui a son sommet hors du cercle, a pour mesure la moitié de l'arc concave* BC *moins la moitié de l'arc convexe* ED *compris entre ses côtés.*

Du point *D* où *CA* rencontre la circonférence, tirez *DF* parallèle à *AB*. L'angle *BAC* est égal à *FDC* (37) ; il aura donc même mesure que celui-ci, c'est-à-dire la moitié de *CF*, ou la moitié de *CB* moins la moitié de *BF*, ou [à cause que *BF* est (59) égal à *ED*] la moitié de *CB* moins la moitié de *ED*.

72. On voit donc que quand les côtés d'un angle interceptent un arc de circonférence, si cet angle a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés, il a nécessairement son sommet à la circonférence ; car s'il l'avait ailleurs, les propositions

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

démontrées (70 et 71) feraient voir qu'il n'a point la moitié de cet arc pour mesure. Donc, de quelque façon qu'on pose un même angle, si ses côtés (*fig.* 33) passent toujours par les mêmes points *B* et *E* de la circonférence, son sommet sera toujours sur quelque point de la circonférence. Donc si deux règles *AM*, *AN*, (*fig.* 39) fixement attachées l'une à l'autre, roulent ensemble dans un même plan, en touchant continuellement deux points fixes *B* et *C*, le sommet *A* décrira la circonférence d'un cercle qui passera par les deux points *B* et *C*.

Ceci peut servir, 1°. *à décrire un cercle qui passe par trois points donnés* B, A, C (fig. 39), *lorsqu'on ne peut approcher du centre.* Il faudra joindre le point *A* aux deux points *B* et *C* par deux règles *AM*, *AN*; fixer ces deux règles, de manière qu'elles ne puissent s'écarter l'une de l'autre; alors en faisant mouvoir l'angle *BAC* de manière que les règles *AM*, *AN* touchent toujours les points *B* et *C*, le sommet *A* décrira la circonférence demandée;

2°. *A décrire un arc de cercle d'un nombre de degrés proposé, et qui passe par deux points donnés* B *et* C; ce qui peut être nécessaire dans la pratique.

Pour cet effet on retranchera de 360° le nombre des degrés que cet arc doit avoir, et ayant pris la moitié du reste, on ouvrira les deux règles de manière qu'elles fassent un angle égal à cette moitié. Fixant alors les deux règles l'une à l'autre, et les faisant tourner autour de deux pointes fixées en *B* et *C*, l'arc *BAC* que le sommet décrira dans ce mouvement, sera du nombre de degrés proposé.

Il est facile de voir pourquoi on fait l'angle *BAC* égal à la moitié du reste; c'est qu'il a pour mesure la moitié de *BC* qui est la différence entre la circonférence entière et l'arc *BAC*.

Des Lignes droites qui renferment un espace.

73. Le moindre nombre de lignes droites qu'on puisse employer pour renfermer un espace, est trois; et alors cet espace

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

se nomme *triangle rectiligne*, ou simplement *triangle*; *ABC* (*fig.* 40) est un triangle, parce que c'est un espace renfermé par trois lignes droites, ou plus exactement, parce que c'est une figure qui n'a que trois angles.

Il est évident que dans tout triangle, la somme de deux côtés, pris comme on le voudra, est toujours plus grande que le troisième. *AB* plus *BC*, par exemple, valent plus que *AC*, parce que *AC* étant la ligne droite qui va de *A* à *C*, est le plus court chemin pour aller d'un de ces points à l'autre.

Un triangle, dont les trois côtés sont égaux, se nomme triangle *équilatéral* (fig. 41).

Celui dont deux côtés seulement sont égaux, se nomme triangle *isoscèle*, (fig. 42.)

Et celui dont les trois côtés sont inégaux, se nomme *scalène* (fig. 40.)

74. *La somme des trois angles de tout triangle rectiligne vaut deux angles droits ou* 180°.

Prolongez indéfiniment le côté *AC* vers *E* (*fig.* 40), et concevez la ligne *CD* parallèle au côté *AB*.

L'angle *BAC* est égal à l'angle *DCE* (37), puisque les lignes *AB* et *CD* sont parallèles. L'angle *ABC* est égal à l'angle *BCD*, par la seconde propriété des parallèles (38); donc les deux angles *BAC* et *ABC* valent ensemble autant que les deux angles *BCD* et *DCE*, c'est-à-dire autant que l'angle *BCE*; mais *BCE* est supplément (17 et 19) de *BCA*; donc les deux angles *BAC* et *ABC* forment ensemble le supplément de *BCA*; donc ces trois angles valent ensemble 180°.

75. La démonstration que nous venons de donner prouve donc, en même temps, que *l'angle extérieur* BCE *d'un triangle* ABC, *vaut la somme des deux intérieurs* BAC *et* ABC *qui lui sont opposés.*

Concluons de ce qu'on vient de dire (74), 1°. qu'*un triangle rectiligne ne peut avoir qu'un seul angle qui soit droit*; et alors on l'appelle triangle *rectangle* (fig. 43).

2°. Qu'à plus forte raison *il ne peut avoir qu'un seul angle*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

qui soit obtus ; dans ce cas on l'appelle triangle *obtusangle* (fig. 44).

3°. Mais *il peut avoir tous ses angles aigus ;* et alors il est dit triangle *acutangle* (fig. 45).

4°. Que, *connaissant deux angles, ou seulement la somme de deux angles d'un triangle, on connaît le troisième angle*, en retranchant de 180° la somme des deux angles connus.

5°. Que *lorsque deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisième angle de chacun est nécessairement égal*, puisque les trois angles de chaque triangle valent 180°.

6°. Que *les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont toujours complement* (21) *l'un de l'autre.* Car dès que l'un des angles du triangle est de 90°, il ne reste plus que 90° pour les deux autres ensemble.

76. Nous avons vu ci-dessus (54) qu'on pouvait toujours faire passer une circonférence de cercle, par trois points qui ne sont pas en ligne droite ; concluons-en que.....

On peut toujours faire passer une circonférence de cercle par les sommets des trois angles d'un triangle. On appelle cela *circonscrire* un cercle à un triangle.

77. De là il est aisé de conclure, 1°. que *si deux angles d'un triangle sont égaux, les côtés qui leur sont opposés seront aussi égaux ;* et réciproquement, *si deux côtés d'un triangle sont égaux, les angles opposés à ces côtés seront égaux.* Car en faisant passer une circonférence par les trois angles *A B C* (*fig.* 46), si les angles *ABC, ACB* sont égaux, les arcs *ADC, AEB*, dont les moitiés leur servent de mesure (63), seront nécessairement égaux ; donc (7) les cordes *AC, AB* seront égales. Et réciproquement, si les côtes *AC, AB* sont égaux, les arcs *ADC, AEB* seront égaux ; donc les angles *ABC, ACB*, qui ont pour mesure la moitié de ces arcs, seront égaux.

Donc les trois angles d'un triangle équilatéral sont égaux, et valent, par conséquent, chacun le tiers de 180°, ou 60°.

78. 2°. *Dans un même triangle* ABC (fig. 47), *le plus*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

grand côté est opposé au plus grand angle, le plus petit côté au plus petit angle, et réciproquement. Car si l'angle *ABC* est plus grand que l'angle *ACB*, l'arc *AC* sera plus grand que l'arc *AB*, et par conséquent la corde *AC* plus grande que la corde *AB*. La réciproque se démontre de même.

De l'égalité des Triangles.

79. Il y a plusieurs propositions dont la démonstration est fondée sur l'égalité de certains triangles qu'on y considère; il est donc à propos d'établir ici les caractères auxquels on peut reconnaître cette égalité. Ils sont au nombre de trois.

80. *Deux triangles sont égaux, quand ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.* Que l'angle *B* du triangle *BAC* (*fig.* 48) soit égal à l'angle *E* du triangle *EDF* (*fig.* 49); que le côté *AB* soit égal au côté *DE*; et le côté *BC* égal au côté *EF*; voici comment on peut se convaincre que ces deux triangles sont égaux.

Concevez la figure *ABC* appliquée sur la figure *DEF*, de manière que le côté *AB* soit exactement appliqué sur son égal *DE*; puisque l'angle *B* est égal à l'angle *E*, le côté *BC* tombera sur *EF*, et le point *C* tombera sur le point *F*, puisque *BC* est supposé égal à *EF*. Le point *A* étant sur *D*, et le point *C* sur *F*, il est donc évident que *AC* s'applique exactement sur *DF*, et que par conséquent les deux triangles conviennent parfaitement.

Donc, pour construire un triangle dont on connaîtrait deux côtés, et l'angle compris, on tirera (*fig.* 49), une ligne *DE* égale à l'un des côtés connus: sur cette ligne on fera (14) un angle *DEF* égal à l'angle connu, et ayant fait *EF* égal au second côté connu, on tirera *DF*, ce qui achèvera le triangle demandé.

81. *Deux triangles sont égaux, quand ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.* Que le côté *AB* (*fig.* 48) soit égal au côté *DE* (*fig.* 49), l'angle *B* égal à l'angle *E*, et l'angle *A* égal à l'angle *D*.

Concevez le côté *AB* appliqué exactement sur le côté *DE*,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

BC se couchera sur *EF*, puisque l'angle *B* est égal à l'angle *E*; pareillement, puisque l'angle *A* est égal à l'angle *D*, le côté *AC* se couchera sur *DF*; donc *AC* et *BC* se rencontreront au point *F*; donc les deux triangles sont égaux.

Donc, pour construire un triangle dont on connaîtrait un côté et les deux angles adjacens, on tirera (*fig.* 49) une ligne *DE* égale au côté connu; aux extrémités de cette ligne on fera (14) les angles *E* et *D* égaux aux deux angles connus; alors les côtés *EF*, *DF* de ces angles termineront, par leur rencontre, le triangle demandé.

82. La proposition (81) peut servir à démontrer que *les parties* AC, BD (fig. 50) *de deux parallèles, interceptées entre deux autres parallèles* AB, CD, *sont égales*. Abaissez les deux perpendiculaires *AE*, *BF*; les angles *AEC*, *BFD* sont égaux, puisqu'ils sont droits; et à cause des parallèles *AC* et *BD*, *AE* et *BF*, l'angle *EAC* est égal à l'angle *FBD* (43). D'ailleurs *AE* est égal à *BF* (36); donc les deux triangles *AEC*, *BFD* sont égaux, puisqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; donc *AC* est égal à *BD*.

On démontrera de même, que si *AC* est égal et parallèle à *BD*, *AB* sera égal et parallèle à *CD*; car outre le côté *AC* égal à *BD*, et l'angle droit en *E* ainsi qu'en *F*, l'angle *ACE* sera égal à *BDF*, puisque *AC* est parallèle à *BD* (37); donc (75) le troisième angle *EAC* sera égal au troisième angle *DBF*; donc les deux triangles auront un côté égal adjacent à deux angles égaux; donc *AE* est égal à *BF*, et par conséquent les deux lignes sont parallèles; or, de là et de ce qu'on vient de démontrer (82), il s'ensuit que *AB* est égal à *CD*.

83. *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.* Que le côté *AB* (*fig.* 48) soit égal au côté *DE* (*fig.* 49); le côté *BC* égal au côté *EF*, et le côté *AC* égal au côté *DF*.

Concevez le côté *AB* exactement appliqué sur *DE*, et le plan *BAC* couché sur le plan de la figure *DEF*; je dis que le point *C* tombe sur le point *F*.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Décrivez des points *D* et *E* comme centres, et des rayons *DF* et *EF*, les deux arcs *IK* et *HG* qui se coupent en *F*; il est évident que le point *C* doit tomber sur quelque point de *IK*, puisque *AC* est égal à *DF*; par une semblable raison le point *C* doit tomber sur quelque point de *GH*, puisque *BC* est égal à *EF*; il doit donc tomber sur le point *F* qui est le seul point commun que ces deux arcs puissent avoir d'un même côté de *DE*; donc les deux triangles conviennent parfaitement, et sont par conséquent égaux.

Donc, pour construire un triangle dont on connaîtrait les trois côtés, il faut (*fig.* 49) tirer une droite *DE* égale à l'un des côtés connus; du point *D* comme centre, et d'un rayon égal au second côté connu, décrire l'arc *IK*; pareillement du point *E* comme centre, et d'un rayon égal au troisième côté connu, décrire l'arc *GH*: enfin du point d'intersection *F*, tirer aux points *D* et *E*, les droites *FD* et *FE*.

Des Polygones.

84. Une figure de plusieurs côtés s'appelle en général un *Polygone*.

Lorsqu'elle a trois côtés, on l'appelle ... *Triangle ou Trilatère;*

lorsqu'elle en a
4.. *Quadrilatère;*
5.. *Pentagone;*
6.. *Hexagone;*
7.. *Heptagone;*
8.. *Octogone;*
9.. *Ennéagone;*
10.. *Décagone.*

Nous n'étendons pas davantage la liste de ces noms, parce qu'une figure est aussi bien désignée en énonçant le nombre de ses côtés, qu'en employant ces différens noms, dont le grand nombre chargerait assez inutilement la mémoire; nous n'exposons ceux-ci que parce qu'ils se rencontrent plus fréquemment que les autres.

On appelle angle *saillant*, celui dont le sommet est hors de la figure; la *figure* 51 a tous ses angles saillans.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

L'angle *rentrant* est, au contraire, celui dont le sommet entre dans la figure; l'angle *CDE* (*fig.* 52) est un angle rentrant.

On appelle *diagonale*, une ligne tirée d'un angle à un autre, dans une figure quelconque. *AD*, *AC* (*fig.* 51) sont des diagonales.

85. *Tout polygone peut être partagé, par des diagonales menées d'un de ses angles, en autant de triangles moins deux, qu'il a de côtés.* L'inspection des *figures* 51 et 52 suffit pour faire sentir que cela est vrai généralement.

86. Donc *pour avoir la somme de tous les angles intérieurs d'un polygone quelconque, il faut prendre* 180°, *autant de fois moins deux, qu'il y a de côtés.* Car il est évident que la somme des angles intérieurs des polygones *ABCDE* (*fig.* 51), et *ABCDEF* (*fig.* 52), est la même que celle des angles des triangles *ABC*, *ACD*, etc. Or la somme des trois angles de chacun de ces triangles est de 180°; il faut donc prendre 180° autant de fois qu'il y a de triangles, c'est-à-dire (85) autant de fois moins deux, qu'il y a de côtés.

Remarque. Dans la *figure* 52, l'angle *CDE*, pour être compris dans la proposition précédente, doit être compté, non pas pour la partie *CDE* extérieure au polygone, mais pour la partie *CDE* composée des angles *ADE*, *ADC*; c'est un angle de plus de 180°, et qu'on ne doit pas moins considérer comme angle, que tout autre angle au-dessous de 180°. Car un angle n'est en général (10), que la quantité dont une ligne a tourné autour d'un point fixe; et soit qu'elle tourne de plus ou de moins que 180°, la quantité dont elle a tourné est toujours un angle.

87. *Si l'on prolonge, dans le même sens, tous les côtés d'un polygone qui n'a point d'angles rentrans, la somme de tous les angles extérieurs vaudra* 360°, *quelque nombre de côtés qu'ait le polygone.* Voyez *fig.* 51. Car chaque angle extérieur est le supplément de l'angle intérieur qui lui est contigu; ainsi les angles, tant intérieurs qu'extérieurs, valent autant de fois 180° qu'il y a de côtés; mais (86) les intérieurs ne diffè-

rent

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

rent de cette somme, que de deux fois 180° ou 360°; il reste donc 360° pour les angles extérieurs.

88. On appelle polygone *régulier*, celui qui a tous ses angles égaux et tous ses côtés égaux. *Voyez* fig. 53.

Il est donc toujours facile de savoir combien vaut chaque angle intérieur d'un polygone régulier; car ayant trouvé par la proposition enseignée (86) combien valent ensemble tous les angles intérieurs, il n'y aura qu'à diviser cette valeur totale par le nombre des côtés; par exemple, si l'on demande combien vaut chaque angle intérieur d'un pentagone régulier; comme il y a 5 côtés, je prends 180°, 5 fois moins deux, c'est-à-dire 3 fois; ce qui donne 540° pour la valeur des 5 angles intérieurs; donc, puisqu'ils sont tous égaux, chacun doit valoir la cinquième partie de 540°, c'est-à-dire 108°.

89. De la définition d'un polygone régulier il suit qu'*on peut toujours faire passer une même circonférence de cercle par tous les angles d'un polygone régulier.* Car il est prouvé (54) qu'on peut faire passer une circonférence de cercle par les trois points A, B, C, (*fig.* 53); or je dis qu'elle passe aussi par l'extrémité du côté CD; en effet, il est facile de prouver que le point D, où cette circonférence doit rencontrer le côté CD, est éloigné de C d'une quantité égale à BC; car l'angle ABC étant égal à BCD, les arcs AEC, BFD, dont les moitiés servent de mesure à ces angles (63), doivent être égaux; retranchant de chacun l'angle commun $AFED$, les arcs restans CD et AB doivent être égaux; donc aussi (7) les cordes CD et AB sont égales; donc le point D où le côté CD est rencontré par la circonférence qui passe par A, B, C, est le même que le sommet de l'angle du polygone. On démontrera la même chose des angles E et F.

90. On voit donc que *pour circonscrire un cercle à un polygone régulier, la question se réduit à faire passer un cercle par les sommets de trois de ses angles*, ce qui se fait de la manière enseignée (54).

91. *Toutes les perpendiculaires abaissées du centre d'un*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

polygone régulier sur les côtés, sont égales. Car ces perpendiculaires *OH*, *OL*, devant tomber sur le milieu de chaque côté (52), les lignes *AH* et *AL* seront égales; or *AO* est commun aux deux triangles *OHA* et *OLA*; d'ailleurs, à cause des triangles *ABO*, *AOF*, qui ont tous leurs côtés égaux chacun à chacun, les angles *OAH*, *OAL* sont égaux; donc les deux triangles *OAH*, *OAL*, qui ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, sont égaux (80). Donc *OH* est égal à *OL*. Donc, si d'un rayon égal à l'une de ces perpendiculaires, on décrit une circonférence, elle touchera tous les côtés. Cette circonférence est dite *inscrite* au polygone.

Les perpendiculaires *OH*, *OL* s'appellent, chacune, *l'apothème* du polygone.

92. Il est clair que si du centre du polygone régulier on tire des lignes à tous les angles, ces lignes comprendront entre elles des angles égaux, puisque ces angles auront pour mesure des arcs qui sont soutendus par des cordes égales; donc, *pour avoir l'angle au centre d'un polygone régulier, il faut diviser* 360° *par le nombre des côtés.* Car ces angles égaux ont tous ensemble pour mesure la circonférence entière. Par exemple, pour l'hexagone, chaque angle au centre sera la sixième partie de 360°, c'est-à-dire, sera de 60°.

93. Donc *le côté de l'hexagone est égal au rayon du cercle circonscrit.* Car en tirant les rayons *AO* et *BO*, le triangle *AOB* sera isocèle, et par conséquent (77) les deux angles *BAO* et *AOB* seront égaux; or comme l'angle *AOB* est de 60°, les deux autres ensemble doivent valoir 120° (75); donc chacun d'eux est de 60°; les trois angles sont donc égaux, et par conséquent le triangle est équilatéral (77); donc *AB* est égal au rayon *AO*.

94. Nous n'en dirons pas davantage sur les polygones réguliers, dont les autres propriétés sont d'ailleurs très-faciles à déduire de celles qu'on vient d'exposer; la seule chose que

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

nous ajouterons, est l'usage de la dernière proposition pour la division de la circonférence, de 15 en 15 degrés.

On tirera deux diamètres *AB*, *DE* (*fig.* 54) perpendiculaires l'un à l'autre, et ayant pris une ouverture de compas égale au rayon *CE*, on la portera successivement de *E* en *F*, et de *A* en *G*; le quart de la circonférence *AE* sera, par ce moyen, divisé en trois parties égales *AF*, *FG*, *GE*; car puisqu'on a pris le rayon pour l'ouverture du compas, il suit de ce qui vient d'être dit (93) que l'arc *EF* est de 60°; or *EA* est de 90°, donc *AF* est de 30°. Par la même raison, *AG* est de 60°; et comme *AE* est de 90°, *GE* est donc de 30°; enfin, si de l'arc total *AE* de 90°, vous retranchez les arcs *AF* et *GE*, qui valent ensemble 60°, l'arc restant *FG* sera de 30°. Ayant ainsi divisé le quart de circonférence en arcs de 30°, il sera facile d'avoir l'arc de 15°, en divisant en deux parties égales chacun des arcs *AF*, *FG* et *GE* par la méthode donnée (53.) On fera les mêmes opérations sur chacun des trois autres quarts *AD*, *DB* et *BE*. Si l'on voulait conduire cette division jusqu'à l'arc de 1°, il faudrait y aller par tâtonnement, car il n'y a pas de méthode géométrique pour cela. Il y a cependant une méthode géométrique pour venir directement jusqu'à l'arc de 3°; mais comme les propositions qui y conduisent ne peuvent nous être d'aucune autre utilité, nous n'en parlerons point.

Remarquons seulement que ce que nous entendons ici par opérations géométriques, ce sont celles dans lesquelles la chose dont il s'agit peut être exécutée par un nombre *déterminé* d'opérations faites avec la règle et le compas seuls.

Des Lignes proportionnelles.

95. Avant que d'entrer en matière sur ce qui regarde les lignes proportionnelles, nous placerons ici sur les proportions, quelques propositions qui sont une suite immédiate de ce que nous avons enseigné dans l'Arithmétique. Mais pour abréger le discours, nous conviendrons, pour l'avenir, que lorsque deux quantités devront

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

être ajoutées l'une à l'autre, nous indiquerons cette opération par ce signe $+$, qui équivaudra au mot *plus;* ainsi $4+3$ signifiera 4 plus 3, ou 4 ajouté à 3, ou 3 ajouté à 4. Pareillement, pour marquer la soustraction, nous nous servirons de ce signe $-$, qui équivaudra au mot *moins;* ainsi $5-2$ signifiera 5 moins 2, ou qu'on doit retrancher 2 de 5. Comme il n'est pas toujours question de faire réellement les opérations, mais de raisonner sur des circonstances de ces opérations, il est souvent plus utile de les représenter que d'en donner le résultat.

Pour marquer la multiplication, nous nous servirons de ce signe $\times$, qui équivaudra à ces mots *multiplié par;* ainsi 5×4, signifiera 5 multiplié par 4. Et pour marquer la division, nous ferons comme en Arithmétique : nous écrirons le dividende et le diviseur en forme de fraction, dont le dividende sera numérateur, et le diviseur, dénominateur; ainsi $\frac{12}{7}$ marquera 12 divisé par 7. Cela posé, nous avons vu (*Arith.* 185) que dans toute proportion, la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent; et qu'il en est de même de la différence des antécédens comparée à celle des conséquens.

96. Nous pouvons donc conclure de là, que *dans toute proportion, la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme la différence des antécédens est à la différence des conséquens;* car, puisque dans la proportion $48:16::12:4$, par exemple, on a (*Arith.* 185)

$$48+12:16+4::12:4$$
$$\text{et...}\ 48-12:16-4::12:4$$

il est évident (à cause du rapport commun de $12:4$) qu'on peut conclure

$$48+12:16+4::48-12:16-4.$$

Le raisonnement est le même pour toute autre proportion.

97. On peut donc, en mettant dans cette dernière proportion le troisième terme à la place du second, et le second à la place du troisième, ce qui est permis (*Arith.* 182), dire aussi

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

que *la somme des antécédens est à leur différence, comme la somme des conséquens est à leur différence.*

98. Si dans la proportion $48 : 16 :: 12 : 4$, on échange les places des deux moyens; ce qui donnera $48 : 12 :: 16 : 4$, et qu'on applique à celle-ci la proposition qu'on vient de démontrer (96); on aura $48 + 16 : 12 + 4 :: 48 - 16 : 12 - 4$ qui, à l'égard de la proportion, $48 : 16 :: 12 : 4$, fournit cette proposition, *la somme des deux premiers termes d'une proportion est à la somme des deux derniers termes, comme la différence des deux premiers est à la différence des deux derniers,* ou (en mettant le troisième terme à la place du second, et le second à la place du troisième), *la somme des deux premiers termes est à leur différence, comme la somme des deux derniers est à leur différence.*

99. *Si un rapport est composé du produit de plusieurs autres rapports, on peut, à chacun des rapports composans, substituer un rapport exprimé par d'autres termes, pourvu que ces deux termes aient le même rapport que ceux auxquels on les substituera.* Par exemple, dans le rapport de $6 \times 10 : 2 \times 5$, on peut, au lieu des facteurs 6 et 2, substituer 3 et 1, ce qui donnera le rapport composé $3 \times 10 : 1 \times 5$ qui est le même que le rapport $6 \times 10 : 2 \times 5$. En effet, puisque $6 : 2 :: 3 : 1$, on peut, sans changer cette proportion (*Arith.* 183), multiplier les antécédens par 10 et les conséquens par 5, et alors on aura

$$6 \times 10 : 2 \times 5 :: 3 \times 10 : 1 \times 5.$$

Il est facile de voir que ce raisonnement s'applique à tout autre rapport.

100. Si deux, ou un plus grand nombre de proportions, sont telles que dans le premier rapport de l'une, l'antécédent se trouve égal au conséquent de l'autre, on pourra, lorsqu'il s'agira de multiplier ces proportions par ordre, omettre les termes qui se trouveront communs d'antécédent à conséquent; par exemple, si on a les deux proportions

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

$$\begin{array}{l} 6 : 4 :: 12 : 8 \\ 4 : 3 :: 20 : 15 \\ \hline \text{on pourra conclure} \ldots\ldots\ldots 6 : 3 :: 12 \times 20 : 8 \times 15. \end{array}$$

Car quand on admettrait le multiplicateur commun 4, le rapport de 6×4 à 4×3 qu'on aurait alors, ne différerait pas du rapport de 6 à 3 (*Arith.* 170) que l'on a en omettant ce facteur.

$$\begin{array}{l} \text{De même, si on a } 6 : 4 :: 12 : 8 \\ \qquad\qquad\qquad\quad 4 : 3 :: 20 : 15 \\ \qquad\qquad\qquad\quad 3 : 7 :: 21 : 49 \\ \hline \text{on en conclura } 6 : 7 :: 12 \times 20 \times 21 : 8 \times 15 \times 49. \end{array}$$

La même chose aura lieu pour les seconds rapports, et par la même raison.

Cette observation est utile pour trouver le rapport de deux quantités, lorsque ce rapport doit être composé; parce qu'alors on compare chacune de ces quantités à d'autres quantités qu'on emploie comme auxiliaires, et qui ne doivent plus rester après la démonstration.

Nous allons maintenant transporter aux lignes les connaissances que nous avons tirées des nombres sur les proportions. Mais pour rendre nos démonstrations plus courtes et plus générales, nous ne donnerons aucune valeur particulière à ces lignes, sinon dans quelques applications; au reste on peut toujours s'aider par des comparaisons avec des nombres.

Les rapports que nous considérerons ici sont les rapports géométriques. Ainsi quand nous dirons, une telle ligne est à une telle ligne, comme 5 est à 4, par exemple, on doit entendre que la première contient la seconde, autant que 5 contient 4.

101. *Si sur un des côtés* AZ *d'un angle quelconque* ZAX (fig. 55), *on marque les parties égales* AB, BC, CD, DE, *etc. de telle grandeur et en tel nombre qu'on voudra, et si après avoir tiré à volonté, par l'un* F *des points de division, la ligne* FL, *qui rencontre le côté* AX *en* L, *on mène par les autres*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

points de division, les lignes BG, CH, DI, EK, *etc., parallèles à* FL; *je dis que les parties* AG, GH, HI, *etc. du côté* AX, *seront aussi égales entre elles.* Menons par les points *G, H, I,* etc. les lignes *GM, HN, IO,* etc. parallèles à *AK*; les triangles *ABG, GMH, HNI, IOK,* etc. seront tous égaux entre eux; car 1°. les lignes *GM, HN, IO,* etc. sont chacune égales à *AB,* puisque (82) elles sont égales à *BC, CD, DE,* etc.; 2°. les angles *GMH, HNI, IOK,* etc. sont tous égaux entre eux, puisqu'ils sont tous égaux à l'angle *ABG* (43); 3°. les angles *MGH, NHI, OIK,* etc. sont tous égaux entre eux, puisqu'ils sont tous égaux à l'angle *BAG* (43).

Tous les triangles *BAG, MGH, NHI,* etc. ont donc un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; ils sont donc tous égaux; donc les côtés *AG, GH, HI,* etc. de ces triangles, sont tous égaux entre eux; donc la ligne *AX* est en effet divisée en parties égales par les parallèles.

Il est donc évident que si *AB* est telle partie que ce soit de *AG, BC* sera une semblable partie de *GH*; *CD* sera une semblable partie de *HI*; si, par exemple, *AB* est les $\frac{2}{3}$ de *AG, BC* sera les $\frac{2}{3}$ de *GH*, et ainsi de suite.

Il en sera de même de 2, 3, 4, etc. parties de *AF* comparées à 2, 3, 4, etc. parties de *AL*; donc une portion quelconque *AD* ou *DF* de la ligne *AF*, est même partie de la portion correspondante *AI* ou *IL* de la ligne *AL*, que *AB* l'est de *AG*; c'est-à-dire, que. . . .

$$AD:AI::AB:AG$$
$$\text{et } DF:IL::AB:AG.$$

On peut dire de même que $AF : AL :: AB : AG$;

Donc (à cause du rapport de $AB : AG$ commun à ces trois proportions) on peut dire que

$$AD:AI::DF:IL$$
$$\text{et } AD:AI::AF:AL.$$

102. *Donc si par un point* D (fig. 56) *pris à volonté sur un des côtés* AF *d'un triangle* AFL, *on mène une ligne* DI

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

parallèle au côté FL; *les deux côtés* AF, AL *seront coupés proportionnellement*, c'est-à-dire qu'on aura toujours

$$AD:AI::DF:IL$$
$$\text{et } AD:AI::AF:AL,$$

ou bien, en échangeant les places des deux moyens (*Arith.* 182),

$$AD:DF::AI:IL$$
$$\text{et } AD:AF::AI:AL,$$

quel que soit d'ailleurs l'angle *FAL*.

En effet on peut toujours concevoir le côté *AF* coupé en tel nombre de parties égales qu'on voudra, et par conséquent en un nombre infini de parties égales : or dans ce cas le point *D* ne pouvant manquer d'être un des points de division, le raisonnement de l'article précédent s'applique ici mot à mot.

103. Donc, 1°. *si d'un point* A *pris à volonté hors de la ligne* GL (fig. 57), *on tire à différens points de cette ligne plusieurs lignes* AG, AH, AI, AK, AL, toute parallèle BF *à la ligne* GL, *coupera toutes ces lignes en parties proportionnelles*, c'est-à-dire qu'on aura

$$AB:BG::AC:CH::AD:DI::AE:EK::AF::FL$$
$$\text{et } AB:AG::AC:AH::AD:AI::AE:AK::AF:AL.$$

Car en considérant successivement les angles *GAH*, *GAI*, *GAK*, *GAL*, comme on a fait l'angle *FAL* dans la *figure* 56, on démontrera de la même manière, que tous ces rapports sont égaux.

104. 2°. *La ligne* AD (fig. 56*) *qui divise en deux parties égales un angle* BAC *d'un triangle, coupe le côté opposé* BC *en deux parties* BD, DC *proportionnelles aux côtés correspondans* AB, AC, *c'est-à-dire de manière qu'on a* BD:DC:AB:AC. Car si par le point *B* on mène *BE* parallèle à *AD*, et qui rencontre *CA* prolongée en *E*, les lignes *CE*, *CB*, étant alors coupées proportionnellement (102) on aura..... BD : CD :: AE : AC. Or il est facile de voir que *AE* est égal à *AB*; car à cause des parallèles *AD* et *BE* l'angle *E* est égal à l'angle *DAC* (37), et l'angle *EBA* est égal à son alterne-interne,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

BAD (38); donc, puisque *DAC* et *BAD* sont égaux comme étant les moitiés de *BAC*, les angles *E* et *EBA* seront égaux; donc les côtés *AE* et *AB* sont aussi égaux; donc la proportion *BD*:*CD*::*AE*:*AC*, se change en celle-ci *BD*:*CD*::*AB*:*AC*.

105. *Si on coupe les lignes* AF *et* AL (fig. 56) *proportionnellement aux points* D *et* I, *c'est-à-dire de manière que*..... AF : AD :: AL : AI, *la ligne* DI *sera parallèle à* FL. Car la partie de *AL* que couperait la parallèle menée du point *D*, doit (102) être contenue dans *AL*, autant que *AD* l'est dans *AF*; or, par la supposition, *AI* est contenue dans *AL* précisément ce même nombre de fois; donc cette partie ne peut être autre que *AI*.

106. *Donc, si on coupe proportionnellement aux points* B, C, D, E, F (fig. 57), *les lignes* AG, AH, AI, AK, AL, *menées du point* A *à différens points de la ligne* GL; *la ligne* BCDEF *qui passera par tous ces points, sera une ligne droite parallèle à* GL.

107. Les propositions enseignées (102 *et suiv.*) sont également vraies, lorsque la ligne *BF*, au lieu d'être entre le point *A* et la ligne *GL*, comme dans la *figure* 57, tombe au-delà du point *A*, comme dans la *figure* 58. Car tout ce qui a été dit de la *figure* 55, et qui sert de base aux propositions établies (102 *et suiv.*), aurait également lieu pour les parallèles qui couperaient *ZA* et *XA* prolongées dans la *figure* 55.

De la similitude des Triangles.

108. On appelle côtés *homologues* de deux triangles, ou en général, de deux figures semblables, ceux qui ont des positions semblables, chacun dans la figure à laquelle il appartient.

109. *Deux triangles qui ont les angles égaux chacun à chacun, ont les côtés homologues proportionnels, et sont par conséquent semblables.* Si les deux triangles *ADI*, *AFL* (*fig.* 59 et 60) sont tels, que l'angle *A* du premier soit égal à l'angle *A* du second, l'angle *D* égal à l'angle *F*, et l'angle *I* égal à

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

l'angle *L*, je dis qu'on aura *AD* : *AF* :: *AI* : *AL* :: *DI* : *FL*. Car puisque l'angle *A* du premier est égal à l'angle *A* du second, on peut appliquer ces deux triangles l'un sur l'autre de la manière représentée dans la *figure* 56; alors, puisque l'angle *D* est égal à l'angle *F*, les lignes *DI* et *FL* seront parallèlles (42); donc, selon ce qui a été dit (102), on aura... *AD* : *AF* :: *AI* : *AL*. Tirons maintenant par le point *I* la droite *IH* parallèle à *AF*; selon ce qui a été dit (102), on voit que *AI* : *AL* :: *FH* : *FL*, ou (à cause que *FH* est égal à *DI* (82) :: *DI* : *FL*; donc *AD* : *AF* :: *AI* : *AL* :: *DI* : *FL*.

Comme on peut échanger les places des moyens, on peut dire aussi *AD* : *AI* :: *AF* : *AL*, et *AI* : *DI* :: *AL* : *FL*.

110. Puisque (74) lorsque deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisième angle est nécessairement égal au troisième angle; concluons-en que *deux triangles sont semblables, lorsqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun.*

111. On a vu (43) que deux angles qui ont les côtés parallèles, et qui sont tournés d'un même côté, sont égaux; donc *deux triangles qui ont les côtés parallèles, ont les angles égaux chacun à chacun, et ont, par conséquent,* (109) *les côtés proportionnels.* Donc *aussi deux triangles qui ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun, ont aussi ces mêmes côtés proportionnels;* car si on fait faire un quart de révolution à l'un de ces triangles, ses côtés deviendront parallèles à ceux du second.

112. *Si de l'angle droit* A *d'un triangle rectangle* BAC (fig. 43), *on abaisse une perpendiculaire* AD *sur le côté opposé* BC (*qu'on appelle* hypoténuse); 1°. *les deux triangles* ADB, ADC, *seront semblables entre eux et au triangle* BAC. 2°. *La perpendiculaire* AD *sera moyenne proportionnelle entre les deux parties* BD *et* DC *de l'hypoténuse.* 3°. *Chaque côté* AB *ou* CA *de l'angle droit, sera moyen proportionnel entre l'hypoténuse et le segment correspondant* BD *ou* CD. Car les deux triangles *ADB*, *ADC*, ont chacun un angle droit

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

en D, comme le triangle BAC en a un en A; d'ailleurs ils ont de plus chacun un angle commun avec ce même triangle BAC, puisque l'angle B appartient tout-à-la-fois au triangle ADB et au triangle BAC; pareillement l'angle C appartient tout-à-la-fois au triangle ADC et au triangle BAC; donc (110) ces trois triangles sont semblables. Donc (109) comparant les côtés homologues des deux triangles ADB et ADC, on aura

$$BD : AD :: AD : DC;$$

comparant les côtés homologues des deux triangles ADB, BAC, on aura

$$BD : AB :: AB : BC;$$

enfin, comparant les côtés homologues des triangles ADC et BAC; on aura

$$CD : AC :: AC : BC$$

où l'on voit que AD est (*Arith.* 175) moyenne proportionnelle entre BD et DC; AB moyenne proportionnelle entre BD et BC; et enfin AC moyenne proportionnelle entre CD et BC.

113. *Deux triangles qui ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, ont aussi les deux autres angles égaux, et sont par conséquent semblables.* Si les deux triangles ADI, AFL (*fig.* 59 *et* 60) sont tels, que l'angle A du premier soit égal à l'angle A du second, et qu'en même temps les côtés qui comprennent ces angles soient tels, qu'on ait $AD : AF :: AI : AL$; je dis qu'ils seront semblables; c'est-à-dire qu'ils auront les autres angles égaux chacun à chacun; et leurs troisièmes côtés DI et FL en même rapport que AD et AF, ou que AI et AL. Car on peut appliquer l'angle A du triangle ADI sur l'angle A du triangle AFL, de la manière représentée par la *figure* 56. Or, puisqu'on suppose que $DA : AF :: AI : AL$, les deux droites AF et AL sont donc coupées proportionnellement aux points D et I; donc DI est parallèle à FL (105); donc (37) l'angle AFL est égal à l'angle ADI, et l'angle ALF égal à l'angle AID. De là et de ce qui a été dit (109), il suit que

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

$$DI : FL :: AD : AF :: AI : AL.$$

114. *Deux triangles qui ont leurs trois côtés homologues proportionnels, ont les angles égaux chacun à chacun, et sont par conséquent semblables.* Si on suppose (*fig.* 61 *et* 62) que $DE : AB : EF : BC :: DF : AC$, je dis que l'angle D est égal à l'angle A, l'angle E est égal à l'angle B, et l'angle F égal à l'angle C.

Imaginons qu'on ait construit sur DE un triangle DEG, dont l'angle DEG soit égal à l'angle B, et l'angle EDG à l'angle A; le triangle DEG sera semblable au triangle ABC (110); donc (109) $DE : AB :: GE : BC :: DG : AC$; mais par la supposition, on a $DE : AB :: EF : BC :: DF : AC$; donc, à cause du rapport commun de $DE : AB$, on aura $GE : BC :: DG : AC :: EF : BC :: DF : AC$, d'où l'on peut tirer ces deux proportions :

$$GE : BC :: EF : BC$$
$$\text{et } DG : AC :: DF : AC.$$

Donc, puisque les deux conséquens sont égaux entre eux dans chacune de ces deux proportions, les antécédens seront aussi égaux entre eux; donc GE est égal à EF, et DG égal à DF. Le triangle DEG a donc ses trois côtés égaux à ceux du triangle DEF; il est donc (83) égal à ce triangle DEF; or on vient de voir que le triangle DEG est semblable à ABC; DEF est donc aussi semblable à ABC.

115. Nous avons prouvé ci-dessus (111) que quand la ligne DI (*fig.* 56) est parallèle au côté FL, les deux triangles ADI et AFL sont semblables; comme cette vérité a lieu, de quelque grandeur que puisse être l'angle A, on doit conclure (*fig.* 57) que les triangles AGH, AHI, AIK, AKL sont semblables aux triangles ABC, ACD, ADE, AEF chacun à chacun, et que par conséquent (109), $KL : EF :: AK : AE :: KI : DE :: AI : AD :: IH : CD :: AH : AC :: GH : BC$; donc en ne tirant de cette suite de rapports, que ceux qui renferment des parties des lignes GL et BF, on

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

aura $KL : EF :: KI : DE :: IH : CD :: GH : CB$; c'est-à-dire, que *si d'un point* A *on tire à différens points d'une ligne droite* GL, *plusieurs autres lignes droites, ces lignes couperont toute parallèle à* GL, *de la même manière qu'elles coupent* GL, *c'est-à-dire en parties qui auront entre elles les mêmes rapports que les parties correspondantes de* GL.

116. Les principes que nous venons d'exposer, sont la base de toutes les parties des Mathématiques théoriques ou pratiques. Comme il importe de se rendre ces principes familiers, nous insisterons un peu sur leur usage, tant par cette vue, que parce que cela nous fournira l'occasion d'expliquer plusieurs pratiques utiles.

117. La proposition enseignée (101) fournit un moyen bien naturel de diviser une ligne donnée en parties égales ou en parties qui aient entre elles des rapports donnés. Supposons que AR (*fig.* 55) soit une ligne qu'on veut diviser en deux parties qui aient entre elles un rapport donné, par exemple celui de 7 à 3; on tirera par le point A, et sous tel angle qu'on voudra, une ligne indéfinie AZ, et ayant pris arbitrairement une ouverture de compas AB, on la portera dix fois le long de AZ; je suppose que Q soit l'extrémité de la dernière partie, on joindra les extrémités Q et R de la ligne AQ, et de la ligne donnée AR; alors, si par le point D, extrémité de la troisième division, on tire DI parallèle à QR, la ligne AR sera divisée en deux parties RI et AI qui seront entre elles :: 7 : 3; car (101 et 102) elles sont entre elles :: DQ : AD que l'on a faites de 7 et de 3 parties.

On voit par là que si l'on voulait diviser la ligne AR en un plus grand nombre de parties, par exemple en 5 parties qui fussent entre elles comme les nombres 7, 5, 4, 3, 2; on ajouterait tous ces nombres entre eux, ce qui donnerait 21; on porterait 21 ouvertures égales de compas sur la ligne AZ, et on tirerait des parallèles à la ligne QR, par les extrémités des 7^e, 5^e, 4^e, 3^e, 2^e divisions.

118. Si les rapports étaient donnés en lignes, on mettrait

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

toutes ces lignes bout à bout sur la ligne AZ. On voit donc ce qu'il y aurait à faire, si l'on voulait diviser la ligne AR en parties égales.

Mais quand les parties de la ligne qu'on doit diviser doivent être petites, ou quand cette ligne elle-même est petite, le plus léger défaut dans les parallèles influe beaucoup sur l'égalité ou l'inégalité des parties; c'est pourquoi il ne sera pas inutile d'exposer la méthode suivante.

119. fg (*fig.* 63) est la ligne qu'il s'agit de diviser en parties égales, en 6, par exemple : on tirera une ligne indéfinie BC sur laquelle on portera six fois de suite une même ouverture de compas, arbitraire : soit BC la ligne qui comprend ces six parties, on décrira sur BC un triangle équilatéral BAC, en décrivant des deux points B et C comme centres, et de l'intervalle BC comme rayon, deux arcs qui se coupent en A. Sur les côtés AB, AC, on prendra les parties AF, AG égales chacune à fg, et ayant tiré FG, cette ligne sera égale à fg; on mènera du point A à tous les points de division de BC, des lignes droites, qui couperont FG de la même manière que BC est coupée. Car les lignes AF, AG étant égales entre elles, et les lignes AB, AC aussi égales entre elles, on a $AB : AF :: AC : AG$; donc AB, AC sont coupées proportionnellement en F et G; donc FG est parallèle à BC, et par conséquent (111) le triangle FAG est semblable à ABC; donc FAG est équilatéral; donc FG est égal à AF, et par conséquent à fh; de plus FG étant parallèle à BC, ces deux lignes (115) doivent être coupées proportionnellement par les lignes menées du point A à la droite BC.

Ce que nous venons d'exposer peut servir à former et à diviser l'échelle qui doit servir lorsqu'on veut réduire une figure du grand au petit; mais l'échelle la plus commode dans un grand nombre d'opérations, est celle qu'on appelle échelle de *dixme* : voici comment elle se construit. Aux extrémités A et B de la ligne AB (*fig.* 64) qu'on veut diviser en 100 parties, on élève les perpendiculaires AC, BD, sur chacune desquelles

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

on porte dix ouvertures de compas égales entre elles, mais de grandeur arbitraire; ayant tiré CD, on divise AB en dix parties, et on porte ces parties sur CD, après quoi on tire des transversales, comme on le voit dans la figure; et par les points de division correspondans de CA et de BD, on tire des lignes droites qui sont autant de parallèles à AB; alors on est dans le même cas que si l'on avait divisé AB en 100 parties : si l'on veut, par exemple, avoir 47 parties dont AB en contient 100, je prends sur la ligne qui passe au n° 7, la partie $7H$ depuis CA jusqu'à la transversale qui passe par le n° 40, et ainsi pour tout autre nombre.

En effet, à cause des triangles semblables $C7v$, CAx, il est évident que $7v$ contient 7 parties dont Ax en contiendrait 10; donc, puisque vH contient 4 intervalles égaux à Ax, la ligne entière $7H$ vaut 47 parties dont Ax en contiendrait 10, c'est-à-dire 47 parties, dont AB en contiendrait 100.

120. La proposition démontrée (102) peut servir *à trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données* ab, cd, ef (*fig.* 56) c'est-à-dire une ligne qui soit le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers seraient *ab*, *cd*, *ef*. Pour cet effet, après avoir tiré deux droites indéfinies AL, AL, qui fassent entre elles tel angle qu'on voudra, on portera ab de A en D, et cd de A en F; on portera pareillement ef de A en I; et ayant joint les deux points D et I par la droite DI, on mènera par le point F la ligne FL, parallèle à DI, qui déterminera AL pour la quatrième proportionnelle cherchée.

On peut aussi, en vertu de la proposition enseignée (109), s'y prendre de cette autre manière. Prendre sur une ligne indéfinie AF (*fig.* 56), les deux parties AD, AF égales à ab, cd respectivement; et ayant tiré DI égale à ef, et sous tel angle qu'on voudra, on tirera par le point A et le point I, la droite AIL que l'on coupera par une ligne FL parallèle à DI; cette parallèle sera le quatrième terme cherché.

Quand les deux termes moyens d'une proportion sont égaux,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

le quatrième terme s'appelle alors *troisième proportionnel*, parce qu'il n'y a que trois quantités différentes dans la proportion. Ainsi, quand on demande une troisième proportionnelle à deux lignes données, il faut entendre qu'on demande le quatrième terme d'une proportion dans laquelle la seconde des deux lignes données fait l'office des deux moyens, et l'opération est la même que celle qu'on vient d'enseigner.

121. Les propositions enseignées (109, 113 et 114) peuvent servir à résoudre ce problème général : *Étant données trois des six choses* (angles et côtés) *qui entrent dans un triangle, trouver les trois autres, pourvu que parmi les trois choses connues il y ait un côté.* En voici des exemples.

Supposons qu'étant au point B (*fig.* 65) dans la campagne, on veut savoir quelle distance il y a de ce point B à un objet A dont on ne peut approcher. On plantera un piquet à une certaine distance BC que l'on mesurera, et que l'on fera à peu près égale à BA estimée grossièrement. Puis, avec le graphomètre que nous avons décrit (23), on mesurera les angles ABC, ACB, que font avec la ligne BC les deux lignes qu'on imaginera aller de ses extrémités au point A. Cela posé, on tirera sur le papier une ligne bc (*fig.* 66) qu'on fera d'autant de parties d'une échelle que l'on construira arbitrairement, d'autant de parties, dis-je, qu'on a trouvé de pieds dans BC, si l'on a mesuré en pieds; et avec le rapporteur décrit (22), on fera au point b un angle qui ait autant de degrés qu'on en a trouvés à l'angle B; et au point c un angle qui ait autant de degrés qu'on en a trouvés à l'angle C; alors les deux lignes ab, ac se rencontreront en un point a qui représentera le point A; ensorte que si vous mesurez ab sur votre échelle, le nombre de parties que vous lui trouverez sera le nombre de pieds que contient AB. Car les deux angles b et c ayant été faits égaux aux deux angles B et C, le triangle bac est semblable au triangle BAC (110), et par conséquent leurs côtés sont proportionnels. C'est ainsi qu'on peut mesurer la distance d'une île à

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

une côte, lorsqu'on peut observer cette île de deux points de cette côte, dont la distance serait connue.

122. Par la proposition démontrée (114), on peut se dispenser de mesurer les angles, dans le cas dont nous venons de parler. En effet, il suffit, après avoir planté un piquet en un point E (*fig.* 65) qui soit sur l'alignement des points A et B, et un autre en un point F qui soit sur l'alignement des deux points A et C, il suffit, dis-je, de mesurer les lignes BC, BE, CE, BF et CF; alors on fera un triangle bec (*fig.* 66), dont les côtés bc, be, ce aient autant de parties d'une même échelle, que BC, BE, CE ont de pieds; on fera de même sur bc un autre triangle bcf dont les côtés bf, cf aient autant de parties de l'échelle, que BF et CF ont de pieds; alors prolongeant les côtés be et cf, ils se rencontreront en un point a, qui représentera le point A; ensorte que mesurant ba sur l'échelle, on jugera, par le nombre de parties qu'on trouvera, combien de pieds doit avoir AB. En effet, le triangle bec ayant les côtés proportionnels à ceux du triangle BEC, ces deux triangles doivent avoir les angles égaux; donc l'angle EBC ou ABC est égal à l'angle ebc ou abc : la même raison prouve que l'angle FCB ou ACB est égal à l'angle fcb ou acb; donc les deux triangles ACB et acb sont semblables. On voit en même temps, que par cette construction on peut déterminer les angles ABC et ACB en mesurant, avec le rapporteur, les angles abc et acb sur le papier. Au reste, quoique ces expédiens et beaucoup d'autres qu'on peut facilement imaginer d'après eux, puissent être souvent utiles, nous ne nous y arrêterons pas plus long-temps, parce que la Trigonométrie que nous enseignerons par la suite; nous fournira des moyens plus expéditifs et plus susceptibles de précision; car quoique les opérations que nous venons de décrire soient rigoureusement exactes dans la théorie, elles ne donnent cependant qu'une exactitude assez bornée dans la pratique, parce que les erreurs qu'on peut commettre dans la figure abc, toutes petites qu'elles puissent être, peuvent influer sensiblement sur les conclusions

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

qu'on en tire pour la figure *ABC*, qui est toujours incomparablement plus grande.

Des Lignes proportionnelles considérées dans le Cercle.

123. Deux lignes sont dites coupées en raison *inverse* ou *réciproque*, lorsque, pour former une proportion avec les parties de ces lignes, les deux parties de l'une se trouvent être les extrêmes, et les deux parties de l'autre, les moyens de la proportion. Et deux lignes sont dites réciproquement proportionnelles à leurs parties, lorsqu'une de ces lignes et sa partie forment les extrêmes, tandis que l'autre ligne et sa partie forment les moyens.

124. *Deux cordes* AC *et* BD (fig. 67) *qui se coupent dans le cercle, en quelque point* E *que ce soit, et sous quelque angle que ce soit, se coupent toujours en raison réciproque.* C'est-à-dire que *AE* : *BE* :: *DE* : *CE*. Car si l'on tire les cordes *AB*, *CD*, on formera deux triangles *BEA*, *CED* qu'il est aisé de démontrer être semblables, puisque outre l'angle *BEA* égal à *CED* (20), l'angle *ABE* ou *ABD* est égal à l'angle *DCE* ou *DCA*; car ces deux angles ont leur sommet à la circonférence, et s'appuient sur le même arc *AD* (63). Donc les triangles *BEA* et *CED* sont semblables (110); donc ils ont leurs côtés homologues proportionnels; c'est-à-dire que.... *AE* : *BE* :: *DE* : *CE*, d'où l'on voit que les parties de la corde *AC* sont les extrêmes, et les parties de la corde *BD* sont les moyens.

125. Puisque la proposition qu'on vient de démontrer a lieu, quelque part que soit le point *E*, et sous quelque angle que se coupent les deux cordes *AC* et *BD*, elle a donc lieu aussi lorsque les deux cordes (*fig.* 68) sont perpendiculaires l'une à l'autre, et que l'une des deux, *AC*, par exemple, passe par le centre; or, dans ce cas, la corde *BD* étant coupée en deux parties égales (51), les deux termes moyens de la proportion *AE* : *BE* :: *DE* : *CE*, deviennent égaux, et la pro-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

portion se change en cette autre, $AE : BE :: BE : CE$; donc *toute perpendiculaire* BE *abaissée d'un point* B *de la circonférence sur le diamètre, est moyenne proportionnelle entre les deux parties* AE, CE *de ce diamètre.*

126. Cette proposition a plusieurs applications utiles. Nous n'en exposerons qu'une pour le présent. C'est pour *trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données* ac, ec (fig. 70). On tirera une droite indéfinie AC, sur laquelle on placera, bout à bout, deux lignes AE, EC, égales aux lignes ac, ec; et ayant décrit sur la totalité AC comme diamètre, le demi-cercle ABC, on élevera au point de jonction E la perpendiculaire EB sur AC; cette perpendiculaire sera la moyenne proportionnelle demandée.

127. *Deux sécantes* AB, AC (fig. 69), *qui, partant d'un même point* A *hors du cercle, vont se terminer à la partie concave de la circonférence, sont toujours réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures* AD, AE, *à quelque endroit que soit le point* A *hors du cercle, et quelque angle que fassent entre elles ces deux sécantes.* Concevez les cordes CD et BE, vous aurez deux triangles ADC, AEB, dans lesquels 1°. l'angle A est commun : 2°. l'angle B est égal à l'angle C, parce que l'un et l'autre ont leur sommet à la circonférence, et embrassent le même arc DE (63); donc (110) ces deux triangles sont semblables, et ont par conséquent les côtés proportionnels; donc $AB : AC :: AE : AD$, où l'on voit que la sécante AB et sa partie extérieure AD forment les extrêmes, tandis que la sécante AC et sa partie extérieure AE forment les moyens.

128. Puisque cette proposition est vraie, quel que soit l'angle BAC; si l'on conçoit que le côté AB demeurant fixe, le côté AC tourne autour du point A pour s'écarter de AB, les deux points de section E et C s'approcheront continuellement l'un de l'autre, jusqu'à ce qu'enfin la droite AC tombant sur la tangente AF, ces deux points se confondront, et AC, AE de-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

viendront chacun égal à AF; ensorte que la proportion $AB : AC :: AE : AD$ deviendra $AB : AF :: AF : AD$; donc

129. *Si d'un point* A, *pris hors du cercle, on mène une sécante quelconque* AB *et une tangente* AF, *cette tangente sera moyenne proportionnelle entre la sécante* BA *et la partie extérieure* AD *de cette même sécante.*

130. Cette proposition peut, entr'autres usages, servir à *couper une ligne en moyenne et extrême raison.* On dit qu'une ligne AB (*fig.* 71) est coupée en moyenne et extrême raison, lorsqu'elle est coupée en deux parties AC, BC, telles que l'une BC de ces parties est moyenne proportionnelle entre la ligne entière AB et l'autre partie AC, c'est-à-dire telles que l'on ait, $AC:BC::BC:AB$. Voici comment on y parvient. On élève à l'une A des extrémités, une perpendiculaire AD, égale à la moitié de AB : du point D comme centre, et d'un rayon égal à AD, on décrit une circonférence qui coupe en E la ligne BD qui joint les deux points B et D. Enfin on porte BE de B en C, et la ligne AB est coupée en moyenne et extrême raison, au point C.

En effet la ligne AB étant perpendiculaire sur AD, est tangente (48); et puisque BF est sécante, on a (129)..... $BF : AB :: AB : BE$ ou BC. Donc (*Arithmétique* 185) $BF - AB : AB - BC :: AB : BC$; or AB est égal à FE, puisque AB est double de AD; donc $BF - AB$ est égal à BE ou BC; et comme $AB - BC$ est égal à AC, on a donc $BC:AC::AB:BC$, ou (*Arithm.* 181) $AC:BC::BC:AB$.

Des Figures semblables.

131. Deux figures d'un même nombre de côtés, sont dites *semblables*, lorsqu'elles ont les angles homologues égaux, et les côtés homologues proportionnels.

Les deux figures $ABCDE$, $abcde$ (*fig.* 72 et 73) sont semblables si l'angle A est égal à l'angle a; l'angle B égal à l'angle b; l'angle C égal à l'angle c, et ainsi de suite; et si en

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

même temps le côté *AB* contient le côté *ab*, autant que *BC* contient *bc*, autant que *CD* contient *cd*, et ainsi de suite. Ces deux conditions sont nécessaires à la fois, dans les figures de plus de trois côtés. Il n'y a que dans les triangles où l'une de ces conditions suffise, parce qu'elle entraîne nécessairement l'autre (109 et 114).

132. *Si de deux angles homologues* A *et* a, *de deux polygones semblables, on mène des diagonales* AC, AD, ac, ad, *aux autres angles, les deux polygones seront partagés en un même nombre de triangles semblables chacun à chacun.* Car l'angle *B* est (par la supposition) égal à l'angle *b* et le côté *AB* : *ab* :: *BC* : *bc*; donc les deux triangles *ABC*, *abc* qui ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, sont semblables (113); donc l'angle *BCA* est égal à l'angle *bca*, et *AC* : *ac* :: *BC* : *bc*.

Si des angles égaux *BCD*, *bcd*, on ôte les angles égaux *BCA*, *bca*, les angles restans *ACD*, *acd*, seront égaux. Or *BC* : *bc* :: *CD* : *cd*; donc, puisqu'on vient de prouver que *BC* : *bc* :: *AC* : *ac*, on aura *CD* : *cd* :: *AC* : *a c*; donc les deux triangles *ACD*, *acd* sont aussi semblables, puisqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels. On prouvera la même chose pour les triangles *ADE*, *ade*, et pour tous les autres triangles qui suivraient, si ces polygones avaient un plus grand nombre de côtés.

133. *Si deux polygones* ABCDE, abcde *sont composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, et semblablement disposés, ils seront semblables*, car les angles *B* et *E* sont égaux aux angles *b* et *e*, dès que les triangles sont semblables; et par cette même raison, les angles partiels *BCA*, *ACD*, *CDA*, *ADE* sont égaux aux angles partiels *bca*, *acd*, *cda*, *ade*; donc les angles totaux *BCD*, *CDE* sont égaux aux angles totaux *bcd*, *cde*, chacun à chacun. D'ailleurs la similitude des triangles fournit cette suite de rapports égaux *AB* : *ab* :: *BC* : *bc* :: *AC* : *ac* :: *CD* : *cd* :: *AD* : *ad* :: *DE* : *de* :: *AE* : *ae* : ne tirant de cette suite que les

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

rapports qui renferment les côtés des deux polygones, on a $AB : ab :: BC : bc :: CD : cd :: DE : de :: AE : ae$. Donc ces polygones ont aussi les côtés homologues proportionnels ; donc ils sont semblables. Donc, pour construire une figure semblable à une figure proposée $ABCDE$ (*fig.* 72), et qui ait pour côté homologue à AB, une ligne donnée ; on portera cette ligne donnée sur AB, de A en f; par le point f, on tirera fg parallèle à BC, et qui rencontre AC en g; par le point g, on mènera gh parallèle à CD, et qui rencontre AD en h; enfin par le point h, on tirera hi parallèle à ED, et l'on aura le polygone $Afghi$ semblable à $ABCDE$.

134. *Les contours de deux figures semblables sont entre eux comme les côtés homologues de ces figures ;* c'est-à-dire que la somme des côtés de la figure $ABCDE$ contient la somme des côtés de la figure $abcde$, autant que le côté AB contient le côté ab. Car dans la suite des rapports égaux, $AB : ab :: BC : bc :: DC : dc :: DE : de :: AE : ae$, la somme des antécédens est (*Arith.* 186) à la somme des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent, $:: AB : ab$; or il est évident que ces sommes sont les contours des deux figures.

135. Si l'on conçoit la circonférence de cercle $ABCDEFGH$ (*fig.* 74) divisée en tel nombre de parties égales qu'on voudra; et si ayant tiré du centre I, aux points de division, des rayons IA, IB, etc, on décrit d'un autre rayon Ia, la circonférence $abcdefgh$, rencontrée par ces rayons aux points a, b, c, d, etc.; il est évident que si dans chaque circonférence on joint les points de division par des cordes, on formera deux polygones semblables ; car les triangles ABI, abI, etc., sont semblables, puisqu'ils ont un angle commun en I compris entre deux côtés proportionnels ; car IA étant égal à IB, et Ia égal à Ib, on a évidemment $AB : BI :: aI : bI$, et la même chose se démontre de même pour les autres triangles. De là et de ce qui vient d'être dit (134), on conclura donc que le contour $ABCDEFGH$ est au contour $abcdefgh$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

:: AB : ab, ou (à cause des triangles semblables ABI, abI) :: AI : aI. Comme cette similitude ne dépend point du nombre des côtés de ces deux polygones, elle aura donc encore lieu lorsque le nombre des côtés de chacun sera multiplié à l'infini : or dans ce cas on concoit qu'il n'y a plus aucune différence entre la circonférence et le polygone inscrit; donc les circonférences mêmes $ABCDEFGH$, $abcdefgh$ seront entre elles :: AI : aI, c'est-à-dire comme leurs rayons, et par conséquent aussi comme leurs diamètres.

136. Concluons donc, 1°. *qu'on peut regarder la circonférence du cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés.* 2°. *Les cercles sont des figures semblables.* 3°. *Les circonférences des cercles sont entre elles comme leurs rayons, ou comme leurs diamètres.*

137. En général, si dans deux polygones semblables, on tire deux lignes également inclinées à l'égard de deux côtés homologues, et terminées à des points semblablement placés à l'égard de ces côtés, ces lignes, qu'on appelle *lignes homologues*, seront entre elles dans le rapport de deux côtés homologues quelconques. Car dès qu'elles font des angles égaux avec deux côtés homologues, elles feront aussi des angles égaux avec deux autres côtés homologues quelconques, puisque les angles de deux polygones semblables, sont égaux chacun à chacun; or si, dans ce cas, elles n'étaient pas dans le même rapport que deux côtés homologues, il est facile de sentir que les points où elles se terminent, ne pourraient pas être semblablement placés comme on le suppose.

138. C'est sur les principes que nous venons de poser, concernant les figures semblables, que porte, en grande partie, l'art de lever les plans. Nous disons, en grande partie, parce que, lorsque l'espace dont il s'agit de former le plan, est d'une très-grande étendue, comme l'Europe, la France, etc., l'art d'en fixer les points principaux tient à d'autres connaissances, dont ce n'est point encore ici le lieu de parler. Mais

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

pour les détails d'un pays, d'une côte, d'une rade, etc. on peut les déterminer et les représenter ensuite sur un plan, de la manière que nous allons décrire. Observons auparavant que nous supposons ici que tous les angles qu'il va être question de mesurer, sont tous dans un même plan horizontal, ou à peu près. S'ils n'y étaient point, il faudrait, avant de former le plan, les y réduire ; nous en donnerons les moyens dans la Trigonométrie.

Supposons donc que *A, B, C, D, E, F, G, H, I, K* (*fig.* 75 et 76) soient plusieurs objets remarquables dont on veut représenter les positions respectives sur un plan : on dessinera grossièrement sur un papier ces objets dans les positions qu'on leur juge à l'œil ; et pour cet effet on se transportera aux différens lieux où il sera nécessaire pour prendre une connaissance légère de tous ces objets. Ce premier dessin, qu'on appelle un *croquis*, servira à marquer les différentes mesures qu'on prendra dans le cours des opérations. On mesurera une base *AB*, dont la longueur ne soit pas moindre que la dixième ou la neuvième partie de la distance des deux objets les plus éloignés qu'on puisse voir de ses extrémités, et qui soit telle en même temps, que de ces mêmes extrémités on puisse appercevoir le plus grand nombre d'objets que faire se pourra ; alors, avec un instrument propre à mesurer les angles, avec le graphomètre, par exemple, on mesurera au point *A* les angles *EAB*, *FAB*, *GAB*, *CAB*, *DAB* que font au point *A* avec la ligne *AB*, les lignes qu'on imaginera menées de ce point, aux objets *E, F, G, C, D* que je suppose pouvoir être apperçus des extrémités *A* et *B* de la base. On mesurera de même au point *B* les angles *EBA*, *FBA*, *GBA*, *CBA*, *DBA*, que font en ce point avec la ligne *AB*, les lignes qu'on imaginera menées de ce même point *B* aux mêmes objets que ci-dessus. S'il y a des objets, comme *H*, *I*, qu'on n'ait pu voir des deux extrémités *A* et *B*, on se transportera en deux des lieux *E* et *F* qu'on vient d'observer, et d'où l'on puisse voir ces deux points *H* et *I* ; alors regardant *EF* comme une base, on mesurera les angles *HEF*, *IEF*, *HFE*, *IFE*, que font, avec cette nouvelle base,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

les lignes qui iraient de ses extrémités aux deux objets *H* et *I*; enfin, s'il y a quelqu'autre objet, comme *K*, qu'on n'ait pu voir ni des extrémités de *AB*, ni de celles de *EF*, on prendra encore pour base quelqu'autre ligne comme *FG* qui joint deux des points observés, et on mesurera de même à ses extrémités les angles *KFG*, *KGF*. Toutes ces opérations faites, et après avoir déterminé et construit l'échelle du plan qu'on se propose de faire, on tirera sur ce plan une ligne *ab* qu'on fera d'autant de parties de l'échelle, que l'on a trouvé de toises ou de pieds dans *AB*, selon qu'on aura mesuré en toises ou en pieds. On fera ensuite au point *a*, avec le rapporteur, un angle *bae*, d'autant de degrés et minutes qu'on en a trouvés pour *BAE*; et au point *b*, un angle *eba* d'autant de degrés et minutes qu'on en a trouvés à l'angle *EBA*; les deux lignes *ae*, *be*, qui formeront ces angles avec *ab*, se couperont en un point *e* qui représentera sur la carte la position de l'objet *E* sur le terrain; car par cette construction le triangle *abe* sera semblable au triangle *ABE*, puisqu'on a fait deux angles de celui-là égaux à deux angles de celui-ci (10). On se conduira précisément de la même manière pour déterminer les points *f*, *g*, *d*, *c* qui doivent représenter les points ou objets *F*, *G*, *D*, *C*. Pour avoir ensuite les points *h*, *i* et *k*, on tirera les lignes *ef* et *fg*, que l'on considérera comme bases; et on déterminera la position des points *h* et *i*, à l'égard de *ef*, et celle du point *k* à l'égard de *fg*, de la même manière qu'on a déterminé celles des autres points à l'égard de *ab*. Bien entendu que toutes les lignes qu'on tirera dans ces différentes opérations, seront tracées au crayon seulement, parce qu'elles n'ont d'autre usage que de déterminer les points *c*, *d*, *e*, etc.; lorsqu'ils sont une fois trouvés, on efface tout le reste.

Je ne m'arrête pas à démontrer en détail, que les points *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *k* sont placés entre eux de la même manière que les objets *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, etc. le sont entre eux; il suffit d'observer que les points *c*, *d*, *e*, *f*, *g* sont (par la construction) placés à l'égard de *ab*, comme les points *C*, *D*, *E*, *F*, *G* le sont à l'égard de *AB*, puisque les triangles

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

cab, *dab*, *eab*, etc. ont été faits semblables aux triangles *CAB*, *DAB*, *EAB*, et disposés de la même manière; ainsi la difficulté, s'il y en a, ne peut tomber que sur les points *h*, *i* et *k*; or (par la construction) les points *h* et *i* sont placés à l'égard de *ef*, comme les points *H* et *I* le sont à l'égard de *EF*, donc, puisque ces deux dernières lignes sont placées de la même manière à l'égard des lignes *ab* et *AB*, les points *h* et *i* seront aussi placés à l'égard de *ab* de la même manière que *H* et *I* le sont à l'égard de *AB*. Ainsi les distances respectives des points *a*, *e*, *f*, *g*, etc., mesurées sur l'échelle du plan, feront connaître les distances des objets *A*, *E*, *F*, *G*, etc. On voit assez, sans qu'il soit nécessaire d'y insister, que cette méthode peut servir à vérifier des points que l'on soupçonnerait douteux sur une carte, ainsi qu'à y ajouter des points qu'on aurait omis. On peut aussi employer la boussole à déterminer la position des objets *E*, *F*, *G*, etc., et on l'y emploie même assez souvent; mais alors on observe au point *A*, non pas les angles *EAB*, *FAB*, mais les angles que les lignes *AE*, *AF*, etc. et la base même *AB*, font avec la direction de l'aiguille aimantée; on fait la même chose au point *B* : et pour marquer les objets sur la carte, on tire par le point *a* une ligne qui représente la direction de l'aiguille aimantée, et on mène les lignes *ab*, *ac*, *af*, etc. de manière qu'elles fassent avec celle-là, les angles qu'on a observés au point *A*; fixant ensuite la grandeur qu'on veut donner à *ab*, on se conduit à l'égard du point *b* de la même manière qu'on a fait à l'égard du point *a*. Quant aux autres points *H* et *I* qui n'étaient point visibles de *A* et *B*, on les détermine à l'égard de *EF*, de la même manière qu'on a déterminé les autres à l'égard de *AB*; enfin on marque ces points en *h* et *i* en les déterminant à l'égard de *ef*, de la même manière que les autres points *e*, *f*, etc. ont été déterminés à l'égard de *ab*. Au reste on ne doit, autant qu'on le peut, lever ainsi à la boussole, que les petits détails, comme les détours d'un chemin, les sinuosités d'une rivière, etc. : quand les points principaux ont été déterminés avec exactitude, on peut prendre ces détails avec une attention

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

scrupuleuse, parce que les objets qu'on relève alors, étant peu distans entre eux, l'erreur qu'on peut commettre sur les angles ne peut pas être d'une grande conséquence. Lorsque quelques circonstances déterminent à marquer sur la carte déjà construite, quelque nouveau point, il n'est pas indispensable d'observer ce point, de deux autres points connus; on le détermine souvent au contraire en observant de ce point deux autres points connus; par exemple, supposons que le point *H* soit un point d'une rade où l'on a mesuré la profondeur à la sonde, et qu'on veut marquer cette sonde sur la carte; on observera du point *H*, les angles *EHM*, *FHM*, que font avec la direction *LM* de l'aiguille aimantée, les deux lignes *EH*, *FH*; qui vont à deux objets connus *E*, *F*; puis, pour marquer le point *H* sur la carte, on tirera à part (*fig.* 77) une ligne *lm* qui marque la direction de l'aiguille aimantée; et en un point *n* de cette ligne, on fera les angles *onm*, *pnm*, égaux aux angles *EHM*, *FHM*; enfin par le point *f* on mènera *fh* parallèle à *pn*; et par le point *e*, la ligne *eh* parallèle à *no*; ces deux lignes se rencontreront au point cherché *h*.

Cette même méthode sert aussi à se reconnaître en mer, à la vue de deux terres. Au reste la rose des vents, qui est marquée sur les cartes marines, fournit des expédiens pour abréger quelques-unes de ces opérations; nous ne pouvons entrer dans ces détails qui appartiennent immédiatement au pilotage : il nous suffit d'exposer le principe sur lequel ces différentes pratiques sont fondées. Observons, cependant, qu'on ne doit déterminer les sondes de cette manière, que quand les circonstances ne permettent pas de faire autrement; car, quelque exercé qu'on puisse être à se servir du compas de variation, on ne parvient jamais à relever du point *H* en mer, les objets *E*, *F*, avec une précision sur laquelle on puisse autant compter, que sur le relèvement qu'on ferait d'un objet *H*, tel que serait une chaloupe, une bouée, etc., en observant des points *E* et *F* à terre. Les sondes sont assez importantes pour qu'on doive, autant qu'on le peut, employer, pour les déterminer, la méthode la plus susceptible d'exactitude.

Il y a encore une autre manière de lever un plan, qui est

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

d'autant plus commode, qu'elle exige peu d'appareil, et qu'en même temps qu'on observe les différens points dont on veut avoir les positions, on les trace sur le plan sans les perdre de vue. L'instrument qu'on emploie à cet effet est représenté par la *figure* 78. *ABCD* est une planche de 15 à 16 pouces de long, et à peu près de pareille largeur, portée sur un pied comme le graphomètre. Sur cette planche on étend une feuille de papier qu'on arrête par le moyen d'un châssis qui entoure la planche. *LM* est une règle garnie de pinnules à ses deux extrémités. Lorsqu'on veut faire usage de cet instrument, qu'on appelle *planchette*, pour tracer le plan d'une campagne, on prend une base *am*, comme dans les opérations ci-dessus, et posant le pied de l'instrument en *a*, on fait planter un piquet en *m*. On applique la règle *LM* sur le papier, et on la dirige de manière à voir le piquet *m* à travers les deux pinnules; alors on tire le long de la règle une ligne *EF*, à laquelle on donne autant de parties de l'échelle du plan, qu'on aura trouvé de pieds entre le point *E* d'où l'on observe d'abord, et le point *f* d'où l'on observera à la seconde station. On fait ensuite tourner la règle autour du point *E*, jusqu'à ce qu'on rencontre, en regardant à travers les pinnules, quelqu'un des objets, *I*, *H*, *G*; et à mesure qu'on en rencontre un, on tire le long de la règle une ligne indéfinie. Ayant ainsi parcouru tous les objets qu'on peut voir lorsqu'on est en *a*, on transporte l'instrument en *m*, et on laisse un piquet en *a*. Alors on fait au point *f* les mêmes opérations à l'égard des objets *I*, *H*, *G*, qu'on a faites à l'autre station. Les lignes *fi*, *fh*, *fg*, qui dans ce second cas vont, ou sont imaginées aller à ces objets, rencontrent les premières aux points *g*, *h*, *i*, qui sont la représentation des objets *G*, *H*, *I*.

C'est encore sur la théorie des *figures* semblables qu'est fondée la méthode de faire *le point*, c'est-à-dire de représenter sur une carte la route qu'a tenue un vaisseau pendant sa navigation, ou pendant une partie de sa navigation. Supposons qu'un vaisseau, parti d'un lieu connu, ait d'abord couru 28 lieues au sud-est, puis 20 lieues au sud, et enfin 26 lieues au sud-ouest; on veut déterminer, sur la carte, la route qu'a

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

tenue le vaisseau et le lieu de l'arrivée. On cherche d'abord sur la carte le point du départ; je suppose que ce soit le point *d* (*fig.* 79). On cherche pareillement, parmi les divisions de la rose des vents marquée sur la carte, quelle est la ligne qui va au sud-est; je suppose que ce soit ici la ligne *CF*; on tire par le point *d* la ligne *dc* parallèle à *CF*, et on donne à *dc* autant de parties de l'échelle de la carte, que l'on a couru de lieues au sud-est. Par le point *c* on tire pareillement une ligne *cb* parallèle à la ligne *CE* qui est dirigée au sud; et on fait *cb* d'autant de parties de l'échelle qu'on a couru de lieues au sud; enfin, par le point *b*, on mène *ba* parallèle à *CD* qui va au sud-ouest; et ayant fait *ba* d'autant de parties de l'échelle, qu'on a couru de lieues au sud-ouest, le point *a* est le point d'arrivée, et la trace *dcba* représente la route qu'a tenue le vaisseau. En effet les lignes *dc*, *cb*, *ba*, font entre elles les mêmes angles qu'ont fait entre elles successivement les différentes parties de la route du vaisseau; d'ailleurs les parties *cd*, *cb*, *ba*, ont entre elles les mêmes rapports que les espaces que le vaisseau a réellement décrits; donc la figure *dcba* est (131) absolument semblable à la route qu'a tenue le vaisseau; enfin le point *d* est situé sur la carte comme le point de départ l'est à l'égard de la terre (*); donc *dcba* est non-seulement semblable à la route du vaisseau, mais encore située à l'égard des différens points de la carte, comme la route du vaisseau l'a été à l'égard des différens points de la terre.

(*) Cette expression n'est pas rigoureusement exacte, sans doute; mais ce n'est point ici le lieu d'en fixer le sens rigoureux. Les points d'une carte, surtout d'une carte réduite, ne sont pas situés entre eux comme les points de la terre qu'ils représentent; mais il suffit ici qu'ils aient le même usage; Nous reviendrons ailleurs sur cet objet.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

SECTION II.

Des Surfaces.

139. Nous voici arrivés à la seconde des trois sortes d'étendue que nous avons distinguées, c'est-à-dire à l'étendue en longueur et en largeur. Nous ne considérerons, dans cette Section, que les *surfaces* ou *superficies planes;* nous nous bornerons même à celles des figures rectilignes et du cercle. La mesure des surfaces se réduit à celle des triangles ou des quadrilatères. On distingue les quadrilatères en *quadrilatère* simplement dit, *trapèze* et *parallélogramme.* La figure de quatre côtés qu'on appelle simplement *quadrilatère*, est celle parmi les côtés de laquelle il ne s'en trouve aucun qui soit parallèle à un autre (*fig.* 80). Le *trapèze* est un quadrilatère dont deux côtés seulement sont parallèles (*fig.* 81). Le *parallélogramme* est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles (*fig.* 82, 83, 84, 85, 86, 86*). On distingue quatre sortes de parallélogrammes : le *rhomboïde*, le *rhombe*, le *rectangle et* le *quarré.* Le *rhomboïde* est le parallélogramme dont les côtés contigus et les angles sont inégaux (*fig.* 82). Le *rhombe*, autrement dit *lozange*, est celui dont les côtés sont égaux, et les angles inégaux (*fig.* 83). Le *rectangle* est celui dont les angles sont égaux, et les côtés contigus inégaux (*fig.* 84). Le *quarré* est celui dont les côtés et les angles sont égaux (*fig.* 85). Quand les angles d'un quadrilatère sont égaux, ils sont nécessairement droits, parce que les quatre angles de tout quadrilatère valent ensemble quatre angles droits (86). La perpendiculaire *EF* (*fig.* 82), menée entre les deux côtés opposés d'un parallélogramme, s'appelle la *hauteur* de ce parallélogramme; et le côté *BC*, sur lequel tombe cette perpendiculaire, s'appelle la *base.* La hauteur

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

d'un triangle *ABC* (*fig.* 87, 88 et 89) est la perpendiculaire *AD* abaissée d'un angle *A* de ce triangle, sur le côté opposé *BC*, prolongé, s'il est nécessaire; et ce côté *BC* se nomme alors la *base*.

140. *Un triangle rectiligne quelconque* ABC (fig. 89) *est toujours la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur que lui.* Car on peut toujours concevoir tirée, par le sommet de l'angle *C*, une ligne *CE* parallèle au côté *BA*, et par le sommet de l'angle *A*, une ligne *AE* parallèle au côté *BC*; ce qui forme, avec les côtés *AB* et *BC*, un parallélogramme *ABCE* de même base et de même hauteur que le triangle *ABC*; cela posé, il est aisé de voir que les deux triangles *ABC*, *CEA* sont égaux; car le côté *AC* leur est commun; d'ailleurs les angles *BAC*, *ACE* sont égaux, à cause des parallèles (38); et par la même raison, les angles *BCA* et *CAE* sont égaux: ces deux triangles ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux, sont donc égaux; donc le triangle *ABC* est la moitié du parallélogramme *ABCE*.

141. *Les parallélogrammes* ABCD, EBCF (fig. 86 et 86*) *de même base et de même hauteur, sont égaux en surface.* Les deux parallélogrammes *ABCD*, *EBCF* (*fig.* 86) ont une partie commune *EBCD*; ainsi leur égalité ne dépend que de l'égalité des triangles *ABE*, *DCF*; or il est aisé de prouver que ces deux triangles sont égaux: car *AB* est égal à *CD*; ces lignes étant des parallèles comprises entre parallèles (82); et par la même raison, *BE* est égal à *CF*; d'ailleurs (43) l'angle *ABE* est égal à l'angle *DCF*; ces deux triangles ont donc un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; ils sont donc égaux; donc aussi le parallélogramme *ABCD* et le parallélogramme *EBCF* sont égaux. Dans la *figure* 86*, on démontrera de la même manière, que les deux triangles *ABE*, *DCF* sont égaux; donc, retranchant de chacun le triangle *DIE*, les deux trapèzes restans *ABID*, *EICF* seront égaux; enfin ajoutant à chacun de ces trapèzes

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

le triangle *BIC*, le parallélogramme *ABCD* et le parallélogramme *EBCF* qui en résulteront, seront égaux.

142. On peut donc dire aussi, que *les triangles de même base et de même hauteur, ou de bases égales et de hauteurs égales, sont égaux;* puisqu'ils sont moitiés de parallélogrammes de même base et de même hauteur qu'eux (140).

143. De cette dernière proposition on peut conclure que *tout polygone peut être transformé en un triangle de même surface.* Par exemple, soit *ABCDE* (*fig.* 91) un pentagone; si l'on tire la diagonale *EC* qui joigne les extrémités des deux côtés contigus *ED*, *CD*, et qu'après avoir mené *DF* parallèle à *EC*, et qui rencontre en *F* le côté *AE* prolongé, on tire *CF*, on aura un quadrilatère *ABCF*, égal en surface au pentagone *ABCDE*; car les deux triangles *ECD*, *ECF* ont pour base commune *EC*; et étant de plus compris entre les mêmes parallèles *EC*, *DF*, ils sont de même hauteur; donc ils sont égaux; donc, si l'on ajoute à chacun le quadrilatère *EABC*, on aura le pentagone *ABCDE* égal au quadrilatère *ABCF*. Or, de même qu'on vient de réduire le pentagone à un quadrilatère, on réduira le quadrilatère à un triangle; donc, etc.

De la mesure des Surfaces.

144. *Mesurer une surface*, c'est déterminer combien de fois cette surface contient une autre surface connue. Les mesures qu'on emploie sont ordinairement des quarrés; quelquefois ce sont des parallélogrammes rectangles : ainsi mesurer la surface *ABCD* (*fig.* 90), c'est déterminer combien elle contient de quarrés tels que *abcd*, ou de rectangles tels que *abcd*; si le côté *ab* du quarré *abcd* est d'un pied, c'est déterminer combien la surface *ABCD* contient de pieds quarrés; si le côté *ab* du rectangle *abcd* étant d'un pied, le côté *bc* est de 3 pieds, c'est déterminer combien la surface *ABCD* contient de rectangles de 3 pieds de long sur un pied de large. Pour mesurer en parties quarrées la surface du rectangle *ABCD*, il faut chercher combien de fois le côté *AB* contient le côté

ab

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

ab du quarré *abcd* qui doit servir d'unité ou de mesure; chercher de même combien de fois le côté *BC* contient *ab*; et alors, multipliant ces deux nombres l'un par l'autre, on aura le nombre de quarrés tels que *abcd*, que la surface *ABCD* peut renfermer. Par exemple, si *AB* contient *ab* quatre fois; et si *BC* contient *ab*, 7 fois; je multiplie 7 par 4, et le produit 28 marque que le rectangle *ABCD* contient 28 quarrés tels que *abcd*. Car si par les points de division *E*, *F*, *G*, on mène des parallèles à *BC*, on aura quatre rectangles égaux, dont chacun pourra contenir autant de quarrés tels que *abcd*, qu'il y a de parties égales à *ab* dans le côté *BC*; donc il faut répéter les quarrés contenus dans l'un de ces rectangles, autant de fois qu'il y a de rectangles, c'est-à-dire autant de fois que le côté *AB* contient *ab*; et comme le nombre des quarrés contenus dans chaque rectangle, est le même que le nombre des parties de *BC*, il est donc évident qu'en multipliant le nombre des parties de *BC*, par le nombre des parties égales de *AB*, on a le nombre de quarrés tels que *abcd*, que le triangle *ABCD* peut renfermer. Quoique nous ayons supposé dans le raisonnement que nous venons de faire, que les côtés *AB* et *BC* contenaient un nombre exact de mesures *ab*, ce raisonnement ne s'étend pas moins au cas où la mesure *ab* n'y serait pas contenue exactement. Par exemple, si *BC* ne contenait que 6 mesures $\frac{1}{2}$, chaque rectangle ne contiendrait que 6 quarrés $\frac{1}{2}$; et si le côté *AB* ne contenait que 3 mesures et $\frac{1}{3}$, il n'y aurait que 3 rectangles et $\frac{1}{3}$, chacun de 6 quarrés et $\frac{1}{2}$; il faudrait donc multiplier 6 $\frac{1}{2}$ par 3 $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire le nombre des mesures de *BC* par le nombre des mesures de *AB*.

145. Puisque (141) le parallélogramme rectangle *ABCD* (*fig.* 86 et 86*) est égal au parallélogramme *EBCF*, de même base et de même hauteur; il s'ensuit donc que pour avoir la surface de celui-ci, il faudra multiplier le nombre des parties de sa base *BC*, par le nombre des parties de sa hauteur *BA*; on peut donc dire en général que *pour avoir le nombre de mesures quarrées contenues dans la surface d'un*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

parallélogramme quelconque ABCD (fig. 82), *il faut mesurer la base* BC, *et la hauteur* EF, *avec une même mesure, et multiplier le nombre des mesures de la base par le nombre des mesures de la hauteur.* On voit donc, par ce qui a été dit (144), que lorsqu'on veut évaluer la surface *ABCD* (*fig.* 90), on ne fait autre chose que répéter la surface *GBCH* ou le nombre des quarrés qu'elle contient, autant de fois que son côté *GB* est contenu dans le côté *AB*; ainsi le multiplicande est réellement une surface, et le multiplicateur est un nombre abstrait qui ne fait que marquer combien de fois on doit répéter ce multiplicande. On dit communément, que *pour avoir la surface d'un parallélogramme, il faut multiplier sa base par sa hauteur;* mais on doit regarder cela comme une expression abrégée, dans laquelle on sous-entend le *nombre* des quarrés correspondans aux parties de la base, et le *nombre* des parties de la hauteur. En un mot, on ne peut pas dire qu'on multiplie une ligne par une ligne. Multiplier, c'est prendre une quantité un certain nombre de fois ; de sorte que quand on multiplie une ligne, on ne peut jamais avoir qu'une ligne; et quand on multiplie une surface, on ne peut jamais avoir qu'une surface. Une surface ne peut avoir d'autres élémens que des surfaces; et quoiqu'on dise souvent que le parallélogramme *ABCD* (*fig.* 82) peut être considéré comme composé d'autant de lignes égales et parallèles à *BC*, qu'il y a de points dans la hauteur *EF*, on doit sous-entendre que ces lignes ont une hauteur infiniment petite (car plusieurs lignes sans largeur ne peuvent pas composer une surface); et alors chacune de ces lignes est une surface qui étant répétée autant de fois que sa hauteur est dans la hauteur *EF*, donne la surface *ABCD*. Nous adopterons néanmoins cette expression, *multiplier une ligne par une ligne;* mais on ne doit pas perdre de vue, que ce n'est que comme manière abrégée de parler. Ainsi nous dirons que le produit de deux lignes exprime une surface, quoique, dans le vrai, on dût dire, le *nombre* des parties d'une ligne, multiplié par le nombre des parties d'une autre ligne, exprime le nombre des parties quar-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

rées contenues dans le parallélogramme qui aurait une de ces lignes pour hauteur, et l'autre ligne pour base. Pour marquer la surface du parallélogramme *ABCD* (*fig.* 82), nous écrirons $CB \times EF$; dans la *figure* 84, nous écrirons $AB \times BC$; et dans la *figure* 85, où les deux côtés *AB* et *BC* sont égaux, au lieu de $AB \times BC$ ou $AB \times AB$, nous écrirons $\overline{AB}^2$; de sorte que $\overline{AB}^2$ signifiera la ligne *AB* multipliée par elle-même, ou la surface du quarré fait sur la ligne *AB*; de même, pour marquer que la ligne *AB* est élevée au cube, nous écrirons $\overline{AB}^3$ qui équivaudra à $AB \times AB \times AB$ ou $\overline{AB}^2 \times AB$.

146. Il suit de ce que nous venons de dire, que, pour que deux parallélogrammes soient égaux en surface, il suffit que le produit de la base de l'un, multipliée par la hauteur, soit égal au produit de la base du second, multipliée par la hauteur. Donc, *lorsque deux parallélogrammes sont égaux en surface, ils ont leurs bases réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs;* c'est-à-dire que la base et la hauteur de l'un peuvent être considérées comme les extrêmes d'une proportion, dont la base et la hauteur de l'autre formeront les moyens; car, en les considérant ainsi, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens; or dans ce cas il y a nécessairement proportion. (*Arithm.* 180.) Au reste, on peut voir cette vérité immédiatement, en faisant attention que si la base de l'un est plus petite, par exemple, que celle de l'autre, il faut que sa hauteur soit plus grande à proportion, pour former le même produit.

147. Puisqu'un triangle est la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur (140), il suit de ce qui vient d'être dit (145), que *pour avoir la surface d'un triangle, il faut multiplier la base par la hauteur, et prendre la moitié du produit.* Ainsi, si la hauteur *AD* (*fig.* 87) est de 34 pieds, et la base *BC* de 52, la surface contiendra 884 pieds quarrés; c'est la moitié du produit de 52 par 34. Il est inutile d'insister pour faire sentir qu'on aura le même produit en multipliant la

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

base par la moitié de la hauteur, ou la hauteur par la moitié de la base.

148. Donc, 1°. *pour avoir la surface du trapèze*, il faut ajouter ensemble les deux côtés parallèles, prendre la moitié de la somme, et la multiplier par la perpendiculaire menée entre ces deux parallèles. Car si l'on tire la diagonale *BD* (*fig.* 81), on a deux triangles *ABD*, *BDC* dont la hauteur commune est *EF*. Pour avoir la surface du triangle *ABD*, il faudrait donc multiplier la moitié de *AD* par *EF*; et pour le triangle *BDC*, il faudrait multiplier la moitié de *BC*, aussi par *EF*; donc la surface du trapèze vaut la moitié de *AD* multipliée par *EF*, plus la moitié de *BC* multipliée par *EF*, c'est-à-dire la moitié de la somme *AD* plus *BC*, multipliée par *EF*. Si par le milieu *G* de la ligne *AB*, on tire *GH* parallèle à *BC*, cette ligne *GH* sera la moitié de la somme des deux lignes *AD* et *BC*. Car, soit *I* le point où *GH* coupe la diagonale *BD*, les triangles *BAD*, *BGI*, semblables à cause des parallèles *AD* et *GI*, font connaître (109) que *GI* est moitié de *AD*, puisque *BG* est moitié de *AB*. Or, *GH* étant parallèle à *BC* et à *AD*, *DC* (102) est coupée de la même manière que *AB*; on prouvera donc de même que *IH* est moitié de *BC*, en considérant les triangles semblables *BDC* et *IDH*. Donc, et en vertu de ce qui a été dit ci-dessus, on peut dire *que la surface d'un trapèze* ABCD *est égale au produit de sa hauteur* EF, *par la ligne* GH *menée à distances égales des deux bases opposées.*

149. 2°. *Pour avoir la surface d'un polygone quelconque*, il faut le partager en triangles par des lignes menées d'un même point à chacun de ses angles, et calculer séparément la surface de chacun de ces triangles; en réunissant tous ces produits, on aura la surface totale du polygone. Mais pour avoir le moindre nombre de triangles qu'il soit possible, il conviendra de faire partir toutes ces lignes de l'un des angles du polygone. (*fig.* 92).

150. *Si le polygone était régulier* (*fig.* 53), comme tous

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

les côtés sont égaux, et que toutes les perpendiculaires, menées du centre, sont égales; en le concevant composé de triangles qui ont tous leur sommet au centre, on aurait la surface en multipliant un des côtés par la moitié de la perpendiculaire, et multipliant ce produit par le nombre des côtés; ou, ce qui revient au même, en multipliant le contour par la moitié de la perpendiculaire *OH*.

151. Puisqu'on peut (136) considérer le cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, il faut donc conclure que *pour avoir la surface d'un cercle, il faut multiplier la circonférence par la moitié du rayon.* Car la perpendiculaire menée sur un des côtés ne diffère pas du rayon, lorsque le nombre des côtés est infini.

152. Puisque les circonférences des cercles sont entre elles comme les rayons ou comme les diamètres (136), il est visible que si l'on connaissait la circonférence d'un cercle d'un diamètre connu, on serait bientôt en état de déterminer la circonférence de tout autre cercle dont on connaîtrait le diamètre, puisqu'il ne s'agirait que de calculer le quatrième terme de cette proposition; *le diamètre de la circonférence connue, est à cette même circonférence, comme le diamètre de la circonférence cherchée, est à cette seconde circonférence.* On ne connaît point exactement le rapport du diamètre à la circonférence; mais on en a des valeurs assez approchées, pour qu'un rapport plus exact puisse être regardé comme absolument inutile dans la pratique. *Archimède,* a trouvé qu'un cercle qui aurait 7 pieds de diamètre, aurait 22 pieds de circonférence, à peu près. Ainsi, si l'on demande quelle sera la circonférence d'un cercle qui aurait 20 pieds de diamètre, il faut chercher (*Arith.* 179) le quatrième terme de la proportion, dont les trois premiers sont

$$7 : 22 :: 20 :$$

Ce quatrième terme qui est $62\frac{6}{7}$ est, à très-peu de chose près, la longueur de la circonférence d'un cercle de 20 pieds de diamètre. Je dis à très-peu de chose près; car il faudrait que le cercle n'eût pas moins de 800 pieds de diamètre, pour que la circonférence déterminée, d'après le rapport de 7 à 22,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

fût fautive d'un pied. Au reste, en employant le rapport de 7 à 22, on peut se dispenser de faire la proportion; il suffit de tripler le diamètre, et d'ajouter au produit la septième partie de ce même diamètre; parce que $3\frac{1}{7}$ est le nombre de fois que 22 contient 7. *Adrien Métius*, a donné un rapport plus approché, c'est celui de 113 à 355. Ce rapport est tel, qu'il faudrait que le diamètre d'un cercle fût de 1000000 pieds au moins, pour qu'on fît, en se servant de ce rapport, une erreur d'un pied sur la circonférence. Enfin, si l'on veut avoir la circonférence avec encore plus de précision, il n'y a qu'à employer le rapport de 1 à 3,1415926535897932 qui passe de beaucoup les limites des besoins ordinaires, et dont on peut supprimer plus ou moins de chiffres sur la droite, selon qu'on a plus ou moins besoin d'exactitude. Comme ce rapport a pour premier terme l'unité, il est assez commode, en ce que, pour trouver la circonférence d'un cercle proposé, l'opération se réduit à multiplier le nombre 3,1415926 par le diamètre de ce cercle. Il est donc facile de trouver la surface d'un cercle proposé, aussi exactement que peuvent l'exiger les besoins les plus étendus de la pratique. Si l'on demande de combien de pieds quarrés est la surface d'un cercle qui aurait 20 pieds de diamètre, je calcule sa circonférence comme ci-dessus; et ayant trouvé qu'elle est de 62 pieds et $\frac{6}{7}$, je multiplie $62\frac{6}{7}$, par 5 qui est la moitié du rayon (151), et j'ai $314\frac{2}{7}$ pieds quarrés, pour la surface de ce cercle.

153. On appelle *secteur de cercle* la surface comprise entre deux rayons *IA*, *IB* (*fig.* 74), et l'arc *AB*. Et on appelle *segment* la surface comprise entre l'arc *AB* et sa corde *AB*.

Puisque le cercle peut être considéré comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, un secteur de cercle peut donc être considéré comme une portion de polygone régulier, et sa surface comme composée d'une infinité de triangles qui ont tous leur sommet au centre, et pour hauteur le rayon. Donc, *pour avoir la surface d'un secteur de cercle*, il faut multiplier l'arc qui lui sert de base, par la moitié du rayon. A

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

l'égard du segment, il est évident que pour en avoir la surface, il faut retrancher la surface du triangle *IAB*, de celle du secteur *IAB*. Il est évident que dans un même cercle les longueurs des arcs sont proportionnelles à leurs nombres de degrés; que par conséquent, quand on connaît la longueur de la circonférence, on peut avoir celle d'un arc de tel nombre de degrés qu'on voudra, en faisant cette proportion : 360° *sont au nombre de degrés de l'arc dont on cherche la longueur, comme la longueur de la circonférence est à celle de ce même arc*. S'il s'agit de trouver la surface d'un secteur dont on connaît le nombre de degrés et le rayon, on cherchera, par la proportion qu'on vient de donner, la longueur de l'arc qui est la base de ce secteur, et on la multipliera par la moitié du rayon. Par exemple, si l'on demande quelle est la surface du secteur de 32° 40′ dans un cercle qui a 20 pieds de diamètre, on trouvera, comme ci-dessus (151), que la circonférence est de 62 $\frac{6}{7}$ pieds; cherchant le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers sont 360° : 32° 40′ :: 62 $\frac{6}{7}$: ce quatrième terme qu'on trouvera de 5 $\frac{19}{27}$, sera la longueur de l'arc de 32° 40′, laquelle étant multipliée par 5, moitié du rayon donne, 28 $\frac{14}{27}$ pour la surface du secteur de 32° 40′. Il est aisé, d'après cela, d'avoir la surface du segment, en déterminant (*fig.* 74) le côté *AB* et la hauteur *IZ* du triangle *IAB*, par une opération fondée sur les mêmes principes que celle que nous avons enseignée (121); mais la Trigonométrie, que nous verrons par la suite, nous donnera des moyens encore plus expéditifs et plus susceptibles d'exactitude.

154. Quoique ce que nous avons dit (149), suffise pour mesurer toute espèce de figure rectiligne, néanmoins il est à propos que nous exposions ici une autre méthode qui est plus simple dans la pratique. Elle consiste (*fig.* 93) à tirer dans la figure une ligne *AG*; abaisser de chacun des angles, des perpendiculaires *BM*, *CL*, *DK*, *EI*, *FH*, sur cette ligne *AG*: mesurer chacune de ces lignes, ainsi que les intervalles *AN*, *NO*, *OP*, *PQ*, *QR*, *RG*; alors la figure est partagée en plusieurs parties, dont les deux extrêmes, tout au plus, sont des triangles, et les

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

autres sont des trapèzes; les premiers se mesurent en multipliant la hauteur par la moitié de sa base (147); à l'égard des trapèzes, chacun se mesure en multipliant la moitié de la somme des deux côtés parallèles, par la distance perpendiculaire de ces mêmes côtés (148). Lorsque la figure sera une ligne courbe, on la mesurera avec une exactitude suffisante pour la pratique, en partageant la ligne AT (*fig.* 94) qu'on tirera suivant sa plus grande longueur, en un assez grand nombre de parties, pour que les arcs interceptés AB, BC, CD, etc. puissent être regardés comme des lignes droites; et pour rendre le calcul le plus simple qu'il soit possible, on fera les parties AO, OP, etc. égales entre elles; alors, pour avoir la surface, on ajoutera ensemble toutes les lignes BN, CM, DL, EK, FI, et la moitié seulement de la dernière GH, si la courbe est terminée par une droite GH perpendiculaire à AT; on multipliera le tout par l'un des intervalles AO, et le produit sera la surface cherchée; c'est une suite immédiate de ce qui a éte dit (148); car pour avoir la surface ABN, il faut multiplier AO par la moitié de BN; pour avoir celle de $BCMN$, il faut multiplier OP ou AO, par la moitié de BN et de CM; pour avoir celle de $CDLM$, il faut multiplier AO, par la moitié de CM et de DL, et ainsi de suite; donc en réunissant ces produits, on voit que AO sera multiplié par 2 moitiés de BN, plus 2 moitiés de CM, plus 2 moitiés de DL, plus 2 moitiés de EK, plus 2 moitiés de FI, plus enfin une moitié seulement de GH, c'est-à-dire que AO doit être multiplié par la totalité des lignes BN, CM, DL, EK, FI, plus la moitié de la dernière. S'il s'agissait de l'espace $BNHG$ terminé par les deux lignes BN, GH; on prendrait non pas BN entière, mais sa moitié seulement. La règle que nous venons d'exposer pour mesurer les surfaces planes terminées par des courbes, peut être employée fort utilement dans diverses recherches relatives aux navires. On a souvent besoin, dans ces recherches, de connaître la surface de quelques coupes horizontales du navire; nous aurons occasion d'en faire usage par la suite.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Du Toisé des Surfaces.

155. Ce qu'on entend par toisé des surfaces, c'est la méthode de faire les multiplications nécessaires pour évaluer les surfaces, lorsqu'on a mesuré les dimensions en toises et parties de toise. Il y a deux manières d'évaluer les surfaces en toises quarrées et parties de la toise quarrée. Dans la première on compte par toises quarrées, pieds quarrés, pouces quarrés, lignes quarrées, etc. La toise quarrée contient 36 pieds quarrés, parce que c'est un rectangle qui a six pieds de long sur six pieds de large. Le pied quarré contient 144 pouces quarrés, parce que c'est un rectangle qui a 12 pouces de long sur 12 pouces de large. Par une raison semblable, on voit que le pouce quarré vaut 144 lignes quarrées, etc. Ainsi, pour évaluer une surface en toises quarrées, et parties quarrées de la toise quarrée, il n'y a autre chose à faire qu'à réduire les deux dimensions qu'on doit multiplier, chacune à leur plus petite espèce, (en lignes, si la plus petite espèce est des lignes); et après avoir fait la multiplication, on réduira le produit en pouces quarrés, ensuite en pieds quarrés, et enfin en toises quarrées, en divisant successivement par 144, 144 et 36. Par exemple, pour trouver la surface d'un rectangle qui aurait $2^{T}\ 3^{P}\ 5^{P}$ de long, et $0^{T}\ 4^{P}\ 6^{P}$ de large; je réduis ces deux dimensions en pouces, et j'ai 185^{P} à multiplier par 54^{P}, ce qui me donne 9990 pouces quarrés, et s'écrit ainsi 9990^{PP}. Pour les réduire en pieds quarrés, je divise par 144; j'ai 69 pieds quarrés et 54^{PP} de reste, c'est-à-dire $69^{PP}\ 54^{PP}$; pour réduire les 69^{PP} en toises quarrées, je divise par 36; j'ai une toise quarrée ou 1^{TT} pour quotient, et 33^{PP} de reste; ensorte que la surface cherchée est de $1^{TT}\ 33^{PP}\ 54^{PP}$.

Dans la seconde manière d'évaluer les surfaces, en toises quarrées et parties de la toise quarrée, on conçoit la toise quarrée composée de six rectangles qui ont tous une toise de haut et un pied de base, et que pour cette raison on nomme *Toises-pieds* : on subdivise chaque toise-pied en 12 parties ou

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

rectangles qui ont chacun une toise de haut, et un pouce de base, et qu'on appelle *Toises-pouces :* on subdivise chacune de celles-ci en 12 parties, qui ont chacune une toise de haut et une ligne de base, et qu'on appelle *Toises-lignes ;* en un mot, on se représente la toise quarrée divisée et subdivisée continuellement en rectangles, qui ont constamment une toise de haut sur un pied, ou un pouce, ou une ligne, ou un point de base. Les subdivisions qui passent le point, se marquent comme les secondes, tierces, quartes, etc. pour les degrés, excepté qu'on en fait précéder la marque par un T, signe de la toise ; ainsi les marques successives et les valeurs des subdivisions de la toise quarrée, sont telles qu'on les voit dans la Table suivante.

Table des Subdivisions de la Toise quarrée en Rectangles d'une Toise de haut.

La Toise-quarrée vaut 6 Toises-pieds, ou..... 6^{TP}
La Toise-pied vaut 12 Toises-pouces, ou..... 12^{TP}
La Toise-pouce..... 12^{TI}
La Toise-ligne..... 12^{TP_6}
La Toise-point..... $12^{T'}$
La T′ ou Toise-prime..... $12^{T''}$
La T″ ou Toise-seconde..... $12^{'''}$; etc.

Quand on aura donc à multiplier les parties de deux lignes, pour évaluer une surface, il faut concevoir que les toises du multiplicande sont des toises quarrées ; les pieds des toises-pieds ; les pouces des toises-pouces, et ainsi de suite ; à l'égard du multiplicateur, il représentera toujours combien de fois on doit prendre le multiplicande. Par exemple, si ayant à mesurer la surface du rectangle *ABCD* (*fig.* 95), je trouve le côté *AD* de $4^T\ 4^P\ 6^P$, et le côté *AB* de $2^T\ 3^P$; je vois que si *AE* représente une toise, la surface *ABCD* est composée de deux rectangles qui ont chacun une toise de haut sur $4^T\ 4^P\ 6^P$ de long, et d'un rectangle qui a 3^P ou une demi-toise de haut sur $4^T\ 4^P\ 6^P$ de long, et qui par conséquent est la moitié de l'un des deux autres ; de sorte que je vois qu'il s'agit de répé-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

ter 2 fois $\frac{1}{2}$ un rectangle de 1^T de haut sur $4^T\ 4^P\ 6^p$ de long, c'est-à-dire de répéter 2 fois $\frac{1}{2}$ la quantité $4^{TT}\ 4^{TP}\ 6^{Tp}$. Ceci prouve ce que nous avons dit dans la Note du n° 47 de l'Arithmétique, sur la nature des unités du produit et de ses facteurs dans la multiplication géométrique. On voit, en même temps, qu'il n'y a ici aucune nouvelle règle à apprendre pour faire ces sortes de multiplications qui sont évidemment les mêmes que celles que nous avons données en Arithmétique sous le nom de *Multiplication des Nombres complexes*. Ainsi, pour nous borner à un exemple, si l'on me demande quelle est la surface d'un rectangle qui aurait $52^T\ 4^P\ 5^p$ de long, et $44^T\ 4^P\ 8^p$ de large, je fais l'opération comme il suit :

52^T	4^P	$5p$		
44^T	4^P	$8pl$		
208_{TT}	0_{TP}	0_{TP}	0_{Tl}	0_{Tpt}
208				
22				
7	2			
2	2	8		
0	3	8		
26	2	2	6	
8	4	8	10	
2	5	6	11	4
2	5	6	11	4
236_{ITT}	2_{TP}	5_{Tp}	2_{Tl}	8_{Tpt}.

C'est-à-dire, je multiplie 52 par 44, puis les 4^P du multiplicande par 44, en prenant pour 3^P la moitié de 44, et pour 1^P le tiers de ce que j'aurais eu pour 3^P; ensuite je multiplie 5^P par 44, en prenant pour 4^P le $\frac{1}{3}$ de ce que j'ai eu pour 1^P; et pour 1^P je prends le quart de ce que j'ai eu pour 4^P. Pour multiplier ensuite, par les 4^P qui se trouvent dans le multiplicateur, je prends pour 3^P, la moitié du multiplicande total, et pour 1^P, le tiers de ce que j'ai eu pour 3^P. Enfin, pour multiplier par 8^P, je prends le tiers de ce que j'ai eu pour 1^P; et je l'écris deux fois ; réunissant tout ces produits particuliers,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

j'ai 2361 ^{TT} 2^{TP} 5^{Tp} 2^{Tl} 8^{Tpt} pour produit total. Ainsi, on voit que nous avons été fondés à dire, dans l'Arithmétique, que les règles que nous donnions pour les nombres complexes, renfermaient le toisé, et qu'il n'y avait autre chose à exposer, que la nature des unités du produit et des facteurs.

Quand on a ainsi évalué une surface en toises-quarrées, toises-pieds, toises-pouces, etc., il est fort aisé d'en trouver la valeur en toises-quarrées, pieds-quarrés, pouces-quarrés, etc. Il faut écrire alternativement les deux nombres 6 et $\frac{1}{2}$ sous les parties de la toise, à commencer des toises-pieds, comme on le voit ci-dessous; multiplier chaque partie par le nombre inférieur qui lui répond, et porter les produits des deux nombres consécutifs 6 et $\frac{1}{2}$ dans une même colonne; lorsqu'en multipliant par $\frac{1}{2}$, il restera 1, écrivez 72 sous ce multiplicateur $\frac{1}{2}$, pour commencer une seconde colonne. Ainsi, pour réduire en toises-quarrées, pieds-quarrés, pouces-quarrés, etc. les parties du produit que nous avons trouvé ci-dessus, j'écris :

2361^{TT}	2^{TP}	5^{Tp}	2^{Tl}	8^{Tpt}
	6	$\frac{1}{2}$	6	$\frac{1}{2}$
2361^{TP}	12^{pp}	72^{pp}		
	2	12		
		4		
2391^{TT}	14^{pp}	88^{pp}		

Et je multiplie les toises-pieds par 6, parce que la toise-pied vaut 6 pieds quarrés, ayant 6 pieds de haut sur un pied de base. Je multiplie les toises-pouces par $\frac{1}{2}$, et je porte les deux entiers, que me donne cette multiplication, au rang des pieds quarrés; parce que la toise-pouce étant la 12^{e} partie de la toise-pied, doit valoir la 12^{e} partie de 6 pieds quarrés; c'est-à-dire, un demi-pied quarré; donc les 5 toises-pouces valent 2 pieds quarrés et demi; et comme le demi-pied quarré vaut 72 pouces quarrés, au lieu du demi, j'écris 72; ensuite, pour réduire les toises-lignes, je les multiplie par 6, parce que la toise-ligne étant la douzième partie de la toise-pouce, doit valoir la douzième partie de 72 pouces quarrés, c'est-à-dire

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

6 pouces quarrés : un raisonnement semblable prouve qu'on doit multiplier ensuite par $\frac{1}{2}$, puis par 6, etc., ainsi que nous venons de le dire. Donc réciproquement, si l'on veut réduire en toises-pieds, toises-pouces, etc. des parties quarrées de la toise-quarrée, l'opération se réduira, 1°. à prendre le sixième du nombre des pieds quarrés, ce qui donnera des toises-pieds. 2°. On doublera le reste, s'il y en a un, et on y ajoutera une unité si le nombre des pouces quarrés est, ou excède 72; et l'on aura les toises-pouces. 3°. Ayant retranché 72 du nombre des pouces quarrés, lorsque ce nombre sera ou excédera 72, on divisera le reste par 6, et l'on aura les toises-lignes. 4°. On doublera le reste, on y ajoutera une unité, si le nombre des lignes quarrées excède 72, et on aura le nombre des toises-points. On voit par là comment on doit continuer pour avoir les parties suivantes, lorsqu'il doit y en avoir. Ainsi, si l'on proposait de réduire $52^{TT}\ 25^{PP}\ 87^{pp}\ 92^{ll}$, en toises-pieds, toises-pouces, etc., je diviserais 25 par 6, et j'aurais 4^{TP}, et 1 de reste; je double cet 1, et j'y ajoute 1, parce que le nombre des pouces quarrés excède 72; j'ai donc 3^{Tp}. Je retranche 72 de 87, et je divise le reste 15 par 6; j'ai 2^{Tl}; et 3 de reste. Je double ce reste, et j'y ajoute une unité, parce que le nombre des lignes quarrées excède 72; j'ai 7^{Tpts}. Je retranche 72 de 92, et je divise le reste 20 par 6; j'ai $3^{T'}$, et 2 de reste; je double ce reste, et j'ai $4^{T''}$; en sorte que j'ai en total $52^{TT}\ 4^{TP}\ 3^{Tp}\ 2^{Tl}\ 7^{Tpts}\ 3^{T'}\ 4^{T''}$.

156. Puisque pour avoir la surface d'un parallélogramme il faut multiplier le nombre des parties de la base par le nombre des parties de la hauteur, il s'ensuit (*Arith.* 74) que si, connaissant la surface et le nombre des parties de la hauteur ou de la base, on veut avoir la base ou la hauteur, il faudra diviser le nombre qui exprime la surface, par le nombre qui exprime celle des deux dimensions qui sera connue. Mais il faut bien observer que ce n'est point une surface que l'on divise alors par une ligne, la division d'une surface par une ligne n'est pas moins chimérique que la multiplication d'une

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

ligne par une ligne. Ce que l'on fait véritablement alors, on divise une surface par une surface. En effet, selon ce que nous avons dit (155), lorsqu'on évalue la surface du rectangle *ABCD* (*fig.* 95), on répète la surface du rectangle *ED* de même base, et qui a pour hauteur l'unité ou la mesure principale *AE*; on répète, dis-je, cette surface autant de fois que sa hauteur *AE* est comprise dans la hauteur *AB*; ainsi, quand on veut connaître le nombre de parties de *AB*, ou le nombre des unités *AE* qu'il contient, il faut chercher combien de fois la surface *ABCD* contient celle du rectangle *ED*. Donc, si la surface *ABCD* étant exprimée par $361^{TT}\ 2^{TP}\ 5^{Tp}\ 2^{Tl}\ 8^{Tpts}$, la base *AD* est de $4^{T}\ 3^{P}\ 6^{p}$; pour avoir la hauteur *AB*, il faut concevoir que l'on a $361^{TT}\ 2^{TP}$, etc. à diviser non par $4^{T}\ 3^{P}\ 6^{p}$, mais par $4^{TT}\ 3^{TP}\ 6^{Tp}$; et comme la toise est alors facteur commun du dividende et du diviseur, il est évident que le quotient sera le même que si l'un et l'autre exprimaient des toises et parties de toises linéaires; donc l'opération se réduit à diviser $361^{T}\ 2^{P}$, etc. par $4^{T}\ 3^{P}$, etc. C'est-à-dire que l'on considérera le dividende et le diviseur, comme exprimant des toises linéaires, et par conséquent comme étant de même espèce; et comme l'état de la question fait voir que le quotient doit être aussi de cette même espèce, c'est-à-dire exprimer des toises et parties de toises linéaires, il s'ensuit que la division doit se faire alors précisément selon la règle donnée. (*Arith.* 126 et 128.)

Si la surface était donnée en toises quarrées et parties quarrées de la toise quarrée, alors, pour plus de simplicité, on réduirait ces parties en toises-pieds, toises-pouces, etc. par ce qui vient d'être dit (155); après quoi on opérerait comme dans le cas précédent. Par exemple, si l'on demande la hauteur d'un parallélogramme ou d'un rectangle qui aurait $2^{T}\ 5^{P}$ de base, et $120^{TT}\ 29^{PP}\ 54^{PP}$ de surface, on réduira (155) cette surface à $120^{TT}\ 4^{Tp}\ 10^{Tp}\ 9^{Tl}$; et la question d'après ce qui précède, sera réduite à diviser $120^{T}\ 4^{p}\ 10^{p}\ 9^{l}$, par $2^{T}\ 5^{P}$, ce qui, en suivant la règle donnée (*Arith.* 126 et 128), donne $42^{T}\ 3^{p}\ 10^{p}\ 1^{l}\ \frac{13}{17}$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

De la Comparaison des Surfaces.

157. *Les surfaces des parallélogrammes sont entre elles, en général, comme les produits des bases par les hauteurs.* C'est-à-dire que la surface d'un parallélogramme contient celle d'un autre parallélogramme, autant que le produit de la base du premier par sa hauteur, contient le produit de la base du second par sa hauteur. Cela est évident, puisque tout parallélogramme est égal au produit de sa base par sa hauteur. De là il est aisé de conclure que lorsque deux parallélogrammes ont même hauteur, ils sont entre eux comme leurs bases; et que lorqu'ils ont même base, ils sont entre eux comme leurs hauteurs : car le rapport des produits ne changera point si l'on omet, dans chacun, le facteur qui leur est commun. (*Arith.* 170).

158. Puisque les triangles sont (140) moitiés de parallélogrammes de même base et de même hauteur, il faut donc conclure que *les triangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases, et que les triangles de même base, sont entre eux comme leurs hauteurs.*

159. *Les surfaces des parallélogrammes ou des triangles semblables, sont entre elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.* Car les surfaces des deux parallélogrammes $ABCD$ et $abcd$ (*fig.* 96 *et* 97) sont entre elles (157) comme les produits des bases par leurs hauteurs; c'est-à-dire que..... $ABCD : abcd :: BC \times AE : bc \times ae$. Mais si les parallélogrammes $ABCD$, $abcd$ sont semblables, et si AB et ab sont deux côtés homologues, les triangles AEB, aeb seront semblables, parce qu'outre l'angle droit E et e, ils doivent avoir de plus l'angle H égal à l'angle b; on aura donc (108)..... $AE : ae :: AB : ab$, ou $:: BC : bc$, à cause des parallélogrammes semblables; on peut donc (99) dans les produits $BC \times AE$ et $bc \times ae$, substituer le rapport de $BC : bc$ à celui de $AE : ae$; et alors le rapport de ces produits sera celui de $\overline{BC}^2 : \overline{bc}^2$; donc $ABCD : abcd :: \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2$; et comme on peut

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

prendre indifféremment pour base tel côté qu'on voudra, on voit donc qu'en général les surfaces des parallélogrammes semblables sont entre elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.

160. A l'égard des triangles semblables, il est évident qu'ils ont la même propriété, puisqu'ils sont moitiés de parallélogrammes de même base et de même hauteur.

161. En général *les surfaces de deux figures semblables quelconques sont entre elles comme les quarrés des côtés, ou des lignes homologues de ces figures.* Car les surfaces de deux figures semblables peuvent toujours être regardées comme composées d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun; alors la surface de chaque triangle de la première figure sera à celle du triangle correspondant dans la seconde, comme le quarré d'un côté du premier, est au quarré du côté homologue du second (160); donc, puisque tous les côtés homologues étant en même rapport, leurs quarrés doivent être aussi tous en même rapport (*Arith.* 191), chaque triangle du premier polygone sera au triangle correspondant du second, comme le quarré d'un côté quelconque du premier polygone est au quarré du côté homologue du second; donc (*Arith.* 186) la somme de tous les triangles du premier sera à la somme de tous les triangles du second, ou la surface du premier, à la surface du second, aussi dans ce même rapport.

162. *Les surfaces des cercles sont donc entre elles comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs diamètres.* Car les cercles sont des figures semblables (136), dont les rayons et les diamètres sont des lignes homologues. On doit dire la même chose des secteurs, et des segmens de même nombre de degrés. On voit donc qu'il n'en est pas des surfaces des figures semblables comme de leurs contours; les contours suivent le rapport simple des côtés (134); c'est-à-dire que de deux figures semblables, si un côté de l'une est double, ou triple, ou quadruple, etc. d'un côté homologue de l'autre, le contour de la première sera aussi double,

ou

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

ou triple, ou quadruple du contour de la seconde : mais il n'en est pas ainsi des surfaces; celle de la première figure serait alors 4 fois, 9 fois, 16 fois, etc. aussi grande que celle de la seconde. On peut rendre cette vérité sensible par les *figures* 98 et 99, où l'on voit (*fig.* 98) que le parallélogramme *ABCD*, dont le côté *AB* est double du côté *AG* du parallélogramme semblable *AGIE*, contient quatre parallélogrammes parfaitement égaux à celui-ci; et dans la *figure* 99, le triangle *ADF* dont le côté *AD* est double du côté *AB* du triangle semblable *ABC*, contient quatre triangles égaux à celui-ci; pareillement le triangle *AGK* dont le côté *AG* est triple de *AB*, contient 9 triangles égaux à *ABC*. Il en serait de même des cercles; un cercle qui aurait un rayon double, ou triple, ou quadruple, etc. de celui d'un autre cercle, aurait 4 fois, ou 9 fois, ou 16 fois, etc. autant de surfaces que celui-ci. On voit par là, que deux navires qui seraient parfaitement semblables, auraient des voilures dont les surfaces seraient entre elles comme les quarrés des hauteurs des mâts, c'est-à-dire, comme nous le verrons par la suite, comme les quarrés des longueurs des navires, ou de leurs largeurs; et par conséquent on peut dire que deux navires semblables, et qui présentent leurs voiles au vent de la même manière, reçoivent des quantités de vent qui sont comme les quarrés des longueurs de ces navires. Il n'en faut pas conclure pour cela, que leurs vîtesses seront dans ce rapport. Nous verrons en mécanique ce qui doit en être. Au reste, nous n'examinons pas ici si les navires semblables doivent avoir des voilures semblables; c'est un examen qui appartient aussi à la mécanique.

163. Si l'on voulait donc construire une figure semblable à une autre, et dont la surface fût à celle de celle-ci dans un rapport donné, par exemple dans le rapport de 3 à 2, il ne faudrait pas faire les côtés homologues, dans le rapport de 3 à 2; car alors les surfaces seraient comme 9 est à 4; mais il faudrait faire les côtés de telle grandeur que leurs quarrés fussent entre eux :: 3 : 2; c'est-à-dire, en supposant que le côté *AB* de la *figure X* (*fig.* 100) soit de 50^{P}, par exemple, il fau-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

drait, pour trouver le côté homologue *ab* de la *figure* cherchée *x'* (*fig.* 101), calculer le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers seraient $3 : 2 :: 50 \times 50$ ou $\overline{50}^2$ est à un quatrième terme : ce quatrième terme qui est $1666\frac{2}{3}$, serait le quarré du côté *ab*; c'est pourquoi, tirant la racine quarrée (*Arith.* 145) de $1666\frac{2}{3}$, on trouverait 40^P, 824; c'est-à-dire $40^P\ 9^P\ 10^l$ à peu près pour le côté *ab*. Quand on a un côté de la *figure x*, il est aisé de construire cette figure, selon ce qui a été dit (133).

164. *Si sur les trois côtés* AB, BC, AC, *d'un triangle rectangle* ABC (fig. 102), *on construit trois quarrés* BEFA, BGHC, AILC, *celui qui occupera l'hypoténuse vaut toujours la somme des deux autres.* Abaissons de l'angle droit *B*, sur l'hypoténuse *AC*, la perpendiculaire *BD*; les deux triangles *BDA*, *BDC* seront chacun semblables au triangle *ABC* (112); et par conséquent les surfaces de ces trois triangles seront entre elles comme les quarrés de leurs côtés homologues; on a donc cette suite de rapports égaux $ABD : \overline{AB}^2 :: BDC : \overline{BC}^2 :: ABC : \overline{AC}^2$ ou $ABD : ABEF :: BDC : BGHC :: ABCAILC$; donc (*Arith* 186) $ABD + BDC : ABEF + BGHC :: ABC : AILC$. Or il est évident que *ABC* vaut les deux parties $ABD + BDC$; donc *AILC* vaut $ABEF + BGHC$, ce qu'on peut exprimer en cette manière, $\overline{AC}^2$ vaut $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.

165. Puisque le quarré de l'hypoténuse vaut la somme des quarrés des deux côtés de l'angle droit, concluons donc que *le quarré d'un des côtés de l'angle droit vaut le quarré de l'hypoténuse, moins le quarré de l'autre côté;* c'est-à-dire que $\overline{BC}^2$ vaut $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$, *et* $\overline{AB}^2$ vaut $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$.

166. Donc, *lorsqu'on connaît deux côtés d'un triangle, on peut toujours calculer le troisième.* Supposons, par exemple, que le côté *AB* soit de 12 pieds, le côté *BC* de 25; on demande l'hypoténuse *AC*. J'ajoute 144, qui est le quarré du côté *AB*, avec 625 qui est le quarré du côté *BC*, la somme

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

769 est égale au quarré de l'hypoténuse AC (164); donc si je tire la racine quarrée de 769, j'aurai l'hypoténuse AC; cette racine est 27,73 à moins d'un centième près; donc le côté AC est de 27,73 pieds, c'est-à-dire de $27^{P}\ 8^{P}\ 9^{l}$. Si au contraire on donnait l'hypoténuse et un des côtés, on trouverait le second côté par ce qui vient d'être dit (165). Par exemple, si l'hypoténuse AC était de 54 pieds, et le côté BC de 42, et qu'on demandât de combien est le côté AB; alors, de 2916 qui est le quarré de l'hypoténuse 54, je retrancherais 1764 qui est le quarré du côté BC; le reste 1152 serait donc la valeur du quarré du côté AB; tirant la racine quarrée de 1152, cette racine, qui est 33,94, serait la valeur de AB; c'est-à-dire que AB serait de 33^{P}, 94 ou $33^{P}\ 11^{P}\ 3^{l}$ à peu près.

167. Puisque le quarré de l'hypoténuse vaut la somme des quarrés des deux côtés de l'angle droit, il s'ensuit que si le triangle rectangle est isoscèle, comme il arrive, par exemple, dans un quarré lorsqu'on tire la diagonale AC (*fig.* 103), alors le quarré de l'hypoténuse sera double du quarré d'un de ses côtés; donc la surface d'un quarré est à celle du quarré fait sur sa diagonale, comme 1 est à 2; donc (*Arith.* 192) le côté d'un quarré est à sa diagonale, comme 1 est à la racine quarrée de 2; et comme cette racine ne peut être exprimée exactement en nombres, il s'ensuit qu'on ne peut avoir exactement en nombres le rapport du côté d'un quarré à sa diagonale, c'est-à-dire que la diagonale est *incommensurable*, ou n'a aucune commune mesure avec son côté.

168. Dans la démonstration du n° 164, on a vu que la similitude des triangles ABC, ADB, CDB, donne $ABC : \overline{AC}^{2} :: ADA : \overline{AB}^{2} :: BDC : \overline{BC}^{2}$, ou bien $ABC : ADB : BDC :: \overline{AC}^{2} : \overline{AB}^{2} : \overline{BC}^{2}$; mais les triangles ABC, ADB, BCD, étant tous trois de même hauteur, sont entre eux comme leurs bases (158); donc $ABC : ADB : RDC :: AC : AD : DC$; donc aussi $\overline{AC}^{2} : \overline{AB}^{2} : \overline{BC}^{2} :: AC : AD : DC$; donc *le quarré*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

fait sur l'hypoténuse, est à chacun des quarrés faits sur les deux autres côtés, comme l'hypoténuse est à chacun des segmens correspondans à ces côtés.

169. De là on peut conclure le moyen de faire par lignes, ce que nous avons enseigné à faire par nombres (163); c'est-à-dire de construire une *figure* x semblable à une *figure* proposée X (*fig.* 100 *et* 101), et dont la surface soit à celle de celle-ci, dans un rapport donné. On tirera (*fig.* 104) une ligne indéfinie DE, sur laquelle on prendra les deux parties DP et PE, telles que DP soit à PE, comme la surface de la *figure* donnée X (*fig.* 100) doit être à celle de la *figure* cherchée x (*fig.* 101), c'est-à-dire :: 3 : 2, si l'on veut que x soit les $\frac{2}{3}$ de X. Sur DE (*fig.* 104) comme diamètre, on décrira le demi-cercle DBE; et ayant élevé au point P la perpendiculaire PB, on mènera, du point B où elle rencontrera la circonférence, aux deux extrémités D et E, les cordes DB, BE. Sur DB on prendra BA égal à un côté AB de la *figure* X, et ayant mené AC parallèle à DE, on aura BC pour le côté homologue de la *figure* cherchée x, qu'on construira ensuite comme il a été dit (133). En voici la raison: la surface de la *figure* X doit être à celle de la *figure* x, comme le quarré du côté AB est au quarré du côté cherché ab, c'est-à-dire :: $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$; or on veut que ces deux surfaces soient aussi l'une à l'autre :: 3 : 2; il faut donc que $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 :: 3 : 2$. Or (*fig.* 104) $AB : BC :: BD : BE$, et par conséquent (*Arith.* 191) $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: \overline{BD}^2 : \overline{BE}^2$; mais comme le triangle DBE est rectangle, on a (168) $\overline{BD}^2 : \overline{BE}^2 :: DP : PE$, c'est-à-dire :: 3 : 2; donc $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: 3 : 2$; donc aussi $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$; donc ab doit être égal à BC.

170. Il suit encore de ce qu'on vient de dire (168), que *les quarrés des cordes* AC, AD, *etc., menées par l'extrémité d'un diamètre* AB (fig. 105) *sont entre eux comme les parties* AP, AO *que coupent sur ce diamètre, les perpendiculaires*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

abaissées des extrémités de ces cordes. Car en tirant les cordes BC et BD, on aura (168) dans le triangle rectangle ACB; $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: AB : AP$, et dans le triangle rectangle ADB, $\overline{AD}^2 : \overline{AB}^2 :: AO : AB$; donc (100) $\overline{AD}^2 : \overline{AC}^2 :: AO : AP$.

Des Plans.

171. Après avoir établi la mesure et les rapports des surfaces planes, il ne nous reste plus, pour pouvoir passer aux solides, qu'à considérer les propriétés des lignes droites dans leurs différentes positions à l'égard des plans, et celles des plans dans leurs différentes positions les uns à l'égard des autres; c'est ce dont nous allons nous occuper. Nous ne supposons aux plans dont il va être question, aucune grandeur ni aucune figure déterminée; nous les supposons étendus indéfiniment dans tous les sens; ce n'est que pour aider l'imagination, que nous leur donnons les figures par lesquelles nous les représenterons ici.

172. *Une ligne droite ne peut être en partie dans un plan, et en partie élevée ou abaissée à son égard.* Car le plan (5) est une surface à laquelle une ligne droite s'applique exactement.

173. *Il en est de même d'un plan à l'égard d'un autre plan.* Car une ligne droite qu'on tirerait dans la partie plane commune à ces deux plans, pouvant être prolongée indéfiniment dans l'un et l'autre, se trouverait en partie dans l'un de ces plans, et en partie élevée ou abaissée à son égard, ce qui ne peut être (172).

174. *Deux lignes* AB, CD, (fig. 106) *qui se coupent, sont dans un même plan.* Car il est évident qu'on peut faire passer un plan par l'une AB de ces lignes, et par un point pris arbitrairement dans la seconde; et comme le point d'intersection E, en tant qu'appartenant à AB, est dans ce même plan, la ligne

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

CD a donc deux points dans ce plan : elle y est donc toute entière.

175. *La rencontre ou l'intersection de deux plans est une ligne droite.* Il est évident qu'elle doit être une ligne, puisqu'aucun des deux plans n'a d'épaisseur ; de plus, elle doit être une ligne droite ; car une ligne droite qu'on tirerait par deux points de cette intersection est nécessairement toute entière dans chacun des deux plans ; elle est donc l'intersection même.

176. *On peut donc faire passer par une même ligne droite une infinité de plans différens.*

177. Nous disons qu'*une ligne est perpendiculaire à un plan*, quand elle ne penche d'aucun côté de ce plan.

178. *Une perpendiculaire* AB *à un plan* GE (fig. 107) *est donc perpendiculaire à toutes les lignes* BC, BC, BC, *etc. qu'on peut mener par son pied dans ce plan ;* car s'il y en avait une à laquelle elle ne fût pas perpendiculaire, elle inclinerait vers cette ligne, et par conséquent vers le plan.

179. *La ligne* AB (fig. 108) *étant perpendiculaire au plan* GE, *si par son pied* B *on tire une ligne* BC *dans le plan* GE, *et qu'on conçoive que le plan* ABC *tourne autour de* AB ; *je dis que dans ce mouvement, la ligne* BC *ne sortira point du plan* GE. Imaginons le plan *ABC* arrivé dans une position quelconque *ABD* ; si la ligne *BC*, qui alors est en *BD*, n'était point dans le plan *GE*, le plan *ABD* rencontrerait donc le plan *GE* dans une ligne droite *BF*, à laquelle *AB* serait perpendiculaire (178) ; *BF* serait donc aussi perpendiculaire sur *AB* ; et comme *BD* est supposée perpendiculaire sur *AB* au même point *B*, il s'ensuivrait donc, qu'au même point *B* et dans un même plan *ABD*, on pourrait élever deux perpendiculaires à *AB*, ce qui (27) est impossible ; donc *BF* ne peut être différente de *BD* ; donc *BC* ne peut, dans son mouvement autour de *AB*, sortir du plan *GE*.

180. Donc, *pour qu'une ligne droite* AB (fig. 108) *soit perpendiculaire à un plan* GE, *il suffit qu'elle soit perpendiculaire*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

à deux lignes BC, DB *qui se rencontrent à son pied dans ce plan.* Car si l'on conçoit que le plan de l'angle droit *ABC*, tourne autour de *AB*, la ligne *BC* tracera (179) un plan auquel *AB* sera perpendiculaire; or je dis que ce plan ne peut être autre que le plan *GE* des deux lignes *BC* et *BD*; car l'angle *ABD* étant droit ainsi que l'angle *ABC*, la ligne *BC*, en tournant autour de *AB*, aura nécessairement la ligne *BD* pour une de ses positions, donc *BD* est dans le plan tracé par *BC*; donc *AB* est perpendiculaire au plan *CBD*.

181. *Si d'un point* A *d'une droite* AI *oblique à un plan* GE (fig. 109), *on abaisse une perpendiculaire* AB *sur ce plan*, et *qu'ayant joint les points* B *et* I *de la perpendiculaire et de l'oblique, par une droite* BI, *on mène à cette dernière une perpendiculaire* CD *dans le plan* GE, *je dis que* AI *sera aussi perpendiculaire à* CD. Prenons les parties égales, *IC*, *ID*, et tirons les lignes *BC* et *BD*; ces deux dernières lignes seront égales entre elles (29); donc les deux triangles *ABC*, *ABD* seront égaux; car outre l'angle *ABC* égal à l'angle *ABD*, comme étant chacun droit, le côté *AB* est commun, et *BC* est égal à *BD*, selon ce qu'on vient de prouver; ils ont donc un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; ils sont donc égaux : donc *AD* est égal à *AC*; la ligne *AI* a donc deux points *A* et *I* également éloignés du point *C* et du point *D*; elle est donc perpendiculaire sur *CD* (32).

182. *Un plan est* dit *perpendiculaire à un autre plan*, quand il ne penche ni d'un côté, ni de l'autre, de ce dernier.

183. Donc, *par une même ligne* CD (fig. 110) *prise dans un plan* GE, *on ne peut conduire plus d'un plan perpendiculaire à ce plan* GE.

184. *Un plan* CK est *perpendiculaire à un autre plan* GE, *quand il passe par une droite* AB *perpendiculaire à celui-ci;* car il est évident qu'il ne peut incliner d'aucun côté du plan *GE*.

185. *Si par un point* A *pris dans le plan* CK *perpendiculaire*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

au plan GE, *on mène une perpendiculaire* AB *à la commune section* CD, *cette ligne sera aussi perpendiculaire au plan* GE. Car si elle ne l'était pas, on pourrait par le point *B* où elle tombe, élever une perpendiculaire au plan *GE*, et conduire par cette perpendiculaire et par la commune section *CD*, un plan qui (184) serait perpendiculaire au plan *GE*; on pourrait donc, par une même ligne *CD*, prise dans le plan *GE*, mener deux plans perpendiculaires à celui-ci; ce qui est impossible (183); donc *AB* est perpendiculaire au plan *GE*.

186. Donc *le plan* CK *étant perpendiculaire au plan* GE, *la perpendiculaire* BA *qu'on élevera sur le plan* GE, *par un point* B *de de la section commune, sera nécessairement dans le plan* CK. De cette proposition il suit que *deux perpendiculaires* BA, LM *à un même plan* GE, *sont parallèles*. Car si l'on joint leurs pieds *B* et *L* par une ligne *BL*, et que par cette ligne et par *AB* on conduise un plan *CK*, ce plan sera perpendiculaire au plan *GE* (184); et puisque *LM* est alors une perpendiculaire au plan *GE*, menée par un point *L* du plan *CK*, elle sera donc dans le plan *CK* (186); or, puisque les deux lignes *AB*, *LM* sont toutes deux dans un même plan et perpendiculaires à la même ligne *BL*, elles sont parallèles (36 et 37).

187. Donc, *si deux droites* AB, CD (fig. 112) *sont parallèles chacune à une troisième* HF, *elles seront aussi parallèles entre elles;* car les lignes *AB*, *HF* étant parallèles, peuvent être toutes deux perpendiculaires à un même plan *GE*; par la même raison *CD* et *HF* peuvent être perpendiculaires à un même plan *GE*; donc *AB* et *CD* étant perpendiculaires à un même plan, seront parallèles.

188. *Si deux plans* CK, NL (fig. 111) *sont perpendiculaires à un troisième* GE *leur commune section* AB *sera aussi perpendiculaire au plan* GE. Car la perpendiculaire qu'on éleverait par le point *B* sur le plan *GE*, doit être dans chacun de ces plans (186); elle ne peut donc être autre que l'intersection commune.

189. On appelle *angle-plan*, l'ouverture de deux plans *GF*,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

GE (*fig.* 113) qui se rencontrent : cet angle s'appelle aussi l'*inclinaison* de l'un de ces plans à l'égard de l'autre. L'angle-plan formé par les deux plans *GF*, *GE*, n'est autre chose que la quantité dont le plan *GF* aurait dû tourner autour de *AG* pour venir dans sa situation actuelle, s'il avait été d'abord couché sur le plan *GE*.

190. De là il est aisé de voir que si par un point *B* pris dans la commune section *AG*, on mène dans le plan *GE* la perpendiculaire *BD* à *AG*, et dans le plan *GF* la perpendiculaire *BC* à la même ligne *AG*, l'angle formé par les deux plans, est la même chose que l'angle formé par les deux lignes *BD* et *BC*; car il est facile de voir que pendant le mouvement du plan *GF*, la ligne *BC* s'écarte de la ligne *BD*, sur laquelle elle était couchée au commencement du mouvement, s'écarte, dis-je, de *BD*, précisément selon la même loi selon laquelle le plan *GF* s'écarte du plan *GE*.

191. Donc *un angle plan a même mesure que l'angle rectiligne compris entre deux lignes tirées, dans chacun des deux plans qui le forment, perpendiculairement à la commune section, et d'un même point de cette ligne.* De là il est aisé de conclure les propositions suivantes, que nous nous contenterons d'énoncer.

192. *Un plan qui tombe sur un autre plan, forme deux angles qui, pris ensemble, valent* 180°.

193. *Les angles formés par tant de plans qu'on voudra, qui passent tous par une même droite, valent* 360°.

194. *Deux plans qui se coupent, font les angles opposés au sommet, égaux.*

195. On appelle *plans parallèles*, ceux qui ne peuvent jamais se rencontrer, à quelque distance qu'on les imagine prolongés.

196. *Les plans parallèles sont donc partout également éloignés.*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

197. *Si deux plans parallèles sont coupés par un troisième plan* (fig. 114), *les intersections* AB, CD *seront deux droites parallèles ;* car comme elles sont dans un même plan *ABCD*, elles ne pourraient manquer de se rencontrer si elles n'étaient pas parallèles, et alors il est évident que les plans se rencontreraient aussi.

198. *Deux plans parallèles coupés par un troisième, ont les mêmes propriétés, dans les angles qu'ils forment avec ce troisième, que deux lignes droites, parallèles, à l'égard d'une troisième droite qui les coupe.* C'est une suite de ce qui a été dit (191).

Propriétés des Lignes droites coupées par des Plans parallèles.

199. *Si d'un point* I *pris hors d'un plan* GE (fig. 115), *on tire à différens points* K, L, M, *de ce plan, des droites* IK, IL, IM, *et qu'on coupe par un plan* ge, *parallèle au plan* GE ; *je dis* 1°. *que ces droites seront coupées proportionnellement ;* 2°. *que la figure* klm *sera semblable à la figure* KLM. Ne supposons d'abord que trois points *K*, *L*, *M*. Puisque les droites *kl*, *lm*, *mk* sont les intersections des plans *IKL*, *ILM*, *IKM* avec le plan *ge*, elles sont parallèles aux droites *KL*, *LM*, *MK*, intersections des mêmes plans avec le plan *GE* (197); donc les triangles *IKL*, *ILM*, *IMK*, sont semblables aux triangles *Ikl*, *Ilm*, *Imk* chacun à chacun ; donc *IK* : *Ik* :: *KL* : *kl* :: *IL* : *Il* :: *LM* : *lm* :: *IM* : *Im* : *MK* : *mk* ; or, 1°. si de cette suite de rapports égaux on tire seulement ceux qui renferment les droites qui partent du point *I*, on aura *IK* : *Ik* :: *IL* : *Il* :: *IM* : *Im* ; donc les droites *IK*, *IL*, *IM* sont coupées proportionnellement.

2°. Si de la même première suite de rapports égaux, on tire ceux qui renferment les lignes comprises dans les deux plans parallèles, on aura *KL* : *kl* :: *LM* : *lm* : *KM* : *km* ; donc les deux triangles *KLM*, *klm* sont semblables, puisqu'ils ont les côtés proportionnels.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Supposons maintenant tel nombre de points A, B, C, D, F, etc. qu'on voudra, on démontrera précisément de la même manière, que les droites IA, IB, IC, etc. sont coupées proportionnellement ; et si l'on imagine des diagonales AC, AD, etc. ac, ad, etc. menées des deux angles correspondans A et a, on démontrera aussi, de la même manière, que les triangles ABC, ACD, etc. sont semblables aux triangles, abc, acd, etc. chacun à chacun ; donc les deux polygones $ABCDF$, $abcdf$ étant composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, et semblablement disposés, sont semblables (133).

200. Puisque les deux figures KLM, klm sont semblables, concluons-en que l'angle KLM est égal à l'angle klm ; et par conséquent *si deux droites* KL, LM, *qui comprennent un angle* KLM *sont parallèles à deux droites* kl, lm, *qui comprennent un angle* klm, *l'angle* KLM *sera égal à l'angle* klm, *lors même que ces deux angles ne seront pas dans un même plan* : nous avons donné cette même proposition (45) ; mais nous supposions que les deux angles étaient dans un même plan.

201. Il suit encore de ce que les deux figures $ABCDF$ et $abcdf$ sont semblables, et de ce que les deux figures KLM, klm sont semblables ; il suit, dis-je, que *les surfaces des deux sections* abcdf, klm *sont entre elles comme celles des deux figures* ABCDF, KLM, Car $ABCDF : abcdf :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$ (161). Mais les triangles semblables IAB, Iab donnent $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 :: \overline{IA}^2 : \overline{Ia}^2$, ou (199) $:: \overline{IM}^2 : \overline{Im}^2$, (ou à cause des triangles semblables IML, Iml) $:: \overline{LM}^2 : \overline{lm}^2$; et par conséquent (161) $:: KLM : klm$; donc $ABCDF : abcdf :: KLM : klm$, ou (*Arith.* 182) $ABCDF : KLM :: abcdf : klm$.

202. Cette démonstration fait voir en même temps que les surfaces $ABCDF$, $abcdf$ sont entre elles comme les quarrés de deux droites IA et Ia tirées du point I à deux points corres-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

pondans de ces figures ; et par conséquent (199) comme les quarrés des hauteurs ou perpendiculaires *IP*, *Ip*, menées du point *I* sur les plans *GE* et *ge*. Concluons donc, 1°. que si les deux surfaces *ABCDF*, *KLM* étaient égales, les deux surfaces *abcdf*, *klm* seraient aussi égales. 2°. Que tout ce que nous venons de dire aurait encore lieu si le point *I*, au lieu d'être commun aux droites *IA*, *IB*, *IC*, etc. et aux droites *IM*, *IL*, etc. était différent pour chaque figure, pourvu qu'il fût à même hauteur au-dessus du plan *ge*.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

SECTION III.

Des Solides.

203. Nous avons nommé *solide* ou *volume*, ou *corps* (1), tout ce qui a les trois dimensions, *longueur*, *largeur et profondeur*. Nous allons nous occuper de la mesure et des rapports des solides. Nous considérerons les solides terminés par des surfaces planes; et de ceux qui sont renfermés par des surfaces courbes, nous ne considérerons que le *cylindre*, le *cône* et la *sphère*. Les solides terminés par des surfaces planes, se distinguent en général par le nombre et la figure des plans qui les renferment; ces plans doivent être, au moins, au nombre de quatre.

204. Un solide dont deux faces opposées sont deux plans égaux et parallèles, et dont toutes les autres faces sont des parallélogrammes, s'appelle en général un *prisme* (*fig.* 116, 117, 118, 119). On peut donc regarder le prisme, comme engendré par le mouvement d'un plan *BDF* qui glisserait parallèlement à lui-même le long d'une ligne droite *AB* (*fig.* 116). Les deux plans parallèles se nomment les *bases* du prisme, et la perpendiculaire *LM*, menée d'un point de l'une des bases sur l'autre base, se nomme la *hauteur*. De l'idée que nous venons de donner du prisme, il suit, qu'à quelque endroit qu'on coupe un prisme par un plan parallèle à sa base, la section sera toujours un plan parfaitement égal à la base. Les lignes telles que *AB*, qui sont les rencontres de deux parallélogrammes consécutifs, sont nommées les *arêtes du prisme*. Le prisme est *droit*, lorsque ses arêtes sont perpendiculaires à la base; alors elles sont toutes égales à la hauteur (*fig.* 117 *et* 119); Au contraire le prisme est *oblique*, lorsque ses arêtes inclinent sur la base. Les prismes se distinguent par le nombre des côtés de leur base; si la base

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

est un triangle, le prisme est dit *prisme triangulaire* (*fig.* 116); si la base est un quadrilatère, on l'appelle *prisme quadrangulaire* (*fig.* 117), et ainsi de suite.

Parmi les prismes quadrangulaires on distingue plus particulièrement le *parallélipipède* et le *cube*. Le *parallélipipède* est un prisme quadrangulaire dont les bases, et par conséquent toutes les faces, sont des parallélogrammes; et lorsque le parallélogramme qui sert de base est un rectangle, et qu'en même tems le prime est droit, on l'appelle *parallélipipède* rectangle (*fig.* 117). Le parallélipipède rectangle prend le nom de *cube*, lorsque la base est un quarré, et que l'arête *AB* (*fig.* 119) est égale au côté de ce quarré. Le *cube* est donc un solide compris sous six quarrés égaux. C'est avec ce solide qu'on mesure tous les autres, comme nous le verrons dans peu.

205. Le *cylindre* est le solide compris entre deux cercles égaux et parallèles, et la surface que tracerait une ligne *AB* (*fig.* 120 *et* 121), qui glisserait parallèlement à elle-même le long des deux circonférences. Le cylindre est *droit* quand la ligne *CF* (*fig.* 120), qui joint les centres des deux bases opposées, est perpendiculaire à ces cercles: cette ligne *CF* s'appelle l'*axe* du cylindre; et le cylindre est *oblique*, quand cette même ligne *CF* incline sur la base. On peut considérer le cylindre droit, comme engendré par le mouvement du parallélogramme rectangle *FCDE* tournant autour de son côté *CF*.

206. La *pyramide* est un solide compris sous plusieurs plans, dont l'un, qu'on appelle la *base*, est un polygone quelconque, et les autres, qui sont tous des triangles, ont pour base les côtés de ce polygone, et ont tous leurs sommets réunis en un même point, qu'on appelle le *sommet* de la pyramide (*fig.* 122, 123, 124). La perpendiculaire *AM* menée du sommet sur le plan qui sert de base, s'appelle la *hauteur* de la pyramide. Les pyramides se distinguent par le nombre des côtés de leurs bases; ensorte que celle qui a pour base un triangle, est appelée *pyramide triangulaire*; celle qui a pour base un quadrilatère, *pyramide quadrangulaire*; et ainsi de suite. La pyra-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

mide est dite *régulière* lorsque le polygone qui lui sert de base est régulier, et qu'en même temps la perpendiculaire *AM* (*fig.* 124), menée du sommet, passe par le centre de ce polygone. La perpendiculaire *AG* menée du sommet *A* sur l'un *DF* des côtés de la base, s'appelle *apothème*. Il est clair que tous les triangles qui aboutissent au point *A*, sont égaux et isoscèles; car ils ont tous des bases égales, et les arêtes *AB*, *AC*, *AD*, etc. sont toutes égales, puisque ce sont toutes des obliques également éloignées de la perpendiculaire *AM* (29). Tous les apothèmes sont égaux.

207. Le *cône* (*fig.* 125 *et* 126) est le solide renfermé par le plan circulaire *BGDH* qu'on appelle la base du cône, et par la surface que tracerait une ligne *AB* tournant autour du point fixe *A*, et rasant toujours la circonférence *BGDH*. Le point *A* s'appelle le *sommet* du cône. La perpendiculaire, menée du sommet sur le plan de la base, se nomme la *hauteur* du cône: et le cône est *droit* ou *oblique*, selon que cette perpendiculaire passe (*fig.* 125) ou ne passe point (*fig.* 126) par le centre de la base. On peut concevoir le cône droit, comme engendré par le mouvement du triangle rectangle *ACD* (*fig.* 125), tournant autour du côté *AC*.

208. La *sphère* est un solide terminé de toutes parts par une surface dont tous les points sont également éloignés d'un même point. On peut considérer la sphère comme le solide qu'engendrerait le demi-cercle *ABD* (*fig.* 128), tournant autour du diamètre *AD*. Il est évident que toute *coupe*, ou toute *section* de la sphère par un plan, est un cercle. Si ce plan passe par le centre, la section s'appelle *grand cercle* de la sphère. Et on appelle, au contraire, *petit cercle*, toute section de la sphère, par un plan qui ne passe point par le centre. Le *secteur sphérique* est le solide qu'engendrerait le secteur circulaire *BCA* tournant autour du rayon *AC*. La surface que décrirait l'arc *AB* dans ce mouvement, s'appelle *calotte spherique*. Le *segment sphérique* est le solide qu'engendrerait le demi-segment circulaire *AFB*, tournant autour de la partie *AF* du rayon.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Des Solides semblables.

209. Les *solides semblables* sont ceux qui sont composés d'un même nombre de faces semblables chacune à chacune, et semblablement disposées dans les deux solides.

210. Les *arêtes homologues et les sommets des angles solides homologues, sont donc des lignes et des points semblablement placés dans les deux solides;* car les arêtes homologues, et les sommets des angles solides homologues, sont des lignes et des points semblablement placés à l'égard des faces auxquelles ils appartiennent, puisque ces faces sont supposées semblables; et ces faces sont semblablement disposées dans les deux solides; donc, etc.

211. Donc *les triangles qui joignent un angle solide et les extrémités d'une arête homologue, dans chaque solide, sont deux figures semblables, et semblablement disposées dans les deux solides;* car les extrémités des arêtes homologues sont elles-mêmes les sommets d'angles solides homologues, qui sont (210) semblablement placés à l'égard des solides.

212. *Les diagonales qui joignent deux angles solides homologues, sont donc entre elles comme les arêtes homologues de ces solides;* car elles sont les côtés des triangles semblables dont on vient de parler, et qui ont pour un de leurs côtés des arêtes homologues. Donc deux solides semblables peuvent être partagés en un même nombre de pyramides semblables, chacune à chacune, par des plans conduits par des angles homologues, et par deux arêtes homologues. Car les faces de ces pyramides seront composées de triangles semblables, et semblablement disposés dans les deux solides (211); et les bases de ces mêmes pyramides seront aussi semblables, puisqu'elles sont des faces homologues des deux solides; donc (209) ces pyramides seront semblables.

213. *Si de deux angles homologues on abaisse des perpendiculaires sur deux faces homologues, ces perpendiculaires seront*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

ront entre elles dans le rapport de deux arêtes homologues quelconques. Car les deux angles homologues étant semblablement disposés à l'égard de deux faces homologues (210) doivent nécessairement être à des distances de ces faces, qui soient entre elles dans le rapport des dimensions homologues des deux solides.

De la Mesure des Surfaces des Solides.

214. Les surfaces des prismes et des pyramides étant composées de parallélogrammes, de triangles et de polygones rectilignes, nous pourrions nous dispenser de rien dire ici sur la manière dont on doit s'y prendre pour les mesurer, puisque nous avons donné (145, 147 et 149) les moyens de mesurer les parties dont elles sont composées. Mais on peut tirer de ce que nous avons dit à ce sujet, quelques connaissances, qui non-seulement serviront à simplifier les opérations qu'exigent ces mesures, mais nous seront encore utiles pour évaluer les surfaces des cylindres, des cônes, et même de la sphère.

215. *La surface d'un prisme quelconque (en n'y comprenant pas les deux bases) est égale au produit de l'une des arêtes de ce prisme, par le contour* bdfhk, (fig. 118) *faite par un plan auquel cette arête serait perpendiculaire*, car, puisque l'arête *AB* est supposée perpendiculaire au plan *bdfhk*, les autres arêtes qui sont toutes parallèles à celles-là, seront aussi perpendiculaires au plan *bdfghk*; donc réciproquement les droites *bd*, *df*, *fh*, etc. seront perpendiculaires chacune sur l'arête qu'elle coupe; en considérant donc les arêtes comme les bases des parallélogrammes qui enveloppent le prisme, les lignes *bd*, *df*, *fh*, etc. en seront les hauteurs. Il faudra donc, pour avoir la surface du prisme, multiplier l'arête *AB*, par la perpendiculaire *bd*; l'arête *CD*, par la perpendiculaire *df*, et ainsi de suite; et ajouter tous ces produits; mais comme toutes les arêtes sont égales, il est évident qu'il revient au même d'en multiplier une seule *AB*, par la somme de toutes les hauteurs, c'est-à-dire par le contour *bdfghk*.

216. Quand le prisme est droit, la section *bdfhk* ne diffère

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

pas de la base *BDFHK*, et l'arête *AB* est alors la hauteur du prisme; donc *la surface d'un prisme droit (en n'y comprenant point les deux bases) est égale au produit du contour de la base multipliée par la hauteur.*

217. Nous avons vu ci-dessus (136) qu'on pouvait considérer le cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés; donc le cylindre peut être considéré comme un prisme dont le nombre des parallélogrammes qui composent la surface serait infini. Donc, *La surface d'un cylindre droit est égale au produit de la hauteur de ce cylindre, par la circonférence de sa base.* Nous avons vu (152) comment on doit s'y prendre pour avoir cette circonférence. *A l'égard du cylindre oblique*, il faut multiplier sa longueur *AB*, par la circonférence de la section *bgdh* (*fig.* 121), cette section étant faite comme il a été dit (215). La méthode pour déterminer la longueur de cette section, dépend de connaissances plus étendues que celles que nous avons données jusqu'ici; dans la pratique, il faut se contenter de la mesurer mécaniquement, en enveloppant le cylindre avec un fil (ou autre chose équivalente), qu'on aura soin d'assujétir dans un plan auquel la longueur *AB* de ce cylindre soit perpendiculaire.

218. *Pour la pyramide*, si elle n'est pas régulière, il faut chercher séparément la surface de chacun des triangles qui la composent, et ajouter ces surfaces. Mais si elle est régulière, on peut avoir sa surface plus briévement, en multipliant le contour de sa base par la moitié de l'apothème *AG* (*fig.* 124); car tous les triangles étant de même hauteur, il suffit de multiplier la moitié de la hauteur commune, par la somme de toutes les bases.

219. En considérant encore la circonférence d'un cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, on voit que le cône n'est au fond qu'une pyramide régulière, dont la surface (non compris celle de la base) est composée d'une infinité de triangles, et que par conséquent *la surface convexe d'un cône droit, est égale au produit de la circonférence de sa base, par la moitié du côté* AB *de ce cône* (fig. 125). *A l'égard de la surface du cône oblique*, elle dépend d'une géométrie plus composée; ainsi nous n'en parlerons point ici. Au reste, la manière dont nous

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

venons de considérer le cône, donne le moyen de le mesurer à peu près, lorsqu'il est oblique. Il faut partager la circonférence de la base en un assez grand nombre d'arcs, pour que chacun puisse être considéré sans erreur sensible, comme une ligne droite; et alors on calculera la surface, comme pour une pyramide qui aurait autant de triangles qu'on a d'arcs.

220. *Pour avoir la surface d'un tronc de cône droit dont les bases opposées* BGDH bgdh (fig. 127) *sont parallèles, il faut multiplier le côté* Bb *de ce tronc, par la moitié de la somme des circonférences des deux bases opposées.* En effet, on peut concevoir cette surface, comme l'assemblage d'une infinité de trapèzes tels que *EFfe* dont les côtés *Ee*, *Ff* tendent au sommet *A*; or la surface de chacun de ces trapèzes est égale à la moitié de la somme des deux bases opposées *EF*, *ef*, multipliée par la distance de ces deux bases (148); mais cette distance ne diffère pas des côtés *Ee*, *Ff*, ou *Bb*; donc, pour avoir la somme de tous ces trapèzes, il faut multiplier la moitié de la somme de toutes les bases opposées, telles que *EF*, *ef*, c'est-à-dire la moitié de la somme des deux circonférences, par la ligne *Bb*, hauteur commune de tous ces trapèzes.

221. Si par le milieu *M* du côté *Bb* on conduit un plan parallèle à la base, la section (199) sera un cercle dont la circonférence sera la moitié de la somme des circonférences des deux bases opposées, puisque son diamètre *MN* (148) est la moitié de la somme de ceux des bases, et que (136) les circonférences sont entre elles comme leurs diamètres. Donc la *surface d'un cône tronqué à bases parallèles est égale au produit du côté du tronc, par la circonférence de la section faite à distances égales des deux bases opposées.* Cette proposition va nous servir pour la démonstration de la suivante.

222. *La surface d'une sphère est égale au produit de la circonférence d'un de ses grands cercles, multipliée par le diamètre.* Concevez la demi-circonférence *AKLD* (*fig.* 129) divisée en une infinité d'arcs; chacun de ces arcs, tels que *KL*, étant infiniment petit, se confondra avec sa corde. Menons par

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

les extrémités de KL, les perpendiculaires KE, LF, au diamètre AD; et par le milieu I de KL ou de sa corde, menons IH parallèle à KE, et le rayon IC; ce rayon sera perpendiculaire sur KL (52 ; tirons enfin KM perpendiculaire sur IH ou sur LF. Si l'on conçoit que la demi-circonférence $AKLD$ tourne autour de AD, elle engendrera la surface de la sphère, et chacun de ces arcs KL engendrera la surface d'un cône tronqué, qui sera un élément de celle de la sphère. Nous allons voir que la surface de ce cône tronqué est égale au produit de KM ou EF par la circonférence qui a pour rayon IC ou AC. Le triangle KML est semblable au triangle IHC, puisque ces deux triangles ont les côtés perpendiculaires l'un à l'autre, d'après ce qu'on vient de prescrire. Ces triangles semblables donneront donc (112) cette proportion $KL : KM :: IC : IH$; ou puisque (136) les circonférences sont entre elles comme leurs rayons $KL : KM :: cir.\ IC : cir.\ IH$ (*); donc, puisque (*Arith.* 178) dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens $KL \times cir.\ IH$ est égal à $KM \times cir.\ IC$, ou (ce qui revient au même) est égal à $EF \times cir.\ AC$. Or (221) le premier de ces produits exprime la surface du cône tronqué engendré par KL; donc ce cône tronqué est égal à $EF \times cir.\ AC$, c'est-à-dire au produit de sa hauteur EF par la circonférence d'un grand cercle de la sphère. Et comme en prenant tout autre arc que KL, on démontrerait la même chose et de la même manière, on doit conclure que la somme des petits cônes tronqués qui composent la surface de la sphère, est égal à la circonférence d'un des grands cercles, multipliée par la somme des hauteurs de ces cônes tronqués, laquelle somme compose évidemment le diamètre. Donc la surface de la sphère est égale à la circonférence d'un de ses grands cercles, multipliée par le diamètre.

223. Si l'on conçoit un cylindre (*fig.* 130) qui entoure la sphère en la touchant, et qui ait pour hauteur le diamètre de cette sphère; c'est-à-dire, si l'on conçoit un cylindre circons-

(*) L'expression *cir. IC*, désigne la circonférence qui a pour rayon *IC*.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

crit à la sphère, on pourra conclure que la *surface de la sphère est égale à la surface convexe du cylindre circonscrit*; car (217) la surface de ce cylindre est égale au produit de la circonférence de la base, multipliée par la hauteur; or la circonférence de la base est celle d'un grand cercle de la sphère, et la hauteur est égale au diamètre; donc, etc.

224. Puisque (151) pour avoir la surface d'un cercle, il faut multiplier la circonférence par la moitié du rayon ou le quart du diamètre, et que pour avoir celle de la sphère, il faut multiplier la circonférence par le diamètre, on doit donc dire que *la surface de la sphère est quadruple de celle d'un de ses grands cercles.*

225. La démonstration que nous venons de donner de la mesure de la surface de la sphère, prouve également que pour avoir la surface convexe du segment sphérique, qu'engendrerait l'arc *AL* (*fig.* 131) tournant autour du diamètre *AD*, il faut multiplier la circonférence d'un grand cercle de la sphère, par la hauteur *AI* de ce segment; et que pour avoir celle d'une portion de sphère comprise entre deux plans parallèles, tels que *LKM*, *NRP*, il faut pareillement multiplier la circonférence d'un grand cercle de la sphère, par la hauteur *IO* de cette portion de sphère. Car on peut considérer ces surfaces, ainsi qu'on l'a fait pour la sphère entière, comme composées d'une infinité de cônes tronqués, dont chacun est égal au produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle de la sphère.

Des rapports des surfaces des Solides.

226. Si deux solides dont on a dessein de comparer les surfaces, sont terminés par des plans dissemblables et irréguliers, le seul parti qu'il y ait à prendre pour trouver le rapport de leurs surfaces, est de calculer séparément la surface de chacun en mesure de même espèce, et de comparer le nombre des mesures de l'une, au nombre des mesures de l'autre; c'est-à-dire, par exemple, le nombre des pieds quarrés de l'une au nombre des pieds quarrés de l'autre.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

227. *Les surfaces des prismes (en n'y comprenant point les bases opposées) sont entre elles comme les produits de longueur de ces prismes, par le contour de la section faite perpendiculairement à cette longueur.* Car ces surfaces sont égales à ces produits (215).

228. Donc, *si les longueurs sont égales, les surfaces des prismes seront entre elles comme le contour de la section faite perpendiculairement à la longueur de chacun.* Car le rapport des produits de la longueur par le contour de cette section ne changera point si l'on omet, dans chacun des produits, la longueur qui en est le facteur commun.

229. Donc *les surfaces des prismes droits ou des cylindres droits de même hauteur, sont entre elles comme les contours des bases, quelque figure qu'aient d'ailleurs ces bases. Et si les contours des bases sont les mêmes, et les hauteurs différentes, ces surfaces seront comme les hauteurs.*

230. *Les surfaces des cônes droits sont entre elles, comme les produits des côtés de ces cônes, par les circonférences des bases, ou par les rayons, ou par les diamètres de ces bases.* Car ces surfaces étant égales chacune au produit de la circonférence de la base par la moitié du côté du cône (219), doivent être entre elles comme ces produits, et par conséquent comme le double de ces produits. D'ailleurs, comme les circonférences ont entre elles le même rapport que les rayons ou leurs diamètres, on peut (99) substituer dans ces produits, le rapport des rayons, ou celui des diamètres à celui des circonférences.

231. *Les surfaces des solides semblables sont entre elles comme les quarrés de leurs lignes homologues.* Car elles sont composées de plans semblables, dont les surfaces sont entre elles comme les quarrés de leurs côtés ou de leurs lignes homologues, lesquelles lignes sont lignes homologues des solides, et proportionnelles à toutes les autres lignes homologues.

232. *Les surfaces des deux sphères sont entre elles comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs diamètres.* Car la surface

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

d'une sphère étant quadruple de celle de son grand cercle, les surfaces des deux sphères doivent être entre elles comme le quadruple de leurs grands cercles, ou simplement comme leurs grands cercles, c'est-à-dire (162) comme les quarrés des rayons ou des diamètres.

De la solidité des Prismes.

233. Pour fixer les idées sur ce qu'on doit entendre par la *solidité d'un corps*, il faut se représenter, par la pensée, une portion d'étendue de telle forme qu'on voudra, de la forme d'un cube, par exemple, mais qui ait infiniment peu de longueur, de largeur et de profondeur, et concevoir que la capacité d'un corps est entièrement remplie de pareils cubes que nous nommerons *points solides*. La totalité de ces points forme ce que nous entendons par *solidité* d'un corps.

234. *Deux prismes ou deux cylindres, ou un prisme et un cylindre de même base et de même hauteur, ou de bases égales et de hauteurs égales, sont égaux en solidité, quelque différentes que soient d'ailleurs les figures des bases.*

Car si l'on imagine ces corps, coupés par des plans parallèles à leurs bases, en tranches infiniment minces, et d'une épaisseur égale à celle des points solides dont on peut imaginer que ces corps sont remplis, il est visible que, dans chacun, chaque section étant égale à la base (204), le nombre de points solides dont chaque tranche sera composée, sera partout le même, et égal au nombre des points superficiels de la base : et comme on suppose même hauteur aux deux solides, ils auront chacun le même nombre de tranches ; ils contiendront donc en totalité le même nombre de points solides ; donc ils sont égaux en solidité.

Mesure de la solidité des Prismes et des Cylindres.

235. La considération des points solides dont nous venons de faire usage, est principalement utile lorsque, pour démontrer l'égalité de deux solides, on est obligé de considérer ces solides

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

dans leurs élémens mêmes, en les décomposant en tranches infiniment minces; nous aurons encore occasion de les considérer de cette manière. Mais lorsqu'on veut mesurer les capacités ou solidités des corps, pour les usages ordinaires, ce n'est point en cherchant à évaluer le nombre de leurs points solides qu'on y parvient; car on conçoit très-bien que dans tel corps que ce soit, il y a une infinité de ces sortes de points. Que fait-on donc, quand on mesure la solidité des corps? on cherche à déterminer combien de fois le corps dont il s'agit, contient un autre corps connu. Par exemple, quand on veut mesurer le parallélipipède rectangle *ABCDEFGH* (*fig.* 132), on a pour objet de connaître combien ce parallélipipède contient de cubes tels que le cube connu x; c'est ordinairement en mesures cubiques qu'on évalue les solidités des corps. Pour connaître la solidité du parallélipipède rectangle *ABCDEFGH*, il faut chercher combien sa base *EFGH* contient de parties quarrées *efgh*; chercher pareillement combien la hauteur *AH* contient de fois la hauteur *ah*; et multipliant le nombre des parties quarrées de *EFGH*, par le nombre des parties de *AH*, le produit exprimera combien le parallélipipède proposé contient de pieds cubes tels que x; c'est-à-dire combien il contient de cubes ou de pouces cubes, etc. si le côté *ah* du cube x est d'un pied ou d'un pouce. En effet, on voit qu'on peut placer sur la surface *EFGH* autant de cubes tels que x, qu'il y a de quarrés tels que *efgh* dans la base *EFGH*. Tous ces cubes formeront un parallélipipède dont la hauteur *HL* sera égale à *ah*; or il est évident qu'on pourra placer dans le solide *ABCDEFGH*, autant de parallélipipèdes tels que celui-là, que la hauteur *HL* sera contenue de fois dans *AH*; donc il faut répéter ce parallélipipède ou le nombre des cubes repandus sur *EFGH*, autant de fois qu'il y a de parties dans *AH*; ou, puisque le nombre de ces cubes est le même que le nombre des quarrés contenus dans la base, il faut multiplier le nombre des quarrés contenus dans la base, par le nombre des parties de la hauteur, et le produit ex-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

primera le nombre de cubes contenus dans le parallélipipède proposé.

236. Puisqu'on a démontré (234) que les prismes de bases égales et de hauteurs égales sont égaux en solidité, il suit de cette proposition, et de ce que nous venons de dire, que pour avoir le nombre de mesures cubes que renfermerait le prisme quelconque *ACEGIKBDFH* (*fig.* 118), il faut évaluer sa base *KBDFH* en mesures quarrées, et sa hauteur *LM* en parties égales au côté du cube qu'on prend pour mesure, et multiplier le nombre des mesures quarrées qu'on aura trouvées dans la base, par le nombre des mesures linéaires de la hauteur, ce qu'on exprime ordinairement en disant : *La solidité d'un prisme quelconque est égale au produit de la surface de la base, par la hauteur de ce prisme.*

Mais nous devons observer ici la même chose que nous avons fait remarquer (145) à l'occasion des surfaces : de même qu'on ne peut pas dire avec exactitude, qu'on multiplie une ligne par une ligne, on ne peut pas dire non plus qu'on multiplie une surface par une ligne. C'est, ainsi qu'on vient de le voir, un solide (dont le nombre des cubes est le même que le nombre des quarrés de la base) qu'on répète autant de fois que sa hauteur est comprise dans celle du solide total, c'est-à-dire autant de fois qu'il est dans le solide qu'on veut mesurer.

237. Concluons de ce qui précède, que pour *avoir la solidité d'un cylindre droit ou oblique, il faut pareillement multiplier la surface de sa base, par la hauteur de ce cylindre*, puisqu'un cylindre est égal à un prisme de même base et de même hauteur que lui (234).

De la solidité des Pyramides.

238. Rappelons-nous ce qui a été dit (201), et en l'appliquant aux pyramides, nous en conclurons que si l'on coupe deux pyramides *IABCDF*, *IKLM* (*fig.* 115) de même hau-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

teur, par un même plan *ge* parallèle au plan de leur base (*), les sections *abcdf*, *klm* seront entre elles dans le rapport des bases *ABCDF*, *KLM*, et seront par conséquent égales si ces bases sont égales. Si l'on conçoit de nouveau ces pyramides coupées par un plan parallèle au plan *ge* et infiniment près de celui-ci, on voit que les deux tranches solides comprises entre ces deux plans infiniment voisins, doivent être aussi entre elles dans le rapport des bases; car le nombre des points solides nécessaires pour remplir ces deux tranches d'égale épaisseur, ne peut dépendre que de la grandeur des sections correspondantes. Cela posé, comme les deux pyramides sont de même hauteur, on ne peut pas concevoir plus de tranches dans l'une que dans l'autre; ainsi les tranches correspondantes étant toujours dans le rapport des bases, les totalités de ces tranches, et par conséquent les solidités des pyramides seront entre elles comme les bases. Donc *les solidités de deux pyramides de même hauteur sont entre elles comme les bases de ces pyramides*, et par conséquent *les pyramides de bases égales et de hauteurs égales sont égales en solidité, quelque différentes que soient d'ailleurs les figures des bases.*

Mesure de la solidité des Pyramides.

239. Puisque mesurer un corps n'est autre chose que chercher combien de fois il contient un autre corps connu; ou en général chercher quel est son rapport avec un autre corps connu; il ne s'agit donc, pour pouvoir mesurer les pyramides, que de trouver leur rapport avec les prismes; c'est ce que nous allons établir dans la proposition suivante.

240. *Une pyramide quelconque est le tiers d'un prisme de même base et de même hauteur qu'elle.* La démonstration de cette proposition se réduit à faire voir qu'une pyramide triangulaire est le tiers d'un prisme triangulaire de même base et

(*) Nous supposons, pour plus de simplicité, qu'on ait rendu le sommet commun, et qu'on ait placé les bases sur un même plan *GE*.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

de même hauteur qu'elle; car on peut toujours concevoir un prisme comme composé d'autant de prismes triangulaires, et une pyramide comme composée d'autant de pyramides triangulaires, qu'on peut concevoir de triangles dans le polygone qui sert de base à l'un et à l'autre (fig. 118). Or voici comment on peut se convaincre de la vérité de la proposition pour la pyramide triangulaire. Soit *ABCDEF* (*fig.* 133) un prisme triangulaire : concevez que sur les faces *AE*, *CE* de ce prisme, on ait tiré les deux diagonales *BD*, *BF*, et que suivant ces diagonales on ait conduit un plan *BDF*; ce plan détachera du prisme une pyramide de même base et de même hauteur que ce prisme, puisqu'elle a son sommet en *B* dans la base supérieure, et qu'elle a pour base la base même inférieure *DEF* du prisme : on voit cette pyramide isolée dans la *figure* 134, et la *figure* 135 représente ce qui reste du prisme. On peut se représenter ce reste comme renversé ou couché sur la surface *ADFC*; et alors on voit que c'est une pyramide quadrangulaire qui a pour base le parallélogramme *ADFC*, et pour sommet le point *B*; donc, si l'on conçoit que dans la base *ADFC* on ait tiré la diagonale *CD*, on pourra se représenter que la pyramide totale *ADFCB* est composée de deux pyramides triangulaires *ADCB*, *CFDB* qui auront pour bases les deux triangles égaux *ACD*, *CDF*, et pour sommet commun le point *B*, et qui par conséquent seront égales (238). Or de ces deux pyramides, l'une, savoir la pyramide *ADCB*, peut être conçue comme ayant pour base le triangle *ABC*, c'est-à-dire la base supérieure du prisme, et pour sommet le point *D* qui a appartenu à la base inférieure; cette pyramide est donc égale à la pyramide *DEFB* (*fig.* 134), puisqu'elle a même base et même hauteur que celle-ci; donc les trois pyramides *DEFB*, *ADCB*, *CFDB* sont égales entre elles; et puisque réunies, elles composent le prisme, il faut en conclure que chacune est le tiers du prisme; ainsi la pyramide *DEFB* est le tiers du prisme..... *ABCDEF* de même base et de même hauteur qu'elle.

241. Puisqu'un cône peut être considéré comme une pyra-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

mide dont le contour de la base aurait une infinité de côtés, et le cylindre comme un prisme dont le contour de la base aurait aussi une infinité de côtés, il faut en conclure qu'*un cône droit et oblique est le tiers d'un cylindre de même base et de même hauteur.*

242. Donc, *pour avoir la solidité d'une pyramide ou d'un cône quelconque, il faut multiplier la surface de la base, par le tiers de la hauteur.*

243. A l'égard du tronc de pyramide ou de cône, lorsque les deux bases proposées sont parallèles, ce qu'il y a à faire pour en trouver la solidité, consiste à trouver la hauteur de la pyramide retranchée; et alors il est aisé de calculer la solidité de la pyramide entière et de la pyramide retranchée, et par conséquent celle du tronc. Par exemple, dans la *figure* 115, si je veux avoir la solidité du tronc *KLMklm*, je vois (242) qu'il faut multiplier la surface *KLM* par le tiers de la hauteur *IP*; multiplier pareillement la surface *klm* par le tiers de la hauteur *Ip*, et retrancher ce dernier produit du premier; mais comme on ne connaît ni la hauteur de la pyramide totale, ni celle de la pyramide retranchée, voici comment on déterminera l'une et l'autre. On a vu ci-dessus (199) que les lignes *IL*, *IM*, *IP*, etc. sont coupées proportionnellement par le plan *ge*, et qu'elles sont à leurs parties *Il*, *Im*, *Ip*, comme *LM* : *lm*, on aura donc *LM* : *lm* :: *IP* : *Ip*.

Donc (*Arith.* 184) *LM*—*lm* : *LM* :: *IP* — *Ip* : *IP*;

c'est-à-dire, *LM*— *lm* : *LM* :: *Pp* : *IP*.

Et quand on connaît le tronc, on peut aisément mesurer les côtés *LM*, *lm* et la hauteur *Pp*; on pourra donc, par cette proportion, calculer le quatrième terme *IP* (179) ou la hauteur de la pyramide retranchée.

De la solidité de la Sphère, de ses Secteurs, de ses Segmens, et des autres solides.

244. *Pour avoir la solidité d'une sphère, il faut multiplier sa surface par le tiers du rayon.* Car on peut considérer

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

la surface de la sphère comme l'assemblage d'une infinité de plans infiniment petits, dont chacun sert de base à une petite pyramide qui a son sommet au centre de la sphère, et qui, par conséquent, a pour hauteur le rayon. Puis donc que chacune de ces petites pyramides est égale (242) au produit de sa base par le tiers de sa hauteur, c'est-à-dire par le tiers du rayon, elles seront toutes ensemble égales au produit de la somme de toutes leurs bases, par le tiers du rayon, c'est-à-dire égales au produit de la surface de la sphère par le tiers du rayon.

245. Puisque la surface de la sphère est (224) quadruple de celle d'un de ses grands cercles, *on peut donc, pour avoir la solidité d'une sphère, multiplier le tiers du rayon par quatre fois la surface d'un des grands cercles, ou quatre fois le tiers du rayon par la surface d'un des grands cercles, ou enfin les $\frac{2}{3}$ du diamètre par la surface d'un des grands cercles.*

246. Pour avoir la solidité d'un cylindre, nous avons vu qu'il fallait multiplier la surface de la base par la hauteur; s'il s'agit donc du cylindre circonscrit à la sphère (*fig.* 130), on peut dire que sa solidité est égale au produit d'un des grands cercles de la sphère, par le diamètre; or celle de la sphère (245) est égale au produit d'un des grands cercles par les $\frac{2}{3}$ du diamètre; donc *la solidité de la sphère n'est que les $\frac{2}{3}$ de celle du cylindre circonscrit.*

247. La calotte sphérique *AGBHEA* qui sert de base à un secteur sphérique *CBGEHA* (*fig.* 128), peut être aussi considérée comme l'assemblage d'une infinité de plans infiniment petits; et par conséquent le secteur sphérique lui-même peut être considéré comme l'assemblage d'une infinité de pyramides qui ont toutes pour hauteur le rayon, et dont la totalité des bases forme la surface de ce secteur; donc *le secteur sphérique est égal au produit de la surface de la calotte, par le $\frac{1}{3}$* du rayon. Nous avons vu (225) comment on trouve la surface de la calotte.

248. A l'égard du segment, il vaut le secteur *CBGEHA* moins le cône *CBGEH.*

249. Pour les autres solides terminés par des surfaces planes,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

la méthode qui se présente naturellement pour les mesurer, c'est de les imaginer composées de pyramides qui aient pour bases ces surfaces planes, et pour sommet commun, l'un des angles du solide dont il s'agit; mais, outre que cette méthode est rarement la plus commode, elle est d'ailleurs moins expéditive et moins propre pour la pratique, que la suivante, que nous exposerons ici d'autant plus volontiers, qu'elle peut être employée utilement à la mesure de la solidité de la carène des vaisseaux, comme nous le ferons voir quand nous aurons établi les proportions suivantes.

250. Nous appellerons *prisme tronqué*, le solide *ABCDEF* (*fig.* 136) qui reste lorsqu'on a séparé une partie d'un prisme par un plan *ABC* incliné à la base.

251. *Un prisme triangulaire tronqué est composé de trois pyramides qui ont chacune pour base, la base* DEF *du prisme, et dont la première a son sommet en* B, *la seconde en* A *et la troisième en* C; on peut se représenter le prisme tronqué, comme composé de deux pyramides, l'une triangulaire qui aura son sommet au point *B*, et pour base le triangle *DEF*; la seconde qui aura pour base le quadrilatère *ADFC*. Si l'on tire la diagonale *AF*, on peut se représenter la pyramide quadrangulaire comme composée de deux pyramides triangulaires *BADF*, *BACF*; or la pyramide *BADF* est égale en solidité à une pyramide *EADF*, qui ayant la même base *ADF*, aurait son sommet au point *E*; car la ligne *BE* étant parallèle au plan *ADF*, ces deux pyramides auront même hauteur; mais la pyramide *EADF* peut être considérée comme ayant pour base *EDF*, et son son sommet au point *A*; voilà donc jusqu'ici, deux des trois pyramides dont nous avons dit que le prisme tronqué doit être composé; il ne reste donc plus qu'à faire voir que la pyramide *BACF* est équivalente à une pyramide qui aurait aussi pour base *EDF*, et qui aurait son sommet en *C*; or c'est ce qu'il est facile de voir en tirant la diagonale *CD*, et faisant attention que la pyramide *BACF* doit être égale à la pyramide *EDCF*; parce que ces deux pyramides ont leurs sommets *B*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

et E dans la même ligne BE parallèle au plan $ACFD$ de leurs bases, et que ces bases ACF et CFD sont égales, puisque ce sont des triangles qui ont même base CF, et qui sont compris entre les parallèles AD et CF. Ainsi la pyramide $BACF$ est égale à la pyramide $EDCF$; mais celle-ci peut être considérée comme ayant pour base DEF et son sommet en C; donc en en effet le prisme tronqué et composé de trois pyramides qui ont pour base commune le triangle DEF, et dont la première a son sommet en B, la seconde en A, la troisième en C.

252. Donc, *pour avoir la solidité d'un prisme triangulaire tronqué, il faut abaisser, de chacun des angles de la base supérieure, une perpendiculaire sur la base inférieure, et multiplier la base inférieure, par le tiers de la somme de ces trois perpendiculaires.*

253. On peut tirer de cette proposition plusieurs conséquences pour la mesure des prismes tronqués autres que les triangulaires, et même pour d'autres solides; si l'on conçoit, par exemple, que de tous les angles d'un solide terminé par des surfaces planes, on mène sur un même plan, pris comme on le voudra, des perpendiculaires, on fera naître autant de prismes tronqués, qu'il y aura de faces dans le solide; comme chaque prisme tronqué devient facile à mesurer, d'après ce que nous venons de dire, tout solide terminé par des surfaces planes se mesurera donc aussi facilement par les mêmes principes : nous n'entrerons pas dans ce détail, nous nous bornerons à en tirer une conséquence utile à notre objet.

254. Soit donc $ABCDEFGH$ (*fig.* 137) un solide composé de deux prismes triangulaires tronqués $ABCEFG$, $ADCEHG$, dont les arêtes AE, BF, CG, DH soient perpendiculaires à la base, et soient tels que les bases EFG, EHG forment le parallélogramme $EFGH$, et que les bases supérieures soient, pour plus de généralité, deux plans différemment inclinés à la base $EFGH$. Il suit de ce qui a été dit ci-dessus (252), que le solide $ABCDEFG$ est égal au triangle EFG multiplié par $\frac{1}{3}BF+2AE+2GC+HD$, car le prisme tronqué $ABCEFG$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

est égal (252) au triangle EFG multiplié par $\frac{1}{3}BF+AE+CG$; et par la même raison, le prisme tronqué $ADCEHG$ est égal au triangle EHG, ou (ce qui revient au même) au triangle EFG multiplié par $\frac{1}{3}AE+GC+HD$; donc la totalité de ces deux prismes tronqués est égale au triangle EFG multiplié par $\frac{1}{3}BF+2AE+2GC+HD$. Soit maintenant un solide (*fig.* 138) compris entre deux plans $ABLM$, $ablm$ parallèles, deux autres plans $ABba$, $MLlm$, parallèles entre eux et perpendiculaires aux deux autres, un plan $BLlb$ perpendiculaire à ceux-là, et enfin la surface courbe $AHMmha$; et concevons ce solide coupé par des plans Cd, Ef, Gh, etc., parallèles à $ABba$, également distans les uns des autres, et assez près pour qu'on puisse regarder AD, ad, DF, df, etc., comme des lignes droites : supposons enfin que les deux plans $ABLM$ $ablm$, sont assez près l'un de l'autre, pour qu'on puisse regarder, sans erreur sensible, les sections Dd, Ff, Hh, etc., comme des lignes droites; il est visible que les solides partiels $ADdabBCc$, $DEfdcCEe$, etc., sont dans le cas du solide de la *figure* 137. Donc la totalité de ces solides sera égale au triangle bBC multiplié par le tiers de $(AB+2ab+2CD+cd)+(CD+2cd+2EF+ef)+(EF+2ef+2GH+gh)+(GH+2gh+2IK+ik)+(IK+2ih+2LM+lm)$, c'est-à-dire en réunissant les quantités semblables, sera égale au triangle bBC multiplié par... $\frac{1}{3}AB+\frac{2}{3}ab+CD+cd+EF+ef+GH+gh+IK+ik+\frac{2}{3}LM+\frac{1}{3}lm$; et comme le triangle bBC est égal à $\frac{Bb\times BC}{2}$, le solide entier sera à $\frac{Bb\times BC}{2}\times(\frac{1}{3}AB+\frac{2}{3}ab+CD+cd+EF+ef+GH+gh+IK+ik+\frac{2}{3}LM+\frac{1}{3}lm)$.

Pour rendre cette expression plus simple, remarquons que si au lieu de $\frac{1}{3}AB+\frac{2}{3}ab+\frac{2}{3}LM+\frac{1}{3}lm$ que l'on a entre les deux parenthèses, on avait la quantité $\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}LM+\frac{1}{2}lm$, le solide en question serait égal à la moitié de la somme des deux surfaces $ABLM$, $ablm$, multipliée par l'épaisseur Bb; car (154) la surface $ABLM$ est égale à.....

BC

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

$BC\times(\frac{1}{2}AB+CD+EF+GH+IK+\frac{1}{2}LM)$ et la surface $ablm$ est, par la même raison, égale à bc ou $BC\times(\frac{1}{2}ab+cd+ef+gh+ik+\frac{1}{2}lm)$; donc la moitié de la somme de ces deux surfaces, multipliée par l'épaisseur Bb, serait $\frac{Bb\times BC}{2}\times(\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}ab+CD+cd+EF+ef+GH+gh+IK+ik+\frac{1}{2}LM+\frac{1}{2}lm)$; donc le solide en question ne diffère de ce produit, que de la quantité dont $\frac{Bb\times BC}{2}\times(\frac{1}{3}AB+\frac{2}{3}ab+\frac{2}{3}LM+\frac{1}{3}lm)$ surpasse la quantité $\frac{Bb\times BC}{2}\times(\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}LM+\frac{1}{2}lm)$; or il est aisé de voir (*Arith.* 103) que cette différence est $\frac{Bb\times BC}{2}(\frac{1}{6}ab-\frac{1}{6}AB+\frac{1}{6}LM-\frac{1}{6}lm)$; donc le solide cherché est égal à $\frac{Bb\times BC}{2}\times(\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}ab+CD+cd+EF+ef+GH+gh+IK+ik+\frac{1}{2}LM+\frac{1}{2}lm)+\frac{Bb\times BC}{2}\times(\frac{1}{6}ab-\frac{1}{6}AB+\frac{1}{6}LM-\frac{1}{6}lm)$; or il est aisé de remarquer que $\frac{1}{6}ab-\frac{1}{6}AB+\frac{1}{6}LM-\frac{1}{6}lm$ est une quantité fort petite en comparaison de celle qui est entre les deux premières parenthèses, puisque les deux plans $ABLM$, $ablm$ étant supposés peu distans, la différence de AB à ab, et celle de LM à lm ne peuvent être que de fort petites quantités; on peut donc réduire la valeur de ce solide, à $\frac{Bb\times BC}{2}\times(\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}ab+CD+cd+EF+ef+GH+gh+IK+ik+\frac{1}{2}LM+\frac{1}{2}lm)$, c'est-à-dire à $Bb\times\left(\frac{ABLM+ablm}{2}\right)$.

On peut donc dire que pour avoir la solidité d'une tranche de solide comprise entre deux surfaces planes parallèles, de telle figure qu'on voudra, et peu distantes l'une de l'autre, il faut multiplier la moitié de la somme de ces deux surfaces, par l'épaisseur de cette tranche.

255. Si l'épaisseur Bb de la tranche était trop considérable

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

pour qu'on pût regarder *Aa*, *Dd*, comme des lignes droites, il faudrait concevoir le solide partagé en plusieurs tranches d'égale épaisseur, par des plans parallèles à l'une des surfaces *ABLM*, *ablm*, et mesurant ces surfaces *ABLM*, *ablm*, et leurs parallèles, on aurait la solidité en ajoutant toutes les surfaces intermédiaires, et la moitié de la somme des deux extrêmes *ABLM*, *ablm*, et multipliant le tout par l'épaisseur d'une des tranches; c'est une suite immédiate de ce que nous venons de dire. L'application de ceci à la mesure de la partie de la carène, que la charge du navire fait plonger dans la mer, est maintenant très-facile. On mesurera la surface des deux coupes horizontales faites à fleur d'eau, lorsque le navire est chargé et lorsqu'il est vide. On ajoutera ces deux surfaces, et on multipliera la moitié de la somme, par la distance de ces deux surfaces, c'est-à-dire par l'épaisseur de la tranche qu'elles comprennent. Si l'on voulait avoir la solidité de la carène entière, on ferait usage de ce qui vient d'être dit (255); mais il faudrait la considérer comme coupée en plusieurs tranches, non pas parallèles à la coupe faite à fleur d'eau, mais perpendiculaires à la partie de la longueur du navire. Lorsqu'on mesure le volume de la partie de la carène que la charge fait plonger, on peut se contenter de mesurer la surface de la coupe prise à égale distance des deux coupes dont nous avons parlé ci-dessus, et la multiplier, comme ci-devant, par l'épaisseur de la tranche; car cette coupe moyenne différera toujours très-peu de la moitié de la somme des deux autres. Parmi quelques-uns des objets que nous considérerons dans l'application de l'Algèbre à la Géométrie, on trouvera des méthodes plus rigoureuses; néanmoins celles que nous venons d'exposer, seront toujours suffisantes, tant qu'on aura soin de mesurer les surfaces avec assez d'exactitude, et de multiplier les tranches lorsque l'épaisseur est considérable. Nous verrons, dans la quatrième partie de ce Cours, que la charge du navire est égale au poids d'un volume d'eau égal au volume de la partie de la carène qu'elle fait plonger; lors donc qu'on a évalué ce volume en pieds cubes, si l'on veut connaître la

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

pesanteur de la charge, il n'y a qu'à multiplier le nombre des pieds cubes par 72lb qui est à peu près le poids d'un pied cube d'eau de mer; mais comme on évalue toujours cette charge en tonneaux, au lieu de multiplier par 72 pour diviser ensuite par 2000, ce qui serait nécessaire pour réduire en tonneaux, on divisera seulement le nombre des pieds cubes par 28, parce que 28 fois 72 faisant à peu près 2000, autant de fois il y aura 28 dans la solidité mesurée, autant il y aura de tonneaux.

Du Toisé des Solides.

256. Après ce que nous avons dit (155) sur le toisé des surfaces, il doit y avoir fort peu de choses à dire sur le toisé des solides. Pour évaluer un solide en toises cubes et en parties de la toise cube, on peut s'y prendre de deux manières principales. La première est de compter par toises cubes et par parties cubes de la toise cube, c'est-à-dire par toises cubes, pieds cubes, pouces cubes etc. La *toise cube* ou *cubique* contient 216 pieds cubes, parce que c'est un cube qui a 6 pieds de long, 6 pieds de large, et 6 pieds de haut. Le *pied cube* contient 1728 pouces cubes, parce que c'est un cube qui a 12 pouces de long, sur 12 pouces de large, et 12 pouces de haut. Le *pouce cube* contient 1728 lignes cubes; et ainsi de suite.

257. Donc, pour évaluer un solide en toises cubes et parties cubes de la toise cube, il faudra réduire chacune de ses trois dimensions, à la plus petite espèce; multiplier deux de ces dimensions ainsi réduites l'une par l'autre, et le produit résultant par la troisième; et pour réduire en lignes cubes, pouces cubes, pieds cubes et toises cubes (en supposant que la plus petite espèce ait été des points), on divisera successivement par 1728, 1728, 1728, et 216; ou seulement par 1728, 1728, et 216, si la plus petite espèce est seulement des lignes, et ainsi de suite.

Par exemple, si l'on a un parallélipipède qui ait $2^T\ 4^P\ 8^p$ de long, $1^T\ 3^P$ de large, et $3^T\ 5^P\ 7^p$ de haut, on réduira ces trois dimensions à 200^P, 108^p, et 283^P, qui étant multipliés,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

savoir 200 par 108, et le produit 21600^{PP} par 283^{P}, donneront 6112800 pouces cubes, ou 6112800^{PPP}; divisant donc par 1728, on aura 3537 pieds cubes ou 3537^{PPP} et 864 de reste, c'est-à-dire 864^{PPP}; divisant 3537^{PPP} par 216, on aura 16 toises cubes ou 16^{TTT} et 81^{PPP}, ensorte que le parallélipipède en question contient 16^{TTT} 81^{PPP} 864^{PPP}.

258. Dans la seconde manière d'évaluer les solides en toises cubes et parties de la toise cube, on se représente la toise cube partagée en six parallélipipèdes, qui ont tous une toise quarrée de base, sur un pied de haut, et que pour cette raison on appelle *toise-toise-pieds*. On conçoit de même la toise-toise-pied, partagée en 12 parallélipipèdes, qui ont chacun une toise quarrée de base et un pouce de haut, et qu'on appelle *toise-toise-pouces ;* on subdivise de même chacune de celles-ci en 12 parallélipipèdes qui ont chacun une toise quarrée de base sur une ligne de haut; et on continue de subdiviser en parallélipipèdes, qui ont constamment une toise quarrée de base sur un point, une prime, une seconde, etc. de haut; ensorte que les subdivisions sont absolument analogues à celle de la toise linéaire, comme nous avons vu que l'étaient celles de la toise quarrée; et les noms de ces différentes subdivisions ne diffèrent de ceux qui sont relatifs à la toise quarrée, qu'en ce que le mot *toise* y est énoncé deux fois. Les multiplications relatives à cette division de la toise cube, sont absolument les mêmes que celles que nous avons enseignées relativement à la toise quarrée. A l'égard de la nature des unités des facteurs, on doit regarder l'un d'entre eux comme exprimant des toises cubes, toise-toise-pieds, toise-toise-pouces, etc.; et les deux autres comme marquant des nombres abstraits, dont le produit exprimera combien de fois on doit répéter ce premier facteur. Par exemple, en reprenant le parallélipipède que nous venons de calculer ci-dessus, et supposant que la longueur AD (*fig.* 139) est de 2^{T} 4^{P} 8^{P}, la largeur AB de 1^{T} 3^{P}, et la hauteur AL de 3^{T} 5^{P} 7^{P}; si l'on prend AI et AE chacun d'une toise, et qu'on se représente le parallélipipède $AIFEHGKD$, il est visible que ce pa-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

rallélipipède est de $2^{TTT}\ 4^{TTP}\ 8^{TTp}$, puisqu'il a une toise quarrée de base sur une longueur de $2^{T}\ 4^{P}\ 8^{p}$. Or, pour avoir la solidité du parallélipipède total, on voit qu'il faut répéter ce parallélipipède partiel, d'abord autant de fois que sa largeur *AI* est contenue dans la largeur *AB*, c'est-à-dire une fois et demie, ou autant que le marque $1^{T}\ 3^{P}$; puis répéter ce produit autant de fois que la hauteur *AE* est contenue dans la hauteur *AL*, c'est-à-dire autant de fois que le marque $3^{T}\ 5^{P}\ 7^{P}$, considéré comme nombre abstrait. Mais pour se guider aisément dans ces multiplications, on laissera aux facteurs les signes de la toise tels qu'il les ont; il suffit de savoir que le produit doit être des toises cubes, toises-toises-pieds, etc.; ainsi en opérant comme au toisé des surfaces, on trouvera comme il suit :

2T	4P	8p	
1T	3P		
2TT	0TP	0TP	
0	3		
0	1		
0	0	4	
0	0	4	
1	2	4	
4TT	1TP	0Tp	
3T	5P	7P	
12TTT	0TTP	0TTp	0TTl
0	3	0	
2	0	6	
0	4	2	
0	4	2	
0	2	1	
0	0	4	2
16TTT	2TTP	3TTp	2TTl

259. Il est aisé de convertir ces parties de la toise en parties cubes, c'est-à-dire pieds cubes, pouces cubes, etc. Il faut écrire sous les parties de la toise, à commencer des toise-toise-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

pieds, les nombres 36, 3, $\frac{1}{4}$; 36, 3, $\frac{1}{4}$; consécutivement, et multiplier chaque nombre supérieur par son correspondant inférieur; porter les produits des nombres 36, 3, $\frac{1}{4}$ chacun au-dessous du premier de ces nombres; et lorsqu'en multipliant par $\frac{1}{4}$, il restera 1 ou 2 ou 3, on écrira sous le nombre 36 suivant, 432, ou 864, ou 1296, pour commencer une seconde colonne. Appliquant ceci à l'exemple que nous venons de donner,

16TTT	2TTP	3TTP	2TTl	OTTpt
	36	3	$\frac{1}{4}$	36
16TTT	72PPP	.....		864ppp
	9			
16TTT	81PPP	864PPP		

on trouve le même produit que par la première méthode. On multiplie les toise-toise-pieds par 36, parce que la toise-toise-pied ayant un pied de haut sur une toise quarrée ou 36 pieds quarrés de base, doit contenir 36 pieds cubes. La toise-toise-pouce étant la douzième partie de la toise-toise-pouce, doit contenir la douzième partie de 36 pieds cubes, c'est-à-dire trois pieds cubes; il faut donc multiplier par 3, les toise-toise-pouces. Pareillement la toise-toise-ligne étant la douzième partie de la toise-toise-pouce, doit contenir la douzième partie de 3 pieds cubes ou un quart de pied cube, ou (à cause que le pied cube vaut 1728 pouces cubes) elle doit contenir 43PPP : en raisonnant de même, on voit que la toise-toise-point vaudrait 36PPP, parce qu'elle est la douzième partie de la toise-toise-ligne qui vaut 432PPP, dont la douzième partie est 36; donc, etc. Donc, réciproquement, pour ramener les parties cubes de la toise cube, à des toise-toise-pieds, toise-toise-pouces, etc. Il faudra diviser par 36, le nombre des pieds cubes, et l'on aura les toise-toise-pieds : on divisera le reste de cette division par 3, et l'on aura les toise-toise-pouces. On multipliera par 4, le reste de cette seconde division, et au produit on ajoutera 1, ou 2, ou 3 unités, selon que le nombre des pouces cubes sera entre

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

432 et 864, ou 864 et 1296, ou 1296 et 1728, et l'on aura les toise-toise-lignes; puis retranchant du nombre des pouces cubes, le nombre 432, ou 864, ou 1296, selon qu'on aura ajouté 1, ou 2, ou 3 unités, on opérera sur le reste, comme on a opéré sur les pieds cubes et l'on aura consécutivement les toise-toise-points, les toise-toise-primes, et les toises-toise-secondes; enfin on continuera de la même manière pour les lignes cubes, etc. Par exemple, si l'on demande de réduire en toise-toise-pieds, toise-toise-pouces, etc. le nombre $47^{TTT}\,52^{PPP}\,932^{ppp}$; je divise 52 par 36, et j'ai 1^{TTP}, et un reste de 16; je divise celui-ci par 3, et j'ai 5^{TTp}, et un reste de 1; je quadruple ce reste, et j'y ajoute 2 unités, parce que le nombre des pouces cubes est entre 864 et 1296, et j'ai 6^{TTl}. Retranchant 864 de 932, il reste 68; je le divise par 36, et j'ai 1^{TTp_t}, et 32 de reste; je divise celui-ci par 3, et j'ai $10^{TT'}$, et 2 de reste; je quadruple ce reste, et j'ai $8^{TT''}$; ensorte que j'ai, en total, $47^{TTT}\ 5^{TTP}\ 6^{TTp}\ 6^{TTl}\ 1^{TTp_t}\ 10^{TT'}\ 8^{TT''}$.

260. Puisque, pour avoir la solidité d'un prisme, il faut multiplier la surface de sa base par sa hauteur; il s'ensuit que si, connaissant la solidité et la base, ou la hauteur, on veut avoir la hauteur ou la base, il faut diviser la solidité par celui de ces deux facteurs que l'on connaîtra. Mais il faut observer que dans l'exactitude, ce n'est point véritablement la solidité que l'on divise par la surface ou par la hauteur; mais c'est un solide que l'on divise par un solide. En effet, d'après ce qui a été dit ci-dessus, on voit que lorsqu'on évalue un solide, on répète un autre solide de même base, autant de fois que la hauteur de celui-ci est contenue dans la hauteur du premier; ou bien on répète un solide de même hauteur, autant de fois que la surface de la base de celui-ci est comprise dans la base de celui-là. Donc, quand on voudra, connaissant la solidité et la surface de la base, par exemple, connaître la hauteur, il faudra chercher combien de fois la solidité proposée contient celle d'un solide de même base, et le quotient marquera par le

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

nombre de ses unités, le nombre des parties de la hauteur. Cela posé, si ayant, par exemple, un prisme, dont la solidité soit de $16^{TTT}\ 2^{TTP}\ 3^{TTp}\ 2^{TTl}$, et la surface de la base, de $12^{TT}\ o^{TP}\ o^{T}$, on veut savoir quelle est la hauteur ; on considérera le diviseur, non pas comme $12^{TT}\ o^{TT}\ o^{Tp}$, mais comme $12^{TTT}\ o^{TTp}\ o^{TTp}$, et alors la question se réduira à diviser $16^{TTT}\ 2^{TTP}\ 3^{TTp}\ 2^{TTl}$ par $12^{TTT}\ o^{TTP}\ o^{TTp}$; mais comme la toise quarrée est facteur commun, le quotient sera le même que si le dividende et le diviseur marquaient des toises linéaires; on aura donc simplement $16^{T}\ 2^{P}\ 3^{p}\ 2^{l}$, à diviser par $12^{T}\ o^{P}\ o^{p}$, c'est-à-dire par 12^{T}; et comme la nature de la question fait voir que le quotient doit être des toises linéaires, la division se fera selon la règle prescrite. (*Arith.* 124 *et suiv.*) Si, la solidité et la hauteur étant données, on cherche quelle doit être la surface de la base; par exemple, si la solidité est de $16^{TTT}\ 2^{TTP}\ 3^{TTp}\ 2^{TTl}$, et la hauteur de $2^{T}\ 4^{P}\ 8^{p}$; on considérera le diviseur comme étant $2^{TTT}\ 4^{TTP}\ 8^{TTp}$; et par la même raison que dans le cas précédent, l'opération se réduira à diviser $16^{T}\ 2^{P}\ 3^{p}\ 2^{l}$, par $2^{T}\ 4^{P}\ 8^{p}$; mais comme le quotient doit évidemment être une surface, on le comptera, non pas pour des toises linéaires, mais pour des toises quarrées, toise-pieds, etc.; du reste il n'y aura aucune différence dans la manière de faire l'opération qui se fera toujours en vertu des règles données (*Arith.* 124 *et suiv.*), c'est-à-dire, qu'après avoir trouvé le quotient, comme s'il devait exprimer des toises linéaires, on affectera le signe de chaque partie, de la lettre *T*. Par exemple, dans le cas présent, on trouverait pour quotient $5^{T}\ 5^{P}\ 4^{p}\ 6^{l}$; on écrira donc $5^{TT}\ 5^{TP}\ 4^{Tp}\ 6^{Tl}$. Si la solidité était donnée en toises cubes et parties cubes de la toise cube, on la convertirait en toises cubes, toise-toise-pieds, etc. par ce qui a été dit (259), et l'opération serait ramenée au cas précédent.

Du Toisé des Bois.

261. Ce qu'on vient de dire du toisé en général, ne nous laisse que fort peu de choses à dire sur le toisé des bois. Dans

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

la marine, on mesure les bois en pieds cubes et parties cubes du pied cube; ainsi il ne s'agit que de mesurer les dimensions en pieds et parties du pied, et les ayant multipliées (après les avoir réduites à la plus petite espèce), on réduira en lignes cubes, pouces cubes, pieds cubes, comme il a été dit ci-dessus, mais en s'arrêtant aux pieds cubes. Dans les bâtimens civils et les fortifications, l'usage est de réduire en *solives*. Par *solive*, on entend un parallélipipède de deux toises de haut, sur 6 pouces d'équarrissage, ou 36 pouces quarrés de base; ce qui est équivalent à un parallélipipède de 1 toise de haut sur $\frac{1}{2}$ pied quarré ou 72 pouces quarrés de base, et qui par conséquent contient 3 pieds cubes. On partage la solive en douze parties, chacune d'un pied de haut et de 72 pouces quarrés de base; et chacune de ces parties s'appelle *pied de solive*. On partage de même le pied de solive en douze parties d'un pouce de haut et de 72 pouces quarrés de base chacune, qu'on appelle *pouces de solive*, et ainsi de suite. Puisque la solive contient 3 pieds cubes, ou la 72^{e} partie d'une toise cube, et que ses subdivisions sont les mêmes que celles de la toise cube en toise-toise-pieds, etc. il s'ensuit que le nombre qui exprimerait un solide quelconque, en solives et parties de solive, est 72 fois plus grand que celui qui l'exprimerait en toises cubes, toise-toise-pieds, etc. Ainsi, pour évaluer la solidité d'un corps en solives, il n'y a qu'à l'évaluer en toises cubes, toise-toise-pieds, etc. et multiplier ensuite le produit par 72. Mais on peut éviter cette multiplication en faisant une réflexion assez simple. Il n'y a qu'à regarder l'une des dimensions comme douze fois plus grande, c'est-à-dire regarder les lignes comme exprimant des pouces comme exprimant des demi-pieds, et ainsi de suite. Regarder pareillement une autre des trois dimensions comme six fois plus grande, ou les lignes comme exprimant des demi-pouces, les pouces comme exprimant des demi-pouces, pieds; alors, multipliant ces deux nouvelles dimensions entre elles, et le produit par la troisième; on aura tout de suite la solidité en solives, pieds de solive, etc. Par exemple, si l'on a une pièce

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

de bois de $8^T\ 5^P\ 6^p$ de long, sur $1^P\ 7^p$ de large, et $1^P\ 5^p$ d'épaisseur; au lieu de $1^P\ 7^p$, je prends $3^T\ 1^P$, c'est-à-dire douze fois plus; et au lieu de $1^P\ 5^p$, je prends $1^T\ 1^P\ 6^p$, c'est-à-dire six fois plus, et multipliant $8^T\ 5^P\ 6^p$, par $3^T\ 1^P$; puis le produit, par $1^T\ 2^P\ 6^p$, je trouve $40^{TTT}\ o^{TTP}\ o^{TTp}\ 1^{TTl}$, qu'il faut compter pour $40^{sol}\ o^T\ o^P\ 1^l$, dont les pieds, pouces, etc. sont des pieds, pouces, etc. de solive.

Des rapports des solides en général.

262. *Comparer deux solides*, c'est chercher combien de fois le nombre de mesures d'une certaine espèce contenues dans l'un de ces solides, contient le nombre de mesures de même espèce contenues dans l'autre.

263. *Deux prismes, ou deux cylindres, ou un prisme et un cylindre, sont entre eux comme les produits de leur base par leur hauteur.* Cela est évident, puisque chacun de ces solides est égal au produit de sa base par sa hauteur, quelle que soit d'ailleurs la figure de la base. Donc *les prismes ou les cylindres, de même hauteur, sont entre eux comme leurs bases; et les prismes et les cylindres de même base, sont entre eux comme leurs hauteurs.* Car le rapport des produits des bases par les hauteurs, ne change point lorsqu'on y omet le facteur commun qui s'y trouve, lorsque la base ou la hauteur se trouve être la même dans les deux solides. Donc *deux pyramides quelconques, ou deux cônes, ou une pyramide et un cône, sont dans le rapport des hauteurs, lorsque les bases sont égales;* car ces solides sont chacun le tiers d'un prisme de même base et de même hauteur (240).

264. *Les solidités des pyramides semblables sont entre elles comme les cubes des hauteurs de ces pyramides, ou en général, comme les cubes de deux lignes homologues de ces pyramides*, car deux pyramides semblables peuvent être représentées par deux pyramides, telles que *IABCDF*, *Iabcdf* (*fig.* 115), puisque ces deux pyramides sont composées d'un même nombre de faces semblables chacune à chacune, et sem-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

blablement disposées. Puis donc que deux pyramides sont, en général, comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs, les bases qui sont ici des figures semblables, étant entre elles comme les quarrés des hauteurs *IP*, *Ip* (202), les deux pyramides seront entre elles comme les produits des quarrés des hauteurs, par les hauteurs mêmes ; car on pourra (299) substituer au rapport des bases, celui des quarrés des hauteurs. Et puisque (213) les hauteurs sont proportionnelles à toutes les autres dimensions homologues, leurs cubes seront donc aussi proportionnels aux cubes de ces dimensions homologues (*Arith.* 191); donc, en général, deux pyramides semblables sont entre elles comme les cubes de leurs dimensions homologues.

265. Donc, *en général, les solidités de deux corps semblables sont entre elles comme les cubes des lignes homologues de ces solides.* Car les solides semblables peuvent être partagés en un même nombre de pyramides semblables chacune à chacune ; et comme deux quelconques de ces pyramides semblables seront entre elles comme les cubes de leurs dimensions homologues, lesquelles sont en même rapport que deux autres dimensions homologues quelconques, il s'ensuit que la somme des pyramides du premier solide sera à la somme des pyramides du second, aussi dans le même rapport des cubes des dimensions homologues. Donc *les solidités des sphères sont entre elles comme les cubes de leurs rayons ou de leurs diamètres.* Donc, en se rappelant tout ce qui a précédé, on voit, 1°. que les contours des figures semblables sont dans le rapport simple des lignes homologues ; 2°. que les surfaces des figures semblables sont entre elles comme les quarrés des côtés ou des lignes homologues; 3°. que les solidités des corps semblables sont entre elles comme les cubes des lignes homologues. Ainsi, si deux corps semblables, deux sphères, par exemple, avaient leurs diamètres dans le rapport de 1 à 3, les circonférences de leurs grands cercles seraient aussi dans le rapport de 1 à 3; les surfaces de ces sphères seraient comme 1 à 9, et les solidités comme 1 à 27; c'est-à-dire, que la circonférence d'un des grands cercles

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

de la première vaudrait trois fois celle d'un des grands cercles de la seconde ; la surface de la première vaudrait neuf fois celle de la seconde ; et enfin la première sphère vaudrait 27 sphères telles que la seconde. Donc, pour faire un solide semblable à un autre, et dont la solidité soit à celle de celui-ci dans un rapport donné, par exemple dans celui de 2 à 3, il faut lui donner des dimensions telles, que le cube de l'une quelconque de ces dimensions soit au cube d'une dimension homologue du solide auquel il doit être semblable, comme 2 est à 3. Par exemple, si l'on a une sphère qui ait 8 pouces de diamètre, et qu'on demande quel doit être le diamètre d'une sphère qui en serait les $\frac{2}{3}$; il faudra chercher le quatrième terme de cette proportion $1 : \frac{2}{3}$ ou $3 : 2 ::$ le cube de 8, c'est-à-dire $::$ 512 est à un quatrième terme. Ce quatrième terme, qui est $341\ \frac{1}{3}$, sera le cube du diamètre cherché : c'est pourquoi, tirant la racine cubique (*Arith.* 159), on aura 6^{P}, 99 pour ce diamètre, c'est-à-dire 7^{P} à très-peu près ; ce qu'on peut vérifier aisément en cette manière. Cherchons quelles sont les solidités de deux sphères, l'une de 8 pouces, l'autre de 7 pouces de diamètre. La circonférence de leur grand cercle se trouvera par ces deux proportions (152), $7 : 22 :: 8 :$ et $7 : 22 :: 7 :$ les quatrièmes termes sont $25\ \frac{1}{7}$ et 22 ; multipliant ces circonférences, chacune par son diamètre, on aura (222) les surfaces de ces sphères, lesquelles seront par conséquent $201\ \frac{1}{7}$ et 154 ; enfin multipliant ces surfaces par le $\frac{1}{6}$ de leur rayon, c'est-à-dire respectivement par le sixième de 8 et de 7, on aura pour les solidités $268\ \frac{4}{21}$ et $179\ \frac{2}{3}$, dont le rapport est le même que celui de $\frac{5632}{21} : \frac{539}{3}$, en réduisant en fraction, ou (en multipliant les deux termes de la dernière fraction par 7, et supprimant le dénominateur commun) le même que de 5632 à 3773 ; or (*Arith.* 167) le rapport de ces deux quantités et $1\ \frac{1859}{3773}$, c'est-à-dire en réduisant en décimales 1,49 ; et le rapport de 3 à 2 est 1, 5 ou 1, 50 (*Arith.* 30) ; la différence n'est donc que de $\frac{1}{100}$; cette différence vient de ce que le diamètre n'est calculé qu'à peu près ; d'ailleurs le rapport de 7 à 22 n'est pas exactement celui du diamètre à la circonférence.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Dans les corps composés de la même matière, les poids sont proportionnels à la quantité de matière, ou à la solidité; ainsi, connaissant le poids d'un boulet d'un diamètre connu, pour trouver celui d'un boulet d'un autre diamètre et de la même matière, il faut faire cette proportion : le cube du diamètre du boulet dont le poids est connu, est au cube du diamètre du second, comme le poids du premier est à un quatrième terme qui sera le poids du second.

Nous avons vu (162) que dans deux vaisseaux parfaitement semblables, les voilures seraient comme les quarrés des hauteurs des mâts, et par conséquent, avons-nous dit, comme les quarrés des longueurs des navires, parce que toutes les dimensions homologues des solides semblables sont en même rapport. Or on voit ici que les poids des solides semblables et de même matière, sont comme les cubes de deux dimensions homologues; on voit donc que si deux navires semblables étaient mâtés proportionnellement, les quantités de vent qu'ils pourraient recevoir, seraient comme les quarrés de leurs longueurs, tandis que les poids seraient comme les cubes; et comme la raison des quarrés n'est pas la même, et est plus petite que celle des cubes, ainsi qu'il est facile de s'en convaincre, cette seule considération fait voir que la voilure qui serait propre pour un certain navire, ne le serait pas pour un navire plus petit, si l'on diminuait proportionnellement les deux dimensions de cette voilure. Il y a encore d'autres considérations à faire entrer dans l'examen de ces questions, qui appartiennent proprement à la Mécanique. Nous ne nous proposons ici que de préparer les esprits à prévoir les usages qu'on peut faire des principes établis jusqu'ici, pour la discussion de ces sortes de questions.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

DE LA TRIGONOMÉTRIE.

266. Le mot *Trigonométrie* signifie mesure des triangles. Mais on comprend généralement sous ce nom, l'art de déterminer les positions et les dimensions des différentes parties de l'étendue, par la connaissance de quelques-unes de ces parties. Si l'on conçoit que les différens points qu'on se représente dans un espace quelconque, soient joints les uns aux autres par des lignes droites, il se présente trois choses à considérer : 1°. la longueur de ces lignes ; 2°. les angles qu'elles forment entre elles ; 3°. les angles que forment entre eux les plans dans lesquels ces lignes sont ou peuvent être imaginées comprises. C'est de la comparaison de ces trois objets que dépend la solution de toutes les questions qu'on peut proposer sur la mesure de l'étendue et de ses parties ; et l'art de déterminer toutes ces choses, par la connaissance de quelques-unes d'entre elles, se réduit à la résolution de ces deux questions générales.

1°. Connaissant trois des six choses (angles et côtés) qui entrent dans un triangle rectiligne, trouver les trois autres, lorsque cela est possible. 2°. Connaissant trois des six choses qui composent un triangle sphérique (c'est-à-dire un triangle formé sur la surface d'une sphère, par trois arcs de cercle qui ont tous trois pour centre le centre de cette même sphère), trouver les trois autres lorsque cela est possible. La première question est l'objet de la Trigonométrie, qu'on nomme *Trigonométrie plane*, parce que les six choses qu'on y considère sont dans un même plan : on la nomme aussi *Trigonométrie rectiligne*. La seconde question appartient à la *Trigonométrie sphérique*. Les six choses qu'on y considère, sont dans des plans différens, comme nous le verrons par la suite.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

De la Trigonométrie plane ou rectiligne.

267. La *Trigonométrie plane* est une partie de la Géométrie, qui enseigne à déterminer ou à calculer trois des six parties d'un triangle rectiligne, par la connaissance des trois autres parties, lorsque cela est possible. Je dis, lorsque cela est possible, parce que si l'on ne connaissait que les trois angles, par exemple, on ne pourrait pas déterminer les côtés. En effet, si par un point D pris à volonté sur le côté AB du triangle ABC (*fig.* 140) dont je suppose qu'on connaisse les trois angles, on mène DE parallèle à BC, on aura un autre triangle ADE qui aura les mêmes angles que le triangle ABC (37); et on voit qu'on en peut former ainsi une infinité d'autres qui auront les mêmes angles. Il faudrait donc que le calcul donnât tout-à-la-fois une infinité de côtés différens. La question est donc alors absolument indéterminée. Nous verrons cependant, que si l'on ne peut déterminer les valeurs des côtés, on peut, du moins, déterminer leur rapport. Mais lorsque parmi les trois choses connues ou données, il entrera un côté, on peut toujours déterminer tout le reste. Il y a cependant un cas où il reste quelque chose d'indéterminé : le voici. Supposé que dans le triangle ABC (*fig.* 141) on connaisse les deux côtés AB et BC, et l'angle A opposé à l'un de ces côtés, on ne peut déterminer la valeur de l'angle C ni celle du côté AC, qu'autant qu'on saura si cet angle C est aigu ou obtus; en effet, si l'on conçoit que du point B comme centre et d'un rayon égal au côté BC, on ait décrit un arc CD, et que du point D où cet arc rencontre AC, on ait tiré BD; on aura un nouveau triangle ABD, dans lequel on connaîtra les mêmes choses qu'on connaît dans le triangle ABC, savoir : l'angle A, le côté AB, et le côté BD égal à BC; on a donc ici les mêmes choses pour déterminer l'angle BDA, qu'on avait dans le triangle ABC pour déterminer l'angle C. Mais il y a cette différence entre ce cas-ci et le précédent, qu'on peut ici assigner la valeur de l'angle C et de l'angle BDA, comme nous le verrons ci-après; la seule chose qui soit indéterminée,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

c'est de savoir laquelle de ces deux valeurs on doit adopter, et par conséquent quelle figure doit avoir le triangle. Il faut donc, outre les trois choses données, savoir encore si l'angle cherché doit être aigu ou obtus. Au reste on peut remarquer, en passant, que les deux angles C et BDA dont il s'agit, sont supplément l'un de l'autre ; car BDA est supplément de BDC qui est égal à l'angle C, parce que le triangle BDC est isoscèle.

268. Ce ne sont pas les angles mêmes qu'on emploie dans le calcul des triangles : on substitue aux angles, des lignes qui, sans leur être proportionnelles, sont néanmoins propres à représenter ces angles, et sont d'ailleurs plus commodes à employer dans le calcul, parce que, comme nous le verrons ci-après, elles sont proportionnelles aux côtés des triangles : il convient donc, avant que d'aller plus loin, de faire connaître ces lignes, et de faire voir comment elles peuvent tenir lieu des angles.

Des Sinus, Cosinus, Tangentes, Cotangentes, Sécantes et Cosécantes.

269. La perpendiculaire AP (*fig.* 142) abaissée de l'extrémité d'un arc AB sur le rayon BC qui passe par l'autre extrémité B de cet arc, s'appelle le *sinus droit*, ou simplement le *sinus* de l'arc AB ou de l'angle ACB. La partie BP du rayon, comprise entre le sinus et l'extrémité de l'arc, s'appelle le *sinus-verse*. La partie BD de la perpendiculaire à l'extrémité du rayon, interceptée entre ce rayon CB et le rayon CA prolongé, s'appelle *tangente* de l'arc AB ou de l'angle ACB. La ligne CD qui est le rayon CA prolongé jusqu'à la tangente, s'appelle *sécante* de l'arc AB ou de l'angle ACB. Si l'on mène le rayon CF perpendiculaire à CB, et à son extrémité F la perpendiculaire FE qui rencontre en E le rayon CA prolongé, et qu'enfin on mène AQ perpendiculaire sur CF; il suit des définitions précédentes, que AQ sera le sinus, FQ le sinus-verse, FE la tangente, et CE la sécante de l'arc AF ou de l'angle ACF. Mais comme l'angle ACF est complément de ACB, puisque

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

puisque ces deux angles font ensemble un angle droit, on peut dire que AQ est le sinus du complément; FQ, le sinus-verse du complément; FE, la tangente du complément; et CE, la sécante du complément de l'arc AB, ou de l'angle ACB. Pour abréger ces dénominations, on est convenu de dire *cosinus*, au lieu de sinus du complément; *cosinus-verse*, au lieu de sinus-verse du complément; *cotangente*, au lieu de tangente du complément; et *cosécante*, au lieu de sécante du complément. Ensorte que les lignes AQ, FQ, FE, CE, seront dites le cosinus, le cosinus-verse, la cotangente, et la cosécante de l'arc AB ou de l'angle ACB; de même les lignes AP, BP, BD et CD, pourront être dites le cosinus, le cosinus verse, la cotangente et la cosécante de l'arc AF ou de l'angle ACF; car AB est complément de AF, comme AF l'est de AB. Pour désigner ces lignes, lorsqu'il sera question d'un angle ou d'un arc, nous mettrons devant les lettres qui servent à nommer cet angle ou cet arc, les expressions abrégées *sin*, *cos*, *tang*, *cot;* ainsi *sin* AB signifiera le sinus de l'arc AB; *sin* ABC signifiera le sinus de l'angle ABC; de même *cos* AB, *cos* ACB, signifieront le cosinus de l'arc AB, le cosinus de l'angle ACB; et pour désigner le rayon, nous prendrons la lettre R.

270. Il est évident, 1°. que *le cosinus* AQ *d'un arc quelconque* AB *est égal à la partie* CP *du rayon, comprise entre le centre et le sinus.* 2°. Que *le sinus-verse* BP *est égal à la différence entre le rayon et le cosinus.* 3°. Que *le sinus d'un arc quelconque* AB, *est la moitié de la corde* AG *d'un arc double* ABG. Car le rayon CB étant perpendiculaire sur la corde AG, divise cette corde et son arc en deux parties égales (52).

271. De cette dernière proposition il suit que *le sinus* de 30° *vaut la moitié du rayon;* car il doit être la moitié de la corde de 60°, ou du côté de l'hexagone, que nous avons vu (93) être égal au rayon.

272. *La tangente de* 45° *est égale au rayon.* Car si l'angle ACB est de 45°, comme l'angle CBD est droit, l'angle CDB

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

vaudra aussi 45°; le triangle *CBD* sera donc isoscèle, et par conséquent *BD* sera égal à *CB*.

273. A mesure que l'arc *AB* ou l'angle *ACB* augmente, son sinus *AP* augmente, et son cosinus *AQ* ou *CP* diminue jusqu'à ce que l'arc *AB* soit devenu de 90°; alors le sinus *AP* devient *FC*, c'est-à-dire égal au rayon, et le cosinus est zéro, parce que le point *A* tombant en *F*, la perpendiculaire *AQ* devient zéro. A l'égard de la tangente *BD*, et de la cotangente *FE*, il est visible que la tangente *BD* augmente continuellement, et que la cotangente, au contraire, diminue, mais l'une et l'autre, de manière que quand l'arc *AB* est devenu de 90°, sa tangente est infinie, et sa cotangente est zéro : en effet, plus l'arc *AB* devient grand, plus le point *D* s'élève au-dessus de *BC*, et quand le point *A* est infiniment près de *F*, les deux lignes *CD* et *BD* sont presque parallèles, et ne se rencontrent plus qu'à une distance infinie; donc *BD* est alors infinie; donc elle l'est quand le point *A* tombe sur le point *F*.

274. Ainsi, *pour l'arc de* 90° *le sinus est égal au rayon, le cosinus est zéro, la tangente est infinie, et la cotangente est zéro.* Comme le sinus de 90° est le plus grand de tous les sinus, on l'appelle, pour le distinguer des autres, *sinus total;* ensorte que ces trois expressions, le *sinus* de 90°, le *rayon*, le *sinus total*, signifient la même chose.

275. Lorsque l'arc *AB* passe 90° (*fig.* 143), son sinus *AP* diminue, et son cosinus *AQ* ou *CP* qui tombe alors au-delà du centre, par rapport au point *B*, augmente jusqu'à ce que l'arc *AB* soit devenu de 180°, auquel cas le sinus est zéro, et le cosinus est égal au rayon. On voit aussi que le sinus *AP*, et le cosinus *CP* de l'arc *AB*, ou de l'angle *ACB* plus grand que 90°, appartiennent en même temps à l'arc *AH* ou à l'angle *ACH* moindre que 90° et supplément de celui-là; de sorte que *pour avoir le sinus et le cosinus d'un angle obtus, il faut prendre le sinus et le cosinus de son supplément.* Mais il faut bien remarquer que le cosinus tombe du côté opposé à celui où il tomberait, si l'arc *AB* ou l'angle *ABC* était moindre

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

que 90°. A l'égard de la tangente, comme elle est déterminée (269) par la rencontre de la perpendiculaire *BD* (*fig.* 142) avec le rayon *CA* prolongé, il est visible que lorsque l'arc *AB* (*fig.* 143) est plus de 90°, elle est alors *BD*; mais en élevant la perpendiculaire *HI*, il est aisé de voir que le triangle *CBD* est égal au triangle *CHI*, et que par conséquent *BD* est égal à *HI*.

276. Donc *la tangente d'un arc ou d'un angle plus grand que* 90°, *est la même que celle du supplément de cet arc*: toute la différence qu'il y a, c'est qu'elle tombe au-dessous du rayon *BC*. Pour la cotangente *EF*, elle est aussi la même que la cotangente du supplément; et elle tombe aussi du côté opposé à celui où elle tomberait, si l'arc *AB* ou l'angle *ACB* était moindre que 90°. On voit encore, et par la même raison que ci-dessus, que pour 180°, la tangente est zéro, et la cotangente est infinie.

277. Ces notions supposées, concevons que le quart de circonférence *BF* (*fig.* 142) soit divisé en arcs de 1′, c'est-à-dire en 5400 parties égales, et que de chaque point de division, on abaisse des perpendiculaires ou sinus tels que *AP*, sur le rayon *BC*; concevons aussi ce rayon *BC* divisé en un très-grand nombre de parties égales, en 100000, par exemple, chaque perpendiculaire contiendra un certain nombre de ces parties du rayon; si donc, par quelque moyen que ce soit, on pouvait parvenir à déterminer le nombre de parties de chacune de ces perpendiculaires, il est visible que ces lignes pourraient être employées pour fixer la grandeur des ; ensorte que si, ayant écrit par ordre, dans une colonne, toutes les minutes depuis zéro jusqu'à 90°, on écrivait dans une colonne, à côté et vis-à-vis de chaque minute, le nombre de parties de la perpendiculaire correspondante, on pourrait, par le moyen de cette table, assigner quel est le nombre de degrés d'un angle dont le nombre de parties de la perpendiculaire ou du sinus, serait connu; et réciproquement, connaissant le nombre des degrés et parties de degrés de l'angle, on pourrait assigner

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

le nombre des parties de son sinus. Cette table aurait cette utilité, non-seulement pour tous les arcs ou angles dont le rayon aurait le même nombre de parties qu'on en aurait supposées à celui d'après lequel on a construit la table, mais encore pour tout autre dont le rayon serait connu; par exemple, supposons un angle *DCG* (*fig.* 144) dont le côté ou le rayon *CD* soit de 8 pieds, et la perpendiculaire *DE*, de 3 pieds; et imaginons que *CA* soit le rayon sur lequel on a calculé les tables; si l'on imagine l'arc *AB* et la perpendiculaire *AP*, cette perpendiculaire sera le sinus des tables; or je puis trouver aisément de combien de parties est cette perpendiculaire; car comme les triangles *CDE*, *CAP* sont semblables (à cause des parallèles *DE* et *AP*), j'aurai (109) *CD* : *DE* :: *CA* : *AP*, c'est-à-dire 8P : 3P :: 100000 : *AP*; je trouverai donc (*Arith.* 179) que *AP* vaut 37500; je n'aurai donc qu'à chercher ce nombre dans la table parmi les sinus, et je trouverai à côté le nombre des degrés et des minutes de l'angle *DCG* ou *DCE*. Réciproquement, si l'on donnait le nombre des degrés et minutes de l'angle *DCG* et son rayon *CD*, on déterminerait de même la valeur de la perpendiculaire *DE*; car sachant quel est le nombre de degrés et minutes de cet angle, on trouverait dans la table, quel est le nombre de parties de la perpendiculaire ou du sinus *AP* qui répond à ce nombre de degrés; et alors, en vertu des triangles semblables, *CAP*, *CDE*, on aurait cette proportion *CA*: *AP* :: *CD* : *DE*, par laquelle il serait facile de calculer *DE*, puisque les trois premiers termes *CA*, *AP* et *CD* sont connus; savoir *CA* et *AP* par les tables, et *CD* est donné en pieds. On voit par là quelles sont ces lignes que nous avons dit ci-dessus (268) pouvoir être substituées aux angles, dans le calcul des triangles; ce sont les sinus.

278. Mais les sinus ne sont pas les seules lignes qu'on emploie : on fait usage aussi des tangentes et même des sécantes. Ces lignes sont faciles à calculer quand une fois on a calculé tous les sinus; car, comme le triangle *CPA* et le triangle *CBD* (*fig.* 142) sont semblables, on peut tirer ces deux proportions :

CP : *PA* :: *CB* : *BD* et *CP* : *CA* :: *CB* : *CD*.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

C'est-à-dire (en faisant attention que CP est égal à AQ)

$$\cos AB : \sin AB :: R : \text{tang } AB, \text{ et } \cos AB : R :: R : \sec AB.$$

Or on voit que dans chacune de ces deux proportions, les trois premiers termes sont connus lorsqu'on connaît tous les sinus, puisque le cosinus d'un arc n'est autre chose que le sinus du complément de cet arc : il sera donc aisé d'en conclure (*Arith.* 179) la valeur du quatrième terme de chacune, et par conséquent des tangentes et des sécantes, et par conséquent aussi des cotangentes et des cosécantes, qui ne sont autre chose que des tangentes et des sécantes de complément.

279. Au reste les deux dernières propositions que nous venons d'établir, ne sont pas seulement utiles pour le calcul des tangentes et des sécantes ; elles sont encore d'un grand usage dans beaucoup de rencontres, comme nous le verrons dans la suite de ce cours : il faut donc s'appliquer à les retenir ; la seconde, par exemple, peut nous fournir encore une propriété, qui est le fondement de la construction des cartes réduites, comme nous le verrons par la suite : voici cette propriété. De même que nous venons de démontrer que $\cos AB : R :: R : \sec AB$, on démontrera aussi pour un autre arc quelconque BO, que $\cos BO : R :: R : \sec BO$; or ces deux proportions ayant les mêmes termes moyens, doivent avoir les produits de leurs extrêmes égaux (*Arith.* 178) ; donc on peut (*Arith.* 180) former des extrêmes de l'une et de l'autre, une nouvelle proportion, qui aura pour extrêmes, les extrêmes de l'une, et pour moyens les extrêmes de l'autre, ensorte qu'on aura $\cos AB : \cos BO :: \sec BO : \sec AB$; d'où l'on conclura que les cosinus de deux arcs sont en raison réciproque ou inverse de leurs sécantes.

280. Voici encore une autre proportion utile dans plusieurs cas, et d'où l'on déduira, de la même manière, que les tangentes de deux arcs sont en raison inverse de leurs cotangentes : les triangles CBD, CFE sont semblables, parce que, outre l'angle droit en B et en F, on a de plus l'angle DCB égal à

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

l'angle *CEF*, à cause des parallèles *CB*, *EF*; on aura donc *BD* : *CB* :: *CF* : *FE*, c'est-à-dire *tang AB* : *R* :: *R* : *cot AB* : on prouverait donc de même que *tang BO* : *R* :: *R* : *cot BO*, et par conséquent *tang AB* : *tang BO* :: *cot BO* : *cot AB*. Les livres qui renferment les valeurs de toutes les lignes dont il vient d'être question, sont ce qu'on appelle des *tables de sinus;* elles renferment ordinairement, non-seulement les valeurs numériques de toutes ces lignes, mais encore leurs logarithmes qu'on emploie aussi souvent qu'on le peut, à la place des valeurs numériques : ces mêmes tables renferment aussi les logarithmes des nombres naturels; telles sont celles que nous avons indiquées dans l'Arithmétique, page 234. Avant que d'exposer les usages de ces tables pour la résolution des triangles, il ne nous reste plus qu'à parler de leur formation, c'est-à-dire de la méthode par laquelle on a calculé ou pu calculer les sinus, etc. Nous nous y arrêterons d'autant plus volontiers, que les propositions que nous avons à établir sur ce sujet, nous serviront ailleurs.

281. *Pour avoir le cosinus d'un arc dont le sinus est connu, il faut retrancher le quarré du sinus, du quarré du rayon, et tirer la racine quarrée du reste.* Car le cosinus *AQ* (*fig.* 142) est égal à *PC* qui est le côté de l'angle droit dans le triangle rectangle *APC*, dont on connaît alors l'hypoténuse *AC* et le côté *AP* (166). Si l'on demandait le cosinus de 30°; comme nous avons vu (271) que ce sinus est la moitié du rayon que nous supposerons ici de 100000 parties, ce sinus serait 50000; retranchant son quarré 2500000000, du quarré 10000000000 du rayon, on a 7500000000, dont la racine quarrée 86603 est le cosinus de 30°; ou le sinus de 60°.

282. *Connaissant le sinus d'un arc* AB (fig. 145) *pour avoir celui de la moitié*, il faut d'abord calculer le cosinus de ce premier arc; ce cosinus étant calculé, on le retranchera du rayon, ce qui donnera le sinus-verse *BP* : on quarrera la valeur de *BP*, et on ajoutera ce quarré avec celui du sinus *AP*; la somme (166) sera le quarré de la corde *AB*; tirant la ra-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

cine quarrée de cette somme, on aura *AB*, dont la moitié est le sinus *BI* de l'arc *BD* moitié de *ADB* (270).

283. *Connaissant le sinus* BI *d'un arc* BD (fig. 145), *pour trouver le sinus* AP *du double* ADB *de cet arc*, on calculera le cosinus *CI* de *BD*, et on fera cette proportion, *R* : *cos BD* :: 2 *sin BD* : *sin ADB*, dans laquelle les trois premiers termes seront alors connus, et dont il sera facile de calculer le quatrième. Cette proportion est fondée sur ce que les deux triangles *CBI* et *BAP* sont semblables; parce qu'outre l'angle droit en *P* et en *I*, ils ont d'ailleurs l'angle *B* commun; ainsi on a *CB* : *CI* :: *AB* : *AP*. Or *CI* (270) est le cosinus de *BD*, et *AB* le double de *BI* sinus de *BD*; *AP* est le sinus de *ABD*; et *CB* est le rayon; donc *R* : *cos BD* :: 2 *sin BD* : *sin ABD*.

284. *Connaissant les sinus des deux arcs* AB, AC (fig. 146), *pour trouver le sinus de leur somme ou de leur différence, il* faut, après avoir calculé (281) les cosinus de ces mêmes arcs, multiplier le sinus du premier par le cosinus du second, et le sinus du second par le cosinus du premier. La somme de ces deux produits, divisée par le rayon, sera le sinus de la somme des deux arcs; et la différence de ces mêmes produits, divisée par le rayon, sera le sinus de la différence de ces mêmes arcs. Faites l'arc *AD* égal à l'arc *AC*, tirez la corde *CD*, le rayon *LA* qui divisera cette corde en deux parties égales au point *I*; des points *C*, *A*, *I* et *D*, abaissez les perpendiculaires *CK*, *AG*, *IH*, *DF* sur *BL*; enfin des points *I* et *D* menez *IM* et *DN*, parallèles à *BL*. Puisque *CD* est divisée en deux parties égales en *I*, *CN* sera aussi divisée en deux parties égales en *M* (102). Cela posé, *CK* qui est le sinus de *BC*, somme des deux arcs, est composé de *KM* et de *MC*, ou de *IH* et de *MC*, *DF* qui est le sinus de *BD*, différence des deux arcs, est égal à *KN* qui vaut *KM*, moins *MN*, c'est-à-dire *IH* moins *CM*; ainsi, pour trouver le sinus de la somme, il faut ajouter la valeur de *CM* à celle de *IH*; et au contraire

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

en retrancher, pour avoir le sinus de la différence. Or les triangles semblables LAG, LIH donnent.....

$$LA : LI :: AG : IH, \text{ ou } R : \cos AC :: \sin AB : IH = \frac{\sin AB \times \cos AC}{R}$$

Les triangles LAG et CIM semblables, parce qu'ils ont les côtés perpendiculaires l'un à l'autre, donnent (112)

$$R : \cos AB :: \sin AC : MC = \frac{\sin AC \times \cos AB}{R}$$

285. *Pour avoir le cosinus de la somme ou de la différence de deux arcs dont on connaît les sinus*, il faut, après avoir calculé (281) les cosinus de chacun de ces deux arcs, multiplier ces deux cosinus l'un par l'autre; multiplier pareillement les deux sinus; alors retranchant le second produit du premier, et divisant le reste par le rayon, on aura le cosinus de la somme des deux arcs. Au contraire, pour avoir celui de la différence, on ajoutera les deux produits, et on divisera la somme par le rayon. Car, puisque DC est coupée en deux parties égales, en I, FK sera coupée en deux parties égales en H; or LK qui est le cosinus de la somme, vaut LH moins HK, ou LH moins IM; et LF qui est le cosinus de la différence, vaut LH plus HF, ou LH plus HK, ou enfin LH plus IM; voyons donc quelles sont les valeurs de LH et de IM. Les triangles semblables LGA, LHI donnent

$$LA : LI :: LG : LH, \text{ ou } R : \cos AC :: \cos AB : LH = \frac{\cos AC \times \cos AB}{R},$$

Les triangles semblables LAG, CIM donnent

$$LA : AG :: CI : IM, \text{ ou } R : \sin AB :: \sin AC : IM = \frac{\sin AB \times \sin AC}{R}$$

286. *La somme des sinus de deux arcs* AB, AC (fig. 147) *est à la différence de ces mêmes sinus, comme la tangente de la moitié de la somme de ces deux arcs, est à la tangente de la moitié de leur différence;* c'est-à-dire que.....

$$\sin AB + \sin AC : \sin AB - \sin AC :: \text{tang } \frac{AB + AC}{2} : \text{tang } \frac{AB - AC}{2}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Après avoir tiré le diamètre AM, portez l'arc AB de A en D; tirez la corde BD qui sera perpendiculaire sur AM. Par le point C, tirez CP perpendiculaire, et CF parallèle à AM. Du point F, menez les cordes FB et FD; et d'un rayon FG égal à celui du cercle BAD, décrivez l'arc IGK rencontrant CF en G, et en ce point G, élevez HL perpendiculaire à CF; les lignes GH et GL sont les tangentes des angles GFH et GFL, ou CFB et CFD, qui ayant leurs sommets à la circonférence, ont pour mesure la moitié des arcs CB, CD sur lesquels ils s'appuient (63), c'est-à-dire la moitié de la différence BC, et la moitié de la somme CD des deux arcs AB, AC; ainsi GL et GH sont les tangentes de la moitié de la somme, et de la moitié de la différence de ces mêmes arcs. Cela posé, il est visible que DS étant égal à BS, la ligne DE vaut $DS+SE$ ou $BS+CP$, c'est-à-dire la somme des sinus des arcs AB, AC : pareillement BE vaut $BS-SE$ ou $BS-CP$, c'est-à-dire la différence des sinus de ces mêmes arcs. Or, à cause des parallèles BD, HL, on a (115) $DE : BE :: LG : GH$. Donc

$$\sin AB+\sin AC : \sin AB-\sin AC :: \operatorname{tang}\frac{AB+AC}{2} : \operatorname{tang}\frac{AB-AC}{2}.$$

287. Donc *la somme des cosinus de deux arcs est à la différence de ces cosinus, comme la cotangente de la moitié de la somme de ces deux arcs est à la tangente de la moitié de leur différence.* Car les cosinus n'étant que des sinus de complément, il suit de la proposition précédente, que la somme des cosinus est à leur différence, comme la tangente de la moitié de la somme des complémens est à la tangente de la moitié de la différence des mêmes complémens : or la moitié de la somme des complémens de deux arcs est le complément de la moitié de la somme de deux arcs; et la demi-différence des complémens est la même que la demi-différence des arcs; donc, etc.

288. Les trois principes posés (271, 282 et 284) suffisent pour concevoir comment on pourrait s'y prendre pour former une table des sinus. En effet, on connaît le sinus de 30°, par

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

ce qui a été dit (271); et par ce qui a été dit (282), on peut trouver celui de 15°, et successivement ceux de 7° 30′, 3° 45′, 1° 52′ 30″, 0° 56′ 15″, 0° 28′ 7″ 30‴ 0° 14′ 3″ 45″ 0° 7′ 1″ 52″ 30ᴵⱽ. Cela posé, on remarquera que quand les arcs sont fort petits, ils ne diffèrent pas sensiblement de leurs sinus, et sont par conséquent à très-peu près proportionnels à ces sinus; ainsi, pour trouver le sinus de 1′, on fera cette proportion : *l'arc de* 0° 7′ 1″ 52‴ 30ᴵⱽ *est à l'arc de* 0° 1′, *comme le sinus de ce premier arc est au sinus de* 1′. Si dans ce calcul on suppose le rayon de 100000 parties seulement, il faudra calculer les sinus des arcs que nous venons de rapporter, avec trois décimales, pour être en droit d'en conclure les suivans à moins d'une unité près; alors on remontera facilement aux autres en cette manière. Depuis 1′ jusqu'à 3° 0′, il suffira de multiplier le sinus de 1′ successivement par 2, 3, 4, 5, etc. pour avoir les sinus de 2′, 3′, etc. jusqu'à 3°, à moins d'une unité près. Pour calculer les sinus des arcs au-dessus de 3° 0′, on fera usage de ce qui a été dit (284); mais on abrégera considérablement le travail en ne calculant ces sinus, par ce principe, que de degrés en degrés seulement. Quant aux minutes intermédiaires, on y satisfera en prenant la différence des sinus de deux degrés consécutifs, et formant cette proportion : 60 *minutes sont au nombre de minutes dont il s'agit, comme la différence des sinus des deux degrés voisins, est à un quatrième terme;* qui sera ce qu'on doit ajouter au plus petit des deux sinus pour avoir le sinus du nombre de degrés et minutes dont il s'agit. Par exemple, si après avoir trouvé que les sinus de 8° et 9° sont 13917 et 15643, je voulais avoir le sinus de 8° 17′, je prendrais la différence 1726 de ces sinus; et je calculerais le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers sont 60′ : 17′ :: 1726 : Ce quatrième terme, qui est 489 à très-peu près, étant ajouté à 13917, donne 14406 pour le sinus de 8° 17′, tel qu'il est dans les tables, à moins d'une unité près. La raison de cette pratique est fondée sur ce que lorsque l'arc *KL* (*fig.* 129) est petit, comme de 1°, par exemple, les différences *LM*, *Iu* des sinus *LF*, *IH*, sont à peu près pro-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

portionnelles aux différences KL, KI, des arcs correspondans AL, AI, parce que les triangles KML, KuI, pouvant être considérés comme rectilignes, sont semblables.

289. Cette méthode ne doit cependant être employée que jusqu'à 87°, parce que, passé ce terme, on ne peut se permettre de prendre iu (*fig.* 148) pour la différence des sinus PB, Qx; parce que la quantité ux, toute petite qu'elle est, a un rapport sensible avec iu, et d'autant plus sensible que l'arc AB approche plus de 90°. Dans ce cas, il faut se rappeler que (170) les lignes DE, Dt qui sont les différences entre le rayon et les sinus PB, Qx, sont proportionnelles aux quarrés des cordes DB et Dx, (ou à cause que les arcs DB et Dx sont fort petits) aux quarrés des arcs BD et Dx; c'est pourquoi, ayant calculé le sinus de 87°, on prendra sa différence avec le rayon 100000; et pour trouver le sinus de tout autre arc entre 87° et 90°, on fera cette proportion : Le quarré de 3° ou de 180′, est au quarré du nombre des minutes du complément de l'arc en question, comme la différence du rayon au sinus de 87°, est à un quatrième terme qui sera Dt, et qui étant retranché du rayon, donnera Ct ou Qx, sinus de l'arc en question. Par exemple, ayant trouvé que le sinus de 87° est 99863, si je veux avoir le sinus de 88° 24′, dont le complément est 1° 36′ ou 96′, je ferai cette proportion $\overline{180'}^2 : \overline{96'}^2 :: 137 : Dt$, par laquelle je trouve que Dt vaut 39 à peu près; retranchant 39 du rayon 100000, j'ai 99961 pour le sinus de 88° 24′, tel qu'il est en effet dans les tables.

290. Ayant calculé ainsi les sinus, on aura facilement les tangentes et les sécantes, par ce qui a été dit (278).

291. Les sinus étant calculés, on calcule leurs logarithmes, comme on calcule ceux des nombres. Il faut pourtant observer que si l'on prenait, dans les tables, la valeur numérique d'un des sinus, pour calculer son logarithme selon ce qui a été dit (*Arith.* 239), on ne trouverait pas ce logarithme

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

absolument le même qu'il est dans la colonne des logarithmes des sinus; la raison en est que les sinus des tables ont été calculés originairement, dans la supposition que le rayon était de 10000000000 parties; mais comme les calculs ordinaires n'exigent pas une telle précision, on a supprimé, dans les tables actuelles, les cinq derniers chiffres des valeurs numériques des sinus, tangentes, etc.; ensorte que ces valeurs, telles qu'elles sont actuellement dans les tables, ne sont approchées qu'à environ une unité près sur 100000. Il n'en a pas été de même des logarithmes des sinus, tangentes, etc.; on les a conservés tels qu'ils ont été calculés pour le rayon supposé de 10000000000 parties; et pour cette raison qu'on leur trouve une caractéristique beaucoup plus forte que ne semble le supposer la valeur numérique du sinus correspondant, ou de la tangente correspondante; ensorte que, lorsqu'on fait usage des logarithmes des sinus, tangentes, etc. on calcule dans la supposition tacite que le rayon soit de 10000000000 parties; et lorsqu'on fait usage des valeurs numériques des sinus, tangentes, etc. on calcule dans la supposition que le rayon soit de 100000 parties seulement.

A l'égard des logarithmes, des tangentes et sécantes, on les a par une simple addition et une soustraction, lorsqu'une fois on a ceux des sinus; cela est évident d'après ce qui a été dit (278) et (*Arith.* 232).

* 292. Quoique les tables ordinaires ne donnent les sinus que pour les degrés et minutes, néanmoins on peut déduire les valeurs de ces mêmes lignes, pour les degrés, minutes et secondes, et cela en suivant exactement ce que nous venons de prescrire pour les degrés et minutes seulement. Mais comme on emploie plus souvent les logarithmes de ces lignes, au lieu de ces lignes elles-mêmes, nous nous arrêterons un moment sur ce dernier objet. Supposant qu'on ait les logarithmes des sinus et des tangentes, de minute en minute; quand on voudra avoir le logarithme du sinus d'un certain nombre de degrés, minutes et secondes, on prendra dans les tables celui du sinus du nombre des degrés et minutes; on prendra aussi la différence des deux logarithmes voisins qui est à côté, et on fera cette proportion : 60″ sont au nombre de secondes en question, comme la différence des logarithmes, prise dans les tables, est à un quatrième terme qu'on ajoutera au logarithme du sinus des degrés et

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

minutes. Si l'on avait un logarithme de sinus qui ne répondît pas à un nombre exact de degrés et minutes, pour avoir les secondes on ferait cette proportion : la différence des deux logarithmes, entre lesquels tombe le logarithme donné, est à la différence entre ce même logarithme et celui qui est immédiatement plus petit dans la table, comme 60″ sont à un quatrième terme, qui serait le nombre de secondes à ajouter au nombre de degrés et minutes de l'arc, qui, dans la table, est immédiatement au-dessous de celui que l'on cherche. On pourra suivre cette règle, tant que l'arc ne sera pas au-dessous de 3°; lorsqu'il sera au-dessous, on se conduira comme dans cet exemple : supposons qu'on demande le sinus de 1° 55′ 48″; on ferait cette proportion : 1° 55′ : 1° 55′ 48″ :: le sinus de 1° 55′ est à un quatrième terme, qui (à cause que les petits arcs sont proportionnels à leurs sinus) sera, sans erreur sensible, le sinus de 1° 55′ 48″. Mais pour calculer plus commodément, on réduira les deux premiers termes en secondes; et alors prenant dans les tables le logarithme du sinus de 1° 55′ qui est le troisième terme, on lui ajoutera le logarithme de 1° 55′ 48″ réduits en secondes, le reste (*Arith.* 232) sera le logarithme du quatrième terme, c'est-à-dire le logarithme cherché.

Réciproquement, pour trouver le nombre de degrés, minutes et secondes d'un arc au-dessous de 3°, et dont on a le sinus, on chercherait d'abord dans les tables quel est le nombre de degrés et minutes; puis on ferait cette proportion : le sinus du nombre de degrés et minutes trouvés est au sinus proposé, comme ce même nombre de degrés et minutes réduits en secondes est au nombre total de secondes de l'arc cherché; ainsi, par logarithme, l'opération se réduira à prendre la différence entre le logarithme du sinus proposé, et celui du sinus du nombre de degrés et minutes immédiatement au-dessous, et à ajouter ce logarithme au logarithme de ce nombre de degrés et minutes réduits en secondes; la somme sera le logarithme du nombre de secondes que vaut l'arc cherché. Par exemple, si l'on me donne 8,6233427 pour logarithme du sinus d'un arc, je trouve dans les tables, que le nombre de degrés et minutes le plus approchant, est 2° 24′, et que la différence entre le logarithme du sinus proposé et celui du sinus de ce dernier arc est 0,0013811, j'ajoute cette différence avec 3,9365137, logarithme de 2° 24′ réduits en secondes; la somme 3,9378948 repond, dans les tables de logarithmes à 8667; c'est le nombre de secondes de l'arc cherché, qui, par conséquent; est de 2° 24′ 27″. Cette règle est l'inverse de la précédente.

A l'égard des logarithmes des tangentes, on suivra les mêmes règles en changeant le mot de *sinus* en celui de *tangente*. Il faut seulement en excepter les arcs qui sont entre 87° et 90°, pour lesquels on suivra celle ci. Calculez le logarithme de la tangente du complément par la règle qu'on vient de prescrire pour les tangentes, et retrancher ce logarithme du double du logarithme du rayon En effet, selon ce qui a été dit (280), la tangente est le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers sont la cotangente, le rayon et le rayon. Et si l'on avait le logarithme de la tangente d'un arc qui, devant être entre 87° et 90°, devrait avoir des secondes, on retranche

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

rait ce logarithme du double du logarithme du rayon, et on aurait le logarithme de la tangente du complément qui, étant nécessairement entre 0° et 3°, se déterminerait facilement d'après ce qui précède; prenant le complément de l'arc ainsi trouvé, on aurait l'arc cherché.

293. Puisque le sinus d'un arc est la moitié de la corde d'un arc double, si l'on descendait par le principe donné (282), jusqu'au sinus de l'arc le plus approchant de 1″, et qu'en doublant le sinus, on répétât ce double autant de fois que l'arc dont il est la corde, est contenu dans la demi-circonférence, il est visible qu'on aurait un nombre fort approchant de la longueur de la demi-circonférence, mais plus petit; et si par la proportion donnée (278) on calculait la tangente du même arc, et que l'ayant doublée on répétât ce double autant de fois que le double de cet arc est contenu dans la demi-circonférence, on trouverait un nombre fort approchant de la demi-circonférence, mais plus grand; on peut donc, par le calcul des sinus, approcher du rapport du diamètre à la circonférence: nous ne nous arrêterons pas à ce calcul, parce que nous donnerons d'ailleurs une méthode plus expéditive. Quoi qu'il en soit, on trouverait, par cette méthode, que le rayon étant supposé de 10000000000, la demi-circonférence serait entre 31415926536 et 31415926535. Concluons donc de là que le rayon étant 1, les 180° de la demi-circonférence valent 3,1415926535; le degré vaut 0,01745329252; la minute vaut 0,0002908882o8, et ainsi de suite. Nous rapportons ici ces nombres, parce qu'ils peuvent souvent être utiles. Par exemple, veut-on savoir quel espace occuperait une minute de degré sur l'octant avec lequel on observe les hauteurs à la mer, cet octant étant supposé de 20 pouces de rayon. Par la construction de cet instrument, les 90° sont représentés par un arc de 45; ainsi l'intervalle entre deux divisions consécutives, est celui qu'occuperait un degré, dans un cercle dont le rayon serait moitié moindre, ou de 10 pouces; donc la minute sur un pareil instrument ne répond qu'à l'espace qu'elle occuperait sur une circonférence de 10 pouces, ou 120 lignes de rayon. Multiplions donc 120 par 0,00029 valeur de la minute, en

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

se bornant aux 5 premiers chiffres, nous aurons 0,03480 ou 0,0348, c'est-à-dire $\frac{348}{10000}$ de ligne, ou $\frac{1}{29}$ de ligne à peu près. On voit par là qu'on ne peut guère répondre d'une minute en observant avec cet instrument. Nous aurons occasion d'en parler ailleurs.

De la Résolution des Triangles-Rectangles.

294. Nous avons dit ci-dessus (267), que pour être en état de calculer ou de résoudre un triangle, il fallait connaître trois des six parties qui le composent, et que parmi les trois choses connues, il fallait qu'il y eût au moins un côté. Comme l'angle droit est un angle connu, il suffit donc, dans les triangles rectangles, de connaître deux choses différentes de l'angle droit; mais il faut qu'une, au moins, de ces deux choses, soit un côté. Il faut encore remarquer que comme les deux angles aigus d'un triangle rectangle valent ensemble un angle droit, dès que l'un des deux est connu, l'autre l'est aussi. La résolution des triangles rectangles se réduit à quatre cas; ou les deux choses connues sont un des angles aigus, et un côté de l'angle droit; ou elles sont un angle aigu et l'hypoténuse; ou un côté de l'angle droit et l'hypoténuse; ou enfin les deux côtés de l'angle droit. Ces quatre cas trouveront toujours leur résolution dans l'une des deux analogies suivantes.

295. 1°. *Le rayon des tables est au sinus d'un des angles aigus comme l'hypoténuse est au côté opposé à cet angle aigu.*

296. 2°. *Le rayon des tables est à la tangente d'un des angles aigus, comme le côté de l'angle droit adjacent à cet angle est au côté opposé à ce même angle.* Pour démontrer la première analogie, il n'y a qu'à se représenter (*fig.* 144) que dans le triangle rectangle *CED*, la partie *CA* de l'hypoténuse soit le rayon des tables; alors, en imaginant l'arc *AB*, la perpendiculaire *AP* sera le sinus de l'angle *DCE*; or, les triangles semblables, *CAP*, *CDE* donnent $CA : AP :: CD : DE$, ou $R : sin\ DCE :: CD : DE$, ce qui est la première analogie.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Pour la seconde, il faut se représenter, dans le triangle rectangle CEF (*fig.* 149), que la partie CA du côté CE soit le rayon des tables; et ayant imaginé l'arc AB, la perpendiculaire AD élevée sur AC au point A, sera la tangente de l'angle FCE; alors, à cause des triangles semblables CAD, CEF, on aura $R : tang\ FCE :: CE : EF$, ce qui fait la seconde analogie.

297. Dans les applications qui vont suivre, nous emploierons toujours les logarithmes des sinus, tangentes, etc. au lieu des sinus, tangentes, etc.; pour familiariser les commençans avec l'usage des complémens arithmétiques, nous en ferons usage dans tous les calculs, à l'exception des cas où le logarithme à retrancher serait celui du rayon, dont la caractéristique étant 10, la soustraction est très-facile. Mais pour ne point obliger ceux qui n'auraient que la première édition de l'Arithmétique à recourir à la seconde, nous allons exposer ici, en peu de mots, l'idée et l'usage des complémens arithmétiques. Le complément arithmétique d'un nombre se prend en retranchant de 9 chacun des chiffres de ce nombre, excepté le dernier sur la droite, qu'on retranche de 10. Ainsi le complément arithmétique d'un nombre peut se prendre à l'inspection de ses chiffres, sans aucune opération. Les complémens arithmétiques servent à changer les soustractions en additions. Ainsi, si de 78549 je veux retrancher 65647, je puis à cette opération substituer l'addition de 78549 avec 34353 qui est le complément arithmétique de 65647; alors il ne s'agit plus que d'ôter une unité au premier chiffre de la gauche de la somme : on ôterait deux unités, si l'on avait ajouté deux complémens arithmétiques, et ainsi de suite. Dans le cas présent, la somme serait 112902; de laquelle supprimant une unité au premier chiffre, il reste 12902, qui est précisément ce que l'on aurait eu, si de 78549 on avait retranché 65647 selon la règle ordinaire. La raison est facile à appercevoir, en observant que le complément arithmétique de 65647, n'est autre chose que 100000 moins 65647; ainsi quand on ajoute le complément arithmétique, on ajoute

100000

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

100000 et on retranche 65647; le résultat renferme donc 100000 de trop; c'est-à-dire que son premier chiffre est trop fort d'une unité. Donc, puisque (*Arith.* 232) pour faire une règle de *trois*, par logarithmes, il faut ajouter les logarithmes des deux moyens, et retrancher le logarithme du premier terme, on pourra, en vertu de l'observation précédente, faire une somme des logarithmes des deux moyens, et du complément arithmétique du logarithme du premier; et l'on diminuera d'une unité le premier chiffre de la droite du résultat. Appliquons les analogies démontrées ci-dessus, aux quatre cas dont nous avons parlé.

EXEMPLE I. Supposons qu'il s'agit de déterminer la hauteur *AC* d'un édifice (*fig.* 150) par des mesures prises sur le terrain. On s'éloignera de cet édifice, à une distance *CD*, telle que l'angle compris entre les deux lignes qu'on imaginera menées du point *D* au pied et au sommet de l'édifice, ne soit ni trop aigu ni fort approchant de 90°; et ayant mesuré cette distance *CD*, on fixera au point *D* le pied d'un graphomètre. On disposera cet instrument de manière que son plan soit vertical et dirigé vers l'axe *AC* de la tour, et que son diamètre fixe *HF*, soit horizontal; ce qui se fera à l'aide d'un petit poids suspendu par un fil attaché au centre. Ce fil doit raser le bord de l'instrument et répondre à 90°. On fera mouvoir le diamètre mobile jusqu'à ce qu'on puisse appercevoir à travers les pinnules ou la lunette dont il est garni, le sommet *A* de l'édifice. Alors on observera sur l'instrument le nombre des degrés de l'angle *FEG*, qui est aussi celui de son opposé au sommet *AEB*. Cela posé, la hauteur *AC* de l'édifice, étant perpendiculaire à l'horizon, est perpendiculaire à *BE*; c'est pourquoi on a un triangle rectangle *ABE*, dans lequel, outre l'angle droit, on connaît *BE* égal à *CD* qu'on a mesuré, et l'angle *AEB*; on cherche la valeur de *AB*; on voit donc que les trois choses connues, et celle qu'on cherche, sont les termes de l'analogie du n° 296; donc pour trouver *AB*, on fera cette proportion : $R : tang\ AEB :: BE : AB$. Si la distance *CD*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

ou BE est de 132 pieds, et l'angle AEB de 48° 54′. On aura R : *tang* 48° 54′ :: 132^P : AB; de sorte que prenant dans les tables la valeur de la tangente de 48° 54′, la multipliant par 132, et divisant ensuite par la valeur du rayon prise dans les tables, on aura le nombre de pieds de AB, auquel ajoutant la hauteur ED de l'instrument, on aura la hauteur cherchée AC. Mais on peut abréger le calcul en employant les logarithmes; parce qu'alors il ne s'agit plus (*Arith.* 232) que d'ajouter les logarithmes du second et du troisième terme, et de retrancher le logarithme du premier; on fera donc le calcul comme il suit :

Log. tang. 48° 54′	10,0593064
Log. 132	2,1205739
Somme	12,1798803
Log. du Rayon	10,0000000
Reste ou *Log.* de AB	2,1798803

qui répond, dans les tables, à 151,32 à moins d'un centième près. Ainsi AB est de 151^P et 32 centièmes, ou $151^P\ 3^P\ 10^l$.

EXEMPLE II. On a couru, en partant d'un point connu A (*fig.* 151) 32 lieues sur la ligne AB parallèle à la ligne GF qui marque le nord nord-est : on demande de combien on a avancé vers l'est, et de combien vers le nord. On imaginera par les deux points A et B deux parallèles, la première à la ligne nord et sud NS, et la seconde à la ligne est et ouest EO; comme ces deux lignes font un angle droit, le triangle ACB sera rectangle en C; on connaît dans ce triangle le côté AB qui est de 32 lieues, et l'angle CAB qui, à cause des parallèles, est égal à l'angle NDF; lequel, à cause que DF marque le nord-nord-est, est de 22° 30′ ou le quart de 90°. On fera donc, pour trouver BC, cette analogie (295) R : *sin* 22° 30′ :: 32^l : BC. Et pour trouver AC, on remarquera que l'angle B est complément de l'angle A; c'est pourquoi on fera cette

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

analogie (295) R : *sinus* 67° 30′ :: 32^1 : AC. Si l'on effectue ces deux opérations, par logarithmes, on trouvera,..... *log* $BC = 1{,}0879897$ et *log* $AC = 1{,}4707653$. On en déduira, $BC = 12{,}25$ et $AC = 29{,}56$. Ainsi on s'est avancé de 12 lieues et 25 centièmes ou $\frac{1}{4}$, vers l'est, et de 29 lieues et 56 centièmes vers le nord. Le nombre de lieues qu'on a courues selon l'une et l'autre de ces deux directions, sert à déterminer le lieu B de la terre où se trouve un vaisseau lorsqu'il a parcouru AB; mais le nombre de lieues courues vers l'est, a besoin d'une correction dont ce n'est pas encore ici le lieu de parler. Il ne s'agit, quant à présent, que des premiers usages de la Trigonométrie.

EXEMPLE III. On a couru 42 lieues selon la ligne AB dont la position est inconnue, et on sait qu'on a avancé de 35 lieues au nord : on demande la direction de la route AB, c'est-à-dire quelle aire de vent on a suivie? On connaît donc ici le côté AC de l'angle droit et l'hypoténuse, et il s'agit de trouver l'angle CAB. Comme les deux angles A et B font ensemble un angle droit, nous connaîtrons l'angle A, si nous pouvons déterminer l'angle B. Or, on a (295), 42 : 35 :: R : *sin* B. On en déduira, *log sin* $B = 9{,}9208187$ et $B = 56° 27'$. Donc l'angle A, ou l'*aire de vent*, est de 33° 33′.

EXEMPLE IV, On a couru selon la ligne AB, dont la position et la grandeur sont inconnues; mais on sait qu'on a avancé de 15 lieues à l'est, et de 35 lieues au nord : on demande la direction et la longueur de la route. On connaît donc ici les deux côtés AC et BC de l'angle droit, et l'on demande les angles et l'hypoténuse. Pour trouver l'angle A, on fera cette analogie : (296) $AC : BC :: R :$ *tang* A; c'est-à-dire 35 : 15 :: R : *tang* A. On trouvera $A = 23° 12'$.

Pour avoir AB, on peut, quand on a déterminé l'angle A, se conduire comme dans l'exemple III. Mais il n'est pas nécessaire de calculer l'angle A; la proposition démontrée (164 et et 166) suffit : ainsi prenant le quarré de 15 qui est 225, et l'a-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

joutant au quarré de 35 qui est 1225, on aura 1450 pour le quarré de AB; et tirant la racine quarrée, on aura 38,08 pour la valeur de AB à moins d'un centième près.

Par la même raison, si l'hypoténuse AB, et l'un AC des côtés de l'angle droit, étant donnés, on demandait l'autre côté BC, il ne serait pas nécessaire de calculer l'angle A; on retrancherait (166) le quarré du côté connu AC, du quarré de l'hypoténuse AB; la racine quarrée du reste serait la valeur du côté BC.

C'est encore par la résolution des triangles rectangles qu'on peut déterminer de combien il s'en faut que le rayon AD (*fig.* 152), par lequel on vise à l'horizon de la mer lorsqu'on est élevé d'une certaine quantité AB au-dessus d'un point B de sa surface, ne soit parallèle à la surface de la mer. Comme le rayon visuel AD est alors une tangente, si l'on imagine le rayon CD, l'angle D sera droit (48); or on connaît le rayon CD de la terre, qui est 19611500 pieds. Et si au rayon CB de 19611500, on ajoute la hauteur AB à laquelle on est au-dessus de B, on aura le côté AC; on connaîtra donc deux choses outre l'angle droit; on pourra donc calculer l'angle CAD, dont la différence DAO avec un angle droit, sera l'abaissement du rayon AD au-dessous du rayon AO parallèle à la surface de la mer en B. Si dans le même triangle ADC on calcule le côté AD, on aura la plus grande distance à laquelle la vue puisse s'étendre, lorsque l'œil est à la hauteur AB. Mais comme les tables ordinaires ne peuvent pas donner l'angle CAD, et le côté AD, avec une précision suffisante, lorsque AB est une très-petite qnantité à l'égard du rayon de la terre; voici comment on peut y suppléer. On concevra AC prolongé jusqu'à la circonférence, en E; alors AE étant une sécante, et AD une tangente; selon ce qui a été dit (129); on aura $AE : AD :: AD : AB$; ainsi, pour avoir AD, on prendra (*Arith.* 178) une moyenne proportionnelle entre AE et AB.

Par exemple, si l'œil A était élevé de vingt pieds au-dessus de la mer, AB serait de 20 pieds, et AE serait de deux fois

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

19611500 pieds, plus 20, c'est-à-dire de 39223020 pieds; le quarré de AD serait donc de 39223020×20 ou de 784460400; donc (*Arith.* 178 et 179) AD serait de 28008 pieds; c'est-à-dire qu'un œil élevé de 20 pieds au-dessus de la surface de la mer, peut découvrir jusqu'à 28008 pieds, ou une lieue et $\frac{1}{2}$ à la ronde. Maintenant, pour savoir de combien le rayon visuel AD est abaissé à l'égard de l'horizontal AO, on remarquera que, vu la petitesse de AB, la ligne AD ne peut différer sensiblement de l'arc BD; ainsi l'arc BD est 28008 pieds. Or puisque le rayon est de 19611500 pieds, on trouvera facilement (152) que la circonférence est de 123222688; et par conséquent (153) on trouvera le nombre de degrés de l'arc BD, par cette proportion, 123222688 : 28008 :: 360° : à un quatrième terme, que l'on trouve de 0° 4′ 54″; ainsi l'angle ACD, et par conséquent DAO, est de 0° 4′ 54″, lorsque AB est de 20 pieds.

Résolution des Triangles obliquangles.

298. On se sert du terme de *triangles obliquangles*, pour désigner en général les triangles qui n'ont point d'angle droit.

299. *Dans tout triangle rectiligne, le sinus d'un angle est au côté opposé à cet angle, comme le sinus de tout autre angle du même triangle, est au côté qui lui est opposé.* Car si l'on imagine un cercle circonscrit au triangle ABC (*fig.* 153), et qu'ayant tiré les rayons DA, DB, DC, on décrive d'un rayon Db égal à celui des tables, le cercle abc; qu'enfin on tire les cordes ab, bc, ac qui joignent les points de section a, b, c; il est facile de voir que le triangle abc est semblable au triangle ABC; car les lignes Da, Db étant égales, sont proportionnelles aux lignes DA, DB; donc (105) ab est parallèle à AB; on prouvera de même que bc est parallèle à BC et ac parallèle à AC; donc (111) $AB : ab :: BC : bc$ ou $AB : \frac{1}{2}\,ab :: BC : \frac{1}{2}\,bc$; or la moitié de la corde ab est (270) le sinus de ah moitié de l'arc ahb : et cette moitié de l'arc ahb est la mesure de l'angle acb qui a son sommet à la circonférence, et qui est égal

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

l'angle ACB; donc $\frac{1}{2}\ ab$ est le sinus de l'angle ACB; on prouvera de même que $\frac{1}{2}\ bc$ est le sinus de l'angle BAC; donc $AB : sin\ ACB :: BC : sin\ BAC$.

300. Cette proposition sert à résoudre un triangle. 1°. Lorsqu'on connaît deux angles et un côté. 2°. Lorsqu'on connaît deux côtés et un angle opposé à l'un de ces côtés.

I. CAS. Si l'on connaît l'angle B, l'angle C, et le côté BC (*fig.* 65), on aura l'angle A, en ajoutant les deux angles B et C, et retranchant leur somme de 180°; et pour avoir les deux côtés AC et AB, on fera les deux proportions :

$$sin\ A : BC :: sin\ B : AC \quad sin\ A : BC :: sin\ C : AB.$$

C'est ainsi qu'on peut résoudre, par le calcul, la question que nous avons examinée (121). Par exemple, si l'angle B a été observé de 78° 57′, l'angle C de 47° 34′, et le côté BC de 184 pieds, on aura 53° 29′ pour l'angle A, et l'on trouvera les deux autres côtés, par ces deux proportions :

$$sin\ 53°\ 29' : 184 :: sin\ 78°\ 57' : AC \quad sin\ 53°\ 29' : 184 :: sin\ 47°\ 34' : AB$$

Opérant par logarithmes, il vient

Log. 184	2,2648178
Log. sin 78° 57′	9,9918727
Complément arithmétique log. sin 53° 29′	0,0949148
Somme diminuée de 10, ou *log. AC*	2,3516053

On verra de même que log. $AB = 2{,}2278260$. On en déduira que AC est de 224^P, 7, et AB, de 169^P.

II. CAS. Si l'on connaît le côté AB (*fig.* 141), le côté BC et l'angle A, on déterminera l'angle C en calculant son sinus par cette proportion : $BC : sin\ A : AB : sin\ C$.

Mais il faut remarquer, selon ce que nous avons déjà dit ci-dessus (267), que l'angle C ne sera déterminé qu'autant qu'on saura s'il doit être aigu ou obtus. Par exemple, que AB soit de 68 pieds, BC de 37, et l'angle A de 32° 28, la proportion

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

sera 37 : *sin* 32° 28 :: 68 : *sin C.* On trouvera, que ce sinus répond, dans les tables, à 80° 36′; mais comme le sinus d'un angle appartient aussi au supplément de cet angle, on ne sait si l'on doit prendre 80° 36′, ou son supplément 99° 24′; mais si l'on sait que l'angle cherché doit être aigu, alors on est sûr qu'il est, dans ce cas-ci, de 80° 36′, et le triangle a alors la figure *ABC*; si, au contraire, il doit être obtus, il sera de 99° 24′, et le triangle aura la figure *ABD*.

Avant d'établir les deux propositions qui servent à résoudre les autres cas des triangles, il convient de placer ici une proposition qui nous sera utile pour l'application de ces deux propositions.

301. *Si l'on connaît la somme de deux quantités et leur différence, on aura la plus grande de ces deux quantités, en ajoutant la moitié de la différence, à la moitié de la somme; et la plus petite, en retranchant, au contraire, la moitié de la différence, de la moitié de la somme.* En effet, puisque la somme comprend la plus grande et la plus petite, si à cette somme on ajoutait la différence, elle comprendrait alors le double de la plus grande; donc la plus grande vaut la moitié de ce tout, c'est-à-dire la moitié de la somme des deux quantités, plus la moitié de leur différence. Si de la somme on ôtait la différence, il resterait le double de la plus petite; donc la plus petite vaudrait la moitié du reste, c'est-à-dire la moitié de la somme, moins la moitié de la différence.

302. *Dans tout triangle rectiligne* ABC (fig. 154 et 155), *si de l'un des angles on abaisse une perpendiculaire sur le côté opposé; on aura toujours cette proportion : le côté* AC *sur lequel tombe, ou sur le prolongement duquel tombe la perpendiculaire, est à la somme* AB+BC *des deux autres côtés, comme la différence* AB—BC *de ces mêmes côtés, est à la différence des segmens* AD *et* DC, *ou à leur somme, selon que la perpendiculaire tombe en dedans ou au dehors du triangle.* Décrivez du point *B* comme centre, et d'un rayon égal au côté *BC*, la circonférence *CEHF*, et prolongez le côté *AB*,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

jusqu'à ce qu'il la rencontre en E. Alors AE et AC sont deux sécantes tirées d'un même point, pris hors du cercle; donc, selon ce qui a été dit (127), on aura cette proportion : $AC : AE :: AG : AF$. Or, AE est égal à $AB+BE$ ou $AB+BC$; AG est égal à $AB-BG$ ou $AB-BC$; et AF est (*fig.* 154) égal à $AD-DF$ ou (52) à $AD-DC$; donc $AC : AB+BC :: AB-BC : AD-DC$. Dans la figure 155, AF est égal à $AD+DF$, ou $AD+DC$; on a donc, dans ce cas, $AC : AB+BC :: AB-BC : AD+DC$.

303. Donc lorsqu'on connaît les trois côtés d'un triangle, on peut, par cette proposition, connaître les segmens formés par la perpendiculaire menée d'un des angles, sur le côté opposé; car alors on connaît (*fig.* 154) la somme AC de ces segmens, et la proportion qu'on vient d'enseigner, fait connaître leur différence, puisqu'alors les trois premiers termes de cette proportion sont connus ; on connaîtra donc chacun de ces segmens, par ce qui a été dit (301). Dans la figure 155, on connaît la différence des segmens AD et CD qui est le côté même AC, et la proportion détermine la valeur de leur somme.

304. Il est aisé, d'après cela, de résoudre cette question : *Connaissant les trois côtés d'un triangle, déterminer les angles.* On imaginera une perpendiculaire abaissée de l'un de ces angles, ce qui donnera deux triangles rectangles ADB, CDB. On calculera, par la proposition précédente, (303), l'un des segmens CD, par exemple, et alors, dans le triangle rectangle CDB, connaissant deux côtés BC et CD outre l'angle droit, on calculera facilement l'angle C, par ce qui a été dit (295).

EXEMPLE. Le côté AB est de 142 pieds, le côté BC de 64. et le côté AC de 184; on demande l'angle C. Je calcule la différence des deux segmens AD et DC, par cette proportion : $184 : 142+64 :: 142-64 : AD-DC$, que je trouve valoir 87, 32; donc (301) le plus petit segment CD vaut la moitié de 184, moins la moitié de 87, 32, c'est-à-dire 48,34. Cela posé, dans le triangle rectangle CDB, je cherche l'angle CBD,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

qui étant une fois connu, fera connaître l'angle C, et pour trouver cet angle CBD, je fais cette proportion (295) $BC : CD :: R : sin\ CBD$, c'est-à-dire $64 : 48, 34 :: R : sin\ CBD$. Opérant par logarithmes, on trouvera que l'angle C est de 40° 57′.

On peut résoudre ce même cas, par cette autre règle, dont nous ne donnerons la démonstration que dans la troisième partie de ce Cours. De la moitié de la somme des trois côtés, retranchez successivement chacun des deux côtés qui comprennent l'angle cherché; ce qui vous donnera deux restes. Faites ensuite cette proportion : le produit des deux côtés qui comprennent l'angle cherché, est au produit des deux restes, comme le quarré du rayon est au quarré du sinus de la moitié de l'angle cherché; ce qui, en employant les logarithmes, se réduit à cette règle. *Au double du logarithme du rayon, ajoutez les logarithmes des deux restes, et du tout retranchez la somme des logarithmes des deux côtés qui comprennent l'angle cherché; ce qui restera sera le logarithme du quarré du sinus de la moitié de l'angle cherché; prenez la moitié de ce reste, ce sera* (Arith. 230) *le logarithme de ce sinus, que vous chercherez dans les tables; ayant alors la moitié de l'angle, il n'y aura plus qu'à doubler cette moitié.* Ainsi, dans l'exemple que nous venons de proposer, j'ajouterais les trois côtés 184, 64, 142, et de 195, moitié de leur somme, je retrancherais successivement 184 et 64, ce qui me donnerait 11 et 131 pour restes. Alors ajoutant à 20,0000000 double du logarithme du rayon, les logarithmes 1,0413927, 2,1172713 des restes 11 et 131, j'aurais 23,1586640, duquel retranchant la somme 4,0709978 des logarithmes 1,8061800 et 2,2648178 des côtés 64 et 184, il me resterait 19,0876662, dont la moitié 9,5438331 est le logarithme du sinus de la moitié de l'angle C; on trouve dans les tables, que cette moitié est 20° 28′ $\frac{1}{2}$, dont le double est 40° 57′. Donc enfin $C = 40° 57'$, comme ci-dessus.

Cette proposition peut servir à calculer les distances, lorsqu'on n'a point d'instrument pour mesurer les angles; c'est le moyen de faire, par le calcul, ce qu'il était question de faire

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

par lignes, au n° (122). Le cas où l'on a à résoudre un triangle dont on connaît les trois côtés; peut arriver souvent, lorsqu'on a à calculer plusieurs triangles dépendans les uns des autres.

305. *Dans tout triangle rectiligne, la somme de deux côtés est à leur différence, comme la tangente de la moitié de la somme de deux angles opposés à ces côtés, est à la tangente de la moitié de leur différence.* Car selon ce qui a été dit (299) on a (*fig.* 156)

$$AB : \sin C :: AC : \sin B \text{ ; donc (97)}$$

$$AB + AC : AB - AC :: \sin C + \sin B : \sin C - \sin B \text{ ; or (286)}$$

$$\sin C + \sin B : \sin C - \sin B :: \operatorname{tang} \frac{C+B}{2} : \operatorname{tang} \frac{C-B}{2} ;$$

$$\text{Donc, } AB + AC : AB - AC :: \operatorname{tang} \frac{C+B}{2} : \operatorname{tang} \frac{C-B}{2}.$$

306. Cette proposition sert à *résoudre un triangle dont on connaît deux côtés et l'angle compris.* Car si l'on connaît l'angle A, par exemple, on connaît aussi la somme des deux angles B et C, en retranchant l'angle A de 180°. Donc en prenant la moitié du reste qu'on aura par cette soustraction, et cherchant sa tangente dans les tables; on aura, avec les deux côtés AB et AC supposés connus, trois termes de connus dans la proportion qu'on vient de démontrer : on pourra donc calculer le quatrième, qui fera connaître la moitié de la différence des deux angles B et C. Alors connaissant la demi-somme et la demi-différence de ces angles, on aura (301) le plus grand, en ajoutant la demi-différence à la demi-somme; et le plus petit, en retranchant au contraire la demi-différence de la demi-somme. Enfin ces deux angles étant connus, on aura nécessairement le troisième côté, par la proposition enseignée (299).

EXEMPLE. Supposons que le côté AB soit de 142 pieds, et le côté AC de 120, et l'angle A de 48°; on demande les deux angles C et B et le côté BC. Je retranche 48° de 180°; et il me reste 132° pour la somme des deux angles C et B, et par conséquent 66° pour leur demi-somme. Je fais cette proportion

$$142 + 120 : 142 - 120 :: \operatorname{tang} 66° : \operatorname{tang} \frac{C-B}{2},$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Et opérant par logarithmes, je trouve que $\frac{1}{2}(C-B)=10°\ 41'$. Ajoutant cette demi différence à la demi-somme 66°, et la retranchant de cette même demi-somme, on trouvera $C=76°\ 41'$ et $B=55°\ 19'$.

Enfin, pour avoir le côté BC, je fais cette proportion :

$$sin\ C : AB :: sin\ A : BC, \text{ ou } 76°\ 41' : 142^{p} :: sin\ 48° : BC$$

et je trouve que BC vaut $108^{p}, 4$.

307. Tels sont les moyens qu'on peut employer pour la résolution des triangles : voici maintenant quelques exemples de l'application qu'on en peut faire aux figures plus composées.

308. Supposons que C et D (*fig.* 157) sont deux objets dont on ne peut approcher, mais dont on a cependant besoin de connaître la distance. On mesurera une base AB des extrémités de laquelle on puisse appercevoir les deux objets C et D. On observera au point A les angles CAB, DAB, que font avec la ligne AB, les lignes AC, AD, qu'on imaginera aller du point A aux deux objets C et D; on observera de même au point B, les angles CBA, DBA. Cela posé, on connaît dans le triangle CBA, les deux angles CAB, CBA et le côté AB; on pourra donc calculer le côté AC, par ce qui a été dit (306). Pareillement dans le triangle ADB, on connaît les deux angles DAB, DBA et le côté AB ; ainsi on pourra, par le même principe, calculer le côté AD; alors en imaginant la ligne CD, on aura un triangle CAD, dans lequel on connaît les deux côtés AC, AD qu'on vient de calculer, et l'angle compris CAD; car cet angle est la différence des deux angles mesurés CAB, DAB; on pourra donc calculer le côté CD (306).

309. On peut aussi, par ce moyen, savoir quelle est la direction de CD, quoiqu'on ne puisse approcher de cette ligne. Car dans le même triangle CAD, on peut calculer l'angle ACD que CD fait avec AC; or si, par le point C, on imagine une ligne CZ parallèle à AB, on sait que l'angle ACZ est supplément de CAB, à cause des parallèles (40); donc prenant la différence de l'angle connu ACZ, à l'angle calculé ACD, on aura l'angle DCZ que CD fait avec CZ ou avec sa parallèle

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

AB; et comme il est fort aisé d'orienter AB, on aura donc aussi la direction de CD.

310. Nous avons dit, en parlant des lignes (3), que nous donnerions le moyen de déterminer différens points d'un même alignement, lorsque des obstacles empêchent de voir les extrémités, l'une de l'autre. Voici comment on peut s'y prendre. On choisira au point C (*fig.* 158) hors de la ligne AB dont il s'agit, et qui soit tel qu'on puisse, de ce point, appercevoir les deux extrémités A et B; on mesurera les distances AC et CB, soit immédiatement, soit en formant des triangles dont ces lignes deviennent côtés, et qu'on puisse calculer comme dans l'exemple précédent (308). Alors, dans le triangle ACB, on connaîtra les deux côtés AC et CB et l'angle compris ACB; on pourra donc (306) calculer l'angle BAC. Cela posé, on fera planter, selon telle direction CD qu'on voudra, plusieurs piquets; et ayant mesuré l'angle ACD, on connaîtra dans le triangle ACD, le côté AC et les deux angles A et ACD, on pourra donc (300) calculer le côté CD; alors on continuera de faire planter des piquets dans la direction CD, jusqu'à ce qu'on ait parcouru une longueur égale à celle qu'on a calculée, et le point D où l'on s'arrêtera, sera dans l'alignement des deux points A et B.

311. S'il n'était pas possible de trouver un point C, duquel on pût appercevoir à-la-fois les deux points A et B, on pourrait se retourner de la manière suivante. On chercherait un point C (*fig.* 159), d'où l'on pût appercevoir le point B, et un autre point E, d'où l'on pût voir le point A et le point C. Alors mesurant, ou déterminant, par quelque expédient tiré des principes précédens, les distances AE, EC et CB, on observerait au point E l'angle AEC, et au point C l'angle ECB. Cela posé, dans le triangle AEC, connaissant les deux côtés AE, EC, et l'angle compris AEC, on calculerait, par ce qui a été dit, (306), le côté AC et l'angle ECA; retranchant l'angle ECA, de l'angle observé ECB, on aurait l'angle ACB; et comme on vient de calculer AC, et qu'on a mesuré CB, on retomberait dans le cas précédent, comme si les deux points

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

A et *B* eussent été visibles du point *C*; on achèvera donc de la même manière.

312. S'il s'agit de mesurer une hauteur, et qu'on ne puisse approcher du pied, comme serait la hauteur d'une montagne (*fig.* 160), on mesurera sur le terrain une base *FG* des extrémités de laquelle on puisse appercevoir le point *A*, dont on veut connaître la hauteur; ensuite avec le graphomètre dont *BF* et *CG* représentent la hauteur, on mesurera les angles *ABC*, *ACB*, que font, avec la base *BC*, les lignes *BA*, *CA*, qu'on imagine aller des deux points *B* et *C* au point *A*; enfin à l'une des stations, en *C*, par exemple, on disposera l'instrument comme on l'a fait dans l'exemple relatif à la *figure* 150, et on mesurera l'angle *ACD*, qui est l'inclinaison de la ligne *AC*, à l'égard de l'horizon. Alors connaissant dans le triangle *ABC*, les deux angles *ABC*, *ACB* et le côté *BC*, il sera facile (300) de calculer le côté *AC*; et dans le triangle *ADC*, où l'on connaît maintenant le côté *AC*, l'angle mesuré *ACD*, et l'angle *D* qui est droit, puisque *AD* est la hauteur perpendiculaire, il sera facile de calculer *AD*; et on aura la hauteur du point *A* au-dessus du point *C*. Si l'on veut savoir ensuite quelle est la hauteur du point *A* au-dessus du point *B* ou de tout autre point environnant, il ne s'agira plus que de niveler ou de trouver la différence de hauteur entre les points *C* et *B*; c'est ce dont nous allons parler dans un moment.

313. Nous avons dit, (155) que pour calculer la surface d'un segment *AZBV* (*fig.* 74) dont le nombre des degrés de l'arc *AVB* et le rayon sont connus, il fallait calculer la surface du triangle *IAB*, pour la retrancher de celle du secteur *IAVB*; c'est une chose facile actuellement; car dans le triangle rectangle *IZB*, on connaît, outre l'angle droit, le côté *IB* et l'angle *ZIB* moitié de *AIB* mesuré par l'arc *AVB*; on calculera donc facilement (295) *IZ* qui est la hauteur du triangle, et *BZ*, qui est moitié de la base. On peut encore conclure de ce qui précède, le moyen de faire un angle ou un arc d'un

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

nombre déterminé de degrés et minutes. On tirera une droite *CB* (*fig.* 145) de grandeur arbitraire, que l'on prendra pour côté de l'angle; et ayant imaginé l'arc *BDA* décrit du point *C*, le rayon *CA* et la corde *BA*, si l'on imagine la perpendiculaire *CI*, et si l'on mesure *CB*, on connaîtra, dans le triangle rectangle *CIB*, l'angle droit, le côté *CB* et l'angle *BCI*, moitié de celui dont il s'agit; on pourra donc calculer *BI*, dont le double sera la valeur de la corde *AB*; ainsi, prenant une ouverture de compas, égale à ce double, du point *B* comme centre, on marquera le point *A* sur l'arc *BDA*, et tirant *CA*, on aura l'angle demandé.

Du Nivellement.

314. Plusieurs observations démontrent que la surface de la terre n'est point plane, comme elle le paraît, mais courbe et même sphérique, ou, à très-peu de chose près, sphérique. Lorsqu'un vaisseau commence à découvrir une côte, les premiers objets qu'on remarque sont les objets les plus élevés. Or si la surface de la terre était plane, en même temps qu'on découvre la tour *B* (*fig.* 161), on devrait appercevoir tout le terrain adjacent *ABC*. Ce qui fait qu'il n'en est pas ainsi, c'est que la surface *DAC* de la terre s'abaisse de plus en plus à l'égard de la ligne horizontale *DB* du vaisseau. Deux points *D* et *B* peuvent donc paraître dans une même ligne horizontale *DB*, quoiqu'ils soient fort inégalement éloignés de la surface, et par conséquent du centre *T* de la terre. Ce qu'on appelle *ligne horizontale*, c'est une ligne tirée dans un plan qui touche la surface de la mer, ou parallèlement à ce plan qu'on appelle *plan horizontal;* et une ligne *verticale* est une perpendiculaire à un plan horizontal. Ce qu'on appelle *niveler*, c'est déterminer de combien un objet est plus éloigné qu'un autre, à l'égard du centre de la terre.

315. Lorsque l'un de ces objets, vu de l'autre, paraît dans la ligne horizontale qui part de celui-ci, alors ils sont différemment éloignés du centre de la terre. Pour connaître cette

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

différence, il faut remarquer que la distance à laquelle on peut appercevoir un objet terrestre, ou du moins que la distance à laquelle on observe dans le nivellement, est toujours assez petite, pour que cette distance *DI* (*fig.* 162), mesurée sur la surface de la terre, puisse être regardée comme égale à la tangente *DB*; or on a vu (129) que la tangente *DB* était moyenne proportionnelle, entre toute sécante menée du point *B*, et la partie extérieure *BI* de cette même sécante; mais à cause de la petitesse de l'arc *DI*, on peut regarder la sécante qui passe par le point *B* et le centre *T*, comme égale au diamètre, c'est-à-dire au double de *IT*, ou au double de *DT*; donc *BI* sera le quatrième terme de cette proportion 2 *DT* : *DI* :: *DI* : *BI*. Si *DI* mesuré sur la surface de la terre, est de 6000 pieds; comme le rayon de la terre est de 19 611 500 pieds, on trouvera *BI* par cette proportion, 39223000 : 6000 : 6000 : *BI*, en faisant le calcul, on trouve $0^{P},91783$, qui reviennent à $11^{Po}12^{pts}$, c'est-à-dire, qu'entre deux objets *B* et *D* éloignés de mille toises, et qui seraient dans une même ligne horizontale, la différence *BI* du niveau ou de distance au centre de la terre, est de $11^{Po}12^{pts}$.

316. Quand on a calculé une différence de niveau, comme *BI*, on peut calculer plus facilement celles qui répondent à une moindre distance, en faisant attention que les distances *BI*, *bi* sont presque parallèles et égales aux lignes *DQ*, *Dq*, qui (170) sont entre elles comme les quarrés des cordes ou des arcs *DI*, *Di*; car ici, les cordes et les arcs peuvent être pris l'un pour l'autre; ainsi pour trouver la différence *bi* de niveau, qui répondrait à 5000 pieds, je ferai cette proportion : $\overline{6000}^{2} : \overline{5000}^{2} :: 0,91783 : bi$, que je trouve en faisant le calcul de 0,63738 ou $7^{P}7^{l}9^{pts}\ \frac{2}{5}$.

317. Ces notions supposées, pour connaître la différence de niveau de deux points *B* et *A* (*fig.* 163) qui ne sont pas dans la ligne horizontale menée par l'un d'entre eux, on emploiera un instrument propre à mesurer les angles, que l'on disposera

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

comme il a été dit dans l'exemple relatif à la *figure* 150 ; on observera l'angle *BCD*, et ayant mesuré la distance *CD* ou *CI* à l'aide d'une chaîne qu'on tend horizontalement et à diverses reprises, au-dessus du terrain *AVB*, on pourra, dans le triangle *CDB*, considéré comme rectangle en *D*, calculer *BD*, auquel on ajoutera la hauteur *CA* de l'instrument, et la différence *DI* de niveau, calculée par ce qui vient d'être dit (315 et 316). Mais comme cette manière d'opérer suppose une grande exactitude dans la mesure de l'angle *BCD*, et un instrument bien exact, on préfère souvent d'aller même au but, par une voie plus longue, que nous allons décrire.

318. On emploie, à cet effet, un instrument tel que le représente la *figure* 164. C'est un tuyau creux de fer blanc ou d'un autre métal, coudé en *A* et en *B*; dans les deux parties éminentes et égales *AC*, *BD*, on fait entrer deux tuyaux de verre *I* et *K*, mastiqués avec les parties *AC* et *BD*. On remplit d'eau tout le canal, jusqu'à ce qu'elle s'élève dans les deux tuyaux de verre; quand elle est à égale hauteur dans chacun, on est sûr que la ligne qui passe par la superficie de l'eau élevée dans chacun de ces tuyaux, est une ligne horizontale, et on l'emploie de la manière suivante. On fait plusieurs stations, par exemple, aux points *D*, *C*, *B* (*fig.* 165) : ayant fait élever aux points *A* et *N*, deux jalons, l'observateur, qui est en *D*, vise successivement à chacun de ces deux jalons, et fait marquer les deux points *E* et *F*, qu'on nomme point de *mire*. Faisant ensuite planter un autre jalon en quelque point *P* au-là de *C*, on fait marquer de même les deux points de mire *G* et *H*; on mesure, à chaque station, les hauteurs *AE*, *GF*, *IH*, etc., et après leur avoir appliqué (316) la correction de niveau qui convient aux distances *KE*, *KF*, *LG*, etc., estimées grossièrement, on ajoute ces hauteurs, et on a la différence de niveau entre *A* et *B*. Si dans le cours de ces opérations, on n'allait pas toujours en montant, on sent bien qu'au lieu d'ajouter, il faudrait retrancher les quantités dont on a descendu. On peut voir, sur cette matière, *le Traité du Nivellement* de M. PICARD, *Paris*, 1728.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

Notions préliminaires.

319. Un *triangle sphérique* est une partie de la surface de la sphère, comprise entre trois arcs de cercle qui ont tous trois pour centre commun le centre de la sphère, et qui sont par conséquent trois arcs de grand cercle de cette même sphère. Si des trois angles A, F, G, du triangle sphérique AFG (*fig.* 166), on imagine trois rayons AC, FC, GC menés au centre C de la sphère, on peut se représenter l'espace $CAFG$, comme une pyramide triangulaire qui a son sommet C au centre de la sphère, et dont la base AFG est courbe, et fait partie de la surface de cette sphère. Les arcs AF, FG, AG, qui sont les côtés curvilignes de la base, sont les rencontres de la surface de la sphère avec les plans ACF, FCG, GCA, qui forment les faces de cette pyramide. L'angle A compris entre les deux arcs AF, AG, se mesure par l'angle rectiligne IAK, compris entre les tangentes AI, AK de ces deux arcs. Chacune de ces tangentes est dans le plan de l'arc auquel elle appartient, et elles sont toutes deux perpendiculaires au rayon CA (48), qui est l'intersection des deux plans ACF, ACG; donc (191) l'angle compris entre ces deux tangentes, est le même que l'angle compris entre les plans ACF, ACG des deux arcs; donc

320. 1°. *Un angle sphérique quelconque* FAG, *n'est autre chose que l'angle compris entre les plans de ses deux côtés* AF, AG.

321. 2°. *Les angles que forment les arcs de grand cercle qui se rencontrent sur la surface d'une sphère, ont les mêmes pro-*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

priétés que les angles plans; c'est-à-dire les propriétés énoncées (192, 193 et 194).

322. Donc *deux côtés d'un triangle sphérique sont perpendiculaires entre eux, quand les plans qui les renferment sont perpendiculaires entre eux.* Si l'on conçoit les deux plans *ACG*, *ACF*, prolongés indéfiniment dans tous les sens, il est visible que la section que chacun formera dans la sphère, sera un grand cercle, et que ces deux grands cercles se couperont mutuellement en deux parties égales aux points *A* et *D* de l'intersection commune *AC* prolongée; car les deux plans passant par le centre, ont pour intersection commune, un diamètre de la sphère.

323. Donc *deux côtés contigus* AG, AF *d'un triangle sphérique, ne peuvent plus se rencontrer qu'à une distance* AGD *ou* AFD *de* 180°, *depuis leur origine.*

324. Si l'on prend les deux arcs *AB*, *AE*, chacun de 90° et que par les deux points *B* et *E* et le centre *C*, on conduise un plan dont la section avec la sphère, forme le grand cercle *BENMO*; je dis que ce cercle sera perpendiculaire aux deux cercles *ABD*, *AED*. Car si l'on tire les rayons *BC*, *EC*, les angles *ACB*, *ACE*, qui ont pour mesure les arcs *AB*, *AE* de 90° chacun, seront droits; donc la ligne *AC* est perpendiculaire aux deux droites *CE*, *BC*; donc (180) elle est perpendiculaire à leur plan, c'est-à-dire au cercle *BENMO*; donc les deux cercles *AED*, *ABD*, qui passent par la droite *AD*, sont aussi perpendiculaires à ce même cercle (184); donc réciproquement ce cercle leur est perpendiculaire. Comme nous n'avons supposé aucune grandeur déterminée à l'angle *GAF* ou *EAB*, il est visible que la même chose aura toujours lieu, quelle que soit la grandeur de cet angle, et que par conséquent le cercle *BENMO* est perpendiculaire à tous les cercles qui passent par la droite *AD*. La droite *AD* s'appelle *l'axe du cercle BENMO*; et les deux points *A* et *D*, qui sont chacun sur la surface de la sphère, sont dits les *pôles* de ce même cercle.

325. Concluons donc, 1°. que *les pôles d'un grand cercle quelconque, sont également éloignés de tous les points de la cir-*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

conférence de ce grand cercle ; et leur distance à chacun de ces points, mesurée par un arc de grand cercle, est un arc de 90°. Et réciproquement, *si un point quelconque* A *de la surface de la sphère se trouve éloigné de* 90°, *de deux points* B *et* E *pris sur un arc de grand cercle, ce point* A *est le pôle de ce grand cercle.*

326. 2°. Que *quand un arc* BF *de grand cercle, est perpendiculaire sur un autre arc* BE *de grand cercle, il passe nécessairement par le pôle de celui-ci, ou du moins il y passerait, étant prolongé suffisamment.*

327. 3°. Que *si deux arcs* BF, EG, *de grand cercle, sont perpendiculaires à un troisième arc de grand cercle* BE, *le point* A *où ils se rencontrent, est le pôle de celui-ci.*

328. Puisque les deux droites *BC*, *EC*, sont perpendiculaires au même point *C* de la droite *AD*, l'angle *BCE* qu'elles forment, est donc (191) la mesure de l'inclinaison des deux plans *ABD*, *AED*, ou de l'angle sphérique *EAB* ou *GAF* ; donc *un angle sphérique* GAF *a pour mesure l'arc* BE *de grand cercle, que ses côtés (prolongés s'il est nécessaire) comprennent à la distance de* 90° *depuis le sommet.*

329. Si l'on conçoit que le demi-cercle *ABD* tourne autour du diamètre *AD*, et que de différens points *R*, *B*, *H* de la circonférence, on abaisse sur *AD*, les perpendiculaires *RQ*, *BC*, *HP* ; il est évident, 1°. que *chacun de ces points décrit une circonférence de cercle, qui a pour centre le point de* AD *sur lequel tombe cette perpendiculaire, et pour rayon cette perpendiculaire même.* 2°. Que *les arcs* RS, BE, HL *décrits dans ce mouvement, et interceptés entre les deux plans* ABD, AED, *sont tous d'un même nombre de degrés ;* car si l'on tire les lignes *SQ*, *EC*, *LP*, elles seront toutes perpendiculaires sur *AD*, puisqu'elles ne sont autre chose que les rayons *RQ*, *BC*, *HP*, parvenus dans le plan *AED* ; donc (191) chacun des angles *RQS*, *BCE*, *HPL*, ou chacun des arcs *RS*, *BE*, *HL*, mesure l'inclinaison des deux plans *ABD*, *AED* ; donc tous ces arcs sont d'un même nombre de degrés. 3°. *Les longueurs de ces*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

arcs RS, BE, HL, *sont proportionnelles aux sinus des arcs* AR, AB, AH, *qui mesurent leurs distances à un même pôle A; ou, ce qui revient au même, aux cosinus de leurs distances au grand cercle auquel ils sont parallèles.* Car il est évident que ces arcs étant semblables, sont proportionnels à leurs rayons *RQ*, *Bc*, *HP*, qui sont évidemment les sinus des arcs *AR*, *AB*, *AH*, ou les cosinus des arcs *BR*, o, et *BH*.

330. Si l'on imagine que la sphère *ABDMOBN* représente la terre, et *AD* son axe, ou celui de ses diamètres, autour duquel elle fait sa révolution journalière; le cercle *BENMO* également éloigné des deux pôles *A* et *D*, est ce qu'on appelle l'*équateur*. Les cercles *ABD*, *AED*, et tous leurs semblables, dont les plans passent par l'axe *AD*, se nomment des *méridiens;* les petits cercles dont *RS*, *HL* représentent ici des parties, se nomment *parallèles à l'équateur*, ou simplement des *parallèles*. Les arcs *BH*, *EL*, qui mesurent la distance d'un parallèle jusqu'à l'équateur, s'appellent la *latitude* de ce parallèle ou d'un lieu qui serait situé sur sa circonférence. Pour déterminer la position d'un lieu sur la terre, on le rapporte à deux cercles fixes perpendiculaires entre eux, tels que *ABDM*, *BENMO*, en cette manière. On prend pour cercle de comparaison, un méridien *ABDM* qui passe par un lieu connu et déterminé : et pour fixer la position d'un autre lieu *L*, on imagine par celui-ci, un autre méridien *AELD*. Il est visible que la position de ce méridien est connue, si l'on sait quel est le nombre de degrés de l'arc *BE* compris entre le point *B* et le point *E*, où ce même méridien rencontre l'équateur. Le point *B* étant donc le point fixe auquel on rapporte tous les autres méridiens, l'arc *BE* s'appelle alors la *longitude* (*) du méridien *AED*, et de tous les lieux situés sur ce même méridien; il ne

(*) On est dans l'usage de compter les longitudes, d'occident en orient; le cercle d'où l'on part pour compter les longitudes, s'appelle *premier Méridien :* les Français ont choisi celui qui passe par l'île de Fer, la plus occidentale des Canaries.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

s'agit donc plus, pour déterminer la position du lieu L, que de connaître le nombre des degrés de l'arc EL, ce qu'on appelle la *latitude* du lieu L, et qui est aussi la latitude de tous les lieux situés sur le parallèle dont HL fait partie. On voit par là que tous les lieux situés sur un même méridien, ont une même longitude, et que tous ceux qui sont situés sur un même parallèle ont une même latitude; mais il n'y a qu'un seul point L (au moins dans une même moitié de la sphère, ou dans un même hémisphère) qui puisse avoir en même temps une longitude et une latitude proposées. La position d'un lieu est donc déterminée quand on connaît sa longitude et sa latitude; mais pour la latitude, il faut savoir de plus, vers quel pôle on la compte. Ainsi, supposant que le pôle A soit celui du midi ou le pôle *austral*, et D le pôle du nord ou le pôle *boréal*, il faut savoir si la latitude est australe ou boréale, car on conçoit aisément qu'il peut y avoir, et qu'il y a, en effet, un point dans l'hémisphère austral qui est situé de la même manière que le point L l'est dans l'hémisphère boréal. La longueur terrestre d'un degré de grand cercle est de 20 lieues marines, c'est-à-dire de 20 lieues de 2853 toises chacune; ainsi, si l'on s'avance sur l'équateur, à chaque 20 lieues on change d'un degré en longitude; et si l'on marche sur un même méridien, à chaque 20 lieues on change d'un degré en latitude. Mais si l'on marche sur un parallèle à l'équateur, il est évident qu'à chaque 20 lieues on change de plus d'un degré en longitude, et d'autant plus que le parallèle sur lequel on s'avance est plus éloigné de l'équateur, c'est-à-dire, est par une plus grande latitude. Pour trouver à combien de degrés de longitude répond un certain nombre de lieues HL, parcourues sur un parallèle connu, il faut faire cette proportion : *Le cosinus de la latitude est au rayon, comme le nombre de lieues parcourues sur le parallèle, est à un quatrième terme*, qui sera le nombre de lieues de l'arc correspondant BE de l'équateur, qui marque le changement en longitude. C'est une suite immédiate de ce qui a été dit (329). Par exemple, supposant que, par la latitude de 47° 20′, on ait couru 18 lieues sur un parallèle à l'équateur, si l'on demande combien on a changé

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

en longitude, on fera cette proportion : *cos* 47° 20′ ou *sin* 42° 40′ : *R* :: 18′ est à un quatrième terme qu'on trouvera de 26′, 56″ lesquelles étant divisées par 20, à raison de 20 lieues par degré, donnent, 1°, 328, 1° 19′ 41″ à peu près, pour le changement en longitude. Revenons aux propriétés de la sphère.

331. Supposons que *AFIG*, *BFHG* (*fig.* 167) sont deux grands cercles de la sphère, et *ABDEIH*, un troisième grand cercle qui coupe perpendiculairement ces deux-là; il suit de ce qui a été dit (326), que le cercle *ABDEIH*, passe par les pôles des deux cercles *AFIG*, *BFHG*; soient *D* et *E* ces pôles, et *DK*, *EL* les deux axes; puisque les angles *ACD*, *BCE* sont droits, si de chacun on retranche l'angle commun *BCD*, les angles restans *ACB*, *DCE* seront égaux, et par conséquent aussi les arcs *AB*, *DE*; donc *l'arc* DE *qui mesure la plus courte distance des pôles de deux grands cercles est égal à l'arc* AB *qui mesure le plus petit des deux angles que l'un de ces cercles fait avec l'autre.*

Propriétés des Triangles sphériques.

332. Il est évident que par deux points pris sur la surface d'une sphère, on ne peut faire passer qu'un seul arc de grand cercle; car ce grand cercle est l'intersection de la sphère, par un plan qui est assujéti à passer par le centre; or il est évident que par trois points donnés on ne peut faire passer qu'un seul plan.

333. Quoiqu'un triangle sphérique puisse avoir quelques-unes de ses parties de plus de 180°, néanmoins nous ne considérerons que ceux dont chacune des parties est moindre que 180°, parce qu'on peut toujours connaître l'un de ces triangles par l'autre. Par exemple, si l'on se représente le triangle *ABEMV* (*fig.* 166) formé par les arcs quelconques *AB*, *AV*, et par l'arc *BMV* de plus de 180°; en imaginant le cercle entier *BMVB*, on pourra substituer le triangle *BOVA* dont l'arc *BOV* est moindre que 180°, au triangle *ABEMV*;

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

parce que les parties du premier sont ou égales à celles du second, ou leur supplément à 180° ou à 360°; ensorte que l'un de ces triangles est connu par l'autre.

334. *Chaque côté d'un triangle sphérique est plus petit que la somme des deux autres.* Cela est évident.

335. *La somme des trois côtés d'un triangle sphérique est toujours moindre que* 360°. Car il est évident (334) que FG est plus petit que $AG+AF$; or $AG+AF$ ajoutés avec $DG+DF$ ne font que 360°; donc $AG+AF$ ajoutés avec FG, feront moins que 360°.

336. *Soit* ABC (fig. 168) *un triangle sphérique quelconque;* DEF *un autre triangle sphérique tel que le point* A *soit le pôle de l'arc* EF *; le point* C, *le pôle de l'arc* DE; *et le point* B, *le pôle de l'arc* DF *; chaque côté du triangle* DEF *sera supplément de l'angle qui lui est opposé dans le triangle* ABC, *et chaque angle de ce même triangle* DEF *sera supplément du côté qui lui est opposé dans le triangle* ABC. Car puisque le point A est le pôle de l'arc EF, le point E doit être éloigné du point A de 90° (325); par la même raison, puisque C est le pôle de l'arc DE, le point E doit être à 90° du point C; donc (325) le point E est le pôle de l'arc AC; on prouvera de même que D est le pôle de BC, et F, le pôle de AB. Cela posé, prolongeons les arcs AC, AB jusqu'à ce qu'ils rencontrent l'arc EF en G et H. Puisque le point E est le pôle de ACG, l'arc EG est de 90°; et puisque F est le pôle de ABH, l'arc FH est de 90°; donc $EG+FH$ ou $EG+FG+GH$ ou $EF+GH$ est de 180°; or GH est la mesure de l'angle A (328), puisque les arcs AG, AH, sont de 90°; donc $EF+A$ est de 180°; donc EF est supplément de l'angle A. On prouvera de la même manière, que DE est supplément de C, et DF supplément de B. Prolongeons l'arc AB jusqu'à ce qu'il rencontre DF en I. Les deux arcs AH et BI sont chacun de 90°, puisque A et B sont les pôles des arcs EF, DF; donc $AH+BI$ ou $AH+AB+AI$ ou $HI+AB$ est de 180°; mais HI est la mesure de l'angle F (328), puisque le point F est pôle de HI; donc $F+AB$ est

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

de 180° ; donc F est supplément de AB. On prouvera de même que E est supplément de AC, et D supplément de BC.

337. Concluons de là que la *somme des trois angles d'un triangle sphérique vaut toujours moins que* 540°, *ou que* 3 *fois* 180°, *et plus que* 180°. Car la somme des trois angles A, B, C avec la somme des trois côtés EF, DF, DE, vaut 3 fois 180° (336) ; donc, 1°. la somme des trois angles A, B, C est moindre que 3 fois 180° ou que 540° ; 2°. la somme des trois côtés EF, DF, DE, est (335) moindre que 360° ou deux fois 180° ; donc il reste plus de 180° pour la somme des trois angles A, B, C.

338. *Un triangle sphérique peut donc avoir ses trois angles droits, et même ses trois angles obtus.* On voit donc que la somme des trois angles d'un triangle sphérique n'est pas une quantité qui soit toujours la même comme dans les triangles rectilignes ; et par conséquent on ne peut pas, de deux angles connus, conclure le troisième.

339. Comme les parties du triangle DEF sont, chacune, supplément de celle qui lui est opposée dans le triangle ABC, il s'ensuit que l'un de ces triangles peut être résolu par l'autre, puisque connaissant les parties de l'un, on a celles de l'autre. Nous ferons usage de cette remarque ; et comme les deux triangles ABC, DEF reviendront souvent, nous nommerons le triangle DEF *triangle supplémentaire*, pour abréger le discours.

340. *Deux triangles sphériques tracés sur une même sphère, ou sur des sphères égales, sont égaux ; 1°. lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun ; 2°. lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun ; 3°. lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun ; 4°. lorsqu'ils ont les trois angles égaux chacun à chacun.* Les trois premiers cas se démontrent de la même manière que pour les triangles rectilignes. (*Voyez* 80, 81 et 83.) A l'égard du quatrième, comme il n'a pas lieu pour les triangles rectilignes, il exige une démonstration à part ; la voici : Concevez que pour chacun des deux triangles ABC et abc (*fig.* 168 et 169) on ait

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

tracé les triangles supplémentaires *DEF* et *def*. Si les angles *A*, *B*, *C* sont égaux aux angles *a*, *b*, *c* chacun à chacun, les côtés *EF*, *DF*, *DE* supplémens des premiers angles, seront donc égaux aux côtés *ef*, *df*, *de*, supplémens des derniers; donc, par le troisième des quatre cas qu'on vient d'énoncer, ces deux triangles *DEF* et *def* seront parfaitement égaux; donc les angles *D*, *E*, *F* seront égaux aux angles *d*, *e*, *f*, chacun à chacun; donc les côtés *BC*, *AC*, *AB*, supplémens de ces trois premiers angles, seront égaux aux côtés *bc*, *ac*, *ab*, supplémens des trois derniers.

341. *Dans un triangle sphérique isoscèle, les deux angles opposés aux côtés égaux, sont égaux; et réciproquement si deux angles d'un triangle sphérique sont égaux, les côtés qui leur sont opposés, sont aussi égaux.* Prenez sur les côtés égaux *AB*, *AC* (*fig.* 170), les arcs égaux *AD*, *AE*, et concevez les arcs de grand cercle *DC*, *BE*; les deux triangles *ADC*, *AEB* qui ont alors un angle commun compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, seront égaux (340). Donc l'arc *BE* est égal à l'arc *CD*; donc les deux triangles *BDC* et *BEC* sont égaux, puisqu'outre *DC* égal à *BE*, comme on vient de le voir, ils ont de plus le côté *BC* commun, et que d'ailleurs les parties *BD*, *CE* sont égales, puisque ce sont les restes de deux arcs égaux *AB*, *AC* dont on a retranché des arcs égaux *AD*, *AE*. De ce que ces deux triangles sont égaux, on peut donc conclure que l'angle *DBC* ou *ABC* est égal à l'angle *ECB* ou *ACB*. Quant à la seconde partie de la proposition, elle est une suite de la première, en imaginant le triangle supplémentaire; car si les deux angles *B* et *C* (*fig.* 168) sont égaux; leurs supplémens *DF*, *DE* seront égaux; le triangle *DEF* sera donc isoscèle; donc les angles *E* et *F* seront égaux; donc leurs supplémens *AC* et *AB* seront égaux.

342. *Dans tout triangle sphérique* ABC (fig. 171), *le plus grand côté est opposé au plus grand angle, et réciproquement.* Si l'angle *B* est plus grand que l'angle *A*, on pourra conduire en dedans du triangle un arc *BD* de grand cercle, qui fasse l'angle *ABD* égal à l'angle *BAD*, et alors *BD* sera égal à *AD*,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

(341); or $BD+DC$ est plus grand que BC; donc aussi $AD+DC$ ou AC est plus grand que BC. La réciproque se démontrera facilement, et d'une manière analogue, en employant le triangle supplémentaire.

Les dernières propositions que nous venons d'établir, sont utiles pour se diriger dans la résolution des triangles sphériques, où tout ce que l'on cherche se détermine par des sinus ou des tangentes, qui, appartenant indifféremment à des arcs plus petits que 90°, ou à leurs supplémens, peuvent souvent laisser dans l'incertitude sur celui de ces deux arcs qu'on doit adopter; mais ces connaissances ne sont pas suffisantes pour découvrir dans quels cas ce que l'on cherche doit être plus grand ou plus petit que 90°, et dans quels cas il peut être indifféremment plus grand ou plus petit.

Moyens de reconnaître dans quels cas les angles ou les côtés qu'on cherche dans les Triangles-sphériques-rectangles, doivent être plus grands ou plus petits que 90°.

343. Quoique deux angles et même les trois angles d'un triangle-sphérique-rectangle puissent être droits, et que par conséquent il puisse y avoir deux et trois hypoténuses, néanmoins nous n'appellerons *hypoténuse*, que le côté opposé à l'angle droit que nous considérerons; et nous appellerons les deux autres angles, *angles obliques*.

344. *Chacun des deux angles obliques d'un triangle-sphérique-rectangle est de même espèce que le côté qui lui est opposé; c'est-à-dire qu'il est de* 90°, *si ce côté est de* 90°; *et plus grand ou plus petit que* 90°, *selon que ce côté est plus grand ou plus petit que* 90°. Que B (*fig.* 172) soit l'angle droit; si BC est moindre que 90°, en le prolongeant jusqu'en D, de manière que BD soit de 90°, le point D sera le pôle de l'arc AB (326); donc l'arc de grand cercle DA, conduit à l'extrémité du côté BA, sera perpendiculaire sur BA; donc l'angle DAB sera droit; donc CAB est moindre que 90°. On prouvera, d'une manière semblable, les deux autres cas.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

345. *Si les deux côtés, ou les deux angles d'un triangle sphérique-rectangle sont tous deux plus petits ou tous deux plus grands que* 90°, *l'hypoténuse sera toujours plus petite que* 90°; *et au contraire, elle sera plus grande que* 90°, *si les deux côtés ou les deux angles sont de différente espèce.* Car, en supposant la même construction que dans la proposition précédente, si *AB* est aussi moindre que 90°, l'angle *ADB* qui doit (344) être de même espèce que le côté *AB*, sera moindre que 90°; par la même raison, l'angle *ACB* sera moindre que 90°; donc *ACD* sera obtus, et par conséquent plus grand que *ADC*; donc *AD* sera plus grand que *AC* (342); or *AD* est de 90°; donc *AC* est moindre que 90°.

Pareillement, si les deux côtés *BC* et *AB* de l'angle droit *B* (*fig.* 173), sont tous deux plus grands que 90°, l'hypoténuse *AC* sera encore plus petite que 90°; car si l'on prend *BD* de 90°, *D* étant le pôle de l'arc *AB*, *DA* sera de 90°; or, puisque *AB* est de plus de 90°, l'angle *ACB* sera obtus (344); il en sera de même, et par la même raison, de l'angle *ADB*; donc *ADC* est aigu, et par conséquent plus petit que *ACD*; donc aussi *AC* sera plus petit que *AD* (342); c'est-à-dire moindre que 90°. Si *AB* (*fig.* 174) est moindre que 90°, et *BC* plus grand, alors l'angle *ACB* qui est de même espèce que *AB* (344), sera aigu; il en sera de même de l'angle *ADB*; donc *ADC* sera obtus, et par conséquent plus grand que *ACD*; donc *AC* sera plus grand que *AD*; c'est-à-dire plus grand que 90°. Quant aux angles comparés à l'hypoténuse, la vérité de cette proposition suit de ce que ces angles sont, chacun, de même espèce que le côté qui lui est opposé (344).

346. Donc, 1°. *selon que l'hypoténuse sera plus petite ou plus grande que* 90°, *les côtés seront de même ou de différente espèce entre eux; et il en sera de même des angles obliques.*

347. 2°. *Selon que l'hypoténuse et un côté seront de même ou de différente espèce, l'autre côté sera plus petit ou plus grand que* 90°, *et il en sera de même de l'angle opposé à ce dernier côté.*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Principes pour la résolution des Triangles-sphériques-rectangles.

348. La résolution des triangles-sphériques-rectangles ne dépend que de trois principes que nous allons exposer successivement, et que nous éclaircirons ensuite par des exemples. Le premier de ces principes est commun aux triangles-rectangles et aux triangles obliquangles. Chaque cas des triangles-sphériques-rectangles peut-être résolu par une seule proportion, que l'on trouvera toujours par l'un ou l'autre des trois principes suivans.

349. *Dans tout triangle-sphérique* ABC (fig. 175), *on a toujours cette proportions : Le sinus d'un des angles est au sinus du côté opposé à cet angle, comme le sinus d'un autre angle est au sinus du côté opposé à celui-ci.* Soit H le centre de la sphère : BH, AH, CH, trois rayons : du sommet de l'angle A abaissons sur le plan du côté opposé BC la perpendiculaire AD, et par cette ligne conduisons deux plans ADE, ADF, de manière que les rayons BH, CH leur soient perpendiculaires respectivement; les lignes AE, DE, sections des deux plans ABH, CBH, avec le plan ADE, seront perpendiculaires sur l'intersection commune BH de ces deux plans, et par conséquent l'angle AED sera l'inclinaison de ces deux plans (191); donc il sera égal à l'angle sphérique ABC (320); par la même raison l'angle AFD sera égal à l'angle-sphérique ACB. Cela posé, les deux triangles ADE, ADF étant rectangles en D, on aura (295)

$$R : \sin AED :: AE : AD \text{ et } \sin AFD : R :: AD : AF;$$

donc (100), $\sin AFD : \sin AED :: AE : AF$.

Or les lignes AE, AF étant des perpendiculaires abaissées de l'extrémité A des arcs AB, AC sur les rayons BH, CH qui passent par l'autre extrémité de ces arcs, sont (269) les sinus de ces mêmes arcs; donc et à cause que les angles AED et AFD

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

sont égaux aux angles B et C, on a enfin $\sin C : \sin B :: \sin AB : \sin AC$.

350. Si l'un des angles comparés est droit; comme son sinus est alors égal au rayon (274), la proportion peut être énoncée ainsi : *Le rayon est au sinus de l'hypoténuse, comme le sinus d'un des angles obliques est au sinus du côté opposé.*

351. *Dans tout triangle-sphérique-rectangle, le rayon est au sinus d'un des côtés de l'angle droit, comme la tangente de l'angle oblique opposé à l'autre côté de l'angle droit, est à la tangente de ce même côté.* Soit B (*fig.* 176) l'angle droit : de l'extrémité C du côté BC, menons CI perpendiculaire sur le rayon BD de la sphère; et par cette droite CI, conduisons le plan CIE de manière que le rayon DA lui soit perpendiculaire. Alors l'angle IEC sera égal à l'angle-sphérique A : et puisque les deux plans DBC, DBA sont supposés perpendiculaires entre eux, la ligne CI perpendiculaire à leur commune section DB, sera (185) perpendiculaire au plan DBA, et par conséquent (178) à la droite IE. Les triangles-rectangles DIC, EIC, donnent (296)

$$DI : CI :: R : \text{tang } IDC, \quad CI : IE :: \text{tang } IEC : R. \text{ Donc (100)}$$

$DI : IE :: \text{tang } IEC : \text{tang } IDC :: \text{tang } A : \text{tang } BC$, puisque l'angle IDC a pour mesure l'arc BC. Or, dans le triangle-rectangle IED on a (295) $DI : IE :: R : \sin IDE$ ou $\sin AB$; donc à cause du rapport commun de DI à IE, on aura, $R : \sin AB :: \text{tang } A : \text{tang } BC$.

352. *Dans tout triangle-sphérique-rectangle* ABC (fig. 177), *si l'on prolonge les deux côtés* BC, AC *d'un des angles obliques jusqu'en* D *et* E, *de manière que* BD, AE *soient chacun de* 90°, *et qu'on joigne les extrémités D et E par un arc de grand cercle* DE; *on aura un nouveau triangle* CED *rectangle en* E, *dont les parties seront, ou égales à celles du triangle* ABC, *ou leur complément.* Imaginons les côtés AB et DE prolongés jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en F; puisque BD est de 90° et perpendiculaire sur AB, le point D est le pôle de l'arc

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

AB (326); donc DF est de 90°, et perpendiculaire sur AF; par la même raison, AF est de 90°. Puisqu'on a fait AE de 90°, et que AF est aussi de 90°, le point A est le pôle de DF (325); donc AE est perpendiculaire sur DF, et par conséquent le triangle CED est rectangle en E. Cela posé, il est évident que l'angle E est égal à l'angle B, et que l'angle DCE est égal à l'angle ACB (321); que le côté DC est complément de CB; que DE complément de EF, qui (328) est la mesure de l'angle CAB, est complément de cet angle CAB, que CE est complément de AC; et que l'angle D qui (328) a pour mesure BF complément de AB, est complément de AB; donc, en effet, les parties du triangle DCE sont ou égales aux parties du triangle ACB; ou sont leur complément. On démontrerait la même chose du triangle AHI qu'on formerait, en prolongeant de même au-dessus de A les côtés BA et AC de l'angle oblique BAC, jusqu'à ce qu'ils fussent de 90° chacun.

353. On voit donc que dès qu'on connaît trois choses dans le triangle ACB, on connaît aussi trois choses dans chacun des deux triangles CED, AHI. On voit en même temps, que les trois autres parties qui resteraient à trouver dans le triangle ABC, feraient connaître les trois autres parties de chacun de ces deux triangles CED, AHI, et réciproquement. Donc, lorsqu'ayant à résoudre le triangle ABC, on ne pourra faire usage immédiatement, ni de l'un ni de l'autre des deux principes posés (349 et 351), on aura recours à l'un ou à l'autre des deux triangles CED, AHI; et alors l'application de l'un ou de l'autre de ces deux principes, aura lieu, et fera connaître les parties de ces triangles qui donneront ensuite la connaissance des parties du triangle ABC, par le principe qu'on vient de poser en dernier lieu. Nous nommerons dorénavant les triangles CED, AHI, *triangles complémentaires*. Si les côtés AB, AC, ou AC, BC que la proposition démontrée (352) suppose tous deux plus petits que 90°, étaient tous deux plus grands, ou l'un plus grand et l'autre plus petit que 90°, comme il arrive dans le triangle FBC (*fig.* 178); au lieu de calculer ce triangle FBC, on cal-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

culerait le triangle ABC formé par les arcs FC, FC prolongés jusqu'à 180°; les parties de celui-ci étant connues, feraient connaître celles du triangle FBC. Au reste, il n'est pas indispensable d'avoir recours à cet expédient; la proportion que donnera la figure 177 a toujours lieu, soit que les parties du triangle soient plus petites que 90°, soit qu'elles soient plus grandes.

Remarquons, à l'égard des triangles-sphériques-rectangles, comme nous l'avons fait pour les triangles-rectilignes-rectangles, que l'angle droit étant un angle connu, il suffit, pour être en état de résoudre un triangle-rectangle, de connaître deux choses outre l'angle droit. Passons aux exemples.

EXEMPLE I. Supposons le côté BC (*fig.* 177) de 15° 17′, l'angle A de 23° 42′; on demande l'hypoténuse AC. Pour trouver l'hypoténuse, on peut faire immédiatement usage du principe donné (349), en faisant cette proportion, *sin* A : *sin* BC :: R : *sin* AC, qui n'est autre chose que la proportion énoncée (350), mais dont on a transposé les deux rapports. Cette proportion, dans le cas présent, revient à *sin* 23° 42′ : *sin* 15° 17′ :: R : *sin* AC. Opérant par logarithmes, on trouvera que l'hypoténuse AC est de 40° 59′, si elle doit être moindre que de 90°; ou bien elle est de 139° 1′, supplément de 40° 59′, si elle doit être plus grande que 90°; car rien ici ne détermine si l'hypoténuse AC est moindre ou plus grande que 90°; et ces deux solutions sont également possibles, comme il est aisé de s'en convaincre par la *figure* 178, dans laquelle les deux triangles ABC, ADE peuvent, avec le même angle A, avoir le côté BC égal au côté DE, et les hypoténuses AC, AE différentes; mais en prolongeant AC, AB jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en F, on voit que AE est supplément de AC, parce qu'il est supplément de FE qui est égal à AC, lorsque DE est égal à BC.

EXEMPLE II. Pour avoir le côté AB du même triangle ABC (*fig.* 177), on peut appliquer directement la proposition enseignée (351), qui fournit cette proportion

tang A : *tang* BC :: R : *sin* AB, ou *tang* 23° 42′ : *tang* 15° 17′ :: R : *sin* AB.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

On en déduit que le côté AB est de 38° 30′, ou 141° 30′, selon qu'il doit être plus petit ou plus grand que 90°, c'est-à-dire (*fig.* 178), selon qu'il doit appartenir au triangle ABC ou au triangle ADE.

EXEMPLE III. L'angle droit, l'angle A et le côté BC étant toujours les seules choses connues, pour trouver l'angle C du même triangle (*fig.* 177), je remarque que je ne puis appliquer aucune des deux analogies enseignées (349 et 351), parce que je n'aurais que deux termes de connus, soit dans l'une, soit dans l'autre; c'est pourquoi j'ai recours au triangle complémentaire DCE, dans lequel le côté DE complément de l'angle A de 23° 42′, sera de 66° 18′; le côté ou l'hypoténuse DC, complément de BC ou de 15° 17′, sera de 74° 43′ et l'angle DCE est égal à l'angle ACB qu'il s'agit de trouver : or le triangle DCE donne (350), $\sin DC : R :: \sin DE : \sin DCE$; c'est-à-dire $\sin 74° 43′ : R :: \sin 69° 18′ : \sin DCE$. On en déduit que l'angle DCE, ou ACB, est de 71° 40′, ou de 108° 20′, supplément de 71° 40′; car puisque rien ne détermine si le triangle ACB est tel que le triangle ACB de la *figure* 178, ou tel que le triangle AED de la même *figure*, il demeure incertain si l'on doit prendre l'angle ACB ou l'angle AED qui en est le supplément.

EXEMPLE IV. Que le côté AB du triangle ABC (*fig.* 177) soit de 48° 51′, et le côté BC de 37° 45′; si l'on veut avoir l'hypoténuse AC, on aura recours au triangle complémentaire DCE, dans lequel on connaît alors l'hypoténuse DC, complément de BC ou de 37° 45′, et qui sera, par conséquent, de 52° 15′; on connaît aussi l'angle D qui a pour mesure BF, complément de AB ou de 48° 51′, et qui sera, par conséquent, de 41° 9′; et pour avoir l'hypoténuse AC, il n'y aura qu'à calculer le côté CE, qui, étant son complément, la fera connaître. Or dans le triangle DCE, pour avoir CE on fera cette proportion (350) : $R : \sin DC :: \sin D : \sin CE$, ou $R : \sin 52° 15′ :: \sin 41° 9′ : \sin CE$. D'où, $CE = 31° 21′$. Donc AC qui en est le complément, ne peut être que 58° 39′, car les deux

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

côtés AB, AC étant de même espèce, l'hypoténuse doit (345) être moindre que 90°.

EXEMPLE V. Les mêmes choses étant données, pour trouver l'angle C ou l'angle A, on appliquera directement la proposition (351), qui, pour l'angle A donne R : *sin* AB :: *tang* A : *tang* BC, ou *sin* AB : R :: *tang* BC : *tang* A : c'est-à-dire, *sin* 48° 51′ : R :: *tang* 37° 45′ : *tang* A. Et par la même raison, on aura pour l'angle C : *sin* CB : R :: *tang* AB : *tang* C, c'est-à-dire, *sin* 37° 45′ : R :: *tang* 48° 51′ : *tang* C. Opérant par logarithmes, on trouvera que l'angle A est de 45° 48′ et que l'angle C est de 61° 51′, parce que les deux côtés AB, BC étant tous deux plus petits que 90°, les deux angles A et C doivent aussi (344) être tous deux plus petits que 90°.

Ces exemples suffisent pour faire voir comment on doit se conduire dans les autres cas; mais pour épargner à ceux qui auraient de ces sortes de calculs à faire, la peine de recourir aux triangles-complémentaires, nous joignons ici une table qui indique quelle proportion il faut faire dans chaque cas.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Table pour la Résolution de tous les cas possibles des Triangles-Sphériques-Rectangles (*)

Etant donnés	*Trouver*	*Proportion à faire.*	*Cas où ce que l'on cherche doit être moindre que* 90°.
AB, AC	C	Sin AC : R :: sin AB : sin C	Si AB est moindre que 90°.
	A	Cot AB : cot AC :: R : cos A	Si AB et AC sont de même espèce.
	BC	Cos AB : cos AC :: R : cos BC	Si AB et AC sont de même espèce.
AB, BC	A	Sin AB : R :: tang BC : tang A	Si BC est moindre que 90°.
	C	Sin BC : R :: tang AB : tang C	Si AB est moindre que 90°.
	AC	R : cos BC :: cos AB : cos AC	Si AB et BC sont de même espèce.
AB, A	C	R : cos AB :: sin A : cos C	Si AB est moindre que 90°.
	AC	R : cos A :: cot AB : cot AC	Si AB et A sont de même espèce.
	BC	R : sin AB :: tang A : tang BC	Si A est moindre que 90°.
AB, C	A	Cos AB : R :: cos C : sin A	Douteux.
	AC	Sin C : sin AB :: R : sin AC	Douteux.
	BC	Tang C : tang AB :: R : sin BC	Douteux.
BC, AC	A	Sin AC : R :: sin BC : sin A	Si BC est moindre que 90°.
	C	Cot BC : cot AC :: R : cos C	Si AC et BC sont de même espèce.
	AB	Cos BC : cos AC :: R : cos AB	Si AC et BC sont de même espèce.
BC, A	C	Cos BC : R :: cos A : sin C	Douteux.
	AC	Sin A : sin BC :: R : sin AC	Douteux.
	AB	Tang A : tang BC :: R : sin AB	Douteux.
BC, C	A	R : cos BC :: sin C : cos A	Si BC est moindre que 90°.
	AC	R : cos C :: cot BC : cot AC	Si BC et C sont de même espèce.
	AB	R : sin BC :: tang C : tang AB	Si C est moindre que 90°.
AC, A	C	Cos AC : R :: cot A : tang C	Si AC et A sont de même espèce.
	AB	Cos A : R :: cot AC : cot AB	Si AC et A sont de même espèce.
	BC	R : sin AC :: sin A : sin BC	Si A est moindre que 90°.
AC, C	A	R : cos AC :: tang C : cot A	Si AC et C sont de même espèce.
	AB	R : sin AC :: sin C : sin AB	Si C est moindre que 90°.
	BC	Cos C : R :: cot AC : cot BC	Si AC et C sont de même espèce.
A, C	AC	Tang C : cot A :: R : cos AC	Si A et C sont de même espèce.
	AB	Sin A : cos C :: R : cos AB	Si C est moindre que 90°.
	BC	Sin C : cos A :: R : cos BC	Si A est moindre que 90°.

(*) Cette table se rapporte au triangle *ABC* de la *figure* 177, dans laquelle *B* est l'angle droit.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Les proportions que renferme cette table, sont toutes fondées sur les deux principes enseignés (349 et 351), et appliquées soit immédiatement au triangle *ABC*, soit aux triangles complémentaires, puis transportées au triangle *ABC*. Par exemple, la première est la proportion même du n° 349 ou du n° 350 appliquée immédiatement au triangle *ABC*, en renversant seulement les deux rapports. La seconde est la proportion du n° 351 appliquée au triangle complémentaire *CED* dans lequel on a $R : \sin DE :: tang\ D : tang\ CE$, ou, en rapportant au triangle *ABC*, $R : \cos A :: cot\ AB : cot\ AC$, ou, en mettant le premier rapport à la place du second, $cot\ AB : cot\ AC :: R : \cos A$.

C'est par des triangles-sphériques-rectangles qu'on calcule les ascensions droites, et les déclinaisons des astres, par le moyen de leur longitude et de leur latitude, et réciproquement; mais ce n'est point encore ici le lieu d'exposer les notions d'astronomie que ces objets supposent.

Des Triangles-Sphériques-Obliquangles.

354. Les triangles-sphériques-rectangles se résolvent, dans tous les cas, par une seule analogie, ainsi qu'on vient de le voir. Il n'en est pas de même des triangles-sphériques-obliquangles: dans plusieurs cas il faut faire deux analogies. Ces cas exigent qu'on abaisse, de l'un des angles du triangle proposé, un arc de grand cercle perpendiculairement sur le côté opposé. Comme cet arc peut tomber, ou sur le côté même, ou sur le prolongement de ce côté selon les différens rapports de grandeur des côtés et des angles, il convient, avant d'établir les principes de la résolution de ces sortes de triangles, de faire distinguer les cas où l'arc perpendiculaire tombe en dedans du triangle, de ceux où il tombe au dehors.

355. *L'arc de grand cercle* AD (fig. 180) *abaissé perpendiculairement de l'angle* A *d'un triangle-sphérique, sur le côté opposé, tombe dans le triangle quand les deux autres angles* B *et* C *sont de même espèce; et au-dehors quand ils sont de différente espèce.* Car dans les triangles rectangles *ADC*, *ADB*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

(*fig.* 180), les deux angles *B* et *C* doivent être chacun de même espèce que le côté opposé *AD* (344); donc ils doivent être de même espèce entre eux. Dans les triangles-rectangles *ADC*, *ADB* de la *figure* 181, les angles *ACD*, *ABD* doivent être de même espèce chacun que le côté opposé *AD*; donc, puisque *ABC* est supplément de *ABD*, *ABC* et *ACD* doivent être de différente espèce.

356. La résolution de tous les cas posibles des triangles-sphériques-obliquangles porte sur cinq principes que nous allons faire connaître, et sur la résolution des triangles-rectangles; tous ces principes ne sont pas nécessaires à la fois pour chaque cas; mais ils le sont pour être en état de les résoudre tous. De ces cinq principes nous en avons déjà établi deux; ce sont ceux qui sont énoncés aux numéros 336 et 349; voici les trois autres.

357. *Dans tout triangle-sphérique* ABC (fig. 179), *si d'un angle* A *on abaisse l'arc de grand cercle* AD *perpendiculairement sur le côté opposé* BC, *on aura toujours cette proportion : Le cosinus du segment* BD, *est au cosinus du segment* CD, *comme le cosinus du côté* AB *est au cosinus du côté* AC. Soit *G* le centre de la sphère : du sommet de l'angle *A* abaissons sur le plan *BGC* de l'arc *BC* la perpendiculaire *AI*; elle sera dans le plan *AGD* de l'arc *AD*. Conduisons par *AI* les deux plans *AIE*, *AIF*, de manière que les rayons *GB*, *GC*, leur soient respectivement perpendiculaires; et du point *D* menons les perpendiculaires *DH*, *DK* sur les mêmes rayons. Les triangles *GIE*, *GDH*, seront semblables à cause des lignes *IE*, *DH*, perpendiculaires sur *GB* : par une raison semblable, les triangles *GDK*; *GIF* sont semblables. On a donc ces deux proportions $GH : GE :: GD : GI$ et $GK : GF : GD : GI$.
Donc, à cause du rapport commun de *GD* à *GI*, on a $GH : GE :: GK : GF$. Or *GH* est le cosinus de *BD* (270); *GE*, le cosinus de *AB*; *GK*, le cosinus de *CD*; et *GF*, celui de *AC*; donc $\cos BD : \cos AB :: \cos CD : \cos AC$, ou en mettant le troisième terme à la place du second, et le second à la place du troisième, $\cos BD : \cos CD :: \cos AB : \cos AC$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

358. *Les mêmes choses étant supposées que dans la proposition précédente, on a cette autre proportion : Le sinus de* BD *est au sinus de* CD, *comme la cotangente de l'angle* B, *est à la cotangente de l'angle* C. Car les angles *AEI*, *AFI* sont égaux aux angles *B* et *C*, chacun à chacun, ainsi que nous l'avons vu dans la démonstration du n° 349 : donc, puisque les triangles *AIE*, *AIF* sont rectangles, les angles *EAI*, *FAI* sont complémens des angles *AEI*, *AFI*, et par conséquent des angles *B* et *C*. Cela posé, dans le triangle *AEI*, on a (296) R : *tang EAI* ou *cot B* :: *AI* : *IE*; et dans le triangle-rectangle *AIF*, on a *tang AIF* ou *cot C* : R :: *IF* : *AI*; donc (100) *cot C* : *cot B* :: *IF* : *IE*. Mais les triangles semblables *GFI*, *GKD*, et les triangles semblables *GEI*, *GHD* donnent

$$IF : DK :: GI : GD, \text{ et } IE : DH :: GI : GD.$$

Donc, $IF : DK :: IE : DH$, ou $IF : IE :: DK : DH$.

Donc aussi *cot C* : *cot B* :: *DK* : *DH*; et *DK* et *DH* sont les sinus des segmens *DC* et *DB*; donc enfin *cot C* : *cot B* :: *sin DC* : *sin DB*.

359. *Dans tout triangle sphérique* ABC (fig. 180), *si d'un angle* A *on abaisse l'arc perpendiculaire* AD *sur le côté opposé* BC, *on a cette proportion : La tangente de la moitié du côté* BC, *est à la tangente de la moitié de la somme des deux autres côtés, comme la tangente de la moitié de leur différence, est à la tangente de la moitié de la différence des deux segmens* CD, BD, *ou* (fig. 181) *à la tangente de la moitié de leur somme.* On vient de voir (357) que *cos AB* : *cos AC* :: *cos BD* : *cos CD*; donc (98) *cos AB* + *cos AC* : *cos AB* − *cos AC* :: *cos BD* + *cos CD* : *cos BD* − *cos CD*; mais (287) *cos AB* + *cos AC* : *cos AB* − *cos AC* :: $\cot\frac{AC+AB}{2} : \tan\frac{AC-AB}{2}$; et par la même raison, *cos BD* + *cos CD* : *cos BD* − *cos CD* :: $\cot\frac{CD+BD}{2} : \tan\frac{CD-BD}{2}$; donc $\cot\frac{AC+AB}{2} : \tan\frac{AC-AB}{2} :: \cot\frac{CD+BD}{2} : \tan$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

$\frac{CD-BD}{2}$, ou $cot\frac{AC+AB}{2} : cot\frac{CD+BD}{2} :: tang\frac{AC-AB}{2} : tang\frac{CD-BD}{2}$, ou à cause que (280) les cotangentes sont réciproquement proportionnelles aux tangentes, $tang\frac{CD+BD}{2} : tang\frac{AC+AB}{2} :: tang\frac{AC-AB}{2} : tang\frac{CD-BD}{2}$. Or dans la figure 180, $CD+BD$ est BC; et dans la figure 181, $CD-BD$ est BC; donc, pour la figure 180, on a.....

$$tang\frac{BC}{2} : tang\frac{AC+AB}{2} :: tang\frac{AC-AB}{2} : tang\frac{CD-BD}{2},$$

et pour la figure 181, on a

$$tang\frac{CD+BD}{2} : tang\frac{AC+AB}{2} :: tang\frac{AC-AB}{2} : tang\frac{BC}{2}, \text{ ou}$$

$$tang\frac{BC}{2} : tang\frac{AC+AB}{2} :: tang\frac{AC+AB}{2} : tang\frac{CD+BD}{2}.$$

360. Les principes que nous venons d'exposer, et la seconde proportion de la table que nous avons donnée pour les triangles-rectangles, suffisent pour la résolution des triangles-sphériques-obliquangles, ou du moins, pour déterminer les sinus ou les tangentes des différentes parties qui les composent; il y a plusieurs cas où trois choses données suffisent pour déterminer tout le reste; mais il y en a plusieurs aussi, où la question reste indéterminée, parce que ces données ne sont pas suffisantes pour décider si la chose cherchée est moindre ou plus grande que 90°. Cependant, quoiqu'à envisager la chose généralement, le nombre de ces derniers cas soit assez considérable, il est très-rare, dans les usages ordinaires de la Trigonométrie sphérique, qu'on ne sache pas de quelle espèce doit être le côté ou l'angle qu'on demande. Avant que d'entrer en matière, rappelons-nous que le sinus, le cosinus, la tangente et la cotangente d'un angle ou d'un arc, sont les mêmes pour cet angle ou cet arc que pour son supplément.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

361. On peut réduire le calcul des triangles-obliquangles, aux six cas que nous allons d'abord résoudre; et nous en déduirons ensuite la résolution des autres.

QUESTION I. *Etant donnés deux côtés* AB, AC *et un angle opposé* B (fig. 180), *trouver l'angle opposé à l'autre côté donné.* Faites cette proportion (349) *sin AC : sin AB :: sin B : sin C.* L'angle *C* peut être de plus ou de moins de 90°.

QUESTION II. *Etant donnés deux côtés* AB, AC (fig. 180) *et un angle opposé* B, *trouver le troisième côté* BC. De l'angle *A* opposé au côté cherché, imaginez l'arc perpendiculaire *AD*; et dans le triangle-rectangle *ADB*, calculez le segment *BD* par cette proportion qui revient à la même que la seconde de la table ci-dessus,

cos B : R :: cot AB : cot BD; ou *R : cos B :: tang AB : tang BD.*

Et pour avoir *CD*, faites cette proportion (357),

cos AB : cos AC :: cos BD : cos CD.

Alors, selon que *AD* tombe dans le triangle, ou hors du triangle, vous aurez *BC*, en prenant ou la somme ou la différence de *BD* et *BC.*

QUESTION III. *Etant donnés les deux angles* B *et* C (fig. 180), *et un côté opposé* AB, *trouver le côté intercepté* BC. De l'angle *A* opposé au côté cherché *BC*, imaginez l'arc perpendiculaire *AD*, et dans le triangle-rectangle *ADB*, calculez *BD* par la proportion de la question II; pour avoir *CD*, faites cette proportion (358), *cot B : cot C :: sin BD : sin CD*; et pour avoir *BC* prenez la somme ou la différence de *CD* et *BD*, selon que la perpendiculaire tombe dans le triangle, ou hors du triangle.

QUESTION IV. *Etant donnés deux côtés* AB, BC (fig. 180), *et l'angle compris* B, *trouver le troisième côté* AC. De l'un *A* des deux angles inconnus, imaginez l'arc perpendiculaire *AD* sur le côté opposé *BC.* Calculez *BD* par la proportion de la question II. Retranchez *BD* du côté connu *BC* (*fig.* 180), ou ajoutez-le à ce côté (*fig.* 181), et vous aurez *CD*; alors

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

pour avoir AC, faites cette proportion (357), $\cos BD : \cos CD :: \cos AB : \cos AC$.

QUESTION V. *Etant donnés deux côtés* AB, BC (fig. 180), *et l'angle compris* B, *trouver l'un des deux autres angles par exemple, l'angle* C. Du troisième angle A, abaissez l'arc perpendiculaire AD sur le côté opposé BC. Calculez le segment BD par la même proportion que dans la question II. Retranchez BD du côté connu BC (*fig.* 180), ou ajoutez-le à ce côté (*fig* 181), et vous aurez CD; et pour avoir l'angle C, faites cette proportion (358) $\sin BD : \sin CD :: \cot B : \cot C$.

QUESTION VI. *Etant donnés les trois côtés* AB, AC, BC (fig. 180), *trouver un angle, par exemple l'angle* B. Ayant imaginé l'arc AD perpendiculaire sur le côté BC adjacent à l'angle cherché, calculez la demi-différence des deux segmens BD, DC, par cette proportion (359),

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}BC : \text{tang}\,\frac{AB+AC}{2} :: \text{tang}\,\frac{AC-AB}{2} : \text{tang}\,\frac{CD-BD}{2},$$

Ayant trouvé cette demi-différence, retranchez-la de la moitié de BC, et vous aurez (301) le plus petit segment BD. Alors, la proportion de la question II donnera l'angle B. Si la perpendiculaire devait tomber hors du triangle, la première proportion, au lieu de donner la demi-différence, donnerait la demi-somme : c'est pourquoi il faudrait alors, pour avoir le plus petit segment BD (*fig.* 181), retrancher la moitié de BC de cette demi-somme, parce que c'est BC qui est la différence des deux segmens. On peut encore résoudre cette question par une règle semblable à celle que nous avons donnée pour un cas analogue dans les triangles-rectangles. Voici cette règle. *Prenez la moitié de la somme des trois côtés; de cette demi-somme retranchez successivement chacun des deux côtés qui comprennent l'angle cherché; ce qui vous donnera deux restes. Au double du logarithme du rayon ajoutez les logarithmes des sinus de ces deux restes, et du total retranchez la somme des logarithmes des sinus des deux côtés qui comprennent l'angle cherché; le reste sera le logarithme du quarré*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

du sinus de la moitié de cet angle. Prenez la moitié de ce logarithme restant, et cherchez à quel nombre de degrés et minutes elle répond dans la table; ce sera la moitié de l'angle demandé. Nous démontrerons cette règle dans la troisième Partie.

362. Ces six cas exposés, voici comment on peut en déduire les six autres.

QUESTION VII. *Étant donnés deux angles* F et G (fig. 182) *et un côté opposé* GE, *trouver le côté* EF *opposé à l'autre angle connu* G. Imaginez le triangle supplémentaire ABC; prenant les supplémens des angles F et G et du côté GE vous aurez (336) les côtés AC, AB et l'angle B; si vous calculez l'angle C par ce qui a été dit dans la question I, son supplément sera le côté EF (336). Au reste ce n'est que pour conserver l'analogie avec les cas suivans, que nous donnons cette solution; car la question présente se résout immédiatement par la proposition enseignée (349), en faisant cette proportion $\sin F : \sin GE :: \sin G : \sin FE$.

QUESTION VIII. *Étant donnés deux angles* F *et* G (fig. 182) *et un côté opposé* GE, *trouver le troisième angle* E. Prenez les supplémens des trois choses données, et vous connaîtrez dans le triangle supplémentaire AC, AB et l'angle B; calculez donc le côté BC, par la question II, le supplément de ce côté sera la valeur de l'angle E (336).

QUESTION IX. *Étant donnés les deux côtés* EG, EF (fig. 182) *et un angle opposé* G, *trouver l'angle* E *compris entre les deux côtés connus.* Prenez les supplémens des trois choses données, et dans le triangle supplémentaire ABC, vous connaîtrez l'angle B, l'angle C, et le côté AB; il s'agira de calculer le côté BC, ce qui se fera par la question III. Le supplément de BC sera la valeur de l'angle E (336).

QUESTION X. *Étant donnés deux angles* G *et* E (fig. 182) *et le côté intercepté* GE, *trouver le troisième angle* F. Prenez les supplémens des trois choses données, et dans le triangle sup-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

plémentaire ABC, vous connaîtrez AB, BC, et l'angle compris B; il s'agira de calculer AC; ce qui se fera par la question IV. Le supplément de AC sera l'angle demandé F (336).

QUESTION XI. *Étant donnés deux angles* G *et* E (fig. 182) *et le côté intercepté* GE, *trouver l'un des deux autres côtés; trouver* FE, *par exemple.* Prenez les supplémens des trois choses données, et dans le triangle supplémentaire ABC, vous connaîtrez AB, BC, et l'angle compris B; il s'agira de calculer l'angle C, ce qui se fera par la question V. Le supplément de C sera la valeur du côté FE (336).

QUESTION XII. *Étant donnés les trois angles* E, F, G (fig. 182), *trouver l'un des côtés, le côté* EG, *par exemple.* Prenez les supplémens des trois choses données, et dans le triangle supplémentaire ABC, vous connaîtrez les trois côtés BC, AC, AB; il s'agira de calculer l'angle B, ce qui se fera par la question VI. Le supplément de B sera la valeur du côté cherché (336).

Avant de passer aux exemples, remarquons que quoique plusieurs cas des triangles-obliquangles exigent deux analogies, il y a cependant une espèce de triangles-obliquangles qui peut toujours être résolue par une seule analogie; ce sont ceux dont un côté est de 90°; car en employant le triangle supplémentaire, ce triangle devient un triangle-rectangle. Donnons quelques exemples.

EXEMPLE de la question IV. Supposons que le point F (*fig.* 166) marque la position de Paris sur la terre; le point G celle de Toulon : on sait, par les observations astronomiques, que la latitude de Paris, ou l'arc BF, est de 48° 50′ (*); que la latitude de Toulon, ou l'arc GE, est de 43° 7′; et que la différence de longitude entre Paris et Toulon, ou l'arc BE, ou l'angle BAE ou FAG, est de 3° 37′. On demande quelle est la plus courte distance de Paris à Toulon. Le chemin le plus court pour aller d'un point à un autre sur la surface d'une sphère,

(*) Nous négligeons les secondes dans cet exemple.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

est l'arc de grand cercle qui passe par ces deux points. Imaginons l'arc *FG* de grand cercle. Si des arcs *AB*, *AE* de 90° chacun, nous retranchons les arcs *BF*, *EG*, qui sont de 48° 50′ et 43° 7′, nous aurons les arcs *AF*, *AG*, de 41° 10′ et 46° 53′. Nous connaîtrons donc, dans le triangle *AFG*, les deux côtés *AF*, *AG* et l'angle compris *FAG*; il est question de calculer le troisième côté *FG*. Représentons le triangle *FAG*, par le triangle *ABC* (*fig.* 183) et supposons *AB* de 41° 10′, *BC* de 46° 53′ et l'angle *B* de 3° 37′; alors, selon la règle donnée dans la question IV, je calcule le segment *BD* par cette proportion :

R : *cosin* 3° 37′ :: *tang* 41° 10′ : *tang BD*.

Opérant par logarithmes, j'ai

Log. cos. 3° 37′	9,9991342
Log. tang. 41° 10′	9,9417135
Somme	19,9408477
Log. du rayon	10.
Reste ou *log. tang. BD*	9,9408477

Qui, dans la table, répond à 41° 7′; retranchant 41° 7′, de *BC*, c'est-à-dire de 46° 53′; nous aurons 5° 46′ pour le segment *CD*.

Pour trouver le côté *AC*, je fais, conformément à ce qui a été prescrit dans la question IV, cette proportion :

cos 41° 7′ : *cos* 5° 46′ :: *cos* 41° 10′ : *cos AC*.

Et opérant par logarithmes, je trouve que *AC* est de 6° 11′, qui, à raison de 20 grandes lieues par degré, valent 124 grandes lieues, à peu près; mais en lieues moyennes ou de 25 au degré, cela revient à 154 lieues environ.

EXEMPLE de la question VI. Nous avons dit (138), en parlant de la manière de lever les plans, que nous donnerions les moyens de réduire les angles observés au-dessus ou au-dessous d'un plan horizontal, à ceux qu'on observerait dans ce plan même. En voici la méthode. Supposons que *A*, *B*, *C* (*fig.* 184) soient trois points différemment élevés au-dessus du plan hori-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

zontal HE, et imaginons les perpendiculaires Bb, Aa, Cc sur ce plan; on aura un triangle abc dont les sommets a, b, c représentent les objets A, B, C de la manière dont ils doivent être représentés sur une carte. Supposant qu'on ait pu, du point A, observer les deux points B et C, on demande ce qu'il faut faire pour déterminer l'angle a. On mesurera au point A l'angle BAC et les angles BAa, CAa; le premier peut être mesuré sans aucune difficulté; à l'égard de chacun des deux autres, de l'angle BAa, par exemple, on disposera l'instrument dans le plan vertical qu'on imagine passer par AB, et plaçant un des diamètres horizontalement, par le moyen du fil à-plomb qui alors marquera la ligne Aa, on dirigera l'autre diamètre au point B, et on verra sur l'instrument combien il y a de degrés entre le fil à-plomb et le diamètre dirigé au point B, ce qui donnera l'angle BAa; on trouvera de même l'angle CAa. Cela posé, si l'on conçoit que d'un rayon quelconque AD et du point A comme centre, on ait décrit les arcs DF, DG, GF, dans les plans des angles BAC, BAa, CAa; on aura un triangle sphérique DGF, dans lequel on connaîtra les côtés DF, DG, GF, mesures des angles BAC, BAa, CAa qu'on a observés; l'angle DGF de ce triangle sera égal à l'angle bac, puisque les deux droites ba, ac, étant perpendiculaires à l'intersection Aa des deux plans Ab, Ac, font le même angle que ces plans, et par conséquent (520) un angle égal à l'angle sphérique DGF. Supposons donc que les angles observés, BAC, BAa, CAa, soient respectivement de 82° 10′, 77° 42′, 74° 24′; il s'agit donc (*fig.* 180) de calculer l'angle B opposé au côté AC de 82° 10′, dans le triangle sphérique ABC, dont les trois côtés AB, AC, BC, sont respectivement de 74° 24′, 82° 10′, 77° 42′. Donc, conformément à ce qui a été dit dans la question VI, je calculerai la demi-différence des deux segmens BD et CD, par cette proportion,

$$\textit{tang}\ 38^\circ\ 51' : \textit{tang}\ 78^\circ\ 17' :: \textit{tang}\ 3^\circ\ 53' : \textit{tang}\ \frac{CD-BD}{2}.$$

Opérant par logarithmes, je trouve $\frac{1}{2}(CD-BD) = 22^\circ\ 7'$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Retranchant 22° 7′, qui est la demi-différence, de la moitié de BC, c'est-à-dire de 38° 51′, nous aurons (301) le plus petit segment BD de 16° 44′ ; alors dans le triangle-rectangle ADB, pour avoir l'angle B, je fais, conformément à ce qui a été dit dans la question VI, cette proportion :

$$tang\,AB : tang\,BD :: R : cos\,B, \text{ ou } tang\,74°24' : tang\,16°44' :: R : cos\,B.$$

Opérant par logarithmes, on trouve 85° 12′, pour la valeur de l'angle B, c'est-à-dire (*fig.* 184) de l'angle *bac*. Pour réduire l'angle C à l'angle c, on ferait un calcul semblable, en supposant qu'on eût observé l'angle ACB, l'angle ACc, et l'angle BCc. A l'égard du troisième angle b, il n'est pas nécessaire de le calculer, parce que le triangle *abc* étant rectiligne, ses trois angles valent deux droits.

Remarque. En supposant toujours qu'aucune partie d'un triangle-sphérique n'est de plus de 180°, on peut déterminer par une règle assez simple, si ce qu'on cherche doit être moindre que 90°, ou s'il peut indifféremment être plus grand ou plus petit. Voici cette règle. Si le quatrième terme de l'analogie ou proportion que vous êtes obligé de faire pour résoudre un triangle sphérique, est un sinus, l'arc auquel il appartiendra peut indifféremment être de moins ou de plus de 90°, excepté le cas où le triangle étant rectangle, parmi les trois choses connues, il s'en trouverait une qui serait opposée dans le triangle à celle que l'on cherche. Dans ce cas (344), ces deux dernières quantités sont toujours de même espèce entre elles. Mais si le quatrième terme est un cosinus, ou une cotangente, ou une tangente, alors observez à l'égard des termes connus de la proportion, la règle suivante. Donnez le signe + au rayon et à tous les sinus, soit que les arcs auxquels ils appartiennent soient plus grands, soit qu'ils soient plus petits que 90° Donnez pareillement le signe + à tous les cosinus, tangentes et cotangentes des arcs plus petits que 90° ; et au contraire donnez le signe — à tous les cosinus, tangentes et cotangentes des arcs plus grands que 90°. Alors si le nombre des signes — est zéro, ou pair, l'arc qui répond au quatrième terme sera toujours moindre que 90° ; il sera, au contraire, plus grand que 90°, si le nombre des signes — est impair. Cette règle est fondée, 1°. sur la règle pour la multiplication et la division des quantités considérées par rapport à leurs signes ; on verra cette dernière dans l'Algèbre ; 2°. sur ce qui a été observé (273 *et suiv.*) relativement aux sinus, cosinus, etc. des arcs plus petits ou plus grands que 90°.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

TABLE DES MATIÈRES.

Nos des articles.

1. But de la Géométrie.

PREMIÈRE SECTION.

2. Des Lignes droites et des Lignes courbes.
3. Tracer une Ligne droite.
4. Des différentes Unités de ligne.
5. Des Surfaces planes.
6— 8. Des Circonférences.
9— 24. Des Angles et de leur Mesure.
25— 35. Des Perpendiculaires et des Obliques.
36— 45. Des Parallèles.
46— 61. Des Lignes droites considérées par rapport aux Circonférences.
62— 72. Des Angles considérés dans le Cercle.
73— 78. Des Lignes droites qui renferment un espace.
79— 83. De l'égalité des Triangles.
84— 94. Des Polygones.
95—107. Des Lignes proportionnelles.
108—122. De la similitude des Triangles.
123—130. Des Lignes proportionnelles considérées dans le Cercle.
131—138. Des Figures semblables.

SECONDE SECTION.

139—143. Des Surfaces.
144—154. De la Mesure des Surfaces.
155—156. Du Toisé des Surfaces.
157—170. De la Comparaison des Surfaces.
171—198. Des Plans.
199—202. Propriétés des Lignes droites coupées par des Plans parallèles.

TROISIÈME SECTION.

203—208. Des Solides.
209—213. Des Solides semblables.
214—225. De la Mesure des Surfaces des Solides.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

226—232. Des rapports des Surfaces des Solides.
233—234. De la solidité des Prismes.
235—237. De la mesure de la solidité des Prismes et des Cylindres.
238. De la solidité des Pyramides.
239—243. Mesure de la solidité des Pyramides.
244—248. De la solidité de la Sphère, de ses Secteurs et de ses Segmens.
249—255. De la mesure des autres Solides.
256—260. Du Toisé des Solides.
261. Du Toisé des Bois.
262—265. Des rapports des Solides en général.

DE LA TRIGONOMÉTRIE.

266. But de la Trigonométrie.
267—268. De la Trigonométrie plane ou rectiligne.
269—293. Des Sinus, Cosinus, Tangentes, Cotangentes, Sécantes et Cosécantes.
294—297. De la Résolution des Triangles-Rectangles.
298—313. De la Résolution des Triangles-Obliquangles.
314—318. Du Nivellement.

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

319—331. Notions préliminaires.
332—342. Propriétés des Triangles sphériques.
343—347. Moyens de reconnaître dans quels cas les angles ou les côtés qu'on cherche, dans les Triangles-sphériques-rectangles, doivent être plus grands ou plus petits que 90°.
348—353. Principes pour la résolution des Triangles-sphériques-rectangles.
Table pour la Résolution de tous les cas possibles des Triangles-Sphériques-Rectangles.
354—355. Des Triangles-Sphériques-Obliquangles.
356—359. Principes pour la Résolution des Triangles-Sphériques-Obliquangles.
360—362. Résolution des Triangles-Sphériques-Obliquangles.

FIN DE LA TABLE.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

NOTES
SUR LA GÉOMÉTRIE;
PAR REYNAUD.

PREMIÈRE PARTIE.

Notes sur la Géométrie de Bezout.

Note sur le n° 2.

1. LA LIGNE DROITE *est la trace d'un point qui se meut de manière à tendre toujours vers un même point.* Cette définition est la plus naturelle. Mais on ne peut pas en conclure ces deux principes ; *la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre ; entre deux points, on ne peut mener qu'une seule ligne droite.* On doit regarder ces vérités comme des faits d'expérience.

2. Une ligne *AEDC* (*fig.* 51), composée de lignes droites, est une *ligne brisée ;* et toute ligne *FAE* (*fig.* 23), qui n'est ni droite ni composée de lignes droites, est une *ligne courbe. Entre deux points donnés, on peut mener une infinité de lignes ; la plus courte est la* LIGNE DROITE; *elle mesure la vraie distance entre les points donnés.* En général, *lorsqu'on parle d'une* DISTANCE, *on sous-entend toujours qu'il s'agit de la plus courte distance.*

3. *Une ligne droite ne peut avoir qu'un seul milieu.* En effet ; si la droite *AC* (fig. 6) avait deux milieux, *M*, *N*, on aurait..... $MA=MC$, $NA=NC$. Mais, *MA* est plus petit que *NA* ; *MC* serait donc plus petit que *NC* ; ce qui est faux.

Note sur le n° 6.

4. Le *plan* est une surface, sur laquelle on peut appliquer une ligne droite dans tous les sens, de manière que tous les points de la droite coïncident avec ceux du plan. Nous verrons que cette surface existe.

5. La *circonférence* est une ligne courbe dont tous les points sont à

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

égale distance d'un point fixe, nommé *centre. Il n'existe qu'un seul centre*; en effet, si la circonférence $AEBFA$ (fig. 24), avait deux centres, C, C'; en menant une droite EF par ces deux centres, les points C et C', seraient les milieux de EF; ce qui est absurde (n° 3).

6. En général; le *centre* d'une ligne ou d'une surface, est le point qui jouit de cette propriété, que toute droite menée par ce point et terminée de part et d'autre à la ligne ou à la surface donnée, est divisée à ce point en deux parties égales. Il en résulte qu'une ligne courbe, ou une surface courbe, n'a jamais qu'un seul centre.

7. *Une* CORDE, *est toujours plus petite que le diamètre* DB, (*fig.* 3), car on a (n° 1).....

$$DF < DA + AF \text{; ou } DF < DA + AB \text{; ou } DF < DB.$$

Note sur le n° 7.

8. *Dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, les arcs égaux sont soutendus par des cordes égales; et réciproquement, les cordes égales soutendent des arcs égaux.* En effet; sur l'arc AB (fig. 21), décrit du point C comme centre avec le rayon CA, prenez des arcs égaux, ArE, BSD; tirez un rayon CM, qui divise l'arc AB en deux parties égales; faites tourner CMB autour de MC, de manière que le plan CMB, s'applique sur le plan CMA; tous les points de l'arc MB coïncideront avec ceux de l'arc MA, et le point B viendra en A; mais $BSD = ArE$; le point D tombera donc en E; les cordes, AE, BD, sont donc égales. *Réciproquement*, lorsque les cordes AE, BD, sont égales, on peut faire tourner CMB sur CM, de manière que les points C et M, restant fixes, le point B tombe en A; les arcs BSM, ArM, coïncidant, le point D devra tomber sur un des points de l'arc ArM; mais dans ce mouvement, la distance du point D au point B étant invariable, et le point B tombant en A, le point D devra se trouver sur l'arc mn, décrit du point A comme centre avec le rayon BD; or $BD = AE$; l'arc mn passera donc par le point E; le point D tombera donc en E; les extrémités des arcs, BSD, ArE, coïncident donc; ces arcs sont donc égaux.

Remarque. S'il s'agissait de cercles égaux, on les placerait l'un sur l'autre, de manière que les circonférences coïncidassent, et la démonstration serait ramenée à la précédente. Cette remarque est générale, on peut toujours supposer que deux cercles égaux coïncident. De sorte que les propriétés démontrées pour un cercle, conviennent à des cercles égaux.

Note sur le n° 12.

9. *Un angle, dont le sommet est au centre, a pour mesure l'arc*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

compris entre ses côtés. C'est-à-dire que, *dans un même cercle, les angles au centre sont proportionnels aux arcs compris entre leurs côtés.* En effet; soit l'arc AMB (fig. 21), décrit du point C comme centre avec le rayon CA. Il s'agit de faire voir que.....

(1)... *l'angle* ACB : *l'angle* ACD :: *l'arc* AB : *l'arc* AD.

1°. *Si les arcs*, AB, AD, ont une commune mesure, on aura.....

arc $AB = pb$, arc $AD = qb$; donc, arc AB : arc AD :: p : q.

Divisant l'arc AB en p arcs égaux à b, et menant des droites du centre à ces points de division, l'arc AD contiendra q fois l'arc b; désignant par c, l'angle au centre qui s'appuie sur l'arc b, on aura.....

angle $ACB = pc$, angle $ACD = qc$; donc, angle ACB : angle ACD :: p : q.

Le principe est donc démontré pour des arcs commensurables.

2°. Lorsque les arcs, AB, AD, sont incommensurables, la proportion (1) subsiste encore. En effet; si le quatrième terme de cette proportion n'était pas AD, il serait plus grand ou plus petit, par exemple, AO ou AO'; on aurait donc.....

(2)... $ACB : ACD :: AB : AO$; ou $ACB : ACD :: AB : AO'$.

Divisant l'arc AB en parties égales plus petites que DO ou que DO', il tomberait au moins un point de division, K ou K', sur DO ou sur DO'. Tirant CK ou CK', les arcs AB et AK, ou AB et AK', seraient commensurables; on aurait donc, (1°),

(3)... $ACB : ACK :: AB : AK$; ou $ACB : ACK' :: AB : AK'$.

Les proportions (2) et (3) donnent...

(4)... $ACD : ACK :: AO : AK$; $ACD : ACK' :: AO' : AK'$.

Mais, par construction, on a, $AO > AK$, $AO' < AK'$. Il faudrait donc, pour que les proportions (4) pussent subsister, que l'on eût..... $ACD > ACK$ et $ACD < ACK'$; ce qui est absurde; cette absurdité résultant de la combinaison des proportions (2) avec les proportions (3), et l'exactitude des dernières ayant été démontrée (1°), l'erreur ne peut résulter que des proportions (2); le quatrième terme de la proportion (1), ne peut donc être ni plus grand ni plus petit que l'arc AD; ce quatrième terme est donc l'arc AD.

10. *Remarque.* Il n'existe aucune grandeur absolue; on ne peut donc chercher qu'à *mesurer* les rapports de grandeurs des quantités; et par conséquent, *pour que des quantités puissent en mesurer d'autres, il suffit que les unes et les autres conservent constamment les mêmes rapports entre*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

elles. Or, les angles au centre sont proportionnels aux arcs qu'ils comprennent; ces arcs peuvent donc servir à mesurer les angles. Ce qui démontre le principe du n° 12 de Bezout.

Notes sur le n° 17.

11. 1°. *Quand une droite CD, (fig. 1), tombe sur une droite AB, la somme des angles adjacens, a et b* (*), *vaut* 180°; 2°. *Réciproquement, lorsque* $(a+b)=180°$, *la ligne ACB est droite; de sorte que si trois droites, AC, BC, DC, sont telles que* $(a+b)=180°$, *la droite CB sera le prolongement de AC.* En effet; 1° si AB est une ligne droite, en menant la droite CP, de manière que les angles, PCA, PCB, soient égaux; ces angles seront de 90°; et désignant l'angle PCD par p, on aura, $a=90°+p$, $b=90°-p$; d'où, $a+b=180°$.

2°. Supposons $(a+b)=180°$; nommons x, l'angle inconnu que le prolongement CE de AC, fait avec CB; alors ACE étant une droite, on aura (1°), $ACD+DCE=180°$; ou $a+(b+x)=180°$. Mais, par hypothèse, $a+b=180°$; donc $x=0$. La droite CE se confond donc avec CB; CB est donc le prolongement de AC.

12. *Deux lignes droites se confondent, lorsqu'elles ont deux points communs.* En effet; concevez deux droites qui passent par les points M et N (*fig.* 6); ces droites se confondront entre les points M et N (n° 1); si elles pouvaient ensuite se séparer en un certain point A, de manière que $NMAB$ et $NMAD$, fussent des lignes droites; en menant une ligne quelconque AP; le principe du n° 11 donnerait..... $PAC+PAB=180°$ et $PAC+PAD=180°$. Les angles, PAB, PAD, seraient donc égaux; ce qui est absurde; les deux droites ne peuvent donc pas se séparer.

13. *Tous les angles droits sont égaux entr'eux.* Pour le démontrer, menez des perpendiculaires, AB, $A'B'$, (*fig.* 5), aux droites $CD, C'D'$; vous aurez, $a=a'$ et $b=b'$; prenez, $AD=AC=A'D'=AC'$; portez $C'D'$ sur CD, de manière que D' tombe en D, et C' en C. Tous les points de ces deux droites coïncideront (n° 12); les milieux A, A', de ces droites, tomberont donc l'un sur l'autre (n° 3). Supposez que $A'B'$ tombe alors en AP; les angles, PAC, PAD, seront respectivement égaux à b' et à b; mais $b'=b$; les angles, PAC, PAD, sont donc égaux. Or $PAC=b'=a'-x$ et $PAD=b=a+x$; donc $a+x=a'-x$; d'où $x=0$; donc $b'=a'$ et $b=a$; or $a=a'$; donc $a=a'=b=b'$. Les angles droits, a, a', b, b', sont donc égaux entr'eux.

(*) Pour simplifier l'écriture des calculs, nous désignerons souvent un angle par une lettre placée sur l'*arc* qui se termine aux deux côtés de l'angle. Ainsi, a et b (*fig.* 1), désignent les angles, ACD, DCB. L'angle droit vaudra 90 degrés, ou 90°.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

14. *Lorsqu'une droite EF (fig. 13), est perpendiculaire à une droite AB ; on peut en conclure que réciproquement, AB est perpendiculaire à EF*; car EF étant perpendiculaire à AB, l'angle b est droit (B. n° 25); mais, $b+b'=180°$; l'angle b' est donc droit; or les angles droits, b, b' sont égaux (n° 13); BA est donc perpendiculaire à EF. (Cela démontre le principe du n° 26 de Bezout).

Réciproque du principe du n° 20.

15. *Si quatre droites, CA, CB, CD, CQ, (fig. 1), sont telles que $a'=a$ et $b'=b$; on peut en conclure que CB est le prolongement de AC et que CQ est le prolongement de CD.* Il s'agit de prouver que, $a+b=180°$ et que $a'+b'=180°$. Or, (B. n° 18), $a+a'+b+b'=360°$. Mais, $a=a'$ et $b=b'$. Donc, $2a+2b=360°$; donc $a+b=180°$ et $a'+b'=180°$.

Note sur les n^os 27, 28 et 29.

16. 1°. *Par un point donné, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à une droite donnée;* 2°. *les obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales; et réciproquement, les obliques qui sont égales, s'écartent également du pied de la perpendiculaire;* 3°. *la perpendiculaire menée d'un point sur une droite, est plus courte qu'une oblique quelconque menée par le même point;* 4°. *de deux obliques, celle qui s'approche le plus de la perpendiculaire est la plus courte; et réciproquement, l'oblique la plus courte, s'approche le plus de la perpendiculaire.* En effet; concevons la perpendiculaire CND à AB (*fig.* 12); les angles, CNA, CNB, ANO, seront droits. Cela posé :

1°. Si NR était perpendiculaire à AB, les angles, ANP, ANR, seraient droits; ce qui est absurde. Si PQ était perpendiculaire à AB; en prolongeant NP d'une quantité $NO=NP$, et menant OQ; les triangles, QNP, QNO, seraient égaux, car en faisant tourner le second triangle autour de NQ, de manière que le plan de ce triangle coïncidât avec le plan du premier triangle, les angles QNO, QNP étant droits, NO prendrait la direction NP et comme $NO=NP$, le point O tomberait en P; les deux triangles coïncideraient donc; les angles, PQN, OQN, seraient donc égaux; mais le premier angle est droit; le second serait donc droit; les droites, QN, QP, QO, seraient donc telles, que la somme des deux angles formés par la première avec les deux autres, vaudrait 180°; PQO serait donc une ligne droite (n° 11. 2°); on pourrait donc mener deux droites différentes par deux points P et O; ce qui est absurde (n° 1). PQ ne peut donc pas être perpendiculaire à AB.

2°. Soit, $AN=BN$; les angles PNA, PNB, étant égaux, si l'on fait tourner le triangle PNB autour de PN, de manière que le plan de ce triangle coïncide avec le plan du triangle PNA; alors NB prendra la di-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

rection NA, et comme $NA = NB$, le point B tombera en A; les triangles, PNB, PNA, coïncideront donc; les côtés, PA, PB, sont donc égaux; les obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire, sont donc égales.

Réciproquement, lorsque $PA = PB$, on peut en conclure que $NA = NB$; car en faisant tourner le triangle PNB autour de PN, NB prendra la direction NA; l'extrémité B de NB, tombera donc sur NV; mais dans ce mouvement, la ligne PB ne changeant pas de longueur, le point B devra se trouver sur l'arc mn, décrit de B comme centre avec le rayon PB; or $PA = PB$; cet arc passera donc par A; le point P doit donc se trouver à la fois sur NV et sur l'arc mAn; ce point est donc l'intersection A, de mn avec NV; les triangles, PNB, PNA, coïncident donc; les distances, AN, BN, sont donc égales; les obliques égales, s'écartent donc également du pied de la perpendiculaire.

3°. La perpendiculaire PN à AB, est plus courte qne l'oblique PQ, car on a $PO < PQ + QO$ (n° 1), ou $2PN < 2PQ$, ou $PN < PQ$.

4°. NQ étant plus petit que NA, je dis que PQ est plus petit que PA. En effet; menez AO; vous aurez (n° 1)..... $QO < TQ + TO$ et $TP < TA + AP$. Donc.....

$PQ + QO < (PQ + TQ) + TO$ et $TP + TO < (TA + TO) + AP$.

Donc, $QP + QO < TP + TO$ et $TP + TO < AO + AP$.

Donc, à plus forte raison, (1)... $QP + QO < AP + AO$.

Or, $QP = QO$ et $AP = AO$; donc, $2QP < 2AP$; d'où $PQ < PA$.

Donc, de deux obliques, celle qui s'approche le plus de la perpendiculaire est la plus courte.

Réciproquement, lorsque PQ est plus petit que PA; NQ est plus petit que NA, car si NQ était égal à NA, ou plus grand que NA, on a prouvé que PQ serait égal à PA, ou plus grand que PA, ce qui est contre l'hypothèse. Par conséquent, de deux obliques, la plus courte s'approche le plus de la perpendiculaire.

Les obliques situées de part et d'autre de la perpendiculaire, jouissent des mêmes propriétés, car, comme en prenant, $NA = NB$, il en résulte $PA = PB$; les propriétés des obliques, PA, PQ, conviennent aux obliques PB, PQ. Ainsi, $NQ < NB$, donne $PQ < PB$, et *réciproquement*, $PQ < PB$, donne $NQ < NB$.

17. *Remarque.* L'inégalité (1) étant vraie quelle que soit la position du point Q dans le triangle PAO, on en déduit que, *si d'un point pris dans l'intérieur d'un triangle, on mène des droites aux extrémités d'un côté; la somme de ces droites sera moindre que la somme des deux autres côtés du triangle.*

18. *D'un point P (fig. 12), pris hors d'une droite BV, on ne peut*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

pas mener plus de deux obliques égales sur cette droite. En effet; soit $NA=NB$; il en résultera $PA=PB$, et la distance de toute autre oblique au pied de la perpendiculaire étant plus grande ou plus petite que AN, cette oblique sera plus grande ou plus petite que PA. On ne peut donc pas trouver un point qui soit à égale distance de trois points en ligne droite. *Une circonférence ne peut donc jamais passer par trois points en ligne droite.*

Note sur les n^os 31 et 32.

19. *Lorsque par le milieu d'une droite, on mène une perpendiculaire à cette droite; chaque point de la perpendiculaire est également éloigné des extrémités de la droite, et il n'y a que les points de la perpendiculaire qui jouissent de cette propriété.* En effet; conduisez CD *(fig. 12)* perpendiculaire sur le milieu N de AB (*); d'un point S, situé hors de CD, menez des droites, SA, SB, et tirez la droite PB. Vous aurez $PA=PB$, (n° 16, 2°). Or, (n° 1), $SB<SP+PB$; donc, $SB<SP+PA$, ou $SB<SA$. Le principe est donc démontré.

Note sur les n^os 36...42 et 74.

20. *Bezout* donne une définition exacte des *parallèles*, mais il ne démontre pas rigoureusement les propriétés de ces lignes. De sorte que les démonstrations des n^os 36...42 et 74, ne sont pas très-exactes. Nous allons suivre une marche inverse ; nous démontrerons d'abord le principe du n° 74 ; nous en déduirons la théorie des parallèles.

21. *Lorsque dans deux triangles, DAI, FAL (fig. 59 et 60), les côtés, AD, AI, qui forment l'angle a, sont respectivement égaux aux côtés AF, AL, qui forment l'angle b; le côté opposé au plus grand des angles a et b est le plus grand. Et réciproquement, celui de ces deux angles qui est opposé au plus grand côté, est le plus grand.* En effet; 1°. soit $a>b$; il s'agit de prouver que DI est plus grand que FL. Menez AS, sous l'angle $SAI=b$, et à partir du point A, portez sur AS, une ligne égale à AF; l'extrémité de cette ligne ne pourra tomber que sur la base DI, ou dans le triangle ADI, ou hors de ce triangle. Dans le 1^er cas, on aura $Aq=AF$; les triangles, AqI, AFL, seront donc égaux, (B. n° 80), Iq sera donc égal à FL; ID sera donc plus grand que FL. Dans le 2^e cas; on aura $Ap=AF$; tirant Ip, les triangles AIp, ALF seront égaux (B. n° 80); de sorte que $Ip=LF$; mais (n° 17), $DA+DI>pA+pI$; or, $pA=AF=AD$ et $pI=FL$; DI est donc plus grand que FL. Enfin, dans le 3^e cas, on a $Ar=AF$; tirant Ir, les triangles, rAI, FAL, sont

---

(*) Lorsqu'on dit que CD est perpendiculaire sur le milieu de AB, on entend que la ligne CD est perpendiculaire à AB et passe par le milieu de AB.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

égaux (B. n° 80); donc, $Ir = FL$. Mais, on a (n° 1).....

$$qr + qI > Ir,\ qA + qD > AD.\ \text{Donc}.....$$

$$(qr + qA) + (qI + qD) > Ir + AD;\ \text{ou}\ Ar + DI > Ir + AD.$$

Or, $Ar = AF = AD$ et $Ir = FL$; DI est donc plus grand que FL. La proposition directe est donc démontrée.

2°. *Réciproquement;* soit, $DI > FL$; je dis que l'on aura $a > b$, car d'après ce qui vient d'être démontré, si l'angle DAI était plus petit que l'angle FAL, le côté DI serait plus petit que FL et si le premier angle était égal au second, DI serait égal à FL (B. n° 80); ce qui est contre l'hypothèse.

22. *La somme des trois angles d'un triangle est égale à deux angles droits.* Il s'agit de prouver que cette somme ne peut être ni plus grande ni plus petite que 180°. Cela posé; 1°. *si la somme des angles*, a, b, c, *du triangle* ABC, (*fig.* 135), *était plus grande que* 180°, on aurait, $a + b + c > 180°$. Sur le prolongement CR, de AC, prenez des parties, CE, EG, etc., égales à CA; par les points, C, E, G, etc., menez des droites, CD, EF, GH, etc., égales à AB et qui forment l'angle a avec AR. Tirez, BD, DF, FH, DE, FG, etc.; les triangles, ABC, CDE, EFG, etc., seront égaux, (B. n° 80); les angles de ces triangles seront donc égaux chacun à chacun, comme il est indiqué sur la figure. La ligne AR étant droite, on a (n° 11).....

$$180° = a + c + d = a + c + d' = a + c + d''\ ;\ \text{donc},\ d = d' = d''.$$

Les triangles, BCD, DEF, FGH, etc., sont donc égaux (B. n° 80); les côtés, BD, DF, FH, etc., sont donc égaux. Mais, par hypothèse, $a + c + b > 180°$, et (n° 11), $a + c + d = 180°$. Donc, $b > d$; AC est donc plus grand que BD (n° 21). On a donc, $AC = BD + p$; (p désignant une quantité finie et positive). Or, quelque petite que soit la quantité p, on pourra toujours la répéter un assez grand nombre de fois pour que le produit soit plus grand que la ligne donnée $2AB$. Soit, $3p > 2AB$. On aura, $3p = 2AB + q$, et q sera positif. Mais, l'équation $AC = BD + p$, donne $3AC = 3BD + 3p$; donc.....

$$3AC = 3BD + (2AB + q);\ \text{ou}\ AG = AB + BD + DF + FH + HG + q.$$

La droite AG serait donc plus longue que la ligne brisée $ABDFHG$, terminée aux mêmes points; ce qui est absurde (n° 1); la somme des trois angles d'un triangle ne peut donc pas être plus grande que 180°. Cette somme est donc égale à $180° - 3r$; $3r$ désignant une quantité positive ou nulle; le plus petit des trois angles d'un triangle ne peut donc jamais surpasser $(60° - r)$. On en déduit que la somme des trois angles d'un triangle ne peut pas être moindre que 180°. En effet;

2°. *Si la somme des trois angles*, a, b, c, *du triangle* ABC (*fig.* 41), *était moindre que* 180°, on aurait (1)... $(a + b + c) + p = 180°$, et le

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

plus petit de ces angles serait moindre que 60°. Supposez que b soit cet angle; prolongez indéfiniment les côtés, BA, BC; l'angle DBH sera aigu; par les points A et C, menez des droites, AK, CK, qui forment avec AC, des angles égaux à c et a; les triangles, BAC, KAC, seront égaux (B. n° 81); l'angle AKC, sera donc égal à b. Par le point K, situé dans l'angle aigu DBH, menez une droite $A'C'$, qui rencontre les côtés BD, BH. La somme des trois angles d'un triangle ne pouvant excéder 180°, vous aurez...

$a+b+c=180°-p$; $a+b+c=180°-p$; $a'+e+r=180°-p'$; $c'+m+n=180°-p''$

(Les angles, p, p', p'', sont positifs. Ces angles peuvent être nuls). Ajoutant ces quatre équations, membre à membre, il viendra....

$$(a'+b+c')+(a+c+e)+(r+b+n)+(m+a+c)=720°-2p-p'-p''.$$

Mais, (n° 11), $(a+c+e)=180°$; $(r+b+n)=180°$; $(m+a+c)=180°$.

Donc, (2)... $(b+a'+c')+(2p+p'+p'')=180°$.

Comparant les égalités (1) et (2), on voit que si l'on doit ajouter p à la somme des angles du triangle BAC, pour obtenir 180°, il faudra ajouter plus de $2p$ à la somme des angles du triangle $BA'C'$, pour trouver 180°. Opérant sur le triangle $BA'C'$, comme sur le triangle BAC, on formerait un troisième triangle qui serait tel qu'on devrait ajouter plus de $4p$, à la somme de ses trois angles, pour obtenir 180°; répétant la même construction, on formerait des nouveaux triangles dans lesquels les quantités qu'il faudrait ajouter à la somme des trois angles, pour obtenir 180°, seraient successivement plus grandes que, $8p$, $16p$, $32p$, etc.; et par conséquent, quelque petite que fût la quantité p, on parviendrait toujours à la répéter assez de fois, pour que l'un de ces produits fût plus grand que 180°. On trouverait donc un triangle tel qu'il faudrait ajouter plus de 180° à la somme de ses trois angles, pour obtenir 180°; ce qui est évidemment absurde. La somme des trois angles d'un triangle ne peut donc pas être moindre que 180°; mais elle ne peut surpasser 180°; elle est donc égale à 180°.

23. *Deux droites, situées dans un même plan, sont dites* PARALLÈLES, *lorsqu'elles ne peuvent jamais se rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge.*

24. *Deux droites, perpendiculaires à une même droite, ne peuvent jamais se rencontrer, à quelque distance qu'on les prolonge.* En effet; si les droites, AB, CD, (*fig.* 17), perpendiculaires à GS, se rencontraient en un certain point O, on pourrait mener par ce point deux perpendiculaires, OG, OS, sur GS, ce qui est absurde (n° 16). Les droites, AB, CD, sont donc parallèles (n° 23).

25. *Quand trois droites, AB, CD, EF, (fig. 17), sont telles que $a+b=180°$; on peut en conclure que AB est parallèle à CD;* car si AB pouvait rencontrer CD, en un point O, la somme des trois angles du triangle OGH serait plus grande que 180°; ce qui est absurde (n° 22).

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

26. *Réciproquement, lorsque deux droites, AB, CD, (fig. 17), sont parallèles, la somme des angles a et b, qu'elles forment avec une sécante quelconque EF, est égale à* 180°. En effet; si $(a+b)$ était plus petit que 180°, on aurait $a+b=180°-c$; d'où $a+b+c=180°$. On pourrait donc regarder, a, b, c, comme les trois angles d'un triangle GHO, dans lequel l'angle GOH serait égal à c (n° 22); les parallèles, GB, HD, se rencontreraient donc; ce qui est absurde (n° 23).

2°. Si $(a+b)$ était plus grand que 180°, on aurait...

$a+b=180°+c'$; or $a+b'=180°$ et $a'+b=180°$ (n° 11); donc $(a+b)+(a'+b')=360°$, ou $(180°+c')+(a'+b')=360°$; donc $a'+b'+c'=180°$.

On pourrait donc regarder, a', b' et c', comme les trois angles d'un triangle $O'GH$, dans lequel l'angle O' serait égal à c'; les parallèles AB, CD, se rencontreraient donc; ce qui est absurde. La somme des angles a et b est donc égale à 180°. (*).

27. *Lorsque trois droites, BC, PF, DM, (fig. 18), satisfont à l'une des conditions,* $a+b=180°$; $a=a'$; $b=b'$; *on peut en conclure que BC est parallèle à PF.* En effet;

1°. Lorsque $a+b=180°$, les droites, BC, PF, sont parallèles (n° 25).

2°. Quand, $a=a'$, on a, $a+b=a'+b$; or $a'+b=180°$; donc, $a+b=180°$; les droites, BC, PF, sont donc parallèles (n° 25).

(*) En voici une démonstration plus rigoureuse. Concevez deux parallèles AB, CD, (*fig.* 272), coupées par une droite EF; 1°. si la somme des angles a et b était plus petite que 180°, on pourrait mener une droite GK telle que la somme des angles, KGH, GHD, fût égale à 180°; mais la somme des angles, CHG, GHD, vaut 180°; les angles KGH et CHG sont donc égaux. Prenez $HR=HG$; les angles, HGR, HRG, seront égaux; mais la somme de ces angles est égale à l'angle CHG, et $CHG=KGH$; l'angle RGK est donc la moitié de l'angle HGK. Prenant $RR''=GR$, et tirant GR'', on prouverait de même, que l'angle $R''GK$ est la moitié de l'angle RGK, ou le quart de l'angle primitif HGK. Répétant n fois cette construction, et supposant que la dernière ligne menée du point G, à un point T de la droite CD, soit GT'; l'angle TGK serait égal à l'angle HGK, divisé par 2^n; on pourrait donc prendre n assez grand pour que l'angle TGK fût moindre que l'angle donné BGK; la droite GT serait donc au-dessus de GB; mais GT' rencontre CD en T'; la droite AB rencontrerait donc CD, en un point O, plus près du point H que le point T; les parallèles AB, CD, se rencontreraient donc; ce qui est absurde.

2°. Si la somme des angles a et b était plus grande que 180°; la somme des angles a', b', serait moindre que 180°, car $(a+b)+(a'+b')=360°$; les parallèles AB, CD, se rencontreraient donc (1°); ce qui est absurde. La somme des angles a et b est donc égale à 180°.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

3°. Lorsque $b = b'$; on en déduit $a + b = a + b'$; or, $a + b' = 180°$; donc $a + b = 180°$; les droites BC, PF, sont donc parallèles (n° 25),

28. RÉCIPROQUEMENT, *deux droites parallèles*, BC, PF, (*fig.* 18), *coupées par une droite quelconque* DM, *jouissent des propriétés suivantes*, $a + b = 180°$, $a = a'$, $b = b'$. En effet; les droites, BC, PF, étant parallèles, on a (n° 26), $a + b = 180°$;.....

mais, $a + b' = 180°$ et $a' + b = 180°$, (n° 11);

Donc, $a + b = a + b'$ et $a + b = a' + b$; d'où $b = b'$ et $a = a'$.

29. *Par un point donné, on ne peut mener qu'une seule parallèle à une ligne donnée.* En effet; si par le point E (fig. 19), on pouvait mener deux parallèles, EB, EQ, à la droite CD; il en résulterait (n° 26)..... $QEC + ECD = 180°$; $BEC + ECD = 180°$; les angles QEC, BEC, seraient donc égaux; ce qui est absurde.

30. *Lorsqu'une droite est perpendiculaire à une autre, toutes les parallèles à la premiere droite, sont perpendiculaires à la seconde.* En effet; soit la droite AB (fig. 17), perpendiculaire à GS; menons la parallèle CD à AB; la somme des angles, BGS, GSD, vaudra 180° (n° 26); mais AB étant perpendiculaire à GS, l'angle BGS vaut 90°; l'angle GSD est donc droit; CD est donc perpendiculaire à GS; ce qui démontre le principe énoncé.

31. *Deux droites, parallèles à une troisième, sont parallèles entre elles.* En effet; menez deux parallèles, MN, CD, (fig. 17), à AB; tirez GS perpendiculaire sur AB; la ligne GS sera perpendiculaire aux lignes MN, CD, parallèles à AB (n° 30); les lignes MN et CD seront donc perpendiculaires à GS; elles seront donc parallèles entre elles (n° 24).

32. *Deux droites égales et parallèles à une troisieme, sont donc égales et parallèles entre elles.*

33. *Les parallèles, comprises entre parallèles, sont égales.* En effet; menez quatre droites, AB, CD, PH, GS, (fig. 17), parallèles deux à deux; tirez la sécante EF; les lignes, AB, CD, étant parallèles, les angles PGH, GHS, sont égaux; de même PH étant parallèle à GS, les angles PHG, HGS, sont égaux; les triangles, HGP, HGS, sont donc égaux (B. n° 81); donc, $PG = HS$ et $PH = GS$.

34. *Deux droites, GH, AC, (fig. 17), comprises entre deux parallèles AB, CD, peuvent être égales, sans être parallèles.* En effet; menez GS perpendiculaire à CD et GR parallèle à AC; GR sera égal à AC (n° 33). Prenez, $SH = SR$; vous aurez $GH = GR$ (n° 16. 2°); or $GR = AC$; donc, $GH = AC$.

35. *Déterminer la plus courte distance entre deux droites parallèles, AB, CD, (fig. 17).* La plus courte distance d'un point quelconque G, de AB, à la droite CD, étant la perpendiculaire GS, menée de ce point sur CD (n° 16. 3°); on voit que la plus courte distance demandée ne peut être

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

que l'une des perpendiculaires communes aux deux parallèles. Mais, toutes ces perpendiculaires sont égales (n° 33); chacune d'elles mesure donc la plus courte distance demandée. Donc, *deux parallèles sont partout à égale distance, et la plus courte distance entre deux parallèles, est la perpendiculaire commune à ces parallèles.*

36. *Deux parallèles, qui ont un point commun, coïncident dans toute leur étendue*, car la plus courte distance de ces parallèles étant nulle, toutes les perpendiculaires communes à ces deux parallèles sont également nulles. On en déduit que par un point donné on ne peut mener qu'une seule parallèle à une ligne donnée; car si on pouvait en mener deux, ces deux parallèles, qui auraient un point commun, coïncideraient dans toute leur étendue; ce qui s'accorde avec le principe du n° 29.

37. *Si par le milieu M (fig. 17), d'une droite AC, terminée aux parallèles, AB, CD, on mène une parallèle MN à CD; la droite MN, divisera en deux parties égales toutes les droites comprises entre les parallèles AB, CD.* En effet; tirez une droite $R'Q$, qui coupe MN en N; par le point N, menez $A'C'$ parallèle à AC; il en résultera (n° 33) ..... $A'N = AM$, $C'N = CM$; or $AM = CM$; donc $A'N = C'N$. Les droites AB, CD, étant parallèles, les angles, $NA'R'$, $NC'Q$, sont égaux; mais les angles, $A'NR'$, $C'NQ$, sont égaux; les triangles, $A'NR'$, $C'NQ$, sont donc égaux (B. n° 81); les côtés, NR', NQ, sont donc égaux.

38. *Remarque.* Chaque point de la droite MN, peut donc être considéré comme le *centre* (n° 6) des parallèles, AB, CD. *Le système de deux droites parallèles a donc une infinité de centres, situés en ligne droite.*

39. *Deux droites se rencontrent toujours, lorsqu'elles sont perpendiculaires à deux droites qui se coupent.* En effet; menez deux droites, AX, BC (fig. 26), qui se coupent en B; conduisez des perpendiculaires, ED, RF, à ces droites; si les lignes, ED, RF, ne se rencontraient pas, elles seraient parallèles; or ED est perpendiculaire à AX; la parallèle RF à ED, serait donc aussi perpendiculaire sur AX, (n° 30); BR serait donc perpendiculaire à RF; mais BP est perpendiculaire à RF; on pourrait donc mener du point B deux perpendiculaires sur la même droite RF; ce qui est absurde (n° 16. 1°). Les droites, ED, RF, se rencontrent donc.

Note sur le n° 46.

40. *Une droite ne peut rencontrer une circonférence en plus de deux points.* En effet; si une droite rencontrait la circonférence en plus de deux points, les distances du centre à ces points étant égales, on pourrait mener plus de deux droites égales d'un point sur une droite; ce qui est absurde (n° 18).

Note sur le n° 54.

41. *Par trois points, qui ne sont pas en ligne droite, on peut toujours*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

faire passer une circonférence ; mais on n'en peut faire passer qu'une seule. En effet ; supposez que, A, B, C, (fig. 26), soient les trois points donnés. Joignez ces points par des droites, AB, BC, AC; la droite menée par deux de ces points ne passera pas par le troisième. La circonférence cherchée devant passer par les trois points donnés ; le centre de cette circonférence doit être également éloigné de ces trois points. Mais, tous les points également distans des extrémités A et B, de AB, sont sur la droite DE, menée perpendiculairement à AB, par le milieu M de AB (n° 19) ; le centre ne peut donc être situé que sur la droite DE. Par une raison semblable, le centre ne peut être situé que sur la perpendiculaire GF menée sur le milieu P, de BC. Le centre cherché ne peut donc être situé qu'à l'intersection I, des droites GF et DE. Le point I est le centre du cercle demandé, car les droites, ED, GF, étant respectivement perpendiculaires sur les milieux M et P des droites, BA, BC; le point I, qui appartient à ces deux droites, est également distant de A et B, et de B et C. Menant donc les droites IA, IB, IC, on aura $IA = IB$; $IB = IC$; donc $IA = IB = IC$. La circonférence, décrite du point I comme centre avec le rayon IA, passera donc par les trois points donnés, A, B, C. Le centre I existe toujours, car les droites AB, BC, se coupant, les perpendiculaires, DE, RF, à ces droites, se rencontrent toujours en un point I (n° 39). Ce point est le centre de la circonférence demandée. Il n'existe qu'une seule circonférence qui passe par les trois points donnés, car le centre de la circonférence demandée doit se trouver en même tems sur les droites, DE, RF, et ces droites ne peuvent se couper qu'en un seul point I, (n° 12).

42. *Remarque.* Le centre I étant à égale distance des points A et C, si par le milieu O, de AC, on menait une perpendiculaire OS, à AC, elle passerait par le point I. Il en résulte, que si par les milieux, M, P, O, des côtés d'un triangle ABC, on mène des perpendiculaires à ces côtés ; ces trois perpendiculaires se couperont toujours en un même point I.

43. Une circonférence est entièrement déterminée, lorsqu'elle doit passer par trois points qui ne sont pas en ligne droite (n° 41). Deux circonférences qui ont trois points communs se confondent donc. Deux circonférences ne peuvent donc jamais se couper en plus de deux points. Pour *circonscrire* une circonférence à un triangle, il suffit de faire passer une circonférence par les sommets des trois angles du triangle (n° 41).

44. *Tout angle, dont les côtés prolongés rencontrent la circonférence, a pour mesure la demi-somme algébrique des arcs compris entre ses côtés ; en ayant soin d'affecter les arcs concaves du signe + et les arcs convexes du signe —* (*), car l'application de cette règle donne...

(*) Par rapport à l'angle BAC (fig. 33), l'arc BC est concave, et l'arc ED est convexe.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

(fig. 31), *ang.* $FCE = \frac{1}{2}(FE + GH) = FE$; *ang.* $BAD = \frac{1}{2} BED$.

(fig. 37), *ang.* $BAC = \frac{1}{2}(BC + DE)$; (fig. 38), *ang.* $BAC = \frac{1}{2}(BC - DE)$.

Ce qui s'accorde avec les règles relatives à la mesure des angles, (B. nos 12, 63, 70, 71).

45. *Lorsque plusieurs angles s'appuient sur le diamètre d'un cercle; les angles qui ont leurs sommets sur la circonférence, sont droits; les angles qui ont leurs sommets hors du cercle, sont aigus; et les angles, dont les sommets sont placés entre le centre et la circonférence, sont obtus. La réciproque est vraie.* En effet; menez le diamètre CV (fig. 26) et joignez les extrémités de ce diamètre avec des points H, T, Q, pris, sur la circonférence, hors du cercle, et dans le cercle; l'angle CHV, sera droit, car il a pour mesure, la moitié de la demi-circonférence CBV, ou 90°; l'angle CTV, sera aigu, car il a pour mesure la moitié de la demi-circonférence CBV moins la moitié de l'arc Hx, c'est-à-dire $(90° - \frac{1}{2} Hx)$; enfin l'angle CQV, sera obtus, car il a pour mesure $\left(\frac{1}{2} CBV + \frac{1}{2} Hx\right)$, ou $(90° + \frac{1}{2} Hx)$.

Réciproquement, selon qu'un angle, qui s'appuie sur un diamètre, est droit, ou aigu, ou obtus; le sommet de cet angle est situé sur la circonférence, ou hors du cercle, ou dans le cercle, car d'après la proposition directe, le sommet de l'angle ne peut être placé d'aucune autre manière.

Note sur le n° 70.

46. Lorsqu'un angle a pour mesure l'arc compris entre ses côtés, on ne peut pas en conclure que le sommet de cet angle est placé au centre, car en joignant les extrémités des cordes parallèles, AB, CD (fig. 30), par des droites, AD, BC, qui se coupent en O; les arcs, AC, BD, sont égaux (B. n° 59); l'angle AOC a pour mesure $\frac{1}{2}(AC + BD)$, (n° 44), ou $\frac{1}{2}(2AC)$, ou AC; et l'on voit que le sommet de cet angle n'est pas placé au centre du cercle.

Note sur le n° 77.

47. *Lorsque plusieurs angles d'un triangle sont égaux, les côtés opposés sont égaux; et réciproquement, lorsque plusieurs côtés sont égaux, les angles opposés sont égaux* (B. n°. 77).

Note sur le n° 78.

48. *Dans un triangle, le plus grand côté est opposé au plus grand angle, et réciproquement, le plus grand angle est opposé au plus grand côté.* En effet; si l'angle BAC (fig. 48) est plus grand que l'angle C, on

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

pourra mener la droite AD sous un angle DAC égal à C; les côtés AD, DC, seront égaux (n° 47), et l'on aura...

$$BD + DA > AB, \text{ ou } BD + DC > AB, \text{ ou } BC > AB.$$

49. *Réciproquement*, si BC est plus grand que AB, l'angle BAC sera plus grand que l'angle C, car si l'angle BAC était égal à l'angle C, ou plus petit que l'angle C, le côté BC serait égal à AB (n° 47), ou plus petit que AB (n° 48); ce qui est contre l'hypothèse.

Notes sur les n^os 80, 81, 83.

50. *Deux triangles rectangles, qui ont des hypoténuses égales et un côté égal, sont égaux* (n° 16. 2°). Deux triangles rectangles sont égaux, lorsqu'ils ont les deux côtés de l'angle droit égaux, chacun à chacun (B. n° 80).

Note sur le n° 102.

51. *Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle, divise les deux autres côtés proportionnellement.* Bezout fondant sa démonstration sur la division de AF (fig. 56) en une infinité de parties égales, on peut éviter cette division à l'aide d'un raisonnement plus exact. En effet; soit DI parallèle à FL; si le quatrième terme de la proportion (1)... $AF : AD :: AL : AI$, n'était pas AI, il serait plus grand ou plus petit; on aurait donc...

$$(2)... AF : AD :: AL : AO, \text{ ou } AF : AD :: AL : AO'.$$

Divisant AL en parties égales moindres que OI ou que $O'I$, un des points de division tomberait en K ou K'; menant KP ou $K'P'$, parallèle à FL, ces droites étant menées par des points de division de AL, diviseraient les côtés proportionnellement; on aurait donc...

$$(3)... AF : AP :: AL : AK, \text{ ou } AF : AP' :: AL : AK';$$

la combinaison des proportions (2) et (3), donnerait...

$$AD : AP :: AO : AK, \text{ ou } AD : AP' :: AO' : AK'.$$

Or, AD est plus petit que AP et plus grand que AP'; il faudrait donc, pour que ces dernières proportions pussent subsister, que AO fût plus petit que AK, et que AO' fût plus grand que AK'; ce qui est absurde. Mais, les proportions (3) sont exactes; l'erreur ne peut donc venir que des proportions (2); le quatrième terme de la proportion (1) ne peut donc être, ni plus grand ni plus petit que AI; ce quatrième terme est donc AI. Cette proposition étant ainsi rigoureusement démontrée, les conséquences que Bezout en déduit, deviennent exactes.

52. En général, *on pourra toujours remplacer la méthode des infiniment petits, par des considérations analogues aux précédentes.*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Réciproque du principe du n° 102.

53. *Lorsqu'une droite, menée dans un triangle, divise deux côtés proportionnellement; on peut en conclure que cette droite est parallèle au troisième côté.* Il s'agit de prouver que si l'on a..... $AF : AD :: AL : AI$, (fig. 56), DI sera parallèle à FL. Cela n'offre aucune difficulté, car si DI n'était pas parallèle à FL, on pourrait mener par le point D, une parallèle DK à FL; et l'on aurait (n° 51)...

$AF : AD :: AL : AK$; mais $AF : AD :: AL : AI$;

les droites AK, AI, seraient donc égales; ce qui exige que DK tombe sur DI; la droite DI est donc parallèle à FL. Cela démontre les principes des n°s 105 et 106 de Bezout.

Réciproque du principe du n° 104.

54. *Lorsqu'une droite, menée du sommet d'un triangle sur un point de la base, divise cette base en parties proportionnelles aux deux autres côtés; on peut en conclure que cette droite divise l'angle du sommet en deux parties égales.* En effet; supposons que l'on ait..... $AG : AL :: GI : IL$, (fig 57). Si AI ne divisait pas l'angle GAL en deux parties égales; on pourrait mener une autre droite AK, qui diviserait cet angle en deux parties égales; il en résulterait (B. n° 104)..... $AG : AL :: GK : KL$; mais $AG : AL :: GI : IL$; donc... $GI : GK :: IL : KL$. Or, GK est plus grand que GI; il faudrait donc, pour que cette proportion pût subsister, que KL fût plus grand que IL; ce qui n'est pas. Il est donc absurde de supposer que AI ne divise pas l'angle GAL en deux parties égales.]

Note sur les n°s 108 et 109.

55. Les côtés *homologues* de deux figures sont les côtés adjacens à des angles égaux; ainsi, dans les polygones, $ABCDE$, $abcde$ (fig. 72 et 73), les angles, CDE, AED, étant respectivement égaux aux angles, cde, aed, les côtés ED, ed, sont homologues. On dit que deux triangles sont *semblables*, lorsqu'ils ont les angles égaux chacun à chacun, et les côtés *homologues* proportionnels. On doit observer que les côtés *homologues* sont ceux qui sont opposés aux angles égaux.

Note sur le n° 110.

56. Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun (*B.* n° 110). Par conséquent; *deux triangles rectangles, qui ont un angle aigu égal, sont semblables; deux triangles, qui ont un angle égal et un angle commun, sont semblables.*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Note sur le n° 111.

57. *Deux triangles qui ont les côtés perpendiculaires, chacun à chacun, sont semblables. Les côtés homologues, sont les côtés perpendiculaires.* En effet; soit le triangle $A'B'C'$ (fig. 45), dont les côtés $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$, sont respectivement perpendiculaires sur, AB, AC et BC; prolongeons les côtés du premier triangle jusqu'à ce qu'ils rencontrent les côtés du second, en, R, P et Q. La somme des angles intérieurs du quadrilatère $BRB'Q$, valant 360° (B. n° 86), et les angles R et Q étant droits, la somme des deux autres angles, $C'B'R$ et B, vaut 180°. Mais, l'angle $C'B'A'$ + l'angle $C'B'R = 180°$; les angles, B et $C'B'A'$, sont donc égaux. On prouverait de même que les angles A', C', du triangle $A'B'C'$, sont respectivement égaux aux angles A et C, du triangle ABC; ces deux triangles sont donc semblables (n° 56); et les côtés proportionnels étant ceux qui sont opposés aux angles égaux, on a $AB : AC : BC :: A'B' : A'C' : B'C'$. Les côtés homologues sont donc les côtés perpendiculaires. La même démonstration s'applique au cas où les deux triangles ne sont pas l'un dans l'autre.

Réciproque du second principe du n° 112.

58. *Lorsque la perpendiculaire AD (fig. 43), menée du point A, sur le côté BC, est moyenne proportionnelle, entre les segmens, BD, CD, l'angle BAC est droit.* En effet; menons AR perpendiculaire sur AB; l'angle BAR étant droit, on aura (B. n° 112. 2°), $BD : AD :: AD : DR$. Or, par hypothèse, $BD : AD :: AD : DC$; donc $DR = DC$. La perpendiculaire AR, à BA, se confond donc avec AC; l'angle BAC est donc droit.

59. *Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.* En effet; soit le triangle BAC, rectangle en A, (fig. 43); si l'on mène AD perpendiculaire à BC; on aura...

$BD : AB :: AB : BC$, et $CD : AC :: AC : BC$; (B. n° 112);

d'où..... $AB^2 = BC \times BD$ et $AC^2 = BC \times CD$;

donc..., $AB^2 + AC^2 = BC\,(BD + CD) = BC \times BC = BC^2$.

60. *Réciproquement*, lorsque dans un triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, l'angle opposé au plus grand côté est droit. Il s'agit de prouver que si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (fig. 43); l'angle BAC sera droit. Sur AB, menez une perpendiculaire $AQ = AC$; tirez la droite BQ; l'angle BAQ étant droit, vous aurez (n° 59), $BQ^2 = AB^2 + AQ^2$, ou, $BQ^2 = AB^2 + AC^2$. Mais, par hypothèse, $AB^2 + AC^2 = BC^2$; donc $BQ = BC$. Les triangles, BAC, BAQ, sont donc égaux (B. n° 83); mais l'angle BAQ est droit; l'angle BAC est donc droit.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

61. La somme des carrés des nombres 3 et 4, étant égale au carré du nombre 5, on voit que si les trois côtés d'un triangle sont proportionnels aux nombres, 3, 4, 5, l'angle opposé au plus grand côté sera droit.

62. *Dans tout triangle; le carré du côté opposé à un angle aigu, est moindre que la somme des carrés des deux autres côtés; et le carré du côté opposé à un angle obtus, est plus grand que la somme des carrés des deux autres côtés. La réciproque est vraie.* En effet; soient les triangles, ACB, $ACB_{,,}$, (fig. 42), dans lesquels, l'angle ACB est aigu, et l'angle $ACB_{,,}$ est obtus; prolongez AC suivant CR et des points, B, $B_{,,}$, menez BP et $B_{,,}P_{,,}$, perpendiculaires sur la droite ACR; vous aurez...

$$AP^2 = (AC - CP)^2 = AC^2 + CP^2 - 2AC \times CP \text{ et}$$
$$AP_{,,}^2 = (AC + CP_{,,})^2 = AC^2 + CP_{,,}^2 + 2AC \times CP_{,,}. \text{ D'où}$$
$$AP^2 + BP^2 = AC^2 + (CP^2 + BP^2) - 2AC \times CP \text{ et}$$
$$AP_{,,}^2 + B_{,,}P_{,,}^2 = AC^2 + (CP_{,,}^2 + B_{,,}P_{,,}^2) + 2AC \times CP_{,,}.$$

Mais, (n° 59) $\left\{\begin{matrix} AP^2 + BP^2 = AB^2 ; & CP^2 + BP^2 = BC^2 ; \\ AP_{,,}^2 + B_{,,}P_{,,}^2 = AB_{,,}^2 ; & CP_{,,}^2 + B_{,,}P_{,,}^2 = B_{,,}C^2 \end{matrix}\right\}$. Donc...

(1)... $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times CP$; $AB_{,,}^2 = AC^2 + B_{,,}C^2 + 2AC \times CP_{,,}$.
Donc...

(2)..... $AB^2 < AC^2 + BC^2$ et $AB_{,,}^2 > AC^2 + B_{,,}C^2$.

Réciproquement, lorsque les inégalités (2) subsistent, l'angle ACB est aigu et l'angle $ACB_{,,}$ est obtus; car, si l'angle ACB était droit ou obtus, AB^2 serait égal à $(AC^2 + BC^2)$, ou plus grand; ce qui est contre l'hypothèse, et l'on prouverait de même que l'angle $ACB_{,,}$ est obtus.

63. *Dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, les cordes égales sont à égale distance du centre; et réciproquement, les cordes qui sont également éloignées du centre, sont égales. De deux cordes inégales, la plus courte est la plus éloignée du centre; et réciproquement, la corde la plus éloignée du centre est la plus courte.* En effet; du centre M (fig. 34), de la circonférence BOA, menez des perpendiculaires, MP, MQ, sur deux cordes, AB, DE; les points P et Q seront les milieux de ces deux cordes (B. n° 51); et vous aurez, $BM^2 = MP^2 + BP^2$, $DM^2 = MQ^2 + DQ^2$, (n° 59). Mais, $BM = DM$. Donc, $MP^2 + BP^2 = MQ^2 + DQ^2$; donc...

$$(1)... \quad BP^2 - DQ^2 = MQ^2 - MP^2.$$

L'égalité (1) démontre le principe énoncé, car, 1°. si les cordes, AB, DE, sont égales, leurs moitiés, BP, DQ, seront égales; l'égalité (1) donnera, $MP = MQ$. *Réciproquement*, si $MP = MQ$, l'égalité (1) donnera, $BP = DQ$; d'où $AB = DE$.

2°. Lorsque DE est moindre que BA; DQ est moindre que BP; la

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

quantité ($BP^2 - DQ^2$) est positive ; ($MQ^2 - MP^2$) est donc positif ; MQ est donc plus grand que MP. *Réciproquement*, si MQ est plus grand que MP ; ($MQ^2 - MP^2$) sera positif ; ($BP^2 - DQ^2$) sera donc positif ; DQ sera donc plus petit que BP ; DE sera donc moindre que BA.

64. *Dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, le plus grand arc est soutendu par la plus grande corde ; et réciproquement, la plus grande corde soutend le plus grand arc* (*). En effet ; quand l'arc BmA (*fig.* 34), est plus grand que l'arc DOE, on peut prendre sur BmA, un arc $BmK = DOE$, et menant MR perpendiculaire sur BK, on a $BK = DE$ (n° 8), $MR = MQ$ (n° 63). Or, la perpendiculaire MP sur AB, est plus courte que l'oblique MS ; on a donc $MP < MR$, ou $MP < MQ$; la corde AB est donc plus grande que la corde DE (n° 63).

Réciproquement, lorsque la corde AB est plus grande que la corde DE ; MP est moindre que MR (n° 63) ; la corde BA tombe donc au-dessous de la corde BK ; l'arc BmA est donc plus grand que l'arc BmK ; or, $BmK = DOE$; l'arc BmA est donc plus grand que l'arc DOE. Cela démontre le second principe du n° 46 de Bezout.

Note sur le n° 129.

65. *Si d'un point A (fig. 69), pris hors d'un cercle, on mène une sécante AB et une tangente AF ; cette tangente sera moyenne proportionnelle entre la sécante entière AB, et la partie extérieure AD*, car en tirant, FB et FD, les angles ABF, AFD, sont égaux (n° 44) ; les triangles ABF, AFD, sont donc semblables (n° 56) ; on a donc $AB : AF :: AF : AD$.

66. *Si par le milieu E (fig. 24), de l'arc AB, on mène le diamètre EF, et des cordes, EP, EQ, qui coupent la corde AB aux points D, G, I ; le diamètre EF, sera perpendiculaire sur le milieu D de la corde AB* (B. n° 52), *et l'on aura* $ED \times EF = EG \times EP = EI \times EQ$, car en tirant les cordes PF, QF, les triangles rectangles, EPF, EDG, seront semblables, ainsi que les triangles EQF, EDI, (n° 56) ; on aura donc...

$$ED : EG :: EP : EF ; \quad ED : EI :: EQ : EF.$$

Note sur le n° 135.

67. Les polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables (B. n° 135). *Les périmètres de ces polygones sont proportionnels aux rayons des cercles inscrits et circonscrits.* En effet (fig. 74) ; les triangles, AIZ, aIz, étant semblables, les périmètres des polygones, $ABCDEFGH$, $abcdefgh$, sont comme IA est à Ia (B. n° 135), ou comme IZ est à Iz ; or

---

(*) Une même *corde* soutendant deux arcs, nous n'entendons parler que des arcs moindres que la demi-circonférence ; l'inverse aurait lieu, si l'on considérait des arcs plus grands que la demi-circonférence.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

IA et *Ia* sont les rayons des cercles circonscrits (B. n° 90); *IZ* et *Iz* sont les rayons des cercles inscrits (B. n° 91); la propriété est donc démontrée.

Note sur le n° 136.

68. Les principes du n° 136, étant fondés sur la considération des infiniment petits, il est nécessaire d'établir ces principes d'une manière plus rigoureuse. Pour y parvenir, nous démontrerons d'abord la propriété suivante: *De deux lignes* CONVEXES (*), *celle qui enveloppe l'autre est la plus grande.* Il s'agit de prouver que la ligne convexe, *qrbsc* (fig. 186), est plus grande que la courbe, *onm*. A cet effet, menez une tangente *bc* à *omn*; la droite *bc* étant plus courte que la courbe *bsc*, si l'on substitue *bnc* à *bsc*, le périmètre *bncqrb*, sera moindre que *bscqrb*; menant une autre tangente *bq*, et remplaçant la ligne *brq*, par la droite *bq*, le périmètre *qmbncq* sera moindre que *bncqrb*. Continuant à mener des tangentes à la ligne *omn*, et substituant ces tangentes aux lignes courbes ou brisées qui s'appuient sur elles, on formera des lignes brisées qui s'approcheront de plus en plus de *omn*, et dont les périmètres diminueront continuellement. Le périmètre *cqrbsc* s'approchant indéfiniment de *omn*, en diminuant; on doit en conclure que le premier périmètre était plus grand que le second.

Cette démonstration convient évidemment à des lignes convexes quelconques, entièrement courbes, ou composées de courbes et de lignes brisées.

Ainsi, le périmètre *CDA* (fig. 174), est plus court que *CDBA*; le périmètre *FEG* (fig. 182) est plus court que *BDCAB*; les circonférences *IA*, *Ia*, (*fig.* 74), sont plus grandes que le périmètre du polygone *abcdefgh*. Il en résulte que les longueurs des circonférences croissent en même temps que leurs rayons. Nous allons prouver que cet accroissement est tel que :

69. *Les longueurs des circonférences sont proportionnelles aux longueurs des rayons.* En effet; les périmètres des polygones réguliers d'un même nombre de côtés, étant proportionnels aux rayons des cercles circonscrits (n° 67), et les polygones pouvant approcher indéfiniment des cercles circonscrits, quoique sans pouvoir jamais se confondre exactement avec eux, on conçoit que le rapport des longueurs de deux circonférences quelconques, doit approcher de très-près du rapport de leurs rayons; mais on ne peut pas en conclure rigoureusement que ces rapports sont égaux. Pour le démontrer, on raisonnera comme dans le n° 9, et l'on dira : la longueur d'une circonférence, de rayon variable, pouvant passer par tous les états de grandeur, depuis zéro jusqu'à l'infini, une quantité quelconque, exprime toujours la longueur d'une circonférence; et par conséquent, si le quatrième terme de la proportion...

(1)... *OH*: *CA*:: *circonférence OH*: *circonférence CA* (*fig.* 187 et 188),

---

(*) Une ligne est *convexe*, lorsqu'une droite ne saurait la rencontrer en plus de deux points. Ainsi, dans la figure 182, la ligne *EFG* est *convexe*.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

n'était pas la circonférence CA, on aurait....

(2)... $OH : CA :: circ.\ OH : circ.\ CD$, ou $OH : CA circ. :: OH : circ.\ CB$.

Circonscrivant à la circonférence CA, un polygone régulier $pqrs$ etc., dont les côtés ne rencontrent pas la circonférence CD, et inscrivant dans la circonférence CA, un polygone $mnAt$ etc., semblable à $pqrs$ etc., dont les côtés ne rencontrent pas la circonférence CB; on pourrait circonscrire à la circonférence OH, un polygone $p'q'r's'$ etc., ou inscrire dans la même circonférenceun polygone $m'n'Ht'$ etc., semblable à $mnAt$ etc.; or les périmètres des polygones réguliers semblables, sont comme les rayons des cercles inscrits et circonscrits (n° 67); on aurait donc...

(3)... $OH : CA :: p'q'r's'$ etc. : $pqrs$ etc.; ou $OH : CA :: m'n'Ht'$ etc. : $mnAt$ etc.

La combinaison des proportions (2) et (3), donnerait...

$$circ.\ OH : p'q'r's' \text{ etc.} :: circ.\ CD : pqrs \text{ etc.}; \text{ ou}$$
$$circ.\ OH : m'n'Ht' \text{ etc.} :: circ.\ CB : mnAt \text{ etc.}$$

Mais, la circonférence OH, est plus petite que le périmètre du polygone $p'q'r's'$ etc., et plus grande que le périmètre $m'n'Ht'$ etc. (n° 68); il faudrait donc que la circonférence CD, fût plus petite que le périmètre $pqrs$ etc., ou que la circonférence CB, fût plus grande que le périmètre $mnAt$ etc.; ce qui est absurde (n° 68); les proportions (2) ne peuvent donc pas subsister; le quatrième terme de la proportion (1) est donc la circonférence CA.

70. *Les arcs semblables* (*) *sont proportionnels aux longueurs des rayons.* En effet; si m désignant un nombre, entier ou fractionnaire, l'arc DH' (fig. 187), est la $m^{ième}$ partie de la circonférence CD, l'arc semblable An sera la $m^{ième}$ partie de la circonférence CA; on aura donc... $arc\ DH' : arc\ An :: circ.\ CD : circ.\ CA :: CD : CA$, (n° 69).

La proposition est donc démontrée quand les arcs sont commensurables avec les circonférences dont ils font partie. La même propriété subsiste lorsque les arcs sont incommensurables; car, si le quatrième terme de la proportion (1)... $CD : CA :: arc\ DH' : arc\ An$, n'était pas l'arc An, ce quatrième terme serait plus grand ou plus petit; on aurait donc

(2)... $CD : CA :: DGH' : AT'$; ou $CD : CA :: DGH' : AT$.

Divisant la circonférence CA, en parties égales plus petites que nT' ou que nT, et prenant le point A pour l'origine de la première division, il tomberait au moins un point de division x' ou x, sur nT' ou sur nT; menant les droites, $Cx'X', CxX$, les arcs Ax' et DX' ou Ax et Dx, seraient commensurables avec les circonférences, CA, CD; on aurait donc.....

$$CD : CA :: DX' : Ax'; \text{ ou } CD : CA :: DX : Ax.$$

(*) Les arcs *semblables* sont ceux qui correspondent à des angles au centre égaux. Ainsi, (fig. 74), les angles CID, AIB, étant égaux, les arcs CD et ab, sont *semblables*.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Comparant ces proportions avec les précédentes, il viendrait.....,

$$DGH' : DX' :: AT' : Ax' ; \text{ ou } DGH' : DX :: AT : Ax.$$

Mais, DGH' est plus petit que DX' et plus grand que DX; il faudrait donc que l'arc AT' fût plus petit que l'arc Ax', ou que l'arc AT fût plus grand que l'arc Ax; ce qui est faux. Les proportions (2) ne peuvent donc pas subsister; le quatrième terme de la proportion (1) est donc l'arc An.

Note sur le n° 139.

71. Le *parallélogramme* est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles. *Dans un parallélogramme ABCD* (*fig.* 83), *les côtés opposés sont égaux* (n° 33).

72. *Le milieu O, de la diagonale BD, du parallélogramme ABCD,* (*fig.* 83), *est le centre de ce parallélogramme.* En effet; si par le point O, on mène une droite quelconque RS, terminée aux côtés du parallélogramme, les lignes, AB, CD, étant parallèles, les angles, OBR, ODS, seront égaux (n° 28); mais les angles, BOR, DOS, sont égaux (B. n° 20), et OB est égal à OD; les triangles ORB, OSD, sont donc égaux (B. n° 81); OR est donc égal à OS; le point O est donc le centre du parallélogramme (n° 6).

73. *Les diagonales, AC, BD* (*fig.* 83), *du parallélogramme ABCD, se coupent en deux parties égales au centre du parallélogramme.* En effet; supposons que ces diagonales se coupent en O. La droite AB étant parallèle à CD, les angles, BAO, DCO, sont égaux, ainsi que les angles ABO, CDO; mais $AB=CD$ (n° 71); les triangles, ABO, CDO, sont donc égaux; on a donc, $OD=OB$; le point O est donc le milieu de BD; ce point est donc le centre du parallélogramme $ABCD$ (n° 72). Les diagonales, AC, BD, se coupent donc au centre du parallélogramme.

74. *Les droites, menées par les milieux des côtés opposés d'un parallélogramme, passent par le centre.* En effet; si par le centre O, du parallélogramme $ABCD$ (fig. 83), on mène une parallèle MN au côté AB, on aura (n° 33) $DM=CN$ et $BN=AM$; mais $OM=ON$, $OD=OB$ (B. n° 72), et les angles MOD, NOB, sont égaux; les triangles, MOD, NOB, sont donc égaux, (B. n° 80); DM est donc égal à BN; les lignes, AM, DM, BN, CN, sont donc égales; les points M et N sont donc les milieux des côtés AD, BC; mais MN passe par le centre O; le principe est donc démontré.

75. *Lorsque dans un quadrilatère, deux côtés opposés sont égaux et parallèles, les deux autres côtés sont aussi égaux et parallèles; de sorte que la figure est un parallélogramme.* En effet; si les côtés opposés, AB, CD, (fig. 83), du quadrilatère $ABCD$, sont égaux et parallèles, les angles, ABD, CDB, seront égaux (n° 28); mais $AB=CD$; les triangles ABD, CDB, sont donc égaux (B. n° 80). Par conséquent, les côtés AD, BC, sont égaux, et les angles ADB, CBD, sont égaux;

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

les côtés, AD, BC, sont donc égaux et parallèles; $ABCD$ est donc un parallélogramme.

76. *Lorsque les côtés opposés d'un quadrilatère, sont égaux; on peut en conclure, que ces côtés sont parallèles deux à deux; de sorte que la figure est un parallélogramme.* En effet, supposez..... $AB=CD$ et $BC=AD$ (fig. 83); menez la diagonale BD; les triangles, ADB, CDB, seront égaux (B. n° 83); les angles, ABD, CDB, seront donc égaux, ainsi que les angles ADB, DBC; les côtés, AB, CD seront donc parallèles, ainsi que les côtés BC, AD, (n° 27); $ABCD$ sera donc un parallélogramme.

77. *Dans un parallélogrammme, $ABCD$ (fig. 83), les angles intérieurs opposés sont égaux,* car en menant la diagonale BD, les triangles BDA, DBC, seront égaux (B. n° 83).

78. *Si dans un quadrilatère $ABCD$ (fig. 80), on joint les milieux E, F, G, H, des côtés adjacens, par des droites; le quadrilatère $EFGH$, que l'on formera, sera un parallélogramme.* Pour le démontrer, tirez AC; les côtés, BA, BC, du triangle BAC, étant divisés en parties proportionnelles, par la droite EF; cette droite est parallèle à CA (n° 53); d'ailleurs $BE=\frac{1}{2}BA$; donc $EF=\frac{1}{2}AC$. On prouvera de même que HG, est parallèle à AC et est égale à $\frac{1}{2}AC$. Mais, les droites, EF, GH étant parallèles à AC, et égales chacune à $\frac{1}{2}AC$, ces droites sont parallèles et égales l'une à l'autre (n° 32); la figure $EFGH$, est donc un parallélogramme (n° 75).

79. *Le carré est un quadrilatère dont les côtés et les angles sont égaux. Ces angles sont droits.* Nous allons démontrer qu'il existe des quadrilatères de cette espèce. Sur une droite quelconque BC (fig. 84), menez des perpendiculaires, BA, CD, égales à BC, et tirez AD; les droites BA, CD, étant égales et parallèles, la figure $ABCD$ est un parallélogramme; AD est donc égale et parallèle à BC, et les angles, A, D, sont respectivement égaux aux angles droits C et B (n° 77); les quatre angles du quadrilatère $ABCD$ sont donc droits, et les quatre côtés sont égaux. Ce quadrilatère est donc un carré. Le carré existe donc.

80. En général, *la définition exacte d'une quantité ne doit renfermer que le nombre de conditions necessaires à la construction de cette quantité.* On peut ensuite en déduire les autres propriétés de cette quantité; mais il n'est pas rigoureux de donner ces propriétés, dans la définition. Sous ce point de vue, la plupart des définitions de Bezout sont inexactes; mais on pourra toujours y suppléer, à l'aide de raisonnemens analogues à ceux du n° 79.

81. *Tout parallélogramme, inscrit dans un cercle, est un rectangle.* En effet; soit le parallélogramme $BDHF$ (fig. 68), inscrit dans le cercle

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

ABCDH; la somme des angles *B* et *H* aura pour mesure la moitié de l'arc *FAD*, plus la moitié de l'arc *FCD*, c'est-à-dire la moitié de la circonférence, ou 180°; mais les angles opposés d'un parallélogramme sont égaux (n° 77); les angles *B* et *H* sont donc droits; par la même raison les angles *D* et *F* sont droits. Le parallélogramme inscrit *FBDH*, est donc un rectangle. Et par conséquent, on ne peut jamais circonscrire une circonférence à un parallélogramme, dont les angles ne sont pas droits.

82. *Tout polygone régulier de quatre côtés, inscrit dans un cercle, est un carré.* En effet; si *BDHF* (fig. 68), est un polygone régulier de quatre côtés, inscrit dans le cercle; les quatre côtés de ce polygone seront égaux, et les quatre angles, *B*, *D*, *F*, *H*, seront égaux; or la somme de ces angles vaut 360° (B. n° 18); ces angles seront donc droits; le polygone *BDFH* est donc un carré (n° 79).

Note sur le n° 144.

83. *La surface d'un rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur.* Ce principe est rigoureusement démontré (B. n° 144), lorsque la *base* et la *hauteur* sont *commensurables*. Il est facile d'en déduire que la même propriété subsiste quand la base et la hauteur sont incommensurables. En effet; si la hauteur d'un rectangle restant la même, la base croît d'une manière continue, depuis zéro jusqu'à l'infini; la surface du rectangle passera par tous les états de grandeur; le produit $AB \times BC$ (fig. 95), mesure donc nécessairement un rectangle de même hauteur que *ABCD*; de sorte que si ce produit ne mesurait pas *ABCD*, on aurait...

(1)... $AB \times BC =$ *surface* $ABC'D'$, ou $AB \times BC =$ *surface* $ABC''D''$.

Divisant la hauteur *AB* en parties égales moindres que *CC'* ou que *CC''*, et portant des parties de même grandeur sur *BC''*, à partir du point *B*, il tomberait nécessairement un point de division, *p* ou *q*, sur *CC'* ou sur *CC''*. Menant *pr* ou *qs* parallèle à *CD*, les lignes *AB* et *Bp*, ou *AB* et *Bq*, étant commensurables entre elles, on aurait...

(2)... $AB \times Bp =$ *surface* $ABpr$, ou $AB \times Bq =$ *surface* $ABqs$.

BC étant plus grand que *Bp* et moindre que *Bq*; pour que les égalités (1) et (2) pussent subsister, il faudrait que *ABC'D'* fût plus grand que *ABpr*, ou que *ABC''D''* fût moindre que *ABqs*; ce qui est faux. Le système des égalités (1) et (2) ne peut donc pas subsister; mais les dernières égalités sont exactes; les premières sont donc fausses; il est donc absurde de supposer que le produit $AB \times BC$ mesure un rectangle plus grand ou plus petit que *ABCD*; mais ce produit mesure nécessairement un rectangle; $AB \times BC$ est donc la mesure du rectangle *ABCD*.

Note sur le n° 151.

84. *La surface du cercle est égale au produit de la circonférence par la moitié du rayon.* En effet; si l'on inscrit dans la circonférence *CA* (fig. 187), un polygone régulier *mnAt* etc., la surface de ce polygone sera

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

égale à $\frac{1}{2}$ *CE* × périmètre *mnAt* etc., (B. n° 150); or la surface du cercle *CA*, est plus grande que celle de ce polygone; on a donc....

$$surf.\ du\ cercle\ CA > \frac{1}{2}\ CE \times \text{périmètre } mnAt \text{ etc.}$$

A mesure que le nombre des côtés du polygone augmente, *CE* augmente et s'approche de *CA*, le périmètre du polygone augmente et s'approche de la circonférence *CA*, la surface du polygone augmente et s'approche de celle du cercle; par conséquent, lorsque le nombre des côtés du polygone inscrit est très-grand, si dans le second membre de l'inégalité on remplace *CE* et le périmètre *mnAt* etc., par les quantités un peu plus grandes, *CA* et *circ. CA*, le produit $\frac{1}{2}$ *CA* × *circ. CA*, sera la mesure exacte ou très-approchée de la surface du cercle *CA*; il suffit donc de prouver que ce produit est la mesure exacte du cercle *CA*. Cela n'offre aucune difficulté, car si $\frac{1}{2}$ *CA* × *circ. CA*, ne mesurait pas la surface du cercle *CA*, comme ce produit mesure nécessairement la surface d'un cercle, on aurait...

(1)... $\frac{1}{2}$ *CA* × *circ. CA* = *surf. CD*; ou $\frac{1}{2}$ *CA* × *circ. CA* = *surf. CB*;

répétant la construction du n° 69, il en résulterait (B. n° 150)...

(2)... $\frac{1}{2}$ *CA* × *pqrs* etc. = *surf. pqrs* etc.; ou $\frac{1}{2}$ *CE* × *mnAt* etc. = *surf. mnAt* etc.

Or, la circonférence *CA* est moindre que le périmètre du polygone circonscrit *pqrs* etc., et plus grande que le périmètre du polygone inscrit *mnAt* etc., (n° 68); d'ailleurs, *CE* est plus petit que *CA*; il faudrait donc, pour que les égalités (1) et (2) pussent subsister, que la surface du cercle *CD* fût moindre que celle du polygone *pqrs* etc., et que la surface du cercle *CB* fût plus grande que celle du polygone *mnAt* etc.; ce qui est faux. Le résultat de la combinaison des équations (1) et (2), est donc absurde; or cette absurdité ne peut venir que des égalités (1); le produit $\frac{1}{2}$ *CA* × *circonf. CA*, mesure donc la surface du cercle dont le rayon est *CA*.

Note sur le n° 152.

85. Le *calcul du rapport de la circonférence au diamètre*, repose sur des principes que nous allons établir. *Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables.* En effet; la somme des angles intérieurs d'un polygone régulier étant égale à autant de fois 180°, qu'il y a de côtés moins deux (B. n° 86), et tous les angles étant égaux; on voit que les angles des polygones réguliers ne dépendent que du nombre des côtés de ces polygones; les polygones réguliers d'un même nombre de côtés, ont donc les

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

angles égaux (*); mais tous les côtés d'un polygone régulier étant égaux, le rapport entre deux côtés quelconques est l'unité; les polygones réguliers d'un même nombre de côtés, ont donc les angles égaux, et les côtés homologues proportionnels. Ces polygones sont donc semblables (B. n° 131).

86. *Réciproquement. Deux polygones réguliers semblables, ont le même nombre de côtés;* car si le nombre des côtés de chaque polygone n'était pas le même, les angles intérieurs de ces polygones ne seraient pas égaux (n° 85); ces polygones ne seraient donc pas semblables (B. n° 131); ce qui est contre l'hypothèse.

87. *Un polygone régulier étant donné; on peut toujours décrire deux circonférences concentriques, dont l'une passe par tous les sommets des angles du polygone, et dont l'autre soit tangente à tous les côtés de ce polygone* (La première circonférence est *circonscrite* au polygone; la seconde est *inscrite* dans le polygone). En voici la preuve; 1° soit le polygone régulier $ABCDEFGH$, (fig. 74); décrivez une circonférence qui passe par les sommets, A, B, C, (n° 41). Je dis que cette circonférence passera par les sommets, D, E, F, G, H, des autres angles du polygone. En effet; menez IZ perpendiculaire sur la corde AB; le point Z sera le milieu de AB; si l'on fait tourner le quadrilatère $IZAH$, autour de IZ, de manière que le plan de ce quadrilatère coïncide avec celui du quadrilatère $IZBC$; les angles IZA, IZB, étant égaux, ZA prendra la direction ZB; or $ZA = ZB$; le point A tombera donc en B; mais les angles ZBC, ZAH, sont égaux; la droite AH, prendra donc la direction BC, et comme $AH = BC$, le point H tombera en C; mais le point I reste fixe; la droite IH coïncidera donc avec IC; la circonférence décrite avec le rayon IC, passera donc par le point H. On prouvera de même que la circonférence passe par tous les autres sommets.

2°. Les cordes égales, AB, BC, CD, etc., étant à égale distance du centre, la circonférence que l'on décrirait du point I comme centre, avec le rayon IZ, serait tangente à tous les côtés du polygone $ABCDEFGH$; cette circonférence serait donc *inscrite* dans le polygone. De sorte que pour inscrire une circonférence dans un polygone régulier $ABCDEFGH$, il suffit de mener des perpendiculaires, ZI, SI, sur les milieux de deux côtés contigus quelconques du polygone; la circonférence décrite du point I de rencontre de ces perpendiculaires, avec un rayon ZI égal à l'une d'elles, est la circonférence demandée.

88. *Etant donné un polygone régulier inscrit dans un cercle; on propose de circonscrire, au même cercle, un polygone régulier semblable au polygone inscrit.* Soit le polygone régulier inscrit $BDFH$ (fig. 74). Menez, du centre I, des perpendiculaires, IC, IE, IG, IA, sur les côtés de ce poly-

(*) La somme des n angles intérieurs d'un polygone régulier de n côtés valant $(n-2)$ fois 180°; chaque angle intérieur vaut $\frac{180° \times (n-2)}{n}$,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

gone; par les points, C, E, G, A, où ces perpendiculaires rencontrent la circonférence IA, menez des tangentes, $B'D'$, $D'F'$, $F'H'$, $H'B'$, à la circonférence IA; ces tangentes seront les côtés du polygone demandé; de sorte que le polygone circonscrit $B'D'F'H'$ sera semblable au polygone inscrit $BDFH$. En effet; les droites, BD, $B'D'$, perpendiculaires à IC, sont parallèles; les droites DF, $D'F'$, perpendiculaires à IE, sont aussi parallèles; les angles BDF, $B'D'F'$, sont donc égaux. On prouverait de même que les autres angles de ces polygones sont égaux chacun à chacun. Il ne reste donc plus qu'à démontrer que les côtés qui comprennent ces angles égaux sont proportionnels. Pour y parvenir, menez deux droites, IB', IB. Je dis que ces droites se confondent. En effet; les triangles, BIR, BIM, sont égaux, car ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun; la droite IB divise donc l'angle AIC en deux parties égales; les triangles rectangles, $B'IA$, $B'IC$, sont égaux, car ils ont le côté $IA = IC$, et l'hypoténuse commune IB'; la droite IB' divise donc l'angle AIC en deux parties égales; mais IB divise le même angle en deux parties égales; les droites IB, IB' se confondent donc; les trois points, I, B, B', sont donc en ligne droite. Par la même raison, IDD', IFF', IHH', sont des lignes droites. Les propriétés des parallèles donnent donc, $BD : B'D' :: ID : ID' :: DF : D'F'$. Mais, les angles, BDF, $B'D'F'$, sont égaux; les polygones, $BDFH$, $B'D'F'H'$, ont donc un angle égal compris entre côtés proportionnels. La même démonstration convenant à tous les autres angles de ces polygones; il en résulte que ces polygones sont semblables.

89. *Toutes les perpendiculaires menées sur les milieux des côtés d'un polygone régulier, passent par le centre du cercle circonscrit au polygone; et toutes les droites qui divisent les angles de ce polygone en deux parties égales, passent aussi par le même centre.* En effet; soit le polygone regulier $ABCDEFGH$ (fig. 74); par les milieux Z et S de deux côtés contigus AB, BC, menons des perpendiculaires ZI, SI, à ces côtés; IB sera le rayon du cercle circonscrit au polygone, et IZ sera le rayon du cercle inscrit (n° 87). Les côtés du polygone devenant des cordes du cercle circonscrit; *toutes les perpendiculaires menées sur les milieux des côtés du polygone, passent par le centre I du cercle circonscrit* (B. n° 51). Les triangles, IAB, IBC, ICD, IDE, etc., sont égaux, car ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun; les droites, IA, IB, IC, ID, etc., divisent donc les angles, A, B, C, etc., du polygone en deux parties égales; toutes les droites, qui divisent les angles du polygone en deux parties égales, passent donc par le centre I, du cercle circonscrit. Le principe est donc démontré.

90. *Le centre du cercle circonscrit à un polygone régulier d'un nombre de côtés pair, est le centre de ce polygone. Les polygones réguliers d'un nombre impair de côtés n'ont pas de centre.* En effet; 1°. si le nombre des côtés du polygone régulier $ABCD$ etc. est pair, de huit côtés par exemple (fig. 74), en prenant quatre côtés successifs, AB, BC, CD, DE; les arcs, $ABCDE$, $AHGFE$, seront égaux, car chacun d'eux sera égal à quatre fois l'arc AB;

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

ces arcs seront donc des demi-circonférences ; la droite AE, sera donc un diamètre ; elle passera donc par le centre I ; par la même raison, BIF, CIG et DIH, sont des lignes droites. Par le point I, menez une droite quelconque xy ; la droite CIG, divisant en deux parties égales les angles égaux, BCD, HGF ; les angles ICy, IGx, sont égaux ; or les angles, CIy, GIx, sont égaux, comme opposés au sommet, et $IC=IG$; les triangles, ICy, IGx, sont donc égaux (B. n° 81) ; le point I est donc le milieu de la droite xy ; le point I est donc le centre du polygone, (n° 6). Cette démonstration convient à tous les polygones réguliers d'un nombre pair de côtés.

2°. On prouverait de même que si le nombre des côtés du polygone régulier était impair, le centre du cercle circonscrit à ce polygone ne serait pas le centre du polygone. Par exemple, supposons que le point S (fig. 22), soit le centre du cercle circonscrit au polygone de trois côtés BDE ; en menant une droite DSp, par les points D et S ; DS sera plus grand que Sp ; le point S ne sera donc pas le centre du polygone. Je dis de plus que ce polygone n'a pas de centre, car si un point quelconque O pouvait être le centre du polygone BDE, en menant les droites, EOr, DOq et qr, on aurait $OE=Or$ et $Oq=OD$; les triangles, Orq, OED, seraient donc égaux (B. n° 80) ; les droites qr, DE seraient donc égales et parallèles ; on aurait donc $Bq : BE :: qr : ED$; mais $qr=ED$; Bq serait donc égal à BE ; ce qui est absurde. Cette démonstration convenant à un triangle quelconque, on voit qu'*un triangle n'a pas de centre*. On prouverait par des considérations analogues aux précédentes, que les polygones d'un nombre impair de côtés, n'ont pas de centre.

91. *Étant donnés deux polygones réguliers semblables, l'un inscrit dans une circonférence, l'autre circonscrit à la même circonférence ; il s'agit de construire les polygones réguliers, inscrit et circonscrit, d'un nombre de côtés double.* Supposez que les polygones donnés soient, $BDFH$ et $B'D'F'H'$ (fig. 74). Du centre I, de la circonférence IA, menez des perpendiculaires, IC, IE, IG, IA, sur les côtés des deux polygones donnés ; les points de tangence, C, E, G, A, seront les milieux des arcs, BCD, DEF, FGH, HAB, (B. n°51) ; et comme ces arcs sont égaux, leurs moitiés sont égales ; les cordes, BC, CD, DE, etc., de ces arcs égaux, seront égales ; mais les angles, HAB, ABC, etc., qui s'appuient sur des arcs égaux, sont égaux ; les cordes, AB, BC, CD, etc., forment donc le polygone régulier inscrit d'un nombre de côtés double.

Si par les sommets, B, D, F, H, des angles du polygone inscrit donné, on mène des tangentes, VX, mn, pq, TK ; le polygone $VXmnpqKTV$, qui en résultera, sera le polygone régulier circonscrit d'un nombre de côtés double. En effet ; le nombre des côtés de ce polygone est évidemment double de celui des côtés du polygone circonscrit donné $B'D'F'H'$; il suffit donc de prouver que le nouveau polygone est régulier. Pour y parvenir ; menez des droites du centre I, à tous les sommets des angles de ce polygone. Les triangles rectangles, ITA, ITH, seront égaux, car ils ont la même hypoténuse IT, et un côté de l'angle droit égal $IA=IH$ (n° 50) ; donc...

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

TA=TH; *l'angle TIA=l'angle TIH*; *l'angle ATI=l'angle HTI.*

On prouverait de même que les angles, *KIH*, *KIG*, sont égaux; les angles *TIH*, *KIH*, sont donc égaux, car ils sont les moitiés des angles égaux, *HIA*, *HIG*; les triangles rectangles, *IHT*, *IHK*, sont donc égaux (B. n° 81); les côtés, *TH*, *HK*, sont donc égaux. On prouverait de même que $AT=AV$. Donc, $TA=TH=VA=HK$; donc, $TV=TK$. Par la même raison, $TK=Kq$; $Kq=qp$; etc. Les triangles, *ITA*, *ITH*, *IKH*, *IKG*, etc., étant égaux, les angles de ces triangles sont égaux; les angles intérieurs du polygone *VTKqp* etc., sont donc égaux; mais les côtés de ce polygone sont égaux; le polygone est donc régulier (B. n° 88). Ainsi, le polygone circonscrit *VXmnpqKTV* est régulier, et le nombre de ses côtés est double de celui des côtés du polygone primitif *E'D'F'H'*. Le problème est donc résolu.

92. On propose de *calculer la valeur approchée du rapport de la circonférence au diamètre*. En désignant ce rapport par π, et nommant r le rayon d'un cercle quelconque, on aura, (n^os^ 69 et 84)...

$$\frac{\text{circ. } r}{2r}=\pi\text{; d'où } \textit{circ. } r=2\pi r\text{, et } \textit{surf. } r=\frac{1}{2}\,r\times 2\pi r=\pi r^2.$$

Supposant $r=1$; on voit que la surface du cercle dont le rayon est l'unité, exprime la valeur de π; la question est donc réduite à calculer la surface du cercle dont le rayon est l'unité. Pour y parvenir, on remarquera que la surface du cercle étant plus grande que celle d'un polygone inscrit quelconque, et plus petite que celle d'un polygone circonscrit, si l'on multiplie le nombre des côtés de ces polygones de manière que les surfaces des polygones inscrit et circonscrit ne diffèrent que d'une quantité très-petite δ; la différence entre la surface du cercle et celle de l'un de ces polygones, sera moindre que δ; de sorte qu'en prenant la surface de l'un de ces polygones pour celle du cercle, l'erreur sera moindre que δ. Il ne s'agit donc que de calculer deux polygones, l'un inscrit, l'autre circonscrit, dont les surfaces ne diffèrent que d'une quantité très-petite. Cela n'offre aucune difficulté, car les surfaces des carrés, inscrit et circonscrit, étant connues; on pourra en déduire les surfaces des octogones inscrit et circonscrit; de ces dernières on déduira les surfaces des polygones de seize côtés; et continuant ce calcul, on parviendra bientôt à deux polygones, l'un inscrit dans le cercle, l'autre circonscrit, dont les surfaces ne différeront que d'une quantite très-petite. Tout se réduit donc à résoudre le problème suivant :

93. *Connaissant les surfaces d'un polygone régulier inscrit et d'un polygone régulier circonscrit, d'un même nombre de côtés; trouver les surfaces des polygones réguliers, inscrit et circonscrit, d'un nombre de côtés double.* Nous avons vu (n° 91), qu'étant donnés les premiers polygones, on pouvait construire les seconds; le problème est donc toujours possible. Il suffit donc d'appliquer le calcul aux constructions indiquées dans le n° 91.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Cela posé; si HB et $H'B'$ (fig. 74), sont les côtés des polygones réguliers de n côtés, inscrit et circonscrit; en tirant les cordes, AB, AH, et les tangentes, HT, BV; les droites, AB, TV, seront les côtés des polygones réguliers, inscrit et circonscrit, de $2n$ côtés (n° 91). Les triangles, HIB, $H'IB'$, seront donc contenus n fois dans les polygones réguliers, inscrit et circonscrit, de n côtés; et les triangles, AIB, TIV, seront contenus $2n$ fois dans les polygones réguliers, inscrit et circonscrit, de $2n$ côtés. Soient, a la surface du polygone régulier inscrit de n côtés; b la surface du polygone semblable circonscrit; a' et b', les surfaces des polygones réguliers inscrit et circonscrit de $2n$ côtés, dont les côtés sont AB et TV. On aura...

$$\begin{aligned}
&\text{surf. } HBDF &&= n \times BIH = 2n \times HIR = a\\
&\text{surf. } H'B'D'F' &&= n \times B'IH' = 2n \times IAB' = 2n \times AIH' = b\\
&\text{surf. } HABCDEFGH &&= 2n \times AIH = 2n \times AIB = a'\\
&\text{surf. } KTVXmnpqK &&= 2n \times ITV = 4n \times IVA = b'.
\end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \frac{a}{a'} = \frac{HIR}{HIA}, \quad \frac{a'}{b} = \frac{AIH}{AIH'} \text{ et } \frac{b'}{2b} = \frac{IVA}{IAB'}.$$

Les triangles de même hauteur étant comme leurs bases (B. n° 158), et la ligne IV, qui partage l'angle AIB' en deux parties égales (n° 91), divisant la base AB' en parties, VA, VB', proportionnelles aux côtés IA, IB', (B. n° 104); on en déduit....

$$\frac{a}{a'} = \frac{IR}{IA} = \frac{IH}{IH'} = \frac{AIH}{AIH'} = \frac{a'}{b}; \quad \frac{IVA}{IVB'} = \frac{VA}{VB'} = \frac{IA}{IB'} = \frac{IH}{IH'} = \frac{a}{a'}.$$

$$\text{Or, } \frac{a}{a'} = \frac{IVA}{IVB'}; \text{ donc } \frac{a}{(a+a')} = \frac{IVA}{(IVA+IVB')} = \frac{IVA}{IAB'} = \frac{b'}{2b}.$$

Les égalités, $\frac{a}{a'} = \frac{a'}{b}$, $\frac{a}{(a+a')} = \frac{b'}{2b}$, donnent, (1).. $a' = \sqrt{ab}$, (2).. $b' = \frac{2ab}{a+a'}$.

La solution du problème se déduit des formules (1) et (2), car les surfaces a et b, des polygones inscrit et circonscrit de n côtés, étant données, on pourra calculer les surfaces, a', b', des polygones inscrit et circonscrit de $2n$ côtés. La formule (1), donnera a',; et la valeur de a', substituée dans la formule (2), déterminera b'.

94. Pour *calculer la surface du cercle dont le rayon est l'unité*, on supposera le rayon $AI = 1$; la surface du carré inscrit $HBDF$, sera égale à 2, et celle du carré circonscrit $H'B'D'F'$, sera égale à 4, car $HB^2 = IH^2 + IB^2 = 1 + 1 = 2$ et $B'H'$ étant égal au diamètre 2, le quarré $B'H'F'D'$ sera égal à 4; faisant donc, $a = 2$ et $b = 4$, les formules (1), (2), donneront, en se bornant à quatre décimales....

$$a' = \sqrt{8} = 2{,}8284, \quad b' = \frac{1}{2 + 2{,}8284} = 3{,}3137.$$

Ces valeurs de a' et b', expriment les surfaces des octogones, inscrit et

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

circonscrit, $HABCDEFGH$, $KTVXmnpqK$. Supposant, $a = 2{,}8284$ etc., et $b = 3{,}3137$ etc., les formules (1) et (2), donneront...

$$a' = 3{,}0614 \text{ etc.}, \quad b' = 3{,}1825 \text{ etc.}$$

Ces nouvelles valeurs de a' et de b', expriment les surfaces des polygones réguliers, inscrit et circonscrit, de 16 côtés. Continuant ces calculs et ne conservant que trois décimales, on trouvera que les surfaces des polygones réguliers, inscrit et circonscrit, de 4, 8, 16, 32, 64, 128, côtés, sont...

nombre des côtés..... 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64 ; 128 ;
surfaces des polygones inscrits.... 2 ; 2,828 ; 3,061 ; 3,121 ; 3,136 ; 3,140 ;
surfaces des polygones circonscrits. 4 ; 3,313 ; 3,182 ; 3,151 ; 3,144 ; 3,142.

La différence entre les surfaces des polygones, inscrit et circonscrit, de 128 côtés, étant moindre qu'un centième ; la surface du cercle dont le rayon est l'unité, est 3,14, à moins d'un centième d'unité près. Lorsqu'on effectue les mêmes calculs, en conservant cinq décimales, on trouve que la surface du cercle dont le rayon est l'unité, est 3,14159 etc. La valeur de x, à moins d'un cent-millième d'unité près, est donc 3,14159. Si l'on cherche les valeurs approchées de la fraction $\frac{31415}{10000}$, on trouvera les fractions plus simples, $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, etc., (Arith. n° 192). Les rapports approchés, de la circonférence au diamètre, dont on fait le plus d'usage, sont exprimés par les fractions, $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$; le premier a été donné par *Archimède ;* le second est celui d'*Adrien Métius*. Si l'on calculait la valeur de π, avec un plus grand nombre de décimales, on trouverait, $\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793$ 2 etc.

95. *Les surfaces des cercles sont proportionnelles aux carrés de leurs rayons.* Pour le démontrer, il suffit de substituer, dans le n° 69, les surfaces aux périmètres, et les carrés des rayons aux moitiés des rayons. On peut aussi déduire cette propriété, du principe du n° 92, car les surfaces des cercles dont les rayons sont R et r, étant πR^2 et πr^2, ces surfaces sont entre elles comme R^2 est à r^2.

96. *Dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, les surfaces des secteurs sont proportionnelles aux arcs sur lesquels ces secteurs s'appuient.* Il s'agit de prouver que l'on a (fig. 21),

(1)... *secteur* ACB : *secteur* ACD :: *arc* AB : *arc* AD.

1°. Si les arcs, AB, AD, sont commensurables, en nommant b leur commune mesure, on aura, $AB = pb$, $AD = qb$. Divisant l'arc AB en p arcs égaux à b, menant des droites du centre à ces points de division, et

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

désignant par s la surface du secteur qui s'appuie sur l'arc b (*), on aura, *secteur* $ACB = ps$ et *secteur* $ACD = qs$. On en déduit la proportion (1). Le principe est donc démontré pour des arcs commensurables.

2°. Lorsque les arcs, AB, AD, sont incommensurables, la proportion (1) subsiste encore. En effet; si le dernier terme de la proportion (1) n'était pas l'arc AD, on aurait...

$$\textit{sect. } ACB : \textit{sect. } ACD :: \textit{arc } AB : \textit{arc } AO; \text{ ou...}$$
$$\textit{sect. } ACB : \textit{sect. } ACD :: \textit{arc } AB : \textit{arc } AO'.$$

Divisant l'arc AB en parties égales plus petites que DO ou que DO', il tomberait au moins un point de division K ou K', sur DO ou sur DO'; joignant CK ou CK', les arcs AB et AK, ou AB et AK', étant commensurables, il en résulterait...

$$\textit{sect. } ACB : \textit{sect. } ACK :: \textit{l'arc } AB : \textit{l'arc } AK; \text{ ou...}$$
$$\textit{sect. } ACB : \textit{sect. } ACK' :: \textit{l'arc } AB : \textit{l'arc } AK'.$$

Ces proportions, combinées avec les précédentes, donneraient....

$$\textit{sect. } ACD : \textit{sect. } ACK :: \textit{l'arc } AO : \textit{l'arc } AK; \text{ ou...}$$
$$\textit{sect. } ACD : \textit{sect. } ACK' :: \textit{l'arc } AO' : \textit{l'arc } AK'.$$

Mais, le secteur ACD, est plus petit que le secteur ACK et plus grand que le secteur ACK'; il faudrait donc, pour que ces deux dernières proportions pussent subsister, que l'arc AO fût plus petit que l'arc AK, ou que l'arc AO' fût plus grand que l'arc AK'; ce qui est faux; le quatrième terme de la proportion (1) ne peut donc être ni plus grand ni plus petit que l'arc AD; ce quatrième terme est donc l'arc AD.

97. *La surface d'un secteur est égale au produit de l'arc qui lui sert de base, par la moitié du rayon.* En effet; le principe du n° 96 donne.....

$$\textit{surf. du cercle } CA : \textit{sect. } ACB :: \textit{circ. } CA : \textit{arc } AB,$$

$$\text{ou (n° 84)}, \frac{1}{2} CA \times \textit{circ. } CA : \textit{sect. } ACB :: \textit{circ. } CA : \textit{arc } AB.$$

On en déduit, *secteur* $ACB = \frac{1}{2} CA \times \textit{arc } AB$. Ce qui démontre le principe énoncé.

98. *Les surfaces des secteurs semblables* (**), *sont proportionnelles aux carrés des rayons.* En effet, (n° 97)...

(*) Les secteurs qui s'appuient sur des arcs égaux sont égaux, car en les superposant, on voit qu'ils coïncident.

(**) Les secteurs et les segmens *semblables*, sont ceux qui correspondent à des angles au centre égaux; de sorte que les secteurs et les segmens semblables sont du même nombre de degrés.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

(fig. 21)... *sect.* $ABC=\frac{1}{2}CA\times arc\,AB$; *sect.* $A'CB'=\frac{1}{2}CA'\times arc\,A'B'$.

Donc, *sect.* ACB : *sect.* $A'CB'$ :: $CA\times arc\,AB$: $CA'\times arc\,A'B'$.
Mais, (n° 70) *arc* AB : *arc* $A'B'$ :: CA : CA'.

Donc.... *sect.* ACB : *sect.* $A'CB'$ :: CA^2 : CA'^2.

Cela démontre le second principe du n° 162 de Bezout.

99. *Les surfaces des segmens semblables, sont proportionnelles aux carrés des rayons.* En effet; (fig. 21))....

(n° 98)..... *secteur* ACB : *secteur* $A'CB'$ :: CA^2 : CA'^2, et
(B. n° 159)... *triangle* ACB : *triangle* $A'CB'$ :: CA^2 : CA'^2. Donc,
sect. ACB : *sect.* $A'CB'$ :: *tri.* ACB : *tri.* $A'CB'$ :: CA^2 : CA'^2. Donc,
(*sect.* ACB — *tri.* ACB) : (*sect.* $A'CB'$ — *tri.* $A'CB'$) :: CA^2 : CA'^2.
Donc.... *segment* $AMBxA$: *segment* $A'M'B'x'A'$ :: CA^2 : CA'^2.

Cela démontre le troisième principe du n° 162 de Bezout.

Note sur le n° 164.

100. *Le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle, est équivalent à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés* (n° 59). *Je dis de plus que si l'on mène les droites, GE, HL, IF* (fig. 102), *les triangles, EBG, HCL, FAI, ABC, seront équivalens.* En effet; les triangles rectangles, EBG, ABC, sont égaux (B. n° 80). Du point L, menez LK perpendiculaire au prolongement CK de CH; les angles droits, BCK, ACL, étant égaux, si l'on en retranche l'angle ACK, les angles restans, BCA, LKC, seront égaux; les triangles rectangles, ABC, LKC, ont donc, les trois angles égaux chacun à chacun, et un côté égal, $AC=CL$; ces triangles sont donc égaux (B. n° 81); on a donc, $AB=LK$. Mais....

$$AB=LK;\ BC=CH;\ surf.ABC=\frac{1}{2}AB\times BC \text{ et } surf.LCH=\frac{1}{2}LK\times CH.$$

Les triangles, ABC, LCH, sont donc équivalens. Menant une perpendiculaire IM, sur le prolongement AM de AF, on prouverait de même que les triangles, ABC, FAI, sont équivalens. Ce qui démontre le principe énoncé.

101. *Lorsque deux côtés d'un triangle rectangle, sont proportionnels à deux côtés homologues d'un autre triangle rectangle, ces triangles sont semblables.* En effet; 1°. quand les côtés proportionnels sont les deux côtés de l'angle droit, les triangles sont semblables, (B. n° 113); 2°. Quand les côtés proportionnels comprennent des angles aigus, il s'agit de prouver que ces angles sont égaux. Soit donc (fig. 96 et 97).....
(1)... AE : AB :: ae : ab, (les angles E, e, sont droits); si les angles

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

BAE, *bae*, n'étaient pas égaux, l'un d'eux serait plus grand que l'autre; soit l'angle $BAE > bae$; on pourrait mener la droite *am*, sous un angle $mae = BAE$; les triangles rectangles *BAE*, *mae* seraient semblables (n° 56); on aurait donc (2)..... $AE : AB :: ae : am$; les proportions (1) et (2) donneraient $ab = am$; ce qui est faux (n° 16. 4°); les angles *BAE*, *bae* sont donc égaux. Ce qui démontre le principe énoncé.

Les élèves, qui auront saisi le véritable esprit des démonstrations précédentes, seront convaincus de l'exactitude des raisonnemens fondés sur la considération des infiniment petits. Cette dernière méthode est celle qui conduit aux découvertes. On peut ensuite démontrer rigoureusement les résultats auxquels elle conduit, au moyen de la démonstration par l'absurde. J'engage les élèves à compléter ainsi, les démonstrations relatives aux *solides*. Les bornes que je me suis prescrites ne me permettent pas de donner ces démonstrations; mais on pourra déduire ces dernières, des principes déjà établis.

Applications à l'Artillerie.

102. *Par un point F* (*fig.* 189), *donné sur le terrain, mener une parallèle à une ligne inaccessible AB.* Choisissez une *base FG*, des extrémités de laquelle vous puissiez apercevoir deux points remarquables *A* et *C*, de *AB*; mesurez la base *FG* et les angles, *AFG*, *CFG*, *AGF*, *CGF*: vous pourrez en déduire *AF* et *CF* (B. n° 300. 1°). Vous connaîtrez alors, dans le triangle *AFC*, l'angle *AFC* et les deux côtés, *FA*, *FC*, qui le comprennent; vous pourrez donc calculer l'angle *ACF* (B. n° 306). Menant la ligne *FD*, sous l'angle $CFD = ACF$, cette ligne sera la parallèle demandée (n° 27). Ce problème peut servir à *mener une parallèle à la face d'un* BASTION.

103. (fig. 189). *Par le point C, de la ligne inaccessible AB, mener sur le terrain une perpendiculaire à cette ligne.* On choisira un point quelconque *F*, d'où l'on puisse apercevoir le point *C*. On calculera, la distance *FC*, l'angle *FCA*, et l'on mènera *FD* parallèle à *AB* (n° 102). Connaissant alors dans le triangle rectangle *CHF*, l'hypoténuse *FC* et l'angle *CFH*, on pourra calculer *FH* (B. n° 295); la perpendiculaire à *FD*, menée par le point *H*, sera la ligne demandée. Ce problème peut servir à *déterminer le plus avantageusement possible, la ligne du* TIR *d'une batterie qui serait destinée à attaquer un certain point C, du bastion AB.*

104. *Déterminer le prolongement de la* CAPITALE *d'un bastion.* Prenez deux points quelconques, *D*, *F*, (fig. 190), sur les prolongemens, des faces *AB*, *CB*, du bastion. Mesurez *DF*, et calculez les distances, *BD*, *BF*, (B. n° 300. 1°). La *capitale KE* du *bastion*, divisant l'angle *DBF*, en deux parties égales, on obtiendra le point *E*, de cette *capitale*, en partageant *DF* en parties, *DE*, *EF*, proportionnelles aux distances connues *BD*, *BF*, (n° 54).

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Remarque (fig. 191). Si l'on ne pouvait pas prolonger AB et CB, on prendrait un point quelconque F, dont on déterminerait les distances aux points A, B, C; mesurant ensuite les angles, CFB, BFA, on calculerait, au moyen des triangles, CBF, ABF, les angles CBF, ABF; la demi-somme de ces angles, serait l'angle CBG, que CB fait avec le prolongement BG de la capitale du bastion; retranchant CBF de CBG, et prenant le complément du reste FBG, on aurait l'angle BFG, que la perpendiculaire FG à BG, fait avec FB. Enfin; comme dans le triangle rectangle BFG, on connaîtrait FB et les angles, on pourrait calculer la grandeur de FG. Ce qui donnerait le point G, du prolongement de la *capitale* KB.

105. (*fig.* 192). *Connaissant l'épaisseur BH de l'*ÉPAULEMENT *d'une* BATTERIE, *l'ouverture extérieure DE et l'ouverture intérieure BC, d'une* EMBRASURE *que l'on veut* DÉGORGER, *déterminer la direction des* JOUES, BD, CE. Cela se réduit à trouver le point A, où les prolongemens des *joues* se rencontrent. Pour y parvenir; prenez le milieu F de DE et menez la perpendiculaire FA, à DE; elle passera par le milieu G de BC; concevez BH, perpendiculaire à DE; alors, dans le triangle rectangle BHD, vous connaîtrez l'épaisseur BH; de l'*épaulement*, et.....

$$DH = (DF - BG) = \left(\frac{1}{2}DE - \frac{1}{2}BC\right).$$

Vous pourrez donc calculer l'angle HDB, (B. n° 296). Connaissant dans le triangle rectangle BGA, le côté BG et l'angle $GBA = HDB$, vous en déduirez GA (B. n° 295). Joignant le point A, avec les points E et D, vous aurez les directions demandées.

106. (fig. 193). *Connaissant la première* EMBRASURE *d'une* BATTERIE *à* RICOCHET, AC; *trouver l'inclinaison de la septième embrasure.* Cela se réduit à déterminer l'angle ACB, que la ligne de TIR fait avec l'*épaulement* AC, à la septième embrasure. On suppose, que toutes les pièces de cette batterie sont dirigées vers un même point B, éloigné de 250 mètres de AC, et que la ligne de *tir* AB, de la première *embrasure*, est perpendiculaire sur AC. Il faut donc calculer l'angle ACB du triangle rectangle BAC. Cela sera toujours facile, car dans ce triangle, on connaît le côté AB, qui est de 250 mètres, et le côté AC est déterminé par la grandeur, la distance et le nombre des embrasures. Par exemple, si la distance du milieu d'une des *embrasures* au milieu de la suivante, est de 5 mètres; AC sera égal à 30 mètres. L'angle aigu BCA sera donc déterminé par la proportion $30 : 250 :: R : tang.\ BCA$; ($R$ est le rayon des tables). Effectuant le calcul, à l'aide des logarithmes, on trouvera que l'angle BCA est de $83^{o}\ 9'\ 26''$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

DEUXIÈME PARTIE.

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE.

107. (fig. 68). On propose de *construire un rectangle, dont la surface soit équivalente à un carré donné c^2, et tel que la somme de ses côtés adjacens, soit égale à une ligne donnée $2l$.* Prenez $AC = 2l$; sur AC comme diamètre, décrivez la circonférence OA; menez CV perpendiculaire à CA et prenez $CT = c$; tirez TF parallèle à CA, et FP perpendiculaire au diamètre CA. Je dis que AP et CP, seront les côtés du rectangle demandé; car la somme des côtés de ce rectangle est la ligne $AC = 2l$; et FP étant moyen proportionnel entre AP et CP (B. n° 125), la surface $AP \times CP$ de ce rectangle, est égale à FP^2 ou à c^2.

Remarque. Pour que cette construction réussisse, il faut que la droite TF rencontre la circonférence décrite avec le rayon $\frac{1}{2} AC$; ce qui exige que la droite CT, ne soit pas plus grande que $\frac{1}{2} AC$; la quantité c ne doit donc pas être plus grande que l; le problème ne sera donc possible que lorsque c ne surpassera pas l; et quand cette condition sera remplie, on pourra toujours construire le rectangle demandé (*).

108. (fig. 68). *Construire un rectangle dont la surface soit équivalente à un carré donné c^2 et tel que la différence de ses côtés adjacens, soit égale à une ligne donnée $2l$.* Prenez $AC = 2l$; sur AC, comme diamètre, décrivez la circonférence ADB; menez CV perpendiculaire à CA, et prenez $CT = c$; par le point T menez le diamètre TM; je dis que TM et TK seront les côtés du rectangle demandé. En effet; il résulte de la construction que $TM - TK = MK = AC = 2l$, et la tangente TC étant moyenne

(*) L'Algèbre en donne une démonstration directe; car la somme des côtés du rectangle demandé devant être $2l$; si l'un des côtés est $(l+x)$, l'autre sera $(l-x)$; la surface de ce rectangle sera donc $(l+x) \times (l-x)$, ou $(l^2 - x^2)$; donc, $l^2 - x^2 = c^2$; d'où, $x = \sqrt{l^2 - c^2}$. Lorsque c ne surpassera pas l, la valeur de x sera réelle; le problème sera donc possible; mais quand c surpassera l, la valeur de x sera imaginaire et le problème sera impossible.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

proportionnelle entre la sécante entière TM et la partie extérieure TK (n° 65), on a, $TM \times TK = TC^2 = c^2$.

Remarque. Cette construction étant toujours possible, on voit qu'il est toujours possible de trouver un rectangle qui satisfasse aux conditions demandées (*).

109. (*fig.* 85). *Connaissant la différence δ, de la diagonale, au côté d'un carré; construire ce carré.* Faites un carré quelconque $ABCD$; menez la diagonale AC; prenez, $AF = \delta$ et $CE = CD$; tirez DE, et menez FG parallèle à DE (**). Je dis que AG sera le côté du carré demandé. En effet; sur AG, comme côté, construisez le carré $AGHM$; les triangles semblables, CDE, HGF, donneront $CD : CE :: HG : HF$. Mais, par construction, $CE = CD$; donc $HF = HG$. On en déduit..... $AH - HG = AH - HF = AF = \delta$. Le carré $AGHM$, jouit donc de la propriété demandée.

110. (fig. 85). *Construire un carré, qui soit triple d'un carré donné.* Soit $ABCD$ le carré donné; par l'extrémité C, de la diagonale AC, menez, sur AC, une perpendiculaire $CK = CD$, et tirez AK; la droite AK sera le côté du carré cherché. Car la propriété du carré de l'hypoténuse (n° 59), donne $AC^2 = AD^2 + DC^2 = 2CD^2$; et

$$KA^2 = AC^2 + CK^2 = 2CD^2 + CD^2 = 3CD^2.$$

111. (*fig.* 35). *Par l'extrémité B, d'une droite FB, mener une perpendiculaire BC à FB, sans prolonger FB.* Portez sur BF quatre parties égales, d'une grandeur arbitraire; soit A l'extrémité de la dernière partie, de sorte que $BA = 4$; des points B et A comme centres, avec des rayons égaux à 3 et à 5 de ces parties égales, décrivez des arcs; ces arcs se couperont en un point C; la droite BC, menée de ce point au point B, sera la perpendiculaire demandée (n° 61).

112. (fig. 194). *Sur une droite MN, mener une perpendiculaire SQ, telle que la différence des carrés des distances de l'un quelconque de ses points, aux extrémités M et N, soit égale à un carré connu δ^2.* Prenez $MA = \delta$; menez AD perpendiculaire à MN, et portez sur AD, une partie AC, telle que les arcs, décrits des points M et N comme centres, avec les rayons MC, CA, se coupent en un point P. Par ce point, conduisez SQ

(*) L'Algèbre en donne une démonstration directe; car la différence des côtés du rectangle étant $2l$; si l'un des côtés est $(x+l)$, l'autre côté sera $(x-l)$; la surface de ce rectangle sera donc $(x+l) \times (x-l)$, ou $x^2 - l^2$; donc $x^2 - l^2 = c^2$; d'où, $x = \sqrt{c^2 + l^2}$. Cette valeur de x étant toujours réelle, le problème est toujours possible.

(**) Si le point F tombait entre les points E et C, le point G tomberait sur le prolongement de AD. La construction serait la même.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

perpendiculaire à MN. Je dis que SQ sera la perpendiculaire demandée, c'est-à-dire, que pour un point quelconque R, de SQ, on aura..... $RM^2 - RN^2 = \delta^2$. En effet; par construction, $MP = MC$ et $NP = CA$. Mais, (n° 59),

$PQ^2 = PM^2 - MQ^2 = PN^2 - NQ^2$, $RQ^2 = RM^2 - MQ^2 = RN^2 - NQ^2$;

d'où, $MQ^2 - NQ^2 = PM^2 - PN^2 = RM^2 - RN^2$. Or,

$PM^2 - PN^2 = CM^2 - CA^2 = MA^2 = \delta^2$. Donc, $RM^2 - RN^2 = \delta^2$.

Remarque. Le point Q peut tomber, entre les points M et N, ou sur l'un de ces points, ou sur le prolongement de MN. La construction réussit également dans ces trois cas (*). De sorte que le problème est toujours possible.

113. (fig. 7). *Connaissant deux points, M, m, et une droite AB; on propose de trouver sur AB un point P, tel, qu'en tirant MP et Pm, les angles MPB, mPA, soient égaux.* Menez MF perpendiculaire sur AB; prenez $OF = OM$; tirez la droite Fm; le point P, où Fm coupe AB, jouit de la propriété demandée. En effet; si l'on mène la droite MP, les triangles rectangles, MOP, FOP, seront égaux (B. n° 80); les angles, MPO, FPO, seront donc égaux. Mais, les angles, FPO, mPA, sont égaux, (B. n° 20); l'angle MPO est donc égal à l'angle mPA.

(*) L'Algèbre fournit une solution plus directe. En effet; si QS est la perpendiculaire demandée; pour un point quelconque R de cette ligne, on aura $RM^2 - RN^2 = \delta^2$. Cherchons à en déduire la position du point Q. Les triangles rectangles, RQM, RQN, donnent, (n° 59),

$$RQ^2 = RM^2 - MQ^2 = RN^2 - NQ^2 \text{ ; d'où...}$$
$$RM^2 - RN^2 = MQ^2 - NQ^2 = \delta^2. \text{ Soit, } MN = l,\ NQ = x.$$

L'équation, $MQ^2 - NQ^2 = \delta^2$, donne, $x = \dfrac{(l+\delta)(l-\delta)}{2l} = NQ.$

Cela posé; 1°. lorsque l est plus grand que δ, la valeur de x est positive, le point Q tombe sur MN, et NQ est une quatrième proportionnelle aux trois lignes connues, $2l$, $(l+\delta)$, $(l-\delta)$; 2°. lorsque $l = \delta$; la valeur de x est nulle, et le point Q tombe en N; 3°. lorsque l est plus petit que δ, la valeur de x est négative, ce qui indique que le point Q est situé en Q', sur le prolongement de MN; dans ce cas.....

$$NQ' = -NQ = -x = \frac{\delta^2 - l^2}{2l} = \frac{(\delta+l)(\delta-l)}{2l}.$$

De sorte que NQ' est une quatrième proportionnelle aux trois lignes connues, $2l$, $\delta+l$, $\delta-l$. Le problème est donc toujours possible; de sorte que dans la première construction que nous avons indiquée, on peut toujours prendre AC de manière que les arcs décrits des points M et N comme centres, avec les rayons, MC, CA, se coupent en un point. La perpendiculaire menée de ce point sur MN, est la ligne demandée.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

114. (fig. 7). *Étant donnés, deux points M et N, dans un angle connu BAC; mener par ces points des lignes, MP, NQ, telles, qu'en tirant la droite PQ, les angles, MPB, QPA, soient égaux entre eux, ainsi que les angles NQC, PQA.* Menez MF et NG respectivement perpendiculaires sur AB et sur AC; prenez $OF = OM$ et $RG = RN$; tirez la droite FG; cette droite coupera les côtés de l'angle donné, en P et Q. Les lignes, MP, PQ, NQ, satisferont aux conditions du problème. En effet; les triangles rectangles, NQR, GQR, sont égaux (B. n° 80); les angles, CQN, CQG, sont donc égaux; mais $CQG = PQA$; donc, $CQN = PQA$. On prouverait de même que les angles, MPB, QPA, sont égaux.

115. *Remarque.* Les deux questions précédentes, servent de fondement à la *théorie du jeu de billard.* En effet; on a reconnu, par l'expérience, qu'une *bille* qui vient frapper une *bande* de billard, sous un certain angle, s'en éloigne ensuite sous le même angle; une bille, qui partant du point M (*fig.* 7), frapperait la *bande* AB, en P, rencontrerait donc une bille placée en m; car elle suivrait la route MPm, pour laquelle l'angle MPB *d'incidence* est égal à l'angle mPA de *réflexion.* On verra de même (*fig.* 7), qu'en regardant AB et AC comme les *bandes* d'un billard, une bille, qui partant du point M, frapperait la bande AB en P, suivrait la route $MPmQN$; elle rencontrerait donc une bille placée en N.

116. (fig. 195). *Par un point M, pris hors de l'angle BAC, mener une droite MN, de manière que les parties, MN, MP, soient entr'elles dans le rapport de deux lignes données m et n.* Menez la droite AM, et prenez sur cette droite, un point D tel que vous ayez, $m : n :: MA : MD$. Menez DP parallèle à BA et tirez la droite MP, que vous prolongerez jusqu'à la rencontre de AB, en N. La droite MN jouira de la propriété demandée. En effet; DP étant parallèle à AB, on a, $MN : MP :: MA : MD$.

Mais, par construction, $MA : MD :: m : n$; donc $MN : MP :: m : n$.

MN est toujours plus grand que MP; le problème ne sera donc possible que lorsque m sera plus grand que n.

117. (fig. 195). *Par un point M, pris hors de l'angle BAC, mener une droite MN, telle que le rectangle des parties, MN, MP, soit équivalent au carré donné m^2.* Menez MS perpendiculaire sur AC, et prenez une partie MQ, telle que vous ayez $MR : m :: m : MQ$; d'où, $MR \times MQ = m^2$.

Sur MQ, comme diamètre, décrivez une circonférence, qui coupera AB en N et N'; les droites, MN, MN', résoudront également la question, car le diamètre MQ étant perpendiculaire à la corde CE, on a (n° 66)....

$$MN \times MP = MN' \times MP' = MQ \times MR = m^2.$$

Lorsque la circonférence décrite sur MQ comme diamètre, coupera AB en deux points N, N', situés sur AB, le problème admettra deux solutions; quand cette circonférence n'aura qu'un point commun avec AB, il n'y aura qu'une solution. Enfin, lorsque la circonférence ne rencontrera pas AB, il n'y aura aucune solution.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

118. (fig. 196). *Dans un angle connu HBK, mener une droite PQ, égale à une ligne donnée α, de manière que l'angle PQB soit égal à un angle donné δ.* Par un point quelconque C de BK, menez une droite $CS=\alpha$, sous l'angle $SCB=\delta$. Tirez, SP parallèle à CB et PQ parallèle à SC. La ligne demandée sera PQ, car

$$\text{l'angle } PQB=SCB=\delta \text{ et } PQ=SC=\alpha.$$

Cette construction donne le moyen d'*inscrire dans un angle donné, une perpendiculaire égale à une ligne donnée;* il suffit de supposer, $\delta=90°$.

119. (fig. 197). *Par un point M, pris sur la droite AR, qui divise l'angle BAC, en deux parties égales; mener une droite S'x', de manière que la partie N'P', comprise dans l'angle donné, soit la plus petite possible.* Menez par le point M, une perpendiculaire $S'x'$ sur AR; la perpendiculaire $S'x'$ jouira de la propriété demandée. Il s'agit de prouver, qu'en tirant par le point M, une ligne quelconque Sx, on aura $N'P'<NP$. Menez $N'Q$ parallèle à AC; prenez $MV=MN'$ et $MT=MP'$; tirez les droites, VN', TP'. Désignez l'angle BAC par $2c$; les angles, RAB, RAC, seront égaux à c. Représentez par b, les angles égaux, $PP'M$, $MN'Q$. Les triangles rectangles, AMN', AMP', seront égaux, car ils ont un côté commun, et les angles adjacens égaux (B. n° 81); donc

$$AN'=AP';\ AN'M=b;\ MN'=MP'=MV=MT;\ N'P'=TV.$$

Les triangles isoscèles, $MN'V$, $MP'T$, sont donc égaux (B. n° 80); mais les triangles, MQN', MPP', sont égaux (B. n° 81); les triangles, $N'VQ$, $P'TP$, sont donc égaux; donc $VQ=TP$. Mais, (B. n° 75),

$$b=AN'M=N'NM+N'MN;\ \text{et}$$
$$N'QN=QN'M+N'MQ=b+N'MQ=N'NM+N'MN+N'MQ.$$

L'angle $N'QN$ est donc plus grand que l'angle $N'NM$; le côté $N'N$ est donc plus grand que le côté $N'Q$, (n° 48).

Or, l'angle $NN'Q=(180°-2b)$; donc $\frac{1}{2}NN'Q=(90°-b$.

Dans le triangle isoscèle $MN'V$, chacun des angles égaux, $MN'V$, MVN' est moindre que 90°; donc....

$$MN'V-b<90°-b;\ \text{ou } VN'Q<90°-b;\ \text{ou } VN'Q<\tfrac{1}{2}NN'Q.$$

La droite $N'E$, qui divise l'angle $NN'Q$ en deux parties égales, tombe donc dans l'angle $NN'V$. Donc, (B. n° 104), $N'N:N'Q::EN:EQ$. Mais, $N'N$ est plus grand que $N'Q$; EN est donc plus grand que EQ; donc, à plus forte raison, VN est plus grand que VQ. Or....

$$NP=TV+VN-TP=N'P'+(VN-VQ).$$

NP est donc plus grand que $N'P'$. Ce qui démontre le principe énoncé.

120. (fig. 197, 198 et 199). *Par un point M, pris sur la droite AR, qui divise l'angle BAC en deux parties égales, mener une ligne Sx, de ma-*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

nière que la partie NP, comprise dans l'angle BAC, qui soit égale à une ligne donnée δ. Sur la droite $Dy = \delta$, décrivez un segment DGy capable de l'angle donné BAC (n° 143). Prenez le milieu F de l'arc DFy; tirez la droite Fy. Construisez un rectangle $HIKL$, équivalent au carré fait sur Fy, et tel que $HI - IK = AM$ (n° 108). Du point F comme centre, avec le rayon HI, décrivez l'arc rp. Cet arc coupera l'arc DGy, en deux points G, G'. Tirez GD; et prenez $AN = GD$; la droite Sx, menée par les points M et N, jouira de la propriété demandée. En effet; tirez GF et Gy; les angles, FGy, DyF, sont égaux, car ils ont pour mesure les moitiés des arcs égaux, Fy, DF, (n° 44); les triangles, GFy, OFy, ont donc un angle égal et un angle commun; ils sont donc semblables (n° 56); on a donc....

$GF : yF :: yF : FO$; d'où, $GF \times FO = Fy^2$. Or, $Fy^2 = HIKL = HI \times IK$; donc... $GF \times FO = HI \times IK$. Or, $GF = HI$; donc $FO = IK$.

On en déduit, $GO = GF - FO = HI - IK = AM$.

Mais, $AN = GD$, $AM = GO$, et les angles, NAM, DGO, sont égaux; les triangles NAM, DGO sont donc égaux; les angles, ANP, GDy, sont donc égaux. Or, les angles, NAP, DGy, sont égaux, par construction; les triangles, ANP, GDy, sont donc égaux. Donc enfin, $NP = Dy = \delta$.

L'arc rp, décrit de F comme centre avec le rayon HI, coupant le segment DGy en G et G'; le point G' donnerait une seconde solution du problème. Pour obtenir cette nouvelle solution, il suffit de conduire par le point donné M, une droite $P'N'$, perpendiculaire sur AR, et de prendre $N'p = P'P$. La droite pn, menée par les points p et M, résout le problème. En effet; les triangles, $MN'p$, $MP'P$, sont égaux, comme ayant un angle égal b, compris entre côtés égaux. Les côtés Mp, MP, étant égaux, ainsi que les angles, MpN, MPn, les triangles, MpN, MPn, sont égaux (B. n° 81); de sorte que.... $MN = Mn$; mais $MP = Mp$; les droites pn, PN, sont donc égales à δ. Elles résolvent donc le problème.

Remarque. La perpendiculaire $P'N'$ à AM, étant la plus courte de toutes les lignes qui passant par le point M, sont inscrites dans l'angle BAC (n° 119), et ces lignes pouvant croître indéfiniment; selon que m sera plus grand que $P'N'$, ou égal à $P'N'$, ou moindre que $P'N'$, le problème admettra deux solutions, ou une solution, ou sera impossible.

121. (fig. 200). *Par un point donné M, mener une droite telle que la partie de cette droite, comprise entre deux parallèles connues CB, PQ, soit égale à une ligne donnée δ.* Prenez un point quelconque V sur PQ; de ce point comme centre, avec le rayon δ, décrivez un arc mn; cet arc coupera BC, en deux points G et H; tirez les droites, VG, VH, et par le point donné M, menez des parallèles FE, ST à ces droites. Les lignes FE, ST, résoudront également le problème, car les parallèles comprises entre parallèles étant égales (n° 33), on aura $EF = GV = \delta$ et $ST = VH = \delta$.

Remarque. La perpendiculaire VR à BC, étant la plus courte distance

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

des parallèles, CB, PQ (n° 35); suivant que la ligne donnée δ sera plus grande que VR, ou égale à VR, ou plus petite, le problème admettra deux solutions, ou une solution, ou sera impossible. La position du point donné M est d'ailleurs arbitraire.

122. (fig. 201). *Par un point M, pris dans l'angle BAC, mener une sécante ST, telle que la somme des segmens, AF, AG, soit égale à une ligne donnée δ.* Menez MD et ME respectivement parallèles aux droites AC, AB; construisez un rectangle $HIKL$ (fig. 199), équivalent au rectangle de lignes AD, AE, et tel que $(HI+IK)=\delta-(AD+AE)$, (n° 107).

Vous aurez, $IH\times IK=AD\times AE=ME\times MD$.

Prenez $DF=IH$, et tirez FM, que vous prolongerez jusqu'en G; je dis que FG sera la sécante demandée. En effet; MD et ME étant parallèles aux droites AC et AB; les triangles, FDM, MEG, sont semblables; on a donc

$$DF:MD::ME:EG, \text{ d'où } DF\times EG=MD\times ME.$$

Mais, par construction, $MD\times ME=HI\times IK$ et $DF=HI$; donc.....

$$DF\times EG=HI\times IK=DF\times IK; \text{ d'où } EG=IK.$$

On en déduit, $(DF+EG)=(HI+IK)=\delta-(AD+AE)$, et

$$(DF+AD)+(EG+AE)=\delta; \text{ ou } AF+AG=\delta.$$

La droite FG résout donc le problème.

Si l'on prend $DF'=IK$, la droite $F'G'$, menée par les points F' et M, résoudra également le problème. En effet; les triangles semblables $F'DM$, MEG', donnent $DF':DM::EM:EG'$; on en déduit.....

$$DF'\times EG'=DM\times EM=IH\times IK.$$

Or, par construction, $DF'=IK$; donc $EG'=IH$. Il en résulte....

$$EG'+DF'=IH+IK=\delta-(AD+AE);$$
$$(EG'+AE)+(DF'+AD)=\delta, \text{ ou } (AG'+AF')=\delta.$$

La droite $G'F'$ jouit donc de la propriété demandée.

Remarque. La somme δ, des segmens, AF, AG, peut croître indéfiniment; mais on voit que cette somme ne peut pas décroître indéfiniment (*).

(*) *Si l'on porte sur DF, une partie Df, moyenne proportionnelle entre AD et AE, et si l'on mène la droite fg, par les points f et M; la somme $(Af+Ag)$ sera la plus petite possible*, c'est-à-dire que pour toute autre droite FG, menée par le point M, on aura, $AF+AG>Af+Ag$. En effet. Soit, $AD=\alpha$, $AE=\epsilon$, $DF=x$, $AF+AG=y$. Les triangles semblables, GAF, MDF, donneront, $FD:DM::FA:AG$, ou $x:\epsilon::\alpha+x:AG$. Donc, $AG=\epsilon+\frac{\alpha\epsilon}{x}$. Mais, $AF=\alpha+x$. Donc,

$$(1)\ldots y=(\alpha+\epsilon)+\left(x+\frac{\alpha\epsilon}{x}\right).$$

Pour que y soit un minimum, il suffit que $x+\frac{\alpha\epsilon}{x}$ soit le plus petit pos-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Il y aura donc des cas dans lesquels le problème sera impossible. On en sera averti par l'impossibilité de construire le rectangle *HIKL*.

123. (*fig.* 201). *Par un point M, pris dans l'angle BAC, mener une sécante FG, telle que la différence* (*AF*—*AG*), *des segmens, AF, AG, soit égale à une ligne connue* δ. Par le point *M*, menez les lignes *MD*, *ME*, parallèles à *AC* et à *AB*; construisez (n° 108), un rectangle *HIKL* (*fig.* 199) équivalent au rectangle $MD \times ME$, et tel que....

$$IH - IK = \delta + MD - ME = \delta + AE - AD.$$

Prenez, $DF = IH$ et tirez la droite *FG*, par les points *F* et *M*. La ligne *FG* sera la sécante demandée. En effet; les triangles semblables *DMF*, *EGM*, donnent, $DF \times EG = MD \times ME$. Mais, $MD \times ME = IH \times IK$. Donc... $DF \times EG = IH \times IK$; or, $DF = IH$. Donc...

$$EG = IK,\ DF - EG = IH - IK = \delta + AE - AD,$$
$$\delta = (AD + DF) - (EG + AE) = (AF - AG).$$

La ligne *FG* est donc la sécante demandée. *Le problème est toujours possible.* Il est évident que la différence $AF - AG$ peut passer par tous les états de grandeur, depuis zéro jusqu'à l'infini.

Cette construction suppose que $(\delta + AE)$ soit plus grand que *AD*. Si $(\delta + AE)$ était moindre que *AD*, on construirait un rectangle *HIKL*, (*fig.* 199), équivalent au rectangle des lignes *MD*, *ME*, et tel que l'on eût...

$$HI - IK = AD - (\delta + AE),\ (\text{n° } 108).$$

Prenant, $DF = IK$; la droite *FG*, menée par les points *F* et *M*, serait la sécante demandée, car on aurait...

$$DF \times EG = MD \times ME = IK \times IH;\ \text{or } DF = IK;\ \text{donc,}$$
$$EG = IH,\ IH - IK = EG - DF = AD - (\delta + AE);$$
$$\delta = (AD + DF) - (EG + AE) = (AF - AG).$$

---

sible; ce qui donne $x = \sqrt{\alpha\mathcal{C}}$, (n° 226). Cela démontre le principe énoncé.

Le calcul différentiel conduit au même résultat. En effet, l'équation (1) donne, $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{\alpha\mathcal{C}}{x^2}$ et $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\alpha\mathcal{C}}{x^3}$. L'équation, $\frac{dy}{dx} = 0$, donnera $x = \pm\sqrt{\alpha\mathcal{C}}$. La valeur positive de x, rend $\frac{d^2y}{dx^2}$ positif, et les autres coefficiens différentiels, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, etc., ne peuvent pas devenir infinis, pour $x = +\sqrt{\alpha\mathcal{C}}$, car $\frac{d^ny}{dx^n} = \pm\frac{1.2.3...n\alpha\mathcal{C}}{x^{n+1}}$; cette valeur de x, détermine donc le *minimum* de y. Ce qui démontre le principe énoncé. Désignant donc $(Af + Ag)$ par $\mathcal{C}$, lorsque δ sera plus grand que $\mathcal{C}$, le problème admettra deux solutions; lorsque δ sera égal à $\mathcal{C}$, il n'y aura qu'une solution; et enfin, lorsque δ sera plus petit que $\mathcal{C}$, le problème sera impossible.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Si ($\delta + AE$) était égal à AD; le rectangle $HIKL$ deviendrait un carré; et la construction serait la même.

Remarque. Par le point M, on peut mener une autre sécante, qui jouisse de la propriété demandée. En effet; construisez un rectangle $HI'K'L'$ (*fig.* 199), équivalent au rectangle des lignes, MD, ME, et tel que.....

$$I'H - I'K' = \delta + AD - AE, \text{ (n° 108).}$$

Prenez $DF' = I'K'$ et tirez la droite $F'MG'$; vous aurez...

$DF' : DM :: EM : EG'$; d'où $DF' \times EG' = MD \times ME = I'H \times I'K'$.

Mais, par construction, $DF' = I'K'$; donc $EG' = I'H$. Donc;

$$EG' - DF' = I'H - I'K' = \delta + AD - AE; \text{ d'où...}$$

$$\delta = (EG' + AE) - (DF' + AD) = (AG' - AF').$$

La sécante $G'F'$ jouit donc de la propriété demandée.

124. (fig. 202). *Déterminer les points qui sont également distans des côtés, AB, AC, de l'angle donné BAC.* Tous les points qui jouissent de la propriété demandée, sont situés sur la droite AE, qui divise l'angle donné en deux parties égales. En effet; la droite AE divisant l'angle CAB, en deux parties égales, les perpendiculaires, OD, OD', menées d'un point quelconque O de AE, sur les côtés, AB, AC, sont égales, car les triangles rectangles, ODA, $OD'A$, sont égaux (B. n° 81). Tous les points de AE jouissent donc de la propriété demandée. Les points de AE sont les seuls qui jouissent de cette propriété, car si les perpendiculaires, MT, MS, aux côtés AC, AB, pouvaient être égales, en tirant AM, les triangles rectangles MAT, MAS, seraient égaux (n° 50); la droite MA diviserait donc l'angle BAC en deux parties égales; ce qui est impossible, puisque AE divise cet angle en deux parties égales.

125. (fig. 202). *Les centres, de tous les cercles tangens aux deux côtés de l'angle BAC, sont situés sur la droite AE, qui divise l'angle BAC en deux parties égales*, car les perpendiculaires menées du centre de chaque cercle sur les côtés, AB, AC, doivent être égales, comme rayons d'un même cercle.

126. (fig. 203). *Par le sommet A, d'un angle donné BAC, tirer une droite AD, telle, qu'en menant par l'un quelconque de ses points, des droites, MP, MQ, formant des angles connus, α, ϵ, avec AC et AB, ces droites soient dans le rapport de deux lignes connues, γ et δ.* Par deux points quelconques, E, F, pris sur les côtés, AC, AB, menez des droites, EG, FH, respectivement égales à γ et à δ, et qui forment avec AC et AB, des angles égaux à α et ϵ; de manière que vous ayez...

$$EG = \gamma; \; FH = \delta; \text{ l'angle } AEG = \alpha; \text{ l'angle } AFH = \epsilon.$$

Tirez GS et HT, respectivement parallèles à AC et à AB; les lignes GS, HT, se couperont en un point K; la droite AK, indéfiniment prolongée, sera la ligne demandée. En effet; menez KL et KN, respectivement parallèles aux lignes, GE, HF; vous aurez $KL = GE = \gamma$; $KN = HF = \delta$;

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

et les angles, KLA, KNA, seront égaux à α et à $\mathcal{C}$. Par un point quelconque M de AD, menez des parallèles, MP, MQ à KL et à KN, ces parallèles formeront avec AC et AB, des angles égaux aux angles donnés α, $\mathcal{C}$; et les propriétés des triangles semblables donneront...

$AM : AK :: MP : KL :: MQ : KN$; donc, $MP : MQ :: KL : KN :: \gamma : \delta$.

La droite AD satisfait donc à toutes les conditions du problème. *Ce problème est toujours possible*, car les droites AB, AC, se coupant, les parallèles, GS, HT, à ces lignes, se coupent nécessairement.

127. (fig. 27). *Lorsque deux cercles se touchent, les centres et le point de tangence sont en ligne droite.* En effet; si deux cercles qui se touchent en A, pouvaient avoir leurs centres P, Q, sur une droite PQ, différente de PA; la droite PQ couperait les deux circonférences en deux points r, s; les rayons, Pr, Qs, étant respectivement égaux aux rayons, PA, QA; le côté PQ, du triangle PAQ, serait plus grand que la somme des deux autres côtés, PA, QA; ce qui est absurde. Il est donc absurde de supposer que les centres et le point de tangence ne soient pas sur la même droite; ces trois points sont donc en ligne droite. Toute droite, menée par deux de ces points, passera donc par le troisième.

128. (fig. 204). *Si deux cercles se touchant, extérieurement* ou *intérieurement, en un point M, et que par ce point on mène deux sécantes, AB, CD; on aura...*

(1)... $MA : MB :: MC : MD$; (2)... $MA : MB' :: MC : MD'$.

Pour le démontrer; menez la droite EF, par les centres, O, O', O'', des cercles donnés, cette droite passera par le point M de tangence (n° 127). Tirez, AE, CE, DF, BF, $D'F'$, $B'F'$; les triangles rectangles MAE, MBF, $MB'F'$, seront semblables, ainsi que les triangles, MCE, MDF, $MD'F'$, (n° 56); ce qui donnera...

$$MA : MB : MB' :: ME : MF : MF' :: MC : MD : MD'.$$

Cette suite de rapports égaux, démontre les proportions (1) et (2). Elles donnent...

$(MA+MB) : MA :: (MC+MD) : MC$; ou (3)... $AB : AM :: CD : CM$;
$B'M : (MA-B'M) :: D'M : (MC-MD')$; ou (4)... $B'M : B'A :: D'M : D'C$.

129. (fig. 204). *Lorsque deux cercles, OM, O'M, se touchent extérieurement en M; si par deux points A et C, pris sur une des circonférences, on mène des tangentes AT, CT', à l'autre circonférence, et si l'on tire les cordes, AM, CM; on aura,* (5)... $AT : CT' :: AM : CM$. En effet; la proportion (3) du n° 128, donne (B. n° 129),

$$AB \times CM = AM \times CD\,;\quad AT^2 = AM \times AB\,;\quad CD \times CM = T'C^2.$$

Égalant le produit des trois premiers membres de ces équations, au produit des seconds membres, on trouvera...

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

$CM^2 \times AT^2 = AM^2 \times T'C^2$; d'où $CM \times AT = AM \times CT'$.

Ce qui démontre l'exactitude de la proportion (5).

130. (*fig.* 205). 1°. *Lorsque deux cercles, qui ne sont pas l'un dans l'autre, n'ont aucun point commun; la distance des centres est plus grande que la somme des rayons;* 2°. *lorsque deux cercles se touchent extérieurement, la distance des centres est égale à la somme des rayons;* 3°. *lorsque deux cercles se coupent, la distance des centres est moindre que la somme des rayons, et plus grande que leur différence;* 4°. *lorsque deux cercles se touchent intérieurement, la distance des centres est égale à la différence des rayons;* 5°. *quand deux cercles sont l'un dans l'autre et n'ont aucun point commun, la distance des centres est plus petite que la différence des rayons. La réciproque est vraie.* En effet; désignez par δ la distance des centres de deux cercles dont les rayons sont R et r; et supposez que r ne soit pas plus grand que R. Si vous donnez toutes les positions possibles à ces deux cercles, vous serez conduit aux propriétés suivantes :

1°. Lorsque deux cercles, CT, ac, qui ne sont pas l'un dans l'autre, n'ont aucun point commun; on voit que la distance aC, des centres, est plus grande que la somme des rayons. On a donc, $\delta > R + r$.

2°. Lorsque deux cercles, CT, bT, se touchent extérieurement en T, les centres, C, b, et le point de tangence T, sont en ligne droite (n° 127); la distance Cb des centres, est donc égale à la somme des rayons, CT, bT. On a donc, $\delta = R + r$.

3°. Quand deux cercles, CM, nM, se coupent; en joignant les centres avec l'un des points d'intersection, on forme un triangle CMn, dans lequel chaque côté est plus petit que la somme des deux autres. Ce qui donne...

$$\delta < (R + r)\ ;\ R < (\delta + r)\ ;\ r < (R + \delta).$$

La dernière inégalité est inutile, car, par hypothèse, r n'est pas plus grand que R. On a donc, $\delta < R + r$ et $\delta + r > R$; d'où, $\delta < R + r$ et $\delta > R - r$.

4°. Quand deux cercles, CT, ST, se touchent intérieurement en T; les centres, C, S, et le point de tangence T, sont en ligne droite (n° 127); la distance CS, des centres, est donc égale à la différence des rayons CT, ST; de sorte que l'on a $\delta = R - r$.

5°. Enfin, quand deux cercles CT, qt, sont l'un dans l'autre, et n'ont aucun point commun; le plus grand rayon CT est plus grand que la distance Cq des centres, augmentée du plus petit rayon qt; on a donc, $R > \delta + r$. D'où, $\delta < R - r$. La distance des centres est donc moindre que la différence des rayons. Il est bien évident que les circonférences ne peuvent pas avoir d'autres positions.

Les conditions relatives aux cinq cas que nous venons d'examiner, étant essentiellement différentes et correspondant à toutes les positions que peuvent prendre les cercles; on doit en conclure que réciproquement, lorsqu'une de ces conditions est satisfaite, les cercles sont placés de la manière indiquée dans la figure; car toute autre position des circonférences, conduirait à des

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

conditions contraires à l'hypothèse. Ainsi, *lorsque* δ *est plus grand que* $R+r$, *les cercles sont extérieurs et n'ont aucun point commun; quand* $\delta = R+r$, *les cercles se touchent extérieurement; lorsqu'on a* $\delta < R+r$ *et* $\delta > R-r$, *les cercles se coupent; lorsque* $\delta = R-r$, *les cercles se touchent intérieurement; enfin, lorsque* δ *est moindre que* $R-r$, *les cercles sont l'un dans l'autre, et n'ont aucun point commun.* Ce qui démontre les propriétés énoncées.

131. (*fig.* 206). *Lorsque deux circonférences,* $ABDF$, $ABGE$, *se coupent en* A *et en* B; 1°. *la droite* CC', *menée par les centres* C, C', *est perpendiculaire sur le milieu,* m, *de* AB; 2°. *la ligne* DE, *qui joint les extrémités* D, E, *des diamètres,* AD, AE, *est perpendiculaire sur* AB; 3°. DE *passe par le point* B; 4°. DE *est la plus grande des lignes menées par le point* B *et terminées aux circonférences données.* En effet; 1°. $CA = CB$ et $C'A = C'B$; CC' est donc perpendiculaire sur le milieu de AB (n° 19).

2°. La proportion évidente $AC : CD :: AC' : C'E$, exprime que CC' est parallèle à DE, mais CC' est perpendiculaire sur AB; DE est donc perpendiculaire à AB.

3°. Cherchons à quel point de AB, passe DE. Soit K ce point; la droite DKE, parallèle à CC', donne $AC : CD :: Am : mK$, mais $AC = CD$; donc, $Am = mK$. Or, $Am = mB$; donc $mK = mB$.

Le point cherché K, tombe donc en B; la droite DE passe donc par l'intersection B, des deux circonférences, CA, $C'A$.

4°. Si par le point B, on mène une droite quelconque FG; cette droite sera toujours plus petite que DE; car en joignant AF et AG, les angles AFB, ADB, seront égaux, comme ayant chacun pour mesure la moitié de l'arc AnB; il en sera de même des angles AGB, AEB; les triangles AFG, ADE, seront donc semblables; ce qui donnera $AF : AD :: FG : DE$. Mais la corde AF est plus courte que le diamètre AD (n° 7); FG est donc plus petit que DE.

132. (*fig.* 207). *Lorsque deux circonférences,* CS, ON, *se coupant en deux points* A *et* B, *la seconde passe par le centre* C, *de la première; si l'on mène une sécante* AM, *commune aux deux cercles, et la corde* DB; *les droites,* DB, DM, *seront égales.* En effet; tirez le diamètre ACS, et les cordes, BM, BS. L'angle extérieur d'un triangle étant égal à la somme des angles intérieurs opposés (B. n° 75), et les angles qui ont leur sommet sur la circonférence, étant égaux, lorsqu'ils s'appuient sur le même arc (B. n° 63), vous aurez...

$$CS = CB;\ CBS = CSB;\ ASB = AMB;\ ACB = ADB;$$
$$ACB = CBS + CSB = 2CSB = 2ASB = 2AMB,$$
$$ADB = DMB + DBM - AMB + DBM.$$

Mais, $ACB = ADB$; donc $2AMB = AMB + DBM$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Vous en déduirez, $AMB = DBM$, ou $DMB = DBM$.

Les angles DMB, DBM, étant égaux, les côtés, DB, DM, sont égaux. Ce qui démontre le principe énoncé.

133. (fig. 204). *On propose de décrire un cercle $MB'D'$, qui touche une circonférence donnée MAC, en un point donné M, de manière qu'en menant par ce point une sécante quelconque MA, les cordes, MA, MB', soient dans le rapport connu de α à $\mathcal{C}$.* Si le problème était résolu, on aurait, $\alpha : \mathcal{C} :: MA : MB' :: ME : MF'$. Le diamètre MF', du cercle demandé, est donc une quatrième proportionnelle aux trois lignes connues, α, $\mathcal{C}$, ME. Portant donc sur le diamètre ME, une partie MF', quatrième proportionnelle aux trois lignes connues, α, $\mathcal{C}$, ME; la circonférence $MB'D'$, décrite sur MF' comme diamètre, jouira de la propriété demandée. *Ce problème est toujours possible;* le point F' peut tomber sur le prolongement de ME.

134. (fig. 204). *Par un point M, pris sur la circonférence $MB'D'$, mener une droite MSV, d'une grandeur et d'une position telles, que les parties, SM, SV, soient dans le rapport connu de α à $\mathcal{C}$, et que le rectangle $SM \times SV$, de ces mêmes parties, soit équivalent au carré donné δ^2.* Menez le diamètre MF' du cercle donné; prolongez ce diamètre d'une quantité $F'E$, telle que vous ayez, $\alpha : \mathcal{C} :: F'M : F'E$. Sur ME, comme diamètre, décrivez la circonférence OE; cette circonférence sera tangente en M au cercle donné (n° 127), et si vous tirez par le point M des sécantes quelconques, MA, MC, MV, vous aurez, (n° 128)...

$$B'M : B'A :: D'M : D'C :: SM : SV :: F'M : F'E :: \alpha : \mathcal{C}.$$

Tirez une corde $MX = 2\delta$ et du point O comme centre, décrivez une circonférence Str, tangente à MX, en t; le point t, de tangence, sera le milieu de MX, et la circonférence Str coupera la circonférence donnée, en deux points, S, S'. Par les points M et S, menez une droite MS, que vous prolongerez jusqu'à ce qu'elle rencontre la circonférence OA, en V; la droite MV jouira des propriétés demandées. En effet; menez par le point S, une tangente NQ à la circonférence OS; vous aurez (n° 63)...

$$NQ = MX = 2\delta; \text{ d'où } SQ = SN = \delta; \; SQ \times SN = \delta^2.$$

Mais, les cordes, MV, NQ, se coupant en S, on a (B, n° 124)...

$$SQ : SM :: SV : SN; \text{ d'où } SQ \times SN = SM \times SV; \text{ donc...}$$

$$SM \times SV = \delta^2. \text{ Or, } SM : SV :: \alpha : \mathcal{C}.$$

La droite MV satisfait donc à toutes les conditions du problème. On prouverait de même que la droite $MS'V'$, menée par les points M et S', jouit des propriétés demandées. De sorte que *le problème admet deux solutions.*

Remarque. La circonférence OE, existe toujours. Pour que le problème soit possible, il faut que 2α ne soit pas plus grand que le diamètre ME, du cercle OA, et que le rayon OS ne soit pas plus petit que OF'.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

135. (fig. 152). *Une circonférence CB, et une sécante SD, etant données ; trouver sur SD un point M tel que la tangente MT, au cercle CB, soit égale à une ligne connue* δ. Menez une tangente quelconque $PQ = \delta$; tirez CQ, et prenez $CM = CQ$. Le point M, jouira de la propriété demandée. En effet; si l'on mène la tangente MT, et les rayons, CT, CP; les triangles rectangles, CTM, CPQ, seront égaux (n° 50). Donc, $MT = PQ = \delta$. *Ce problème est toujours possible*, car le point M pouvant s'approcher ou s'éloigner indéfiniment de la circonférence, la tangente MT peut passer par tous les états de grandeur.

136. (fig. 207). *Connaissant un demi-cercle ACBN, et une corde AB, trouver sur l'arc ACB, un point D, tel que les cordes, DA, DB, soient dans le rapport des lignes données* α *et* ϵ. Prolongez le diamètre AN, d'une quantité NV, telle que vous ayez, $\alpha : \epsilon :: NA : NV$; Prenez le milieu C, de l'arc ACB; et de ce point comme centre, avec le rayon CA, décrivez la circonférence $ARSBG$. Sur AV comme diamètre, décrivez une demi-circonférence AMV; elle rencontrera l'arc AGS, en un point M; tirez la droite AM, qui coupera l'arc ACB en D. Le point D, jouira de la propriété demandée. En effet; on a....

$DA : DM :: NA : NV$, (proport. 4 du n° 128); et $DM = DB$, (n° 132). Mais, $NA : NV :: \alpha : \epsilon$; donc, $DA : DB :: \alpha : \epsilon$.

Le rapport de DA à DB, pouvant passer par tous les états de grandeur, depuis zéro jusqu'à l'infini, *le problème est toujours possible.* Prenant $AD' = BD$, le point D' résoudrait également la question.

137. (fig. 207.) *Etant donné un arc ACB et sa corde AB, trouver sur cet arc un point D, tel que le rectangle des droites, DA, DB, soit égal à un carré donné* δ^2. Prenez le milieu C, de l'arc ACB; du point C comme centre, décrivez deux circonférences, AFG, DKD', dont l'une passe par les points, A, B, et dont l'autre soit tangente à une corde $RS = 2\delta$. Les points D, D', où la circonférence DKD' coupe l'arc ACB, satisfont au problème; c'est-à-dire qu'en tirant les droites, DA, DB, $D'A$, $D'B$, on aura...

$$DA \times DB = D'A \times D'B = \delta^2.$$

En effet; par le point D, menez la tangente FG, au cercle DKD', vous aurez $FG = RS = 2\delta$; $DF = DG = \delta$. Prolongez AD jusqu'en M; les cordes, AM, FG, se coupant au point D, en parties réciproquement proportionnelles (B. n° 124), et les droites, DM, DB, étant égales (n° 132); vous aurez $DA \times DB = DA \times DM = DF \times DG = \delta^2$.

On prouverait de même que, $D'A \times D'B = \delta^2$.

Ce problème n'est pas toujours possible. En effet; pour que les points, D, D', existent, il faut que l'on puisse décrire la circonférence DKD', tangente à la corde $RS = 2\delta$; ce qui exige que la corde RS ne soit pas plus grande que le diamètre du cercle CA; le côté δ du carré donné, ne doit donc pas être plus grand que la corde CA, qui soutend la moitié de l'arc donné. Ainsi, selon que le côté δ du carré donné sera plus petit que CA, ou égal à

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

CA, ou plus grand que CA, le problème admettra deux solutions, ou une seule solution, ou sera impossible.

138. (fig. 208). *Par un point D, donné dans un cercle OS, mener la plus grande et la plus petite corde possibles.* Par le point D, tirez le diamètre MN, et la corde AB, perpendiculaire à ce diamètre; MN et AB seront les lignes demandées. En effet; MN étant un diamètre, est la plus grande de toutes les cordes qui passent par le point donné D (n° 7); et je dis que AB est la plus petite de toutes les cordes qui passeraient par le même point, car en tirant une autre corde CDF, et menant du centre O la perpendiculaire OH sur CF; la perpendiculaire OH, sera plus courte que l'oblique OD; la corde CF sera donc plus grande que la corde AB (n° 63).

139. (fig. 208). *Par un point P, pris hors du cercle OS, mener une sécante, de manière que la partie interceptée dans le cercle, soit égale à une ligne connue* δ. Dans le cercle OS, inscrivez une corde $AB = \delta$; menez OD perpendiculaire sur AB et du point O comme centre, avec le rayon OD, décrivez une circonférence DTT'; par le point P, menez des tangentes, PC, PC', à cette circonférence, (B. n° 68); PC et PC', seront les sécantes demandées. En effet; soient T et T' les points de tangence; en tirant les rayons OT, OT', on aura...

$$OT = OT' = OD; \text{ d'où } CE = C'E' = AB = \delta, \text{ (n° 63).}$$

Remarque. La même construction subsisterait si le point donné P était sur la circonférence, ou dans le cercle. Lorsque ce point n'est pas dans l'intérieur de la circonférence, la seule condition nécessaire pour que le problème soit possible, est que la ligne donnée δ ne soit pas plus grande que le diamètre MN; mais lorsque le point donné est dans le cercle, en D, par exemple; il faut en outre que δ ne soit pas plus petit que la corde AB, menée par le point D perpendiculairement au diamètre MN (n° 138).

140. (fig. 208). *Par un point P, donné hors d'un cercle OS, mener une sécante PC, qui soit coupée par la circonférence OS, en moyenne et extrême raison.* Menez la tangente PR; tirez ensuite une sécante PC, telle que $CE = PR$ (n° 139); vous aurez (n° 65)...

$$PC : PR :: PR : PE; \text{ ou } PC : CE :: CE : PE.$$

La sécante PC, jouit donc de la propriété demandée. Lorsque la tangente connue PR, sera moindre que le diamètre MN du cercle donné, il existera deux sécantes égales, PC, PC', qui jouiront de la propriété demandée; lorsque PR sera égal à MN, la sécante PS, menée par le centre O, satisfera seule à la question; enfin, lorsque PR sera plus grand que MN, le problème sera impossible.

141. (fig. 209 et 210). *Par un point M, donné hors d'un cercle CA, mener une sécante MN telle que la partie PN, interceptée dans le cercle, soit à la partie extérieure PM, dans le rapport de* a *à* c. Décrivez deux circonférences qui se touchent en B, et qui soient telles que le rayon

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

$C'B$ de la plus petite, soit égal au rayon CA du cercle donné, et que toutes les cordes, BD, BH, etc., menées par le point B, donnent...

$$\alpha : \epsilon :: BE : ED :: BK : KH :: BQ : QR, (*).$$

Du point C' comme centre, avec le rayon $C'D = CM$, décrivez un arc rs; cet arc coupera la circonférence BDH en D; tirez la droite BD; du point M comme centre, avec le rayon $MN = BD$, décrivez un arc mn; cet arc coupera la circonférence donnée en N et N'. Les droites, MN, MN', résoudront également la question. En effet; 1°. menez les droites, CN, CP, $C'E$, $C'B$; les triangles, CNM, $C'BD$, sont égaux (B. n° 83); les angles, CNM, $C'BD$, sont donc égaux; or $CN = C'B$; les triangles isoscèles, CNP, $C'BE$, sont donc égaux (**); les côtés, NP, BE, sont donc égaux. Or, $MN = BD$; donc, $MP = DE$. La proportion $BE : DE :: \alpha : \epsilon$, devient donc $PN : PM :: \alpha : \epsilon$. La sécante MN jouit donc de la propriété demandée; 2°. on prouverait de même que la sécante MN' satisfait à la question.

Remarque. Le problème n'est pas toujours possible. En effet; par le point M, tirez un diamètre MH, qui rencontre la circonférence aux points A et H; par le point A, menez la tangente AT; vous aurez...

$$MA < MP, AH > PN; \text{ donc, } \frac{AH}{AM} > \frac{PN}{PM}. \text{ Soit, } \frac{AH}{AM} = \delta.$$

Le rapport de PN à PM, étant $\frac{\alpha}{\epsilon}$, on voit que la plus grande valeur possible de $\frac{\alpha}{\epsilon}$ est δ; mais il est évident que la plus petite valeur de $\frac{\alpha}{\epsilon}$ est zéro, car PN peut devenir zéro. Par conséquent, lorsque $\frac{\alpha}{\epsilon}$ sera plus petit que δ, le problème admettra deux solutions; quand $\frac{\alpha}{\epsilon}$ sera égal à δ, les deux solutions se réduiront à une seule; enfin lorsque $\frac{\alpha}{\epsilon}$ sera plus grand que δ, le problème sera impossible.

142. (fig. 35). *Connaissant, un cercle DA, la sécante indéfinie FB, et un point M de FB. Mener une sécante NH, telle que la partie GH, comprise dans le cercle, soit égale à une ligne donnée δ, et que $NH = NM$.* Du point A comme centre, avec le rayon δ, décrivez l'arc rs; cet

---

(*) Pour construire ces circonférences, prolongez le diamètre connu BQ, d'une quantité QR, telle que vous ayez, $\alpha : \epsilon :: BQ : QR$. La proportion (4) du n° 128, donnera $BE : ED :: BK : KH :: BQ : QR :: \alpha : \epsilon$.

(**) En effet; l'angle $CNP = CPN = C'BE = C'EB$. Les angles, NCP, $BC'E$, sont donc égaux. Les triangles, NCP, $BC'E$, sont donc égaux, (B. n° 80.)

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

arc coupera la circonférence en E. Par le point M et le milieu P de l'arc BE, menez la droite PH; du point H comme centre, avec le rayon δ, décrivez l'arc $r's'$; cet arc coupera la circonférence en un point G. Par les points connus H et G, tirez la droite HN. Je dis que NH sera la sécante demandée. Il suffit de prouver que $NH = NM$, car par construction $GH = \delta$. Les cordes, AE, GH, étant égales, les arcs qu'elles soutendent sont égaux; la mesure de l'angle NMH est donc (n° 44),

$$\frac{1}{2}(PB + GH + GA) = \frac{1}{2}(PE + AE + GA) = \frac{1}{2}GAP.$$

Mais, $\frac{1}{2}GAP$, est la mesure de l'angle NHM (n° 44). Les angles, NMH, NHM, sont donc égaux. Les côtés, NH, NM, sont donc égaux.

Pour que ce problème soit possible, il suffit que la ligne connue δ, ne soit pas plus grande que le diamètre du cercle donné. La position du point M, sur la sécante BF, est arbitraire.

143. (fig. 53). *Sur une droite donnée, décrire un* SEGMENT CAPABLE *d'un angle donné.* Cela se réduit à décrire un arc de cercle qui passe par les extrémités de la ligne donnée et qui soit tel que tous les angles, formés par les droites menées d'un point quelconque de cet arc aux extrémités de la ligne donnée, soient égaux à l'angle donné. L'arc qui jouira de cette propriété déterminera le *segment* demandé. Cherchons le centre de cet arc, et supposons qu'il s'agisse de décrire sur la droite AB, un *segment capable* de l'angle donné b. Si le point O est le centre du segment demandé, la perpendiculaire HN, menée sur le milieu de la corde AB, passera par le point O; il suffit donc de trouver une seconde ligne qui passe par le centre O. Pour y parvenir, on remarquera que si ANB est le segment cherché, les angles, AFB, AEB, etc., doivent être égaux à b; la droite BP, perpendiculaire au rayon OB, doit donc être telle que l'angle $ABP = b$, car l'angle ABP, formé par une tangente et par une corde, ayant pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés, les angles, AFB, AEB, PBA, sont égaux. Menant donc BP, sous un angle $PBA = b$, la perpendiculaire BE à BP, contiendra le centre de l'arc cherché; le point O, où les droites, BE, HN, se rencontrent, sera donc le centre du segment demandé. L'arc ANB, décrit du point O comme centre avec le rayon OB, déterminera donc ANB pour le segment demandé. Lorsque l'angle b est aigu, l'arc AMB est moindre que 180° et le segment demandé ANB, est plus grand que le demi-cercle FNC. Si l'angle b était obtus, la construction serait la même; le centre O tomberait à gauche de AB, et le segment demandé serait moindre que le demi-cercle. Enfin, si l'angle b, était droit, la perpendiculaire BE à BP, se confondrait avec BA, et le centre O tomberait sur le milieu H de la corde AB; la droite donnée serait donc alors un diamètre et le segment demandé serait un demi-cercle. Dans tous les cas, le segment demandé est déterminé par

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

l'arc ANB, qui n'est pas compris entre les côtés, BA, BP, de l'angle donné.

144. *Remarque.* (fig. 53). Pour décrire sur la droite AB, un segment capable de l'angle b, on a mené par l'extrémité B de AB, une ligne BP, sous l'angle $PBA = b$; par le point B, et par le milieu H de AB, on a conduit des perpendiculaires, BE, NV, aux lignes, BP, BA. L'intersection O de ces perpendiculaires, a donné le centre du segment demandé, et l'arc ANB, décrit du point O comme centre avec le rayon OB, a déterminé le segment demandé ANB. Si l'on menait par le point B, une ligne BF, sous l'angle $FBA = b$ et une perpendiculaire BV sur BF; le point V, de rencontre, des lignes, BV, NV, serait le centre d'un second segment $AN'B$, qui résoudrait également le problème (*). Et par conséquent, sur une droite donnée, on peut toujours décrire deux segmens capables d'un angle donné.

145. (fig. 53). *Lorsque d'un point quelconque des arcs, ANB, $AN'B$, on mène des droites aux extrémités A et B, de la droite AB, l'angle formé par ces droites est égal à l'angle donné b*, (n° 143). *Les points de ces arcs jouissent seuls de cette propriété*, car en prenant des points R et S, qui ne sont pas sur ces arcs et tirant par ces points des droites, BF, AE, SA, SB, on aura (B, n° 75), l'angle $ARB = REB + RBE = b + RBE$;

l'angle $BCA = BSA + CBS$; d'où $BSA = BCA - CBS = b - CBS$.

L'angle ARB est donc plus grand que b, tandis que l'angle BSA est moindre que b. Tous les angles qui sont égaux à b, et dont les côtés passent par les extrémités A et B de la droite AB, ont donc leurs sommets sur les arcs, ANB, $AN'B$, qui déterminent les segmens capables de l'angle donné b.

146. (fig. 206). *Connaissant les grandeurs et les positions de deux droites qui se coupent; construire un point tel, que les trois droites menées de ce point aux extrémités des lignes données, forment deux angles connus α et ϵ.* Supposez que BF et BE soient les lignes données. Les droites menées du point cherché, aux extrémités, B, F, de BF, devant former l'angle α; si l'on décrit sur BF un segment $BASF$ capable de l'angle α (n° 143), le

---

(*) Si l'on menait par le point A, des droites AP, AC, sous des angles, PAB, CAB, égaux à l'angle donné b; les perpendiculaires à ces droites menées par le point A, rencontreraient NV, aux points O et V; de sorte qu'il n'en résulterait pas de nouveaux segmens. Par exemple, tirez AO et OB; les angles ABO, ABP, étant respectivement égaux aux angles, BAO, BAP; les angles, PBO, PAO, sont égaux; mais le premier angle est droit; le second est donc droit; AO est donc perpendiculaire sur AP; la perpendiculaire à PA, menée par le point A, rencontre donc VN, au centre O du segment ANB, déjà obtenu. On verrait de même que AV est perpendiculaire sur AC. De sorte que la construction du n° 143, ne peut donner que deux segmens capables d'un angle connu.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

point demandé sera situé sur l'arc $BASF$ qui détermine ce segment. Par la même raison, si l'on décrit sur BE, un segment $BATE$, capable de l'angle $\mathcal{C}$, le point cherché sera sur l'arc $BATE$. Le point demandé sera donc l'intersection A, des arcs, BAF, BAE, qui déterminent les segmens capables des angles donnés, α, $\mathcal{C}$. Et en effet; si l'on mène les droites, AF, AB, AE, les angles, BAF, BAE, seront respectivement égaux aux angles donnés.

D'après la remarque du nº 144, on peut sur chacune des droites données, décrire deux segmens capables des angles donnés. Les intersections de ces segmens, donnent des points qui résolvent également le problème. Si l'on construit ces points, on reconnaîtra qu'il ne peut jamais exister plus de quatre solutions. Le problème est quelquefois impossible. La solution de ce problème est de la plus grande utilité dans le *levé des plans*. En voici un exemple:

147. (fig. 206). *Trois points F', B', E', du terrain, sont rapportés en F, B, E, sur la* CARTE *d'un pays. On est placé en un point A' du terrain, et de ce point l'on aperçoit les trois points connus, F', B', E'. On propose de construire le point A' sur la carte, au moyen d'une seule station, faite en A'.* Placez le *graphomètre* en A', et mesurez les angles, $B'A'F'$, $B'A'E'$; le point cherché A, étant l'homologue du point A'; les angles, BAF, BAE, formés sur la carte, doivent être respectivement égaux aux angles $B'A'F'$, $B'A'E'$, mesurés sur le terrain. Construisant donc sur les droites, BF, BE, des segmens, BAF, BAE, capables des angles $B'A'F'$, $B'A'E'$; l'intersection A, des arcs qui déterminent ces segmens, sera le point demandé. De sorte que le point A de la carte, représentera le point A' du terrain (*). Cette construction donne le moyen de *vérifier l'exactitude de la carte d'un pays*, car en déterminant, de cette manière, des points indiqués sur la *carte*, on voit si ces points sont placés avec exactitude.

148. (fig. 202). *Par un point donné M, faire passer une circonférence, tangente à deux droites données, AB, AC.* Le centre du cercle demandé, doit se trouver sur la droite AE, qui divise l'angle BAC en deux parties égales (nº 125). Tirez AM, et d'un point quelconque Q de AE, menez QP perpendiculaire sur AB; du point Q comme centre, avec le rayon QP, décrivez un arc. Cet arc touchera AB en P, et coupera AM en R; menez MO, parallèle à QR; je dis que le point O sera le centre du cercle demandé. Pour le démontrer, menez OD et OD', respectivement perpendiculaires sur AB et AC; vous aurez $OD = OD'$, (nº 124). Les droites, PQ, DO, perpendiculaires à BA, sont parallèles; mais QR et OM sont aussi parallèles; donc

$$OD : QP :: OA : QA :: OM : QR.$$

(*) La construction donnant plusieurs solutions, la position du point A' sur la *carte*, paraît indéterminée; mais en examinant avec soin, les positions relatives des points, F', B', E', A', on peut toujours reconnaître le point qui résout le problème. On peut d'ailleurs lever tous les doutes, à l'aide d'une nouvelle *station*.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Mais, $QP = QR$; donc $OD = OM = OD'$. La circonférence, décrite du point O comme centre avec le rayon OD, passera donc par les points, D, M, D', et sera tangente aux droites, AB, AC, comme l'exige l'énoncé. L'arc décrit du point Q comme centre, coupant AM en un second point R'; si l'on mène MO' parallèle à $R'Q$, le point O' sera le centre d'un second cercle qui jouira également des propriétés demandées. La question proposée admet donc deux solutions, lorsque le point M est dans l'intérieur de l'angle BAC. Si le point donné était sur l'un des côtés, AB, AC, en D, par exemple; AM tomberait sur AB; QR et QR', coïncideraient avec QP; MO et MO', tomberaient sur DO; et la circonférence, décrite du point O comme centre avec le rayon OD, résoudrait le problème; il n'y aurait que cette seule solution. Enfin, si le point donné était hors de l'angle BAC, le problème serait évidemment impossible; la construction indiquerait cette impossibilité, car le point donné M n'étant plus situé dans l'angle BAC, l'arc décrit du point Q comme centre avec le rayon QP, ne couperait pas AM. Ainsi; selon que l'arc $R'PR$, coupe AM en deux points, ou touche AM en un point, ou ne rencontre pas AM, le problème admet deux solutions, ou une solution, ou est impossible.

149. *Remarque.* La construction précédente réussit également lorsque les droites, AB, AC, sont parallèles; car dans ce cas, le point A étant placé à l'infini, MR et $D'A$ sont parallèles à BA; OD' est le prolongement de OD, et le centre O est le milieu de la droite DOD'; de sorte que EQ est une droite dont tous les points sont également distans des parallèles, AB, AC. On peut simplifier la construction en décrivant un arc du point donné comme centre, avec un rayon égal à la moitié de la distance des lignes données; les points où cet arc coupe la droite EQ, sont les centres des cercles demandés.

150. (fig. 211). *Décrire un cercle qui soit tangent à une droite donnée AB, et qui passe par deux points donnés M et N.* Tirez MN; par le milieu C de MN, menez SD perpendiculaire à MN; conduisez la droite MD; le centre du cercle demandé sera sur SD, (B. n° 51); d'un point quelconque Q de SD, menez QP, perpendiculaire sur AB, et de ce point comme centre, avec le rayon QP, décrivez un arc; cet arc touchera AB en P, et coupera MD en R et R'; tirez QR, QP et QR'; par le point M, menez MO et MO', parallèles à QR et à QR'; les points O et O', seront les centres de deux cercles qui satisferont également aux conditions du problème. Il suffit de prouver que les perpendiculaires, OT, $O'T'$, abaissées des points, O, O', sur AB, sont respectivement égales à OM et à $O'M$. Or, les lignes, PQ, TO, $T'O'$, perpendiculaires à BA, sont parallèles; donc

$$\frac{QP}{OT} = \frac{DQ}{DO} = \frac{QR}{OM} \text{ et } \frac{QP}{O'T'} = \frac{DQ}{DO} = \frac{QR'}{O'M}.$$

Mais, $QP = QR = QR'$; donc $OT = OM$ et $O'T' = O'M$. Il existe

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

donc deux circonférences, $mMNn$, $m'MNn'$, qui jouissent des propriétés demandées.

151. (fig. 212). *Connaissant, une droite AB et un cercle OR; décrire une circonférence, qui touche AB en un point donné M, et qui soit tangente au cercle donné.* Menez ME perpendiculaire sur AB; prolongez EM d'une quantité $MC=OR$; tirez CO et menez OD, sous l'angle..... $COD=OCE$; la circonférence MST, décrite du point D comme centre avec le rayon DM, satisfera à la question. En effet; les angles, COD, OCD, étant égaux, les côtés opposés, DC, DO, sont égaux. Mais, $CM=OT$; donc $DM=DT$. La circonférence décrite du point D comme centre, avec le rayon DM, touchera donc AB en M, et passera par un point T du cercle donné. Or, OTD est une droite et la distance OD des centres est égale à la somme des rayons; les deux cercles, OT, DT, se touchent donc extérieurement (n° 130). Si l'on voulait que les deux cercles fussent tangens intérieurement, la construction serait analogue; on prendrait $MC'=OR$; on joindrait OC' et l'on mènerait OD' sous l'angle $C'OD'=OC'E$; la circonférence GMK, décrite du point D' comme centre avec le rayon $D'M$ jouirait des propriétés demandées. La question proposée admet donc deux solutions.

152. (fig. 204). *Décrire une circonférence MAC, qui touche le cercle $MD'F'B'$, au point donné M; de manière qu'en menant par ce point une sécante quelconque MA, les parties, MB', $B'A$, soient dans le rapport connu de α à ϵ.* Si ME est le diamètre du cercle demandé, on aura....

$$\frac{\alpha}{\epsilon}=\frac{MB'}{B'A}; \text{ d'où } \frac{\alpha}{\alpha+\epsilon}=\frac{MB'}{MB'+B'A}=\frac{MB'}{MA}=\frac{MF'}{ME}, \text{ (n° 128).}$$

Le diamètre ME, du cercle demandé, est donc une quatrième proportionnelle géométrique aux trois lignes connues, α, $(\alpha+\epsilon)$ et MF'. Ce problème est toujours possible.

153. (fig. 213). *Deux cercles concentriques, CF, CG, étant donnés; décrire une circonférence OM, qui soit telle que si aux points M et N, où elle rencontre les circonférences données, on mène des tangentes, MP, MQ, NT, NR, aux trois circonférences; les angles, PMQ, RNT, soient égaux à des angles connus α et ϵ.* Par deux points quelconques M et L, des circonférences données, menez des tangentes, MP, LB, à ces circonférences et tirez les droites, MQ, LI, sous des angles, $PMQ=\alpha$, $BLI=\epsilon$; conduisez MS' et LH, perpendiculaires aux lignes MQ et LI; à la circonférence CF, menez une sécante ON, telle que vous ayez..... $NS=LH$ et $ON=OM$ (*). La circonférence $NMED$, décrite du point O comme centre, avec le rayon OM, résoudra le problème. En effet; la droite MQ, perpendiculaire au rayon MO, est tangente à la circonférence

(*) Connaissant le cercle CF, la sécante MS', et un point M de MS'; il s'agit de mener une sécante ON, telle que $NS=LH$ et $ON=OM$, (n° 142).

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

OM; l'angle PMQ, formé par les deux tangentes MP, MQ, est égal à l'angle donné α. Et si par le point N, on mène les droites, NT, NR, tangentes aux circonférences CF, ON, l'angle TNR sera égal à l'angle donné $\mathcal{C}$, car les cordes, NS, LH, étant égales, les angles, TNO, HLK, BLV, sont égaux; leurs complémens, TNR, ILB, sont donc égaux; mais l'angle $ILB = \mathcal{C}$; donc l'angle $TNR = \mathcal{C}$. La circonférence $NMED$, satisfait donc à toutes les conditions du problème. La position du point M étant arbitraire, on peut assujettir la circonférence ON, à passer par un point quelconque de la circonférence CG.

154. (fig. 214). *Décrire une circonférence telle que les distances de l'un quelconque de ses points, aux extrémités A et B d'une droite AB, soient comme α est à $\mathcal{C}$.* Cherchez sur AB, un point P, tel que vous ayez $PA : PB :: \alpha : \mathcal{C}$. Le point P, appartiendra à la circonférence demandée. Prenez deux lignes, α', $\mathcal{C}'$, qui soient entr'elles comme α est à $\mathcal{C}$, et telles que vous ayez, $AB < \alpha' + \mathcal{C}'$, $AB > \alpha' - \mathcal{C}'$. Des points A et B comme centres, avec les rayons, α', $\mathcal{C}'$, décrivez des arcs. Ces arcs se couperont en un point M (n° 130). Tirez les droites, MA, MB, MP. Par le point M, menez MC, sous l'angle $PMC = MPC$. La circonférence PGH, décrite du point C comme centre, avec le rayon CP, satisfera à toutes les conditions du problème. En effet; par construction...

$$MA = \alpha',\ MB = \mathcal{C}',\ MA : MB :: \alpha' : \mathcal{C}' :: \alpha : \mathcal{C} :: PA : PB.$$

Les angles, PMA, PMB, sont donc égaux (n° 54). Mais (B. n° 75),

$$PMA + PAM = MPC = PMC = PMB + BMC = PMA + BMC.$$

Les angles, PAM, BMC, sont donc égaux; les triangles, ACM, MCB, sont donc semblables (n° 56); on a donc...

$$CB : CM :: CM : CA, \text{ ou, (1)... } CB : CP :: CP : CA.$$

Cela posé; si d'un point quelconque N, de la circonférence CM, on mène les droites, NA, NB, NC, on aura, $CN = CP$; d'où, $CB : CN :: CN : CA$.

Les triangles, BCN, ACN, ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels, sont semblables, et donnent...

(2)... $NA : NB :: CN : CB :: CP : CB$. La proportion (1) donne

$$CP : CB :: (CA - CP) : (CP - CB) :: AP : PB :: \alpha : \mathcal{C};$$

Or, (proportion 2), $CP : CB :: NA : NB$. Donc, $NA : NB :: \alpha : \mathcal{C}$.

La circonférence CM, jouit donc de la propriété demandée (*).

(*) Les personnes qui connaissent l'*application de l'Algèbre à la Géométrie*, pourront résoudre ce problème plus général : *trouver une courbe telle que les distances de l'un quelconque de ses points, aux extrémités A et B de la droite AB, soient comme α est à $\mathcal{C}$.* Prenant AB pour l'axe des x et A pour l'origine des coordonnées; désignant par x et y les

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

155. (fig. 214). *Sur une ligne donnée DE, trouver un point dont les distances à deux points connus A et B, soient proportionnelles à deux lignes connues*, α, $\mathcal{C}$. Décrivez une circonférence CM, telle que les distances de l'un quelconque des points de cette courbe, aux points A et B, soient proportionnelles aux lignes connues, α, $\mathcal{C}$, (n° 154). Les points M et N, où cette circonférence coupera la ligne donnée, jouiront de la propriété demandée, car on aura, $MA : MB :: \alpha : \mathcal{C}$ et $NA : NB :: \alpha : \mathcal{C}$.

Remarque. Chaque point d'intersection de la circonférence CM, avec la droite DE, donnant une solution; le problème admet deux solutions, ou une solution, ou est impossible.

156. (fig. 215). *Sur une droite donnée MN, décrire une circonférence ayant pour centre le milieu O de MN, et telle que la somme des carrés des distances de l'un quelconque de ses points aux extrémités M et N, de la droite donnée, soit égale à un carré donné* δ^2. Du point O comme centre, avec le rayon $\frac{1}{2}\delta$, décrivez la circonférence OA. Prenez un point quelconque A de cette circonférence; tirez les droites, AB, AC. Des points M et N comme centres, avec les rayons, CA, BA, décrivez des arcs; ces arcs se couperont en un point P. La circonférence DPE, décrite du point O comme centre avec le rayon OP, jouira de la propriété demandée. Il s'agit de faire voir que pour un point quelconque R de cette circonférence, on aura $RM^2 + RN^2 = \delta^2$. Or, par construction...

---

coordonnées d'un point quelconque M de la courbe demandée, et posant $AB = a$; on trouvera que l'équation de la courbe demandée est...

$$(1)\ldots\ (\alpha^2 - \mathcal{C}^2)(y^2 + x^2) - 2a\alpha^2 x + a^2\alpha^2 = 0.$$

Cette équation est celle d'une circonférence, dont le centre est sur l'axe des x. Cherchant les points P et P', où la circonférence coupe l'axe des x, on trouvera

$$AP = \frac{a\alpha}{\alpha + \mathcal{C}}, \text{ et } AP' = \frac{a\alpha}{\alpha - \mathcal{C}}.$$

Portant donc sur AF, des parties, AP, AP', déterminées par les proportions

$$(\alpha + \mathcal{C}) : \alpha :: a : AP, \ (\alpha - \mathcal{C}) : \alpha :: a : AP',$$

La droite PP', sera le diamètre de la circonférence qui résout le problème; et les points de cette circonférence jouiront seuls de la propriété demandée. Le problème sera toujours possible.

Remarque. Quand $\alpha = \mathcal{C}$, on trouve $AP = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}AB$; AP' est infiniment grand et l'équation (1) se réduit à $x = \frac{1}{2}a$. Cette dernière équation étant celle d'une droite PS, perpendiculaire sur le milieu de AB, on voit que lorsque $\alpha = \mathcal{C}$, la circonférence devient une droite PS, perpendiculaire sur le milieu de AB. Et en effet; chaque point de PS, est également distant des extrémités A et B, de AB (n° 19).

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

$$AC^2 + AB^2 = BC^2 = \delta^2 = MP^2 + NP^2.$$

Dans les triangles, MRN, MPN, les lignes, RO, PO, divisant le côté commun MN, en deux parties égales, on a (n°)...

$$MR^2 + NR^2 = 2(OR^2 + MO^2),\quad MP^2 + NP^2 = 2(PO^2 + MO^2).$$

Or, $PO = OR$; donc, $MR^2 + NR^2 = MP^2 + NP^2 = \delta^2$.

La circonférence $DRPE$, résout donc le problème (*).

157. (fig. 216). *Mener une tangente commune à deux cercles.* Par les centres C, c, des cercles donnés, tirez une droite indéfinie SS' et conduisez deux diamètres parallèles quelconques AH, ah, qui rencontrent les circonférences aux points, A, H, a, h. Menez les droites, Aa, Ah; prolongez la ligne

---

(*) Pour connaître dans quels cas le problème sera possible, nous ferons, $OR = r$ et $MN = l$; le triangle MRN donnera...

$$RM^2 + RN^2 = \delta^2 = 2\left(r^2 + \frac{1}{4}l^2\right).$$ D'où (1)... $r = \frac{1}{2}\sqrt{2\delta^2 - l^2}$.

La construction de cette valeur de r, donnerait directement le rayon du cercle demandé; mais la construction que nous avons indiquée est plus élégante. L'analyse complète du problème se déduit de la valeur de r. En effet; les lignes l et δ étant données, la longueur de r est déterminée par la formule (1); il n'existe donc qu'une seule circonférence qui jouisse de la propriété demandée. Quand $2\delta^2$ est plus grand que l^2, r est réel; le problème admet donc une solution. Lorsque $2\delta^2 = l^2$, le rayon r est zéro et la circonférence demandée se réduit au point O; car, $OM^2 + ON^2 = \frac{1}{4}l^2 + \frac{1}{4}l^2 = \frac{1}{2}l^2 = \delta^2$. Enfin, quand $2\delta^2$ est moindre que l^2, le problème est impossible. La construction indique ces diverses circonstances, car suivant que $2\delta^2 - l^2$ est positif, ou nul, ou négatif, les arcs décrits des points M et N comme centres, avec les rayons, CA, BA, se coupent en P ou se touchent en O, ou ne se rencontrent pas.

L'application de l'Algèbre à la Géométrie, donne la solution de ce problème plus général : *Trouver une courbe telle que la somme des carrés des distances de l'un quelconque de ses points aux extrémités d'une ligne donnée, soit égale au carré donné* δ^2. Désignant la ligne donnée par l; prenant cette ligne pour axe des x, et l'origine des coordonnées étant au milieu de l, l'équation de la courbe cherchée sera $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}(2\delta^2 - l^2)$. La courbe demandée est donc une circonférence qui a pour centre le milieu de la ligne donnée. Le rayon r de cette circonférence, est facile à construire, et selon que $(2\delta^2 - l^2)$ est positif ou négatif, le problème est possible ou impossible. Les points de cette circonférence jouissent seuls de la propriété demandée.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Aa, jusqu'à ce qu'elle rencontre CS en B. Par les points, B, b, où les droites, AaB, Abh, rencontrent CS, menez des tangentes, Bt, Bt', bm, bm', au cercle ca; je dis que les prolongemens, tN, $t'N'$, bM, bM', de ces quatre lignes, seront tangens à l'autre circonférence. En effet; par le point t de tangence, menez le rayon tc; ce rayon sera perpendiculaire à la tangente Bt, (B. n° 47). Du centre C, menez CT perpendiculaire à BN; les droites, CT, ct, perpendiculaires à BN, seront parallèles (n° 24); mais CA est parallèle à ca; donc, $ct : CT :: cB : CB :: ca : CA$.

Or, $ct = ca$; CT est donc égal au rayon CA; la perpendiculaire CT, menée du centre C, sur la droite BN, étant égale au rayon CA; *la droite* BN est tangente à la circonférence CA (*). On démontrerait de même que les droites BN', mM et $m'M'$, sont tangentes aux deux circonférences.

L'examen attentif des diverses positions que peuvent prendre les circonférences, conduit aux résultats suivans; 1°. (fig. 216), quand la distance Cc des centres, est plus grande que la somme des rayons, CA, ca, les circonférences ne se rencontrent pas (n° 130), les points, B, b, sont hors des circonférences et l'on peut mener quatre tangentes communes aux deux cercles; 2°. quand la distance des centres est égale à la somme des rayons, les circonférences se touchant extérieurement (n° 130), les points b, p, tombent en P; les tangentes, Mm, $M'm'$, se réunissent en une seule, le point B est situé hors des cercles et les quatre tangentes se réduisent à trois. Ainsi, la distance Cb (fig. 205) des centres des cercles, CT, bT, étant égale à la somme des rayons, ces cercles se touchent extérieurement, et l'on peut mener trois tangentes communes à ces deux cercles. Ces tangentes sont, GH, $G'H'$ et DD'; 3°. quand la distance des centres est moindre que la somme des rayons et plus grande que leur différence, les circonférences se coupent; le point b (fig. 216) tombe dans le cercle CA; le point B est hors des cercles et l'on ne peut mener que deux tangentes. Par exemple, on ne peut mener que deux tangentes communes, KV, $K'V'$, (fig. 205), aux cercles, CM, nM; 4°. quand la distance des centres est égale à la différence des rayons, les cercles se touchent intérieurement; le point b (fig. 216) est dans le cercle CA, le point B se confond avec le point de tangence des deux circonférences, et l'on ne peut plus mener qu'une seule tangente. Ainsi, les deux cercles CT, ST (fig. 205), se touchant intérieurement en T, on ne peut mener qu'une seule tangente DD', commune à ces deux cercles; 5°. Enfin, quand la distance des centres est plus petite que la différence des rayons, les circonférences sont l'une dans l'autre et n'ont

---

(*) En effet; la perpendiculaire CT, menée du centre C sur la droite BN, étant égale au rayon CA; le point T de la droite BN est sur la circonférence CA; et tout autre point N de la droite BN, est hors du cercle; car l'oblique CN est plus grande que la perpendiculaire CT à BN; la droite BN, n'a donc que le point T, commun avec la circonférence; cette droite est donc tangente à la circonférence CA.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

aucun point commun ; les points B, b, tombent dans les cercles, et l'on ne peut mener aucune tangente commune aux deux cercles. Ainsi, on ne peut mener aucune tangente commune aux cercles, CT, qt, (fig. 205). (*).

(*) Ces propriétés résultent de l'examen de la figure. On peut les démontrer rigoureusement de la manière suivante. Soient, (fig. 216), $CA = R$, $ca = r$, $R > r$, $Cc = d$. Les triangles, CAB, caB, étant semblables, ainsi que les triangles, CAb, chb ; on a

$$CA : ca :: BC : Bc \text{ et } CA : ch :: Cb : cb. \text{ D'où...}$$

$$CA - ca : BC - Bc :: CA : BC \text{ et } CA + ch : Cb + cb :: CA : Cb.$$

Or, $CA = R$, $ch = r$; $BC - Bc = d$, $Cb + cb = d$. Donc,

$$(3) \ldots CB = \frac{dR}{(R-r)} ; \text{ et } (4) \ldots Cb = \frac{dR}{(R+r)} ; \text{ on suppose } R > r.$$

Toutes les propriétés des tangentes se déduisent de ces formules. En effet ; 1°. lorsque la distance d des centres est plus grande que la somme $(R + r)$ des rayons, les cercles n'ont aucun point commun et ne sont pas l'un dans l'autre (n° 130) ; les formules (3) et (4) disent que les points, B, b, sont hors des cercles ; car elles donnent, $CB > Cq$, $Cb > CP$ et $Cb < Cp$.

Pour s'en convaincre, il suffit d'exprimer les lignes contenues dans ces inégalités, au moyen de, R, r et d. Par exemple, la première inégalité donne, $dR > (d + r)(R - r)$. D'où, $d > R - r$. Mais, par hypothèse, d est plus grand que $(R + r)$; d est donc plus grand que $(R - r)$; on a donc $CB > Cq$. On démontrerait de même que les deux autres inégalités sont exactes, car elles conduiraient à $d > (R + r)$ et à $(d + R) > r$; ce qui est vrai, puisque d est plus grand que $(R + r)$. Les points, B, b, tombant hors des cercles, on peut mener deux tangentes par chacun de ces points. Ce qui donne quatre tangentes communes aux deux cercles, CA, ca.

2°. Lorque $d = (R + r)$; les cercles sont tangens extérieurement ; la formule (4) donne, $Cb = R = CP$; le point b tombe donc au point P où les cercles se touchent. On ne peut plus mener par ce point qu'une tangente commune aux deux cercles ; de sorte que les tangentes, Mm, $M'm'$, se confondent. En effectuant les calculs, on verra que la formule (3) exprime que CB est plus grand que Cq ; le point B est donc hors des cercles ; on peut donc mener deux tangentes par ce point. Ce qui donne en tout trois tangentes.

3°. Lorsqu'on a, $d < (R + r)$ et $d > (R - r)$; les cercles se coupent ; les formules (3) et (4), combinées avec ces inégalités, donnent ..... $CB > Cq$, $Cb < CP$; le point B est donc hors des cercles ; on peut donc mener deux tangentes par ce point. Le point b tombant dans le cercle CA, on ne peut mener aucune tangente par ce point. Il n'existe donc que deux tangentes.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Remarque. Nous avons trouvé quatre tangentes en joignant les extrémités du diamètre ah, avec l'extrémité A, du diamètre AH; il paraîtrait donc que l'on devrait trouver quatre nouvelles tangentes, en joignant les points a et h, avec l'autre extrémité H du diamètre AH; mais si l'on mène ces lignes, on reconnaîtra qu'elles passent par les points, B, b; de sorte que cette construction donne les tangentes déjà obtenues. Par exemple, si la droite Ha, rencontre Cc en K; les triangles semblables, acK, HCK, donneront.... $R : r :: CK : cK$; d'où $(R+r) : R :: (CK+cK) : CK = \frac{dR}{R+r}$.

Cette valeur de CK étant celle de Cb, le point K tombe en b. On prouverait de même, que le prolongement de la droite Hh, passe par le point B.

Les valeurs de CB et de Cb, données par les formules (3) et (4), ne dépendant que des rayons, R, r, et de la distance d des centres, on voit qu'elles conviennent à deux diamètres parallèles quelconques; et par conséquent, *si l'on menait d'autres diamètres parallèles, on ne trouverait pas d'autres tangentes communes aux deux cercles.* On en déduit cette propriété curieuse :

158. *Deux cercles étant donnés; si l'on mène, dans ces deux cercles, des diamètres parallèles deux à deux; toutes les droites, qui joindront les extrémités des diamètres parallèles, passeront par deux points fixes de la droite qui joint les centres; et les tangentes, menées par ces points fixes, à l'un des cercles, seront tangentes à l'autre cercle.*

4°. Lorsque, $d = (R - r)$; les cercles se touchent intérieurement; les formules (3) et (4) donnent $Cb < CP$ et $CB = CP$; le point b tombant dans le cercle CA, on ne peut mener aucune tangente par ce point, et le point B se confondant avec le point de tangence des deux cercles, on ne peut mener qu'une seule tangente commune aux deux cercles.

5°. Enfin, lorsque d est moindre que $(R - r)$; les cercles sont l'un dans l'autre et n'ont aucun point commun. Les formules (3) et (4) expriment que les points, B, b, tombent dans le cercle CA; de sorte qu'on ne peut mener aucune tangente commune aux deux cercles.

Si les rayons R, r, étaient égaux; les formules (3) et (4) donneraient $CB = \infty$; $Cb = \frac{1}{2}d$; la valeur infinie de CB, exprime que les tangentes, Tt, $T't'$, ne rencontrent plus la droite CcS, qui joint les centres; ces tangentes sont donc alors parallèles à Cc. La valeur de Cb exprime que pour construire les deux autres tangentes, il suffit de mener deux tangentes à l'un des cercles, par le milieu de la droite Cc qui joint les centres.

Si r, que nous supposions plus petit que R, devenait plus grand, le point B passerait évidemment de l'autre côté du point C, sur le prolongement CS' de cC; la formule (4) exprimerait ce changement de position du point B, en donnant une valeur *négative* pour CB.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

159. (fig. 217). *Par un des points d'intersection de deux circonférences, mener une sécante telle que la différence des cordes, qui en résulteront dans les deux cercles, soit égale à une ligne donnée* δ. Soient, KAB et $K'AB$, les deux circonférences données, qui se coupent en A et B; prenez un point quelconque P, sur la circonférence $K'AB$; tirez, AP, PB, AR. Construisez un triangle DEF tel que sa base $DE=\delta$, et que les angles, FDE, FED, adjacens à cette base, soient égaux aux angles, APR, ARP. Prenez une corde $AC=FD$; la droite BC sera la sécante demandée, car en tirant la corde AS, vous aurez....

$$ASC=180°-ASB=180°-ARB=ARP=FED \text{ et}$$

$ACB=APB$, ou $ACS=APR=FDE$. Donc, l'angle $CAS=DFE$.

Or, $AC=FD$; les triangles, CSA, DEF, sont donc égaux (B. n° 81). Donc $BC-BS=CS=DE=\delta$. La différence des cordes, BC, BS est donc effectivement égale à la ligne donnée δ. Lorsque la corde AC, devra être plus grande que le diamètre du cercle $AK'B$, le problème sera impossible. Et en effet; on conçoit facilement que la différence δ des cordes, BC, BS, ne peut pas dépasser certaines limites; cette différence peut d'ailleurs être aussi petite que l'on veut.

160. La solution précédente donne le moyen de *mener, par un des points d'intersection de deux circonférences, une sécante BC telle que la partie CS, comprise entre les deux circonférences, soit égale à une ligne donnée* δ.

161. (fig. 217). *Par un des points d'intersection de deux circonférences, mener une sécante telle, que la somme des cordes qui en résulteront dans les deux cercles, soit égale à une ligne donnée* δ. Supposez que les circonférences se coupent en A et B. Prenez deux points quelconques K, K', sur les circonférences; tirez les droites, KA, KB, $K'A$, $K'B$; construisez un triangle DEF, tel que vous ayez.....
le côté $DE=\delta$, l'angle $FDE=AKB$, l'angle $FED=AK'B$.

Par le point A, tirez une corde $AM=FD$; la droite MN, menée par les points M et B, sera la sécante demandée. En effet....

$AM=FD$; l'angle $AMN=AKB=FDE$;

l'angle $ANM=AK'B=FED$; d'où l'angle $MAN=DFE$.

Les triangles, AMN, FDE sont donc égaux, (B. n° 81). Donc .... $MB+BN=MN=DE=\delta$. Pour que ce problème soit possible, il faut que δ tombe entre certaines limites. La construction indique que le problème est impossible quand la corde AM doit être plus grande que le diamètre du cercle AKB. Lorsque DF est moindre que ce diamètre, on peut mener deux cordes, AM, AM', égales à DF; ce qui donne deux solutions. Ces deux solutions se réduisent à une seule, quand DF est égal au diamètre du cercle AKB.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Remarque. Le problème ne peut pas admettre plus de deux solutions. En effet; les points K et K', prenant des positions quelconques sur les circonférences, les angles, AKB, $AK'B$, qui s'appuieront sur le même arc, ne changeront pas; le triangle DEF, sera donc toujours le même. Si du point A, comme centre, avec le rayon FD, on décrit un arc; cet arc ne pourra couper la circonférence AKB qu'en deux points, M, M'; les droites, MBN, $M'BN'$, seront donc les seules qui jouiront de la propriété demandée.

162. (fig. 218). *Connaissant deux cercles concentriques* OA, OC, *le diamètre* AB, *et un angle* α; *mener une sécante* MN, *qui fasse avec* AB *l'angle* $OMN=\alpha$, *et dont les parties*, MR, MN, *comprises entre le diamètre* AB *et les circonférences, soient dans le rapport connu de* ϵ *à* γ. Par le centre O, menez une droite quelconque OE; prenez OD, de manière que vous ayez, $\epsilon : \gamma :: OC : OD$. Sur CD, décrivez un segment DGC, capable de l'angle donné α (n° 143). L'arc DGC coupera la circonférence OA, en un point G; tirez la droite DG, et conduisez OH parallèle à DG; menez la droite GCH; prenez $OM=OH$, et tirez la droite MN sous l'angle $OMN=\alpha$; MN sera la sécante demandée. En effet; menez la droite OR; OH étant parallèle à DG, vous aurez....

l'angle $CHO=CGD=\alpha=OMN=OMR$. Or, $OM=OH$ et $OR=OC$.

Les triangles, OMR, OCH, sont donc égaux; donc $MR=HC$. Tirant les droites ON, OG, on prouvera de même que, $MN=HG$. Les triangles semblables, OCH, DCG, donnent.....

$HC : CG :: OC : CD$; d'où, $HC : (HC+CG) :: OC : (OC+CD)$ ou $HC : HG :: OC : OD :: \epsilon : \gamma$. Mais, $HC=MR$ et $HG=MN$.

Donc, $MR : MN :: \epsilon : \gamma$. Or, l'angle $NMO=\alpha$. La sécante MN jouit donc des propriétés demandées.

163. (fig. 219). *Décrire une circonférence* RKV, *qui coupe deux circonférences concentriques*, CH, CG, *en des points*, P, Q, M, N, *tels que si l'on mène, par ces points, des tangentes*, PT, QT, MS, NS, *à la circonférence* RKV, *les angles*, QTP, NSM, *formés par ces tangentes, soient respectivement égaux à des angles donnés*, α, ϵ. Disposez deux angles, $P'O'Q'$, $M'O'N'$, qui soient respectivement les supplémens des angles α, ϵ, de manière que la droite $O'T'$ divise les angles $P'O'Q'$, $M'O'N'$ en deux parties égales; du point O' comme centre, décrivez une circonférence quelconque $M'N'Q'$, à laquelle vous mènerez les tangentes, $P'T'$, $M'S'$; tirez $Q'T'$ et $N'S'$; déterminez (n° 155) sur $O'T'$, un point C' tel, que les droites, $C'N'$, $C'Q'$, soient proportionnelles aux rayons, CG, CH, des cercles donnés. Par le centre C, menez une droite quelconque CV, et prenez des parties, CO, OK, telles que vous ayez....

(1)... $C'Q' : CH :: C'O' : CO$ et $C'Q' : CH :: O'Q' : OK$.

La circonférence RKV, décrite du point O comme centre avec le rayon OK, satisfera à toutes les conditions du problème. Pour le démontrer

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

menez les tangentes, PT, MS; les droites, TQ, SN, seront tangentes à la circonférence OK, car les triangles, CPO, CQO, étant égaux (B. n° 83), les angles, POC, QOC, sont égaux; les triangles, TOP, TOQ, sont donc égaux (B. n° 80); mais l'angle TPO est droit; l'angle TQO est donc droit; la droite TQ est donc tangente à la circonférence OK. On prouverait de même que les droites, SN, $S'N'$, $T'Q'$, sont des tangentes. Cela posé, les proportions (1) donnent.....

(2)... $C'Q' : CQ :: C'O' : CO :: O'Q' : OQ$. Or, par construction, $C'N' : C'Q' :: CG : CH :: CN : CQ$; d'où $C'Q' : CQ :: C'N' : CN$;

Donc, (3)... $C'N' : CN :: C'O' : CO :: O'Q' : OQ :: O'N' : ON$.

Les proportions (2) et (3) démontrent que les triangles, COQ, $C'O'Q'$, sont semblables, ainsi que les triangles, NOC, $N'O'C'$ (B. n° 114). Donc,

l'angle $2COQ = 2C'O'Q'$ et l'angle $2NOC = 2N'O'C'$;
ou l'angle $POQ = P'O'Q'$ et l'angle $MON = M'O'N'$.

Dans le quadrilatère $P'O'Q'T'$, les angles, P', Q', étant droits, on a l'angle $P'O'Q' = 180° - P'T'Q'$; mais par construction,

l'angle $P'O'Q' = (180° - \alpha)$; donc l'angle $P'T'Q' = \alpha$.

Dans le quadrilatère $POQT$, les angles P et Q étant droits, on a...

l'*angle* $POQ = 180° - PTQ = P'O'Q' = (180° - \alpha)$; donc $PTQ = \alpha$.

On prouverait de même que l'angle $MSN = \mathcal{C}$. Le problème est donc résolu.

Construction des Triangles.

164. Comme dans un triangle, chaque angle vaut 180° moins la somme des deux autres; deux angles déterminent le troisième. Et conséquemment: Dans un triangle, il n'existe que cinq parties réellement distinctes; deux angles et trois côtés. Nous allons prouver, que la connaissance de trois de ces cinq parties, suffit toujours pour construire le triangle.

165. *Connaissant trois des cinq parties d'un triangle, construire géométriquement ce triangle* (*).

166. (fig. 196). *Lorsqu'on sait que le triangle à construire est rectangle, la connaissance de deux parties suffit;* car l'angle droit, qui est connu, complète les trois parties données. Soit le triangle ABC, rectangle en B; les deux parties connues ne peuvent se combiner que des cinq manières suivantes....

1°, a et c; 2°, b et a; 3°, b et A; 4°, A et c, 5°, A et a.

(*) Pour plus de *symétrie*, nous désignerons toujours les trois angles du triangle demandé par, A, B, C; et les petites lettres, a, b, c, désigneront les côtés opposés.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

167. (fig. 62). Dans un triangle obliquangle, les trois parties connues ne peuvent se combiner que de cinq manières différentes; ce qui fournit les cinq cas suivans; construire le triangle, connaissant.....

1°, A, C, b; 2°, A, C, c; 3°, a, c, A; 4°, a, b, C; 5°, a, b, c.

Construction des Triangles rectangles.

168. (fig. 196). On connaît les deux côtés a et c de l'angle droit B. Tirez deux lignes, BH, BK, qui se coupent à angle droit; portez a de B en C, et c de B en A; menez la droite AC; le triangle sera construit. L'hypoténuse b, et les angles A, C, se trouveront ainsi déterminés.

Remarque. On aurait pu construire le triangle ABC, aussi bien à la gauche qu'à la droite de la ligne AB, et au-dessous qu'au dessus de BC; de sorte que les mêmes données conviennent aux triangles, ABC, ABC', $A'BC$, $A'BC'$. Ces triangles seraient égaux, il est vrai, au triangle ABC; mais la position de leurs parties serait différente à l'égard de la ligne BC. Dans le *levé d'un plan*, cette position, qui sert à déterminer celle de certains points remarquables, n'est pas indifférente. Ainsi, lorsqu'on a choisi la ligne BC pour représenter une direction fixe, il est essentiel de remarquer la position des autres parties à l'égard de cette ligne. Cette observation s'applique à toutes les constructions.

169. (fig. 196). On connaît l'hypoténuse b et un côté a de l'angle droit. Ayant formé l'angle droit B, par deux droites, BH, BK; portez a de B en C, et du point C comme centre, avec le rayon b, décrivez l'arc mn; cet arc coupera BH en A; menant la droite AC, le triangle sera construit.

Cette construction ne pourrait pas avoir lieu, si l'hypoténuse b n'était pas plus grande que le côté a de l'angle droit; car l'arc décrit du point B comme centre, avec le rayon b, ne couperait pas AB. Et en effet, le problème est alors impossible; car, demander de construire un triangle rectangle, avec une hypoténuse moindre que l'un des côtés de l'angle droit, ou qui lui soit égale, c'est vouloir mener d'un point C, pris sur une perpendiculaire BC à BA, une oblique plus courte que cette perpendiculaire, ou qui lui soit égale; ce qui est impossible (n° 16).

170. (fig. 196). On connaît l'hypoténuse b et un angle aigu A. Par l'intersection de deux lignes indéfinies, AE, AF, formez l'angle A; portez b, de A en C; menez CB perpendiculaire sur AE; le triangle ABC résoudra le problème.

171. (fig. 196). On connaît un angle aigu A et le côté c de l'angle droit, adjacent à cet angle. Tirez deux lignes indéfinies, BH, BK; qui se coupent à angle droit; portez c, de B en A; par le point A, menez une droite AF qui forme avec AB un angle égal à l'angle donné A; la rencontre de AF avec BK, détermine ABC, pour le triangle demandé.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

172. (fig. 196). On connaît un angle aigu A et le côté de l'angle droit opposé à cet angle aigu. Par l'extrémité B, d'une ligne $CB = a$, tirez BH perpendiculaire sur BC; par un point quelconque P, de BH, menez PQ, sous l'angle $QPB = A$; conduisez CR, parallèle à QP; ABC sera le triangle demandé.

Construction des Triangles obliquangles.

173. (fig. 62). On connaît les deux angles, A, C, et le côté b qui leur est adjacent. Par les extrémités d'une ligne $AC = b$, menez les droites, AH, CK, qui forment avec AC des angles HAC, KCA, respectivement égaux aux angles donnés A et C. La rencontre de ces droites, au point B, déterminera le triangle demandé.

174. (fig. 200). On connaît deux angles, A, C, et le côté c opposé à l'un d'eux. Formez l'angle A, par deux droites indéfinies AP, AQ; à un point quelconque P de la ligne sur laquelle doit être placé l'angle C, formez cet angle par la ligne PQ; portez c de A en B, et menez par le point B une parallèle BC à QP; elle déterminera ABC pour le triangle demandé.

175. (fig. 44). On connaît deux côtés, a, c, et l'angle A, opposé à l'un d'eux. Menez deux lignes indéfinies, XZ, AY, sous l'angle connu A; portez c de A en B; et décrivez un arc du point B comme centre, avec le rayon a; lorsque cet arc coupera la ligne indéfinie XZ, en un point situé sur un des côtés de l'angle A, le triangle sera construit. Mais les grandeurs relatives des *données*, a, c, A, offrent des circonstances remarquables, que nous allons analyser. L'angle donné A peut être égal à l'angle aigu BAZ, ou à l'angle obtus BAX.

Ier *Cas*. L'angle A est égal à l'angle aigu BAZ. Si du point B, on mène sur XZ la perpendiculaire BP, on peut avoir,

$$1^{o}.\begin{cases} a<c \\ a<BP \end{cases}; \quad 2^{o}.\begin{cases} a<c \\ a=BP \end{cases}; \quad 3^{o}.\begin{cases} a<c \\ a>PB \end{cases}; \quad 4^{o}.\begin{cases} a=c \\ a>BP \end{cases}; \quad 5^{o}.\begin{cases} a>c \\ a>BP \end{cases}.$$

1°. Lorsque le côté a est moindre que la perpendiculaire BP, l'arc, mn décrit du point B comme centre avec le rayon a, coupe BP en D, et ne rencontre pas XZ; le triangle ne peut donc exister, et en effet; les *données* actuelles ne peuvent convenir à aucun triangle, car la condition $a<BP$, revient à proposer de joindre le point B, avec un point de XZ, par une droite plus courte que la perpendiculaire BP, ce qui est absurde (n° 16).

2°. Quand le côté a est égal à la perpendiculaire BP, l'arc $m'n'$, décrit du point B comme centre avec le rayon $BP=a$, est tangent à XZ, en P ce qui détermine le triangle rectangle APB, pour le triangle demandé.

3°. Quand le côté a est plus grand que la perpendiculaire BP, et moindre que le côté c, l'arc $m''n''$, décrit de B comme centre, avec le rayon a, coupe XZ en deux points, C, C' également distans du pied P de la perpendicu-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

laire BP, et C' doit tomber entre A et P, car a étant moindre que c, doit être plus près de la perpendiculaire BP. Dans ce cas, la construction fournit deux triangles, ABC, ABC', qui satisfont également; car ils contiennent l'un et l'autre les *données*; savoir, l'angle $BAC=A$, et les côtés, a, c. Dans ces triangles, les angles, BCA, $BC'A$, qui expriment les deux valeurs de l'angle opposé au côté c, sont supplémens l'un de l'autre; car dans le triangle isoscèle BCC', les deux angles aigus en C, C' sont égaux, et l'angle $AC'B$ a pour supplément $BC'C$, ou son égal BCA (*).

4°. Quand le côté a est égal au côté c, et par conséquent plus grand que BP, l'arc $m'''n'''$, décrit du point B comme centre avec le rayon a, coupe XZ en deux points, A, C'', qui déterminent le triangle isoscèle, BAC''

5°. Le côté a étant plus grand que c, et à plus forte raison plus grand que BP, l'arc $m''''n''''$, décrit du point B comme centre avec le rayon a, coupe XZ, en deux points, C''', Q; et le point A, extrémité d'une oblique $BA=c$ plus courte que $BQ=a$, se trouve nécessairement entre P et Q. Les intersections, C''', Q, paraissent indiquer la construction de deux triangles; mais si l'on observe que le triangle BAQ ne contient pas l'angle donné $BAC=A$, on verra que le triangle BAC''', satisfait seul aux conditions du problème.

II^e Cas. L'angle A est égal à l'angle obtus BAX. L'angle donné A étant obtus, l'angle inconnu C est nécessairement aigu (B. n° 75, 2°.). On doit donc avoir $A>C$; et par conséquent, le côté a, opposé à l'angle connu A, doit être plus grand que le côté c; quand cette condition n'est pas remplie, le triangle ne peut pas exister. La construction s'accorde avec ces considérations. En effet; 1°. Lorsque le côté a, opposé à l'angle connu A, est plus grand que l'autre côté c, l'arc $m''''n''''$, décrit du point B comme centre avec le rayon a, coupe XZ en deux points, Q, C''', qui déterminent deux triangles BAQ, BAC'''; mais le second triangle ne contenant pas l'angle donné $BAX=A$, le triangle BAQ, satisfait seul aux conditions du problème; 2°. Lorsque le côté a n'est pas plus grand que le côté c, l'arc décrit de B comme centre avec le rayon a, ne peut pas couper XZ, à gauche du point A; car les obliques les plus longues, s'écartent le plus de la perpendiculaire (n° 16); les données ne peuvent donc appartenir à aucun triangle.

176. (fig. 62). On connaît deux côtés, a, b, et l'angle compris C. Tirez deux lignes, CK, CR, sous l'angle C; portez b, de C en A, et a de C

(*) Lorsqu'on applique les formules trigonométriques à cette construction, on trouve que l'angle C n'est connu que par son sinus, qui appartient aux angles supplémentaires BCA, $BC'A$. Le calcul est toujours d'accord avec les constructions. (Voyez la Trigonométrie de Reynaud).

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

en B; menant la droite AB, le triangle sera construit. Lorsque $a = b$, la construction détermine un triangle isoscèle, dans lequel $A = B$.

177. (fig. 62). On connaît les trois côtés a, b, c. Soit b le plus grand des côtés; conduisez une droite $AC = b$; des points A et C, comme centres, avec les rayons c et a, décrivez les arcs, mn, $m'n'$, les droites, BA, BC, menées, de l'intersection B de ces arcs, aux points A et C, détermineront ABC pour le triangle demandé. La construction réussira toujours, quand les *données* s'accorderont avec la nature du triangle; car alors, le plus grand côté étant moindre que la somme des deux autres, et plus grand que leur différence, les arcs se couperont nécessairement (n° 130). Si le côté b était égal à la somme des deux autres, les arcs pq, $p'q'$, décrits des points A et C comme centres avec les rayons c et a, se toucheraient en un point r, situé sur AC, les côtés c et a, se confondraient avec la base b; les angles A et C, formés par ses côtés avec la base, seraient nuls; l'angle B, formé par les côtés a et c, qui sont en ligne droite, vaudrait deux angles droits, et la surface du triangle serait zéro. Si le côté b était plus grand que la somme des deux autres côtés a et c; les arcs pq, st, décrits des points A et C comme centres, avec les rayons c et a, ne se rencontreraient pas (n° 130); les côtés c et a, ne pourraient donc pas se réunir en un même point; le triangle ne pourrait donc pas être construit. Et en effet; il ne saurait exister; car, un côté d'un triangle ne peut jamais être plus grand que la somme des deux autres (B. n°. 73).

178. Les constructions que nous venons d'exécuter, conduisent à cette règle générale : *Un* TRIANGLE RECTANGLE *peut toujours se construire, lorsqu'on connaît, les deux côtés de l'angle droit, ou un angle aigu et l'hypoténuse, ou un angle aigu et l'un des côtés de l'angle droit. Il devient impossible, lorsque, connaissant l'hypoténuse et un côté de l'ange droit, l'hypoténuse n'est pas plus grande que ce côté de l'angle droit. Un* TRIANGLE OBLIQUANGLE *est toujours possible, lorsqu'on connaît deux angles et un côté, ou deux côtés et l'angle compris. Il devient impossible dans trois cas; 1°. lorsque, connaissant les trois côtés, le plus grand côté n'est pas moindre que la somme des deux autres; 2°. lorsque, connaissant deux côtés et l'angle aigu opposé à l'un d'eux, le côté opposé à l'angle connu est moindre que la perpendiculaire menée de l'extrémité du côté connu, adjacent à cet angle, sur l'autre côté; 3°. lorsque, connaissant deux côtés et l'angle obtus, opposé à l'un d'eux, le côté connu, opposé à cet angle obtus, n'est pas plus grand que l'autre côté connu.*

179. Nous venons de faire connaître comment *on peut construire un triangle lorsqu'on connaît trois des cinq parties qui le composent.* Nous allons démontrer qu'*on peut également le construire, lorsqu'on connaît trois relations quelconques entre les angles et les côtés.* Ces problèmes sont de la plus grande utilité dans le *levé des plans.*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

180. (fig. 220). *Construire un triangle, connaissant deux côtés et la ligne qui divise l'angle compris en deux parties égales.* Soient, a et b les côtés connus et d la ligne donnée. Cherchez une ligne δ telle que vous ayez, (1)... $a : (a+b) :: d : \delta$. Sur une ligne $AE = \delta$, formez un triangle isoscèle CAE, tel que $CA = CE = b$. Prolongez EC d'une quantité $CB = a$ et menez BA; le triangle demandé sera ABC. En effet; dans ce triangle $CB = a$, $CA = b$; il suffit donc de prouver que la droite CD, qui divise l'angle BCA en deux parties égales, est égale à d; or (B. n° 75)... L'angle $BCA = CEA + CAE = 2CEA$; mais l'angle $BCA = 2BCD$; les angles BCD, CEA, sont donc égaux; CD est donc parallèle à EA; donc, $BC : BE :: CD : EA$; ou (2)... $a : (a+b) :: CD : \delta$.

Les proportions (1) et (2), prouvent que $CD = d$. Le triangle BCA jouit donc des propriétés demandées.

181. (fig. 220). *Construire un triangle, connaissant deux côtés et la ligne qui, partant du sommet de l'angle compris par ces côtés, divise le troisième côté en parties proportionnelles à α, ϵ.* Soient a et b les côtés donnés, et d la ligne donnée. Cherchez des lignes δ, δ', telles que vous ayez...

$$(1)... \epsilon : \alpha :: a : \delta \text{ et } (2)... a : (a+\delta) :: d : \delta'.$$

Avec les lignes δ, δ' et b, construisez un triangle CEA, de manière que $CE = \delta$; $EA = \delta'$; $CA = b$, (n° 177).

Prolongez EC d'une quantité $CB = a$; et tirez la droite AB. Le triangle CAB résoudra le problème. Pour le démontrer, prenez sur AB un point D, qui satisfasse à la condition, (3)... $DA : DB :: \alpha : \epsilon$. La combinaison des proportions (1) et (3), donnera...

$$DA : DB :: \delta : a; \text{ ou } DA : DB :: CE : CB;$$

CD est donc parallèle à EA (n° 53). On a donc...

$$BC : BE :: CD : EA; \text{ ou } a : (a+\delta) :: CD : \delta'.$$

Cette dernière proportion, combinée avec la proportion (2), donne $CD = d$. Mais, $CB = a$ et $CA = b$; le triangle BCA, satisfait donc à toutes les conditions du problème.

182. (fig. 221). *Construire un triangle connaissant un angle, un des côtés adjacens et la somme des deux autres côtés.* Soient, C l'angle donné, a le côté connu, S la somme donnée. Faites l'angle $PCQ = C$, prenez $CD = S$ et $CB = a$, tirez DB, et menez la droite BA sous l'angle $ABD = ADB$; le triangle ABC, résoudra le problème, car...

$$\text{l'angle } ACB = C;\ CB = a;\ (AB + AC) = (AD + AC) = CD = S.$$

183. (fig. 221). *Construire un triangle, connaissant, un angle, un des côtés adjacens et la différence des deux autres côtés.* Soient, C, l'angle donné, a le côté connu et d la différence donnée. Faites l'angle $QCP = C$; prolongez PC d'une quantité $CR = d$. Prenez $CB = a$; tirez la droite RB

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

et menez BA sous l'angle $ABR = ARB$; ABC sera le triangle demandé, car dans ce triangle....

$l'angle\ ACB = C$; $CB = a$; $(AB - AC) = (AR - AC) = CR = d$.

184. (fig. 222). *Construire un triangle, connaissant sa base AB, ainsi que la somme S^2 et la différence δ^2, des carrés des deux autres côtés.* Prenez le milieu E de AB; du point E comme centre, décrivez une demi-circonférence, telle que la somme des carrés des distances de l'un quelconque de ses points, aux extrémités A et B de la base, soit égale à S^2 (n° 156); et sur AB, élevez une perpendiculaire DP, telle que la différence des carrés des distances de l'un quelconque de ses points, aux extrémités A et B, soit égale à δ^2 (n° 112). Le point C d'intersection de la circonférence avec la perpendiculaire, sera le sommet du triangle demandé, car en tirant les droites AC, CB, la base du triangle CAB est AB, et d'après la construction, les côtés AC, CB, ont entre eux les relations demandées....

$$(AC^2 + CB^2) = S^2\ ;\ (AC^2 - CB^2) = \delta^2\ (*).$$

185. (fig. 35). *Construire un triangle, connaissant, sa base c, l'angle C du sommet, et la hauteur h.* Sur une droite $AB = c$, décrivez un segment AHB capable de l'angle C; menez MX perpendiculaire à BA, et prenez $MT = h$; par le point T, conduisez une parallèle CC' à BA. Les points C, C', où cette parallèle rencontre l'arc AHB, sont les sommets de deux triangles, CAB, $C'AB$, qui résolvent également le problème. Lorsque la droite CC' est tangente à l'arc AHB, les deux solutions se réduisent à une seule. Et quand CC' n'a aucun point commun avec l'arc AHB, le problème est impossible.

186. (fig. 35). *Construire un triangle, connaissant, sa base c, sa surface $\alpha \times \mathcal{C}$, et l'angle C du sommet.* Désignez la hauteur inconnue par h; vous aurez, $ch = 2\alpha\mathcal{C}$; d'où $c : 2\alpha :: \mathcal{C} : h$. La hauteur du triangle demandé sera donc une quatrième proportionnelle aux trois lignes connues, c, 2α et $\mathcal{C}$. Le problème est ainsi ramené au précédent.

187. (fig. 223). *Construire un triangle, connaissant, sa base b et*

(*) D'après l'analyse du n° 156, il n'existe qu'un seul triangle qui puisse satisfaire à la question actuelle; et pour que ce triangle soit possible, il faut que la demi-circonférence GCH existe et qu'elle ait un point commun avec DP. Or, on a trouvé, (notes des n^{os} 156 et 112),

$$EH = \frac{1}{2}\sqrt{2S^2 - l^2} \text{ et } BD = \frac{l^2 - \delta^2}{2l}.\ \text{D'où, } ED = \frac{1}{2}l - BD = \frac{\delta^2}{2l}.$$

Le problème sera donc impossible, quand $(2S^2 - l^2)$ sera négatif, et quand $(2S - l^2)$ étant positif, ED sera plus grand que EH; dans tous les autres cas le problème sera possible.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

l'angle B du sommet. Les deux autres côtés sont dans le rapport connu de α à ϛ. Sur la ligne $AC=b$, décrivez un segment ABC, capable de l'angle B, et achevez la circonférence. Prenez le milieu E de l'arc AC; sur la corde AC, cherchez un point D, tel que vous ayez, $DA : DC :: \alpha : \varsigma$. Menez les droites, EDB, BA et BC; le triangle ABC résoudra le problème. En effet; la base $AC=b$; l'angle ABC du sommet est égal à l'angle donné B; et les arcs, AE, EC, étant égaux, les angles, ABE, EBC, sont aussi égaux; ce qui donne (B. n° 104)... $BA : BC :: DA : DC :: \alpha : \varsigma$.

Lorsque α n'est pas égal à ς, le point qui divise AB en parties proportionnelles à α et ς, étant susceptible de deux positions, D, D', il existe deux triangles, BAC, $B'AC$, qui résolvent le problème; ces triangles sont égaux. Si α était égal à ς, les points, D, D', se confondraient avec le milieu de AB, et le triangle serait isoscèle. Ce problème est toujours possible.

188. (fig. 214). *Connaissant, la base d'un triangle, le rapport des deux autres côtés, et la droite sur laquelle le sommet doit se trouver; construire ce triangle.* Supposez que AB soit la base du triangle demandé, que les deux autres côtés soient dans le rapport des lignes connues, α, ς, et que le sommet soit situé sur la droite DE. Décrivez une circonférence CM, telle que les distances de chacun de ses points, aux extrémités A et B de la base, soient comme α est à ς, (n° 154). Les points M et N, où cette circonférence coupera DE, seront les sommets de deux triangles, MAB, NAB, qui jouiront de la propriété demandée, car la base de ces triangles est AB, le rapport des deux autres côtés est celui de α à ς, et les sommets, M, N, sont sur la ligne DE. Lorsque la circonférence CM, touche DE, les deux solutions se réduisent à une seule. Et lorsque la circonférence n'a aucun point commun avec DE, le problème est impossible.

189. (fig. 214). *Construire un triangle, connaissant, sa base, le rapport des deux autres côtés et l'angle du sommet.* Supposez que AB soit la base du triangle demandé, que les deux autres côtés soient dans le rapport de α à ς, et que l'angle du sommet soit p. Sur la base AB, décrivez un segment $ABMD$, capable de l'angle donné p, et construisez (n° 154) une circonférence CM, telle que les distances de chacun de ses points aux extrémités de la base AB, soient comme α est à ς. La circonférence CM coupera l'arc ADB, en un point M, qui sera le sommet du triangle demandé.

190. (fig. 224). *Construire un triangle, connaissant, un angle B, la somme S des côtés qui comprennent cet angle, et la perpendiculaire δ, menée du sommet de l'angle connu, sur le côté opposé.* Faites l'angle $PKR = B$; divisez cet angle en deux parties égales par la ligne KD; sur KP, menez une perpendiculaire $MG = \delta$; tirez GB et BE parallèles à PK et à GM. Par le point B, inscrivez dans l'angle PKR, une ligne $AH = S$ (n° 120), et menez BC de manière que l'angle $ABC=B$, le triangle ABC résoudra le problème. En effet; dans ce triangle, l'angle ABC est égal à l'angle donné B, et la perpendiculaire BE, menée du sommet de cet angle

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

sur le côté opposé AC, est égale à δ. Il ne reste donc plus qu'à prouver que $(BA + BC) = S$. Or, les triangles, ABC, AKH, ayant un angle commun A, et les angles, ABC, AKH, étant égaux à B, les angles, ECB, KHA, sont égaux. Si l'on mène BF perpendiculaire à KH, on aura $BF = BE$, (n° 124); les triangles rectangles, BCE, BHF, sont donc égaux (B. n° 81.)

$$\text{Donc, } BC = BH, \; BA + BC = BA + BH = AH = S.$$

Si par le point B on mène des lignes quelconques, terminées aux deux côtés de l'angle PKR, la plus courte de toutes ces lignes sera la perpendiculaire $P'N'$ à KD (n° 119). Par conséquent; lorsque S sera plus grand que $P'N'$, on pourra mener par le point B, deux droites, AH, $A'H'$, égales à S (n° 120); ce qui donnera deux solutions. Quand S sera égal à $P'N'$, il n'y aura qu'une solution; et lorsque S sera moindre que $P'N'$, le problème sera impossible.

191. (fig. 225.) *Construire un triangle, connaissant, un côté* a, *un des angles adjacens* C, *et la perpendiculaire* δ *menée du sommet de cet angle sur le côté opposé.* Sur la ligne $BC = a$, décrivez une demi-circonférence; du point C comme centre, avec le rayon δ, décrivez un arc de cercle qui coupera la demi-circonférence en D; tirez BD, que vous prolongerez indéfiniment; menez la droite CA, sous l'angle $BCA = C$. Le triangle demandé sera ABC. Car $BC = a$, l'angle $BCA = C$ et la ligne CD, perpendiculaire sur AB, est égale à δ. Menant CA', sous l'angle $A'CB = C$, le triangle $A'CB$, satisfera également. De sorte que le problème admet deux solutions, CBA, CBA', lorsque δ est plus petit que a; si l'on avait $\delta = a$, il n'y aurait qu'une solution CDA; enfin, le problème deviendrait impossible, si la perpendiculaire δ devait être plus grande que l'oblique a.

192. (fig. 226). *Construire un triangle, connaissant, sa surface* $a \times c$ *et deux de ses angles,* A *et* C. Dans l'angle $BAC = A$, inscrivez une ligne DE, égale à $2a$, qui forme avec AB l'angle $ADE = C$ (n° 118). Menez AF perpendiculaire sur DE; cherchez deux moyennes proportionnelles, l'une a, entre a et c, l'autre b, entre AF et a; prenez AM quatrième proportionnelle aux lignes b, a et AD. Il en résultera.....

$$a^2 = a \times c; \; b^2 = a \times AF; \; b : a :: AD : AM.$$

Menez MN parallèle à DE. Le triangle AMN résoudra le problème

En effet, $b^2 = AF \times a = AF \times \frac{1}{2} DE = \text{surface } ADE$;

$ADE : AMN :: AD^2 : AM^2 :: b^2 : a^2 :: b^2 : a \times c$. Or, $ADE = b^2$.

Donc, $AMN = ac$. Mais, l'angle $AMN = ADE = C$ et l'angle $MAN = A$.

Le triangle AMN satisfait donc à toutes les conditions du problème.

Pour trouver une seconde solution, prenez $AM' = AM$, et menez $M'N$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

sous l'angle $AM'N' = C$; le triangle $AM'N'$, égal à AMN (B. n° 81), jouira des mêmes propriétés. Ce problème est toujours possible.

193. (fig. 227). *La surface d'un triangle est connue, ainsi que l'un des angles; le côté opposé à l'angle connu, doit passer par un point donné; il s'agit de construire ce triangle.* Supposez, que MSN soit l'angle donné, que le côté opposé à cet angle, passe par le point connu D, et que n^2 désigne la surface du triangle demandé. Si SOX est le triangle cherché; le prolongement, OB, du côté XO, passera par le point D, et la surface du triangle SOX sera égale à n^2. Tout se réduit donc à déterminer la position du point X. Pour y parvenir, nous supposerons le problème résolu, et nous chercherons à en déduire la valeur de SX. Menons DE parallèle à SM, et par le point O, tirons GF perpendiculaire à DE. Les triangles, SOX, DOE, seront semblables, ainsi que les triangles, GOX, FOD ce qui donnera $SX : DE :: OX : OD :: OG : OF$;

D'où $SX : (SX+DE) :: OG : (OG+OF)$, Tirons les droites, SF, XF; il en résultera (B. n° 158),

$XGO : XGF :: GO : GF$; et $SGO : SGF :: GO : GF$; donc.....

$XGO : XGF :: SGO : SGF :: GO : GF :: OG : (OG+OF)$.

Mais, $OG : (OG+OF) :: SX : (SX+DE)$;

Donc, $XGO : XGF :: SGO : SGF :: SX : (SX+DE)$. D'où,

$(XGO+SGO) : (XGF+SGF) :: SX : (SX+DE)$. *Or*.....

$(XGO+SGO) = OSX = n^2$, *et* $(XGF+SGF) = FSX = \frac{1}{2} SX \times GF$

La dernière proportion devient donc.....

$$n^2 : \left(\frac{1}{2} SX \times GF\right) :: SX : (SX+DE), \qquad \frac{2n^2}{GF} : SX :: SX : (SX+DE),$$

$$\frac{2n^2}{GF} : \left(SX - \frac{2n^2}{GF}\right) :: SX : (SX+DE-SX).$$ On en déduit

$$(1) \ldots\ SX\left(SX - \frac{2n^2}{GF}\right) = 2DE \times \frac{n^2}{GF}.$$

Les lignes n, GF et DE, étant connues, l'équation (1) ne renferme que la seule inconnue SX. Pour construire la valeur de cette inconnue, on cherchera une troisième proportionnelle a, aux lignes GF, n, et une moyenne proportionnelle b, entre a et $2DE$; de sorte que.....

$$a = \frac{n^2}{GF}; \quad b^2 = 2DE \times a = 2DE \times \frac{n^2}{GF}.$$

L'équation (1) deviendra, $SX(SX-2a) = b^2$. Cette dernière equation exprime que, si l'on construit (n° 108) un rectangle équivalent au quarré b^2, et dont les côtés adjacens diffèrent de $2a$, le plus grand côté de ce

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

rectangle sera SX; ce qui déterminera le point X. Tirant la droite DX, par les points D et X, le triangle SOX résoudra le problème.

194. (fig. 228 et 229). *Étant donné un point M, dans l'angle BAC, trouver sur les côtés de cet angle, deux points N et P, tels que le triangle MNP soit semblable au triangle donné DEF.* Tirez la droite AM; sur DE et DF, décrivez des segmens, EGS, FGT, capables des angles BAM, CAM; les arcs, EGS, FGT, se couperont en deux points D et G. Tirez les droites, GD, GE, GF. Sur les côtés, AB, AC, de l'angle donné BAC, prenez des parties AN, AP, telles que vous ayez.....

(1).... $GD : GE :: AM : AN$; et (2).... $GD : GF :: AM : AP$.

Joignez les points, M, N, P, par des droites. MNP sera le triangle demandé. En effet; d'après la construction, les triangles, NAM, MAP, sont respectivement semblables aux triangles, EGD, DGF, car ils ont un angle égal compris entre côtés proportionnels. La similitude de ces triangles donne.....

l'angle $AMN =$ *l'angle* GDE; *l'angle* $AMP =$ *l'angle* GDF.

Les angles, NMP, EDF, sont donc égaux. Mais....

$$MN : DE :: MA :: DG \text{ et } MP : DF :: MA : DG;$$

Donc, $MN : DE :: MP : DF$. Les triangles, NMP, EDF, ont donc un angle égal compris entre côtés proportionnels; ces triangles sont donc semblables. Le triangle MNP jouit donc des propriétés demandées.

195. (fig. 230). *Construire un triangle rectangle, connaissant la perpendiculaire α,* menée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse, et la différence δ des côtés de l'angle droit. Décrivez la circonférence Bmn avec le rayon $OB = \alpha$; par un point quelconque T, de cette circonférence, menez une tangente $TA = \delta$; par le point A et le centre O, tirez la droite AB; sur AB comme diamètre, décrivez une demi-circonférence AeB; au point B, élevez sur AB une perpendiculaire $BK = \alpha$; menez KC parallèle à BA, et CD parallèle à BK; CD sera égal à α; tirez les droites AC, BC; CAB sera le triangle demandé, car l'angle ACB est droit, la perpendiculaire $CD = \alpha$, et je vais prouver que $(AC - CB) = \delta$. Les propriétés connues, des triangles rectangles, des tangentes et des sécantes, donnent.....

$(AC^2 + CB^2) = AB^2$; $AC : AB :: DC : CB$; $AC \times CB = AB \times DC$.

Donc $(AC^2 + CB^2 - 2AC \times CB) = (AB^2 - 2AB \times DC)$.

Or, $2DC = 2\alpha = BP$, et $(AC^2 + CB^2 - 2AC \times CB) = (AC - CB)^2$; donc...

$(AC - CB)^2 = (AB^2 - AB \times BP) = AB^2 - AB(AB - AP) = AB \times AP$.

Mais, $AB : AT :: AT : AP$; d'où $AB \times AP = AT^2$;

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Donc enfin, $(AC-CB)^2=AT^2=\delta^2$; d'où $(AC-CB)=\delta$.

Si l'on prolonge KC jusqu'en C', on verra que le triangle $AC'B$, satisfait également. Lorsque α est moindre que $\frac{1}{2}AB$, le problème admet deux solutions, CAB, $C'AB$; quand $\alpha=\frac{1}{2}AB$, les points, C, C', se confondent avec le milieu de l'arc AeB, et les deux solutions se réduisent à une seule; enfin, le problème devient impossible lorsque α est plus grand que $\frac{1}{2}AB$.

196. (fig. 263). *Construire un triangle connaissant le périmètre* $2p$, *et deux angles*, A, B. Par les extrémités d'une droite $DE=2p$, menez des droites, DC, EC, , sous des angles $CED=\frac{1}{2}B$, $CDA=\frac{1}{2}A$. Par le point C, d'intersection de ces deux droites, tirez des droites, CB, CA, sous les angles $ECB=\frac{1}{2}B$, $DCA=\frac{1}{2}A$. Le triangle ABC, résoudra le problème; car d'après la construction, (B. n^{os} 75 et 77)...

L'angle $CAB=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}A=A$, l'angle $CBA=\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}B=B$, $AC=AD$, $BE=BC$. Donc, $AC+AB+BC=AD+AB+BE=DE=2p$.

197. (fig. 264 et 265). *Construire un triangle* ABC, *connaissant les longueurs*, α, $\mathcal{C}$, γ, *des trois perpendiculaires*, AD, BE, CF, *menées des sommets sur les côtés opposés*, a, b, c. On a (B. n° 147), $a\alpha=b\mathcal{C}=c\gamma$. Donc, $a:b:c::\mathcal{C}:\alpha:\frac{\alpha\mathcal{C}}{\gamma}$. Par conséquent, si l'on construit un triangle $A'B'C'$, avec les trois lignes connues, $A'C'=\alpha$, $B'C'=\mathcal{C}$, $A'B'=\frac{\alpha\mathcal{C}}{\gamma}$, ce triangle sera semblable au triangle demandé. (B. n°. 114). Menant donc deux perpendiculaires GH, MN, à la droite $AD=\alpha$, et tirant par le point A deux droites, AB, AC, sous des angles $GAB=B'$, $HAC=C'$; le triangle ABC, jouira de la propriété demandée.

198. (fig. 264). *Construire un triangle* ABC, *connaissant les longueurs des perpendiculaires*, AD, BE, *menées des sommets*, A, B, *sur les côtés opposés*, CB, CA? *Le point* O *est donné sur* AD. Si la longueur de OB était connue, le problème serait résolu; car en menant MN, perpendiculaire à DA, l'arc décrit du point O comme centre, avec le rayon OB, couperait MN en B; tirant la droite BOR et menant AC perpendiculaire à BR, le triangle ABC serait construit. La question est donc réduite à calculer OB. Les triangles rectangles, OAE, OBD, étant semblables (n° 56), on a, $OA:OB::OE:OD$. Il s'agit donc de diviser la ligne connue BE, en parties réciproquement proportionnelles aux lignes données, OA, OD. Pour y parvenir, on fera passer une circonférence $A'E'D'B'$, (fig. 266) par les extré-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

mités d'une droite $A'D'=AD$. On prendra $A'O'=AO$, d'où $O'D'=OD$, et par le point O', on mènera une corde $B'E'=BE$, (n° 139). Or, (B. n° 124), (1)... $O'A' : O'B' :: O'E' : O'D'$; ou $OA : O'B' :: BE-B'O' : OD$. Mais la proportion (1), donne, $OA : OB :: BE-BO : OD$. Donc, $OB=O'B'$. Le problème est donc résolu.

199. (fig. 264). *Construire un triangle ABC, connaissant l'angle ACB et les longueurs des deux perpendiculaires, BE, AD, menées des sommets B, A, sur les côtés opposés, CA, CB.* Tirez deux droites indéfinies CM, CT, qui forment entr'elles l'angle donné C. Par le point C, menez deux droites, CH, CK, respectivement perpendiculaires aux lignes, CM, CT. Prenez $CH=AD$ et $CK=BE$. Par les points H et K, menez des parallèles HG, KS, aux côtés CM, CT. Ces parallèles détermineront les points A et B. Le triangle ABC, résoudra le problème.

200. (fig. 231). *Construire un triangle rectangle équivalent au trapèze ABCD, et qui ait un des côtés de l'angle droit égal à un des côtés parallèles de ce trapèze.* Tirez la diagonale AC et menez FBE parallèle à CA; prolongez DA. Par le point G, menez MN parallèle à DC; élevez CH perpendiculaire sur CD, et tirez la droite DH. Le triangle DCH satisfera aux conditions du problème. En effet, ce triangle est rectangle en C; et les triangles de même base et de même hauteur étant équivalens, si l'on tire la droite CG, on aura...

$$(BAC+ADC)=(GAC+ADC)\text{; ou } ABCD=GDC=HDC.$$

Ce problème est toujours possible. On obtiendrait une seconde solution, en menant par le point D une perpendiculaire à DC.

201. (fig. 232). *Le sommet M d'un triangle isoscèle est donné; les extrémités de la base de ce triangle sont placées sur deux parallèles connues, AB, CD, et la base doit faire un angle donné α, avec ces parallèles. On propose de construire ce triangle.* Il s'agit d'*inscrire, entre les parallèles, AB, CD, une ligne droite LN, telle qu'en tirant les droites, ML, MN, l'angle ANL=α, et que ML=MN. Le triangle isoscèle MNL résoudra le problème.* Pour construire LN; par un point quelconque F de CD, menez une droite FE, sous l'angle $EFC=\alpha$; tirez MG perpendiculaire sur FE et par le milieu K, de IH, menez PQ parallèle à EF. Je dis que LN sera la droite demandée. En effet; les triangles semblables, KNI, KLH, donnent, $KL : KN :: KH : KI$. Mais par construction, $KH=KI$; donc $KL=KN$. La droite MG, perpendiculaire sur EF, est perpendiculaire sur la parallèle PQ à EF; MK est donc perpendiculaire sur le milieu K de LN; donc $ML=MN$ (n°. 16). Or les angles, ANI, LFE, sont égaux à l'angle donné α; le triangle MNL, jouit donc des propriétés demandées.

202. (fig. 233). *Par trois points donnés, B, R, Q, mener des droites qui forment un triangle MNP, égal à un triangle donné DEF.* Tirez

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

les droites, BQ, BR; sur ces droites, décrivez des segmens, BMQ, BNR, capables des angles, FDE, FED; par le point B, menez une sécante MN, telle que $MN=DE$ (n° 161); tirez les droites, MQP, NRP; le triangle MNP satisfera à toutes les conditions du problème, car, par construction, $MN=DE$; l'angle PMN=l'ang. FDE et l'angle PNM=l'angle FED.

Les triangles MNP, DEF, sont donc égaux, (B. n°. 81. La sécante $M'N'=MN$, donnera une seconde solution. La possibilité du problème dépend de la construction du n° 161.

203. (fig. 206). Circonscrire au triangle BST, le plus grand triangle équilatéral possible. Sur les côtés, BS, BT, décrivez des segmens, $BDFS$, $BGET$, *capables* de 60°; achevez les circonférences, CB, $C'B$. Par le point B, menez DE perpendiculaire à la corde AB, les droites, DS, ET, prolongées, se rencontreront en un point H. Le triangle DEH résoudra le problème. En effet; par construction, les angles, HDE, HED, sont de 60°; l'angle H vaut donc 60°; le triangle DEH est donc équilatéral; il suffit donc de prouver que la surface de ce triangle est plus grande que celle de tout autre triangle équilatéral circonscrit GFR. Or les triangles équilatéraux étant semblables, on a $DEH : FGR :: DE^2 : FG^2$. Mais DE est plus grand que FG. (n° 131); la surface du triangle DEH, est donc plus grande que celle du triangle FGR. Le triangle DEH jouit donc de la propriété demandée (*).

(*) Les propriétés des sections coniques donnent le moyen de résoudre plusieurs problèmes relatifs à la construction des triangles. En voici deux exemples: 1°. *Construire un triangle, connaissant, sa base, $\mathcal{C}$, l'angle B du sommet, et la somme $2S$ des côtés qui comprennent l'angle B.* Sur la base $\mathcal{C}$, décrivez deux segmens capables de l'angle donné B (n° 144); le sommet du triangle demandé sera sur les arcs qui déterminent ces segmens (n° 145). Mais, dans l'*ellipse*, la somme des rayons vecteurs étant égale au grand axe, si l'on regarde les extrémités de la base $\mathcal{C}$, comme les foyers d'une ellipse dont le grand axe serait $2S$, le sommet du triangle demandé sera sur cette ellipse. Construisant donc cette ellipse, les quatre points d'intersection de l'ellipse avec les deux arcs qu idéterminent les segmens, seront les sommets de quatre triangles qui résoudront également le problème. Lorsque l'ellipse sera tangente aux arcs qui déterminent les segmens, les quatre solutions se réduiront à deux. Enfin, lorsque l'ellipse ne rencontrera pas ces arcs, le problème sera impossible.

2°. *Construire un triangle, connaissant sa base $\mathcal{C}$, l'angle B du sommet, et la difference 2δ des côtés qui comprennent l'angle B.* La solution de ce problème ne diffère de la précédente, qu'en ce que l'*hyperbole* remplace l'*ellipse*. Ainsi, on décrira sur la base $\mathcal{C}$, deux segmens capables de l'angle B, et l'on regardera les extrémités de cette base, comme les foyers d'une hyperbole, dont le grand axe serait 2δ. Cette hyperbole coupera les arcs, qui déter-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

204. (fig. 234). *Les droites menées des sommets des angles d'un triangle, sur les milieux des côtés opposés, se coupent au même point.* En effet; soit ABC le triangle proposé. Prenez les milieux D, E, des côtés CB, CA, et menez les droites, AD, BE, DE, CMF. Il s'agit de prouver que le point F est le milieu de AB. La ligne DE, divisant les côtés, CB, CA, en parties proportionnelles, est parallèle à BA; donc (*)...

$CDE \backsim CBA$; $MAB \backsim MDE$; $MAF \backsim MDQ$; $CDQ \backsim CBF$.

Donc, $CD : CB :: DE : BA :: DM : MA :: DQ : AF$.

Mais, $CD : CB :: DQ : BF$; donc, $AF = BF$.

205. La proportion, $CD : CB :: DM : MA$, démontre que MD *est le tiers de* AD; car CB étant le double de CD, la ligne MA est le double de DM.

206. (fig. 222). *Lorsque dans un triangle* ABC, *on mène une droite* CE, *du sommet* C *de l'un des angles, au milieu* E, *du côté opposé;* on a, (3).... $(CA^2 + CB^2) = 2(CE^2 + AE^2)$.

En effet; tirez CD, perpendiculaire sur AB. Les propriétés exprimées par les équations (1) du n°, donneront,

$CB^2 = (CE^2 + BE^2 - 2EB \times ED)$ et $CA^2 = (CE^2 + AE + 2AE \times ED)$.

Ajoutant ces équations membre à membre, et remarquant que $AE = BE$, on obtiendra l'équation (3).

207. (fig. 234). *Les lignes qui divisent les angles d'un triangle* ABC, *en deux parties égales, se rencontrent au même point.* Divisez les angles, BAC, ABC, en deux parties égales, par les droites AM, BM et tirez CM; je dis que CM divise l'angle ACB, en deux parties égales. En effet; si du point M, on mène des perpendiculaires, MF, ME, MD, sur les trois côtés du triangle ABC, les triangles rectangles AMF, AME, seront égaux, ainsi que les triangles BMF, BMD, (B. n° 81). Donc, $MF = ME = MD$; Les triangles rectangles, MCD, MCE, seront donc égaux (n°. 50). La droite CM divise donc l'angle ACB en deux parties égales.

208. Les perpendiculaires, MF, MD, ME, étant égales, si du point M comme centre, avec le rayon MF, on décrivait une circonférence, elle serait tangente aux trois côtés du triangle ABC. Cela donne le moyen d'*inscrire un cercle dans un triangle.*

209. (fig. 234). *Les trois perpendiculaires menées des sommets des angles d'un triangle* ABC, *sur les côtés opposés, se rencontrent au*

---

minent les segmens, en quatre points; les droites menées de chacun de ces points aux extrémités de la base 6, donneront quatre triangles qui résoudront le problème.

(*) Le *signe* $\backsim$ signifie *semblable.*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

même point. Des sommets B et C, menez BE et CF, perpendiculaires sur AC et AB; tirez la droite AMD. Il s'agit de prouver que AD est perpendiculaire à BC. Sur BC, comme *diamètre*, décrivez une demi-circonférence; elle passera par les points E, F (n°. 145), car les angles, BEC, BFC, sont droits. Par la même raison, la circonférence décrite sur AM comme diamètre, passera par les points, E, F. Tirez la corde FE. Les angles CFE, CBE, seront égaux, ainsi que les angles MFE, MAE, (B. n° 63). Les angles, CBE, MAE, sont donc égaux. Les triangles, BMD, AME, ont donc les trois angles égaux chacun à chacun; les angles, MEA, MDB, sont donc égaux; mais le premier est droit; le second l'est donc aussi. AD est donc effectivement perpendiculaire sur BC.

210 (fig. 234). *Les perpendiculaires menées sur les milieux des côtés d'un triangle ABC, se rencontrent au même point.* En effet; sur les milieux, E, F, des côtés AC, AB, menez des perpendiculaires EM, FM, à ces côtés; et tirez MD perpendiculaire sur BC. Vous aurez...

(n° 19), $MB = MA$; $MA = MC$; d'où $MB = MC$.

Les triangles rectangles, MDB, MDC, seront donc égaux (n° 150); le point D est donc le milieu de BC. Ce qui démontre la propriété énoncée.

Le point M est le centre du cercle qui passerait par les sommets, A, B, C, du triangle ABC, car $MA = MB = MC$. Cela donne le moyen de *circonscrire un cercle à un triangle.*

211. (fig. 234). *Si d'un point M, pris dans l'intérieur du triangle ABC, on mène des perpendiculaires, MD, ME, MF, sur les côtés*, on aura (4)... $(AF^2 + BD^2 + CE^2) = (FB^2 + DC^2 + EA^2)$.

Car en menant les droites, MA, MB, MC; on aura (n° 59),

$MF^2 = MB^2 - BF^2 = MA^2 - AF^2$; d'où (1).. $AF^2 - BF^2 = MA^2 - MB^2$.

$MD^2 = MB^2 - BD^2 = MC^2 - CD^2$; d'où (2).. $BD^2 - CD^2 = MB^2 - MC^2$.

$ME^2 = MC^2 - CE^2 = MA^2 - AE^2$; d'où (3).. $CE^2 - AE^2 = MC^2 - MA^2$.

Ajoutant les équations, (1), (2), (3), on trouve l'équation (4).

212. (fig 234). *Si par un point M, pris dans l'intérieur du triangle ABC, et les sommets des angles A, B, C, on mène des droites, AD, BE, CF, terminées aux côtés opposés; le produit des segmens, AF, BD, CE, sera égal au produit des segmens, FB, DC, EA.* En effet; on a, (B. n° 158)...

$CAF : CBF :: AF : BF$ et $MAF : MBF :: AF : BF$. Donc,

$CAF : CBF :: MAF : MBF$. On en déduit...

$(CAF - MAF) : (CBF - MBF) :: CAF : CBF :: AF : BF$; ou

$CMA : CMB :: AF : BF$. On prouverait de même que l'on a...

$AMB : AMC :: BD : CD$, $BMC : BMA :: CE : AE$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Multipliant ces trois dernières proportions, terme à terme, il vient...

$(\mathcal{C}MA.AMB.BMC):(CMB.AMC.BMA)::(AF.BD.CE):(BF.CD.AE)$

Les deux termes du premier rapport étant égaux, les deux termes du second rapport sont aussi égaux; ce qui démontre le principe énoncé.

213. (fig. 234 *bis*). *Connaissant un triangle ABC, trouver un point tel, que les droites, menées de ce point aux sommets des angles du triangle, soient proportionnelles aux lignes données*, α, $\mathcal{C}$, γ. Décrivez (n° 154), deux circonférences, telles que les distances de l'un quelconque des points de la première aux extrémités de AB, soient comme α est à $\mathcal{C}$, et que les distances de l'un quelconque des points de la seconde, aux extrémités de AC, soient comme α est à γ. Les points, M, M', d'intersection de ces deux circonférences, satisferont aux conditions du problème, car en tirant les droites, MA, MB, MC, $M'A$, $M'B$, $M'C$, on aura...

$MA:MB::\alpha:\mathcal{C}$; $MA:MC::\alpha:\gamma$. D'où, $MA:MB:MC::\alpha:\mathcal{C}:\gamma$.

On prouverait de même que, $M'A:M'B:M'C::\alpha:\mathcal{C}:\gamma$.

Le problème admet donc deux solutions. Si les circonférences se touchaient, les deux solutions se réduiraient à une seule; et si les circonférences n'avaient aucun point commun, le problème serait impossible.

214. (fig. 235). *Dans l'intérieur d'un triangle ABC, trouver un point tel, que les perpendiculaires menées de ce point sur les trois côtés du triangle, soient proportionnelles aux lignes données*, α, $\mathcal{C}$, γ. Par les points A et B, tirez des droites, AK, BE, telles que les perpendiculaires, menées d'un point quelconque de AK, sur les côtés AB, AC, soient dans le rapport de α à $\mathcal{C}$, et que les perpendiculaires menées de l'un quelconque des points de BE, sur les côtés BA, BC, soient dans le rapport de α à γ (n° 126); l'intersection S, des lignes AK, BE, sera le point demandé, car il résulte de la construction, que si du point S, on mène les droites, SF, SH, SD, perpendiculaires sur les côtés, AB, AC, BC, on aura...

$$SF:SH::\alpha:\mathcal{C};\quad SF:SD::\alpha:\gamma.$$

215. (fig. 235). *Dans l'intérieur d'un triangle donné, trouver un point tel, qu'en menant des droites de ce point aux trois sommets du triangle, les surfaces des trois triangles partiels, qui en résultent, soient proportionnelles aux lignes données* α', $\mathcal{C}'$, γ'. Les surfaces des triangles étant proportionnelles aux produits des bases par les hauteurs (B. n° 147), ces produits doivent être entre eux comme les lignes, α', $\mathcal{C}'$, γ'; les hauteurs doivent donc être proportionnelles aux droites connues $\frac{\alpha'}{AB}$, $\frac{\mathcal{C}'}{AC}$, $\frac{\gamma'}{BC}$; désignant ces droites par, α, $\mathcal{C}$, γ(*), la question sera réduite à trouver un point S, tel

(*) Les lignes, α, $\mathcal{C}$, γ, sont les derniers termes des proportions,

$$AB:\alpha'::r:\alpha;\quad AC:\mathcal{C}'::r:\mathcal{C};\quad BC:\gamma'::r:\gamma.$$

(r désignera toujours la ligne prise pour unité).

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

que les perpendiculaires, SF, SH, SD, menées de ce point sur les trois côtés du triangle ABC, soient proportionnelles aux lignes connues, α, $\mathcal{C}$, γ. On déterminera ce point comme dans le n° 214.

Voici une *solution plus directe*. Divisez la base BC, en parties, BQ, CR, QR, proportionnelles aux lignes, α', $\mathcal{C}'$, γ'; par les points Q et R, menez des parallèles QS, RS, aux droites BA, CA; le point S, où ces droites se rencontrent, jouira de la propriété demandée. En effet; tirez les droites AQ, AR; vous aurez (B. n° 158).....

$$ABQ : ACR : ABC :: BQ : CR : BC :: \alpha' : \mathcal{C}' : (\alpha' + \mathcal{C}' + \gamma').$$

Menant les droites, SA, SB, SC, les triangles, SAC, RAC, seront équivalens, comme ayant même base AC, et même hauteur (B. n° 147); par la même raison, les triangles, SAB, QAB, seront équivalens; ce qui donnera.....

$$ASB : ASC : ABC :: \alpha' : \mathcal{C}' : (\alpha' + \mathcal{C}' + \gamma'); \text{ d'où....}$$

$$(ABC - ASB - ASC) : ASC :: (\alpha' + \mathcal{C}' + \gamma' - \alpha' - \mathcal{C}') : \mathcal{C}'$$

$SBC : SAC :: \gamma' : \mathcal{C}'$. Mais, $SAB : SAC :: \alpha' : \mathcal{C}'$.

Le point S, satisfait donc à toutes les conditions du problème. On en déduit une solution du problème du n° 214; car il suffit de prendre le point S de manière que les surfaces des triangles, SAB, SAC, SBC, soient proportionnelles aux lignes, $\frac{\alpha' \times AB}{r}$, $\frac{\mathcal{C}' \times AC}{r}$, $\frac{\gamma' \times BC}{r}$.

216. (fig. 236). *Inscrire un quarré dans un triangle ABC; de manière qu'un des côtés du quarré soit sur BC.* Construisez sur BC le quarré $BCKD$; tirez la droite AD, qui coupera BC en E; menez EF perpendiculaire sur BC. Je dis que EF sera le côté du quarré cherché; c'est-à-dire que si l'on mène FG perpendiculaire à EF, on aura $FG = EF$. En effet; les lignes, FG, BC, perpendiculaires à EF, sont parallèles, et les droites EF, BD, perpendiculaires sur BC, sont parallèles. Donc....

$FG : BC :: AF : AB :: EF : DB$. Or, $BC = DB$; donc $FG = EF$.

217. (fig. 237 et 238). *Connaissant le triangle ABC; mener la droite MN, qui coupe deux côtés, AB, AC et le prolongement CE du troisième côté, de manière que les parties, DM, DN, soient égales à deux lignes données α, $\mathcal{C}$.* Menez une droite indéfinie FS; prenez.... $FG = \alpha$ et $GH = \mathcal{C}$; sur FH et GH, décrivez des segmens, FIH, GKH, capables des angles connus B et ACE (n° 143). Tirez HI, de manière que $IK = BC$ (n° 159); prenez $BM = IF$ et $BN = IH$. Je dis que MN, sera la droite demandée. En effet; les triangles, MBN, FIH, sont égaux, (B. n° 80); donc.....

$MN = FH = (\alpha + \mathcal{C})$ et l'angle DNC = l'angle GHK.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Mais, $BN=IH$ et $BC=IK$; donc $(BN-BC)=(IH-IK)$, ou $CN=KH$.

Or, l'angle GKH = l'angle DCN et l'angle GHK = l'angle DNC.

Les triangles, DCN, GKH, sont donc égaux, (B. n° 81). Donc,

$DN=GH=\mathcal{C}$. Mais, $MN=(\alpha+\mathcal{C})$; donc $MD=\alpha$.

La droite MD satisfait donc à toutes les conditions du problème.

218. (fig. 220). *Deux triangles qui ont un angle égal, sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent cet angle.* Il s'agit de prouver que les triangles, BCD, BEA, sont entre eux, comme $BC\times BD$ est à $BE\times BA$. Tirez la droite AC; vous aurez, (B. n° 158),

$$CBD : CBA :: BD : BA,\quad ABC : ABE :: BC : BE.$$

Multipliant ces proportions terme à terme, il viendra.....

$$CBD : ABE :: BC\times BD : BE\times BA.$$

219. (fig. 237). *De tous les triangles formés avec un angle donné, compris entre deux côtés dont la somme est donnée, le plus grand est celui dans lequel ces deux côtés sont égaux.* Pour le démontrer, soit un triangle isoscèle BAC, dans lequel $BA=BC$. Prolongez BC d'une quantité quelconque CN; prenez $AM=CN$ et tirez la droite MN. Dans le triangle BMN, la somme des côtés qui comprennent l'angle B, sera égale à la somme des côtés qui comprennent le même angle dans le triangle BAC; je dis que la surface du triangle isoscèle BAC, sera plus grande que celle du triangle BMN. En effet; menez MF parallèle à BC; les droites, BA, BC, étant égales, MA sera égal à MF; mais $MA=CN$; les droites MF, CN sont donc égales et parallèles; les triangles, DMF, DNC, sont donc égaux (B. n° 81). Le triangle DMA est donc plus grand que DCN. La surface du triangle ABC est donc plus grande que celle du triangle MNB.

En voici une démonstration plus directe. Le principe du n° 214, donne

(1).... triangle BAC : triangle $BMN :: BA\times BC : BM\times BN$. Mais, $BC=BA, CN=AM$, $BN=BC+CN, BM=BA-AM=BC-CN$; donc

$BA\times BC=BC^2$; $BM\times BN=(BC-CN)(BC+CN)=(BC^2-CN^2)$.

La proportion (1) devient, *triangle* $BAC : BMN :: BC^2 : (BC^2-CN^2)$.

Or, BC^2 est plus grand que (BC^2-CN^2); la surface du triangle isoscèle BAC est donc plus grande que celle du triangle BMN.

220. (fig. 239). *Parmi tous les triangles, qui, ayant leurs sommets sur l'arc AMB, ont le côté commun AB; le triangle isoscèle est celui dont les côtés non déterminés forment la plus grande somme.* Pour le démontrer, prenez le milieu M de l'arc AMB, et un point quelconque E de cet arc; tirez les droites, AEx, AMy, BM et BE. Prenez $ED=EB$ et $MC=MB$. Conduisez les droites, BC, BD. Les angles, AMB, AEB étant égaux, leurs moitiés, ACB, ADB, seront égales; et par conséquent,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

si du point M, pris pour centre, avec le rayon MA, on décrit une circonférence, comme elle passera par les trois points, A, B, C, elle passera aussi par le point D; AC sera donc un diamètre et AD une corde. On aura donc.....

$AC>AD$, ou $(AM+MC)>(AE+ED)$, ou $(AM+MB)>(AE+EB)$.

221. (fig. 267). *Parmi tous les triangles de même base AB, et dont les sommets sont sur une même droite GH, le triangle dont le périmètre est un minimum, est celui dans lequel les deux autres côtés forment des angles égaux avec GH.* En effet; tirez une perpendiculaire BE, à GH; prenez $DE=DB$ et menez la droite AE, qui coupe GH en C. Par le point C et un point quelconque O de GH, conduisez les droites, CA, CB, OA, OB. Les côtés, CA, CB, feront des angles égaux avec GH, car CH étant perpendiculaire sur le milieu D de BE, les angles ECD, BCD, ACG, sont égaux. Il s'agit donc de prouver que $CA+CB$ est moindre que $OA+OB$. Cela est évident, car en tirant OE, on a.....

$OE=OB$; $CA+CE<OA+OE$, ou $CA+CB<OA+OB$.

222. (fig. 267). *Remarque.* Si la droite GH était parallèle à la base AB, on aurait $CA=CB$. Par conséquent; *de tous les triangles de même base et de même hauteur, le triangle, dont le périmètre est le plus petit possible, est celui dans lequel les deux autres côtés sont égaux.*

223. (fig. 267). *De tous les triangles de même base et de même périmètre, le triangle qui a la plus grande surface est celui dans lequel les deux côtés variables sont égaux.* En effet; Soit $OA=OB$, $CA>CB$ et $CA+CB=OA+OB=2OA$. Il s'agit de faire voir que la surface du triangle isoscèle OAB est plus grande que celle du triangle scalène, (de même périmètre), CAB. Menant donc, OP perpendiculaire sur AB et Cn parallèle à BA, il faut prouver que PO est plus grand que Pn. Cela est évident, car le principe du n° 222, donne.....

$CA+CB>nA+nB$, ou $2OA>2nA$; donc (n° 16. 4°), $PO>PN$.

La formule (1), du n° 228, conduit au même résultat. En effet; désignez la base par $2b$, la somme des deux autres côtés par $2m$, le périmètre par $2p$, et la surface du triangle par x; si l'un des côtés variables est $m+z$, l'autre sera $m-z$, et la formule (1) du n° 228 donnera $x^2=(m^2-b^2)(b^2-z^2)$. Or, m et b sont des constantes, et z est variable. La surface du triangle sera donc d'autant plus grande que z sera plus petit. Cette surface sera donc un maximum quand z sera nul. Mais, dans ce cas, les deux côtés variables sont égaux. Le principe est donc démontré.

224. (fig. 267). *Parmi tous les triangles de même périmètre, le triangle équilatéral est celui dont la surface est la plus grande.* En effet; soit OAB, le *triangle maximum*. Si deux côtés OA, OB, étaient inégaux, il existerait un triangle isoscèle de même périmètre, dont la surface serait

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

plus grande que OAB, (n° 223); ce qui est contre l'hypothèse. Deux côtés quelconques, OA, OB, sont donc égaux. Le triangle *maximum* est donc équilatéral.

225. *Parmi tous les rectangles d'un même périmètre* 4α, *déterminer le rectangle dont la surface est un maximum?* Si l'un des côtés du rectangle est $\alpha + x$, l'autre sera $\alpha - x$; la surface sera $\alpha^2 - x^2$; cette surface sera donc la plus grande possible, quand x sera nul. Le rectangle maximum est donc le quarré α^2.

226. *Parmi tous les rectangles ayant la même surface* $\mathcal{C} \times \gamma$, *déterminer le rectangle* R, *dont le périmètre* 4α *est un minimum.* Le principe du n° 225 démontre que le rectangle demandé est un quarré. En effet; si le rectangle R n'était pas un quarré; le quarré α^2 serait plus grand que R, (n° 225). Le quarré b^2 qui serait équivalent à R, aurait donc un périmètre $4b$ moindre que 4α. Le périmètre 2α du rectangle R ne serait donc pas un minimum; ce qui est contre l'hypothèse. Le rectangle demandé est donc un quarré. Le côté de ce quarré est $\sqrt{\mathcal{C} \times \gamma}$, et son périmètre est $4\sqrt{\mathcal{C}\gamma}$ (*).

227. (fig. 268). *Parmi tous les cônes circonscrits à une sphère donnée; déterminer le cône dont la surface* (**) *est un minimum.* Si l'on mène

---

(*) L'algèbre conduit directement au même résultat. En effet; soit $\mathcal{C}\gamma = \alpha^2$; la surface du rectangle étant α^2, si l'un des côtés est αx, l'autre sera $\frac{\alpha}{x}$, et le périmètre sera $2\alpha\left(x + \frac{1}{x}\right)$; $x + \frac{1}{x}$ doit donc être un minimum. Soit $y = x + \frac{1}{x}$, et $x = 1 - \delta$; δ sera moindre que l'unité, car x doit être positif. On aura.....

$$y = \frac{x^2+1}{x} = \frac{2-2\delta+\delta^2}{1-\delta} = 2 + \frac{\delta^2}{1-\delta}.$$

Je dis que $\delta = 0$, rend y un minimum. En effet; $\delta = 0$, donne $y = 2$; δ augmentant positivement, la valeur $2 + \frac{\delta^2}{1-\delta}$, de y, augmente. Si δ était négatif, on pourrait mettre la valeur de y sous la forme ..... $2 + \frac{\delta}{\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)}$

et l'on voit que δ augmentant, y augmente. La valeur $\delta = 0$, rend donc y un minimum. Or, $\delta = 0$, donne $x = 1$. Le rectangle dont le périmètre est un minimum, est donc le quarré α^2. Ce qui démontre le principe énoncé.

(**) La surface du cône circonscrit est composée de la surface convexe du cône et de la surface de la base du cône.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

un plan par l'axe SA d'un cône circonscrit, ce plan passera par le centre C de la sphère ; les sections du cône et de la sphère, par ce plan, seront le triangle isoscèle SDD' et le grand cercle $TT'A$. La hauteur du cône sera SA, le rayon de la base sera AD ; le grand cercle touchera les côtés, SD, SD', DD', en des points T, T', A. Le rayon de la sphère étant r, on aura, $CT = CA = CT' = CB$. Il s'agit de déterminer quelle doit être la valeur de AS, pour que la surface du cône soit un minimum. Si y désigne la surface du cône, on aura (B. n° 219),

$$y = \frac{1}{2} SD \times \text{circ. } AD + \text{cercle } AD = \frac{1}{2} SD \times 2\pi AD + \pi AD^2 = \pi(SD + AD)\,AD.$$

Les triangles semblables, (B. n° 159), SAD, STC, donnent

$$AD^2 : CT^2 :: SA^2 : ST^2 \text{ et } SD : AD :: SC : CT. \text{ Donc...}$$

$$SD + AD : AD :: SC + CT : CT, \text{ ou } SD + AD : AD :: SA : CA. \text{ Donc....}$$

$$\pi(SD + AD)AD : \pi AD^2 :: SA : CA, \text{ ou (1)...} y : \pi \times AD^2 :: SA : CA.$$

Mais, (B. n° 129), $ST^2 = SA \times SB$. Donc

$$AD^2 : CT^2 :: SA^2 : SA \times SB. \text{ Donc, (2)...} AD^2 : CA^2 :: SA : SB.$$

Multipliant les proportions (1) et (2) terme à terme, on trouvera

$$y : \pi \times CA^2 :: SA^2 : CA \times SB ; \text{ d'où } y = \pi r \times \frac{SA^2}{SB}.$$

Le *rapport* $\frac{SA^2}{SB}$, doit donc être le plus petit possible. Or,

$$\frac{SA^2}{SB} = \frac{(SB + 2r)^2}{SB} = SB + \frac{4r^2}{SB} + 4r.$$

$SB + \frac{4r^2}{SB}$, doit donc être un minimum. Mais, $SB \times \frac{4r^2}{SB} = 4r^2$; SB et $\frac{4r^2}{SB}$, sont donc les côtés variables d'un rectangle constant $4r^2$, dont le périmètre variable $SB + \frac{4r^2}{SB}$, doit être un minimum. Les côtés de ce rectangle doivent donc être égaux (n° 226). Donc, $SB = 2r = AB$. Donc $SA = 2AB = 4r$. On peut calculer le *rayon* AD de la base, l'*apothème* SD, la *surface* y et la solidité z du cône, au moyen de r. En effet ; $SD : AD :: SC : CT$ et $SC = 3r = 3CT$; donc $SD = 3AD$. Mais,

$$AS^2 = 16r^2 = SD^2 - AD^2 = 9AD^2 - AD^2 = 8AD^2.$$

Donc, $AD = r\sqrt{2}$, $SD = 3r\sqrt{2}$; $y = \pi r \frac{SA^2}{SB} = \pi r \times \frac{16r^2}{2r} = 4\pi r^2 \times 2$

$$z = \frac{1}{3} \pi \times AD^2 \times SA = \frac{1}{3} \pi \times 2r^2 \times 4r = \frac{4}{3} \pi r^3 \times 2.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Or, $4\pi r^2$ est la surface de la sphère inscrite et $\frac{4}{3}\pi r^3$ est son volume.

Donc, *parmi tous les cônes circonscrits à une sphère, le cône dont sa surface est un minimum, jouit des propriétés suivantes. Sa hauteur est double du diamètre de la sphère; son apothème est le triple du rayon de sa base; sa surface et son volume, sont respectivement doubles de la surface et du volume de la sphère inscrite.*

228. (fig. 240). *Connaissant les valeurs numériques des trois côtés d'un triangle, trouver une formule à l'aide de laquelle on puisse calculer la surface de ce triangle.* Soit ABC, le triangle proposé. Désignez, sa surface par x, ses côtés par, a, b, c, et la demi-somme de ces côtés par p. Vous aurez...

$$(1)\ldots x = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

En effet; tirez des droites, AO, BG, qui divisent les angles, BAC, ABC en deux parties égales. Du point O, où ces droites se coupent, menez des perpendiculaires, OP, OP', OP'', sur les côtés du triangle BAC; vous aurez (n° 207).....

$$OP = OP' = OP''; \quad BP = BP''; \quad CP' = CP''; \quad AP = AP'.$$

Prolongez les côtés de l'angle B, de A en E et de C en F. Prenez, $AD = CP' = CP''$; menez DK perpendiculaire à BE; prenez....

$$CM = CN = DR = AP' = AP; \text{ d'où } AM = CP' = CP'' = AD.$$

Tirez les droites, KN, KC, KM, KA, KR et CO; vous aurez.....

$$x = (OBC + OBA + OAC) = \left(\frac{1}{2}BC \times OP'' + \frac{1}{2}BA \times OP + \frac{1}{2}AC \times OP'\right).$$

Mais, $OP = OP' = OP''$; donc $x = OP\left(\frac{BC+BA+AC}{2}\right) = OP \times p$. Or,

$$2p = (AP + AC + BC) = (BP + P'A) + (AP' + P'C) + (BP'' + P''C)$$
$$= (BP + BP'') + (AP + AP') + (CP' + CP'') = 2(BP + AP + CP')$$
$$= 2(BP + AP + AD) = 2BD. \text{ Donc, } p = BD, \ x = BD \times OP.$$

Les triangles semblables, BPO, BDK, donnent.....

$$BP : PO :: BD : DK; \text{ mais } BD : BD :: PO : PO.$$

Multipliant ces proportions et observant que $BD \times PO = x$, il viendra...

$$BP \times BD : x :: x : PO \times DK; \text{ d'où, } (2)\ldots x^2 = BD \times BP \times PO \times DK.$$

Or, $BN = (P''B + P''C + CN) = (BP + AD + AP) = BD$.

Les triangles, BKN, BKD, sont donc égaux (B. n° 80). Donc....

L'angle $KNB = KDB = 90°$ et $KN = KD$. Mais, $CN = DR$. Le

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

triangles, KNC, KDR, sont donc égaux (B. n° 80). Donc, $CK=RK$. D'ailleurs....

$$AC=(AP'+P'C)=(DR+AD)=AR \text{ et } KC=KR.$$

Les triangles, KAC, KAR, sont donc égaux (B. n° 83). Les angles KCM, KRD, sont donc égaux. Or, $DR=MC$ et $RK=CK$; les triangles KDR, KMC, sont donc égaux (B. n° 80). Donc..... $CMK=RDK=90°$ et $KM=KD$. Les triangles rectangles, KMA, KDA, sont donc égaux (n° 50). Les angles AKM, AKD, sont donc égaux. Dans le quadrilatère $ADKM$, les angles D et M étant droits, on a....

$$(MAD+DKM)=180°=(MAD+MAB); \text{ donc } \tfrac{1}{2}DKM=\tfrac{1}{2}MAB.$$

Les angles, DKA, PAO, sont donc égaux; les triangles rectangles APO, KDA, sont donc semblables (n° 56); on a donc.....

$$PO:PA::DA:DK; \text{ d'où, } PO\times DK=AD\times AP.$$

La valeur de x^2, donnée par l'équation (2), devient donc...

$x^2=BD\times BP\times AD\times AP$. Mais, $BD=p$ et.....

$PD=AP+AD=AP'+CP'=AC=b$; $BP+AD=BP''+CP''=BC=a$.

Donc, $BD=p$, $AD=(BD-AB)=(p-c)$; $BP=(BD-DP)=(p-b)$;

$AP=BD-(BP+AD)=(p-a)$. Donc enfin,

$x^2=p(p-b)(p-c)(p-a)$; d'où $x=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

229. (fig. 241). *Lorsque d'un point quelconque, situé dans l'angle formé par deux côtés contigus d'un parallélogramme, on tire des perpendiculaires sur la diagonale et sur les côtés contigus, le produit de la diagonale, par la perpendiculaire menée sur sa direction, est égal à la différence des produits des deux côtés du parallélogramme, par les perpendiculaires menées sur ces côtés. Si le point était hors de l'angle formé par les deux côtés du parallélogramme, le premier produit serait égal à la somme des deux autres.* En effet; par les points, M, m, menez des perpendiculaires, MH, ME, MG, mh, me, mg, sur la diagonale et sur les côtés du parallélogramme $ABCD$ et tirez les droites, MA, MB, MD, mA, mB, mD; vous aurez....

$MAD=(ABD+MBD-MAB)$; $mAD=(ABD+mBD+mAB)$.

Evaluant les surfaces de ces triangles, et doublant les deux membres de chaque égalité, il viendra...

$AD.MH=(BD.GT+BD.MT-AB.ME)=(BD.MG-AB.ME)$,

$AD.mh=(BD.gt+BD.mt+AB.me)=(BD.mg+AB.me)$.

Ce qui démontre le principe énoncé. On en déduira, dans la *Statique*,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

que le *moment* de la *résultante*, est égal à la différence ou à la somme des *momens* des *composantes*.

230. (fig. 269). *Connaissant deux perpendiculaires, BB', DD', à une droite BD; on propose de mener une sécante FG telle que le produit de BF par DG, soit égal à une quantité donnée, n.* Si l'on fait, $AD=AB=a$ et $BF=z$; DG sera égal à $\frac{n}{z}$. P le point A, on mènera Ay perpendiculaire sur BD; on prendra Ay pour l'axe des y et AD prolongée sera l'axe des x. Les coordonnées du point F étant $x=-a$, $y=z$ et celles du point G étant $x=a$, $y=\frac{n}{z}$, l'équation de la droite FG, menée par ces deux points est...

$$(1)\ldots\ 2ayz+z^2(x-a)=n(x+a).$$

Or, a et n sont des constantes et z est une indéterminée; il existe donc une infinité de droites qui jouissent de la propriété demandée. Par conséquent, si l'on conçoit que z varie d'une manière continue, la sécante FG se mouvra également d'une manière continue, deux sécantes infiniment voisines, FG, fg, se couperont en un point M'; de sorte qu'il existera une courbe qui passera par tous ces points d'intersection. Pour trouver l'équation de cette courbe, on mettra $z+\delta$ au lieu de z dans l'équation (1), et supposant δ infiniment petit, ce qui revient à négliger les puissances de δ supérieures à la première, le résultat...

$$(2)\ldots\ 2ay(z+\delta)+(z^2+2z\delta)(x-a)=n(x+a),$$

sera l'équation de fg. Désignant par $x_,$ et $y_,$ les coordonnées du point M', ces coordonnées satisferont aux équations (1) et (2); ce qui donnera...

$$(3)\ldots\ 2azy_,+z^2(x_,-a)=n(x_,+a) \text{ et}$$
$$(4)\ldots\ 2ay_,(z+\delta)+(z^2+2z\delta)(x_,-a)=n(x_,+a).$$

Dans les équations (3) et (4), chaque valeur de z déterminant les coordonnées $x_,$, $y_,$, d'un point de la courbe cherchée, l'élimination de z entre ces deux équations donnera l'équation de cette courbe. Pour simplifier les calculs, on observera qu'en vertu de l'équation (3), l'équation (4) devient $ay_,+z(x_,-a)=0$. Or, l'équation (3) donne...

$$z[ay_,+z(x_,-a)]+ay_,z=n(x_,+a);\ \text{d'où}\ ay_,z=n(x_,+a).$$

Il suffit donc d'éliminer z entre les équations

$$ay_,+z(x_,-a)=0,\quad ay_,z-n(x_,+a)=0.$$

Le résultat (5)... $a^2y_,^2+n(x_,^2-a^2)=0$, est l'équation de la courbe cherchée. Selon que n sera positif ou négatif, la courbe sera une *ellipse* ou une *hyperbole*.

231. *Remarque.* Les équations (3) et (4) se déduisant des équations (1)

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

et (2), en changeant, dans ces dernières, x et y, en x_1 et y_1, l'élimination de z entre les équations (1) et (2), conduirait également à l'équation de la courbe cherchée. Et en effet; pour le point M d'intersection de deux sécantes infiniment voisines, FG, fg, les coordonnées, x, y, sont les mêmes dans les équations (1) et (2) de ces droites, ces coordonnées ne sont les mêmes qu'en ce point, et chaque valeur de l'indéterminée z donne un point d'intersection; on obtiendra donc la courbe qui passe par tous ces points d'intersection, en éliminant z entre les équations (1) et (2). On en déduit cette règle générale : *lorsque dans l'équation* (1).. $f(x, y, z)=0$, *x et y désignent les coordonnées des différens points d'une courbe plane, et z une indéterminée; chaque valeur de z, donne une courbe particulière. Pour trouver l'équation de la courbe S, qui passe par les points d'intersection de deux courbes infiniment voisines quelconques, on change z en $z+\delta$, dans l'équation* (1), *et supposant δ infiniment petit, dans l'équation $f(x, y, z+\delta)=0$,* (*ce qui revient à supprimer les puissances de δ supérieures à la première*), *δ disparaît en vertu de l'équation* (1), *ce qui conduit à une équation....* (2).. $F(x, y, z)=0$. *L'élimination de z entre les équations* (1) *et* (2), *donne l'équation de la courbe cherchée* (*). Pour abréger le discours, nous désignerons toujours cette courbe, par *courbe des intersections.*

232. (fig. 269). *Dans le problème du n° 230, la courbe des intersections se réduit à un point, quand la somme ou le quotient des droites, DG, BF, est une constante γ et lorsque la différence $DG-BF=\gamma$, la courbe des intersections devient imaginaire.* En effet; soit toujours, $AD=AB=a$; l'équation de FG sera de la forme $y=\alpha x+\mathcal{C}$ et l'on trouvera...

$$(1)\ldots\ DG=\mathcal{C}+a\alpha,\quad BF=\mathcal{C}-a\alpha.$$

1°. Lorsque $DG+BF=\gamma$, on a $\gamma=2\mathcal{C}$; de sorte que l'équation de FG devient (2).. $y=\alpha x+\frac{1}{2}\gamma$; α est indéterminée; l'équation d'une droite fg, infiniment voisine de FG, est (3).. $y=(\alpha+\delta)\,x+\frac{1}{2}\gamma$; les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites sont $x=0$, $y=\frac{1}{2}\gamma=Am$. Ces coordonnées étant indépendantes de l'indéterminée α, la *courbe des intersections* se réduit à un *point* m, dont les coordonnées sont $x=0$ et $y=\frac{1}{2}\gamma=Am$. Et en effet; si par le point m, on mène une sécante quelconque, $F'G'$, le trapèze $F'BDG'$, donnera (B. n° 148), $BF'+DG'=2Am=\gamma$.

2°. La condition $\frac{DG}{BF}=\gamma$, donne $\mathcal{C}=\frac{a\alpha(\gamma+1)}{\gamma-1}$. L'équation de FG

(*) L'équation (1) peut représenter une ligne droite.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

devient $y = \alpha\left\{x - \frac{a(1+\gamma)}{1-\gamma}\right\}$; l'équation de la sécante fg, infiniment voisine, est donc $y = (\alpha+\delta)\left\{x - \frac{a(1+\gamma)}{1-\gamma}\right\}$. Les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites sont, $x = \frac{a(1+\gamma)}{1-\gamma} = AO$, $y = 0$. Ces coordonnées étant indépendantes de l'indéterminée α, la *courbe des intersections* se réduit au *point O*. Et en effet ; pour une sécante quelconque OF'', menée par le point O, on a...

$$OD = AO - AD = \frac{2a\gamma}{1-\gamma},\quad OB = AO + AB = \frac{2a}{1-\gamma};\quad \frac{DG''}{BF''} = \frac{OD}{OB} = \gamma.$$

3°. Soit, $DG - BF = \gamma$; on aura, $\gamma = 2a\alpha$; d'où $\alpha = \frac{\gamma}{2a}$. L'équation de FG sera $y = \frac{\gamma}{2a}x + \mathcal{C}$; $\frac{\gamma}{2a}$ étant constant, les valeurs successives de l'indéterminée $\mathcal{C}$, déterminent des droites parallèles ; la *courbe des intersections* n'existe donc pas.

233. (fig. 269.) *Trouver une droite, ST, telle que le produit des perpendiculaires, Bp, Dr, menées de deux point fixes, B, D, sur ST, soit égale à une quantité donnée, n.* Soit, $AB = AD = a$; si l'équation de la droite ST, rapportée aux axes rectangulaires, Ax, Ay, est $y = \alpha x + \mathcal{C}$, on trouvera, (1)... $Dr = \frac{\mathcal{C} + \alpha a}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, $Bp = \frac{\mathcal{C} - \alpha a}{\sqrt{1+\alpha^2}}$.

La condition, $Dr \times Bp = n$, donnera $\mathcal{C}^2 = n + (n + a^2)\,\alpha^2$. Posant $n + a^2 = c^2$, on aura $\mathcal{C} = \sqrt{n + c^2\alpha^2}$; de sorte que l'équation de la droite demandée est, (2)... $y = \alpha x + \sqrt{n + c^2\alpha^2}$. Chaque valeur de l'indéterminée α, donnera une droite qui jouira de la propriété demandée. Si l'on veut trouver l'équation de la courbe qui passe par les intersections de ces différentes droites, on changera α en $\alpha + \delta$ et négligeant les puissances de δ supérieures à la première, l'équation (1) donnera...

$$(3)...\ y = (\alpha+\delta)\,x + \sqrt{n + c^2(\alpha^2 + 2\alpha\delta)}.$$

On extraira la racine quarrée de $(n + c^2\alpha^2) + 2c^2\alpha\delta$, en regardant $n + c^2\alpha^2$ comme le premier terme du quarré ; on négligera les puissances de δ supérieures à la première, et l'équation (3) donnera...

$$(4)...\ y = \alpha x + \sqrt{n + c^2\alpha^2}\left\{x + \frac{c^2\alpha}{\sqrt{n + c^2\alpha^2}}\right\}.$$

Les équations (2) et (4) déterminent deux droites infiniment voisines. L'élimination de α entre ces deux équations, donnera l'équation de la courbe cherchée. En vertu de l'équation (2), l'équation (4) se réduit à,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

$$(5)\ldots x+\frac{\alpha c^2}{\sqrt{n+c^2\alpha^2}}=0.$$

Pour éliminer α entre les équations (2) et (5), on égalera les valeurs de $\sqrt{n+c^2\alpha^2}$, déduites de ces équations; ce qui donnera $\alpha=\frac{yx}{x^2-c^2}$; substituant cette valeur de α dans l'équation (2), faisant disparaître le radical et supprimant ensuite le facteur x^2-c^2, qui est étranger à la question (*), on trouvera, que l'équation de la courbe demandée est....

$$c^2y^2+n(x^2-c^2)=0.$$

Cette équation est de la forme de l'équation (5) du n° 230.

234. On pouvait déduire ce résultat du problème du n° 230. En effet; si $y=\alpha x+\mathcal{C}$ est l'équation d'une droite FG, on trouvera..... $DG=\mathcal{C}+a\alpha$, $BF=\mathcal{C}-a\alpha$. Posant, $DG\times BF=n$, on en déduira $\mathcal{C}^2=n+a^2\alpha^2$. De sorte que l'équation de FG est $y=\alpha x+\sqrt{n+a^2\alpha^2}$. Or, α variant d'une manière continue, la droite FG prend différentes positions, et l'on a trouvé (n° 230), que la courbe, qui passe par les intersections de ces différentes droites, a pour équation $a^2y^2+n(x^2-a^2)=0$. Mais, la droite, qui satisfait à la condition, $Bp\times Dr=n$, a pour équation $y=\alpha x+\sqrt{n+c^2\alpha^2}$; la courbe des intersections, qui correspond à cette dernière équation, aura donc pour équation, $c^2y^2+n(x^2-c^2)=0$.

235. (fig. 269.) *Trouver une droite TS telle, qu'en menant par deux points fixes B et D, des perpendiculaires Bp, Dr, sur cette droite, les pieds p et r de ces perpendiculaires, se trouvent sur une circonférence décrite du milieu A, de BD, comme centre, avec un rayon donné, c.* Si l'on conserve la notation du n° 230, on trouvera que les coordonnées du point r sont, $x_1=\frac{a-\mathcal{C}\alpha}{1+\alpha^2}$, $y_1=\frac{\mathcal{C}+a\alpha}{1+\alpha^2}$.

Ces coordonnées devront satisfaire à l'équation

$$x^2+y^2=c^2\text{ ; donc (1)}\ldots\left(\frac{a-\mathcal{C}\alpha}{1+\alpha^2}\right)^2+\left(\frac{\mathcal{C}+a\alpha}{1+\alpha^2}\right)^2=c^2.$$

L'équation (1) donne, $\mathcal{C}=\sqrt{c^2-a^2+c^2\alpha^2}$. Cette valeur de $\mathcal{C}$ ne changeant pas, quand a change de signe, et les coordonnées du point p ne différant de celle du point r que par le signe de a, on serait conduit à la même valeur de $\mathcal{C}$ en exprimant que le point p est sur la circonférence. Faisant donc, $c^2-a^2=n$, on voit que l'équation de la droite demandée est $y=\alpha x+\sqrt{n+c^2\alpha^2}$. Or, c et n sont des constantes et chaque valeur de l'indéterminée z donne une droite qui jouit de la propriété demandée.

(*) L'équation $x^2-c^2=0$, donne deux droites parallèles à l'axe des y. Elles satisfont à la condition $Dr\times Bp=n$, car on trouve $Br\times Bp=c^2-a^2$ et par hypothèse $c^2-a^2=n$. Mais, ces droites étant fixes, on ne doit pas les considérer dans la recherche de la *courbe des intersections*.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

La *courbe des intersections* aura donc pour équation, $c^2y^2+n(x^2-c^2)=0$.

236. (fig. 274.) *Le sommet S, de l'angle formé par deux tangentes à une courbe du second degré, se meut sur une courbe du même degré et ayant même centre A. La droite M'M"*, (que je nommerai ligne de contact), *menée par les points de tangence, varie avec le sommet S. Je dis que les intersections successives, des lignes de contact infiniment voisines, forment une courbe du second degré qui a le même centre A; le paramètre de la courbe des intersections, est une troisième proportionnelle géométrique, aux paramètres correspondans des deux autres courbes et la courbe des intersections est toujours de l'espèce de la courbe sur laquelle le sommet se meut, c'est-à-dire que ces deux courbes sont deux ellipses ou deux hyperboles.* En effet; soient.....

$$(1)\ldots my^2+nx^2=1 \text{ et } (2)\ldots m'y^2+n'x^2=1,$$

les équations des courbes concentriques, *M'M"D*, *ESD'*. Désignez les coordonnées du sommet *S*, par α et $\mathcal{C}$, les coordonnées des points *M'*, *M"*, de tangence, par x', y', et x'', y''. Vous aurez....

$$(3)\ldots m'\mathcal{C}^2+n'\alpha^2=1, (4)\ldots my'^2+n'^2=1, (5)\ldots my''^2+nx''^2=1.$$

Les équations des tangentes, *SM'*, *SM"*, seront

$$myy'+nxx'=1,\ myy''+nxx''=1.$$

Ces deux droites passant par le point *S*, dont les coordonnées sont α et $\mathcal{C}$, vous aurez

$$(6)\ldots m\mathcal{C}y'+n\alpha x'=1, (7)\ldots m\mathcal{C}y''+n\alpha x''=1.$$

L'équation de la *ligne de contact M'M"*, est donc... $(8)\ldots m\mathcal{C}y+n\alpha x=1$, car en vertu des équations (6), (7), l'équation (8) représente une droite qui passe par les points *M'*, *M"*. Cela posé; si le sommet *S*, prend la position infiniment voisine *s*, les coordonnées, α, $\mathcal{C}$, deviendront $\alpha+\delta'$ et $\mathcal{C}+\delta$, (δ et δ' étant infiniment petits); *M'M"* prendra la position infiniment voisine *N'N"* et l'équation de *N'N"* sera

$$m(\mathcal{C}+\delta)y+n(\alpha+\delta')x=1.$$

Le point *s*, devant être sur la courbe *ESD*, les coordonnées..... $\alpha+\delta'$, $\mathcal{C}+\delta$, de ce point doivent satisfaire à l'équation (2); posant.... $x=\alpha+\delta'$, $y=\mathcal{C}+\delta$, et négligeant les puissances de δ et de δ', supérieures à la première, l'équation (2) donnera $\delta'=-\frac{m'\mathcal{C}}{n'\alpha}\delta$. De sorte que l'équation de *N'N"* deviendra....

$$(9)\ldots(m\mathcal{C}y+n\alpha x-1)+\left(my-\frac{\mathcal{C}nm'x}{n'\alpha}\right)\delta=0.$$

Pour le point d'intersection *M*, des droites, *M'M"*, *N'N"*, les coordon-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

nées, x, y, étant les mêmes dans les équations, (8), (9), on obtiendra la *courbe des intersections* en éliminant α et $\mathcal{C}$ entre les équations (3), (8), (9).

La dernière équation se réduit à, (10)... $my - \frac{\mathcal{C}nm'x}{n'\alpha} = 0$.

Les équations (8) et (10), donnent

$$\alpha = \frac{nm'x}{m^2n'y^2+n^2m'x^2}, \quad \mathcal{C} = \frac{mn'y}{m^2n'y^2+n^2m'x^2}.$$

Substituant ces valeurs de α et $\mathcal{C}$, dans l'équation (3), il vient,

$$(m^2n'y^2+n^2m'x^2)\left(\frac{m^2}{m'}y^2+\frac{n^2}{n'}x^2-1\right)=0.$$

Or, le facteur, $m^2n'y^2+n^2m'x^2$, n'est pas zéro, car les valeurs générales des coordonnées, α, $\mathcal{C}$, ne doivent pas être infinies; l'équation de la *courbe MD'', des intersections*, est donc

$$(11)\ldots. \frac{m^2}{m'}y^2+\frac{n^2}{n'}x^2=1.$$

Cette équation démontre les propriétés énoncées. En effet; l'équation (11) représente une courbe du second degré, rapportée à son centre A, et à ses axes Ax, Ay; 2°. si l'on cherche les points, D, D', D'', où les trois courbes coupent l'axe des x, les équations (1), (2), (11), de ces courbes, donneront

$$AD=a=\frac{1}{\sqrt{n}}, \quad AD'=a'=\frac{1}{\sqrt{n'}}, \quad AD''=a''=\frac{1}{n}\sqrt{n'}.$$

On en déduira, $a' : a :: a : a''$. Désignant les distances, Ad, Ad', Ad'', par, b, b', b'', on trouvera

$$b=\frac{1}{\sqrt{m}}, \quad b'=\frac{1}{\sqrt{m'}}, \quad b''=\frac{1}{m}\sqrt{m'}\ ; \text{ d'où, } b' : b :: b : b''.$$

Les équations (2) et (11), démontrent que la courbe $dM''D$, étant une ellipse ou une hyperbole, les courbes $d'SD'$, dMD'', sont toujours de même espèce, c'est-à-dire deux ellipses, ou deux hyperboles.

Quand les courbes $dM''D$, $d'SD'$, sont semblables et de même espèce, la courbe $d''MD''$ est semblable aux deux autres, car les valeurs des quantités, a, a', a'', b, b', b'', démontrent que lorsque,

$$a : a' :: b : b', \text{ on a, } a'' : a :: b'' : b.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

TROISIÈME PARTIE.

ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Préliminaires. Théorie des plans.

237. Le *plan* est une surface indéfinie, sur laquelle une ligne droite s'applique exactement dans tous les sens. Une droite menée par deux points quelconques d'un plan, est donc toute entière dans ce plan. Pour fixer les idées, nous assignerons des formes déterminées aux plans, mais il faudra toujours concevoir que ces portions de plans sont prolongées indéfiniment dans tous les sens.

238. *L'intersection d'une droite, avec un plan, est un point;* car si la droite avait deux points communs avec le plan, elle serait toute entière dans le plan (n° 237); ce qui est contre l'hypothèse. Le point de rencontre d'une droite avec un plan, est ce qu'on nomme le *pied* de cette droite.

239. (fig. 109). *Par deux droites, qui se coupent, on ne peut mener qu'un seul plan.* En effet; tirez deux droites, BC, BD, qui se coupent en B, et concevez un plan qui tourne autour de BD; quand ce plan rencontrera un point C, de BC, la droite BC sera toute entière dans ce plan (n° 237); et si le plan continuait à tourner, la droite CD n'y serait plus comprise. *Par trois points, B, C, D, non en ligne droite, on ne peut donc faire passer qu'un seul plan. Trois points, non en ligne droite, ou deux droites qui se coupent, déterminent donc la position d'un plan. Deux plans coïncident donc, lorsqu'ils ont trois points communs, non en ligne droite.*

240. (fig. 19). *Par deux droites parallèles, on ne peut conduire qu'un seul plan*, car si l'on pouvait mener deux plans, suivant les parallèles AB, CD; en prenant trois points, E, C, D, de ces parallèles, les deux plans passeraient par trois points non en ligne droite, ce qui est absurde (n° 239). *Un plan, assujéti à passer par deux parallèles, est donc déterminé.*

241. (fig. 19). *Par un point donné, on ne peut conduire qu'une seule parallèle à une ligne donnée.* En effet; si par le point E, on pouvait mener deux parallèles EB, EQ, à la droite CD, les deux plans, $QECD$, $BECD$, se confondraient, car ils passent par trois points, E, C, D, non en ligne

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

droite; on pourrait donc conduire par un même point et dans un même plan, deux parallèles, EB, EQ, à CD; ce qui est absurde (n° 29).

242. (fig. 19). *Lorsque deux droites sont parallèles; si par une de ces droites et un point de l'autre droite, on mène un plan; cette dernière droite sera toute entière dans le plan.* En effet; si les droites, AB, CD, sont parallèles, elles seront situées dans un même plan. Par la droite CD et un point quelconque E, de AB, menez un plan, et tirez une droite EC, du point E à un point quelconque C de CD. Les droites CD, CE, seront dans ce dernier plan; mais elles sont aussi dans le plan des parallèles; ces deux plans se confondent donc (n° 239).

243. (fig. 19). *Lorsque par un point d'un plan, on mène une parallèle à une droite située dans ce plan, cette parallèle est toute entière dans le plan.* En effet; par le point E, du plan ECD, menez une parallèle AB, à la droite CD située dans le plan ECD. Si la ligne AB n'était pas dans le plan ECD, on pourrait conduire, dans ce plan, une parallèle EQ à CD; les deux droites, EQ, EB, seraient donc parallèles à CD; ce qui n'est pas possible (n° 241).

244. (fig. 110). *Toutes les parallèles, menées par les différens points d'une ligne droite, sont dans un même plan.* En effet, conduisez un plan CK, par les droites, RC, RK; si par un point quelconque M, de RK, vous menez une parallèle ML à RC, cette parallèle sera dans le plan CK (n° 243). Toutes les parallèles à RC, menées par des points quelconques de RK, sont donc dans le plan CK. Ce qui démontre le principe énoncé.

245. *L'intersection de deux plans est une ligne droite*, car si l'on pouvait trouver trois points de l'intersection qui ne fussent pas en ligne droite, les deux plans se confondraient (n° 239); il n'y aurait donc pas d'intersection; ce qui est contre l'hypothèse. *Une ligne est donc déterminée, lorsqu'elle doit se trouver à-la-fois dans deux plans qui se coupent. Cette ligne est droite. On peut donc mener une infinité de plans par une même droite.*

246. (fig. 111). *L'intersection de trois plans, qui ne passent pas par la même droite, est un point;* car l'intersection de deux plans CK, LN, étant une droite AB (n° 245); la rencontre de cette droite avec un troisième plan GE, sera un point B (n° 238). Un point est donc entièrement déterminé, lorsqu'il doit se trouver en même temps sur trois plans donnés, qui ne passent pas par la même droite et qui ne sont pas parallèles.

247. Une ligne droite est dite *perpendiculaire à un plan*, lorsqu'elle ne penche d'aucun côté par rapport à ce plan; elle doit donc former des angles droits avec toutes les lignes menées par son *pied*, dans le plan.

248. (fig. 109). *Une droite est perpendiculaire à un plan, lorsqu'elle forme des angles égaux avec toutes les lignes menées par son pied dans le plan;* car alors elle ne penche d'aucun côté par rapport au plan. Tous

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

ces angles sont nécessairement droits, car la ligne AB étant perpendiculaire au plan GE, si par son *pied* B, on mène la droite DN, dans le plan GE; les angles, ABD, ABN, devront être égaux; ces angles seront donc droits, (n° 11. 1°). *Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, on dit que le plan est perpendiculaire à la droite.*

249. (fig. 114). *Deux plans sont parallèles, lorsqu'ils ne peuvent pas se rencontrer.* Par exemple, les plans MN, PQ, seront parallèles, s'ils ne peuvent jamais se rencontrer, à quelque distance qu'on les prolonge.

250. *Deux droites situées dans deux plans parallèles, ne peuvent jamais se rencontrer;* car si elles se rencontraient, les plans se rencontreraient; ce qui est contre l'hypothèse. Deux droites, qui ne se rencontrent pas, peuvent donc ne pas être parallèles.

251. (fig. 109). *Une droite, perpendiculaire à deux autres, qui passent par son pied dans un plan, est perpendiculaire à ce plan.* Il s'agit de prouver que si la droite AB est perpendiculaire aux droites, BC, BD, menées dans le plan GE, elle sera perpendiculaire à une droite quelconque BI, menée par son pied dans le plan GE. Par deux points C, D, des lignes, BC, BD, menez la droite CD; cette droite sera dans le plan GE; tirez une droite BI, du point B au milieu I de CD; vous aurez, (n° 206),

$$AD^2+AC^2=2(AI^2+DI^2) \text{ et } BD^2+BC^2=2(BI^2+DI^2).$$

Retranchant la seconde égalité de la première, il viendra....

$$(AD^2-BD^2)+(AC^2-BC^2)=2(AI^2-BI^2); \text{ mais, (n° 59),}$$

$$(AD^2-BD^2)=AB^2 \text{ et } (AC^2-BC^2)=AB^2; \text{ donc....}$$

$$2(AB^2)=2(AI^2-BI^2); \quad AI^2=(AB^2+BI^2).$$

L'angle ABI, est donc droit, (n° 60). Ce qui démontre le principe énoncé.

252. (fig. 109). RÉCIPROQUEMENT; *si par un point d'une ligne droite, on mène un plan perpendiculaire à cette droite et des perpendiculaires à cette droite, toutes ces perpendiculaires seront dans ce plan.* En effet; par le point B de la droite AB, conduisez le plan GE, perpendiculaire à BA, et menez des droites, BN, BM, BD, etc., perpendiculaires à BA; toutes ces perpendiculaires seront dans le plan GE, car si la perpendiculaire BD à BA, n'était pas dans le plan GE, le plan mené par les droites, AB, BD, couperait le plan GE, suivant une droite BI, perpendiculaire à BA, (n° 247); les angles ABI, ABD, situés dans un même plan, seraient donc droits; ce qui est absurde. La droite BD est donc dans le plan GE.

253. (fig. 109). *Si du pied B, de la perpendiculaire AB au plan GE, on mène une perpendiculaire BI, à la droite CD, située dans le plan GE; la droite AI sera perpendiculaire sur CD.* En effet; prenez $IC=ID$; tirez, BC, BD, AC et AD; les obliques, BC, BD, sont égales, (n° 16. 2°);

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

les triangles, ABC, ABD, rectangles en B, sont donc égaux, (B. n° 80); AC est donc égal à AD; les triangles AIC, AID, sont donc égaux, (B. n° 83), les angles, AIC, AID, sont donc égaux; AI est donc perpendiculaire à CD. Ce qui démontre le principe énoncé.

254. (fig. 109). *La droite CD, perpendiculaire aux droites IB, IA, est perpendiculaire au plan AIB de ces droites*, (n° 251).

255. (fig. 109). Les propriétés du n° 16, conviennent aux obliques et à la perpendiculaire, menées d'un point sur un plan. Ainsi; 1°. *par un point donné, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à un plan*; 2°. *les obliques, qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales; et réciproquement, les obliques qui sont égales, s'écartent également du pied de la perpendiculaire*; 3°. *la perpendiculaire menée, d'un point sur un plan, est plus courte qu'une oblique quelconque*; 4°. *de deux obliques, menées par le même point, celle qui s'approche le plus de la perpendiculaire est la plus courte; et réciproquement, l'oblique la plus courte s'approche le plus de la perpendiculaire.* En effet; concevez la perpendiculaire AB, au plan GE; tirez les obliques, AC, AD, et supposez que ces trois lignes rencontrent le plan GE, aux points B, C, D; les triangles, ABD, ABC, rectangles en B, donnent, (n° 59).....

$$(1).....AB^2=(AD^2-BD^2)=(AC^2-BC^2).$$ D'où,
$$(2)....(AD^2-AC^2)=(BD^2-BC^2).$$

Cela posé; 1°. si par le point A, pris hors du plan GE, on pouvait mener une seconde perpendiculaire AI, à ce plan, les angles, AIB, ABI, seraient droits; on pourrait donc abaisser du point A, deux perpendiculaires sur la droite BI; ce qui est absurde, (n° 16. 1°.). Si par le point B, du plan GE, on pouvait élever une seconde perpendiculaire BP, à ce plan; en menant le plan ABP, ce plan couperait le plan GE, suivant une droite BI, et les angles, ABI, PBI, seraient droits, (n° 247); ce qui est absurde, puisque les droites, BA, BP, BI, sont dans un même plan; 2°. Quand $BD=BC$; l'égalité (2) donne $AD=AC$; et réciproquement, $AD=AC$, donne $BD=BC$; 3°. l'égalité (1) démontre que AB^2 est moindre que AD^2; la perpendiculaire AB est donc plus courte qu'une oblique quelconque AD; 4°. lorsque BC est plus petit que BD, l'égalité (2) prouve que AC est moindre que AD; et réciproquement, $AC<AD$, donne $BC<BD$.

256. *Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, les perpendiculaires, menées des différens points de la droite sur le plan, se confondent avec cette droite*; car si cela n'était pas, on pourrait mener par le même point deux perpendiculaires à un plan; ce qui est absurde.

257. (fig. 109). *Une droite est perpendiculaire à un plan, lorsqu'elle forme des angles égaux avec trois droites menées par son pied dans ce plan; de sorte que ces angles sont nécessairement droits.* En effet;

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

concevez que la ligne AB forme des angles égaux avec les droites, BI, BM, BN, menées par son pied dans le plan GE; prenez $BI=BM=BN$; tirez les droites, AI, AM, AN; les triangles, ABI, ABM, ABN, seront égaux, (B. n° 80); les obliques AI, AM, AN, sont donc égales; elles s'écartent donc également du *pied* de la perpendiculaire, menée du point A sur le plan GE, (n° 255); le *pied* de cette perpendiculaire est donc à égale distance des points, I, M, N; il est donc le centre B de la circonférence qui passe par ces trois points; AB est donc perpendiculaire au plan GE; les angles égaux, ABI, ABM, ABN, sont donc droits, (n° 247).

258. (fig. 109). *Par un point B, pris sur la droite AB, mener un plan perpendiculaire à cette droite.* Suivant AB, conduisez deux plans ABC, ABD, (n° 245); dans ces plans, tirez des perpendiculaires, BC, BD, sur AB; le plan GE, mené par les droites, BC, BD, sera perpendiculaire à la ligne AB, (n° 251).

259. (fig. 109). *Par un point C, pris hors d'une droite AB, mener un plan perpendiculaire à cette droite.* Du point C, menez une perpendiculaire CB, à BA; par le point B. tirez BD perpendiculaire sur AB; le plan GE, conduit suivant les droites BC, BD, sera perpendiculaire à BA, et passera par le point C.

260. (fig. 109). *Par un point A, pris hors d'un plan GE, mener une perpendiculaire à ce plan.* Dans le plan GE, prenez trois points, I, M, N, également distans du point A; si AB est la perpendiculaire demandée, les obliques égales, AI, AM, AN, seront également éloignées du *pied* B de la perpendiculaire; le point B sera donc le centre de la circonférence qui passe par les points, I, M, N.

261. (fig. 242). *Par un point B, pris sur un plan GE, mener une perpendiculaire à ce plan.* Dans le plan GE, tirez une droite quelconque CD; par le point B, menez la perpendiculaire BI et la parallèle BM à CD; conduisez arbitrairement une oblique DS au plan GE; tirez IO perpendiculaire à DS; prenez OF, troisième proportionnelle aux lignes connues, OD, OI; tirez la droite IF; menez BH perpendiculaire sur IF; et prolongez IF, d'une quantité FA, telle que AH soit troisième proportionnelle aux lignes connues, III, BH; la droite AB sera la perpendiculaire demandée. En effet; par construction...

$$OD : OI :: OI : OF \text{ et } IH : BH :: BH : AH.$$

Les angles, DIF, ABI, sont donc droits, (n° 58). Cela posé; la ligne DC, perpendiculaire sur IA et sur IB, est perpendiculaire au plan AIB de ces deux droites, (n° 251); et par conséquent, la droite BM, parallèle à CD, sera perpendiculaire au même plan, (n° 262); l'angle ABM sera donc droit; mais l'angle ABI est droit; la ligne AB est donc perpendiculaire au plan GE, (n° 251).

262. (fig. 109). *Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, toutes*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

les parallèles à cette droite sont perpendiculaires au même plan. En effet ; la droite AB, étant perpendiculaire au plan GE, si par un point quelconque I, de ce plan, on mène une parallèle IP à BA, l'angle PIB sera droit, comme égal à IBA. Dans le plan GE, tirons la droite CID perpendiculaire sur BI, et joignons AI; la droite CD, perpendiculaire au plan AIB, (n° 254), sera perpendiculaire à la ligne IP, menée par son pied dans ce plan ; PI est donc perpendiculaire aux droites, IB, ID, menées par son pied dans le plan GE ; la ligne PI est donc perpendiculaire au plan GE, (n° 251).

263. *Un plan, perpendiculaire à une droite, est perpendiculaire aux parallèles à cette droite;* car le plan étant perpendiculaire à la droite, la droite est perpendiculaire au plan ; toutes les parallèles à cette droite sont donc perpendiculaires au plan, (n° 262) ; le plan est donc perpendiculaire à toutes ces parallèles.

264. (fig. 109). *Deux perpendiculaires à un même plan, sont parallèles.* En effet ; si les droites, AB, PI, perpendiculaires au plan GE, n'étaient pas parallèles ; par un point quelconque A de AB, on pourrait tirer une parallèle AN à PI; AN serait perpendiculaire au plan GE, (n° 262); mais AB est perpendiculaire au même plan ; on pourrait donc mener par un point A, deux perpendiculaires, AN, AB, au plan GE ; ce qui est absurde, (n° 255. 1°).

265. (fig. 112). *Deux droites, parallèles à une troisième, sont parallèles entre elles ;* car les droites, AB, CD, étant parallèles à FH, le plan GE, mené perpendiculairement à FH, sera perpendiculaire aux lignes, AB, CD, parallèles à FH, (n° 263) ; les droites AB, CD, perpendiculaires au plan GE, sont donc parallèles entre elles, (n° 264).

266. *Plusieurs droites, perpendiculaires à un même plan, sont parallèles entre elles,* (n° 265).

267. *Lorsqu'un plan est perpendiculaire à plusieurs droites, on peut en conclure que ces droites sont parallèles entre elles;* car ces droites, étant perpendiculaires au plan, sont parallèles entre elles, (n° 264).

268. (fig. 114). *Deux plans, MN, PQ, perpendiculaires à une même droite AC, sont parallèles.* En effet ; si ces plans n'étaient pas parallèles, ils se rencontreraient ; soit O, l'un des points de l'intersection ; joignons ce point avec les points A et C, où la ligne AC rencontre les plans, MN, PQ ; la droite AC, serait perpendiculaire aux lignes OA, OC, menées par son pied dans ces plans, (n° 247) ; on pourrait donc mener deux perpendiculaires d'un même point O, sur une droite AC ; ce qui est absurde, (n° 16. 1°) ; les plans MN, PQ, ne peuvent donc pas se rencontrer ; ils sont donc parallèles, (n° 249).

269. (fig. 114). *Deux plans sont parallèles, lorsqu'étant perpendiculaires chacun à une droite, ces deux droites sont parallèles.* En effet ; soient deux parallèles AC, BD ; conduisez deux plans MN, PQ, l'un

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

perpendiculaire sur AC, l'autre perpendiculaire sur BD; le plan PQ, perpendiculaire à BD, est aussi perpendiculaire à la droite AC, parallèle à BD, (n° 263); les plans MN, PQ, sont donc perpendiculaires à la droite AC; ces plans sont donc parallèles (n° 268).

270. (fig. 114). *Les intersections de plusieurs plans parallèles, par un même plan, sont parallèles.* En effet; si les intersections, AB, CD, des plans parallèles, MN, PQ, par le plan $ABCD$, n'étaient pas parallèles, comme elles sont dans ce dernier plan, elles se rencontreraient; les plans parallèles, MN, PQ, se rencontreraient donc; ce qui est absurde, (n° 249).

271. (fig. 114). *Lorsque plusieurs plans sont parallèles, la perpendiculaire à l'un de ces plans, est perpendiculaire à tous les autres.* Concevez deux plans parallèles, MN, PQ; menez la droite AC, perpendiculaire au premier plan; je dis qu'elle sera perpendiculaire au second; car en conduisant un plan quelconque $ABDC$, par la droite AC, les intersections, AB, CD, de ce plan, avec les plans parallèles, MN, PQ, seront deux parallèles, AB, CD, (n° 270); la ligne AC, perpendiculaire au plan MN, est perpendiculaire à la droite AB menée par son pied dans ce plan; mais CD est parallèle à BA; la ligne AC est donc perpendiculaire à une droite quelconque CD, menée par son pied, dans le plan PQ; AC est donc perpendiculaire au plan PQ, (n° 247).

272. (fig. 243). *Deux plans parallèles à un troisième, sont parallèles entre eux.* En effet; concevez deux plans L, M, parallèles au plan N, et menez une droite DC, perpendiculaire à ce dernier plan; DC sera perpendiculaire aux plans L et M, (n° 271); les deux plans L, M, seront donc parallèles, comme perpendiculaires à une même droite CD, (n° 268).

273. (fig. 118). *Les parallèles, comprises entre plans parallèles, sont égales.* En effet; concevez des droites parallèles, AB, CD, EF, GH, IK, comprises entre deux plans parallèles, $ACEGI$, $BDFHK$; menez des plans, BC, DE, FG, HI, suivant ces parallèles; les intersections, AC, BD, du plan BC, avec les plans parallèles, AG, BH, seront parallèles, (n° 270); mais AB et CD, sont parallèles; $ABDC$ est donc un parallélogramme; AB est donc égal à CD. On prouverait de même, que les lignes CD, EF, GH, IK, sont égales; ce qui démontre le principe énoncé.

274. (fig. 244). *Lorsque deux droites, qui se coupent, sont parallèles à deux autres droites qui se coupent, les angles formés par les deux premières droites, sont respectivement égaux aux angles formés par les deux autres.* Ce principe ayant été démontré, (B. n° 43), pour quatre droites situées dans un même plan, je supposerai que ces droites sont dans des plans différens. Par deux points quelconques, A, A', menez des droites, BD, CE, $B'D'$, $C'E'$, parallèles deux à deux. Prenez, $AB = A'B'$ et $AC = A'C'$; tirez les droites, AA', BB', CC', BC, $B'C'$. Les lignes, AB, $A'B'$, étant égales et parallèles, BB' est égal et parallèle à AA', (n° 265); de même, AC étant égal et parallèle à $A'C'$, les droites CC', AA'

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

sont égales et parallèles ; BB' est donc égal et parallèle à CC', (n° 265); BC est donc égal à $B'C'$; les triangles, ABC, $A'B'C'$, sont donc égaux, (B. n° 83); les angles, BAC, $B'A'C'$, sont donc égaux; or les angles opposés au sommet sont égaux ; les angles, CAB, $C'A'B'$, DAE, $D'A'E'$, sont donc égaux ; leurs *supplémens*, DAC, $D'A'C'$, EAB, $E'A'B'$, sont donc égaux, (B. n° 19).

275. (fig. 244). *Lorsque deux droites, qui se coupent, sont respectivement parallèles à deux autres droites qui se coupent ; le plan des deux premières droites est parallèle au plan des deux autres.* En effet ; par deux points quelconques, A', A, menez des droites, $A'B'$, $A'C'$, respectivement égales et parallèles aux droites, AB, AC; les trois droites, AA', BB', CC', seront égales et parallèles, (n° 274.). Si les plans, BAC, $B'A'C'$, n'étaient pas parallèles, on pourrait mener par le point A, un plan Abc parallèle au plan $A'B'C'$; le plan Abc couperait BB' et CC' en b et c, et l'on aurait, (n° 273),

$AA'=bB'=cC'$; mais, $AA'=BB'=CC'$; donc, $BB'=bB'$, $CC'=cC'$;

ce qui est absurde ; les plans, ABC, $A'B'C'$, sont donc parallèles.

276. (fig. 116). *Étant données trois droites, AB, CD, EF, égales et parallèles ; si l'on joint leurs extrémités par des droites, les triangles ACE, BDF, qui en résulteront, seront égaux, et les plans de ces triangles seront parallèles.* En effet ; les droites, AB, CD, EF, étant égales et parallèles, les quadrilatères, BC, BE, DE, sont des parallélogrammes, (n° 75). Par conséquent, AC est égal et parallèle à BD et AE est égal et parallèle à BF ; les angles, CAE, DBF, sont donc égaux, (n° 274) ; les triangles, CAE, DBF, sont donc égaux, (B. n° 80), et les plans de ces triangles sont parallèles, (n° 275).

277. (fig. 118). *Lorsque par plusieurs points, B, D, F, H, K, d'un plan MN, on mène des droites, BA, DC, FE, HG, KI, égales et parallèles ; les extrémités, A, C, E, G, I, de ces droites, sont dans un même plan parallèle au plan MN ;* car si cela n'était pas, en conduisant par le point A un plan $Acegi$, parallèle au plan MN, le premier plan couperait les droites données, en des points c, e, g, i, tels que l'on aurait (n° 273),

$BA=Dc=Fe=Hg=Ki$. Or, $BA=DC=FE=HG=KI$.

On aurait donc, $DC=Dc$, $FE=Fe$, $HG=Hg$, $Ki=KI$;
ce qui ne peut avoir lieu que lorsque les points, C, E, G, I, sont dans le plan $Acegi$, parallèle au plan MN.

278. (fig. 118). *Si par quatre points quelconques, B, D, F, K, de deux parallèles, BD, KF, on mène quatre droites parallèles, BA, DC, FE, KI; et si après avoir pris $BA=DC$, on conduit par les points A et C, un plan quelconque, qui coupe FE et KI, en des points*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

E, *I*; *les droites FE et KI, seront égales.* En effet; les lignes *AB*, *BD*, étant respectivement parallèles aux droites *IK*, *KF*, le plan *ABDC* des deux premières droites, est parallèle au plan *IKFE* des deux autres, (n° 275); les intersections, *AC*, *IE*, de ces plans parallèles, avec le plan *IACE*, sont donc parallèles; les lignes, *BA*, *DC*, étant égales et parallèles, *AC* est parallèle à *BD* (n° 75); les droites, *KF*, *AC*, parallèles à *BD*, sont parallèles entre elles, (n° 265); les lignes *IE*, *KF*, sont donc parallèles entre elles, comme parallèles à *AC*; mais *IK* est parallèle à *EF*; *EFKI* est donc un parallélogramme; les droites, *FE*, *KI*, sont donc égales.

279. (fig. 118). *Lorsque par quatre points quelconques, B, D, F, K, de deux parallèles, BD, KF, on mène quatre droites parallèles BA, DC, FE, KI, de sorte que BA = DC et FE = KI; les extrémités, A, C, E, I, de ces droites, sont dans un même plan;* car si elles n'y étaient pas, le plan mené par les trois points, *A*, *C*, *E*, couperait *IK* en un point *i*, tel que l'on aurait *FE* = *Ki*, (n° 278); mais par hypothèse *FE* = *KI*; les droites, *KI*, *Ki*, seraient donc égales; ce qui est absurde.

280. Deux droites, situées d'une manière quelconque dans l'espace, peuvent ne pas se couper, quoiqu'elles ne soient pas parallèles, (n° 250). Pour se former une idée de l'inclinaison de ces lignes, on mène par un point quelconque deux parallèles à ces lignes; et l'on est convenu de prendre l'angle formé par ces nouvelles lignes, pour la mesure de l'inclinaison des lignes données (*). D'après cette convention, *pour évaluer l'angle formé par deux droites, on mène des parallèles à ces droites, par un même point; l'angle formé par ces nouvelles lignes, mesure l'inclinaison des droites données.*

281. *Remarque.* Si les droites données étaient parallèles entre elles; en menant par un point quelconque deux parallèles aux lignes données, ces parallèles se confondraient, (n° 326). L'inclinaison des lignes données serait donc nulle. Il résulte donc de la convention établie, pour la mesure des angles, que l'*angle formé par deux parallèles est nul.*

282. (fig. 132). *Une droite, perpendiculaire à un plan, est perpendiculaire à toutes les droites situées dans ce plan.* En effet; soit la droite *BG*, perpendiculaire au plan *GE*; tirez dans ce plan, une droite quelconque *FE*; et par le point *F*, menez *FC* parallèle à *BG*; l'angle *CFE* sera droit, (n° 262); mais cet angle mesure l'inclinaison des droites *BG*, *FE*, (n° 280); le principe est donc démontré.

283. *Par un point donné, on peut mener une infinité de perpendiculaires à une même droite,* car en conduisant par ce point un plan per-

---

(*) La position du point par lequel on mène des parallèles aux lignes données, est arbitraire, car en conduisant par différens points, des parallèles aux lignes données, ces parallèles seront parallèles entre elles, (n° 265). Les angles formés par ces dernières lignes seront donc égaux entre eux, (n° 274).

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

pendiculaire à la droite, toutes les droites menées par ce point dans le plan, seront perpendiculaires à la ligne donnée, (n° 248).

284. (fig. 108). *Si d'un point quelconque M, d'une oblique BM à un plan GE, on mène une perpendiculaire MD, sur ce plan, et si l'on joint le pied de l'oblique avec le pied de la perpendiculaire, par une droite BD; l'angle MBD, formé par cette dernière droite avec l'oblique, sera le plus petit de tous les angles formés par cette oblique avec les lignes menées par son pied dans le plan GE.* (On a pris ce plus petit angle pour la mesure de l'inclinaison de l'oblique sur le plan). En effet; conduisez une droite quelconque *BC*, dans le plan *GE*; prenez *BC=BD*, et tirez la droite *MC*. La perpendiculaire *MD*, au plan *GE*, sera plus courte que l'oblique *MC*; mais les deux côtés, *MB*, *BD*, du triangle *MBD*, sont respectivement égaux aux deux côtés, *MB*, *BC*, du triangle *MBC* et *MD* est plus petit que *MC*; l'angle *MBD* est donc plus petit que l'angle *MBC*, (n° 21). Ce qui démontre le principe énoncé.

285. (fig. 108). L'angle *MDB* étant droit, on voit que *l'angle formé par une droite avec un plan, est le complément*, (B. n° 21), *de l'angle formé par cette droite avec la perpendiculaire menée de l'un de ses points sur le plan.*

286. (fig. 108). *Toute perpendiculaire à un plan, forme un angle droit avec ce plan;* car si la droite *BM* était perpendiculaire au plan *GE*, elle se confondrait avec la perpendiculaire *BA*, au plan *GE*; l'angle *MBA* serait nul, et le complément de cet angle serait de 90°; mais ce complément mesure l'angle formé par la droite *BM* avec le plan *GE*, (n° 284); cette perpendiculaire au plan *GE*, forme donc un angle droit avec ce plan.

287. (fig. 109). *Quand plusieurs droites, menées par un point donné, font des angles égaux avec un plan, elles rencontrent ce plan en des points situés sur la circonférence, qui a pour centre le pied de la perpendiculaire, abaissée du point donné sur le plan.* En effet; du point donné *A*, tirez des obliques, *AI*, *AM*, *AN*, etc., qui forment des angles égaux avec le plan *GE*, et qui rencontrent ce plan en, *I*, *M*, *N*, etc.; menez *AB* perpendiculaire au plan *GE*; par le pied *B* de cette perpendiculaire, et les points, *M*, *N*, *I*, etc., tirez les droites, *BM*, *BN*, *BI*, etc.; les angles, *AIB*, *AMB*, *ANB*, etc., que forment les obliques avec le plan *GE*, sont supposés égaux; les triangles rectangles, *ABI*, *ABM*, *ABN*, etc., sont donc égaux, (B. n°. 81); les droites, *BI*, *BM*, *BN*, etc., sont donc égales. Les points, *I*, *M*, *N*, etc., sont donc situés sur la circonférence décrite du point *B* comme centre, avec le rayon *BI*.

288. (fig. 109). *Lorsque plusieurs droites, menées par un même point d'une perpendiculaire à un plan, font des angles égaux avec cette perpendiculaire; elles rencontrent le plan en des points situés sur une circonférence, qui a pour centre le pied de la perpendiculaire.* En effet; si par le point *A*, de la perpendiculaire *AB* au plan *GE*, on tire des obliques,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

AI, *AM*, *AN*, etc., qui forment des angles égaux avec *AB*; en menant des droites du pied *B* de la perpendiculaire, aux points *I*, *M*, *N*, etc., où les obliques rencontrent le plan *GE*; les triangles rectangles, *ABI* *ABM*, *ABN*, etc., seront égaux, (B. n° 81); les côtés, *BI*, *BM*, *BN*, etc., seront donc égaux; les points, *I*, *M*, *N*, etc., appartiennent donc à la circonférence, dont le centre est le pied *B*, de la perpendiculaire *AB* au plan *GE*.

289. (fig. 270). *Lorsque plusieurs droites égales*, *OA*, *OB*, *OC*, *OD*, *etc.*, *font des angles égaux avec une droite OO'*, *les extrémités A*, *B*, *C*, *D*, *etc.*, *de ces droites égales*, *sont situées sur une circonférence*, *dont le plan MN est perpendiculaire à OO'. Le point de rencontre de OO' avec le plan MN est le centre P de la circonférence.* En effet; par le point *A*, menez un plan *MN* perpendiculaire à *OO'*; ce plan rencontrera *OO'* en un point *P*. Tirez les droites, *PA*, *PB*, *PC*, *PD*, etc. Les triangles, *OPA*, *OPB*, *OPC*, etc., seront égaux, comme ayant un angle aigu égal, compris entre côtés égaux, (B. n° 80). Les angles, *OPA*, *OPB*, etc., seront donc égaux; mais l'angle *OPA* est droit, (n° 282); les droites *PA*, *PB*, *PC*, *PD*, etc., sont donc perpendiculaires à *OP*; toutes ces droites sont donc dans le plan *MN*, (n° 252). Mais, les droites, *PA*, *PB*, *PC*, etc., sont égales. Le principe est donc démontré.

290. (fig. 109). *Si l'on fait passer une circonférence par trois points*, *I*, *M*, *N*, *du plan GE*; *et si par le centre B*, *de cette circonférence*, *on mène une perpendiculaire BA au plan GE*; *les droites*, *AI*, *AM*, *AN*, *menées d'un point quelconque A de AB*, *aux points I*, *M*, *N*, *seront égales*; *et tout point situé hors de AB*, *sera inégalement distant des points*, *I*, *M*, *N*. En effet; les obliques, *AI*, *AM*, *AN*, sont égales, car elles s'écartent également du *pied B*, de la perpendiculaire *AB*, (n° 255. 2°.); et si un point quelconque *P*, pris hors de *AB*, pouvait être également distant des points, *I*, *M*, *N*, en menant une droite *Pp*, perpendiculaire au plan *GE*, les obliques, *PI*, *PM*, *PN*, seraient égales; elles s'écarteraient donc également du pied *p* de la perpendiculaire *Pp*; le point *p* serait donc le centre de la circonférence qui passe par les points, *I*, *M*, *N*; ce qui est absurde, (n° 5).

291. (fig. 114). *Deux plans se rencontrent toujours*, *lorsqu'ils sont respectivement perpendiculaires à deux droites*, *qui ne sont pas parallèles*. En effet; les droites, *EF*, *GH*, n'étant pas parallèles; conduisez deux plans, *AD*, *BR*, respectivement perpendiculaires à ces droites; si ces plans ne se rencontraient pas, ils seraient parallèles; la droite *EF*, perpendiculaire au plan *AD*, serait aussi perpendiculaire au plan *BR*, parallèle au plan *AD*, (n° 271); mais *GH* est supposé perpendiculaire au plan *BR*; les droites *EF*, *GH*, perpendiculaires au plan *BR*, seraient donc parallèles, (n° 264); ce qui est contre l'hypothèse.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

292. (fig. 244). On propose de *mesurer l'angle formé par deux plans.* Pour concevoir la génération de l'angle formé par deux lignes droites, on peut imaginer que ces lignes étant d'abord couchées l'une sur l'autre, on laisse l'une fixe, en faisant mouvoir la seconde autour d'un point de la première; l'angle formé par ces lignes est la quantité dont la seconde ligne s'est écartée de la première. L'analogie conduit à imaginer une origine semblable à l'angle de deux plans. On suppose que ces deux plans étant d'abord couchés l'un sur l'autre, on laisse fixe l'un des deux, en faisant tourner l'autre autour d'une ligne prise dans le plan fixe; l'angle formé par ces plans est la quantité dont l'un des plans s'est écarté de l'autre. De sorte que l'angle formé par deux plans est ce dont l'un de ces plans devrait tourner autour de l'intersection, pour coïncider avec l'autre plan. Ainsi, lorsqu'un plan, d'abord couché sur le plan $AA'BB'$, s'en écarte de plus en plus, en tournant autour de la droite AA', et prenant les positions AS', AE', AC'; l'angle qu'il forme avec sa position primitive augmente de plus en plus. Par exemple, l'angle $B'AE'$, est plus grand que l'angle $B'AS'$ (*). Examinons comment on peut mesurer ces angles. Ce qui se présente de plus naturel, est de faire dépendre cette mesure de l'angle formé par deux lignes droites menées dans les plans. Or, pour que l'angle formé par deux lignes droites, puisse mesurer l'angle de deux plans, il faut que ces lignes se coupent, et que l'angle qu'elles forment varie dans le même rapport que l'angle des plans, (n°. 10); de sorte que le premier angle étant nul, ou droit, ou égal à deux angles droits, le second angle doit prendre en même temps les mêmes valeurs. Si l'on réfléchit sur ces diverses conditions, on reconnaîtra que la seule manière d'y satisfaire, est de mener dans chaque plan, une perpendiculaire à un même point de l'intersection commune des plans. Il s'agit de prouver que les angles, formés par ces perpendiculaires, sont indépendans de la position du point pris sur l'intersection, et qu'ils sont proportionnels aux angles formés par les plans. Dans les plans AB', AC', menez des perpendiculaires AB, $A'B'$, AC, $A'C'$, sur l'intersection AA' de ces deux plans; les lignes AB, $A'B'$, seront parallèles, (n° 24). Par la même raison, AC sera parallèle à $A'C'$. L'angle BAC sera donc égal à l'angle $B'A'C'$, (n° 274). Par conséquent, si d'un point de l'intersection de deux plans, on mène, dans ces plans, des perpendiculaires à l'intersection; l'angle formé par ces perpendiculaires, sera le même, quelle que soit la position du point pris sur l'intersection. Il ne reste donc plus qu'à démontrer que cet angle, constant pour les deux mêmes plans, varie dans le même rapport que l'angle des plans. Par deux points quelconques, A, A', de l'intersection commune, conduisez des plans, CAB, $C'A'B'$, perpendiculaires à cette intersection; des points A, A', comme centres, et d'un même rayon, décrivez des arcs, BC, $B'C'$, situés dans ces deux plans; par la droite AA',

(*) Pour indiquer l'angle formé par les deux plans $AA'BB'$, $AA'CC'$, nous dirons toujours l'angle $B'AC'$, ou simplement $B'AC'$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

menez des plans quelconques AB', AS', AE', AC'; les intersections de ces plans avec les plans ABC, $A'B'C'$, seront perpendiculaires sur AA', (n° 283); les droites, AB, $A'B'$, étant situées dans un même plan et perpendiculaires à une même ligne, seront parallèles, (n° 24); mais $AB = A'B'$; la figure $ABA'B'$ est donc un rectangle; AA' est donc parallèle à BB', BB' est donc perpendiculaire aux plans ABC, $A'B'C'$. On prouverait de même que les droites, SS', EE', CC', sont perpendiculaires à ces mêmes plans, et qu'elles sont égales à AA'. Cela posé, je dis que l'on aura toujours,

(1)... *l'ang.* $B'AC' : $ *l'ang.* $B'AE' ::$ *l'ang.* $BAC :$ *l'ang.* BAE.

En effet; 1° Si les angles BAC, BAE, sont commensurables, les arcs, BC, BE, seront dans le même rapport, (n° 9). Désignant par m, la commune mesure de ces arcs, on aura....

$$BEC = qm, BSE = q'm \text{; donc, } ang.\ BAC : BAE :: q : q'.$$

Menant un plan par chaque point de division de l'arc BC et la droite AA', l'angle $B'AC'$ sera divisé en q angles égaux et l'angle $B'AE'$ contiendra q' de ces angles. On aura donc, $B'AC' : B'AE' :: q : q'$. La proportion (1) est donc démontrée, lorsque les angles BAC, BAE, sont commensurables.

2°. Quand les angles, BAC, BAE, sont incommensurables, la proportion (1) subsiste encore; car si le dernier terme de cette proportion n'était pas l'angle BAE, on aurait...

(2)... $B'AC' : B'AE' :: BAC : BAp$, ou $B'AC' : B'AE' :: BAC : BAp'$.

Divisant l'arc BC en parties égales, plus petites que Ep, ou que Ep', il tomberait au moins un point de division, r ou S, sur Ep ou sur Ep'; menant des plans, $A'Arr'$, $A'ASS'$, les arcs BC, Br, ou BC et BS, seraient commensurables; on aurait donc, (1°),

$$B'AC' : B'Ar' :: BAC : BAr, \text{ ou } B'AC' : B'AS' :: BAC : BAS.$$

Ces proportions, combinées avec les précédentes, donneraient...

(3)... $B'AE' : B'Ar' :: BAp : BAr$, ou $B'AE' : B'AS' :: BAp' : BAS$.

Mais, l'angle $B'AE'$ est plus petit que $B'Ar'$, et plus grand que $B'AS'$; il faudrait donc, pour que les proportions (3) pussent exister, que l'angle BAp fût plus petit que l'angle BAr, ou que BAp' fût plus grand que BAS; ce qui est faux. Les proportions (2) ne peuvent donc pas subsister; la proportion (1) est donc vraie.

293. Ainsi, *pour mesurer l'angle de deux plans, on mènera, dans ces plans et par un même point de l'intersection, deux perpendiculaires à cette intersection; l'angle formé par ces perpendiculaires, mesurera l'angle des plans.*

294. (fig. 110). Lorsque l'angle formé par deux plans est droit, on dit

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

que ces plans sont *rectangulaires*, ou perpendiculaires l'un à l'autre. Et par conséquent, *lorsqu'un plan est perpendiculaire à un autre plan, le second plan est perpendiculaire au premier.*

295. 1°. *Lorsqu'un plan tombe sur un autre plan, la somme des deux angles adjacens, formés par le premier plan avec le second, vaut* 180°. *Et réciproquement; lorsque trois plans, terminés à une même droite, sont tels, que la somme des angles formés par l'un ae ces plans avec les deux autres, vaut* 180°, *on peut en conclure que des deux derniers plans, l'un est le prolongement de l'autre.* 2°. *Lorsque deux plans se coupent, les angles opposés au sommet sont égaux; et réciproquement, lorsque quatre plans, qui passent par une même droite, sont tels, que les angles opposés au sommet sont égaux, on peut en conclure que ces plans prolongés se confondent deux à deux; de sorte qu'il n'y a réellement que deux plans différens.* En effet; par la droite Pz, (fig. 245), conduisez des plans, PR, PQ, Py, PC, et par le point z, menez dans ces plans des perpendiculaires, zR, zy, zQ, zC, à l'intersection Pz; ces perpendiculaires seront dans un même plan perpendiculaire à Pz, (n° 252), et les angles formés par ces perpendiculaires, mesureront les angles formés par les plans, (n° 293); mais, (n° 11), ces droites jouissent des propriétés énoncées pour les plans; les plans en jouissent donc également. Ainsi,

1°. Lorsque le plan Py est le prolongement du plan PQ, la droite zy est le prolongement de Qz; la somme des angles RzQ, Rzy, vaut donc 180°, (n° 11. 1°); mais ces angles mesurent les inclinaisons des plans; la somme des angles RPQ, RPy, vaut donc 180°. *Réciproquement*, lorsque la somme des angles, RPQ, RPy, formés par le plan PR avec les plans PQ, Py, vaut 180°; le plan Py est le prolongement du plan PQ, car la somme des angles, RzQ, Rzy, valant 180°, la droite zy est le prolongement de Qz, (n° 11. 2°); les deux plans PQ, Py, passent donc par les deux mêmes droites Pz, Qy; ces plans se confondent donc, (n° 239).

2°. Lorsque le plan Py, étant le prolongement du plan PQ; le plan PC est le prolongement du plan PR; zy est le prolongement de Qz, et zC est le prolongement de Rz; les angles, RzQ, Czy, opposés au sommet, sont donc égaux, ainsi que les angles, Rzy, CzQ; les angles plans, RPQ, CPy, opposés au sommet, sont donc égaux, ainsi que les angles, RPy, CPQ. *Réciproquement*, lorsque quatre plans, PR, PQ, Py, PC, sont tels, que les angles opposés au sommet, RPQ, CPy, sont égaux, ainsi que les angles, RPy, CPQ; les angles, RzQ, Czy, sont égaux, ainsi que les angles Rzy, CzQ, car ces angles mesurent les inclinaisons des plans; zy est donc le prolongement de Qz et zC est le prolongement de Rz, (n° 15); les plans Py, PQ, prolongés, se confondent donc, car ils passent par les deux mêmes droites Pz, Qy. Par la même raison, les plans, PR, PC, prolongés, se confondent, car ils passent par les deux mêmes droites Pz, CR. Le plan

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Py est donc le prolongement du plan PQ ; et le plan PC est le prolongement du plan PR.

296. (fig. 245). *Deux plans parallèles, coupés par un troisième plan, jouissent des mêmes propriétés, dans les angles qu'ils forment avec ce troisième plan, que deux lignes droites parallèles, à l'égard d'une troisième droite qui les coupe.* En effet ; si l'on coupe deux plans parallèles, QY, NV, par un plan RF, les intersections, Pz, CD, seront parallèles, (n° 270). Par un point quelconque z de Pz, menez un plan RCN perpendiculaire à Pz; ce plan sera perpendiculaire sur la droite CD parallèle à Pz, (n° 263), et les intersections du plan RCN avec les plans, QY, NV, FR, seront des droites, Qy, Nb, aR; les deux premières droites seront parallèles; bN et aR seront perpendiculaires à CD; aR et Qy seront perpendiculaires sur Pz ; les angles formés par les droites Qy, Nb, aR, mesureront donc les angles formés par les plans, QY, NV, RF. Mais les propriétés des parallèles, Qy, Nb, coupées par la droite aR, donnent...

$$QzC + NCz = 180°.$$

$$l'angl.\ RzQ = RCN = azy = aCb\ ;\ l'angl.\ Rzy = RCb = azQ = aCN.$$

Ce qui démontre le principe énoncé.

297. *La réciproque est fausse ; car lorsque deux plans, coupés par un troisième, jouissent de l'une des propriétés énoncées dans le n° 296, il est possible que les deux premiers plans ne soient pas parallèles.* Par exemple, deux plans qui ne sont pas parallèles, peuvent évidemment former des angles égaux avec un troisième plan.

298. (fig. 245). *Lorsque deux plans, qui se coupent, sont respectivement parallèles à deux autres plans, l'intersection des deux premiers plans est parallèle à l'intersection des deux autres, et l'angle formé par les deux premiers plans est égal à l'angle formé par les deux autres.* En effet; concevez quatre plans, PQ, PR, TN, TS, parallèles deux à deux, et qui se coupent suivant des droites, Pz, TG; prolongez les plans PR, TN, jusqu'à leur intersection CD ; les intersections, CD, Pz, du plan DR, avec les plans parallèles, DN, PQ, seront parallèles, (n° 270) ; les intersections, CD, GT, du plan DN, avec les plans parallèles, DR, TS, seront aussi parallèles; les intersections, TG, Pz, seront donc parallèles, (n° 265). Menez un plan gMK, perpendiculaire à Pz; ce plan sera perpendiculaire sur TG, (n° 263) ; ses intersections, Ag, AH, Bv, BK, avec les quatre plans donnés, seront parallèles deux à deux, (n° 270), et perpendiculaires aux lignes, Pz, TG, (n° 283) ; les angles, gAH, vBK, seront donc égaux; mais ces angles mesurent les inclinaisons des plans donnés; l'angle des plans PQ, PR, est donc égal à l'angle formé par les plans, TN, TS. Ce qui démontre le principe énoncé.

299. (fig. 245). *Les angles, formés par un même plan avec plusieurs plans parallèles, sont égaux.* En effet ; menez deux plans parallèles, QY,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

NV; ces plans couperont le plan *FR*, suivant les lignes parallèles, *zP*, *CD*; conduisez un plan *gMK* perpendiculaire à *Pz*; ce plan coupera les plans, *NV*, *QY*, *FR*, suivant des droites, *MK*, *AH*, *Mg*; les deux premières droites seront parallèles, (n° 270), et les angles, *gAH*, *gMK*, mesureront les inclinaisons des deux premiers plans sur le troisième; mais ces angles sont égaux; le principe est donc démontré.

300. (fig. 245). *Les angles formés par une droite quelconque gM, avec des plans parallèles, DN, PQ, sont égaux.* Car en menant d'un point quelconque *g* de *Mg*, une perpendiculaire *gK*, aux plans, *DN*, *PQ*; conduisant un plan *gMK*, par les droites *gM*, *gK* et tirant des droites *AH*, *MK*, par les points de rencontre des droites *gM*, *gK*, avec ces plans; les intersections du plan *gMK*, avec les plans parallèles *PQ*, *DN*, seront parallèles, (n° 270); et les angles *gAH*, *gMK*, que la ligne *gM*, forme avec les plans parallèles *PQ*, *DN*, seront égaux, (n° 28). Ce qui démontre le principe énoncé.

301. (fig. 110). *Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan; tous les plans, conduits par cette droite, sont perpendiculaires au premier plan.* En effet; par la droite *ML*, perpendiculaire au plan *GE*, menez un plan quelconque *CK*; dans le plan *GE*, tirez *LN* perpendiculaire sur l'intersection *CD*, des plans *GE*, *CK*; la droite *ML*, perpendiculaire au plan *GE*, sera perpendiculaire à la ligne *LN*, située dans ce plan; l'angle *MLN* sera donc droit; mais cet angle mesure l'inclinaison des plans *CK*, *GE*, (n° 293); ces plans sont donc perpendiculaires l'un à l'autre.

302. *Par une droite, perpendiculaire à un plan, on peut mener une infinité de plans perpendiculaires au premier plan*, (n° 301).

303. (fig. 110). *Quand deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre; si par un point de l'un de ces plans, on mène dans ce plan une droite perpendiculaire à l'intersection commune; cette droite sera perpendiculaire à l'autre plan.* En effet; soit le plan *CK* perpendiculaire au plan *GE*; par un point quelconque *M*, du plan *CK*, menez dans ce plan une perpendiculaire *ML* à l'intersection *CD*, et par le point *L*, menez dans le plan *GE*, la droite *LN* perpendiculaire à *CD*; l'angle *MLN* mesurera l'inclinaison des plans, *GE*, *CK*, (n° 293); cet angle sera donc droit; mais l'angle *MLC* est droit; la ligne *ML* est donc perpendiculaire au plan *GE*, (n° 251).

304. (fig. 110). *Lorsque deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre, si d'un point quelconque de l'un de ces plans, on mène une perpendiculaire à l'autre plan; elle sera toute entière dans le premier plan.* En effet; concevez deux plans, *CK*, *GE*, perpendiculaires l'un à l'autre et qui se coupent suivant *CD*; d'un point quelconque *M* du premier plan, menez *ML* perpendiculaire sur *CD*; la droite *ML*, située dans le plan *CK*, sera perpendiculaire au plan *GE*, (n° 303); mais par le point *M*, on ne peut conduire qu'une seule perpendiculaire au plan *GE*, (n° 25 . °); la perpendiculaire menée du point *M*, sur le plan *GE*, est donc dans le plan *CK*.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

305. (fig. 110). *Toutes les perpendiculaires RC, ML, KD, menées des différens points d'une droite RK, sur un plan GE, sont dans un même plan CK, perpendiculaire au plan GE.* Car si l'on mène un plan *CK*, par les droites, *RK*, *RC*, ce plan sera perpendiculaire au plan *GE*, (n° 301), et les perpendiculaires abaissées des différens points, *R, M, K*, de ce plan, sur le plan *GE*, seront dans le plan *CK*, (n° 304).

306. *Lorsque deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre, toute perpendiculaire à l'intersection commune, menée dans l'un des plans, est perpendiculaire à l'autre plan*, (n° 303), *et toute perpendiculaire à l'un des plans, menée par un des points de l'intersection, est dans l'autre plan*, (n° 304).

307. (fig. 111). *L'intersection de deux plans perpendiculaires à un troisième, est perpendiculaire à ce troisième plan.* En effet; soient les plans *LN*, *CK*, perpendiculaires au plan *GE*; si par le point *B* d'intersection de ces trois plans, on menait une perpendiculaire au plan *GE*, elle devrait se trouver dans chacun des plans *LN* et *CK*, (n° 306); cette perpendiculaire est donc l'intersection *AB* de ces deux plans.

308. (fig. 111). RÉCIPROQUEMENT, *lorsque l'intersection de deux plans est perpendiculaire à un autre plan; les deux premiers plans sont perpendiculaires au troisième*, car l'intersection *AB*, des plans *CK*, *LN*, étant perpendiculaire au plan *GE*, les plans *CK*, *LN*, passent par une perpendiculaire *AB* au plan *GE*; ces deux premiers plans sont donc perpendiculaires au troisième, (n° 301).

309. (fig. 111). *Tout plan, perpendiculaire à deux autres plans, est perpendiculaire à l'intersection de ces deux derniers plans.* En effet; le plan *GE* étant perpendiculaire aux plans, *CK*, *LN*; ces deux derniers plans sont perpendiculaires au plan *GE*; leur intersection *AB* est donc perpendiculaire au plan *GE*, (n° 307); le plan *GE* est donc perpendiculaire à l'intersection *AB*, des plans, *CK*, *LN*.

310. *Déterminer la plus courte distance entre deux plans parallèles?* La plus courte distance d'un point à un plan, étant la perpendiculaire menée du point sur le plan, (n° 255. 3°); la plus courte distance demandée est nécessairement l'une des perpendiculaires menées d'un point de l'un des plans sur l'autre plan. Mais, toute perpendiculaire à l'un des plans, est perpendiculaire à l'autre plan, (n° 271); la plus courte distance demandée sera donc une perpendiculaire commune aux deux plans; or ces perpendiculaires sont parallèles, (n° 264), et égales, (n° 273); chacune d'elles mesure donc la plus courte distance demandée.

311. *Deux plans parallèles sont partout à égale distance; et la plus courte distance entre deux plans parallèles, est une ligne droite perpendiculaire à chacun de ces plans*, (n° 310).

313. *Lorsque plusieurs points, non en ligne droite, sont également dis-*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

tans d'un plan donné; tous ces points sont situés dans un plan parallèle au plan donné. En effet; les perpendiculaires menées de ces points sur le plan donné, étant parallèles et égales ; ces points sont dans un plan parallèle au plan donné, (n° 311).

314. (fig. 110.). *Quand une droite est parallèle à un plan, tous les plans conduits par cette ligne, coupent le premier plan, suivant des parallèles à la ligne donnée.* En effet; si par la droite *RK*, parallèle au plan *GE*, on mène un plan *RD*, qui coupe le plan *GE*, suivant *CD*; la ligne *RK*, parallèle au plan *GE*, ne pourra pas rencontrer la droite *CD*; mais les droites, *CD*, *RK*, sont dans un même plan *RD*; elles sont donc parallèles, (n° 23).

315. (fig. 110). *Lorsqu'une droite RK est parallèle à un plan GE, toutes les perpendiculaires, menées des différens points de la droite sur le plan, sont perpendiculaires à cette droite.* En effet; menez *RC* perpendiculaire au plan *GE*; conduisez un plan *RD*, par les droites, *RK*, *RC*; ce plan coupera le plan *GE*, suivant une droite *CD* parallèle à *RK*, (n° 314); mais l'angle *RCD* est droit; l'angle *CRK* est donc droit, (n° 30); *CR* est donc perpendiculaire à *RK*.

316. (fig. 108). *Toute parallèle AM, à un plan GE, forme un angle nul avec ce plan.* En effet; tirez une perpendiculaire *MD* au plan *GE*, l'angle *DMA* sera droit, (n° 315); le complément de cet angle sera donc nul; mais ce complément mesure l'angle formé par la droite *AM* avec le plan *GE*, (n° 293). Le principe est donc démontré.

317. (fig. 110). *Lorsqu'une droite RK est parallèle à un plan GE; toutes les perpendiculaires menées des différens points de cette droite sur le plan, sont égales.* En effet; tirez des perpendiculaires, *RC*, *ML*, *KD*, au plan *GE*; ces perpendiculaires seront parallèles, (n° 264), et situées dans un même plan *CDKR*, (n° 305); ce plan coupera le plan *GE* suivant une droite *CD*, parallèle à *RK*, (n° 314); les parallèles, *RC*, *ML*, *KD*, comprises entre les parallèles, *RK*, *CD*, seront égales, (n° 33); ce qui démontre le principe énoncé. Les parallèles, *RC*, *ML*, *KD*, sont perpendiculaires à la droite *RK*, (n° 315), et au plan *GE*.

318. *Une droite est parallèle à un plan; on demande la plus courte distance de la droite au plan?* Les perpendiculaires, menées des différens points de la droite sur le plan, étant plus courtes que les obliques menées de ces points sur le plan et ces perpendiculaires étant égales, (n° 317), chacune d'elles mesure la plus courte distance demandée. Cette plus courte distance est perpendiculaire au plan et à la ligne. *Tous les points d'une parallèle à un plan, sont donc également éloignés du plan.*

319. *Lorsque plusieurs points d'une droite, sont à égale distance d'un plan; cette droite est parallèle au plan;* car si cette droite n'était pas parallèle au plan, elle le rencontrerait; tous les points de la droite ne se-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

raient donc pas à égale distance du plan ; ce qui est contre l'hypothèse.

320. (fig. 114). *Lorsqu'une droite CD est parallèle à un plan MN; si par un point quelconque C, de CD, on mène un plan PQ, parallèle au plan MN; la droite CD sera toute entière dans le plan PQ.* En effet ; si *CD* n'était pas dans le plan *PQ*, en menant par cette droite un plan *AD*, ce plan couperait les plans parallèles, *MN*, *PQ*, suivant des parallèles, *AB*, *CI*. Mais, *CD* est parallèle à *AB*, (n° 314) ; on pourrait donc conduire par un même point deux parallèles, *CD*, *CI*, à *BA* ; ce qui est absurde, (n° 29) ; la droite *CD* est donc dans le plan *PQ*.

321. (fig. 114). *Toute parallèle AB, a une droite CD située dans un plan PQ, est parallèle à ce plan*, car les parallèles, *AB*, *CD*, étant dans un même plan *ABCD*, la droite *AB* ne pourrait rencontrer le plan *PQ*, que sur un des points de *CD* ; ce qui est impossible.

322. (fig. 114). *Lorsqu'une droite AB est parallèle à un plan PQ; si par un point C du plan, on mène une parallèle CD à AB ; cette parallèle sera toute entière dans le plan.* En effet ; si la droite *CD* n'était pas dans le plan *PQ*, le plan des parallèles, *AB*, *CD*, couperait le plan *PQ*, suivant une droite *CI*, parallèle à *BA*, (n° 314) ; on pourrait donc mener par le point *C* deux parallèles *CD*, *CI*, à *BA* ; ce qui est absurde, (n° 29).

323. (fig. 114). *Lorsque deux droites AB, CD, sont parallèles ; tout plan, conduit par l'une de ces droites, est parallèle à l'autre.* En effet ; si par la droite *CD*, on mène un plan *PQ*, la ligne *AB*, parallèle à la droite *CD*, située dans le plan *PQ*, sera parallèle à ce plan, (n° 321) ; le plan *PQ* sera donc parallèle à *AB*.

324. *Quand deux droites sont parallèles ; on peut conduire par l'une d'elles, une infinité de plans parallèles à l'autre*, car tous les plans, menés par l'une de ces droites, sont parallèles à l'autre droite, (n° 323).

325. *Lorsque deux droites sont parallèles à une troisième ; le plan de ces deux droites est parallèle à la troisième*, car cette troisième droite est parallèle à deux lignes situées dans ce plan, (n° 321).

326. (fig. 19). *Quand deux droites CD, MN, sont parallèles ; en conduisant par un point quelconque des parallèlles à ces droites ; les parallèles ainsi menées se confondent.* En effet ; tirez *EB* parallèle à *CD* et *QE* parallèle à *MN* ; les droites *EB*, *MN*, parallèles à *CD*, sont parallèles entr'elles, (n° 265) ; les droites *BE*, *QE*, se confondent donc, car elles passent par le même point *E*, et sont parallèles à la même droite *MN*, (n° 241).

327. (fig. 244). *Lorsque deux droites, qui se coupent, sont parallèles à un plan donné ; le plan conduit par ces droites, est parallèle au plan donné.* En effet ; les droites *A'B'*, *A'C'* étant parallèles au plan *BAC*, la perpendiculaire *A'A*, au plan *BAC*, sera perpendiculaire aux droites

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

$A'B'$, $A'C'$, (n° 315). Les plans, $B'A'C'$, BAC, sont donc perpendiculaires à la droite AA'; ces plans sont donc parallèles, (n° 268).

328. (fig. 113). *Quand deux plans se coupent; si par un point de l'un des plans; on mène une parallèle à l'intersection; cette parallèle sera dans ce plan, elle sera parallèle à l'autre plan. Et réciproquement, si par un point de l'un des plans, on mène dans ce plan une parallèle à l'autre plan, cette dernière ligne sera parallèle à l'intersection.* En effet; soient deux plans, GE, GF, qui se coupent suivant la droite GA; si par un point C du plan GF, on mène une parallèle FR, à GA; FR sera dans le plan GF, (n° 243), et FR sera parallèle au plan GE, (n° 321).

Réciproquement. Si par le point C du plan GF, on mène dans ce plan une parallèle RF au plan GE, cette ligne sera parallèle à GA, car les droites RF, GA, étant situées dans un même plan GF; si la première droite n'était pas parallèle à la seconde, elle la rencontrerait en un point du plan GE; la droite RF, parallèle au plan GE, rencontrerait donc ce plan; ce qui est absurde.

329. (fig. 245). *Par un point donné, on ne peut conduire qu'un seul plan, perpendiculaire à une droite donnée.* En effet; si par le point P on pouvait mener deux plans, PR, PQ, perpendiculaires à la droite AB; cette droite serait perpendiculaire aux plans, PR, PQ; conduisant un plan quelconque suivant AB, les intersections, Ag, AH, de ce plan avec les plans, PR, PQ, seraient perpendiculaires à BA; les angles gAB, HAB, seraient donc droits; ce qui est absurde, puisque ces angles étant dans un même plan, le second est plus petit que le premier.

330. (fig. 245). *Par un point donné, on ne peut conduire qu'un seul plan parallèle à un plan donné.* En effet; si par le point P, on pouvait mener deux plans, PR, PQ, parallèles au plan GE; en coupant ces trois plans par un plan quelconque $ABKg$, les intersections, Ag, AH, BK, de ce plan avec les trois autres, seraient parallèles, (n° 270); par le point A, on pourrait donc mener dans le plan $ABKg$, deux parallèles Ag, AH, à BK; ce qui est absurde, (n° 29).

331. (fig. 132). *Une droite, parallèle à l'intersection de deux plans, est parallèle à chacun de ces plans; et réciproquement, toute droite parallèle à deux plans, est parallèle à l'intersection de ces plans.* En effet; concevez une droite CF, parallèle à l'intersection AH, des plans HD, HB; la ligne CF, parallèle à la droite AH, située dans les plans HD, HB, est parallèle à chacun de ces plans, (n° 321).

Réciproquement; si la droite CF est parallèle aux plans, HB, HD, elle sera parallèle à l'intersection AH, de ces plans; car en conduisant par CF, un plan CE, parallèle au plan BH, les intersections de ces deux plans parallèles, par le plan DH, seront deux parallèles DE, AH, (n° 270); mais DE est parallèle à CF, (n° 314); les droites CF, AH, sont donc parallèles, (n° 265).

332. (fig. 133). *Lorsqu'une droite CF, n'est pas perpendiculaire à un plan*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

ABED; *on ne peut mener par cette droite, qu'un seul plan perpendiculaire au plan ABED.* Car si l'on pouvait conduire par la ligne *CF*, deux plans *CD*, *CE*, perpendiculaires au plan *ABED*; en menant d'un point quelconque *C*, de *CF*, des perpendiculaires, *CA*, *CB*, sur les intersections, *AD*, *BE*, du plan *AE*, avec les plans, *CD*, *CE*; les droites, *CA*, *CB*, seraient perpendiculaires au plan *AE*, (n° 303); on pourrait donc mener d'un point *C*, deux perpendiculaires au plan *AE*; ce qui est absurde, (n° 255. 1°).

333. (fig. 133). *Pour conduire par la droite CF, un plan CFDA, perpendiculaire au plan AE; il suffit de mener d'un point quelconque de CF, une perpendiculaire CA au plan AE,* (n° 260). *Le plan CFDA, mené par les droites, CF, CA, sera le plan demandé,* (n° 301). Si *CF* était perpendiculaire au plan *AE*, les droites, *CF*, *CA*, se confondraient et le plan *CFDA* de ces droites, pourrait prendre une infinité de positions; ce qui s'accorde avec le principe du n° 302.

334. (fig. 112). *Lorsque par deux droites parallèles, AN, HM, on mène des plans AP, HK, perpendiculaires à un plan GE; les intersections, BP, FK, de ces plans avec le plan GE, sont parallèles.* En effet; si par deux points *N*, *M*, des parallèles, *AN*, *HM*, on mène des droites, *NP*, *MK*, perpendiculaires au plan *GE*; ces droites seront parallèles, (n° 264), et situées dans les plans, *AP*, *HK*, (n° 304); les droites *MA*, *NP*, étant respectivement parallèles aux droites, *MH*, *MK*; les plans, *AP*, *HK*, de ces droites, sont parallèles, (n° 275); les intersections, *BP*, *FK*, de ces plans avec le plan *GE*, sont donc parallèles, (n° 270).

335. (fig. 110). *Tout plan, parallèle à une perpendiculaire à un plan, est perpendiculaire à ce dernier plan.* En effet; la droite *ON* étant perpendiculaire au plan *GE*, menez un plan *CK*, parallèle à *ON*; du pied *N* de la perpendiculaire *ON*, menez *NL* perpendiculaire sur l'intersection *CD* des plans, *GE*, *CK*; par les droites, *NO*, *NL*, conduisez un plan *NLMO*; ce plan coupera le plan *CK*, suivant une droite *LM*, parallèle à *ON*, (n° 314). Mais, *NO* est perpendiculaire au plan *GE*; *LM* est donc perpendiculaire à ce même plan, (n° 262); les droites, *LM*, *LN*, situées dans les plans, *CK*, *GE*, sont donc perpendiculaires au même point *L* de l'intersection de ces deux plans; elles mesurent donc l'angle de ces plans. Or, l'angle *MLN* est droit; le plan *CK* est donc perpendiculaire au plan *GE*.

336. (fig. 110). *Lorsque deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre, toute perpendiculaire à l'un des plans, est parallèle à l'autre plan;* car les plans, *CK*, *GE*, étant perpendiculaires l'un à l'autre, si la perpendiculaire *NQ*, au plan *GE*, n'était pas parallèle au plan *CK*, elle rencontrerait ce plan en un point *M*; menant de ce point une perpendiculaire *ML* sur l'intersection *CD*, des plans, *GE*, *CK*, la ligne *ML* serait perpendiculaire au plan *GE*, (n° 303); mais *MN* est perpendiculaire au même

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

plan ; on pourrait donc mener d'un même point M, deux perpendiculaires, ML, MN, sur le plan GE ; ce qui est absurde, (n° 255. 1°) ; NQ est donc parallèle au plan CK.

337. (fig. 114). *La droite AC étant perpendiculaire au plan PQ, et la droite GH n'étant pas parallèle à ce plan ; tout plan, perpendiculaire à GH, rencontrera nécessairement la droite AC.* En effet ; menez le plan BR, perpendiculaire à GH ; si ce plan ne rencontrait pas la droite AC, il serait parallèle à cette droite ; mais AC est perpendiculaire au plan PQ ; le plan BR serait donc perpendiculaire au plan PQ, (n° 335) ; la ligne GH, perpendiculaire au plan BR, serait donc parallèle au plan PQ, (n° 336) ; ce qui est contre l'hypothèse. Tous les plans perpendiculaires à GH, rencontrent donc la droite AC.

338. (fig. 111). *Si l'on mène deux plans respectivement perpendiculaires à deux droites qui se coupent, ces plans se couperont toujours et leur intersection sera perpendiculaire au plan des deux droites.* En effet ; conduisez un plan GE, par deux droites, PC, PN, qui se coupent ; menez deux plans, CA, NA, respectivement perpendiculaires à ces droites ; ces plans se couperont suivant une droite AB, (n° 291). Le plan GE est perpendiculaire aux plans, CA, NA, car il passe par deux droites, PC, PN, perpendiculaires à ces deux plans, (n° 301) ; le plan GE est donc perpendiculaire à l'intersection AB, des plans CA, NA ; l'intersection AB est donc perpendiculaire au plan GE.

339. (fig. 107). *Lorsque par le milieu d'une droite, on mène un plan perpendiculaire à cette droite ; 1° les distances de chaque point du plan aux extrémités de la droite, sont égales ; 2° les points de ce plan jouissent seuls de cette propriété ; 3° si les distances de trois points, non en ligne droite, aux extrémités d'une droite, sont égales deux à deux, le plan conduit par ces trois points sera perpendiculaire à la droite, et passera par le milieu de cette droite.* En effet ; 1° par le milieu B, de la droite AD, conduisez le plan GE, perpendiculaire sur AD ; d'un point quelconque R du plan GE, menez des droites, RA, RD, aux extrémités de AD, et tirez BR ; les angles, RBA, RBD, seront droits ; or $BA=BD$; les triangles, RBA, RBD, sont donc égaux, (B. n° 80) ; donc, $RA=DR$; 2° si par un point S, situé hors du plan GE, on mène la droite SA ; cette droite rencontrera le plan GE, en un point R ; tirant les droites, DR, DS, on aura,

$$AR=DR ;\ SD<RS+DR,\ \text{ou},\ SD<RS+AR,\ \text{ou}\ SD<SA.$$

Les points situés hors du plan GE, sont donc inégalement distans des extrémités A et D de la droite AD.

3°. Prenez trois points, R, T, K, non en ligne droite, et tels que vous ayez, $RA=RD$, $TA=TD$, $KA=KD$. Le plan GE, déterminé par ces trois points, sera perpendiculaire à DA et passera par le milieu B de

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

AD; car il n'y a que les points du plan perpendiculaire sur le milieu de AD, qui puissent être également distans des extrémités A et D, de AD, (20).

340. (fig. 245). *Lorsqu'un plan divise l'angle de deux autres plans en deux parties égales, les perpendiculaires, menées d'un point quelconque du premier plan, sur les deux autres plans, sont égales, et les points de ce plan jouissent seuls de cette propriété.* En effet; 1°. concevez un plan PR, qui divise l'angle des plans PQ, PX, en deux parties égales; par un point A, de l'intersection Pz de ces trois plans, menez un plan LAH, perpendiculaire à Pz; ce plan sera perpendiculaire aux plans, PQ, PR, PX, (n° 308), et il les coupera suivant des droites, AH, Ag, AL, perpendiculaires à Pz; les angles formés par ces droites, mesureront donc les inclinaisons des plans, PQ, PR, PX; les angles, gAH, gAL, seront donc égaux. D'un point quelconque g, de l'intersection des plans PR, LAH, menez dans ce dernier plan des perpendiculaires, gH, gI, sur les intersections, AH, AL; ces droites seront perpendiculaires aux plans, PQ, PX, (n° 303). Les triangles rectangles, AgI, AgH, seront égaux, (n° 50). Donc, $gI = gH$.

2°. Si d'un point quelconque p, situé hors du plan PR, on mène des perpendiculaires, pq, pH, sur les plans, PX, PQ; ces perpendiculaires seront inégales. En effet; du point g, où la droite pH rencontre le plan PR, menez gI perpendiculaire au plan PX; joignez le pied I de cette perpendiculaire, avec le point p; gI sera égal à gH, et la perpendiculaire pq au plan PX, sera plus courte que l'oblique pI. Or, le triangle pgI, donne...

$$pI < pg + gI \text{; donc, } pI < pg + gH, \text{ ou } pI < pH.$$

Mais, pq est plus petit que pI; pq est donc plus petit que pH.

341. (fig. 111). *Lorsque deux droites, menées par le même point, sont respectivement perpendiculaires à deux plans; l'angle de ces droites est le supplément de l'angle formé par les plans.* En effet; par un point quelconque P, menez des perpendiculaires, PC, PN, aux plans AC, AN; le plan GE, conduit par ces deux lignes, étant perpendiculaire aux plans, AC, AN, (n° 301), sera perpendiculaire à l'intersection AB de ces deux derniers plans, (n° 309); les droites, BC, BN, seront donc perpendiculaires sur AB; l'angle CBN mesurera donc l'inclinaison des plans, AC, AN. Mais, dans le quadrilatère $BCPN$, les angles N et C étant droits, la somme des angles B et P vaut 180°. L'angle CPN, formé par les perpendiculaires PC, PN, aux plans AC, AN, est donc le supplément de l'angle CBN, formé par ces plans. Et par conséquent, *lorsque l'angle formé par deux plans est très-aigu ou très-obtus, l'angle formé par les perpendiculaires à ces plans, est très-obtus ou très-aigu, et l'angle formé par ces perpendiculaires, approche d'autant plus de 90°, que l'angle des plans approche d'être droit.*

342. (fig. 109). *Lorsque par un point donné, on mène une perpendicu-*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

laire à une droite horizontale (*), *cette perpendiculaire est située dans le plan conduit par le point donné, perpendiculairement à la ligne donnée, et ce plan est vertical.* En effet; d'un point quelconque A, menez une droite AI, perpendiculaire à l'horizontale CD; tirez la verticale AS, et conduisez, suivant CD, un plan GE perpendiculaire à la verticale AS; ce plan horizontal, coupera AS en un point B. Prenez $IC=ID$, et tirez les droites, AC, AD, BC, BD. Les triangles rectangles, AIC, AID, seront égaux, (B. n° 80); donc $AC=AD$; les triangles rectangles, ABC, ABD, sont donc égaux, (n° 50); donc $BC=BD$; les triangles, BIC, BID, sont donc égaux, (B. n° 83); les angles, BIC, BID, sont donc droits. Les lignes, IA, IB, étant perpendiculaires à CD, le plan AIB, des deux premières droites, est perpendiculaire à l'horizontale CD; mais ce plan, qui passe par la verticale AS, est vertical; le principe est donc démontré.

343. (fig. 115). *Si, d'un point I, pris hors du plan GE, on tire des droites à différens points, K, L, M, A, B, C, D, F, du plan GE; et si l'on mène un plan, eg, parallèle à GE, qui rencontre ces droites en, k, l, m, a, b, c, d, f; les droites, IK, IL, IM, IA, IB, IC, ID, IF, seront coupées en parties proportionnelles; les triangles, KLM, klm, seront semblables, ainsi que les polygones, $ABCDF$, $abcdf$; les surfaces de ces triangles et de ces polygones, seront proportionnelles aux quarrés des perpendiculaires, IP, Ip, menées du point I, sur les plans GE, eg. De sorte qu'on aura, ...*

(1)... $IK : Ik :: IL : Il :: IM : Im :: IA : Ia :: IB : Ib :: IC : Ic$, etc.

(1)..... $IP^2 : Ip^2 :: KLM : klm :: ABCDF : abcdf$.

En effet; les intersections, LM, lm, du plan ILM, avec les plans parallèles, GE, ge, sont parallèles; on prouvera de même que les droites, MK, KL, MA, AB, BC, etc., sont respectivement parallèles aux lignes mk, kl, ma, ab, bc, etc.; ce qui donne, (B. n° 109),

$$\frac{MK}{mk}=\frac{IK}{Ik}=\frac{KL}{kl}=\frac{IL}{il}=\frac{LM}{lm}=\frac{IM}{Im}=\frac{IP}{Ip}=\frac{IA}{Ia}=\frac{AB}{ab}=\frac{IB}{Ib}=\frac{BC}{bc}\text{; etc}$$

On en déduit, $LM : lm :: IP : Ip$; $AB : ab :: IP : Ip$.

(1)... $IK : Ik :: IL : Il :: IM : Im :: IP : Ip :: IA : Ia :: IB : Ib$, etc.
(3)... $KL : kl :: LM : lm :: MK : mk$.

(*) Toutes les droites, dirigées vers le centre de la terre, sont dites *verticales*. Les plans menés par ces droites sont verticaux. Tout plan perpendiculaire à une verticale, est *horizontal;* et toutes les droites, situées dans un plan horizontal, sont horizontales. Il en résulte que tous les plans perpendiculaires au plan horizontal, sont verticaux.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Les proportions (1) démontrent que les droites, IK, IL, IM, IA, etc., sont coupées proportionnellement par les plans parallèles GE, ge. Les proportions (3) démontrent que les triangles KLM, klm, sont semblables, (B. n° 114). On prouverait de même que les triangles, ABC, ACD, ADF, sont respectivement semblables aux triangles, abc, acd, adf; les polygones $ABCDF$, $abcdf$, sont donc semblables, (B. n° 133). Mais, les surfaces semblables sont comme les quarrés de leurs côtés homologues, (B. n° 161); donc

$$KLM : klm :: LM^2 : lm^2 :: IP^2 : Ip^2 \text{ et}$$
$$ABCDF : abcdf :: AB^2 : ab^2 :: IP^2 : Ip^2. \text{ On en déduit,}$$
$$(2)\ldots\ldots IP^2 : Ip^2 :: KLM : klm :: ABCDF : abcdf.$$

344. (fig. 243). *Deux droites, situées d'une manière quelconque dans l'espace, sont coupées en parties proportionnelles, par trois plans parallèles.* En effet; concevez trois plans parallèles, L, M, N, qui coupent deux droites, AB, CD, aux points, A, p, B, C, r, D; menez la droite pr par les points p et r, conduisez des droites, pq, rq, respectivement parallèles aux lignes, AC, BD; les deux premières droites se couperont en un point q qui sera l'intersection de CB avec le plan M (*), et l'on aura, (B. n° 102),

$$Bp : pA :: Bq : qC;\ Dr : rC :: Bq : qC;\ \text{donc, } Bp : pA :: Dr : rC.$$

345. (fig. 134). *L'angle formé par plusieurs plans, qui se réunissent en un même point, est ce qu'on nomme un* ANGLE SOLIDE. Ainsi, les plans, DBE, EBF, DBF, forment l'angle solide B; les *arêtes* de cet *angle solide* sont les intersections, BD, BE, BF, de ces trois plans. Les angles DBE, EBF, DBF, sont les *angles plans* qui forment l'angle solide B. Examinons les propriétés des angles solides.

346. (fig. 134). *Lorsque trois angles plans forment un angle solide, chaque angle plan est plus petit que la somme des deux autres.* Il suffit de prouver que le plus grand des trois angles plans, est plus petit que la somme des deux autres. Concevez un angle solide B, formé par trois angles plans, dBe, eBf, dBf, et supposez que dBf soit le plus grand de ces trois angles. Dans le plan dBf, menez la droite Bh, sous un angle $dBh = dBe$; prenez $BH = BE$; par un point quelconque F de Bf, et les points H, E, tirez les droites, FD, FE; et menez la droite DE. Les triangles, DBE, DBH, seront égaux, (B. n° 80); les côtés, DE, DH, seront donc égaux. Or, on a...

$$DF < DE + EF, \text{ ou } DH + HF < DH + EF, \text{ ou } HF < EF.$$

(*) En effet; les intersections, AC, pq, des plans parallèles, L, M, par le plan ACB, sont parallèles, (n°. 270), et les intersections, BD, qr, des plans parallèles, N, M, par le plan CBD, sont aussi parallèles; la droite CD rencontre donc le plan M, au point q d'intersection des droites, pq, rq.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Les côtés, BF, BH, du triangle HBF, étant respectivement égaux aux côtés, BE, BF, du triangle EBF, et HF étant plus petit que EF, l'angle HBF est plus petit que l'angle EBF, (n° 21). Mais, les angles, HBD, EBD, sont égaux. On a donc...

$$(HBF+HBD)<(EBF+EBD)\text{; ou } DBF<(EBF+EBD).$$

Ce qui démontre le principe énoncé.

347. (fig. 124). *La somme des angles plans, qui forment un angle solide, est toujours moindre que quatre angles droits.* En effet ; si d'un point quelconque M, pris dans le plan du polygone $CBEFD$, on mène des droites, MC, MB, ME, MF, MD, aux sommets des angles de ce polygone, on aura, (n° 346),

$$DCB<(DCA+ACB\text{; ou } (MCB+MCD)<(ACB+ACD).$$
$$(MBC+MBE)<(ABC+ABE)\text{; } (MEB+MEF)<AEB+AEF)\text{;}$$
$$(MFE+MFD)<(AFE+AFD)\text{; } (MDF+MDC)<ADF+ADC).$$

Ajoutant ces cinq dernières inégalités membre à membre, on trouvera...

$$MCB+MBC+MBE+MEB+\text{etc.}<ACB+ABC+ABE+\text{etc. Donc,}$$
$$(1).(ACB+ABC+ABE+AEB+\text{etc.})=(MCB+MBC+MBE+\text{etc.}+p.$$

Regardant chaque côté du polygone, comme la base commune des deux triangles dont les sommets sont en M et en A, remarquant que dans le plan $BCDFE$, la somme des angles formés autour du point M, vaut 360°, (B. n° 18), désignant par a la somme des angles qui se réunissent au point A, et remarquant que les triangles, ADC, ACB, etc., dont les sommets sont en A, sont en même nombre que les triangles, MDC, MCB, etc., dont les sommets sont en M, on voit que la somme des angles des premiers triangles, est égale à la somme des angles des seconds ; on a donc...

$$(2)\ldots(360°+MCB+MBC+\text{etc.})=a+(ACB+ABC+\text{etc.}).$$

Mettant pour $ACB+ABC+$ etc., sa valeur tirée de l'égalité (1) ; il vient, $360°+MCB+MBC+$ etc. $=a+(MCB+MBC+$ etc. $)+p$. D'où, $360°=a+p$; donc $a<360°$. La somme de tous les angles plans qui forment l'angle solide A, est donc moindre que quatre angles droits.

348. (fig. 246). *Lorsque les trois angles plans qui forment un angle solide, sont respectivement égaux aux trois angles plans qui forment un autre angle solide, les angles plans égaux sont également inclinés l'un sur l'autre.* En effet ; concevez deux angles solides S, S', formés par trois angles plans égaux chacun à chacun, de manière que vous ayez...

$$DSE=D'S'E'\text{; } DSF=D'S'F'\text{; } ESF=E'S'F'.$$

Pour démontrer que l'angle formé par les plans, DSE, DSF, est égal à

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

l'angle formé par les plans, $D'S'E'$, $D'S'F'$; il suffit de mesurer ces angles, d'après la règle du n° 293. Ainsi, par un point quelconque A, de l'intersection SD, des plans DSE, DSF, on mènera dans ces plans des perpendiculaires AB, AC, à l'intersection SD ; l'angle BAC mesurera l'inclinaison des plans ASB, ASC, (n° 293). Prenant $S'A' = SA$; et menant dans les plans $D'S'E'$, $D'S'F'$, des perpendiculaires $A'B'$, $A'C'$, sur l'intersection $S'D'$ de ces deux plans ; l'angle $B'A'C'$ mesurera l'inclinaison des plans, $A'S'B'$, $A'S'C'$, (n° 293). Il suffit donc de démontrer que les angles, BAC, $B'A'C'$, sont égaux. Cela n'offre aucune difficulté, car les angles ASB, $A'S'B'$, étant égaux par hypothèse, et les angles, BAS, $B'A'S'$, étant droits par construction, les triangles, BAS, $B'A'S'$, ont un côté égal $AS = A'S'$, et les angles adjacens égaux ; ces triangles sont donc égaux, (B. n° 81). On prouverait de la même manière que les triangles rectangles, CAS, $C'A'S'$, sont égaux. Donc, $AB = A'B'$; $AC = A'C'$; $SB = S'B'$; $SC = S'C'$.

Les triangles, BSC, $B'S'C'$, ont donc un angle égal, $BSC = B'S'C'$, compris entre côtés égaux ; ces triangles sont donc égaux, (B. n° 80) ; donc, $BC = B'C'$; les triangles, BAC, $B'A'C'$, sont donc égaux, (B. n° 83) ; les angles, BAC, $B'A'C'$, sont donc égaux ; l'angle formé par les plans, ASB, ASC, est donc égal à l'angle formé par les plans, $A'S'B'$, $A'S'C'$. On prouverait de la même manière, que les angles formés par les autres plans sont égaux chacun à chacun.

349. (fig. 246). REMARQUE. *Lorsque les droites, SE, $S'E'$, sont placées du même côté par rapport aux plans, DSF, $D'S'F'$; les angles solides S, S', sont égaux. Lorsque ces droites tombent de différens côtés des mêmes plans, les angles solides, S, S', ne peuvent plus coïncider ; on dit alors que ces angles sont* SYMÉTRIQUES, *parce que toutes leurs parties constituantes sont les mêmes, mais disposées seulement dans l'ordre inverse.* En effet ; les angles, DSE, DSF, étant respectivement égaux aux angles, $D'S'E'$, $D'S'F'$, et les plans de ces angles étant également inclinés ; lorsque les droites, SE, $S'E'$, tomberont du même côté des plans, DSF, $D'S'F'$; en plaçant les angles égaux, DSF, $D'S'F'$, l'un sur l'autre, de manière que leurs côtés coïncident, les plans, DSE, $D'S'E'$, coïncideront ; SE tombera sur $S'E'$; de sorte que les plans des angles solides, S, S', coïncideront ; ces angles solides seront donc égaux. Si la droite SE étant placée en avant du plan DSF, la droite $S'E'$ était placée derrière le plan $D'S'F'$, en $S'E''$ par exemple ; lorsque l'angle $D'S'F'$ coïnciderait avec l'angle DSF, les plans $D'S'E''$, $F'S'E''$, tomberaient derrière le plan DSF, et l'intersection $S'E''$ de ces plans, tomberait en Se, derrière le plan DSF, tandis que la droite SE serait en avant de ce plan ; les faces des angles solides S, S', ne pourraient donc pas coïncider ; ces angles solides seraient *symétriques*. Prenant, $Sb = S'B' = SB$, et tirant les droites, bS, bA, bC ; toutes les faces de la pyramide triangulaire $SAbC$, seraient respectivement égales aux faces de la pyramide $SABC$, les inclinaisons de ces faces seraient les mêmes, mais les pyramides ne pourraient pas coïncider. Ces pyramides seraient symétriques ;

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

et l'on peut démontrer que les solidités de ces pyramides sont égales (*). Si l'on appliquait la face *ASC* sur une *glace*, la pyramide *BASC*, se peindrait de l'autre côté de la glace en *bASC*. Cette propriété est générale, lorsqu'on présente un corps devant une glace, on aperçoit dans la glace le corps symétrique ; les parties constituantes de ces deux corps sont les mêmes, elles sont seulement disposées dans un ordre inverse. Ainsi, par exemple, la main droite étant symétrique par rapport à la main gauche, lorsqu'on présente la main droite devant une glace, on aperçoit la main gauche dans la glace.

350. (fig. 247). *Trouver la plus courte distance, entre deux droites AB, CD, situées d'une manière quelconque, dans l'espace.* Par un point *E*, pris arbitrairement sur *CD*, tirez *FG* parallèle à *BA* ; suivant *CD* et *FG*, conduisez le plan *MN* ; par un point quelconque *H*, de *AB*, menez *HK* perpendiculaire au plan *MN* ; par le pied *K* de cette perpendiculaire, menez *KS* parallèle à *FG* ; prenez *HP*=*KS* ; la droite *PS* sera la plus courte distance demandée. En effet ; les droites, *KS*, *AB*, étant parallèles à *FG*, sont parallèles entre elles, (n° 265) ; et la ligne *HK*, perpendiculaire à *KS*, sera perpendiculaire sur *AB* ; mais *HP* est égal et parallèle à *KS* ; *PHKS* est donc un rectangle ; *PS* est donc perpendiculaire à la droite *AB* et au plan *MN* ; la ligne *PS*, perpendiculaire au plan *MN*, est aussi perpendiculaire à la droite *CD*, qui passe par son pied dans ce plan ; la droite *PS* est donc à la fois perpendiculaire aux deux lignes *AB*, *CD*. Joignez deux points quelconques, *H*, *D*, de ces lignes ; la perpendiculaire *HK*, au plan *MN*, sera plus courte que l'oblique *HD* ; mais *HK*=*PS* est donc plus courte qu'une droite *HD* menée par deux points quelconques des lignes proposées ; *PS* est donc la plus courte distance demandée. De sorte que *la plus courte distance entre deux droites, est perpendiculaire à ces deux droites.* On verra, par la suite, que les lignes et les surfaces courbes, jouissent de la même propriété.

351. (fig. 117). *Dans un parallélépipède quelconque, les faces opposées sont égales et les plans de ces faces sont parallèles*, car les faces d'un parallélépipède étant des parallélogrammes, les droites, *BA*, *BH*, sont respectivement égales et parallèles aux lignes, *DC*, *DF* ; le plan *ABHG* des deux premières lignes est donc parallèle au plan *CDFE* des deux autres, (n° 275) ; les angles, *ABH*, *CDF*, étant égaux, (n° 274), et les côtés *BA*, *BH*, étant respectivement égaux aux côtés, *DC*, *DF*, les triangles *ABH*, *CDF*, sont égaux, (B. n° 80) ; les parallélogrammes, *ABHG*, *CDFE*, sont donc égaux, (B. n° 140). Ce qui démontre le principe énoncé.

352. (fig. 117). *Dans un parallélépipède quelconque, toutes les diagonales se coupent au centre du parallélépipède ; et les droites menées*

(*) Voyez la Géométrie de M. *Legendre*.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

par les centres des faces parallèles opposées, passent par le centre du parallélépipède. En effet ; soit le parallélépipède DG; tirez deux diagonales, AF, DG ; elles se couperont nécessairement en un certain point O, car elles sont situées dans le plan des parallèles, AG, DF; ces parallèles étant égales, les triangles, OGA, ODF, sont égaux, (B. n° 81); OG est donc égal à OD; le point O est donc le milieu de DG; toutes les diagonales passent donc par le milieu O, de la diagonale DG. Le point O est le centre, car en menant par ce point une droite PQ, qui rencontre les faces, BG, DE, en P et Q; les intersections AP, QF, du plan $PQAF$, avec les plans parallèles, BG, DE, (n° 351), seront parallèles; mais $AO=OF$; les triangles, OAP, OFQ, sont donc égaux, (B. n° 81); la droite PQ est donc divisée en deux parties égales au point O; ce point est donc le centre du parallélépipède, (n° 6). Par les centres, L, M, des faces opposées, AE, BF, menez la droite LM; les droites LsM, GD, situées dans le plan $CBHG$, se couperont en un point s; mais $GL=HM=DM$; et DM est parallèle à GL, (n° 270); les triangles, sGL, sDM, sont donc égaux; sG est donc égal à sD; le point s se confond donc avec le milieu O de DG; la droite LM, passe donc par le centre O du parallélépipède.

353. (fig. 117). *Connaissant les côtés d'un parallélépipède rectangle; déterminer la grandeur de la diagonale, ainsi que les angles qu'elle forme avec ces côtés.* Désignez, les côtés connus, FH, FD, FE, par a, b, c; la diagonale AF par d, et les angles, AFH, AFD, AFE, par $\alpha, \mathcal{C}, \gamma$. Les angles, BHF, ABF, étant droits, on aura, (n° 59),

$$BF^2 = a^2 + b^2,\ AF^2 = d^2 = (BF^2 + BA^2) = (a^2 + b^2 + c^2).$$

Les angles, FHA, FDA, FEA, étant droits, les *sinus* de ces angles sont égaux au rayon, et les angles, FAH, FAD, FAE, sont les complémens des angles, $\alpha, \mathcal{C}, \gamma$. Supposant donc le rayon égal à l'unité, les triangles, FHA, FAD, FEA, donneront, (B. n° 299)....

$$FA : FH :: sin.\,AHF : sin.\,FAH;\ \text{ou}\ d : a :: 1 : cos.\,\alpha,$$
$$FA : FD :: sin.\,ADF : sin.\,FAD;\ \text{ou}\ d : b :: 1 : cos.\,\mathcal{C},$$
$$FA : FE :: sin.\,AEF : sin.\,FAE;\ \text{ou}\ d : c :: 1 : cos.\,\gamma;\ \text{Done}$$

$$(1)\ldots d^2 = (a^2 + b^2 + c^2);\ (2)\ldots cos.\,\alpha = \frac{a}{d};\ (3)\ldots cos.\,\mathcal{C} = \frac{b}{d};\ (4)\ldots cos.\,\gamma = \frac{c}{d}.$$

Ces équations donneront les valeurs des inconnnues, $d, \alpha, \mathcal{C}, \gamma$. On en déduit

$$(5)\ldots cos.^2\alpha + cos.^2\mathcal{C} + cos.^2\gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{d^2} = 1.$$

$$(6)\ldots\ \frac{b}{a} = \frac{cos.\,\mathcal{C}}{cos.\,\alpha};\ \frac{a}{c} = \frac{cos.\,\alpha}{cos.\,\gamma};\ \frac{b}{c} = \frac{cos.\,\mathcal{C}}{cos.\,\gamma}.$$

Les angles, γ', $\mathcal{C}'$, α', formés par la diagonale FA, avec les faces, $FHBD$,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

$FHGE$, $FDCE$, étant les complémens des angles, γ, ε, α, formés par cette diagonale avec les perpendiculaires, FE, FD, FH, à ces faces, (n° 285); on a.....

(7).. $sin.\alpha' = cos.\alpha = \frac{a}{d}$; $sin.\varepsilon' = cos\,\varepsilon = \frac{b}{d}$; $sin.\gamma' = cos.\gamma = \frac{c}{d}$.

Le volume du parallélépipède AF, est abc, et sa surface, est $2(ab+ac+bc)$. Enfin, si l'on tire les diagonales, FB, FG, FC et si l'on désigne les angles BFH, GFE, CFE, par α'', ε'' et γ'', les angles BHF, GEF, CEF, seront droits. On aura donc,

(8... tang. $\alpha'' = \frac{b}{a} = \frac{\cos.\varepsilon}{\cos.\alpha}$; tang. $\varepsilon'' = \frac{a}{c} = \frac{\cos.\alpha}{\cos.\gamma}$; tang. $\gamma'' = \frac{b}{c} = \frac{\cos.\varepsilon}{\cos.\gamma}$.

354. (fig. 271). *Dans une pyramide triangulaire $ABCD$, les trois droites, qui joignent les milieux des arêtes opposées, se coupent en un même point et sont divisées en ce point en deux parties égales.* Pour démontrer cette propriété, tirez des droites, FA, FD, du milieu F de BC, aux points A et D; prenez $FR = \frac{1}{3} FD$, $FE = \frac{1}{3} FA$ et menez les droites, AR, DE, ER; ER sera parallèle à AD, (n° 53), et les triangles gER, gDA, seront semblables. Donc,

$$\frac{FR}{FD} = \frac{ER}{AD} = \frac{gE}{gD}\text{; Or, } FD = 3FR\text{, donc } gD = 3gE.$$

Par les points F, g, tirez la droite FK, et par les points K, E, menez des parallèles, Km, En, aux lignes AR, FK. Dans les triangles, AFK DEn, DAR, FKm, les droites, En, gK, Km, gR, étant parallèles aux bases, FK, En, AR, Km; vous aurez, (n° 51),

$$\frac{AF}{EF} = \frac{AK}{nK},\ \frac{gD}{gE} = \frac{DK}{nK},\ \frac{DA}{AK} = \frac{DR}{Rm},\ \frac{FR}{Rm} = \frac{Fg}{gK}.$$

Or, $AF = 3EF$, $gD = 3gE$; donc, $AK = 3nK$, $DK = 3nK$. Donc $AK = DK$; donc $DA = 2AK$; donc $DR = 2Rm$. Mais, par construction, $DR = 2FR$, donc $FR = Rm$. Donc $Fg = gk$. Les points K et g, sont donc les milieux des droites AD, FK. La droite FK, menée par les milieux, F, K, des arêtes opposées, BC, AD, passe donc par le point g, de DE (*). On prouverait de la même manière, que la droite menée par les milieux de

---

(*) Pour construire le point g, de DE, il suffit de tirer une droite AF, par le point A et le milieu F de BC. On prend $FE = \frac{1}{3} FA$, on mène la droite DE et l'on porte sur DE, une partie $Eg = \frac{1}{4} DE$, car on a trouvé, $Dg = 3gE$.

Remarque. On démontre, dans la *Statique*, que le point g, ainsi déterminé, est le *centre de gravité* de la pyramide $DABC$. *Le centre de gravité d'une pyramide triangulaire est donc sur le milieu de la droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées quelconques.*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

deux arêtes opposées quelconques, passe par le même point g. Le principe est donc démontré.

355. (fig. 248). *Par quatre points qui ne sont pas dans un même plan, on peut toujours faire passer la surface d'une sphère; mais on n'en peut faire passer qu'une seule.* En effet; supposez que, A, B, C, D, soient les quatre points donnés; joignez ces points par des droites; le plan, mené par trois de ces points, ne passera pas par le quatrième, car on suppose que les quatre points ne sont pas dans un même plan. Cela posé; la surface de la sphère devant passer par les quatre points donnés, le centre de la sphère doit être également éloigné de ces quatre points; mais tous les points également distans des extrémités, B, C, de la droite BC, sont dans le plan ME, conduit perpendiculairement à BC, par le milieu M de BC, (n° 339); le centre de la sphère demandée, est donc situé dans le plan ME. Si par le milieu N de CD, on mène un plan NE, perpendiculaire à CD, le centre devra se trouver dans ce plan. Le centre sera donc situé sur l'intersection PE, des plans ME, NE. Or, le centre doit aussi se trouver dans le plan GH, perpendiculaire sur le milieu Q de AB; l'intersection I, de ce plan avec la droite PE, sera donc le centre de la sphère demandée. Et en effet; les plans, ME, NE, GH, étant respectivement perpendiculaires sur les milieux des droites, BC, CD, AB, le point I, qui appartient à ces trois plans, est également distant, de B et C, de C et D, de B et A, (n° 339); les droites IA, IB, IC, ID, sont donc égales. La sphère, décrite du point I comme centre, avec le rayon IA, passera donc par les quatre points donnés, A, B, C, D. *Le centre I existe toujours*, car les droites, CB, CD, se coupant, les plans, ME, NE, perpendiculaires à ces droites, se rencontrent toujours suivant une droite PE, perpendiculaire au plan BCD, (n° 338); et la droite AB n'étant jamais parallèle au plan BCD, le plan GH, perpendiculaire sur AB, rencontre toujours PE en un point I (n° 237); ce point est le centre de la sphère demandée. *Il n'existe qu'un seul centre I*, car tout point qui ne serait pas situé dans les trois plans, ME, NE, GH, ne serait pas à égale distance des quatre points donnés, (n° 339). Le point I étant également distant des points, A, B, C, D; en joignant ces points par six droites, et conduisant par les milieux de ces droites des plans perpendiculaires à ces droites, le point I devra se trouver dans ces plans, (n° 339). Ces plans se couperont donc en un seul point, qui sera le centre de la sphère demandée.

356. *Une sphère est donc entièrement déterminée, lorsque sa surface est assujétie à passer par quatre points donnés, qui ne sont pas dans un même plan. L'intersection de deux sphères est donc une courbe plane* (*), car si quatre points de cette intersection n'étaient pas dans un

(*) Une *courbe* est *plane*, lorsque tous ses points sont dans un même plan. Une *courbe* est dite à *double courbure*, quand tous ses points ne sont pas dans un même plan.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

même plan, les deux sphères, passant par ces quatre points, se confondraient; ce qui est contre l'hypothèse.

357. D'après les propriétés des nos 1, 41 et 355; *deux points déterminent une ligne droite; trois points qui ne sont pas en ligne droite, déterminent une circonférence, et quatre points, qui ne sont pas dans un même plan, déterminent la surface d'une sphère.* En général, *deux conditions quelconques déterminent une droite, trois conditions déterminent une circonférence et quatre conditions déterminent une sphère.*

358. *Une pyramide triangulaire étant donnée; on peut toujours trouver une sphère, qui touche les quatre faces de cette pyramide. Il n'existe qu'un seule sphère qui jouisse de cette propriété.* En effet; la *sphère inscrite* (*), devant être tangente aux quatre faces de la pyramide; les quatre perpendiculaires, menées du centre de cette sphère sur les faces de la pyramide, doivent être égales. Le centre de la sphère doit donc se trouver dans les plans qui divisent en deux parties égales les angles formés par les faces de la pyramide, (n° 340). L'intersection de ces plans sera donc le centre de la sphère inscrite. Ainsi, pour inscrire une sphère dans la pyramide triangulaire $ABCD$, (fig. 248); on conduira par les arêtes BC, BD, CD, des plans IBC, IBD, ICD, qui divisent en deux parties égales, les angles formés par les faces qui se coupent suivant ces arêtes. L'intersection I, de ces trois plans, sera le centre de la sphère inscrite. On démontrerait, par des raisonnemens analogues à ceux du n° 355, que le centre I existe toujours, et qu'il n'existe qu'une seule sphère inscrite.

359. (fig. 128). 1° *Toutes les sections d'une sphère, par des plans, sont des cercles.* 2° *Les plans également éloignés du centre de la sphère, coupent la sphère suivant des cercles égaux et réciproquement, les plans des cercles égaux sont à égale distance du centre de la sphère.* 3° *Les plans les plus près du centre, donnent les cercles les plus grands et réciproquement, les plans des cercles les plus grands, sont les plus près du centre.* En effet; menez un plan quelconque $BGEH$; ce plan coupera la surface de la sphère CA, suivant une courbe $BGEH$; par le centre C de la sphère, tirez une perpendiculaire CF au plan $BGEH$; du pied F de cette perpendiculaire, menez des droites, FB, FG, FE, FH, etc., aux points B, G, E, H, etc., de la courbe $BGEH$; tirez les rayons, CB, CG, CE, CH, etc. Le centre C étant à égale distance de tous les points de la surface de la sphère, les obliques, CB, CG, CE, etc., sont égales; elles s'écartent donc également du pied F de la perpendiculaire CF, (n° 255); les droites FB, FG, FE, etc., sont donc égales; la courbe $BGEH$, est donc une circonférence, dont le centre est en F. La section de la sphère, par le plan BGE, est donc un cercle, dont le rayon est BF.

Pour démontrer les deux autres propriétés énoncées, coupez la sphère CA

(*) La *sphère*, qui touche les quatre faces d'une pyramide triangulaire, est dite *inscrite* dans cette pyramide.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

par deux plans quelconques, $BGEH$, $QRST$; les sections seront des cercles $BGEH$, $QRST$; tirez du centre C, des perpendiculaires CF, CP, sur ces plans; les *pieds* F et P de ces perpendiculaires, seront les centres des cercles FB, PQ; menez les droites, CB, BF, CQ, PQ. Les triangles rectangles, CFB, CPQ, donneront....

$CF^2 + FB^2) = CB^2$; $(CP^2 + PQ^2) = CQ^2$. Mais, $CB = CQ$; donc...
$CF^2 + FB^2 = CP^2 + PQ^2$; d'où, $CF^2 - CP^2 = PQ^2 - FB^2$.

Dans cette dernière équation,

$CP = CF$, donne $PQ = FB$; $PQ = FB$ donne $CP = CF$.
$CP < CF$, donne $PQ > FB$ et $PQ > FB$, donne $CP < CF$.

Ce qui démontre les principes énoncés (2° et 3°). Dans l'équation, $PQ^2 = CQ^2 - CP^2$, le rayon CQ étant constant; *on voit que, tous les plans conduits par le centre de la sphère, donnent des cercles égaux; que ces cercles sont plus grands que ceux qui résultent de la section de la sphère par des plans qui ne passent pas par le centre et que les rayons de ces grands cercles sont égaux à ceux de la sphère.*

360. (fig. 270). *L'intersection de deux surfaces sphériques, est une circonférence dont le plan est perpendiculaire à la droite qui joint les centres des deux sphères. Cette droite passe par le centre de la circonférence.* En effet; si, A,B,C,D, etc., sont des points de la ligne d'intersection de deux sphères dont les centres sont en O et O'; les triangles, OAO', OBO', OCO', etc., seront égaux, comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun. Les droites égales, OA, OB, OC, etc., formeront donc des angles égaux avec la droite OO'; les points A, B, C, D, etc., seront donc sur une circonférence dont le plan MN sera perpendiculaire à OO' et OO' passera par le centre P de la circonférence (n° 288). Ce qui démontre le principe énoncé.

361. (fig. 131.) Lorsqu'une surface plane $AMPO$, tourne autour d'une droite fixe AD; elle engendre un solide $AMPRNS$; ce solide est ce qu'on nomme un *solide de révolution;* la surface de ce solide est une *surface de révolution;* et la droite fixe AD, est l'*axe de révolution. La surface de révolution* étant engendrée par la ligne AMP; cette ligne se nomme la *génératrice* de la surface; et la surface plane $AMPO$, est la génératrice du *solide de révolution. Lorsqu'une ligne tourne autour d'un axe fixe, chaque point de cette ligne décrit une circonférence, qui a pour rayon la perpendiculaire menée du point sur l'axe; cette circonférence est située dans un plan perpendiculaire à l'axe et la rencontre de ce plan avec l'axe, est le centre de la circonférence.* En effet; concevez qu'une ligne AMP, tourne autour de l'axe fixe AD; par un point quelconque M de cette ligne, menez un plan $MKLt$, perpendiculaire à l'axe AD; ce plan coupera l'axe en un point I; tirez MI; l'angle AIM sera droit. Si dans la

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

révolution de l'arc AMP autour de AD, le point M pouvait venir en un point m situé hors du plan $MKLt$; la droite mI, ne serait pas dans ce plan; le plan conduit par les droites AI, mI, couperait le plan $MKLt$, suivant une droite In, différente de Im; et In serait perpendiculaire sur AI. Or, dans la rotation, l'angle AIM reste droit; l'angle AIm serait donc droit; mais l'angle AIn est aussi droit; les angles AIn, AIm, seraient donc droits; ce qui est impossible, puisqu'ils sont dans un même plan. Le point M ne peut donc pas sortir du plan $MKLt$. Mais, la distance du point M au point I, reste invariable; le point M décrit donc une courbe plane $MKLt$, dont tous les points sont à égale distance du point I; cette courbe est donc une circonférence dont le centre est en I; ce qui démontre le principe énoncé.

362. *Toute section d'une surface de révolution par un plan perpendiculaire à l'axe, est donc une circonférence; le centre de cette circonférence est le point de rencontre de l'axe avec le plan de la section.*

363. (fig. 249). *On propose d'évaluer le volume du solide $ABCDA'B'C'D'$. Ce solide est terminé par un plan horizontal $ABCD$, par quatre plans verticaux parallèles deux à deux, $ADA'D'$, $BCB'C'$ $ABA'B'$, $CDC'D'$, et par une portion de* SURFACE GAUCHE *$A'B'C'D'$* (*). Désignez, le volume demandé par x, la surface connue du parallélogramme $ABCD$ par s, et les longueurs des arêtes, BB', AA', CC', DD', par a, a', b, b'. Prolongez ces arêtes de manière que vous ayez...

$$A'A''=BB'=a;\ B'B''=AA'=a';\ D'D''=CC'=b;\ C'C''=DD'=b'.$$

Les points, A'', B'', C'', D'', seront dans un même plan, (n° 279). Représentez le volume $ABCDA''B''C''D''$, par V; je dis que le volume cherché en sera la moitié. Cela se réduit à prouver que toute section $RMPQ$ du solide V, par un plan parallèle au plan $ABA''B''$, est divisée en deux parties égales par la surface gauche. Il s'agit donc de démontrer que les trapèzes, $RMKK'$, $PQKK'$, sont équivalens. Pour y parvenir, menez les droites $B'C$, $A''D''$; les propriétés des parallèles, donnent

$$\frac{EM}{BB'}=\frac{CE}{CB'}=\frac{C'K}{C'B'};\ \text{d'où}\ EM=a\times\frac{C'K}{C'B'},$$

(*) La *surface gauche* est engendrée par une droite indéfinie SS', qui se meut parallèlement au plan fixe $ABA'B'$, en s'appuyant sur deux droites quelconques $A'D'$, $B'C'$, situées dans les deux plans parallèles $ADA'D'$, $BCB'C'$. Il en résulte que toute section de la surface gauche par un plan $RMKK'$ parallèle au plan $ABA'B'$, est une droite KK'. Si les droites $A'D'$, $B'C'$, étaient parallèles, la surface engendrée deviendrait un plan; la *surface gauche* a reçu, par cette raison, le nom de *plan gauche*.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

$$\frac{EK}{b} = \frac{EK}{CC'} = \frac{B'K}{B'C'}\text{ ; d'où } EK = b \times \frac{B'K}{C'B'}\text{ ;}$$

$$(1)\ldots MK = (EM + EK) = \left(a \times \frac{C'K}{C'B'} + b \times \frac{B'K}{C'B'}\right);$$

$$\frac{E'P}{D'D''} = \frac{A''E'}{A''D'} = \frac{A'K'}{A'D'}.$$

Les trois plans parallèles $ABB''A''$, $RMQP$, $DCC''D''$, coupant les droites $A'D'$, $B'C'$, en parties proportionnelles (n° 344), on a,

$$\frac{A'K'}{A'D'} = \frac{B'K}{B'C'}\text{ ; d'où, } \frac{E'P}{D'D''} = \frac{B'K}{B'C'} \text{ et } E'P = b \times \frac{B'K}{B'C'},$$

$$\frac{E'K'}{A''A'} = \frac{D'K'}{D'A'} = \frac{C'K}{C'B'}\text{ ; d'où } E'K' = a \times \frac{C'K}{C'B'}. \text{ On en déduit}$$

$$(2)\ldots PK' = (E'K' + E'P) = \left(a \times \frac{C'K}{C'B'} + b \times \frac{B'K}{C'B'}\right)$$

Les équations (1) et (2) démontrent que les droites, MK, PK' sont égales. On prouverait de même que $RK' = QK$. Les trapèzes, $RMKK'$, $PQKK'$, sont donc égaux en surface, car ils ont même hauteur, et leurs côtés parallèles, MK, PK', RK', QK, sont égaux deux à deux. Le solide demandé est donc la moitié du solide V. Cela posé; le solide V peut être considéré comme formé de deux prismes triangulaires tronqués, ayant pour bases ADC et ABC; mais, (B. n° 252),

$$ADCA''D''C'' = \frac{1}{3}\, ADC \times (AA'' + DD'' + CC'') \text{ et}$$

$$ABCA''B''C'' = \frac{1}{3}\, ABC \times (AA'' + BB'' + CC'').$$

Ajoutant ces équations, membre à membre, observant que les triangles ADC, ABC, sont égaux à $\frac{1}{2}\, s$, que $V = 2x$, et que....

$$AA'' = BB'' = a + a',\ CC'' = DD'' = b + b'\text{; il vient....}$$

$$2x = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\, s \times (AA'' + DD'' + CC'' + AA'' + BB'' + CC'')$$

$$= \frac{1}{6}\, s\,(3AA'' + 3\,CC'') = \frac{1}{2}\, s\,(AA'' + CC'') = \frac{1}{2}\, s\,(a + a' + b + b').$$

Donc enfin, $(3)\ldots x = s \times \left(\frac{a + a' + b + b'}{4}\right)$

364. Cette formule démontre que *le volume $ABCDA'B'C'D'$, terminé par la surface gauche $A'B'C'D'$ et par des plans, a pour valeur, la base*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

ABCD, multipliée par le quart de la somme des hauteurs, AA, BB', CC', DD'.

Élémens de Géométrie descriptive.

365. Dans la Géométrie, on représente les solides, qui ont trois dimensions, sur un plan qui n'en a que deux; on altère donc les dimensions réelles des corps. Cela n'influe pas sur l'exactitude des démonstrations, parce qu'on rétablit les véritables dimensions par la pensée. Mais, comme il est souvent utile de tracer les vraies dimensions des corps, on a cherché à les décrire sur des plans. Avec un peu de réflexion, on prévoit que l'on pourra toujours y parvenir à l'aide de deux plans; car, par exemple, un parallélépipède rectangle sera entièrement déterminé, si l'on trace deux de ses faces contiguës sur deux plans rectangulaires. *Le principal but de la Géométrie descriptive, est de donner le moyen de figurer exactement les corps sur des plans.* Les savans et les artistes ont inventé des procédés plus ou moins ingénieux pour résoudre ce problème et à force de recherches on est parvenu à donner aux constructions, le degré de simplicité que nous allons faire connaître.

366. La forme exacte d'un corps étant déterminée, lorsque l'on connaît les positions des points qui composent sa surface; on est d'abord conduit à chercher comment on peut *fixer la position d'un point.* Or, l'espace n'ayant pas de limites, *on ne peut déterminer la position d'un point que par rapport à des objets connus.* De sorte que ce qui paraîtrait le plus naturel, serait de rapporter la position d'un point à des points connus.

367. Lorsqu'on donne la distance d'un point inconnu à un point connu, on exprime que le premier point est situé sur la surface d'une sphère décrite du second point comme centre, avec un rayon égal à la distance donnée; le point inconnu est donc déjà distinct d'une infinité d'autres; mais sa position est encore indéterminée. Donnant la distance de ce point à un second point connu, le point cherché devra se trouver sur une nouvelle sphère; il sera donc sur la ligne d'intersection de ces deux sphères. Enfin, si l'on connaît la distance du point à un troisième point connu, on saura que le point cherché est sur une troisième sphère. Ce point ne pourra donc être que l'un des deux points d'intersection de cette dernière sphère, avec la ligne d'intersection des deux autres sphères. Indiquant donc de quel côté le point cherché est placé par rapport au plan qui passe par les centres des trois sphères, le point sera entièrement déterminé. Il faudra donc quatre conditions pour déterminer la position d'un point de l'espace.

368. Cette manière de déterminer la position d'un point de l'espace, étant très-compliquée; on a cherché à la simplifier, en rapportant le point inconnu à d'autres objets connus, tels que la ligne droite et le plan. Si l'on donnait les distances d'un point à des droites connues; on serait conduit à chercher des intersections de cylindres; ce qui est encore plus compliqué. On est donc

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

enfin conduit à *rapporter la position d'un point, à des plans connus.* Lorsqu'on donne la distance d'un point à un plan, on sait que ce point ne peut être situé que dans l'un des deux plans menés parallèlement au plan donné, à la distance donnée (n° 311). Indiquant donc de quel côté le point cherché est situé, par rapport au plan donné ; le point sera dans un plan connu. Donnant la distance du point à un second plan connu, et indiquant de quel côté de ce plan le point est situé ; ce point sera sur la droite d'intersection des deux plans menés, parallèlement aux plans donnés, aux distances données. Enfin, si l'on donne la distance du point à un troisième plan connu et si l'on indique de quel côté de ce plan le point est situé ; en menant à la distance donnée un plan parallèle au plan donné, le point devra se trouver dans ce nouveau plan. La rencontre de ce plan, avec l'intersection des deux autres, sera donc le point demandé (n° 246). *La position d'un point est donc entièrement déterminée, lorsque connaissant les distances de ce point à trois plans donnés, on sait de quel côté des plans donnés, ces distances sont situées.*

369. Cette manière de déterminer la position d'un point de l'espace, ayant tout le degré de simplicité possible, par rapport aux calculs ; *dans l'application de l'Algèbre à la Géométrie, on détermine ainsi la position d'un point quelconque, en donnant les valeurs numériques de ses distances à trois plans connus. Les signes + et — qui affectent ces distances, indiquent de quel côté ce point est situé par rapport aux plans connus.* Mais, dans la Géométrie descriptive, où il ne s'agit que de constructions, on peut encore simplifier ce système, à l'aide des *projections*. Voyons comment on y est parvenu :

370. (fig. 108). *La* PROJECTION *d'un point sur un plan, est le pied de la perpendiculaire menée du point sur le plan.* Ainsi, pour trouver la *projection* du point A, sur le plan GE; on mènera, par le point A, une perpendiculaire AB au plan GE; le pied B de cette perpendiculaire, sera la *projection* du point A, sur le plan GE. Le point B est la projection commune de tous les points de la droite AB, sur le plan GE, (n° 256). *Un point ne peut avoir qu'une seule projection sur un plan*, car, par ce point, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire au plan (n° 255. 1°). *Lorsque par la projection d'un point sur un plan, on mène une perpendiculaire à ce plan ; le point est nécessairement sur cette perpendiculaire.*

371. (fig. 108). *Pour déterminer la projection d'une ligne sur un plan, il suffit de projeter les différens points de cette ligne.* Ainsi ; pour trouver la projection de la courbe SRX, sur le plan GE, on mènera par les différens points, S, R, X, etc., de cette ligne, des perpendiculaires, SS', RR', XX', etc., au plan GE; la ligne $S'R'X'$ etc., qui passera par les pieds de ces perpendiculaires, sera la projection demandée. Toutes ces perpendiculaires sont situées sur une surface cylindrique $SRXS'R'X'$, dont les arêtes sont perpendiculaires au plan GE. Ce cylindre sera le *cylindre projetant* de la courbe

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

SRX; et une courbe quelconque *mnp*, tracée sur la surface de ce cylindre, aura pour projection, la base *S'R'X'* du cylindre projetant.

372. Si la ligne *SRX* était droite; les perpendiculaires, *SS'*, *RR'*, *XX'* etc., seraient dans un même plan perpendiculaire au plan *GE* (n° 305); les pieds *S'*, *R'*, *X'*, etc., de ces perpendiculaires, seraient donc en ligne droite; la projection d'une ligne droite est donc une droite; or deux points déterminent une ligne droite. Par conséquent; pour projeter la droite *AM*, sur le plan *GE*, il suffit de mener par deux points *A*, *M*, de cette droite, des perpendiculaires, *AB*, *MD*, au plan *GE*; la droite *BD*, menée par les pieds de ces perpendiculaires, sera la projection demandée. Ainsi, *la projection d'une droite est la droite qui passe par les projections de deux points de la ligne donnée.*

373. (fig. 108). *La projection d'une portion déterminée de ligne droite, est la droite comprise entre les projections des extrémités de la ligne donnée.* Ainsi, pour projeter la droite définie *AM*, sur le plan *GE*; on mènera par ses extrémités, *A*, *M*, des perpendiculaires, *AB*, *MD*, au plan *GE*; la droite *BD*, comprise entre les pieds de ces perpendiculaires, sera la projection demandée. *BD* est la projection de *AM*, sur la droite *BK*.

374. (fig. 108). *Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, la projection de cette droite sur le plan, est le pied de cette perpendiculaire,* car les perpendiculaires menées des différens points de la droite sur le plan, se confondent avec cette droite (n° 256).

375. (fig. 108). Quand une droite *AM* n'est pas perpendiculaire à un plan *GE*; la projection de cette droite sur ce plan est une droite *BD*. Cette projection est l'intersection du plan *GE*, avec le plan *ABDM*, conduit par la droite *AM*, perpendiculairement au plan *GE*; car les perpendiculaires au plan *GE*, menées des différens points de *AM*, sont dans le plan *ABDM*, (n° 305). Par conséquent; *pour projeter une droite qui n'est pas perpendiculaire à un plan, il suffit de mener par cette droite un plan perpendiculaire au plan sur lequel on veut faire la projection. L'intersection de ces deux plans est la projection demandée.* Cette construction est en défaut, quand la droite que l'on veut projeter est perpendiculaire au plan sur lequel on veut la projeter, car alors la projection se réduit à un point (n° 374). Le plan qui sert à faire la projection, se nomme le *plan projetant*; et le plan sur lequel on fait la projection, est le *plan de projection.*

376. *Une droite ne peut avoir qu'une seule projection sur un plan donné*, car si la droite n'est pas perpendiculaire au plan, on ne pourra mener par cette droite qu'un seul plan perpendiculaire au plan donné (n° 332); et si cette droite est perpendiculaire au plan donné, sa projection sera un point (n° 374). En général, *une ligne, droite ou courbe, ne peut avoir qu'une seule projection sur un plan*, car chaque point de cette ligne n'a qu'une seule projection (n° 370).

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

377. *La projection d'une droite sur un plan étant donnée ; si par cette projection on mène un plan perpendiculaire au plan de projection ; la droite sera située dans ce plan perpendiculaire ;* car ce dernier plan est le plan projetant (n° 375). Et en général, *la projection d'une courbe étant donnée; si par les différens points de la projection, on mène des perpendiculaires au plan de projection, toutes ces perpendiculaires passeront par les points de la courbe ; la réunion de ces perpendiculaires formera le* CYLINDRE PROJETANT, *et la courbe, dont on connaît la projection, sera située sur ce cylindre.*

378. (fig. 110). *Lorsque deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre, l'intersection est la projection commune, sur l'un de ces plans, de tous les points situés dans l'autre plan* (n° 304). Ainsi, les plans GE, CK, étant perpendiculaires l'un à l'autre; l'intersection CD de ces deux plans, est la projection sur le plan GE, d'une courbe quelconque tQs, située dans le plan CK. *La projection d'une courbe, peut donc être une ligne droite.*

379. (fig. 110). *Lorsque deux plans se coupent ; si l'on projete un point sur ces deux plans ; les perpendiculaires, menées des deux projections du point, sur l'intersection des deux plans, doivent passer par un même point de cette intersection.* En effet; concevons deux plans CK, GE, qui se coupent, suivant CD; si d'un point O, situé hors de ces plans, on mène des perpendiculaires, OM, ON, à ces plans; le plan $OMLN$, conduit par ces droites, sera perpendiculaire aux plans donnés (n° 301); ce plan sera donc perpendiculaire à l'intersection CD des plans donnés (n° 309); la droite CD sera donc perpendiculaire au plan OL; cette droite sera donc perpendiculaire aux droites LM, LN, menées par son pied dans le plan $OMLN$. Mais, les points M et N sont les projections du point O, sur les plans, CK, GE; les perpendiculaires menées des points M et N, sur l'intersection CD, passent donc par un même point L, de cette intersection. Ce qui démontre le principe énoncé.

380. *Un point est entièrement déterminé, lorsque l'on connaît ses projections sur deux plans qui se coupent*, car, en menant par chaque projection, une perpendiculaire au plan de projection; le point devra se trouver sur ces deux perpendiculaires (n° 370). L'intersection de ces perpendiculaires donnera donc le point dont on connaît les projections. Par exemple; les points M et N (fig. 110), étant les projections d'un même point, sur les plans CK, GE, qui se coupent suivant CD; les perpendiculaires, menées de ces projections sur l'intersection CD, devront passer par un même point L, de cette intersection (n° 379); le plan LO, des droites LN, LM, sera perpendiculaire aux plans de projection, GE, CK, (n° 308); et par conséquent, si par les projections M et N, on mène des perpendiculaires MO, NO, aux plans CK, GE, ces perpendiculaires seront dans le plan LO (n° 304); elles se couperont donc toujours en un point O; ce point sera celui dont les projections étaient données.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

381. *Lorsque deux points, de deux plans qui se coupent, sont tels que les perpendiculaires, menées par ces points sur l'intersection des plans, passent par un même point de l'intersection, on peut regarder ces points comme les projections d'un même point de l'espace sur les plans donnés*, car en menant par ces points des perpendiculaires aux plans, elles se couperont toujours en un point de l'espace et ce point aura pour projections les pieds des perpendiculaires (n° 380).

382. *Pour connaître si deux points, de deux plans qui se coupent, sont les projections d'un point unique; il suffit de mener par ces deux points des perpendiculaires à l'intersection des plans donnés. Quand ces perpendiculaires passent par un même point de l'intersection, les deux points donnés sont les projections d'un point unique* (n° 381); *et quand ces perpendiculaires ne passent pas par un même point de l'intersection, les points donnés ne sont pas les projections d'un même point*, car s'ils étaient les projections d'un point unique, les perpendiculaires, menées de ces points sur l'intersection des plans donnés, passeraient par un même point de l'intersection (n° 379).

383. (fig. 250). *Une ligne droite est entièrement déterminée, quand on connaît ses projections sur deux plans qui se coupent*, car en menant par chaque projection, un plan perpendiculaire au plan de projection, la droite devra se trouver dans chacun des plans, ainsi menés (n° 377); la droite sera donc l'intersection de ces deux plans (n° 245). Par exemple, si $d'D'$ et $d''D''$, sont les deux projections d'une même droite dD, sur deux plans, VV', HH', qui se coupent suivant TR; en menant par ces projections des plans, $d'D'Dd$, $d''D''Dd$, respectivement perpendiculaires aux plans VV', HH', les plans, $d'D'Dd$, $d''D''Dd$, contiendront la droite dD; cette droite sera donc l'intersection Dd, de ces deux derniers plans.

384. (fig. 112). *Les projections de deux droites parallèles, sont parallèles.* En effet; pour *projeter* les droites parallèles, NA, MH, sur le plan GE, il suffit de conduire par ces droites des plans, NB, MF, perpendiculaires au plan GE (n° 375); les intersections de ces plans avec le plan GE, seront des droites parallèles, PB, KF, (n° 334). Mais, ces intersections sont les projections des lignes, NA, MH, (n° 375). Le principe est donc démontré. Ainsi, *pour construire les projections de deux droites parallèles, il suffit de connaître deux points de l'une des projections et un point de l'autre.*

385. Ces diverses propriétés sont indépendantes de l'angle formé par les plans de projection; de sorte que sous le rapport de la théorie, cet angle est arbitraire. Il n'en est pas de même dans la pratique, car lorsque l'angle formé par les plans de projection est très-obtus, les perpendiculaires à ces plans, formant un angle très-aigu (n° 341), il est difficile de construire exactement les points déterminés par les rencontres de ces lignes; or, l'intersection de deux droites se détermine avec d'autant plus d'exactitude, que l'angle formé par ces

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

droites approche davantage d'être droit (*). *La position la plus avantageuse à donner aux plans de projection, est donc de les supposer perpendiculaires l'un à l'autre*, car alors, les droites qui leur sont respectivement perpendiculaires, se coupant à angle droit, les causes d'erreurs sont les plus petites possibles. Nous supposerons donc, dans toutes nos constructions, que les plans de projection sont perpendiculaires l'un à l'autre ; l'intersection de ces plans sera la *ligne de terre*. L'un des plans de projection sera toujours regardé comme *horizontal* et l'autre comme *vertical*. Ces plans pourront cependant avoir des positions quelconques, mais on a adopté ces expressions pour abréger le discours. Les intersections d'un plan quelconque avec les plans de projection, seront les *traces* de ce plan sur les plans de projection et comme deux droites situées dans un plan, déterminent ce plan (n^os 239 et 240), nous désignerons un plan par ses deux *traces*. Lorsque nous dirons qu'un point sera donné, nous entendrons que les projections de ce point seront données. Il en sera de même d'une ligne droite. Lorsqu'un plan sera donné, ses traces seront censées connues. Quand nous proposerons de déterminer un point, ou une droite, ou un plan, il s'agira de construire les projections du point, ou celles de la droite, ou les traces du plan. Les projections et les traces prendront le nom du plan de projection dans lequel elles se trouveront. Ainsi, les projections et les traces situées dans le plan horizontal, seront les projections et les traces horizontales. Par exemple, (fig. 250), HH' étant le plan horizontal de projection, et VV' le plan vertical; l'angle formé par ces plans sera droit; l'intersection TR de ces plans sera la *ligne de terre*. Si d'un point quelconque d, on mène des perpendiculaires, dd', dd'', sur ces plans; les pieds, d', d'', de ces perpendiculaires, seront les projections du point d; d'' sera la projection horizontale du point d et d' en sera la projection verticale. Les perpendiculaires menées des points, d', d'', sur la ligne de terre, passeront par un même point p de cette ligne (n° 379); de sorte que les quatre points, d, d', d'', p, seront dans un même plan perpendiculaire à TR. Si par les extrémités, d, D, d'une droite dD, on conduit des perpendiculaires, dd'', DD'', sur le plan horizontal HH'; la droite $d''D''$, qui joint les pieds de ces perpendiculaires, sera la projection horizontale de la ligne dD et si l'on mène par les points, d, D, des perpendiculaires, dd', DD', au plan vertical VV', qui rencontrent ce plan en d' et D'; la droite $d'D'$ sera la projection verticale de la ligne dD. Si des points a, b, c, etc., d'une courbe, on mène des perpendiculaires, aa', bb', cc', sur le plan vertical VV', les pieds a', b', c', de ces perpendiculaires, seront les projections verticales des points,

(*) Le calcul donne rigoureusement, l'intersection de deux droites qui se coupent sous un angle quelconque. Mais, dans les constructions, les lignes que l'on trace sur le papier ayant une certaine épaisseur, le point de rencontre de ces lignes est d'autant plus facile à déterminer exactement, que l'angle formé par ces lignes approche d'être droit.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

a, b, c; et si par les points a, b, c, on conduit des perpendiculaires, aa'', bb'', cc'', au plan horizontal HH', les pieds a'', b'', c'', de ces perpendiculaires, appartiendront à la projection horizontale de la courbe abc. Lorsqu'un plan coupe les plans de projection, TV, TH, suivant deux droites, tt', tt''; la *trace verticale* de ce plan est tt'; sa *trace horizontale* est tt'' et pour désigner ce plan, on dit le plan $t'tt''$.

386. (fig. 250). *Lorsque des points sont dans l'un des plans de projection; les projections de ces points, sur l'autre plan, sont sur la ligne de terre*, car le point d' étant supposé dans le plan vertical VV' et les plans de projection étant perpendiculaires l'un à l'autre; la perpendiculaire $d'p$, menée du point d' sur l'intersection TR, sera perpendiculaire au plan horizontal (n° 303); le pied p de cette perpendiculaire, sera donc la projection horizontale du point d'. *Toutes les lignes situées dans l'un des plans de projection, sont donc projetées sur l'autre plan, suivant la ligne de terre.*

387. (fig. 250). *Quand une ligne est située dans un plan parallèle à l'un des plans de projection; la projection de cette ligne sur l'autre plan est une parallèle à la ligne de terre.* En effet; si la ligne acf, est située dans un plan parallèle au plan horizontal TH, le plan de cette courbe sera perpendiculaire au plan TV; les perpendiculaires, aa', bb', cc', etc., menées des différens points de la courbe acf, sur le plan TV, seront donc dans le plan de la courbe acf; les projections verticales a', b', c', etc., des points, a, b, c, etc., seront donc sur l'intersection du plan de la courbe avec le plan TV. Mais, cette intersection est une droite parallèle à TR, car le plan de la courbe acf, est parallèle au plan TH (n° 270); la projection verticale $a'c'f'$, de la courbe acf, est donc une parallèle à la ligne de terre. Ce qui démontre le principe énoncé.

388. (fig. 250). *Lorsque deux droites l', l'', sont situées, l'une dans le plan horizontal, l'autre dans le plan vertical; si elles ne sont pas toutes deux perpendiculaires à la ligne de terre, on pourra les regarder comme les projections d'une même droite l. Quand les droites, l', l'', seront perpendiculaires à la ligne de terre, elles pourront passer par un même point de cette ligne ou par deux points différens; dans le premier cas, les lignes, l', l'', représenteront les projections d'une ligne quelconque située dans le plan des droites l', l'', (ce plan sera perpendiculaire aux deux plans de projection); dans le second cas, l' et l'' ne pourront pas représenter les projections d'une même ligne.* En effet; lorsque les plans projetans, conduits par les droites l', l'', se rencontrent; l'intersection détermine la droite dont les projections sont données. Quand les plans projetans se confondent, toutes les lignes situées dans ces plans, ont pour projections l' et l'', et lorsque les plans projetans ne se rencontrent pas, ce qui ne peut arriver que lorsqu'ils sont parallèles, les droites données ne peuvent être les projections d'aucune ligne de l'espace; il suffit donc de prouver que les plans projetans ne peuvent être parallèles, que lorsque les droites l', l'', sont toutes deux perpen-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

diculaires sur la ligne de terre. Pour démontrer cette propriété, tirez deux droites, $d'D'$, $d''D''$, dans les plans rectangulaires, TV, TH; par ces droites, conduisez deux plans, $dd'D'D$, $dd''D''D$, respectivement perpendiculaires aux plans de projection, TV, TH; les plans, $dd'D'D$, $dd''D''D$, seront les plans projetans. Quand les plans projetans ne seront pas parallèles, ils se couperont suivant une droite dD, dont les projections seront $d'D'$ et $d''D''$. Si les plans projetans étaient parallèles, ils seraient perpendiculaires en même temps aux plans, TV, TH (n° 299); l'intersection TR de ces deux derniers plans, serait donc perpendiculaire aux plans, $d'D$, $d''D$, (n° 309); les droites $d'D'$, $d''D''$, situées dans ces plans, seraient donc perpendiculaires à TR (n° 282); ce qui démontre le principe énoncé.

389. *La projection d'une courbe peut être une droite* (n° 387); *mais, lorsque les deux projections d'une ligne* α, *étant des droites, ces droites ne sont pas toutes deux perpendiculaires à la ligne de terre, on peut en conclure que la ligne* α *est droite*, car elle est déterminée par l'intersection de deux plans (n° 383).

390. *Les deux projections d'une courbe quelconque, déterminent cette courbe.* Par exemple, $a'b'c'$ et $a''b''c''$ (fig. 250), étant les projections d'une même ligne abc, sur les plans TV, TH; si par les différens points de ces projections, on mène des perpendiculaires aux plans, TV, TH, ces perpendiculaires formeront deux surfaces cylindriques, $a'b'c'cba$, $a''b''c''cba$, sur lesquelles la courbe abc devra se trouver; l'intersection de ces surfaces déterminera donc la courbe abc. Quand les surfaces cylindriques ne se coupent pas, les projections données n'appartiennent à aucune ligne.

391. Si l'on voulait exécuter des constructions, au moyen des conventions précédentes, on serait forcé d'employer deux feuilles de papier; l'une représenterait le plan horizontal, l'autre le plan vertical; et les projections, tracées sur ces plans, seraient dans leur vraie grandeur. Mais, avec un peu d'attention, on aperçoit, que les dessins seraient plus faciles à exécuter, si l'on pouvait n'employer qu'une seule feuille. Pour y parvenir, on a fait tourner le plan vertical VV' (fig. 250), autour de TR, de manière à le faire coïncider avec le plan horizontal HH', et l'on a construit les projections sur les plans ainsi disposés. Ainsi, dans tout ce qui va suivre, le plan vertical de projection aura fait un quart de révolution autour de la ligne de terre, pour venir s'appliquer sur le plan horizontal; ce dernier plan sera celui de la feuille de dessin sur laquelle nous décrirons les projections dans leur véritable grandeur. De sorte que *toutes les lignes seront réellement tracées sur un plan horizontal*, mais il faudra perpétuellement concevoir que les projections verticales seront remises en place, au moyen d'un quart de révolution autour de la ligne de terre. Ainsi, dans la figure 251, toutes lignes seront réellement tracées sur un plan horizontal et TR représentera l'intersection des deux plans de projection, dans leur position primitive. Les points situés hors des plans de projection, ne paraîtront plus dans les figures, mais il sera toujours facile de se

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

représenter la véritable position de ces points, à l'aide de leurs projections. Par exemple, d' et d'' (fig. 251), étant les projections d'un point d de l'espace; ce point ne paraîtra pas sur la figure, mais il sera facile de se représenter quelle est sa position dans l'espace, en concevant que le plan vertical fasse un quart de révolution autour de TR; les plans de projection étant alors perpendiculaires l'un à l'autre, si par les points d', d'', on conçoit des perpendiculaires au plan vertical et au plan horizontal, la rencontre de ces perpendiculaires sera le point d.

392. (fig. 250). *Les projections d'un point sont situées sur une droite perpendiculaire à la ligne de terre* TR. En effet; concevez que les plans de projection, VV', HH', etant dans leur position primitive, c'est-à-dire perpendiculaires l'un à l'autre, les projections d'un point soient d' et d''; les perpendiculaires menées de ces points sur TR, passeront par un même point p de TR (n° 379), et l'angle $d'pd''$ sera droit (n° 293); si le plan vertical tourne autour de TR, pour venir s'appliquer sur le plan horizontal, la droite pd' ne cessera pas d'être perpendiculaire à TR; le point d' décrira un arc de cercle $d'nm''$, dont le centre sera en p; le plan de cet arc sera perpendiculaire à TR et quand le plan vertical coïncidera avec le plan horizontal, d' tombera sur un point m'' du plan horizontal HH'; pm'' sera égal à pd' et pm'' sera le prolongement de pd'', car les droites pm'', pd'', TR, étant dans un même plan HH' et les angles, $m''pR$, $d''pR$, étant droits, pm'' est le prolongement de pd'' (n° 11.2°). Ce qui démontre le principe énoncé.

393. La figure $dd'pd''$ étant un rectangle, $d'p$ mesure la distance du point d', au plan horizontal HH' et $d''p$ exprime la distance du même point au plan vertical. En général; *pour connaître les distances d'un point aux plans de projection, il suffit de conduire par les projections de ce point, des perpendiculaires à la ligne de terre; ces perpendiculaires mesurent les distances demandées.*

394. (fig. 257). *Lorsque deux lignes se coupent en un point, la droite, qui joint les points d'intersection des projections de ces lignes, est perpendiculaire à la ligne de terre. Et réciproquement, lorsque la droite, qui joint les intersections des projections de deux lignes, est perpendiculaire à la ligne de terre; on peut en conclure que les lignes se coupent en un point.* En effet; les projections d'un point étant toujours situées sur une perpendiculaire à la ligne de terre (n° 392), et les projections du point d'intersection de deux lignes, ne pouvant être que les intersections des projections de ces lignes; quand deux lignes se coupent en un point, la droite qui joint les intersections des projections des lignes données, doit être perpendiculaire à la ligne de terre. *Réciproquement*; lorsque la droite, qui joint les points d'intersection des projections des lignes données, est perpendiculaire à la ligne de terre; les perpendiculaires, menées de ces points d'intersection sur la ligne de terre, passent par un même point de la ligne de terre; ces intersections sont donc les projections d'un point unique (n° 381), qui appartient aux deux

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

lignes données. Ces lignes se coupent donc. Par exemple, les projections d'une droite étant $a'b'$ et $a''b''$ (fig. 257), et les projections d'une autre droite étant $a'c'$ et $a''c''$; si l'on mène une droite $a'a''$, par les points a', a'', où les projections de ces droites se rencontrent; lorsque les lignes données se couperont, la droite $a'a''$ devra être perpendiculaire à la ligne de terre (n° 392); et réciproquement, lorsque $a'a''$ sera perpendiculaire à la ligne de terre, les lignes se couperont, car la perpendiculaire au plan horizontal, menée par le point a'' et la perpendiculaire au plan vertical menée par le point a', se rencontreront alors en un point, qui appartiendra aux deux droites (n° 380).

395. Quand deux lignes ne se coupent pas, la droite qui joint les points d'intersection des projections de ces lignes, n'est pas perpendiculaire à la ligne de terre; car si elle l'était, les lignes se couperaient (n° 394). RÉCIPROQUEMENT; *lorsqu'en menant une droite par les points d'intersection des projections de deux lignes, cette droite n'est pas perpendiculaire sur la ligne de terre, les lignes ne se coupent pas*, car si les lignes se coupaient, la droite, menée par les intersections des projections, serait perpendiculaire à la ligne de terre (n° 394).

396. *Quand les projections de deux lignes, sur un même plan, sont différentes et ne se coupent pas, on est certain que les lignes ne se rencontrent pas*; car si ces lignes se rencontraient en un point, en menant par ce point une perpendiculaire sur le plan de projection, le pied de cette perpendiculaire appartiendrait aux projections des lignes sur ce plan; ces projections auraient donc un point commun; ce qui est contre l'hypothèse.

397. (fig. 260). *Lorsqu'une droite, parallèle à un des plans de projection, n'est pas perpendiculaire à l'autre plan de projection; la projection de la droite sur le premier plan, est parallèle à cette droite, et la projection de la même droite sur l'autre plan, est parallèle à la ligne de terre.* En effet; supposez que $m'd'$ et $m''d''$, soient les projections d'une droite parallèle au plan vertical; si cette droite n'est pas perpendiculaire au plan horizontal, en conduisant par cette droite un plan perpendiculaire au plan vertical, ce *plan projetant* sera déterminé (n° 332); sa trace verticale $m'd'$ sera la projection verticale de la ligne donnée, et cette projection sera parallèle à la ligne donnée (n° 314). La ligne donnée étant parallèle à sa projection verticale $m'd'$, si par ces deux parallèles on mène des plans perpendiculaires au plan horizontal, les traces $m''d''$, qv, de ces plans, seront parallèles (n° 334); la projection horizontale $m''d''$ de la ligne donnée, sera donc parallèle à la ligne de terre.

398. *Les projections d'une parallèle à la ligne de terre, sont parallèles à cette ligne*, car la ligne donnée étant parallèle à chaque plan de projection (n° 331), chacune de ses projections est parallèle à la ligne de terre (n° 397).

399. *Quand une droite est perpendiculaire à un des plans de projection; la projection de cette droite sur ce plan est un point* (n° 374) *et*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

la projection de la même droite sur l'autre plan, est une perpendiculaire à la ligne de terre. En effet; concevez une verticale, projetée horizontalement en s'' (fig. 260); si par cette verticale vous menez un plan perpendiculaire au plan vertical, ce plan sera perpendiculaire aux deux plans de projection (n° 301); il sera donc perpendiculaire à l'intersection TR de ces deux plans (n° 309); ses traces $s''p$, pr', seront donc perpendiculaires à TR; mais pr' est la projection verticale de la ligne donnée; le principe est donc démontré.

400. (fig. 261). *Lorsque deux plans sont parallèles, les traces de ces plans, sur chacun des plans de projection, sont parallèles;* car ces traces sont les intersections des deux plans parallèles, par chaque plan de projection. Ainsi, les plans $T'TT''$, $t'tt''$, étant parallèles, les intersections, TT', tt', de ces plans, avec le plan vertical de projection, sont parallèles (n° 270); mais ces intersections sont les traces verticales des plans parallèles, $T'TT''$, $t'tt''$; ces traces sont donc parallèles. Réciproquement, *lorsque les traces de deux plans sont parallèles, ces plans sont parallèles*, car les traces, tt', tt'', du plan $t'tt''$, étant respectivement parallèles aux traces, TT', TT'', du plan $T'TT''$, le plan des deux premières droites est parallèle au plan des deux autres (n° 275).

401. *La trace verticale d'un plan perpendiculaire au plan horizontal est une verticale perpendiculaire à la ligne de terre; et la trace horizontale, d'un plan perpendiculaire au plan vertical, est une horizontale, perpendiculaire à la ligne de terre.* En effet; si sp' (fig. 252), est la trace verticale d'un plan $p'sp''$, perpendiculaire au plan horizontal; cette trace sera l'intersection de deux plans perpendiculaires au plan horizontal; elle sera donc perpendiculaire au plan horizontal (n° 307); elle sera donc perpendiculaire à la droite TR, menée par son pied dans le plan horizontal (n° 247). *Un plan, qui passe par une perpendiculaire à l'un des plans de projection, est perpendiculaire à ce plan* (n° 301). *Sa trace sur l'autre plan de projection est donc perpendiculaire à la ligne de terre.*

402. *Lorsqu'un plan est perpendiculaire à l'un des plans de projection; sa trace sur ce plan suffit pour le déterminer.* En effet; $a''b''$ (fig. 253) étant la trace horizontale d'un plan perpendiculaire au plan horizontal; le plan vertical mené par cette droite, sera le plan dont la trace est donnée; et ce plan sera entièrement déterminé, car par la droite $a''b''$, on ne peut mener qu'un seul plan perpendiculaire au plan horizontal (n° 332).

403. *Quand un plan est parallèle à l'un des plans de projection; sa trace sur l'autre plan est parallèle à la ligne de terre; et cette trace suffit pour déterminer le plan.* En effet; si $a''r''$ (fig. 251) est la trace horizontale d'un plan parallèle au plan vertical; $a''r''$ et TR seront les intersections de ces deux plans parallèles, par le plan horizontal de projection; $a''r''$ sera donc parallèle à TR; la trace $a''r''$ détermine le plan, car par cette trace on ne peut mener qu'un seul plan parallèle au plan vertical. Deux plans parallèles ne pou

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

vant pas se rencontrer, *tout plan, parallèle à l'un des plans de projection, n'a jamais de trace sur ce plan.*

404. *Lorsqu'on donne à un plan, toutes les positions possibles, relativement à la ligne de terre, il ne peut arriver que trois cas; car, ce plan, coupe la ligne de terre en un point, ou il ne la coupe pas, ou il passe par cette ligne. Dans le premier cas, les traces du plan concourent vers un même point de la ligne de terre; dans le second cas, les deux traces sont parallèles à la ligne de terre, ou il n'y a qu'une seule trace; et dans le troisième cas, les deux traces se confondent avec la ligne de terre.* En effet; 1°. Lorsqu'un plan coupe la ligne de terre, le point d'intersection appartient à ce plan et aux deux plans de projection; ce point est donc sur les deux traces du plan; ces traces concourent donc vers un même point de la ligne de terre; 2°. tout plan qui ne rencontre pas la ligne de terre est parallèle à cette ligne. Ses traces ne peuvent pas rencontrer la ligne de terre, car si elles la rencontraient, le plan, qui les contient, rencontrerait la ligne de terre, ce qui est contre l'hypothèse. Quand le plan rencontre les deux plans de projection; la trace verticale et la ligne de terre sont dans le plan vertical de projection, et ces lignes ne peuvent pas se rencontrer; elles sont donc parallèles. Par la même raison, la trace horizontale est parallèle à la ligne de terre. Les deux traces du plan, étant parallèles à la ligne de terre, sont parallèles entre elles (n° 265) Quand le plan est parallèle à un des plans de projection, il n'a pas de trace sur ce plan, et sa trace sur l'autre plan de projection est parallèle à la ligne de terre (n° 403); 3°. enfin, lorsqu'un plan passe par deux points de la ligne de terre, cette ligne est toute entière dans ce plan; les deux traces du plan se confondent donc avec la ligne de terre. Ce dernier cas est le seul dans lequel la position du plan reste indéterminée.

405. Trois points, qui ne sont pas en ligne droite, déterminent un plan (n° 239); *les traces d'un plan doivent donc être entièrement déterminées, lorsqu'on connaît deux points de l'une des traces et un point de l'autre trace.* En effet; 1°. Lorsque les deux points connus, de l'une des traces, ne sont pas à égale distance de la ligne de terre; la trace, déterminée par ces deux points, rencontre la ligne de terre en un point qui appartient à l'autre trace; mais on connaît un second point de cette dernière trace; elle est donc déterminée; 2°. quand les deux points connus de l'une des traces, sont également distans de la ligne de terre; la trace, déterminée par ces points, est parallèle à la ligne de terre; l'autre trace est donc parallèle à la ligne de terre (*); or on connaît un point de cette trace; elle est donc déterminée (n° 241).

406. *Les deux traces d'un plan, déterminent ce plan;* car ces traces se

---

(*) Cela est évident, car l'une des traces étant parallèle à la ligne de terre, le plan est parallèle à la ligne de terre (n° 321); les traces de ce plan sont donc parallèles à la ligne de terre (n° 404. 2°).

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

coupent ou sont parallèles, et dans ces deux cas le plan est entièrement déterminé (nos 239 et 240).

407. (fig. 255). *Lorsque par un point d'un plan, on mène dans ce plan, une parallèle à l'un des plans de projection; la projection de cette droite sur ce plan de projection est parallèle à la trace du plan donné sur le même plan de projection et l'autre projection de la droite est parallèle à la ligne de terre.* En effet; supposez que d' et d'' soient les projections d'un point d, situé dans le plan $T'TT''$. L'intersection de ce plan avec le plan horizontal, étant la trace horizontale TT'', si dans le plan $T'TT''$, on mène par le point d, une parallèle b, au plan horizontal, cette dernière droite sera parallèle à TT'', car si cela n'était pas, elle rencontrerait le plan horizontal, en un point situé sur TT'', ce qui est contraire à l'hypothèse; les droites b et TT'' sont donc parallèles; la projection horizontale $d''h$, de la droite b, est donc parallèle à la projection horizontale TT'' de la droite TT'' (no 384); mais la projection verticale de l'horizontale b, est une parallèle $d'h'$, à la ligne de terre (no 397); le principe est donc démontré pour une parallèle au plan horizontal. On prouverait de même, que si dans le plan $T'TT''$, on mène par le point d, une parallèle c, au plan vertical; la projection verticale de cette droite sera une parallèle $d'v$ à la trace verticale TT' et la projection horizontale de la même droite sera une parallèle $d''m''$ à la ligne de terre.

408. *Remarque.* Si l'on cherche les points v', h'', où les droites b et c, rencontrent le plan vertical et le plan horizontal, ces points devront se trouver sur les traces, $T'T'$, TT'', du plan $T'TT''$, car les droites b et c, sont dans ce plan.

409. *Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan; les projections de cette droite sont respectivement perpendiculaires aux traces du plan.* En effet; si $d'r$ et $d''s$ (fig. 256), sont les projections d'une perpendiculaire au plan $t'tt''$; le plan vertical $d''sv'$, mené par la droite donnée, sera perpendiculaire au plan horizontal et au plan donné $t'tt''$ (no 301); l'intersection tt'', de ces deux derniers plans, sera donc perpendiculaire au plan $d''sv'$; cette intersection sera donc perpendiculaire à la ligne $d''s$, menée dans le plan $d''sv'$; la projection horizontale $d''s$, de la perpendiculaire au plan $t'tt''$, sera donc perpendiculaire à la trace horizontale tt'' de ce plan. On prouverait de la même manière, que la projection verticale $d'r$, de cette droite, est perpendiculaire à la trace verticale tt', du plan $t'tt''$. Ce qui démontre le principe énoncé.

410. *Quand une droite est parallèle au plan vertical de projection; tout plan, perpendiculaire à cette droite, est perpendiculaire au plan vertical de projection; et la trace verticale de ce plan, est perpendiculaire à la projection verticale de la droite.* (*Une droite parallèle au plan horizontal, jouit de propriétés analogues*). En effet; si ad' et $a''d''$, (fig. 260), sont les projections d'une droite parallèle au plan vertical; la projection horizontale $a''d''$, sera parallèle à la ligne de terre, et la droite sera parallèle à sa projection verticale ad' (no 397); les traces, tt', tt'', d'un plan

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

quelconque, perpendiculaire à la ligne donnée, seront respectivement perpendiculaires aux projections, ad', $a''d''$, de cette ligne (n° 409); or $a''d''$ est parallèle à TR; tt'' est donc perpendiculaire sur TR; tt'' est donc perpendiculaire au plan vertical (n° 303); le plan $t'tt''$, qui passe par cette ligne, est donc perpendiculaire au plan vertical (n° 301). Mais, la trace verticale tt' de ce plan, est perpendiculaire à la projection verticale ad' de la droite donnée. Le principe est donc démontré.

411. *Les solutions des problèmes de la Géométrie descriptive, se déduisent des principes que nous venons d'établir.* Pour jeter plus de jour sur les démonstrations, nous adopterons la notation suivante. Toutes les lettres affectées d'un *accent*, indiqueront des points situés dans le plan vertical de projection; les lettres affectées de deux *accens*, désigneront des points du plan horizontal, et les mêmes lettres sans *accent*, indiqueront les points correspondans de l'espace; ces dernières lettres ne paraîtront dans les figures, que lorsqu'elles deviendront nécessaires à l'intelligence des démonstrations, mais on devra toujours se les représenter dans l'espace. La ligne RT, sera la ligne de terre. Ainsi, les projections d'un point d de l'espace (fig. 256), seront indiquées par d' et d''; la droite $d'd''$ sera perpendiculaire sur la ligne de terre (n° 392), les projections d'une droite dD, située dans l'espace, seront $d'D'$, $d''D''$; pour se figurer la position des points, des lignes et des plans, dont on connaîtra les projections et les traces, il faudra imaginer que le plan vertical tourne autour de la ligne de terre, pour devenir perpendiculaire au plan horizontal. Afin de prévenir les erreurs, je ferai précéder les problèmes de quelques remarques essentielles. La feuille de dessin sur laquelle on exécute les constructions, est ce qu'on nomme une *épure*. Pour diminuer le nombre des figures, je réunirai sur la même *épure* les constructions relatives à plusieurs problèmes; mais les élèves devront exécuter la solution de chaque problème sur une feuille séparée. On doit faire les constructions sur une feuille de papier bien tendue; les compas, les règles, et les équerres dont on fait usage, doivent être très-exacts. On tire d'abord les lignes avec un crayon très-fin, et l'on ne met à l'encre que lorsque la construction est terminée. Pour faciliter l'exécution, on commence par tirer, sur la feuille de papier, deux droites perpendiculaires l'une à l'autre, qui se coupent vers le *centre* de la feuille (n° 6). On détermine ces perpendiculaires avec le plus grand soin (B. n° 33), et l'on fait ensuite usage de l'équerre pour mener des parallèles à ces lignes. Lorsque la solution d'un problème exige que l'on tire un grand nombre de lignes, pour déterminer des points; on efface successivement les lignes qui ont donné ces points, et l'on ne conserve que ces points. Je ne puis trop engager les élèves, à exécuter les constructions avec la plus scrupuleuse exactitude; car dans les épures compliquées, les plus petites erreurs finissent par s'accumuler de manière à conduire à des résultats absolument faux. On ne parvient à construire avec exactitude qu'après avoir fait un grand nombre d'épures, avec de bons instrumens. Ces avis devant suffire aux élèves intelligens, occupons-nous des problèmes.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

412. (fig. 251). *Les projections de deux points étant données; construire les projections de la droite qui passe par ces deux points.* La droite devant passer par les deux points donnés ; les projections de cette droite passent nécessairement par les projections des points donnés. Tirant donc une droite par les projections horizontales des points donnés, et menant une autre droite par les projections verticales des mêmes points ; ces deux droites seront les projections de la droite qui passe par les points donnés. Par exemple, si a' et a'' étant les projections de l'un des points donnés, b' et b'' sont les projections de l'autre point ; les droites, $a'b'$, $a''b''$, seront les projections de la droite ab qui passe par les points donnés.

413. (fig. 251). *Connaissant les projections des extrémités d'une droite ; construire la vraie grandeur de cette droite.* Cela revient à *déterminer la distance entre deux points donnés.* Désignez par l la longueur de la ligne cherchée ; supposez que $a'b'$ et $a''b''$ (fig. 251), soient les projections de cette ligne ; a' et a'' étant les projections d'un point, et b', b'', étant les projections d'un autre point, les droites, $a'a''$, $b'b''$, sont perpendiculaires à RT, (n° 392). Les perpendiculaires, menées des extrémités de la ligne donnée sur le plan horizontal, rencontrant ce plan aux points, a'', b'', (n° 370), et les longueurs de ces perpendiculaires étant respectivement égales à pa' et à qb', (n° 393) ; la ligne l sera le quatrième côté d'un trapèze $a''b''ab$, dans lequel, les angles, a'', b'', seront droits, la base sera $a''b''$, et les côtés parallèles, aa'', bb'', seront respectivement égaux à pa' et à qb' ; de sorte que si l'on faisait tourner ce trapèze autour de $a''b''$ comme *charnière ;* lorsque le plan de ce trapèze serait vertical, le côté ab coïnciderait avec la ligne l. La droite ab est donc la longueur de la ligne demandée. On peut simplifier cette construction. En effet ; si par le point a', on mène $a'h'$ parallèle à RT, et si par le point a on tire une droite ac, parallèle à $a''b''$; ab sera l'hypoténuse d'un triangle rectangle acb, dont ac et cb seront les deux côtés de l'angle droit. Or...

$$ca = b''a'' \text{ et } cb = (bb'' - aa'') = (b'q - a'p) = b'c'.$$

La droite $ab = l$, est donc l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dans lequel les deux côtés de l'angle droit sont $b''a''$ et $b'c'$; prenant donc $c's' = a''b''$, l'hypoténuse $s'b'$, sera la vraie grandeur de la ligne l. Mais, $a''b''$ est la projection horizontale de la ligne donnée ; $b'c'$ est la différence des perpendiculaires menées des extrémités de la ligne donnée sur le plan horizontal, et l'on pourrait faire une construction analogue sur le plan vertical. *La vraie grandeur d'une droite, située d'une manière quelconque dans l'espace, est donc l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont un des côtés de l'angle droit est la projection de la droite sur un des plans de projection, et dont l'autre côté, est la différence des perpendiculaires menées des extrémités de la droite sur le même plan.* Par exemple, pour trouver la vraie grandeur de la droite l, dont les projections sont $a'b'$ et $a''b''$ (fig. 251), on menera $a'h'$ parallèle à TR, et l'on prendra $c's' = a''b''$; l'hypoténuse

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

$b's'$ sera la ligne demandée. Afin de vérifier l'exactitude de la construction, on tirera une parallèle $a''h''$ à TR, et prenant $r''s'' = a'b'$, l'hypoténuse $b''s''$ sera la vraie grandeur de la droite l. De sorte que si l'on a bien opéré, les hypoténuses $b's'$, $b''s''$, devront être égales.

414. En général: *toutes les constructions que l'on exécute sur l'un des plans de projection, peuvent se faire de la même manière, sur l'autre plan; ce qui donne le moyen de vérifier si l'on a opéré avec exactitude.* On ne doit jamais négliger ces vérifications.

415. *La vraie distance entre deux points est donc connue, lorsqu'on a les projections de ces points sur deux plans rectangulaires* (n° 413).

416. Si la droite ab (fig. 251), dont les projections sont $a'b'$ et $a''b''$, était parallèle au plan horizontal; $b'c'$ serait zéro, $a'b'$ se confondrait avec $a'c'$, et $s'b'$ coïnciderait avec $s'c'$; de sorte que $a''b''$ serait la vraie grandeur de la parallèle au plan horizontal. Si la droite ab était parallèle au plan vertical, les distances $a''p$, $b''q$, de ses extrémités au plan vertical seraient égales, $b''s''$ coïnciderait avec $r''s''$, de sorte que la droite ab serait de même grandeur que sa projection verticale $a'b'$; et la projection horizontale $a''b''$, de ab, deviendrait parallèle à TR. *La projection horizontale d'une parallèle au plan horizontal, est donc de même grandeur que cette droite, et lorsque cette droite n'est pas perpendiculaire au plan vertical, sa projection verticale est parallèle à la ligne de terre; si l'horizontale était perpendiculaire au plan vertical, sa projection verticale serait un point* (n° 374). *La projection verticale d'une parallèle au plan vertical est égale à cette droite; et lorsque cette droite n'est pas verticale, sa projection horizontale est parallèle à la ligne de terre; si la droite était verticale, sa projection horizontale serait un point. Les projections d'une parallèle à la ligne de terre, sont donc égales à cette droite et parallèles à la ligne de terre.* Ce qui s'accorde avec les propriétés des n°s 397 et 398.

417. En general; lorsqu'une ligne courbe est située dans un plan parallèle à l'un des plans de projection; la projection de cette ligne sur ce plan est égale à la courbe située dans l'espace, et l'autre projection, est une parallèle à la ligne de terre. Par exemple, si la courbe $abce$ (fig. 250), était située dans un plan parallèle au plan horizontal TH; les perpendiculaires aa'', bb'', cc'', ee'', menées des différens points de cette courbe, sur le plan TH, seraient égales et parallèles; les droites, ab, ac, ae, etc., seraient donc égales et parallèles aux droites, $a''b''$, $a''c''$, $a''e''$, etc.; les angles bac, bae, etc., seraient donc respectivement égaux aux angles, $b''a''c''$, $b''a''e''$, etc.; et par conséquent, si l'on conçoit que les droites ab, ac, coïncident avec les droites $a''b''$, $a''c''$; le plan de la courbe abc, coïncidera avec le plan TH, les points a, b, c, coïncideront avec leurs projections horizontales a'', b'', c'', et les droites ae, af, etc., coïncideront avec les droites $a''e''$, $a''f''$, etc. Tous les points de la courbe $abcef$ coïncidant avec ceux de la projection $a''b''c''e''f''$, ces deux courbes sont égales. D'ailleurs, le plan de la courbe acf, étant parallèle au plan horizontal TH

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

la projection verticale de la courbe *acf*, est une parallèle à la ligne de terre (n° 387); le principe est donc démontré.

418. (fig. 251). *Déterminer le milieu d'une droite donnée.* Supposez que les droites, $a'b'$, $a''b''$, soient les projections de la ligne donnée; exécutez la construction du n° 413; ab sera la vraie grandeur de la ligne donnée. Prenez le milieu m de ab; tirez mm'' perpendiculaire sur $a''b''$ et $m''m'$ perpendiculaire à RT; concevez que le plan du trapèze $abb''a''$, tourne autour de $a''b''$ comme charnière; quand ce plan sera vertical, la ligne ab coïncidera avec la ligne donnée, et le milieu m de ab, coïncidera avec le milieu de la ligne donnée; les droites, aa'', bb'', mm'', seront perpendiculaires au plan horizontal (n° 303) et les points, a'', b'', m'', seront les projections horizontales des points a, b, m; de sorte que m'' sera la projection horizontale du milieu de la ligne donnée. La verticale, menée par le point m'', passerait par le milieu de la ligne donnée; or la projection verticale de cette droite est vm'; la projection verticale du milieu de la ligne donnée, doit donc se trouver sur vm' et sur $a'b'$; l'intersection m', de ces deux lignes, sera donc la projection verticale du point demandé. Les propriétés des parallèles donnent (1)... $ma : mb :: m''a'' : m''b'' :: m'a' : m'b'$. Or, $ma = mb$; donc $m''a'' = m''b''$ et $m'a' = m'b'$. *Les projections du milieu d'une ligne, sont donc les milieux des projections de cette ligne.* En général, les proportions (1) démontrent, que si le point m divisait la droite ab, en parties proportionnelles à des lignes données, les projections m'', m', de ce point, diviseraient les projections de la ligne donnée dans le même rapport. Par conséquent:

419. *Lorsque l'on connaît des projections d'une droite située dans l'espace; pour déterminer le point qui divise cette droite en deux parties proportionnelles à des lignes données, il suffit de diviser les projections de la ligne donnée dans le même rapport; ces points de division sont les projections du point demandé. Quand le rapport donné n'est pas égal à l'unité, on trouve deux solutions*, car alors il y a deux points qui divisent la ligne donnée dans le rapport demandé. Ces deux solutions se réduisent à une seule, lorsque le rapport donné est égal à l'unité (n° 3).

420. *Un point est situé sur une droite dont les projections sont données; l'une des projections de ce point, est connue. Il s'agit de construire l'autre projection de ce point.* Les deux projections d'un point étant sur une perpendiculaire à la ligne de terre, et les projections des différens points d'une droite étant situées sur les projections de cette droite; si par la projection connue, du point cherché, on mène une perpendiculaire à la ligne de terre, les rencontres de cette perpendiculaire avec les projections de la ligne donnée, seront les deux projections du point demandé. Par exemple, si un point, dont la projection horizontale est m'' (fig. 251), doit se trouver sur une droite dont les projections, $a'b'$, $a''b''$, sont connues, en menant par m'', une perpendiculaire $m''m'$ à TR, le point m', où cette perpendiculaire rencontre la projection verticale $a'b'$ de la ligne donnée, est la projection verticale du point demandé.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

421. (fig. 251). *Par un point donné, mener une parallèle à une ligne donnée.* Supposez que d' et d'' soient les projections du point donné, et que les droites, $a'b'$, $a''b''$, soient les projections de la ligne donnée. La ligne cherchée passant par le point donné, les projections de cette ligne doivent passer par les projections, d', d'', du point donné; mais les projections de deux lignes parallèles sont parallèles (n° 384); on construira donc les projections de la ligne demandée, en menant, par les projections, d', d'', du point donné, des parallèles $d'e'$, $d''e''$, aux projections $a'b'$, $a''b''$, de la ligne donnée; $d'e'$ et $d''e''$, seront les projections de la ligne demandée.

422. (fig. 252). *Construire l'intersection de deux plans donnés.* Si les plans donnés, sont $t't t''$ et $T'TT''$; les points p', p'', où les traces se coupent, appartiendront à l'intersection des plans donnés, et cette intersection sera la droite qui joint les points p', p''; cette droite est dans l'espace; ses extrémités p', p'', sont dans les plans de projection; il s'agit de trouver les projections de cette droite. La projection horizontale du point p', étant le pied s, de la perpendiculaire menée du point p' sur TR (n° 386); s est un des points de la projection horizontale de l'intersection des plans donnés; mais p'' est un point de cette même projection; la droite sp'' est donc la projection horizontale de l'intersection des plans donnés. Par la même raison; si l'on mène une perpendiculaire $p''r$ sur TR, le pied r de cette perpendiculaire, sera la projection verticale du point p'' de l'intersection des plans donnés; mais p' appartient à cette projection; la droite rp' sera donc la projection verticale de l'intersection des plans donnés. On en déduit cette règle générale; *pour construire les projections de l'intersection de deux plans donnés; menez des perpendiculaires à la ligne de terre, par les points où les traces des plans donnés se coupent; tirez les droites, qui joignent les pieds de ces perpendiculaires avec les intersections des traces des plans donnés; ces droites seront les projections demandées.*

423. *Déterminer le point d'intersection de trois plans donnés,* (n° 246). Les plans donnés, combinés deux à deux, se coupent suivant trois droites qui passent par le point cherché. Or on sait trouver l'intersection de deux plans (n° 422), et celle de deux droites (n° 394); le problème n'offre donc aucune difficulté. J'engage les élèves à exécuter cette construction; les projections, sur chaque plan, des trois intersections des plans donnés, devront passer par un même point et la droite, menée par les projections du point cherché, devra être perpendiculaire à la ligne de terre (n° 392).

424. (fig. 253). *Construire les points où une droite rencontre les plans de projection.* Une droite ne peut rencontrer un plan qu'en un seul point (n° 238) et la distance de ce point de la droite au plan est nulle; il ne s'agit donc que de trouver les points de la droite, dont les distances aux plans de projection sont nulles; ce qui n'offre aucune difficulté. En effet; supposez que les projections, $b'c'$, $b''c''$, de la ligne donnée, coupent la ligne de terre aux points s et t. Pour trouver le point où la ligne donnée rencontre le plan

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

horizontal, on observera que les perpendiculaires menées de différens points de la droite sur le plan horizontal, étant respectivement égales aux perpendiculaires, $b'q$, $a'p$, $\nu't$, menées de différens points de la projection verticale de la droite sur TR (n° 393), le point s, où la projection verticale $b'c'$, rencontre TR, est la projection verticale du point de rencontre de la ligne donnée, avec le plan horizontal; conduisant donc, par le point s, une perpendiculaire sh'' au plan vertical; cette perpendiculaire contiendra le point de rencontre demandé; mais ce point doit aussi se trouver sur la projection horizontale $b''tc''$ de la ligne donnée; l'intersection h'', des droites, sh'', tb'', est donc le point de rencontre de la ligne donnée avec le plan horizontal. On verra de même, que si par le point t on mène, dans le plan vertical, une perpendiculaire $t\nu'$ sur RT; la rencontre ν', de $t\nu'$, avec la projection verticale $b'c'$ de la ligne donnée, sera le point de rencontre de la ligne donnée avec le plan vertical (*).

425. En général; *Pour construire le point de rencontre d'une droite avec le plan horizontal; déterminez le point d'intersection de la projection verticale de la ligne donnée, avec la ligne de terre; par ce point menez une horizontale, perpendiculaire à la ligne de terre; la rencontre de cette horizontale avec la projection horizontale de la ligne donnée, sera le point demandé. Pour trouver le point où une droite rencontre le plan vertical; déterminez l'intersection de la projection horizontale de la ligne donnée, avec la ligne de terre; par ce point menez une verticale; la rencontre de cette verticale, avec la projection verticale de la ligne donnée, sera le point demandé.* D'après cette règle; quand la projection verticale de la droite donnée, ne rencontre pas la ligne de terre; la droite ne rencontre pas le plan horizontal; lorsque la projection horizontale de la droite ne rencontre pas la ligne de terre, la droite ne rencontre pas le plan vertical; et lorsque les deux projections de la droite sont parallèles à la ligne de terre, la droite ne rencontre aucun des plans de projection. Par conséquent, lorsque la projection verticale d'une droite est parallèle à la ligne de terre, cette droite est parallèle au plan horizontal; quand la projection

---

(*) Il résulte de cette construction que $b's$ et $b''h''$, sont les projections de la partie de la droite qui est située au-dessus du plan horizontal; tandis que sc' et $h''c''$ sont les projections de la partie de la droite qui est située au-dessous du plan horizontal; de sorte que si le plan $sb'q$, tournait autour de TR; à l'instant où ce plan serait vertical, $b'c'$ serait dans ce plan vertical; les droites $b'q$, $a'p$, $\nu't$, seraient verticales; sb' serait au-dessus du plan horizontal, sc' serait au-dessous; les plans de projection seraient perpendiculaires l'un à l'autre; $b''c''$ serait dans le plan horizontal; $b'c'$ serait dans le plan vertical, et les plans menés par les projections, $b''c''$, $b'c'$, perpendiculairement au plan horizontal et au plan vertical, se couperaient suivant la droite bc, dont les projections sont $b'c'$ et $b''c''$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

horizontale d'une droite est parallèle à la ligne de terre, la droite est parallèle au plan vertical. Enfin, lorsque les deux projections d'une droite sont parallèles à la ligne de terre, la droite est parallèle aux deux plans de projection; cette droite est donc parallèle à la ligne de terre (n° 331). Ce qui s'accorde avec les propriétés des n°s 397 et 398.

426. (fig. 254). *Faire passer un plan par trois points donnés, non en ligne droite.* Les trois droites qui joignent les points donnés, étant situées dans le plan cherché (n° 237), ces droites rencontreront les plans de projection en des points qui appartiendront aux traces du plan demandé; on déterminera ainsi trois points de chacune de ces traces; les trois points de chaque trace devront être en ligne droite et ces traces devront se couper en un même point de la ligne de terre (n° 404, 1°); ce qui donnera *trois points de vérification*, car on connaîtra sept points des deux traces et quatre points suffisent pour déterminer ces traces. Cette construction ne peut offrir aucune difficulté, car elle se réduit, à trouver les points où des lignes données rencontrent les plans de projection et l'on sait trouver ces points (n° 425). Supposez donc, que a', b', c', soient les projections verticales des trois points donnés et que, a'', b'', c'', soient les projections horizontales des mêmes points. Les projections des droites menées par les points donnés, passeront par les projections de ces points; les projections verticales de ces droites, sont donc $a'b'$, $a'c'$, $b'c'$; et les projections horizontales des mêmes droites sont, $a''b''$, $a''c''$, $b''c''$. Si l'on cherche les points où ces droites rencontrent les plans de projection, on trouvera (n° 425), qu'elles rencontrent le plan vertical en trois points, d', t', r', et le plan horizontal en trois points, d'', t'', r''. La droite $t'r'$, menée par les points, t', r', devra passer par le point d'; la droite $t''r''$, menée par les points t'', r'', devra passer par le point d''; et ces droites devront concourir vers un même point T de la ligne de terre. Lorsque la construction sera bien faite, ces trois conditions seront remplies. Les deux lignes, $Tr'd't'$, $Tt''d''r''$, seront droites; elles représenteront les traces du plan qui passe par les trois points donnés.

427. *Remarque*; 1°. Quand les droites qui joignent les points donnés ne sont parallèles à aucun des plans de projection, chacune d'elles rencontre les deux plans de projection et l'on trouve trois points de vérification; 2°. lorsqu'une seule des droites est parallèle à l'un des plans de projection, elle ne rencontre plus ce plan; il ne reste donc que deux points de vérification; 3°. quand une des droites est parallèle aux deux plans de projection, elle ne rencontre plus ces plans; on ne connaît que les deux points de chaque trace, donnés par les rencontres des deux autres droites avec les plans de projection; il n'y a donc qu'un seul point de vérification; 4°. si deux droites étaient parallèles à l'un des plans de projection, au plan vertical par exemple; le plan, *abc* de ces droites, qui est celui des trois points donnés, serait parallèle au plan vertical (n° 275); la trace horizontale du plan *abc* serait donc parallèle à la ligne de terre (n° 403) et les projections horizontales des trois points donnés

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

seraient sur cette trace; la trace verticale du plan cherché n'existerait plus; la construction que nous avons indiquée réussirait encore, on verrait que les lignes données ne rencontrent pas le plan vertical; ce qui indiquerait que le plan cherché ne rencontre pas le plan vertical et l'on trouverait que ces droites rencontrent le plan horizontal, en des points situés, sur la parallèle à la ligne de terre, qui passe par les projections horizontales des points donnés. Cette parallèle serait la trace horizontale du plan demandé. Cette trace suffit alors pour déterminer le plan cherché (n° 403); 5° enfin, si les trois points donnés étaient en ligne droite; cette ligne rencontrerait chaque plan de projection en un seul point; on ne connaîtrait qu'un point de chaque trace du plan demandé; la position de ce plan serait donc indéterminée. Ce qui s'accorde avec le principe du n° 245.

428. *Conduire un plan par deux droites qui se coupent.* Prenez un point quelconque sur chaque droite; construisez le plan qui passe par ces deux points et par le point d'intersection des lignes données (n° 426). Ce plan résoudra le problème.

429. *Construire un plan qui passe par deux parallèles données?* Prenez deux points sur l'une des parallèles, et un point sur l'autre. Le plan, conduit par ces trois points (n° 426), passera par les deux parallèles (n° 242). Les traces de ce plan devront passer par les points où les lignes données rencontrent les plans de projection.

430. (fig. 260). *Déterminer la rencontre d'une verticale, avec un plan, $t't t''$, perpendiculaire au plan vertical.* Supposez que le point s'', soit la projection horizontale de la ligne donnée; la projection verticale de cette ligne sera une perpendiculaire pr' à TR, et s'' sera la projection horizontale du point demandé. Cherchons la projection verticale de ce point. Si par la verticale donnée, on mène un plan perpendiculaire au plan vertical; ps'' et ps' seront les traces de ce plan (n° 401); le point cherché devant se trouver dans ce dernier plan et dans le plan $t't t''$, l'intersection de ces deux plans passera par ce point; mais s' est un point de cette intersection et les deux plans étant perpendiculaires au plan vertical de projection, l'intersection de ces deux plans est une perpendiculaire au plan vertical de projection; la projection verticale de cette intersection est donc le point s'; la projection verticale du point cherché est donc en s'. De sorte que, pour trouver la rencontre d'une verticale $s''r'$, avec un plan $t't t''$, perpendiculaire au plan vertical; il suffit de chercher le point s', où la projection verticale pr' de la ligne donnée, rencontre la trace verticale tt' du plan donné; ce point est la projection verticale du point demandé; la projection horizontale de ce point, se confond avec la projection s'' de la verticale.

431. (fig. 256). *Trouver le point où une droite donnée rencontre un plan connu.* Si par la projection horizontale de la ligne donnée, on mène un plan vertical, ce plan contiendra le point cherché; mais ce point doit aussi se trouver dans le plan donné; l'intersection de ces deux plans, et la droite

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

donnée, contiendront donc le point cherché ; ce point sera donc l'intersection de ces deux lignes. Par exemple, pour construire le point de rencontre de la droite dont les projections sont $d'r$ et $d''s$, avec le plan $t'tt''$; on conduira un plan vertical $d''sv'$, par la projection horizontale $d''s$; ce plan contiendra la ligne donnée ; sa trace horizontale sera $d''s$, et sa trace verticale sera une droite sv', perpendiculaire à TR (n° 401). Menant $a''b$, perpendiculaire à TR ; la droite bv' sera la projection verticale de l'intersection des plans $t'tt''$, $v'sd''$, (n° 422). Or, la projection verticale du point cherché doit se trouver sur la droite bv' et sur la projection verticale $d'r$ de la ligne donnée. La projection verticale du point demandé est donc l'intersection p' des lignes, bv', $d'r$. Si par la projection verticale $d'r$, de la ligne donnée, on conduit un plan $d'rb''$, perpendiculaire au plan vertical ; ce plan contiendra le point cherché ; mais ce point est dans le plan donné ; la projection horizontale gb'', de l'intersection des deux plans, $d'rb''$, $t'tt''$, contiendra donc la projection horizontale du point cherché ; mais cette projection doit aussi se trouver sur la projection horizontale $d''s$, de la ligne donnée ; l'intersection p'', des droites $d''s$, $b''g$, sera donc la projection horizontale du point cherché. Quand la construction aura été bien faite, la droite $p'p''$, sera perpendiculaire à TR (n° 392).

432. Si les droites, bv', $d'r$, ne se rencontraient pas, le point p' n'existerait pas ; cela indiquerait que la ligne donnée ne rencontre pas le plan $t'tt''$; elle serait donc parallèle à ce plan.

433. (fig. 256). *Quand la ligne donnée est verticale, sa projection horizontale est un point D'', et le plan vertical conduit par cette ligne verticale est indéterminé*, car sa trace horizontale n'est assujétie qu'à passer par le point D''. Ainsi, pour trouver le point de rencontre de la verticale $V'D''$, avec le plan $t'tt''$, il suffit de mener par cette droite un plan vertical quelconque $t''Rt'$; la projection verticale nt' de l'intersection des plans, $t'tt''$, $t''Rt'$, passe par la projection verticale du point demandé ; mais cette projection est située sur $V'D''$; l'intersection D', des droites, nt', $V'D''$, est donc la projection verticale du point de rencontre de la droite $D''V'$ avec le plan $t'tt''$; D'' est la projection horizontale du même point.

434. *La projection horizontale d'un point est connue ; ce point est dans un plan donné. Il s'agit de construire la projection verticale du même point.* Si par la projection horizontale du point, on mène une perpendiculaire au plan horizontal ; la projection verticale de la rencontre de cette perpendiculaire avec le plan donné, sera la projection demandée. Par exemple, si D'' (fig. 256), était la projection horizontale d'un point du plan $t'tt''$, en menant par le point D'', une verticale $D''V'$, la projection verticale D', de la rencontre de cette verticale avec le plan $t'tt''$, serait la projection demandée. De sorte que D' et D'' seraient les projections d'un point du plan $t'tt''$. On peut donc prendre arbitrairement l'une des projections d'un point situé dans un

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

plan connu. On en déduit l'autre projection par la méthode que nous venons d'indiquer.

435. (fig. 255). *Par un point d'un plan connu, mener dans ce plan des parallèles aux plans de projection.* Les projections du point et les traces du plan, sont connues; il s'agit de trouver les projections des parallèles aux plans de projection, menées par le point donné, dans le plan connu. Mais, lorsqu'une droite passe par un point, les projections de cette droite passent par les projections de ce point; il suffit donc de trouver les directions des parallèles aux plans de projection. Supposez que d' et d'' soient les projections d'un point d, du plan $T'TT''$ (n° 434). Si par le point d, vous menez une horizontale H, dans le plan $T'TT''$, la projection horizontale de cette ligne sera parallèle à TT'' et la projection verticale de la ligne H sera parallèle à TR (n° 407); or ces deux projections passent respectivement par d'' et par d'; tirant donc par ces points des parallèles $d''h$, $d'h'$, aux lignes TT'' et TR, les droites $d''h$, $d'h'$, seront les projections de l'horizontale H, menée par le point donné d, dans le plan connu $T'TT''$. On verrait de même que pour construire les projections d'une parallèle au plan vertical, menée par le point d dans le plan $T'TT''$, il suffit de tirer par les projections, d', d'', du point d, des parallèles $d'\nu$, $d''m''$, aux droites, TT', TR; ces parallèles seront les projections demandées. Lorsqu'on aura opéré avec exactitude, la parallèle au plan horizontal, menée par le point d, dans le plan $T'TT''$, devra rencontrer le plan vertical de projection en un point ν' situé sur la trace verticale TT' et la parallèle au plan vertical devra rencontrer le plan horizontal en un point h'', situé sur la trace horizontale TT''. Si les traces du plan donné étaient parallèles à la ligne de terre, ce plan serait parallèle à la ligne de terre, et les deux parallèles aux plans de projection menées par le point donné dans le plan donné, se réduiraient à une même droite, parallèle à la ligne de terre; les projections de cette droite seraient des parallèles, $d'h'$, $d''h''$, à la ligne de terre.

436. (fig. 255). Pour exécuter les constructions précédentes, il n'est pas nécessaire d'avoir les traces du plan $T'TT''$, il suffit d'en connaître les directions. Par conséquent, *lorsque les traces d'un plan n'étant pas déterminées, on connaît les directions de ces traces et un point de ce plan; pour mener par le point donné, et dans le plan inconnu, des parallèles aux plans de projection, il suffit de conduire par les projections du point donné, des parallèles à la ligne de terre et des parallèles aux directions des traces; ces quatre droites sont les projections des parallèles aux plans de projection.* Par exemple, supposez que les traces d'un plan inconnu, soient parallèles aux lignes connues, tt', tt'', et que les projections d'un point d de ce plan, soient d' et d''; pour conduire par ce point et dans ce plan, des parallèles aux deux plans de projection, vous mènerez des parallèles $d'h'$, $d''h''$, à TR, et des parallèles $d'\nu$, $d''h$, aux directions connues tt', tt''. Les lignes $d''h$, $d'h'$, seront les projections de l'horizontale menée par le point

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

donné dans le plan inconnu ; $d'v$ et $d''h''$ seront les projections de la parallèle au plan vertical, menée par le point donné dans le plan inconnu. Si l'on détermine (n° 425), les points, v', h'', où les deux droites, menées dans le plan inconnu, rencontrent les plans de projection, ces points appartiendront aux traces du plan inconnu ; mais ces traces doivent être parallèles aux lignes connues, tt', tt'' ; tirant donc par les points, v', h'', des parallèles TT', TT'', aux droites, tt', tt'', ces parallèles seront les traces du plan inconnu ; de sorte que ce plan sera entièrement déterminé. Quand la construction sera faite avec exactitude, les traces, $T'T$, $T''T$, concourront vers un même point de la ligne de terre. Si les traces du plan inconnu devaient être parallèles à la ligne de terre, les parallèles aux plans de projections ne rencontreraient plus ces plans, de sorte que la construction précédente ne donnerait pas les traces du plan inconnu ; mais dans ce cas, le plan inconnu étant parallèle à la ligne de terre et n'étant d'ailleurs assujéti qu'à passer par le point donné, la position de ce plan doit rester indéterminée. Ce qui est indiqué par la construction. Nous verrons (n° 458, 3°) comment on peut construire les diverses positions de ce plan.

437. *Un point d'un plan et les directions des traces de ce plan, suffisent donc pour construire les traces de ce plan*, pourvu toutefois que les directions des traces ne soient pas parallèles à la ligne de terre.

438. (fig. 255). *Les directions des traces d'un plan sont données et l'on connaît les projections d'un point de ce plan. On propose de construire les traces de ce plan.* Par le point donné et dans le plan inconnu, menez deux droites respectivement parallèles aux plans de projection (n° 436). Déterminez les deux points de rencontre de ces droites avec les plans de projection (n° 425). Ces points appartiendront aux traces demandées. Conduisant, par ces points, des parallèles aux directions des traces du plan cherché, ces parallèles seront les traces demandées. Lorsque les directions des traces ne seront pas parallèles à la ligne de terre, la construction réussira ; et les traces devront concourir vers un même point de la ligne de terre (n° 404, 1°). Nous verrons (n° 458), comment on devrait opérer, si les traces étaient parallèles à la ligne de terre. Par exemple, supposez que les traces cherchées soient parallèles aux lignes connues, tt', tt'', et que les projections du point donné d, soient d' et d''. Pour conduire par le point d et dans le plan demandé, des parallèles aux plans de projection, il suffit de mener des parallèles $d'h'$, $d''h''$ à TR, et des parallèles, $d'v$, $d''h$, aux directions connues, tt', tt'' ; les droites $d''h$, $d'h'$, seront les projections de l'horizontale menée par le point donné, dans le plan cherché (n° 436) ; cette horizontale rencontrera le plan vertical en un point v', qui appartiendra à la trace verticale du plan demandé. $d'v$ et $d''h''$, seront les projections de la parallèle au plan vertical, menée par le point donné, dans le plan cherché ; le point h'', où cette droite rencontre le plan horizontal, appartiendra à la trace horizontale du plan demandé. Conduisant donc par les points, v', h'', des parallèles, TT', TT'', aux directions

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

connues, tt', tt''; les droites, TT', TT'', seront les traces demandées. Lorsqu'on aura opéré avec exactitude, ces traces concourront vers un même point de la ligne de terre (n° 404, 1°).

439. (fig. 255). *Par un point connu, mener un plan parallèle à un plan donné.* Les traces de deux plans parallèles étant parallèles (n° 400), les traces du plan cherché doivent être parallèles aux traces du plan donné. Mais, le point donné est dans le plan cherché; on connaît donc un point de ce plan, et les directions de ses traces; il est donc facile de trouver les traces du plan cherché (n° 438). Par exemple; si les traces du plan donné étant tt' et tt''; les projections du point donné sont d' et d''; on tirera par le point d', une parallèle $d'h'$ à TR, et par le point d'', une parallèle $d''h$ à tt''; par le point h, on mènera la verticale hk'; par le point v', où les droites hk', $d'h'$, se rencontrent, on conduira la parallèle TT', à tt' et par le point T où TT' rencontre TR, on tirera une parallèle TT'' à tt''; TT' et TT'' seront les traces du plan demandé. Pour vérifier l'exactitude de cette construction, on mènera des parallèles, $d'v$, $d''m''$, aux droites tt', TR; et tirant vh'' perpendiculaire à TR, le point h'', où cette perpendiculaire rencontre $d''m''$, devra se trouver sur la trace horizontale TT'' du plan demandé.

440. (fig. 256). *Un point et un plan étant donnés; on propose, de mener une perpendiculaire du point donné sur le plan donné, de trouver le pied de la perpendiculaire et de construire la longueur de cette perpendiculaire.* Supposez que d' et d'' soient les projections du point donné, et que $t't''$ soit le plan donné. Les projections de la ligne cherchée devant être perpendiculaires aux traces du plan donné (n° 409) et devant passer par les projections du point donné, il suffit de mener par les projections, d', d'', du point donné, des perpendiculaires, $d'r$, $d''s$, sur les traces, tt', tt'', du plan donné; $d'r$ et $d''s$, seront les projections de la perpendiculaire demandée. Ces projections étant connues, on déterminera les projections, p', p'', du pied de la perpendiculaire (n° 431), et l'on en déduira la longueur de cette perpendiculaire (n° 413).

441. (fig. 256). *Par un point donné, mener un plan perpendiculaire à une ligne donnée.* Le plan cherché devant être perpendiculaire à la ligne donnée, les traces de ce plan sont perpendiculaires aux projections de la ligne donnée (n° 409); mais le point donné appartient au plan cherché. On connaît donc un point du plan cherché, et les directions de ses traces. On sait donc construire les traces du plan cherché (n° 438). Par exemple, si les projections du point donné D, étant D', D'', les projections de la ligne donnée sont $d'r$ et $d''s$; pour construire les traces du plan mené par le point donné perpendiculairement à la ligne donnée; on observera que ces traces sont perpendiculaires aux projections, $d'r$, $d''s$, de la ligne donnée. Menant donc par le point D' une parallèle $D'q'$ à RT, et par le point D'', une perpendiculaire $D''v$, à $d''s$, $D'q'$ et $D''v$ seront les projections de l'horizontale menée par le point donné dans le plan cherché (n° 436). Le point q', où cette horizontale rencontre le

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

plan vertical, sera donc un point de la trace verticale du plan cherché ; mais cette trace doit être perpendiculaire à la projection verticale $d'r$ de la ligne donnée ; on construira donc cette trace, en menant par le point q' une perpendiculaire tt' à $d'r$. Si par le point t, où la trace tt' rencontre TR, on conduit une perpendiculaire tt'' à la projection horizontale $d''s$ de la ligne donnée ; tt'' sera la trace horizontale du plan demandé. Les traces de ce plan sont donc tt' et tt''. La remarque, du n° 414, donne un point de vérification. Si l'on construit le point de rencontre du plan $t'tt''$ avec la droite donnée, on trouvera que les projections de ce point, sont p' et p'', (n° 440).

442. *Remarque.* Le point donné D et le point p, de rencontre du plan cherché avec la droite donnée, étant situés dans le plan conduit par le point donné perpendiculairement à la ligne donnée ; la droite qui passe par les points D et p, sera dans ce plan ; elle sera donc perpendiculaire à la ligne donnée (n° 282). Les droites, $D'p'$, $D''p''$, sont donc les projections de la perpendiculaire menée du point donné sur la ligne donnée. Cette remarque conduit à la solution du problème suivant :

443. (fig. 256). *Un point et une droite étant donnés ; on propose de mener par le point donné une perpendiculaire à la ligne donnée, de déterminer le pied de cette perpendiculaire et de trouver la longueur de cette perpendiculaire.* Supposez que D' et D'' soient les projections du point donné D et que les droites, $d'r$, $d''s$, soient les projections de la ligne donnée. Par le point donné, conduisez un plan $t'tt''$ perpendiculaire à la ligne donnée (n° 441) ; déterminez ensuite les projections, p', p'', du point de rencontre de la droite donnée avec le plan $t'tt''$ (n° 431) ; les droites, $D'p'$, $D''p''$, seront les projections de la perpendiculaire menée du point donné sur la ligne donnée. Vous déduirez de ces projections, la longueur de la perpendiculaire menée du point donné sur la ligne donnée (n° 413.).

444. *Par une ligne donnée, conduire un plan perpendiculaire à un plan donné.* Si d'un point quelconque de la ligne donnée, on mène une perpendiculaire au plan donné ; cette perpendiculaire et la ligne donnée étant dans le plan cherché (n° 304), les points où ces droites rencontreront les plans de projection, appartiendront aux traces du plan cherché. On déterminera donc facilement deux points de chaque trace. Il y aura un point de vérification, car les traces devront se couper sur un même point de la ligne de terre. La solution de ce problème, ne dépend donc que des constructions des n^os^ 425 et 440. Si la ligne donnée était perpendiculaire au plan donné, toutes les perpendiculaires, menées des différens points de cette ligne sur le plan donné, se confondraient avec la ligne donnée (n° 255) ; de sorte que la construction ne pourrait donner qu'un point de chaque trace ; les traces du plan demandé seraient donc indéterminées. Et en effet, par une perpendiculaire à un plan donné, on peut conduire une infinité de plans perpendiculaires au plan donné (n° 302).

445. (fig. 256). *Construire l'angle formé par les deux traces d'un plan*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

donné. Supposez que le plan donné soit $t't t''$; prenez deux points quelconques, q', m'', sur les traces de ce plan et concevez la droite $q'm''$, qui joint ces points (*). Dans le triangle $q'tm''$, la droite $q'm''$, sera le côté opposé à l'angle cherché. Or, les côtés, tq', tm'', sont dans leur vraie grandeur; il suffit donc de construire la longueur du côté $q'm''$. Pour y parvenir; on mènera $q'\nu$ perpendiculaire à TR; la droite $m''\nu$, sera la projection horizontale de $q'm''$; prenant $\nu e = \nu m''$ et tirant l'hypoténuse eq'; cette hypoténuse, sera la longueur du côté $q'm''$ (n° 413); par conséquent, si des points t et q' comme centres, avec les rayons, tm'', $q'e$, on décrit des arcs; en menant des droites du point c, où ces arcs se coupent, aux points t et q', l'angle ctq', sera la vraie grandeur de l'angle formé par les traces, tt', tt'', du plan donné. Si le plan horizontal restant fixe, on conçoit que le plan vertical tourne autour de TR, jusqu'à ce qu'il soit perpendiculaire au plan horizontal; et si l'on fait tourner ensuite le triangle ctq' autour de tq' comme charnière; lorsque le point c sera dans le plan horizontal, tc coïncidera avec tm'', et le plan du triangle tcq', coïncidera avec le plan donné.

446. (fig. 257). *Déterminer l'angle formé par deux lignes droites.* Si par un point quelconque, on mène des parallèles aux lignes données (n° 421), l'angle formé par ces parallèles, mesurera l'angle des lignes données (n° 280). La question est donc réduite à construire l'angle formé par deux lignes droites qui se coupent. Supposez, que les projections du point d'intersection des lignes données soient a' et a'', que les projections de la première droite soient $a'b'$ et $a''b''$, et que les projections de la seconde droite soient $a'c'$ et $a''c''$. Si vous déterminez (n° 425) les points b'', c'', où les lignes données rencontrent le plan horizontal; a' et a'' seront les projections du sommet d'un triangle, dont la base sera $b''c''$ et dans ce triangle, l'angle opposé à la base $b''c''$, sera l'angle demandé. Or, la base $b''c''$ est dans sa vraie grandeur; il suffit donc de chercher les longueurs des deux autres côtés. Les projections de l'un de ces côtés étant $a''b''$ et $a'b'$, si vous prenez $pc = a''b''$, l'hypoténuse $a'c$, sera la longueur du côté *projeté* en $a''b''$ (n° 413); et prenant $pd = a''c''$, l'hypoténuse $a'd$ sera la longueur du côté projeté en $a''c''$. Par conséquent; si des points b'' et c'' comme centres, vous décrivez des arcs, avec les rayons, $a'c$, $a'd$ et si du point a, où ces arcs se coupent, vous menez des droites, ab'', ac'', aux extrémités de la base $b''c''$; le triangle $ab''c''$, sera la vraie grandeur du triangle dont la projection horizontale est $a''b''c''$; l'angle $b''ac''$, sera donc égal à l'angle formé par les lignes données. On peut construire le triangle $b''ac''$, par une méthode plus élégante. En effet; la base $b''c''$ étant connue, il suffit de trouver la position et la grandeur de la perpendiculaire ap'',

(*) La droite $q'm''$, n'étant située dans aucun des plans de projection, on ne doit pas la tirer dans l'épure; nous n'avons mené cette ligne que pour fixer les idées. Cette remarque est générale; on ne doit mener dans les épures que les lignes situées dans les plans de projection.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

menée du sommet a, sur la base. Or, a'' est la projection horizontale du sommet a; par conséquent, si du sommet du triangle cherché, on menait une perpendiculaire sur le plan horizontal, le pied de cette perpendiculaire serait a''; conduisant par a'', une perpendiculaire $a''p''$ sur la base $b''c''$, qui est dans le plan horizontal; la droite que l'on tirerait du sommet du triangle, au point p'', serait perpendiculaire à $b''c''$ (n° 253); le point p'', ainsi déterminé, est donc le pied de la perpendiculaire menée du sommet du triangle sur la base; $a''p''$ est donc la projection horizontale de cette perpendiculaire; mais $a'p$, mesure la différence des perpendiculaires menées des extrémités de cette droite sur le plan horizontal; prenant donc $ph = a''p''$ et tirant l'hypoténuse $a'h$; cette hypoténuse sera la hauteur du triangle cherché (n° 413). Portant sur la droite $p''a''s$, une partie $p''a = a'h$ et tirant les droites, ab'', ac''; le triangle demandé, sera $ab''c''$ et l'angle $b''ac''$, mesurera l'inclinaison des lignes données. On pourrait exécuter la même construction par rapport au plan vertical, ce qui donnerait le moyen de vérifier si l'on a opéré avec exactitude.

447. *Remarque.* Cette construction suppose que les deux lignes données rencontrent l'un des plans de projection. Si l'une des lignes données était parallèle au plan horizontal; on mènerait, par un point quelconque b'' du plan horizontal, des parallèles aux lignes données; l'une de ces parallèles serait dans le plan horizontal (n° 322), en $b''c''$, par exemple; les projections de l'autre parallèle seraient des droites $b'a'$, $b''a''$; conduisant une perpendiculaire $a'a''$ à TR, les points a', a'', seraient les projections d'un point de la seconde parallèle; concevant une perpendiculaire menée par ce point sur $b''c''$; la projection horizontale de cette perpendiculaire serait une droite $a''p''$ perpendiculaire sur $b''c''$; prenant $ph = a''p''$ et tirant la droite $a'h$; cette droite serait la longueur de la perpendiculaire projetée en $a''p''$. Portant donc sur la droite $p''s$ une partie $p''a = a'h$ et tirant ab'', l'angle $ab''p''$ mesurerait l'inclinaison des lignes données. Enfin, si les deux lignes données étaient parallèles au plan horizontal, en tirant par un point quelconque a'' du plan horizontal, des parallèles, $a''b''$, $a''c''$, aux lignes données, ces parallèles seraient dans le plan horizontal (n° 322); l'angle $b''a''c''$ mesurerait donc l'inclinaison des lignes données. Lorsqu'en menant, par un point quelconque, des parallèles aux lignes données, ces parallèles se confondent, les lignes données sont parallèles, et l'angle formé par ces lignes est nul (n° 281).

448. (fig. 257). *Par le point d'intersection de deux droites données; mener, dans le plan de ces droites, une ligne qui divise l'angle qu'elles forment en deux parties égales.* Supposez que les projections de la première droite soient $a'b'$, $a''b''$, et que celles de la seconde soient $a'c'$, $a''c''$; construisez l'angle $b''ac''$ formé par ces droites (n° 446). Du point a, menez une droite ae'', qui divise l'angle $b''ac''$ en deux parties égales; l'intersection e'', des droites ae'', $b''c''$, sera le point où la ligne demandée rencontre le plan horizontal. La projection verticale de ce point, sera le pied v de la per-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

pendiculaire menée du point e'', sur TR (n° 386) ; e'' et v, seront donc les projections d'un point de la ligne cherchée ; mais les projections de cette ligne doivent passer par les projections, a'', a', du point d'intersection des lignes données ; les droites, $a''e''$, $a'v$, seront donc les projections de la ligne demandée. Si la ligne cherchée, devait diviser l'angle des lignes données, en deux parties qui fussent dans un rapport donné, la construction ne différerait de la précédente, qu'en ce que la droite ae'' diviserait l'angle $b''ac''$, dans le rapport donné. Il y aurait deux solutions.

449. (fig. 258). *Connaissant, l'angle de deux droites et les angles qu'elles forment avec la verticale ; on propose d'en déduire l'angle formé par les projections horizontales de ces droites.* Supposez, que les droites données se coupent en s', qu'elles forment avec la verticale $s'p$, des angles connus, $ps'a$, $ps'b$; qu'elles forment entre elles l'angle donné $as'n'$ et que la première droite soit $s'a$; désignez la seconde droite par D ; prenez pour plan vertical de projection, le plan $ps'a$, et conduisez arbitrairement le plan horizontal de projection. Concevez que RT soit la ligne de terre ; ap sera la projection horizontale de la droite $s'a$. Il s'agit de construire la projection horizontale de la droite D. Or, cette projection passe par le point p ; il suffit donc d'en déterminer un second point. Cela posé ; le point de rencontre de la ligne D, avec le plan horizontal, est facile à déterminer, car cette ligne, qui passe par le point s', devant faire avec la verticale $s'p$, un angle égal à $ps'b$, le point demandé sera sur l'arc $br''c''$, décrit du point p comme centre avec le rayon pb (n° 288). Mais, en prenant $s'm' = s'b$ et tirant la droite am' ; cette droite sera la distance du point a, au point où la droite D rencontre le plan horizontal ; ce dernier point doit donc se trouver sur l'arc $d''e''$, décrit du point a comme centre avec le rayon am' ; ce point sera donc l'intersection r'', des arcs bc'', $d''e''$. Les points p et r'' étant les projections horizontales de deux points de la droite D, la projection de cette droite sera pr''. Les projections horizontales des droites données, sont donc pa et pr'' ; la projection horizontale de l'angle formé par les droites données, est donc l'angle $r''pa$ (*). Ce dernier angle est l'angle des droites données, réduit à l'horizon. Ainsi, pour *réduire un angle à l'horizon*, il suffit de construire l'angle formé par les projections horizontales des côtés de cet angle. Ce problème mérite toute l'attention des élèves ; il est de la plus grande utilité dans le *levé des plans*, parce qu'on ne doit construire sur la *carte* d'un pays, que les projections horizontales des angles observés. Ce qui conduit à *réduire* ces angles *à l'horizon*. Pour y parvenir, on mesure, avec un *graphomètre* (B. n° 23), l'angle formé par les côtés de l'angle observé, ainsi que les

(*) On voit facilement que la droite $s'r''$, supposée dans l'espace, est la ligne D, car la ligne $s'r''$, forme avec la verticale un angle $r''s'p$, égal à l'angle donné $bs'p$, et elle fait avec $s'a$ un angle $r''s'a$, qui est égal à l'angle donné $as'n'$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

angles que ces côtés font avec la verticale. On en déduit la projection horizontale de cet angle, par le procédé que nous venons d'indiquer; cette projection est l'*angle observé, réduit à l'horizon.* Par exemple, si l'angle observé, étant de 82° 10′, les angles formés par les côtés de cet angle, avec la verticale, sont de 74° 24′ et de 77° 42′; on aura (fig. 258)...

$$as'n' = 82° 10'; \; ps'a = 74° 24'; \; ps'b = 77° 42'.$$

Construisant ces angles avec un *rapporteur*, et cherchant l'angle réduit à l'horizon, on trouvera que l'angle $r''pb$ est de 85° 12′. Ce résultat s'accorde avec celui de Bezout. (Voyez la page 189, du texte de Bezout).

Les trois angles plans, $ps'a$, $ps'r''$, $as'r''$, formant un angle solide en s', chacun de ces angles plans, est plus petit que la somme des deux autres (n° 346). Cette condition étant toujours remplie, lorsqu'on mesure exactement les angles sur le terrain, les arcs, bc'', $d''e''$, se coupent nécessairement; ce qui détermine l'angle réduit à l'horizon. Lorsqu'on se donne arbitrairement ces trois angles, on doit les choisir de manière que chacun d'eux, soit moindre que la somme des deux autres. Si cette condition n'était pas remplie, la construction indiquerait l'impossibilité du problème, car les arcs $d''e''$ et bc'', ne se rencontreraient pas.

450. (fig. 257). *Construire l'angle formé par une droite avec un plan.* Si par un point quelconque de la droite, on mène une perpendiculaire au plan, l'angle formé par ces droites sera le complément de l'angle demandé (n° 285). La question est donc ramenée à celle du n° 446. Par exemple, les projections d'une droite étant $a'b'$ et $a''b''$, si l'on veut trouver l'angle formé par cette droite, avec le plan $t'tt''$; on prendra un point quelconque de cette droite; par les projections, a', a'', de ce point, on mènera des perpendiculaires, $a'c'$, $a''c''$, sur les traces, tt', tt'', du plan donné. Ces deux premières droites seront les projections d'une perpendiculaire au plan $t'tt''$ (n° 409). Construisant (n° 446) l'angle $b''ac''$, formé par cette perpendiculaire avec la ligne donnée, cet angle sera le complément de l'angle demandé. Menant donc, ah'' perpendiculaire sur ab'', l'angle $c''ah''$, sera l'angle formé par la droite donnée avec le plan donné.

451. (fig. 255). *Déterminer les angles formés par un plan donné avec les plans de projection.* Supposez que $t'tt''$ soit le plan donné. Pour construire l'angle formé par ce plan avec le plan horizontal, menez arbitrairement un plan vertical $p''sr'$, perpendiculaire à la trace horizontale tt''; les intersections de ce plan, avec le plan donné et avec les plans de projection, seront des droites $p''r'$, $p''s$, sr'; les lignes $p''r'$, $p''s$, seront perpendiculaires à tt'' et sr' sera perpendiculaire sur RT. Les droites, $p''s$, $p''r'$, situées dans le plan horizontal et dans le plan donné, étant perpendiculaires à l'intersection tt'' de ces deux plans et passant par un même point p'' de l'intersection; l'angle $r'p''s$, formé par ces droites, mesure l'inclinaison du plan donné sur le plan horizontal (n° 293); il suffit donc de trouver la vraie grandeur de l'angle $r'p''s$,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

du triangle $r'p''s$. Or, ce triangle est rectangle en s; les vraies grandeurs des côtés de l'angle droit, sont sr' et sp''; prenant donc $sp = sp''$ et tirant la droite pr', le triangle $r'sp$, sera la vraie grandeur du triangle $r'sp''$; l'angle $r'ps$, mesurera donc l'angle formé par le plan donné avec le plan horizontal. Une construction analogue donnerait l'angle formé par le plan $t'tt''$, avec le plan vertical de projection.

452. (fig. 255). *Construire un plan, qui divise en deux parties égales l'angle formé par un plan donné avec le plan horizontal.* Supposez que $t'tt''$ soit le plan donné; construisez l'angle $r'ps$, formé par le plan donné avec le plan horizontal (n° 451). Si le plan cherché était mené, sa trace horizontale serait tt'', et le plan vertical $p''sr'$, perpendiculaire à tt'', couperait le plan horizontal, le plan donné et le plan cherché, suivant trois droites $p''s$, $p''r'$, $p''n'$, qui seraient perpendiculaires à l'intersection tt'' de ces trois plans; les angles formés par ces droites, mesureraient donc les inclinaisons respectives des plans qui les contiennent; et par conséquent, la droite $p''n'$ diviserait l'angle $r'p''s$ en deux parties égales. Si l'on conçoit que le triangle $r'p''s$, tourne autour de $r's$, pour venir s'appliquer sur le plan vertical; le point p'' viendra en un point p, tel que $sp = sp''$; les points, s, n', r', resteront fixes et les angles, $n'pr'$, $n'ps$, mesureront les angles formés par le plan cherché avec le plan donné et avec le plan horizontal; mais ces angles doivent être égaux. Tirant donc une droite pn', qui divise l'angle connu $r'ps$, en deux parties égales; le point n', où cette droite rencontre la verticale sr', sera le point où la droite $p''n'$, rencontre le plan vertical $t'tR$; or cette droite est dans le plan cherché; le point n' appartient donc à la trace verticale du plan cherché; mais tt'' est la trace horizontale de ce plan; la droite ts', menée par les points t et n', sera donc la trace verticale du plan demandé; or sa trace horizontale est tt''; ce plan est donc entièrement déterminé (n° 406).

Remarque. Si les angles formés par le plan demandé, avec le plan donné et avec le plan horizontal, devaient être dans un rapport connu; la construction ne différerait de la précédente qu'en ce que la droite pn', diviserait l'angle $r'ps$, en deux angles $n'pr'$, $n'ps$, qui seraient dans le rapport donné.

453. (fig. 259). *Déterminer l'angle formé par deux plans donnés.* Si par un point quelconque, on menait deux perpendiculaires aux plans donnés (n° 440), l'angle formé par ces droites serait facile à construire (n° 446), et le supplément de cet angle mesurerait l'inclinaison des plans donnés (n° 341). Mais, on peut résoudre directement ce problème. En effet; prenez un point quelconque de l'intersection des plans donnés; par ce point, menez, dans ces plans, des perpendiculaires à l'intersection; l'angle formé par ces perpendiculaires, sera l'angle demandé (n° 293). Supposant donc que les plans donnés soient $t'tt''$ et $t'Tt''$; construisez (n° 422) la projection horizontale $t''a$ de l'intersection $t't''$ de ces plans. Par un point quelconque v'' de at'',

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

concevez un plan $nd''c''$, perpendiculaire à $t't''$; ce plan coupera les plans donnés suivant des droites nc'', nd'', perpendiculaires à l'intersection $t't''$ et la trace horizontale de ce plan sera une ligne $c''d''$, perpendiculaire à la projection horizontale at'' de l'intersection (n° 409); l'angle formé par les droites nd'', nc'', sera donc l'angle demandé; il suffit donc de construire le triangle $nd''c''$ dans sa vraie grandeur. La base de ce triangle est $c''d''$ et le sommet n, étant dans l'espace, les côtés nd'', nc'', ne sont pas dans leur vraie grandeur; on pourrait trouver les longueurs de ces côtés; mais la construction est plus élégante, en cherchant la position et la grandeur de la perpendiculaire np'', menée du sommet n, sur la base $d''c''$. En raisonnant comme dans le n° 446, on démontrera que le pied de cette perpendiculaire est à l'intersection p'', des lignes connues, at'', $d''c''$; la question est donc réduite à trouver la grandeur de np''. Pour y parvenir, on remarquera que le plan $nc''d''$, étant perpendiculaire à $t't''$; l'angle $p''nt''$ est droit (n° 247). Concevant donc que le plan vertical $t'at''$, tourne autour de $t'a$, comme charnière; dans ce mouvement, l'horizontale at'', perpendiculaire à la verticale at', ne sortira pas du plan horizontal de projection (n° 361); les points, p'', t'', de cette horizontale, décriront des arcs, $p''r''r$, $t''s''p$, dont le centre commun sera en a, et dont les rayons seront ap'' et at''; l'angle $p''nt''$ restera droit. Lorsque at'' tombera sur ap; les points, p'', t'', seront en r et en p; $t't''$ coïncidera avec $t'p$ et la perpendiculaire $p''n$, à $t't''$, coïncidera avec la perpendiculaire rp', menée du point r, sur $t'p$; de sorte que rp' est la vraie grandeur de la hauteur $p''n$, du triangle $nd''c''$. Prenant donc sur $p''t''$, une partie $p''v = rp'$, et tirant les droites vd'', vc''; le triangle $vd''c''$, sera la vraie grandeur du triangle $nd''c''$; l'angle $d''vc''$, mesurera donc l'inclinaison des plans donnés.

Remarque. Si l'on veut *trouver les projections du sommet n*; on mènera par le point p' des perpendiculaires, $p'k$, $p'm'$, aux droites TR, $t'a$; et l'on concevra que le plan vertical $t'ap$ tourne autour de $t'a$, comme charnière, pour venir s'appliquer sur le plan vertical $t'at''$. Dans ce mouvement, le point p', décrira un arc de cercle dont le centre sera en m', et dont le rayon sera $m'p'$ (n° 361). Cet arc, étant situé dans le plan horizontal qui passe par $m'p'$, la projection verticale de cet arc est l'horizontale $p'm'$ et la projection horizontale du même arc, est l'arc kn'', décrit du point a comme centre avec le rayon ak. Lorsque le plan $t'ap$, sera parvenu dans la position $t'at''$; $p'r$ coïncidera avec np'' et le pied k de la verticale $p'k$, tombera sur le point n'', où l'arc kn'' rencontre at''; de sorte que $p'k$, coïncidera avec nn''; le point n'' est donc la projection horizontale du point n. Mais, les points n et p' étant à la même distance $p'k$ du plan horizontal, la projection verticale du point n, doit se trouver sur l'horizontale $p'm'$; menant donc par le point n'', une perpendiculaire $n''n'$, sur TR; le point n', où cette perpendiculaire rencontre $p'm'$, sera la projection verticale du sommet n. Ainsi, pour construire les projections n', n'', du sommet n, du triangle $nc''d''$; il suffit de mener $p'k$ perpendiculaire à RT et de prendre $p''n'' = rk$; le point n'' est la projection horizontale du sommet n; conduisant par les

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

points p', n'', des perpendiculaires, $p'm'$, $n''n'$, aux droites at', TR, le point n' où ces droites se rencontrent, sera la projection verticale du sommet n; et lorsque la construction sera bien faite, le point n' devra se trouver sur la projection verticale $t's$ de l'intersection des plans donnés. Les projections n', n'', du sommet n étant connues, il sera facile d'en déduire les longueurs des côtés nd'', nc'' (n° 413); lorsqu'on aura opéré avec exactitude, ces longueurs devront être égales aux droites vd'', vc''

454. En général; pour construire l'angle formé par deux plans $t'tt''$, $t'Tt''$ (fig. 259); déterminez l'intersection t' des traces verticales de ces plans. Menez $t'a$ perpendiculaire sur la ligne de terre; joignez le pied a de cette perpendiculaire avec le point t'', où les traces horizontales des plans donnés se coupent; par un point quelconque p'' de at'', menez $d''c''$ perpendiculaire sur at''; prenez $ar = ap''$ et $ap = at''$; tirez la droite $t'p$; et, par le point r, menez rp', perpendiculaire à $t'p$; portez sur $p''t''$, une partie $p''v = rp'$; tirez les droites vd'', vc''. L'angle $d''vc''$, sera l'angle formé par les plans donnés. Si l'on effectuait une construction analogue, sur le plan vertical, on devrait trouver le même angle.

455. (fig. 259). *Construire un plan qui passe par l'intersection de deux plans donnés et qui divise l'angle qu'ils forment en deux parties égales.* Si les deux plans donnés sont, $t'it''$ et $t'Tt''$; le plan cherché devant passer par l'intersection $t't''$ des plans donnés, les traces de ce premier plan, passeront par les points t' et t'', où l'intersection $t't''$, rencontre les plans de projection. On connaît donc un point de chacune des traces du plan cherché; or ces traces doivent passer par un même point de la ligne de terre; il suffit donc de trouver un autre point de l'une des traces du plan cherché. Pour déterminer un point de la trace horizontale, on construira d'abord, sur le plan horizontal, l'angle $d''vc''$, formé par les plans donnés (n° 454). Si le plan cherché était mené; en conduisant un plan $nd''c''$ perpendiculaire à l'intersection $t't''$ des trois plans; ce nouveau plan couperait les trois autres, suivant des droites, nd'', nq'', nc'', perpendiculaires à l'intersection $t't''$ de ces trois plans; les angles formés par ces droites, mesureraient donc les inclinaisons respectives des trois plans. La droite nq'', diviserait donc l'angle $d''nc''$, en deux parties égales. Et par conséquent, si l'on tire une droite vq'', qui divise l'angle $d''vc''$ en deux parties égales, le point q'', sera le point où la droite nq'' rencontre le plan horizontal; mais cette droite est dans le plan cherché; q'' est donc un point de la trace de ce plan; or t'' est un point de la même trace; la droite $t''q''P$, est donc la trace horizontale du plan demandé. Les points P et t', appartenant à la trace verticale de ce plan, cette trace est la droite Pt', menée par les points P et t'.

Remarque. Si les angles formés par le plan cherché avec les deux plans donnés, devaient être dans un rapport donné; il suffirait de mener la droite vq'', de manière qu'elle divisât l'angle connu $d''vc''$, dans le rapport donné. Le reste de la construction serait le même.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

456. (fig. 256). *On connaît un point d'une parallèle à un plan donné; l'une des projections de cette droite est connue. Il s'agit de construire l'autre projection.* Supposez, que D' et D'', soient les projections du point donné, que $T''R$ soit la projection horizontale connue, et que $T''TT'''$ soit le plan donné. Par le point donné, menez un plan $t't t''$ parallèle au plan donné (n° 439); la droite cherchée sera toute entière dans le plan $t't t''$ (n° 320); mais elle doit aussi se trouver dans le plan vertical $t''Rt'$, mené par la projection donnée; l'intersection des plans, $t't t''$, $t''Rt'$, sera donc la ligne demandée. Les projections, nt', $t''R$, de cette intersection, seront donc les projections de la parallèle au plan donné; de sorte que nt' sera la projection demandée. Il y a un point de vérification, car la projection verticale nt', doit passer par la projection verticale D', du point donné. On peut encore dire; la droite demandée devant être parallèle au plan $T''TT'''$, le plan vertical $T''RT'$, mené par cette droite, coupe le plan $T'TT'''$, suivant une parallèle à la droite demandée (n° 314). La projection verticale de la droite demandée, doit donc être parallèle à la projection verticale fT' de l'intersection des plans, $T'TT''$, $T'RT'''$. Mais, cette projection passe par D'; on construira donc la projection demandée, en menant par le point D', une parallèle nt' à fT'.

457. (fig. 260). *Une parallèle au plan vertical, étant donnée, de grandeur et de position, on propose de conduire par le milieu de cette droite, un plan perpendiculaire à cette droite.* Si ad' et $a''d''$, sont les projections de la droite donnée; les milieux m', m'', de ces projections, seront les projections du milieu m de la ligne donnée (n° 418). La question est donc réduite à mener par le point m, un plan perpendiculaire à la ligne donnée; ce qu'on peut exécuter par la méthode générale du n° 441. Mais, la position particulière de la droite donnée, simplifie la construction. En effet; le milieu m de la ligne donnée appartenant au plan cherché et ce plan étant perpendiculaire au plan vertical (n° 410); si par le milieu de la ligne donnée, on imagine une perpendiculaire au plan vertical, cette perpendiculaire sera dans le plan cherché (n° 304); le pied m' de cette perpendiculaire, sera donc un point de la trace verticale du plan demandé. Or, les traces de ce plan doivent être perpendiculaires aux projections de la ligne donnée; il suffit donc de mener, par le point m' une perpendiculaire $t't$ à $d'a$, et par le point t une perpendiculaire tt'' à $a''d''$; les traces du plan demandé seront tt' et tt''. Ce plan étant perpendiculaire au plan vertical, la trace horizontale tt'' sera perpendiculaire à TR (n° 401).

458. (fig. 254). *Par une droite donnée, mener un plan parallèle à la ligne de terre.* Désignez la droite donnée par b. Lorsque cette droite ne sera pas parallèle à TR, en menant par un point quelconque de la droite b, une parallèle c, à TR, le plan des droites b et c sera déterminé (n° 428) et ce plan jouira de la propriété demandée (n° 323). Quand la droite sera parallèle à TR, les droites b et c se confondront (n° 241), le plan de ces

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

deux droites sera indéterminé, de sorte que le plan demandé pourra prendre une infinité de positions. Examinons ces différens cas; 1°. quand la droite donnée rencontrera les deux plans de projection, les deux points de rencontre appartiendront aux traces du plan demandé; menant par ces deux points des parallèles à la ligne de terre, ces parallèles seront les traces du plan demandé (n° 404). Par exemple, si les projections de la ligne donnée sont $d'n$ et $d''m$, on construira les points, d', d'', où cette droite rencontre les plans de projection; menant par ces points des droites $d'p'$, $d''p''$, parallèles à TR, ces droites seront les traces du plan demandé; 2°. lorsque la ligne donnée ne rencontrera pas l'un des plans de projection, le plan vertical par exemple, elle sera parallèle à ce plan; tirant par un point quelconque de cette droite, une parallèle à la ligne de terre, cette parallèle sera toute entière dans le plan demandé (n° 322); ce plan passera donc par deux parallèles au plan vertical, menées par un même point; le plan demandé sera donc parallèle au plan vertical (n° 327), et par conséquent perpendiculaire au plan horizontal; la projection horizontale de la ligne donnée, sera donc la trace horizontale du plan demandé; cette trace sera parallèle à la ligne de terre (n° 403); elle déterminera ce plan; 3° enfin, quand la ligne donnée ne rencontrera aucun des plans de projection, elle est parallèle à chacun de ces plans; elle est donc parallèle à TR (n° 331); on peut donc mener par cette droite une infinité de plans parallèles à la ligne de terre. Voyons comment on peut les construire. Si les droites $b'q'$, $b''q''$, sont les projections données d'une parallèle à la ligne de terre; ces projections seront parallèles à la ligne de terre (n° 398). Menant dans le plan vertical une parallèle quelconque $d'p'$ à TR, la droite $d'p'$ sera parallèle à la ligne donnée (n° 265); ces deux dernières droites détermineront donc un plan parallèle à TR; la trace verticale de ce plan sera $d'p'$, sa trace horizontale sera parallèle à TR; il suffit donc de déterminer un point de cette dernière trace. A cet effet, on conduira par un point quelconque d' de la trace verticale du plan cherché; une perpendiculaire $d'm$ à TR; les points d' et m seront les projections d'un point du plan cherché. Mais, en menant une perpendiculaire quelconque $b'b''$ à TR, les points b' et b'', où cette droite rencontre les projections de la ligne donnée, seront les projections d'un point du plan cherché; les droites $d'b'n$, $mb''d''$, seront donc les projections d'une ligne située dans ce plan; le point d'' où cette ligne rencontre le plan horizontal, appartient donc à la trace horizontale du plan demandé; cette trace sera donc la droite $d''p''$, menée par le point d'' parallèlement à TR. La position de l'une des traces du plan demandé étant arbitraire, et l'autre trace pouvant s'en déduire par la méthode que nous venons d'indiquer, il sera facile de construire les traces des plans parallèles à la ligne de terre, qui passent par une parallèle à cette ligne.

459. *On propose de faire passer la surface d'une sphère, par quatre points donnés, qui ne sont pas dans un même plan.* Nous avons démontré n° 355), que ce problème est toujours possible, et qu'il n'admet qu'une seule solution. Les constructions indiquées sont faciles à exécuter. En effet,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

joignez les points donnés par des droites; menez des plans perpendiculaires sur les milieux de ces droites, et déterminez les intersections de ces plans, pris deux à deux (n° 422); ces intersections se rencontreront en un point unique, qui sera le centre de la sphère demandée. Cherchant ensuite les vraies distances du centre de la sphère, aux quatre points donnés, ces quatre distances devront être égales, car chacune d'elles sera un rayon de la sphère. Vous connaîtrez donc le rayon et le centre de la sphère demandée; le problème sera donc complètement résolu. Les élèves devront exécuter cette épure. La construction devient plus simple, lorsqu'on peut disposer arbitrairement des plans de projection. En effet; dans ce cas, faites passer un plan par trois des points donnés et regardez ce plan, comme l'un des plans de projection; tirez une droite du quatrième point à l'un des trois autres; prenez pour second plan de projection, un plan parallèle à cette droite, et perpendiculaire au premier plan de projection. Regardez le premier plan comme horizontal, et le second comme vertical; alors, trois des quatre points donnés seront en, a'', b'', c'', (fig. 260), dans le plan horizontal, et les projections d', d'', du quatrième point, seront telles, que la droite menée de ce point, au point a'', sera parallèle au plan vertical; la projection horizontale $a''d''$ de cette droite, sera donc parallèle à TR (n° 403), et les points, a'', b'', c'', étant dans le plan horizontal, les projections verticales de ces points, seront les pieds, a, b, c, des perpendiculaires menées de ces points sur la ligne de terre. Par les milieux, n'', r'', des horizontales, $a''c''$, $a''b''$, menez des plans perpendiculaires à ces droites; les traces horizontales de ces plans, seront des perpendiculaires, $n''s''$, $r''s''$, aux lignes $a''c''$, $a''b''$; et l'intersection de ces plans verticaux, sera une verticale, qui passera par le point s''; la projection horizontale de cette intersection sera donc le point s'', et la projection verticale de la même ligne sera une droite $s''r'$, perpendiculaire à TR. Tous les points de la verticale qui passe par le point s'', sont à égale distance des trois points donnés, a'', b'', c'' et il n'y a que les points de cette droite qui jouissent de cette propriété (n° 339); le centre de la sphère demandée est donc sur cette droite; ainsi, s'' est la projection horizontale du centre de la sphère et la projection verticale du même centre est sur la ligne $s''r'$. La droite menée du point a'', au point dont les projections sont d' et d'', étant parallèle au plan vertical; si par le milieu de cette droite on mène un plan $t't t''$ perpendiculaire à cette droite, ce plan sera perpendiculaire au plan vertical de projection (n° 410); sa trace verticale $t't$ sera perpendiculaire sur le milieu m' de ad' (n° 457); la projection verticale de l'intersection de ce plan, avec la verticale qui passe par s'', sera l'intersection s', des droites $s''r'$, tt', (n° 457). Ainsi, les points, s', s'', sont les projections du point d'intersection des plans perpendiculaires sur les milieux des droites qui joignent les quatre points donnés; s' et s'' sont donc les projections du centre de la sphère demandée. Les droites, $s'a$, $s''a''$, étant les projections d'un rayon de la sphère, si l'on prend $pr = s''a''$ et si l'on mène l'hypoténuse rs'; cette hypoténuse sera la vraie grandeur du rayon de la

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

sphère demandée. Le problème est donc résolu. Pour vérifier l'exactitude de la construction, on déterminera les distances du centre de la sphère aux trois autres points donnés (n° 413); ces distances devront être égales au rayon rs', de la sphère.

460. *Circonscrire une sphère à une pyramide triangulaire.* La surface de la sphère devant passer par les quatre sommets de la pyramide et ces sommets etant connus, il s'agit de construire une sphère qui passe par quatre points donnés (n° 459).

461. (fig. 275). *Inscrire une sphère dans une pyramide triangulaire.* Ce problème etant toujours possible, il suffit d'exécuter les constructions indiquées dans le n° 358. La pyramide est donnée, les quatre sommets sont donc connus; on construira les plans qui passent par ces points pris trois à trois (n° 426); ce qui déterminera les *faces* de la pyramide. Ses *arêtes* seront les droites qui joignent les sommets. Si par ces droites, on mène des plans qui divisent en deux parties égales les angles formés par les faces de la pyramide (n° 455), on pourra trouver le point d'intersection de ces plans (n° 423); ce qui déterminera le centre de la sphère demandée. Construisant les longueurs des perpendiculaires menées du centre de la sphère sur les faces de la pyramide (n° 440), ces quatre perpendiculaires devront être égales, car chacune d'elles sera un rayon de la sphère. Afin de simplifier cette construction, prenez la base ABC, de la pyramide, pour le plan horizontal de projection et menez le plan vertical de projection par la droite AC. Supposez que D' et D'' représentent les projections du sommet D de la pyramide; tirez une perpendiculaire BB' à TR et menez les droites $D'A$, $D'B'$, $D'C$, $D''A$, $D''B$, $D''C$. Ces droites seront les projections des arêtes, DA, DB, DC, de la pyramide (*). Supposez le problème résolu. Si d' et d'' sont les projections du centre d de la sphère inscrite, vous pourrez considérer le point d, comme le sommet d'une seconde pyramide $dABC$; la section de cette pyramide par un plan horizontal xy, sera un triangle abc dont les côtés seront respectivement parallèles aux côtés de la base ABC (n° 270). Les projections des côtés, ab, ac, bc, seront donc des parallèles, $a''b''$, $a''c''$, $b''c''$, aux lignes, AB, AC, BC (n° 384). Si ces parallèles étaient, connues, le problème serait résolu, car en prolongeant les droites, Aa'', Bb'', Cc'', ces droites se couperaient en un point d'' qui serait la projection horizontale du centre d de la sphère; conduisant des droites, $a''a'$, $b''b'$, $c''c'$, perpendiculaires à TR, les points, a', b', c', où ces droites rencontrent la ligne xy, seraient les projections verticales des points a, b, c; les droites, Aa', Bb', Cc', prolongées, seraient donc les projections verticales des arêtes,

(*) *Les points situés dans l'espace, ne sont pas indiqués sur la figure.* Ainsi, D'' et D' étant les projections d'un point D de l'espace, les droites DA, DB, DC, ne sont pas indiquées sur l'épure.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

dA, dB, dC, de la pyramide $dABC$; ces trois premières droites se couperaient donc en un point d' qui serait la projection verticale du centre d. Les points, d', d'', ainsi déterminés, seraient donc les projections du sommet d de la sphère inscrite; de sorte que la droite $d'd''$, serait perpendiculaire sur TR (n° 392). Or, la sphère est tangente au plan horizontal; le rayon mené au point de tangence est donc vertical. La longueur de ce rayon est donc la perpendiculaire $d'M$ à TR. Si l'on mène des perpendiculaires, du centre d, sur les trois autres faces, DAB, DAC, DBC, ces perpendiculaires devront être égales au rayon $d'M$, et les pieds de ces perpendiculaires seront les points où la sphère touche les faces de la pyramide (n° 440). La question est donc réduite à construire le triangle $a''b''c''$. Pour déterminer le côté $b''c''$, on mènera par le sommet D, un plan vertical perpendiculaire à BC. Ce plan coupera les plans DBC, dBC, $D''BC$, suivant trois droites DE, l' (*), $D''E$, perpendiculaires à BC. Les angles formés par les deux premières droites, avec la troisième, mesureront donc les inclinaisons des plans, DBC, dBC, sur le plan horizontal. L'intersection DE sera l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit seront $D'F$ et $D''E$. Prenant donc $Fh = D''E$ et joignant $D'h$, l'angle $D'hF$ mesurera l'angle que le plan DBC forme avec l'horizon. Tirant donc une droite hl, qui divise l'angle $D'hF$ en deux parties égales, menant lH perpendiculaire sur TR et concevant que l'on transporte $D'FH$, de manière que les côtés, $D'F$, Fh, coïncident avec les côtés, DD'', $D''E$, les droites, hD', hl, seront les intersections du plan vertical $DD''E$, avec les faces, DBC, dBC; de sorte qu'en prenant $Ee = hH$, le point e sera la projection horizontale du point de rencontre de la droite l', avec l'horizontale bc; tirant donc par le point e, une parallèle, $b''c''$, à BC, cette parallèle sera la projection horizontale du côté bc. Par la même raison, pour construire les projections, $a''b''$, $a''c''$, des deux autres côtés du triangle abc, on mènera des perpendiculaires $D''G$, $D''F$, sur les côtés AB, AC. On portera $D''G$ de F en n et $D''F$, de F en m; on tirera les hypoténuses, $D'n$, $D'm$, et l'on mènera des droites, nz, mk, qui divisent les angles, $D'nF$, $D'mF$, en deux parties égales; des points z et k, on abaissera des perpendiculaires zr, kp, sur TR; on prendra $Gg = nr$, $Ff = mp$, et mènera par les points, g, f, des parallèles, $a''b''$, $a''c''$, aux côtés, AB, AC; ce qui déterminera le triangle $a''b''c''$. On en déduira le centre et le rayon de la sphère, comme il a été indiqué.

On en déduit cette règle générale; *pour construire la sphère inscrite dans la pyramide DABC. Prenez la base ABC, dans le plan horizontal de projection et menez le plan vertical de projection par l'arête AC. Les projections D', D'', du sommet D, seront sur une perpendiculaire D'D'' à TR. Par le point D'', conduisez des perpendiculaires D''E,*

(*) l' désigne l'intersection des plans $DD''E$, dBC.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

D''G, sur les côtés BC, BA. Prenez, Fh = D''E, Fm = FD'', Fn = D''G. Tirez les hypoténuses, D'h, D'm, D'n et menez des droites, hl, mk, nz, qui divisent les angles, D'hF, D'mF, D'nF, en deux parties égales. Par les points, l, k, z, où ces droites rencontrent une parallèle quelconque xy, à TR, abaissez des perpendiculaires, lh, kp, zr, à TR. Prenez, Ee = hH, Ff = mp, Gg = nr; par les points, e, f, g, menez des parallèles, b''c'', c''a'', a''b'', aux côtés, BC, CA, AB. Les prolongemens des droites, Aa'', Bb'', Cc'', devront se couper en un point d'', qui sera la projection horizontale du centre, d, de la sphère inscrite. Par les points, a'', d'', tirez des perpendiculaires, a''S', d''S, sur TR et menez la droite indéfinie Aa'X; les droites; d''S, AX, se couperont en un point d', qui sera la projection verticale du centre, d. La droite d'M sera la longueur du rayon de la sphère inscrite. De sorte que les projections de la sphère, seront les circonférences décrites des points, d' et d'', comme centres, avec le rayon d'M. Pour vérifier l'exactitude de la construction, vous pourrez mener par les points, b'', c'', des perpendiculaires, b''b', c''c', à TR. Les prolongemens des droites, B'b', Cc', devront passer par d' et les trois perpendiculaires menées du point d, sur les faces, DAB, DAC, DBC, devront être égales à d'M (*).

462. (fig. 261). *Déterminer la plus courte distance, entre deux plans parallèles T'TT'', t'tt''.* Cette distance étant la perpendiculaire menée d'un point quelconque de l'un des plans sur l'autre plan (n° 310), on pourrait tirer par un point quelconque du premier plan, une perpendiculaire sur le second; mais pour simplifier la construction, on choisira le point *T* du plan *T'TT''*. La question sera ainsi réduite à déterminer la longueur de la perpendiculaire menée de ce point, sur le plan *t'tt''*; ce qu'on exécutera comme dans le n° 440. Pour construire cette *épure*, on mènera par le point *T*, des perpendiculaires, *Ta'*, *Tp'*, *Tp''*, sur les droites, *tR*, *tt'*, *tt''*; *Tp'* et *Tp''* seront les projections de la perpendiculaire menée du point *T* sur le plan *t'tt''* (n° 440); *p''Ta'* sera un plan vertical qui contiendra le pied *r*, de cette perpendiculaire. Mais, le point *r* est situé dans le plan *t'tt''*. Construisant donc la projection verticale *ca'*, d'une intersection des plans, *t'tt''*, *p''Ta'*, la projection verticale du pied de la perpendiculaire, sera l'intersection *r'* des droites, *ca'*, *Tp'*. Menant *r'r''* perpendiculaire sur *tR*, le point *r''* sera la projection horizontale du pied *r* de la perpendiculaire menée du point *T* sur le plan *t'tt''*. Prenant *qs* = *Tr''*, et tirant l'hypoténuse *r's*, cette hypoténuse sera la plus courte distance demandée.

463. (fig. 256). *Déterminer la plus courte distance, entre un plan et*

(*) Si vous construisez les pieds δ, γ, ζ, de ces perpendiculaires (n° 440), vous trouverez que les projections de ces trois points sont, δ' et δ'', γ' et γ'', ζ' et ζ''. Vous en déduirez (n° 413) les longueurs des perpendiculaires, $d\delta$, $d\gamma$, $d\zeta$; ces perpendiculaires seront égales au rayon *d'M*, de la sphère.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

une droite parallèle à ce plan. Cette distance sera la perpendiculaire menée d'un point quelconque de la droite donnée, sur le plan (n° 310). Par exemple, si $A'B'$ et $A''B''$ sont les projections d'une parallèle au plan $t'tt''$ (*); on mènera une perpendiculaire quelconque $d'd''$ à TR; cette perpendiculaire rencontrera les projections de la ligne donnée, en des points d', d'', qui seront les projections d'un point de la ligne donnée; construisant la longueur $d'y$, de la perpendiculaire menée de ce point sur le plan $t'tt''$ (n° 440); la droite $d'y$ sera la plus courte distance demandée.

464. *Déterminer la plus courte distance entre deux droites qui ne se coupent pas.* La construction indiquée dans le n° 350, ne pouvant pas s'exécuter sur un plan, il est nécessaire de donner une autre solution. Désignez les droites données par a et b; d'un point quelconque de la droite b, menez une parallèle c, à la droite a; conduisez un plan d, par les droites b et c (n° 428); la ligne a sera parallèle à ce plan (n° 321). Les perpendiculaires, menées des différens points de la ligne a sur le plan d, seront égales (n° 318); chacune d'elles mesurera donc la plus courte distance demandée. Il suffit donc, de construire la longueur de la perpendiculaire menée d'un point quelconque de la ligne a sur le plan d. Les diverses parties de cette construction ne dépendant que des problèmes précédens; les élèves pourront exécuter l'*épure* sans difficulté.

Remarque. Si les lignes a et b étaient parallèles; les droites c et b se confondraient (n° 241); le plan d, conduit par ces droites, serait indéterminé, et la construction serait en défaut. La plus courte distance demandée, serait alors la perpendiculaire menée d'un point quelconque de la ligne a, sur la ligne b (n° 310). On construirait la longueur de cette perpendiculaire par la méthode du n° 443.

465. Dans la seconde partie de ces Notes, nous sommes parvenus à résoudre un grand nombre de problèmes sur des points et des lignes situés dans un même plan. La *géométrie descriptive* donne les solutions des mêmes problèmes, lorsque les points et les lignes sont situés d'une manière quelconque dans l'espace. Pour en donner un exemple, nous résoudrons la question suivante : *Par un point, situé dans le plan de deux parallèles, mener une sécante telle, que la partie de cette sécante comprise entre les parallèles, soit égale à une ligne donnée.* Si les parallèles données étaient dans l'un des plans de projection, on construirait facilement la sécante demandée (n° 121). Il est donc naturel de concevoir que le plan des parallèles tourne

---

(*) Pour construire ces projections, on prendra arbitrairement la projection horizontale $A''B''$ et un point d' de la projection verticale; menant $d'd''$ perpendiculaire sur TR, on pourra regarder d' et d'' comme les projections d'un point de la parallèle au plan donné dont la projection horizontale est $A''B''$ et l'on déterminera sa projection verticale $A'B'$, par la méthode du n° 456.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

autour de sa trace horizontale, pour venir s'appliquer sur le plan horizontal; les parallèles et le point donné, étant alors dans le plan horizontal, on déterminera la sécante demandée, par la méthode du n° 121. On remettra ensuite le plan des parallèles dans sa position primitive; les projections de la sécante seront faciles à déterminer et le problème sera résolu. Les diverses parties de cette solution ne présentent aucunes difficultés. En effet; supposez que $A'B'$ et $A''B''$ (fig. 262) étant les projections de l'une des parallèles; $P'Q'$ et $P''Q''$ soient les projections de l'autre parallèle; construisez les points, a'', c'', b', c', où ces lignes rencontrent les plans de projection (n° 425); la droite tt'', menée par les deux premiers points, sera la trace horizontale du plan des parallèles et la trace verticale de ce plan, sera la ligne tt' conduite par les points b', c'. Si D' et D'' sont les projections du point donné (*), il s'agira de mener, par le point dont les projections sont D' et D'', une sécante telle que la partie comprise entre les deux parallèles dont les projections sont $A'B'$, $A''B''$ $P'Q'$ et $P''Q''$, soit égale à une ligne donnée. Pour y parvenir, on concevra que le plan $t'tt''$, tourne autour de tt'', comme charnière; lorsque ce plan coïncidera avec le plan horizontal, le point donné et les parallèles prendront des positions que nous allons déterminer. La trace tt' sera en tT', et l'angle $T'tt''$ sera la vraie grandeur de l'angle $t'tt''$; on sait construire cet angle (n° 445). Dans ce mouvement, le point projeté en D' et D'', ne sortira pas du plan xrr', perpendiculaire à tt''; ce point tombera donc sur la perpendiculaire $D''x$ à tt''; mais la distance du même point à tt'', est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont $D''g''$ et $D'h$. Prenant donc $hk = D''g''$, tirant $D'k$ et prenant $g''D = D'k$, le point D sera la position que prend le point donné, lorsque le plan $t'tt''$ est rabattu sur le plan horizontal. Les parallèles données, rencontrant tt'', en a'' et c''; ces points restent fixés dans le mouvement du plan $t'tt''$. Il suffit donc de trouver un autre point de l'une des parallèles. A cet effet, menez une perpendiculaire $m'm''$ sur TR; m' et m'' seront les projections d'un point m de l'une des parallèles et ce point se rabattra sur la perpendiculaire $m''n$ à tt''; mais la distance de ce point, à tt'', est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont les côtés de l'angle droit sont pm'' et $m'p$; prenant donc $vz = pm''$, tirant $m'z$, et portant $m'z$ de p en m; le point m sera le rabattement d'un point de l'une des parallèles; mais le point c'' appartient à cette droite; menant donc la droite $c''Q$, par

(*) Pour construire les projections d'un point, situé dans le plan $t'tt''$, on prendra arbitrairement la projection horizontale D'', de ce point et menant $D''D'$ perpendiculaire à TR, la rencontre de la verticale $D''D'$ avec le plan $t'tt''$ sera le point demandé. Pour déterminer ce point, on conduira par la verticale, $D''D'$, un plan vertical $r'rg''$, perpendiculaire à tt''; le point cherché sera dans les plans $g''rr'$ et $t'tt''$; la projection verticale de ce point sera donc à l'intersection de la verticale $D''D'$, avec la projection verticale $r'g$ de l'intersection des plans, $g''rr'$, $t'tt''$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

les points c'', m, et tirant la parallèle $a''E$ à $c''Q$, les lignes $a''B$, $c''Q$, seront les parallèles rabattues sur le plan horizontal. Menant par le point D une droite eD, telle que la partie eS, comprise entre les parallèles $a''B$, $c''Q$, soit égale à la ligne donnée; eD sera la sécante demandée, rabattue sur le plan horizontal. Pour donner à cette sécante la position qu'elle doit occuper dans l'espace, concevez que le plan $T't't''$, tourne autour de tt'' comme charnière; dans ce mouvement, les points, D, S, e, ne sortant pas des plans perpendiculaires à tt'', menés par les points D, S, e, les projections horizontales de ces points seront situées sur les droites Dr, SS'', ee'', perpendiculaires à tt'' (n° 361). Mais, lorsque le plan des parallèles aura repris sa position primitive dans l'espace, la projection horizontale du point D, sera en D''; la projection du point S, sera sur $A''B''$ et celle du point e sera sur $P''Q''$, Les projections horizontales des points, S, e, seront donc les intersections, S'', e'', des droites, SS'', ee'', avec les lignes, $A''B''$, $P''Q''$. Menant par les points, S'', e'', des perpendiculaires à TR, les points S', e', où ces perpendiculaires rencontrent les droites, $A'B'$, $P'Q'$, seront les projections verticales des points S, e. Les droites, $D'e'$, $D''e''$, seront donc les projections de la sécante demandée. Lorsque la construction sera bien faite, le point S' sera sur la droite $D'e'$; le point S'' sera sur la droite $D''e''$ et si l'on détermine la vraie grandeur de la droite dont les projections sont, $S'e'$, $S''e''$, on devra trouver la ligne donnée.

466. (fig. 259*). *Déterminer le volume du solide de révolution engendré par un triangle isoscèle qui tourne autour d'un axe fixe.* Les côtés, AB, AC, étant égaux, concevez que le triangle ABP tourne autour de l'axe AP; il s'agit de déterminer le volume engendré par le triangle isoscèle ABC, dans une révolution entière. Pour y parvenir, prenez le milieu M de BC; menez des perpendiculaires, BD, MR, CS, sur AP; tirez CF perpendiculaire sur BD et conduisez la droite AM; l'angle AMP sera droit. Dans une révolution du triangle ABP autour de AP, ce triangle engendre deux cônes dont la base commune est le cercle qui a BD pour rayon; les hauteurs de ces cônes sont AD et PD; le volume engendré par ABP, a donc pour valeur $\frac{1}{3}\pi \times BD^2 \times AP$. Par la même raison, le volume engendré par le triangle ACP, sera $\frac{1}{3}\pi \times CS^2 \times AP$. La différence entre ces deux volumes, exprimant le volume engendré par le triangle ABC, si l'on désigne ce volume par x, on aura...

$$x = \frac{1}{3}\pi \times AP \times (BD^2 - CS^2) = \frac{1}{3}\pi \times AP \times (BD+CS)(BD-CS)$$

$$= \frac{1}{3}\pi \times AP \times 2MR \times BF = \frac{2}{3}\pi \times AP \times MR \times BF.$$

Les triangles semblables, AMR, BFC, AMP, donnent...

$$MR : AM :: CF : BC \text{ et } BF : AM :: BC : AP.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Égalant le produit des quatre extrêmes à celui des quatre moyens, remarquant que $DS = CF$, et supprimant le facteur BC, qui est commun, on trouvera

$$AP \times MR \times BF = AM^2 \times DS.$$

Donc enfin...

$$x = \frac{2}{3}\pi \times AM^2 \times DS.$$

Telle est l'expression du volume demandé. On en déduit facilement le volume engendré par une portion de polygone régulier, tournant autour d'un axe fixe.

FIN DES NOTES.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

1. La ligne droite est la trace d'un point qui se meut de manière à tendre toujours vers un même point. La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre. Entre deux points, on ne peut mener qu'une seule ligne droite.
2. Des lignes brisées et des lignes courbes. Quand on parle d'une distance, on sous-entend qu'il s'agit de la plus courte.
3. Une ligne droite n'a qu'un seul milieu.
4. Le *plan* est une surface sur laquelle une droite s'applique exactement dans tous les sens.
5. La CIRCONFÉRENCE est une ligne courbe dont tous les points sont à égale distance d'un point fixe, nommé CENTRE. Il n'existe qu'un seul centre.
6. Le CENTRE, d'une ligne ou d'une surface, est le point qui jouit de cette propriété, que toute droite menée par ce point, et terminée de part et d'autre à la ligne ou à la surface donnée, est divisée à ce point en deux parties égales. Il n'existe qu'un seul centre.
7. Une corde est plus petite qu'un diamètre.
8. Dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, les arcs égaux sont soutendus par des cordes égales; et réciproquement, les cordes égales soutendent des arcs égaux.
9. Un angle, dont le sommet est au centre, a pour mesure l'arc compris entre ses côtés.
10. REMARQUE. Il n'existe aucune grandeur absolue; on ne peut donc chercher qu'à mesurer les rapports de grandeur des quantités, et par conséquent, pour que des quantités puissent en mesurer d'autres, il suffit que les unes et les autres conservent constamment les mêmes rapports entre elles.
11. Lorsque deux droites se coupent, la somme des angles adjacens est égale à deux angles droits; la réciproque est vraie.
12. Deux lignes droites se confondent, lorsqu'elles ont deux points communs.
13. Tous les angles droits sont égaux entre eux.
14. Quand une droite est perpendiculaire à une autre, réciproquement la seconde droite est perpendiculaire à la première.
15. Lorsque quatre droites, qui passent par un même point, forment des

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

angles opposés au sommet égaux entre eux; deux de ces droites sont les prolongemens des deux autres.

16. 1°. Par un point donné, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à une droite donnée; 2°. les obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales; et RÉCIPROQUEMENT, les obliques qui sont égales s'écartent également du pied de la perpendiculaire; 3°. la PERPENDICULAIRE menée d'un point sur une droite, est plus courte qu'une oblique quelconque menée par le même point; 4°. de deux obliques, celle qui s'approche le plus de la perpendiculaire est la plus courte; et RÉCIPROQUEMENT, l'oblique la plus courte s'approche le plus de la perpendiculaire.

17. Lorsque d'un point, pris dans l'intérieur d'un triangle, on mène des droites aux extrémités d'un côté; la somme de ces droites est toujours moindre que la somme des deux autres côtés du triangle.

18. D'un point, pris hors d'une droite, on ne peut mener, sur cette droite, plus de deux obliques égales.

19. Lorsque par le milieu d'une droite, on mène une perpendiculaire à cette droite, chaque point de la perpendiculaire est également éloigné des extrémités de la droite; et il n'y a que les points de la perpendiculaire qui jouissent de cette propriété.

20. La Théorie des parallèles, de Bezout, n'est pas très-rigoureuse.

21. Lorsque deux côtés d'un triangle, étant égaux à deux côtés d'un autre triangle, les angles compris sont inégaux; le côté opposé au plus grand angle est le plus grand; et réciproquement.

22. La somme des trois angles d'un triangle, est égale à deux angles droits.

23. Deux droites, situées dans un même plan, sont dites parallèles, lorsqu'elles ne peuvent jamais se rencontrer.

24. Deux droites, perpendiculaires à une troisième, sont parallèles.

25. Lorsque deux lignes droites, coupées par une troisième, forment des angles intérieurs d'un même côté dont la somme est égale à deux angles droits, ces lignes sont parallèles.

26. Quand deux droites sont parallèles, la somme des angles intérieurs qu'elles forment d'un même côté avec une sécante quelconque, est égale à deux angles droits.

27 et 28. Propriétés des parallèles.

29. Par un point donné, on ne peut mener qu'une seule parallèle à une ligne donnée.

30. Lorsqu'une droite est perpendiculaire à une autre, toutes les parallèles à l'une des droites, sont perpendiculaires à l'autre.

31. Deux droites, parallèles à une troisième, sont parallèles entre elles.

32. Deux droites, égales et parallèles à une troisième, sont égales et parallèles entre elles.

33. Les parallèles comprises entre parallèles, sont égales.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

34. Deux droites, comprises entre deux parallèles, peuvent être égales sans être parallèles.

35. Trouver la plus courte distance entre deux droites parallèles. Deux parallèles sont partout à égale distance, et la plus courte distance entre deux parallèles, est la perpendiculaire commune à ces deux parallèles.

36. Deux parallèles, qui ont un point commun, se confondent.

37. Si par le milieu d'une droite, terminée à deux parallèles, on mène une parallèle aux parallèles données, cette nouvelle droite coupera en deux parties égales, toutes les lignes comprises entre les parallèles données.

38. Le système de deux parallèles, a une infinité de centres situés en ligne droite.

39. Deux droites se rencontrent toujours, lorsqu'elles sont perpendiculaires à deux lignes qui se coupent.

40. Une droite ne peut rencontrer une circonférence en plus de deux points.

41. Par trois points, non en ligne droite, on peut toujours faire passer une circonférence; mais on n'en peut faire passer qu'une seule.

42. Les trois perpendiculaires, menées sur les milieux des côtés d'un triangle, se coupent en un même point.

43. Une circonférence est entièrement déterminée, lorsqu'elle doit passer par trois points qui ne sont pas en ligne droite. Deux circonférences, qui ont trois points communs, se confondent. Deux circonférences ne peuvent jamais se couper en plus de deux points.

44. Tout angle, dont les côtés prolongés rencontrent une circonférence, a pour mesure la demi-somme algébrique des arcs compris entre ses côtés, en affectant les arcs CONCAVES du signe +, et les arcs CONVEXES du signe —

45. Lorsque plusieurs angles s'appuient sur le diamètre d'un cercle, les angles qui ont leurs sommets sur la circonférence, sont droits; les angles qui ont leurs sommets hors du cercle, sont aigus; et les angles dont les sommets sont placés entre le centre et la circonférence, sont obtus. RÉCIPROQUEMENT, lorsque plusieurs angles s'appuient sur le diamètre d'un cercle, les sommets de tous les angles droits sont sur la circonférence, les sommets des angles aigus sont hors du cercle, et les sommets des angles obtus sont dans le cercle.

46. Lorsqu'un angle a pour mesure l'arc compris entre ses côtés, on ne peut pas en conclure que le sommet de l'angle est placé au centre.

47. Lorsque plusieurs angles d'un triangle sont égaux, les côtés opposés à ces angles sont égaux; la réciproque est vraie.

48 et 49. Dans un triangle, le plus grand côté est opposé au plus grand angle, et réciproquement, le plus grand angle est opposé au plus grand côté.

50. Deux triangles rectangles sont égaux, lorsqu'ils ont les hypoténuses égales

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

et un côté égal, ou lorsqu'ils ont les deux côtés de l'angle droit égaux, chacun à chacun.

51. Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle, divise les deux autres côtés proportionnellement.

52. La démonstration par l'ABSURDE peut toujours remplacer la méthode des infiniment petits.

53. Lorsqu'une droite divise deux côtés d'un triangle, en parties proportionnelles, on peut en conclure que cette droite est parallèle au troisième côté.

54. Lorsqu'une droite, menée du sommet d'un triangle sur un point de la base, divise cette base en parties proportionnelles aux deux autres côtés, cette droite divise l'angle du sommet en deux parties égales.

55. Les côtés homologues sont les côtés adjacens aux angles égaux. Deux triangles sont semblables, quand ils ont les angles égaux chacun à chacun et les côtés homologues proportionnels.

56. Deux triangles sont semblables, lorsqu'ils ont deux angles égaux, chacun à chacun.

57. Deux triangles, qui ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun, sont semblables.

58. Lorsque la perpendiculaire, menée du sommet d'un triangle sur le côté opposé, est moyenne proportionnelle entre les deux segmens de ce côté, l'angle du sommet est droit.

59. Dans un triangle rectangle, le quarré de l'hypoténuse est égal à la somme des quarrés des deux autres côtés.

60 et 61. Lorsque dans un triangle, le quarré d'un côté est égal à la somme des quarrés des deux autres côtés, l'angle opposé au premier côté est droit.

62. Dans tout triangle, le quarré du côté opposé à un angle aigu, est moindre que la somme des quarrés des deux autres côtés, et le quarré du côté opposé à un angle obtus, est plus grand que la somme des quarrés des deux autres côtés. La réciproque est vraie.

63. Dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, les cordes égales sont à égale distance du centre; et RÉCIPROQUEMENT, les cordes qui sont également éloignées du centre, sont égales.

64. Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, le plus grand arc est soutendu par la plus grande corde; et RÉCIPROQUEMENT, la plus grande corde soutend le plus grand arc.

65. Lorsque par un point on mène une tangente et une sécante à un cercle, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.

66. Propriété des cordes menées dans le cercle.

67. Les polygones réguliers d'un même nombre de côtés, sont semblables; les périmètres de ces polygones, sont proportionnels aux rayons des cercles inscrits et circonscrits.

68. De deux lignes CONVEXES, celle qui enveloppe l'autre est la plus grande.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

69. Les longueurs des circonférences sont proportionnelles aux rayons.
70. Les arcs semblables sont proportionnels aux rayons.
71. Le PARALLÉLOGRAMME est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles. Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont égaux.
72. Le milieu de la diagonale d'un parallélogramme, est le CENTRE de ce parallélogramme.
73. Les diagonales d'un parallélogramme, se coupent en deux parties égales au centre de ce parallélogramme.
74. Les droites menées par les milieux des côtés opposés d'un parallélogramme, passent par le centre.
75. Lorsque dans un quadrilatère, deux côtés opposés sont égaux et parallèles, la figure est un parallélogramme.
76. Un quadrilatère, dont les côtés opposés sont égaux, est un parallélogramme.
77. Dans un parallélogramme, les angles intérieurs opposés sont égaux.
78. Dans un quadrilatère quelconque, si l'on joint les milieux des côtés adjacens par des droites, le quadrilatère que l'on formera sera un parallélogramme.
79. Le quarré est un quadrilatère dont les côtés et les angles sont égaux. Ces angles sont droits.
80. La définition exacte d'une quantité, ne doit renfermer que le nombre de conditions nécessaires à la construction de cette quantité.
81. Tout parallélogramme inscrit dans une circonférence, est un rectangle.
82. Tout quadrilatère régulier inscrit dans un cercle, est un quarré.
83. La surface d'un rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur.
84. La surface du cercle est égale au produit de la circonférence, par la moitié du rayon.
85 et 86. Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables; la réciproque est vraie.
87. Un polygone régulier étant donné, on peut toujours décrire deux circonférences concentriques, dont l'une passe par tous les sommets du polygone, et dont l'autre soit tangente à tous les côtés de ce polygone. La première circonférence est CIRCONSCRITE au polygone; la seconde est INSCRITE dans ce polygone.
88. Étant donné un polygone régulier inscrit dans un cercle, circonscrire au même cercle un polygone régulier semblable au polygone inscrit.
89. Toutes les perpendiculaires menées sur les milieux des côtés d'un polygone régulier, et toutes les lignes qui divisent les angles du polygone en deux parties égales, passent par le centre du cercle circonscrit au polygone.
90. Le centre du cercle circonscrit à un polygone régulier d'un nombre pair de côtés, est le centre de ce polygone; les polygones réguliers d'un nombre impair de côtés, n'ont pas de centre.
91. Étant donnés deux polygones réguliers semblables, l'un inscrit, l'autre

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

circonscrit, construire les polygones réguliers, inscrit et circonscrit, d'un nombre de côtés double.

92. Calculer la valeur approchée du rapport de la circonférence au diamètre.

93. Connaissant les surfaces des polygones réguliers, inscrit et circonscrit, d'un même nombre de côtés, trouver les surfaces des polygones réguliers, inscrit et circonscrit, d'un nombre de côtés double.

94. Calcul du rapport de la circonférence au diamètre.

95. Les surfaces des cercles sont proportionnelles aux quarrés des rayons.

96. Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, les surfaces des secteurs sont proportionnelles aux arcs, sur lesquels ces secteurs s'appuient.

97. La surface d'un secteur est égale au produit de l'arc qui lui sert de base, par la moitié du rayon.

98. Les surfaces des secteurs semblables, sont proportionnelles aux quarrés des rayons.

99. Les surfaces des segmens semblables, sont proportionnelles aux quarrés des rayons.

100 et 101. Propriétés des triangles-rectangles.

102 — 106. Applications à l'artillerie.

DEUXIÈME PARTIE.

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE ET DE TRIGONOMÉTRIE.

Construire des Rectangles.

107. Construire un rectangle, dont la surface soit équivalente à un quarré donné, et dont la somme des côtés adjacens soit égale à une ligne donnée.

108. Construire un rectangle, dont la surface soit équivalente à un quarré donné, et dont la différence des côtés adjacens soit égale à une ligne donnée.

109. Connaissant la différence de la diagonale au côté d'un quarré, construire ce quarré.

110. Construire un quarré qui soit triple d'un quarré donné.

Mener une perpendiculaire.

111. Mener une perpendiculaire à l'extrémité d'une droite, sans prolonger cette droite.

112. Sur une droite, donnée de grandeur, mener une perpendiculaire telle, que la différence des quarrés des distances de l'un quelconque de

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

ses points aux extrémités de la droite donnée, soit égale à un quarré donné.

113 — 115. Problèmes relatifs à la Théorie du jeu de Billard.

Dans un angle connu, mener une droite qui jouisse de propriétés données.

116. Par un point pris hors d'un angle, mener une ligne telle, que les parties de cette ligne comprises entre le point et les deux côtés de l'angle, soient proportionnelles à des lignes données.

117. Par un point pris hors d'un angle, mener une ligne telle, que le rectangle des parties comprises entre le point et les côtés de l'angle, soit équivalent à un quarré donné.

118. Dans un angle connu, mener une droite égale à une ligne donnée, de manière que l'angle formé par cette droite avec un des côtés de l'angle, soit égal à un angle donné.

119. Par un point, pris sur la ligne qui divise un angle donné en deux parties égales, mener une droite telle, que la partie comprise entre les deux côtés de l'angle, soit la plus petite possible.

120 Par un point, pris sur la ligne qui divise un angle connu en deux parties égales, mener une droite telle, que la partie interceptée entre les côtés de l'angle, soit égale à une ligne donnée.

121. Par un point donné, mener une droite telle, que la partie de cette droite interceptée entre deux parallèles connues, soit égale à une ligne donnée.

122. et 123. Par un point, situé dans un angle connu, mener une sécante telle, que la somme ou que la différence des segmens formés sur les deux côtés de l'angle, soit égale à une ligne donnée.

124. Déterminer les points qui sont également distans des côtés d'un angle connu.

125. Les centres de tous les cercles tangens aux deux côtés d'un angle, sont situés sur la droite qui divise cet angle en deux parties égales.

126. Par le sommet d'un angle, mener une ligne telle, qu'en tirant par l'un quelconque de ses points des droites formant avec les côtés de l'angle donné des angles connus, ces droites soient dans le rapport de deux lignes données.

Problèmes et Théorèmes relatifs aux circonférences.

127. Lorsque deux cercles se touchent, les centres et le point de contact sont en ligne droite.

128 et 129. Théorèmes relatifs aux circonférences qui n'ont qu'un point commun.

130. 1°. Lorsque deux cercles, qui ne sont pas l'un dans l'autre, n'ont au-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

cuns points communs, la distance des centres est plus grande que la somme des rayons ; 2°. lorsque deux cercles se touchent extérieurement, la distance des centres est égale à la somme des rayons ; 3°. lorsque deux cercles se coupent, la distance des centres est plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence ; 4°. quand les cercles se touchent intérieurement, la distance des centres est égale à la différence des rayons ; 5°. quand deux cercles sont l'un dans l'autre et n'ont aucuns points communs, la distance des centres est plus petite que la différence des rayons. Les réciproques de ces cinq propositions sont vraies.

131. Lorsque deux circonférences se coupent, la ligne qui joint les centres est perpendiculaire sur le milieu de la corde menée par les points d'intersection. La ligne qui joint les extrémités des diamètres tirés par un des points d'intersection des circonférences, est perpendiculaire à la corde menée par les points d'intersection, et passe par le second point d'intersection ; cette ligne est la plus grande de toutes celles qu'on peut mener par ce point d'intersection et qui sont terminées aux circonférences.

132. Lorsque deux circonférences se coupant en deux points, la seconde passe par le centre de la première ; si par un des points d'intersection, on mène une sécante commune aux deux cercles, la partie de cette sécante, comprise entre les deux circonférences, sera égale à la corde qui joindrait l'autre point d'intersection des deux circonférences avec le point d'intersection de la sécante avec la seconde circonférence.

133. Décrire une circonférence qui touche une circonférence connue, en un point donné, de manière qu'en menant par ce point une sécante quelconque, les parties de cette droite, comprises dans les deux cercles, soient dans un rapport donné.

134. Par un point situé sur une circonférence, mener une sécante d'une grandeur et d'une position telles, que les distances des extrémités de la sécante au point où elle rencontre la circonférence, soient dans un rapport connu, et que le rectangle des mêmes distances soit équivalent à un quarré donné.

135. Une circonférence et une sécante étant données, trouver sur la sécante un point tel, que la tangente menée par ce point à la circonférence, soit égale à une ligne connue.

136. Sur un arc donné, trouver un point tel, que les cordes menées de ce point aux extrémités de l'arc, soient entre elles dans un rapport connu.

137. Sur un arc donné, trouver un point tel, que le rectangle des cordes, menées de ce point aux extrémités de l'arc, soit équivalent à un quarré donné.

138. Par un point, situé dans un cercle, mener la plus grande et la plus petite corde possible.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

139. Par un point donné, mener une sécante telle, que la partie comprise dans le cercle, soit égale à une ligne connue.

140. Par un point, situé hors d'un cercle, mener une sécante qui soit coupée par la circonférence en moyenne et extrême RAISON.

141. Par un point, pris hors d'un cercle, mener une sécante telle, que la partie comprise dans le cercle, soit à la partie extérieure, dans un rapport donné.

142. Connaissant un cercle, une sécante et un point de la sécante, mener une droite telle, que la partie de cette droite, comprise dans la circonférence, soit égale à une ligne donnée, et que les distances du point donné aux deux points d'intersection de la ligne cherchée avec la partie concave de la circonférence et avec la sécante connue, soient égales.

143 — 145. Sur une droite donnée, décrire un *segment capable* d'un angle donné.

146. Connaissant les grandeurs et les positions de deux lignes qui se coupent ; construire un point tel, que les trois droites menées de ce point aux extrémités des lignes données, forment deux angles connus.

147. Problème relatif au levé des plans.

148 et 149. Par un point donné, faire passer une circonférence tangente à deux droites données.

150. Décrire un cercle qui soit tangent à une droite donnée, et qui passe par deux points donnés.

151. Connaissant une droite et un cercle, décrire une circonférence qui touche la droite en un point donné et qui soit tangente au cercle donné.

152. Décrire une circonférence qui touche un cercle en un point donné, de manière qu'en menant par ce point une sécante quelconque, les deux parties de cette droite comprises entre les circonférences et dans le cercle donné, soient dans un rapport connu.

153. Deux circonférences concentriques étant données, décrire une circonférence telle, que si aux points où elle rencontre les circonférences données, on mène des tangentes aux trois circonférences, ces tangentes forment entre elles des angles connus.

154. Décrire une circonférence telle, que les distances de l'un quelconque de ses points aux extrémités d'une droite donnée, soient dans un rapport connu.

155. Sur une ligne donnée, trouver un point dont les distances à deux points connus, soient dans un rapport donné.

156. Sur une droite donnée, décrire une circonférence ayant pour centre le milieu de la droite, et telle, que la somme des quarrés des distances de l'un quelconque de ses points aux extrémités de la droite, soit équivalente à un quarré donné.

157. Mener une tangente commune à deux cercles.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

158. Deux cercles étant donnés, si l'on mène dans ces deux cercles, des diamètres parallèles deux à deux; toutes les droites qui joindront les extrémités de deux diamètres parallèles, passeront par deux points fixes de la ligne qui joint les centres; et les tangentes menées par ces points fixes à une des circonférences, seront tangentes à l'autre.

159 — 161. Par un des points d'intersection de deux circonférences, mener une sécante telle, que la différence ou que la somme des cordes qui en résulteront dans les deux cercles, soit égale à une ligne donnée.

162. Connaissant deux cercles concentriques et un diamètre, mener une sécante qui forme un angle connu avec ce diamètre, et dont les parties comprises entre le diamètre et les deux circonférences, soient proportionnelles à des lignes données.

163. Décrire une circonférence qui coupe deux circonférences concentriques en des points tels, que si l'on mène par ces points des tangentes à la circonférence demandée, ces tangentes forment entre elles des angles connus.

PROBLÈMES ET THÉORÈMES RELATIFS AUX TRIANGLES.

Construction des Triangles.

164. Dans un triangle quelconque, il n'existe que cinq parties réellement distinctes; savoir, deux angles et trois côtés.

165. Connaissant trois des cinq parties d'un triangle, construire géométriquement ce triangle.

166. Quand le triangle à construire est rectangle, la connaissance de deux parties suffit pour déterminer le triangle.

167. Dans un triangle obliquangle, les trois parties connues ne peuvent se combiner que de cinq manières différentes.

Construction des Triangles rectangles.

8. On connaît les deux côtés de l'angle droit.

169. On connaît l'hypoténuse et un côté de l'angle droit.

170. On connaît l'hypoténuse et un angle aigu.

171. On connaît un angle aigu et le côté de l'angle droit adjacent à cet angle.

172. On connaît un angle aigu et le côté opposé à cet angle.

Construction des Triangles obliquangles.

173. On connaît deux angles et le côté adjacent.

174. On connaît deux angles et le côté opposé à l'un d'eux.

175. On connaît deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.

176. On connaît deux côtés et l'angle compris.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

177. On connaît les trois côtés.
178. Règles générales relatives à la construction des triangles.
179. Trois relations quelconques, entre les parties d'un triangle, suffisent pour construire ce triangle. (Exemples, du n° 180 au n° 203).
180. Construire un triangle, connaissant deux côtés et la ligne qui divise l'angle compris en deux parties égales.
181. Construire un triangle, connaissant deux côtés et la ligne qui partant du sommet de l'angle compris, divise le troisième côté en parties proportionnelles à des lignes données.
182. Construire un triangle, connaissant, un angle, un côté adjacent et la somme des deux autres côtés.
183. Construire un triangle, connaissant, un angle, un des côtés adjacens et la différence des deux autres côtés.
184. Construire un triangle, connaissant sa base ainsi que la somme et la différence des quarrés des deux autres côtés.
185. Construire un triangle, connaissant sa hauteur, sa base et l'angle du sommet.
186. Construire un triangle, connaissant sa base, sa surface et l'angle du sommet.
187. Construire un triangle, connaissant sa base, l'angle du sommet et le rapport des deux autres côtés.
188. Construire un triangle, connaissant sa base, le rapport des deux autres côtés et la ligne sur laquelle le sommet doit se trouver.
189. Construire un triangle, connaissant sa base, le rapport des deux autres côtés et l'angle du sommet.
190. Construire un triangle, connaissant un angle, la somme des côtés qui comprennent cet angle et la perpendiculaire menée du sommet de l'angle connu sur le côté opposé.
191. Construire un triangle, connaissant un des côtés, un des angles adjacens, et la perpendiculaire menée du sommet de cet angle sur le côté opposé.
192. Construire un triangle, connaissant sa surface et deux de ses angles.
193. Construire un triangle, connaissant sa surface, un de ses angles, et sachant que le côté opposé à l'angle connu doit passer par un point donné.
194. Etant donné un point dans un angle, trouver sur les deux côtés de cet angle, deux points tels qu'en joignant ces trois points par des droites, le triangle qui en résultera soit semblable à un triangle connu.
195. Construire un triangle rectangle, connaissant la perpendiculaire menée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse, et la différence des côtés de l'angle droit.
196. Construire un triangle, connaissant le périmètre et deux angles.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

197. Construire un triangle, connaissant les longueurs des trois perpendiculaires menées des sommets sur les côtés opposés.

198. Construire un triangle, connaissant deux des hauteurs et la position de leur point de concours sur l'une d'elles.

199. Construire un triangle, connaissant deux des trois hauteurs et un angle.

200. Construire un triangle rectangle équivalent à un trapèze donné, et qui ait un des côtés de l'angle droit égal à un des côtés parallèles de ce trapèze.

201. Le sommet d'un triangle isoscèle est donné; les extrémités de la base de ce triangle sont placées sur deux parallèles connues, et la base doit faire un angle connu avec ces parallèles. On propose de construire ce triangle.

202. Par trois points connus, mener des droites qui forment un triangle égal à un triangle donné.

203. Circonscrire à un triangle donné, le plus grand triangle équilatéral possible.

204 et 205. Les droites menées des sommets des angles d'un triangle sur les milieux des côtés opposés, se coupent au même point.

206. Lorsqu'on mène une droite du sommet d'un triangle au milieu de la base, la somme des quarrés des deux autres côtés est égale au double du quarré de la droite ainsi menée, ajouté au double du quarré de la moitié de la base.

207. Les lignes, qui divisent les angles d'un triangle en deux parties égales, se coupent au même point.

208. Inscrire un cercle dans un triangle.

209. Les perpendiculaires, menées des sommets des angles d'un triangle sur les côtés opposés, se coupent au même point.

210. Les perpendiculaires menées sur les milieux des côtés d'un triangle quelconque, se coupent au même point.

211 et 212. Propriétés des lignes menées dans un triangle.

213. Trouver un point tel, que les droites, menées de ce point aux sommets des angles d'un triangle, soient proportionnelles à trois lignes données.

214. Trouver un point tel, que les perpendiculaires, menées de ce point sur les trois côtés d'un triangle, soient proportionnelles à des lignes données.

215. Dans l'intérieur d'un triangle connu, trouver un point tel, qu'en menant des droites de ce point aux sommets des angles, les surfaces des trois triangles partiels soient dans des rapports donnés. Solution plus directe.

216. Inscrire un quarré dans un triangle.

217. Connaissant un triangle, mener une droite qui coupe deux côtés et le prolongement du troisième côté, de manière que les parties com

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

prises dans le triangle et hors du triangle, soient égales à des lignes données.

218. Deux triangles qui ont un angle égal, sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent cet angle.

219. De tous les triangles formés avec un angle connu et deux côtés dont la somme est donnée, le plus grand est celui dans lequel ces deux côtés sont égaux.

220. Parmi tous les triangles, qui, ayant leurs sommets sur un même arc, ont la corde de cet arc pour côté commun, le triangle isoscèle est celui dont les deux côtés non déterminés forment la plus grande somme.

221. Parmi tous les triangles de même base et dont les sommets sont sur une même droite α, le triangle dont le périmètre est un minimum, est tel, que les deux autres côtés forment des angles égaux avec la ligne α.

222. De tous les triangles de même base et de même hauteur, le triangle qui a le plus petit périmètre est tel, que les deux autres côtés sont égaux.

223. De tous les triangles de même base et de même contour, le triangle isoscèle est le plus grand.

224. Parmi tous les triangles de même périmètre, le triangle équilatéral est le plus grand.

225. Parmi tous les rectangles de même périmètre, déterminer le rectangle dont la surface est la plus grande.

226. Parmi tous les rectangles de même surface, déterminer le rectangle dont le périmètre est un minimum.

227. Parmi tous les cônes circonscrits à la sphère, déterminer celui dont la surface est un minimum.

228. Connaissant les valeurs numériques des trois côtés d'un triangle, trouver une formule à l'aide de laquelle on puisse calculer la surface de ce triangle.

229. Lorsque d'un point quelconque, situé dans l'angle formé par les côtés contigus d'un parallélogramme, on tire des perpendiculaires sur la diagonale et sur les côtés contigus, le produit de la diagonale, par la perpendiculaire menée sur sa direction, est égal à la différence des produits des deux côtés du parallélogramme, par les perpendiculaires menées sur ces côtés. Si le point était hors du parallélogramme, le premier produit serait égal à la somme des deux autres.

230. Connaissant deux perpendiculaires à une droite, mener une sécante telle, que les produits des parties des perpendiculaires qu'elle intercepte vaille un quarré donné.

231 et 232 Règle générale pour trouver l'équation de la courbe des intersections.

233 et 234. Trouver une droite telle, que le produit des perpendiculaires,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

menées de deux points fixes sur cette droite, soit égal à une quantité donnée.
235. Autre problème dú même genre.
236. Problème relatif aux courbes du second degré.

TROISIÈME PARTIE.

ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Préliminaires. Théorie des plans.

237. Le plan est une surface indéfinie sur laquelle une ligne droite peut s'appliquer exactement dans tous les sens.
238. L'intersection d'une droite avec un plan est un point.
239. Par deux droites, qui se coupent, on ne peut mener qu'un seul plan. Trois points, non en ligne droite, déterminent la position d'un plan.
240. Par deux droites parallèles, on ne peut mener qu'un seul plan.
241. Par un point donné, on ne peut conduire qu'une seule parallèle à une ligne donnée.
242. Lorsque deux droites sont parallèles, si par une de ces droites et un point de la seconde, on mène un plan, ce plan contiendra la seconde parallèle.
243. Lorsque par un point d'un plan on mène une parallèle à une droite située dans ce plan, cette parallèle est toute entière dans le plan.
244. Toutes les parallèles, menées par différens points d'une droite, sont dans un même plan.
245. L'intersection de deux plans est une ligne droite. Une droite est déterminée quand elle doit se trouver sur deux plans. On peut mener une infinité de plans par une même ligne droite.
246. L'intersection de trois plans, qui ne passent pas par une même ligne droite, est un point.
247. Une perpendiculaire à un plan est une droite qui ne penche d'aucun côté par rapport au plan. Cette perpendiculaire forme des angles droits avec toutes les lignes menées par son *pied*, dans le plan.
248. Une droite est perpendiculaire à un plan, lorsqu'elle forme des angles égaux avec toutes les lignes menées par son pied dans le plan.
249. Deux plans sont parallèles, lorsqu'ils ne peuvent pas se rencontrer.
250. Deux droites, situées dans deux plans parallèles, ne peuvent jamais se rencontrer. Deux droites qui ne se rencontrent pas, peuvent ne pas être parallèles.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

251. Une droite, perpendiculaire à deux droites qui passent par son *pied* dans un plan, est perpendiculaire à ce plan.

252. Si par un point d'une ligne droite, on mène un plan perpendiculaire à cette droite, et des perpendiculaires à la même droite, toutes ces perpendiculaires seront dans le plan perpendiculaire à la droite.

253 et 254. Lorsque par le pied d'une perpendiculaire à un plan, on mène une perpendiculaire à une droite située dans ce plan; la droite, qui joint le pied de cette nouvelle perpendiculaire avec un point quelconque de la perpendiculaire au plan, est perpendiculaire à la droite située dans le plan. Remarque.

255. Par un point donné, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à un plan. Les obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales, et réciproquement. La perpendiculaire menée d'un point sur un plan, est plus courte qu'une oblique quelconque menée par le même point. De deux obliques, menées par le même point, celle qui s'approche le plus de la perpendiculaire est la plus courte, et réciproquement.

256. Quand une droite est perpendiculaire à un plan, les perpendiculaires menées des différens points de la droite, sur le plan, se confondent avec cette droite.

257. Une droite est perpendiculaire à un plan, lorsqu'elle forme des angles égaux avec trois droites menées par son pied dans le plan.

258. Par un point, pris sur une droite, mener un plan perpendiculaire à cette droite.

259. Par un point, pris hors d'une droite, mener un plan perpendiculaire à cette droite.

260. Par un point, pris hors d'un plan, mener une perpendiculaire à ce plan.

261. Par un point, pris sur un plan, mener une perpendiculaire à ce plan.

262. Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, toutes les parallèles à cette droite sont perpendiculaires au même plan.

263. Un plan, perpendiculaire à une droite, est perpendiculaire aux parallèles à cette droite.

264. Deux perpendiculaires à un même plan, sont parallèles.

265. Deux droites, parallèles à une troisième, sont parallèles entre elles.

266. Plusieurs droites, perpendiculaires à un même plan, sont parallèles.

267. Lorsqu'un plan est perpendiculaire à plusieurs droites, on peut en conclure que ces droites sont parallèles.

268. Deux plans, perpendiculaires à une même droite, sont parallèles.

269. Deux plans sont parallèles, lorsqu'étant perpendiculaires chacun à une ligne droite, ces deux droites sont parallèles.

270. Les intersections de plusieurs plans parallèles par un même plan, sont parallèles.

271. Lorsque plusieurs plans sont parallèles, la perpendiculaire à l'un de ces plans, est perpendiculaire à tous les autres.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

272. Deux plans, parallèles à un troisième, sont parallèles entre eux.
273. Les parallèles, comprises entre plans parallèles, sont égales.
274. Lorsque deux droites, qui se coupent, sont parallèles à deux autres droites, qui se coupent, les angles formés par les deux premières droites, sont respectivement égaux aux angles formés par les deux autres.
275. Lorsque deux droites, qui se coupent, sont respectivement parallèles à deux autres droites, qui se coupent, le plan des deux premières droites est parallèle au plan des deux autres.
276. Lorsqu'on mène des droites par les extrémités de trois droites égales et parallèles; on forme deux triangles qui sont égaux, et les plans de ces triangles sont parallèles.
277. Lorsque par plusieurs points d'un plan, on mène des droites égales et parallèles, les extrémités de ces droites sont dans un plan parallèle au premier.
278 et 279. Propriétés des parallèles menées par quatre points quelconques de deux parallèles.
280 et 281. Pour évaluer l'angle formé par deux droites qui ne se coupent pas, il suffit de mener des parallèles à ces droites, par un même point. L'angle formé par ces nouvelles lignes, mesure l'inclinaison des droites données. Deux parallèles forment un angle nul.
282. Une droite, perpendiculaire à un plan, est perpendiculaire à toutes les droites situées dans ce plan.
283. Par un point, on peut mener une infinité de perpendiculaires à une droite.
284. Si d'un point quelconque d'une oblique à un plan, on mène une perpendiculaire à ce plan, et si l'on joint le pied de l'oblique avec le pied de la perpendiculaire, par une droite; l'angle que cette dernière ligne fera avec l'oblique, sera le plus petit de tous les angles formés par cette oblique avec les lignes menées par son pied dans le plan. Ce plus petit angle, mesure l'inclinaison de l'oblique sur le plan.
285 et 286. L'angle formé par une droite avec un plan est le *complément* de l'angle formé par cette droite avec la perpendiculaire menée de l'un quelconque de ses points sur le plan. Toute perpendiculaire à un plan, forme un angle droit avec ce plan.
287. Lorsque plusieurs droites, menées par un point donné, font des angles égaux avec un plan, elles rencontrent ce plan en des points situés sur une circonférence qui a pour centre le pied de la perpendiculaire abaissée du point donné sur le plan.
288. Lorsque plusieurs droites, menées par un même point d'une perpendiculaire à un plan, font des angles égaux avec cette perpendiculaire, elles rencontrent le plan en des points situés sur une circonférence qui a pour centre le pied de la perpendiculaire.
289. Lorsque plusieurs droites égales, menées par un même point d'une

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

droite α, forment des angles égaux avec la droite α, les extrémités de ces droites égales sont situées sur une circonférence dont le plan est perpendiculaire à la droite α.

290. Si l'on fait passer une circonférence par trois points donnés; et si par le centre de cette circonférence on mène une perpendiculaire au plan des trois points donnés. Les distances, d'un point quelconque de la perpendiculaire, aux trois points donnés, seront égales; et tout point situé hors de la perpendieulaire, sera inégalement distant des trois points donnés.

291. Deux plans se rencontrent toujours, lorsqu'ils sont respectivement perpendiculaires à deux droites qui ne sont pas parallèles.

292. Problème. Mesurer l'angle formé par deux plans.

293. Pour mesurer l'angle formé par deux plans, il suffit de mener dans ces plans, et par un même point de l'intersection, deux perpendiculaires à cette intersection; l'angle formé par ces perpendiculaires mesure l'angle des plans.

294. Deux plans qui forment un angle droit, sont dits rectangulaires entre eux.

295. Lorsqu'un plan tombe sur un autre, la somme des deux angles adjacens, formés par le premier plan avec le second, vaut 180°, et réciproquement. Lorsque deux plans se coupent, les angles opposés au sommet sont égaux, et réciproquement.

296 et 297. Deux plans parallèles, coupés par un troisième, jouissent des mêmes propriétés, dans les angles qu'ils forment avec ce troisième plan, que deux lignes parallèles à l'égard d'une troisième droite qui les coupe. La réciproque est fausse.

298. Lorsque deux plans qui se coupent, sont parallèles à deux autres plans, l'intersection des deux premiers plans est parallèle à l'intersection des deux autres; et l'angle formé par les deux premiers plans est égal à l'angle formé par les deux autres.

299. Les angles formés par un même plan avec plusieurs plans parallèles, sont égaux.

300. Les angles formés par une droite avec des plans parallèles, sont égaux.

301. Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, tous les plans conduits suivant cette droite, sont perpendiculaires au premier plan.

302. Par une droite perpendiculaire à un plan, on peut mener une infinité de plans perpendiculaires au premier plan.

303 Lorsque deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre; si par un point quelconque de l'un de ces plans, on mène dans ce plan une droite perpendiculaire à l'intersection commune, cette droite sera perpendiculaire à l'autre plan.

304. Lorsque deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre, si par un point de l'un de ces plans, on mène une perpendiculaire à l'autre plan, cette perpendiculaire sera dans le premier plan.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

305. Toutes les perpendiculaires, menées des différens points d'une droite, sur un plan donné, sont dans un plan perpendiculaire au plan donné.

306. Lorsque deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre, toute perpendiculaire à l'intersection commune, menée dans l'un des plans, est perpendiculaire à l'autre plan, et toute perpendiculaire à l'un des plans, menée par un point quelconque de l'intersection, est dans l'autre plan.

307. L'intersection de deux plans perpendiculaires à un troisième plan, est perpendiculaire à ce troisième plan.

308. Réciproquement, lorsque l'intersection de deux plans est perpendiculaire à un troisième plan, les deux premiers plans sont perpendiculaires au troisième.

309. Tout plan, perpendiculaire à deux autres plans, est perpendiculaire à l'intersection de ces deux derniers plans.

310. PROBLÈME. Déterminer la plus courte distance entre deux plans parallèles.

311. Deux plans parallèles sont partout à égale distance; et leur plus courte distance est une droite perpendiculaire à chacun d'eux.

312. Deux plans, dont tous les points sont également distans, sont parallèles.

313. Lorsque plusieurs points, non en ligne droite, sont également distans d'un plan donné; tous ces points sont situés sur un plan parallèle au plan donné.

314. Lorsqu'une droite est parallèle à un plan, tous les plans conduits par cette droite, coupent le premier plan suivant des parallèles à la ligne donnée.

315. Lorsqu'une droite est parallèle à un plan, toutes les perpendiculaires menées des différens points de la droite sur le plan, sont perpendiculaires à cette droite.

316. Toute parallèle à un plan, forme un angle nul avec ce plan.

317. Lorsqu'une droite est parallèle à un plan, toutes les perpendiculaires, menées des différens points de cette droite sur le plan, sont égales.

318. PROBLÈME. Déterminer la plus courte distance entre un plan et une parallèle à ce plan. Lorsqu'une droite est parallèle à un plan, tous les points de cette droite sont également éloignés du plan.

319. Quand plusieurs points d'une ligne droite sont à égale distance d'un plan, cette droite est parallèle au plan.

320. Lorsqu'une droite est parallèle à un plan donné; si par un point quelconque de la droite, on mène un plan parallèle au plan donné; la droite sera toute entière dans ce plan parallèle au plan donné.

321. Toute parallèle à une droite située dans un plan, est parallèle à ce plan.

322. Lorsqu'une droite est parallèle à un plan, si par un point du plan,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

on mène une parallèle à la droite, cette parallèle sera toute entière dans le plan.

323. Lorsque deux droites sont parallèles ; tout plan conduit par l'une de ces droites., est parallèle à l'autre.

324. Lorsque deux droites sont parallèles, on peut conduire par l'une de ces droites une infinité de plans parallèles à l'autre droite.

325. Lorsque deux droites sont parallèles à une troisième, le plan de ces deux droites est parallèle à la troisième.

326. Lorsque deux lignes droites sont parallèles ; en menant par un point quelconque, des parallèles à ces lignes, les parallèles, ainsi menées, se confondent.

327. Lorsque deux droites, qui se coupent, sont parallèles à un plan donné, le plan de ces deux droites est parallèle au plan donné.

328. Lorsque deux plans se coupent, si par un point quelconque de l'un des plans, on mène une parallèle à l'intersection, cette parallèle sera dans ce plan ; elle sera parallèle à l'autre plan ; et réciproquement, si par un point de l'un de ces plans, on mène dans ce plan une parallèle à l'autre plan, cette dernière ligne sera parallèle à l'intersection.

329. Par un point donné, on ne peut mener qu'un seul plan perpendiculaire à une droite donnée.

330. Par un point donné, on ne peut conduire qu'un seul plan parallèle à un plan donné.

331. Une droite, parallèle à l'intersection de deux plans, est parallèle à chacun de ces plans ; et réciproquement, toute droite, parallèle à deux plans, est parallèle à l'intersection de ces plans.

332. Lorsqu'une droite n'est pas perpendiculaire à un plan donné ; on ne peut mener par cette droite qu'un seul plan perpendiculaire au plan donné.

333. Par une ligne donnée, mener un plan perpendiculaire à un plan donné.

334. Lorsque par deux droites parallèles, on mène des plans perpendiculaires à un même plan ; ces plans sont parallèles.

335. Tout plan, parallèle à une perpendiculaire sur un plan donné, est perpendiculaire à ce dernier plan.

336. Lorsque deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre, toute perpendiculaire à l'un des plans est parallèle à l'autre plan.

337. Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, et qu'une autre droite n'est pas parallèle à ce plan ; tout plan, perpendiculaire à la première droite, rencontre nécessairement la seconde droite.

338. Si l'on mène deux plans respectivement perpendiculaires à deux droites qui se coupent, ces plans se rencontreront toujours, et leur intersection sera perpendiculaire au plan des deux droites.

339. Lorsque par le milieu d'une droite on mène un plan perpendiculaire à

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

cette droite, les distances de chacun des points de ce plan, aux extrémités de la droite, sont égales, et les points de ce plan jouissent seuls de cette propriété.

340. Lorsqu'un plan divise l'angle de deux autres plans en deux parties égales; les perpendiculaires, menées d'un point quelconque du premier plan sur les deux autres plans, sont égales, et les points de ce plan jouissent seuls de cette propriété.

341. Quand deux droites, menées par le même point, sont respectivement perpendiculaires à deux plans, l'angle formé par ces droites est le SUPPLÉMENT de l'angle formé par les plans. Lorsque l'angle de deux plans est très-aigu ou très-obtus, l'angle formé par les deux perpendiculaires, menées d'un même point sur ces plans, est très-obtus ou très-aigu.

342. Lorsque par un point donné on mène une perpendiculaire à une horizontale, cette perpendiculaire est située dans le plan mené par le point donné perpendiculairement à la ligne donnée, et ce plan est vertical.

343. Si d'un point pris hors d'un plan, on tire des droites à différens points de ce plan, et si l'on mène un plan parallèle au plan donné, ce plan coupera les droites en parties proportionnelles. Si l'on mène des lignes par les points où les droites rencontrent les plans parallèles; les polygones qui en résulteront seront semblables, et les surfaces de ces polygones seront proportionnelles aux carrés des perpendiculaires menées du point donné sur les plans des polygones.

344. Deux droites, situées d'une manière quelconque dans l'espace, sont coupées en parties proportionnelles par trois plans parallèles quelconques.

345. Un ANGLE SOLIDE est l'angle formé par plusieurs plans qui se réunissent en un même point.

346. Lorsque trois angles plans forment un angle solide, chaque angle plan est plus petit que la somme des deux autres.

347. La somme des angles plans qui forment un angle solide, est toujours moindre que quatre angles droits.

348. Lorsque les trois angles plans qui forment un angle solide, sont respectivement égaux aux trois angles plans qui forment un autre angle solide; les angles plans égaux sont également inclinés l'un sur l'autre.

349. Remarques relatives aux *solides symétriques*.

350. Trouver la plus courte distance entre deux droites situées d'une manière quelconque dans l'espace.

351. Dans un parallélépipède quelconque, les faces opposées sont égales, et les plans de ces faces sont parallèles.

352. Dans un parallélepipède quelconque, toutes les diagonales se coupent

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

au centre du parallélépipède, et les droites menées par les centres des faces opposées, passent par le centre.

353. Connaissant les côtés contigus d'un parallélepipède rectangle, déterminer la grandeur de la diagonale, ainsi que les angles que la diagonale forme avec ces côtés.

354. Dans une pyramide triangulaire, les trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées, se coupent en un même point, et sont divisées à ce point en deux parties égales.

355. Par quatre points, qui ne sont pas dans un même plan, on peut toujours faire passer la surface d'une sphère, mais on n'en peut faire passer qu'une seule.

356. Une sphère est entièrement déterminée, quand sa surface est assujétie à passer par quatre points donnés, qui ne sont pas dans un même plan. L'intersection de deux sphères est donc une courbe plane.

357. Deux conditions déterminent une ligne droite, trois conditions déterminent une circonférence, et quatre conditions déterminent une sphère

358. Une pyramide triangulaire étant donnée, on peut toujours trouver une sphère qui touche les quatre faces de cette pyramide; il n'existe qu'une seule sphère qui jouisse de cette propriété.

359. Toutes les sections d'une sphère par des plans, sont des cercles. Les plans également éloignés du centre de la sphère, coupent la sphère suivant des cercles égaux, et RÉCIPROQUEMENT. Les plans les plus près du centre donnent les cercles les plus grands, et RÉCIPROQUEMENT.

360. L'intersection de deux surfaces sphériques est une circonférence dont le plan est perpendiculaire à la droite qui joint les centres des deux sphères. Cette droite passe par le centre de la circonférence.

361. Un SOLIDE DE RÉVOLUTION est engendré par une surface plane, qui tourne autour d'une droite fixe. La surface qui termine ce solide, est une SURFACE DE RÉVOLUTION. La ligne fixe est l'AXE. Lorsqu'une ligne tourne autour d'un axe fixe, chaque point de cette ligne décrit une circonférence qui a pour rayon la perpendiculaire menée du point sur l'axe; le plan de cette circonférence est perpendiculaire à l'axe, et la rencontre de ce plan avec l'axe, est le centre de la circonférence.

362. Toute section d'une surface de RÉVOLUTION par un plan perpendiculaire à l'axe, est une circonférence; le centre de cette circonférence est le point de rencontre de l'axe avec le plan de la section.

363. PROBLÈME. Calculer le volume d'un solide terminé par une SURFACE GAUCHE.

364. Le volume terminé par une surface gauche et par des plans, a pour mesure la base, multipliée par le quart de la somme des hauteurs.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

365. But de la Géométrie descriptive.

366—369. Déterminer la position d'un point. La manière la plus simple de déterminer la position d'un point de l'espace, est de donner les distances de ce point à trois plans connus.

370. La PROJECTION d'un point sur un plan, est le pied de la perpendiculaire menée du point sur le plan. Un point ne peut avoir qu'une seule projection sur un plan. Lorsque par la projection d'un point sur un plan, on mène une perpendiculaire à ce plan, le point est situé sur cette perpendiculaire.

371. Pour déterminer la projection d'une ligne sur un plan, il suffit de projeter les différens points de cette ligne sur le plan.

372. La projection d'une ligne droite est une ligne droite. La projection d'une ligne droite donnée, est la droite, qui passe par les projections de deux points quelconques de la ligne donnée.

373. La projection d'une portion déterminée de ligne droite, est la droite, comprise entre les projections des extrémités de la ligne donnée.

374. Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, la projection de cette droite sur le plan, est le pied de cette perpendiculaire.

375. Projeter une droite sur un plan. Définitions du plan projetant et du plan de projection.

376. Une ligne quelconque ne peut avoir qu'une seule projection sur un plan donné.

377. Lorsque par la projection d'une droite, on mène un plan perpendiculaire au plan de projection, la droite est située dans le premier plan. Si par les différens points de la projection d'une courbe, on mène des perpendiculaires au plan de projection, toutes ces perpendiculaires passeront par les différens points de la courbe. La réunion de ces perpendiculaires, formera le CYLINDRE PROJETANT; la courbe sera située sur ce cylindre.

378. Lorsque deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre, l'intersection est la projection commune, sur l'un de ces plans, de tous les points situés dans l'autre plan. La projection d'une courbe peut donc être une ligne droite.

379. Lorsque deux plans se coupent; si l'on projette un point sur ces deux plans, les perpendiculaires, menées des deux projections du point sur l'intersection des deux plans, passent par un même point de cette intersection.

380. Un point est entièrement déterminé, lorsque l'on connaît ses projections sur deux plans qui se coupent.

381. Quand deux points, de deux plans qui se coupent, sont tels que les perpendiculaires, menées de ces points sur l'intersection de ces plans,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

passent par un même point de l'intersection, on peut regarder ces points comme les projections d'un même point de l'espace sur les deux plans donnés.

382. Règle pour reconnaître si deux points de deux plans qui se coupent, sont les projections d'un même point de l'espace.

383. Une ligne droite est entièrement déterminée, lorsqu'on connaît ses projections sur deux plans qui se coupent.

384. Les projections de deux droites parallèles, sont parallèles. Pour construire les projections de deux droites parallèles, il suffit de connaître deux points de l'une des projections et un point de l'autre.

385. La position la plus avantageuse à donner aux plans de projection, est de les supposer RECTANGULAIRES ; la LIGNE DE TERRE est l'intersection des plans de projection. Les intersections d'un plan quelconque avec les plans de projection, sont les TRACES de ce plan. Conventions relatives aux projections et aux traces.

386. Lorsque des points sont dans un des plans de projection, les projections de ces points sur l'autre plan, sont situées sur la ligne de terre.

387. Lorsqu'une ligne, droite ou courbe, est située dans un plan parallèle à l'un des plans de projection, la projection de cette ligne, sur l'autre plan, est une parallèle à la ligne de terre.

388. Lorsque deux droites sont situées, l'une dans le plan horizontal, l'autre dans le plan vertical ; si elles ne sont pas toutes deux perpendiculaires à la ligne de terre, on pourra les regarder comme les projections d'une même droite ; mais quand elles seront perpendiculaires sur la ligne de terre, elles ne pourront pas représenter les projections d'une seule et même ligne.

389. La projection d'une courbe, peut être une ligne droite ; mais quand les deux projections d'une ligne, sont des droites, on peut en conclure que cette ligne est droite.

390. Les deux projections d'une ligne, droite ou courbe, déterminent cette ligne.

391. Afin de simplifier les constructions, on conçoit que le plan vertical tourne autour de la ligne de terre, pour s'appliquer sur le plan horizontal, de sorte que les deux plans de projection se confondent. Par ce moyen, toutes les lignes sont réellement tracées sur le plan horizontal ; mais pour entendre les démonstrations, il faut imaginer que les projections verticales sont remises en place, au moyen d'un quart de révolution du plan vertical autour de la ligne de terre.

392. Les projections d'un point sont situées sur une droite perpendiculaire à la ligne de terre.

393. Pour trouver les distances d'un point aux deux plans de projection, il suffit de conduire par les projections de ce point des perpendiculaires

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

sur la ligne de terre ; ces perpendiculaires mesurent les distances demandées.

394. Lorsque deux lignes se coupent en un point, la droite qui joint les points d'intersection des projections de ces lignes, est perpendiculaire à la ligne de terre ; et RÉCIPROQUEMENT.

395. Lorsque deux lignes ne se coupent pas, la droite qui joint les points d'intersection des projections de ces lignes, n'est pas perpendiculaire à la ligne de terre ; et RÉCIPROQUEMENT.

396. Lorsque les projections de deux lignes sur un même plan sont différentes et ne se rencontrent pas, on peut en conclure que ces lignes ne se coupent pas.

397. Lorsqu'une droite, parallèle à un des plans de projection, n'est pas perpendiculaire à l'autre ; la projection de la droite sur le premier plan est parallèle à cette droite, et la projection de la droite sur l'autre plan, est parallèle à la ligne de terre.

398. Les projections d'une parallèle à la ligne de terre, sont parallèles à cette ligne.

399. Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un des plans de projection, la projection de cette droite sur ce plan est un point, et sa projection sur l'autre plan est perpendiculaire à la ligne de terre.

400. Lorsque deux plans sont parallèles, les traces de ces plans, sur chacun des plans de projection, sont parallèles. La réciproque est vraie.

401. La trace verticale d'un plan perpendiculaire au plan horizontal, est une verticale perpendiculaire à la ligne de terre ; et la trace horizontale d'un plan perpendiculaire au plan vertical, est une horizontale, perpendiculaire à la ligne de terre.

402. Lorsqu'un plan est perpendiculaire à l'un des plans de projection, sa trace sur ce plan suffit pour le déterminer.

403. Lorsqu'un plan est parallèle à un des plans de projection, sa trace sur l'autre plan est parallèle à la ligne de terre, et cette trace suffit pour déterminer le plan.

404. Lorsqu'un plan coupe la ligne de terre, ses traces concourent vers un même point de cette ligne. Quand un plan est parallèle à la ligne de terre, ses deux traces sont aussi parallèles à cette ligne ; enfin, lorsqu'un plan passe par la ligne de terre, ses deux traces se confondent avec cette ligne. Un plan ne peut prendre que ces trois positions.

405. Les traces d'un plan sont déterminées, lorsque l'on connaît deux points de l'une des traces et un point de l'autre trace.

406. Les deux traces d'un plan déterminent ce plan.

407. Lorsque par un point d'un plan, on mène dans ce plan une parallèle à un des plans de projection, la projection de cette droite sur ce plan de projection est parallèle à la trace du plan donné sur ce même plan ; et l'autre projection est parallèle à la ligne de terre.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

408. Quand deux droites sont dans un plan ; les points où elles rencontrent les plans de projection, ne peuvent se trouver que sur les traces de ce plan.

409. Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, les projections de la droite sont respectivement perpendiculaires aux traces du plan.

410. Quand une droite est parallèle au plan vertical de projection, tout plan perpendiculaire à cette droite, est perpendiculaire au plan vertical de projection, et la trace verticale de ce plan est perpendiculaire à la projection verticale de la droite. Une droite parallèle au plan horizontal, jouit de propriétés analogues.

411. Les solutions de tous les problèmes de la Géométrie descriptive, peuvent se déduire des principes précédens. Avis, relatifs à la construction des ÉPURES.

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

412. Les projections de deux points étant données, construire les projections de la droite qui passe par ces points.

413. Connaissant les projections des extrémités d'une droite, déterminer la vraie grandeur de cette droite.

414. Manière de vérifier l'exactitude des constructions.

415. La vraie distance entre deux points est connue, lorsqu'on a les projections de ces points sur deux plans rectangulaires.

416. La projection horizontale, d'une droite parallèle au plan horizontal, est de même grandeur que cette droite ; et lorsque cette droite n'est pas perpendiculaire au plan vertical, sa projection sur ce plan est parallèle à la ligne de terre ; si l'horizontale était perpendiculaire au plan vertical, sa projection verticale serait un point. Si la droite était parallèle au plan vertical, elle jouirait de propriétés semblables.

417. Lorsqu'une courbe est dans un plan parallèle à l'un des plans de projection, la projection de cette courbe sur ce plan parallèle, est égale à la courbe située dans l'espace et l'autre projection est une parallèle à la ligne de terre.

418. Déterminer le milieu d'une ligne droite. Les projections du milieu d'une ligne droite, sont les milieux des projections de cette ligne.

419. Pour trouver les projections du point qui divise une droite donnée, en parties proportionnelles à des lignes données, il suffit de diviser les projections de cette dernière droite dans le même rapport.

420. Un point est situé sur une droite, dont les projections sont données; l'une des projections de ce point est connue. Il s'agit de construire l'autre projection.

421. Par un point donné, mener une parallèle à une ligne donnée.

422. Construire l'intersection de deux plans.

423. Déterminer le point d'intersection de trois plans donnés.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

424 et 425. Construire les points où une droite rencontre les plans de projection.

426 et 427. Faire passer un plan par trois points donnés, non en ligne droite.

428. Conduire un plan par deux droites qui se coupent.

429. Construire un plan qui passe par deux parallèles données.

430. Déterminer la rencontre d'une verticale avec un plan perpendiculaire au plan vertical.

431—433. Trouver le point où une droite donnée rencontre un plan connu.

434. La projection horizontale d'un point est connue; ce point est dans un plan connu. Il s'agit de construire la projection verticale du même point. On peut prendre arbitrairement l'une des projections d'un point situé dans un plan connu. On en déduit facilement l'autre projection.

435. Par un point d'un plan donné; mener dans ce plan, des parallèles aux plans de projection.

436. Par un point situé dans un plan dont les directions des traces sont connues, mener dans ce plan des parallèles aux plans de projection.

437. Un point d'un plan, et les directions des traces de ce plan, suffisent pour construire les traces de ce plan; pourvu toutefois que les directions des traces ne soient pas parallèles à la ligne de terre.

438. Les directions des traces d'un plan sont données, et l'on connaît les projections d'un point de ce plan. On propose de construire les traces de ce plan.

439. Par un point connu, mener un plan parallèle à un plan donné.

440. Un point et un plan étant donnés, mener une perpendiculaire du point donné sur le plan donné, trouver le pied de la perpendiculaire, et construire la longueur de cette perpendiculaire.

441 et 442. Par un point donné, mener un plan perpendiculaire à une ligne donnée.

443. Un point et une droite étant donnés, mener par le point donné une perpendiculaire à la ligne donnée, déterminer le pied de cette perpendiculaire, et construire la longueur de cette perpendiculaire.

444. Par une ligne donnée, conduire un plan perpendiculaire à un plan donné.

445. Construire l'angle formé par les traces d'un plan donné.

446 et 447. Déterminer l'angle formé par deux lignes droites.

448. Par le point d'intersection de deux droites données, mener, dans le plan de ces droites, une ligne qui divise l'angle qu'elles forment, en deux parties.

449. Connaissant l'angle de deux droites et les angles qu'elles forment avec la verticale; construire l'angle formé par les projections horizontales de ces droites. Pour RÉDUIRE UN ANGLE A L'HORIZON, il suffit de

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

construire l'angle formé par les projections horizontales des côtés de cet angle.

450. Construire l'angle formé par une droite avec un plan.

451. Déterminer les angles formés par un plan donné, avec les plans de projection.

452. Construire un plan, qui divise en deux parties égales l'angle formé par un plan avec le plan horizontal.

453 et 454. Déterminer l'angle formé par deux plans donnés.

455. Construire un plan qui passe par l'intersection de deux plans donnés, et qui divise l'angle qu'ils forment en deux parties égales.

456. On connaît un point d'une parallèle à un plan donné; l'une des projections de cette droite est connue; il s'agit de construire l'autre projection.

457. Une parallèle au plan vertical étant donnée, de grandeur et de position, on propose de conduire, par le milieu de cette droite, un plan perpendiculaire à cette droite.

458. Par une droite donnée, mener un plan parallèle à la ligne de terre.

459. Faire passer la surface d'une sphère par quatre points donnés qui ne sont pas dans un même plan.

460. Circonscrire une sphère à une pyramide triangulaire.

461. Inscrire une sphère dans une pyramide triangulaire.

462. Déterminer la plus courte distance entre deux plans parallèles.

463. Déterminer la plus courte distance entre un plan et une parallèle à ce plan.

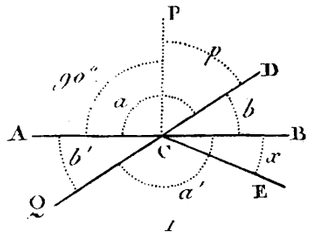
464. Déterminer la plus courte distance entre deux droites.

465. Par un point, situé dans le plan de deux parallèles, mener une sécante, telle, que la partie de cette sécante comprise entre les parallèles, soit égale à une ligne donnée.

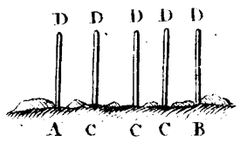
466 Déterminer le volume du solide de révolution engendré par un triangle isoscèle qui tourne autour d'un axe fixe.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

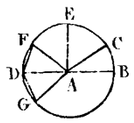
Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II



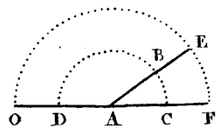
1



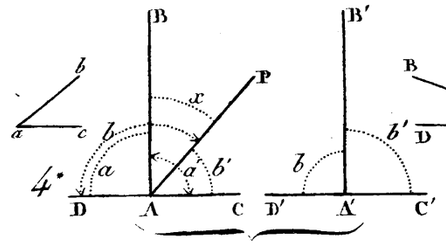
2



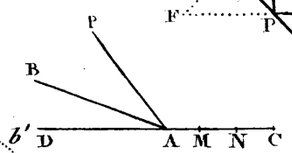
3



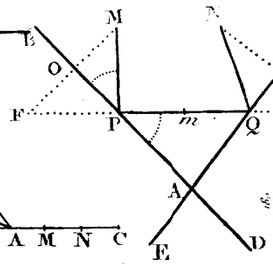
4



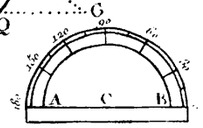
4* 5



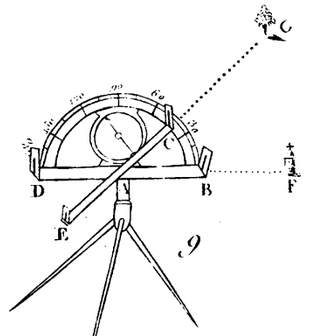
6



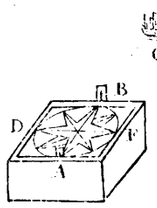
7



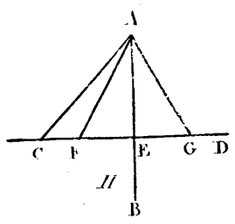
8



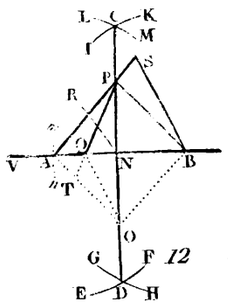
9



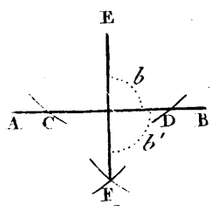
10



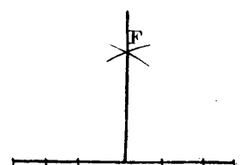
11



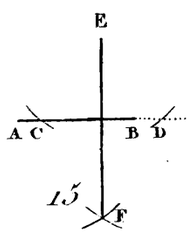
12



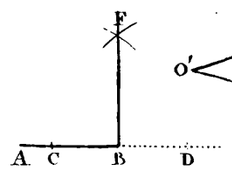
13



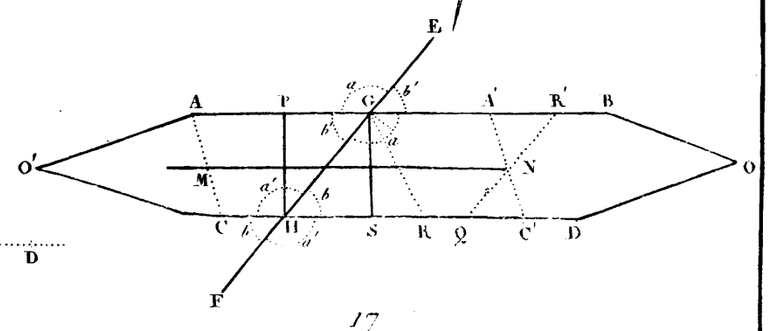
14



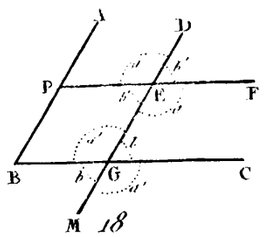
15



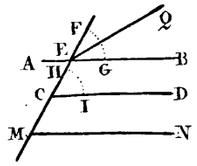
16



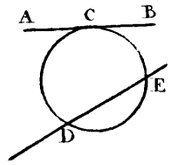
17



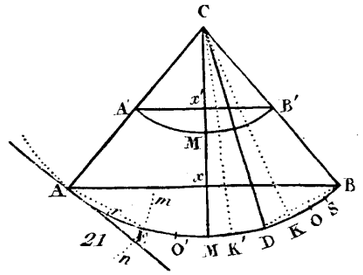
18



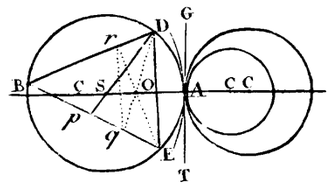
19



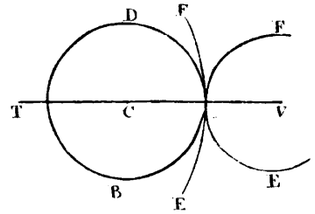
20



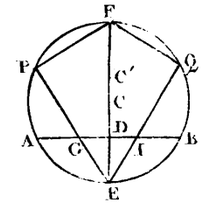
21



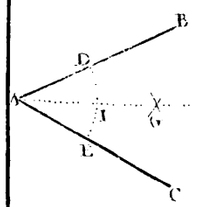
22



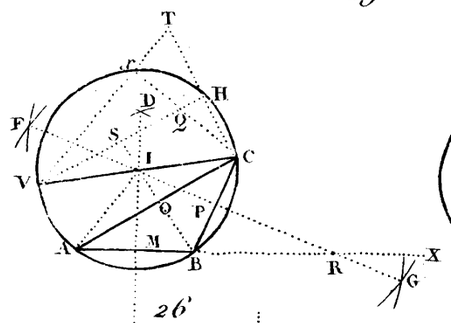
23



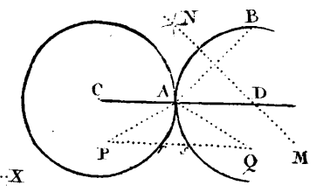
24



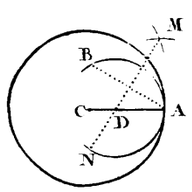
25



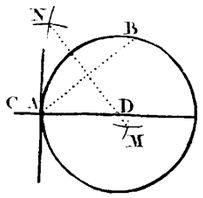
26



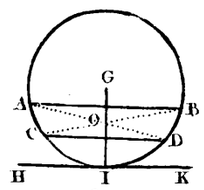
27



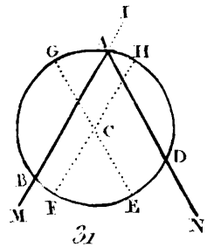
28



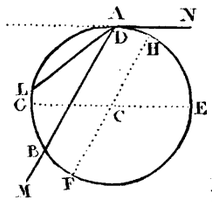
29



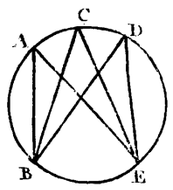
30



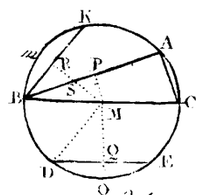
31



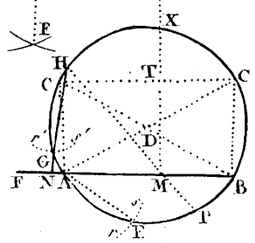
32



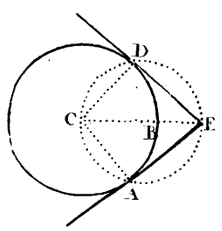
33



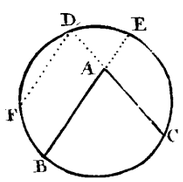
34



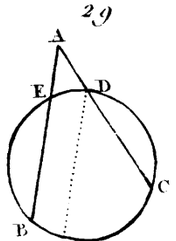
35



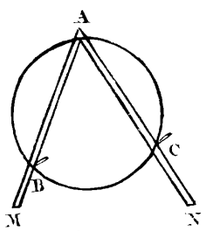
36



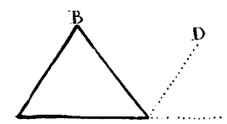
37



38



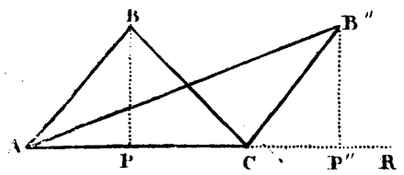
39



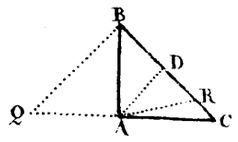
40

41

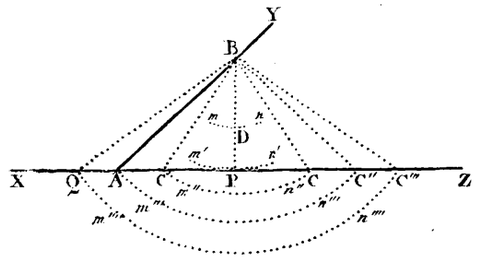
Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II



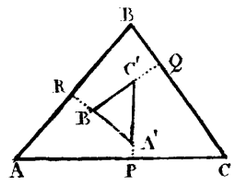
42



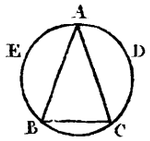
43



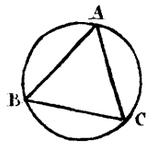
44



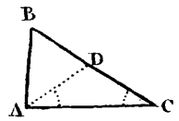
45



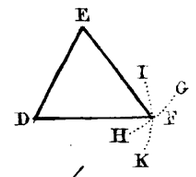
46



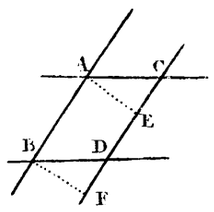
47



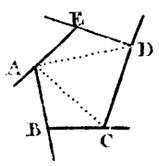
48



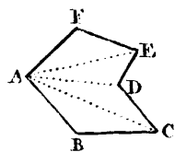
49



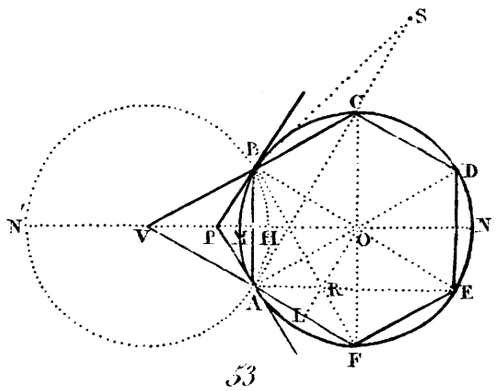
50



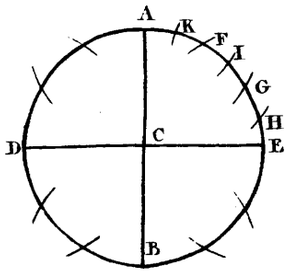
51



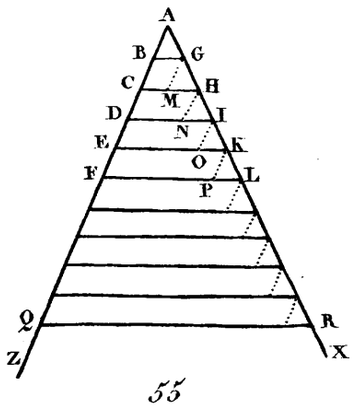
52



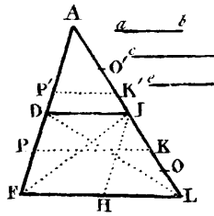
53



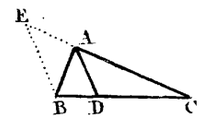
54



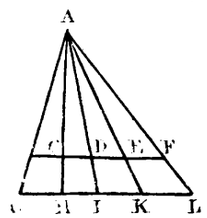
55



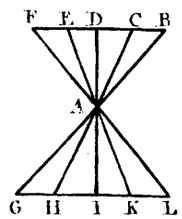
56



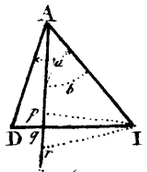
56*



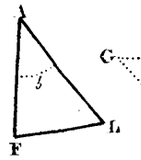
57



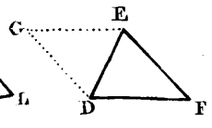
58



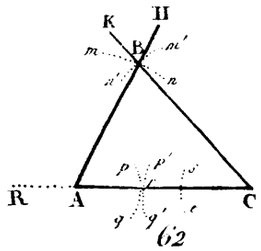
59



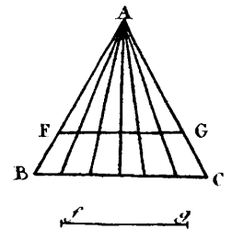
60



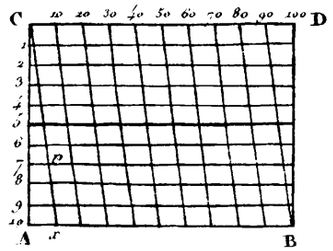
61



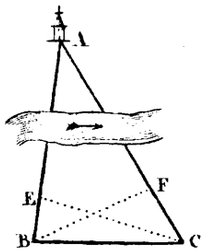
62



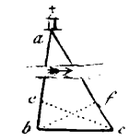
63



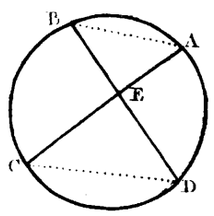
64



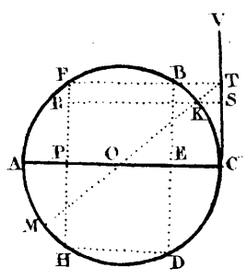
65



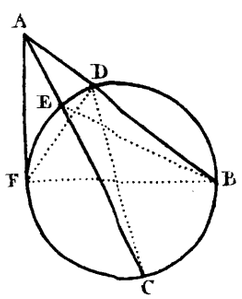
66



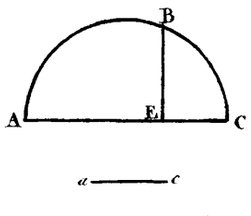
67



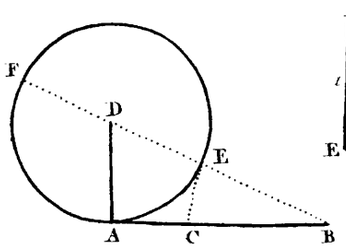
68



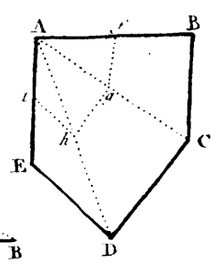
69



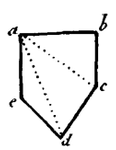
70



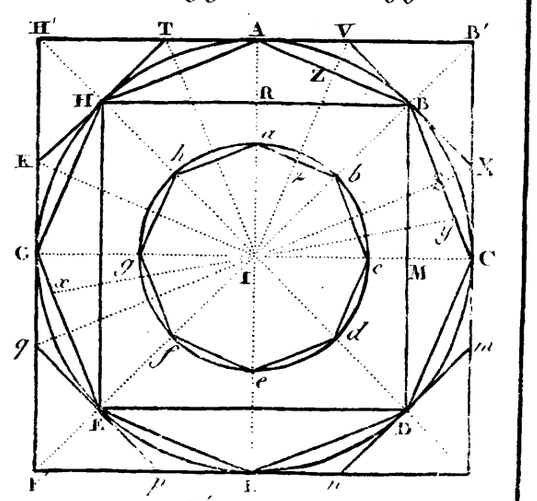
71



72

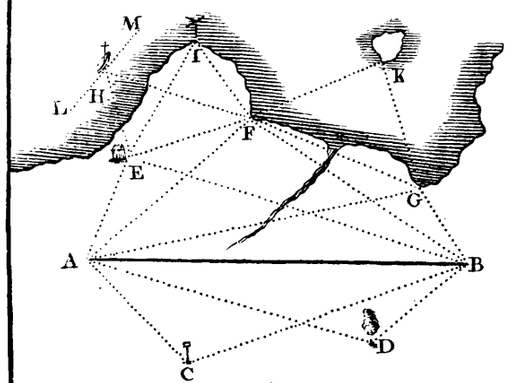


73

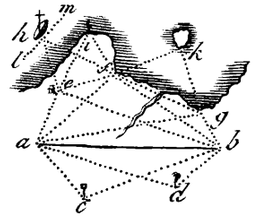


74

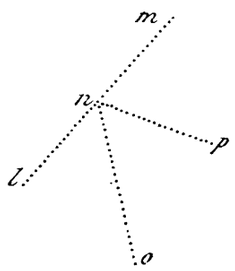
Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II



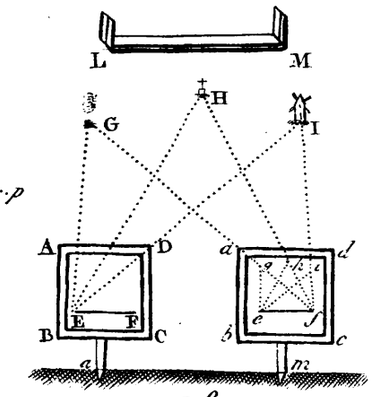
75



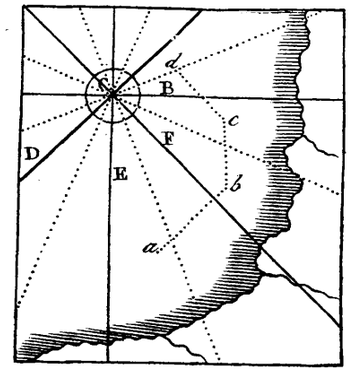
76.



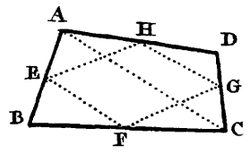
77.



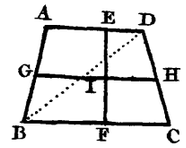
78.



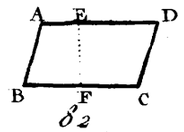
79.



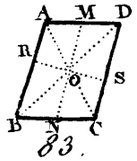
80.



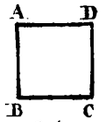
81.



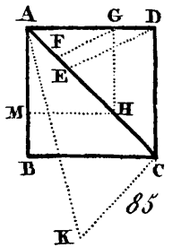
82.



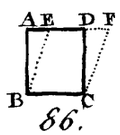
83.



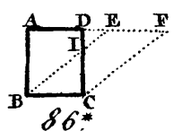
84.



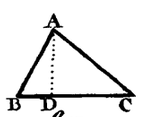
85.



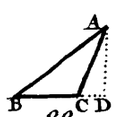
86.



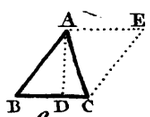
86.*



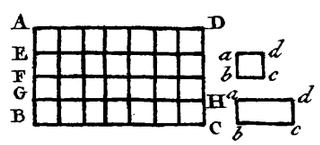
87.



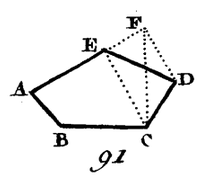
88.



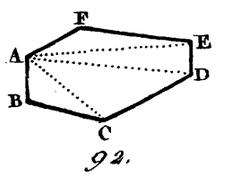
89.



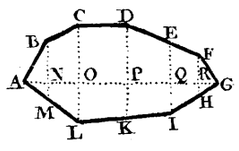
90.



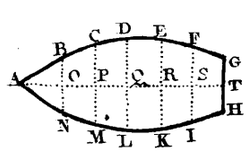
91



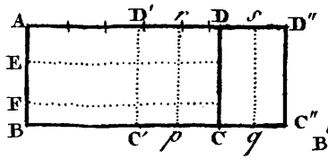
92.



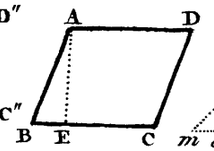
93.



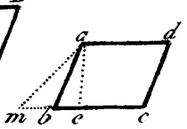
94.



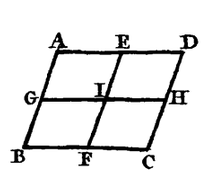
95.



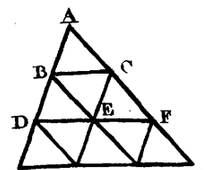
96.



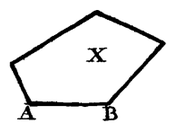
97.



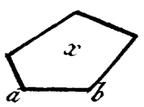
98.



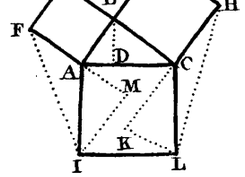
99.



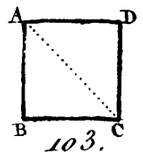
100



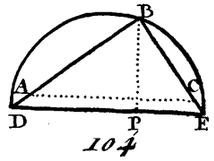
101



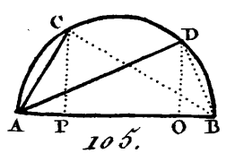
102.



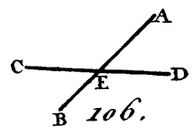
103.



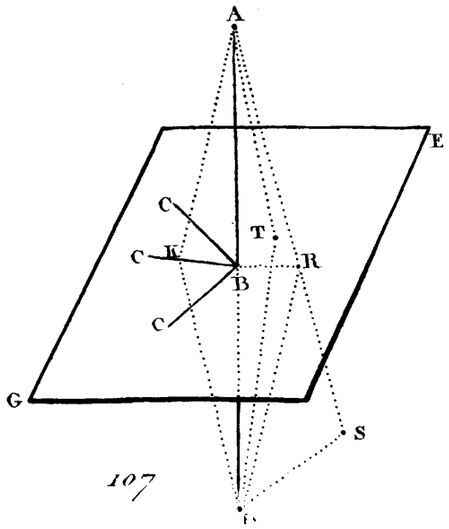
104.



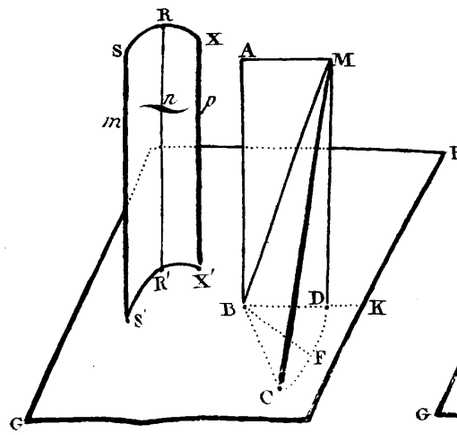
105.



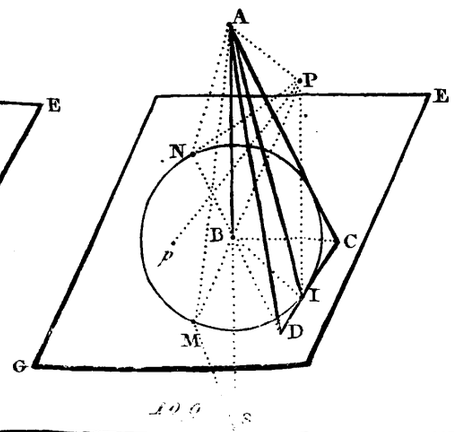
106.



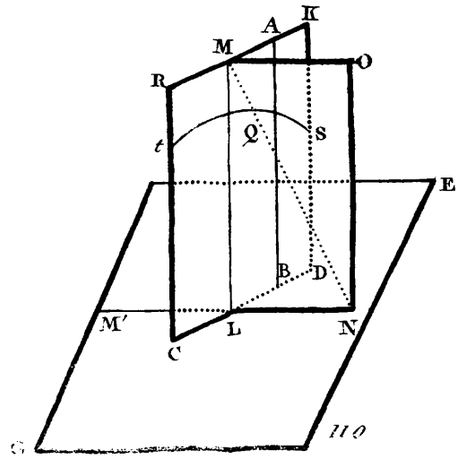
107



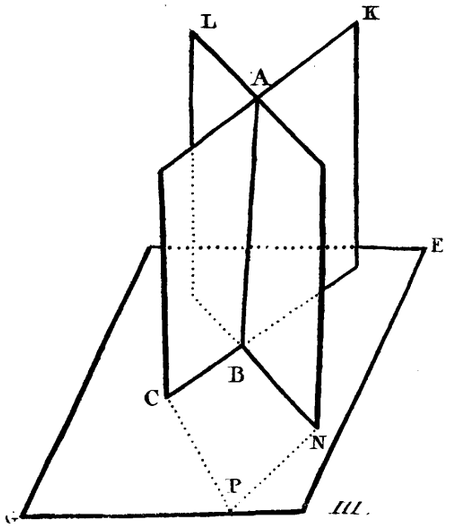
108



109

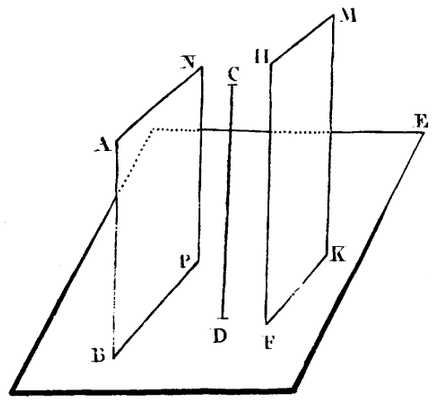


110

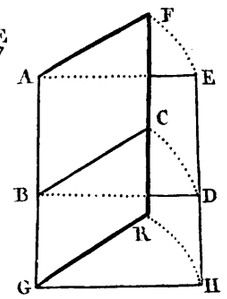


111.

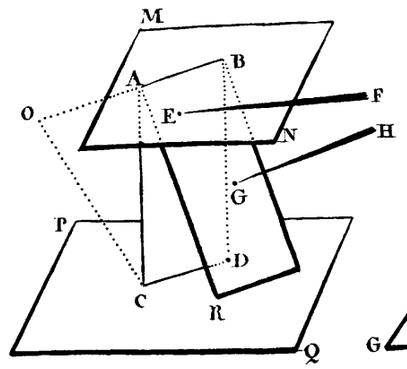
Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II



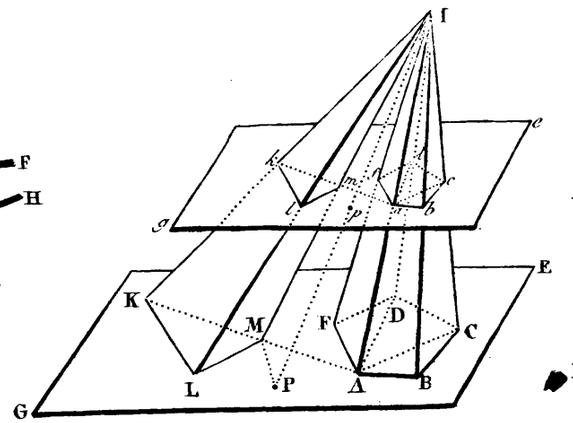
112.



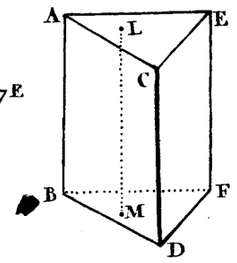
113.



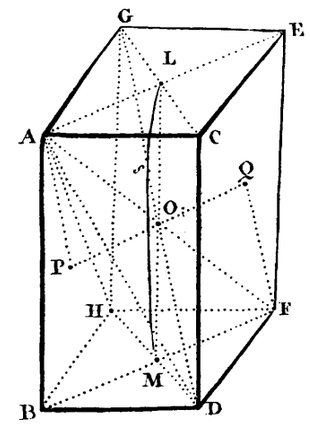
114.



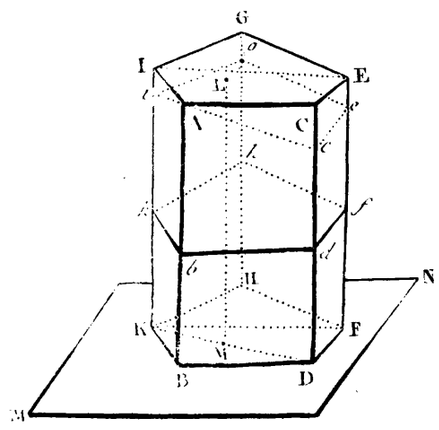
115.



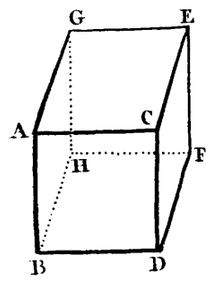
116.



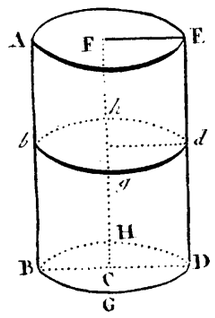
117.



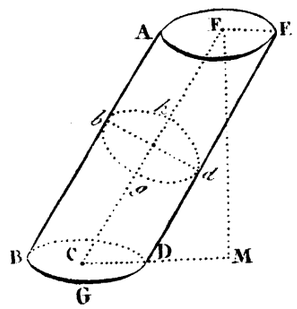
118.



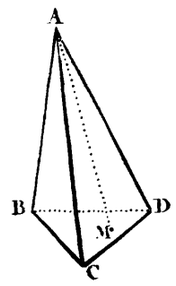
119.



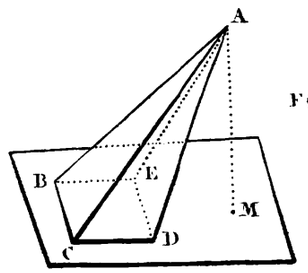
120.



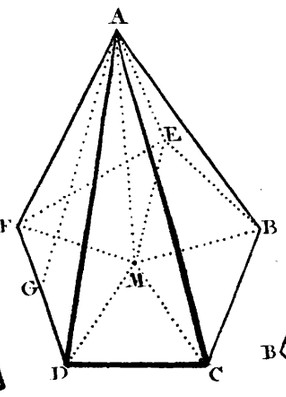
121.



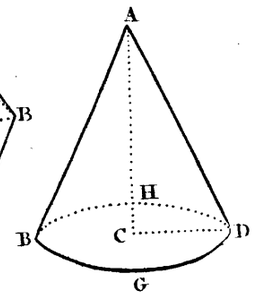
122.



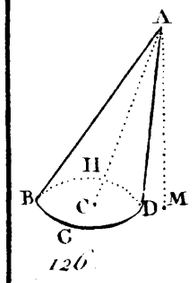
123.



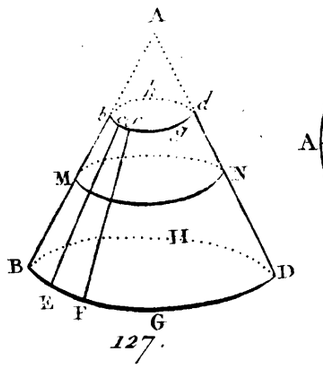
124.



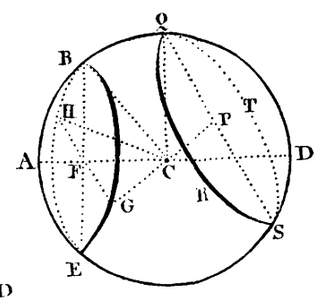
125.



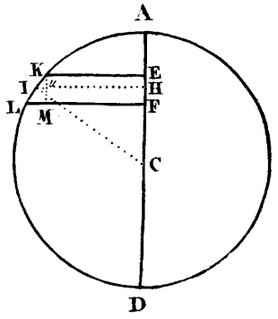
126.



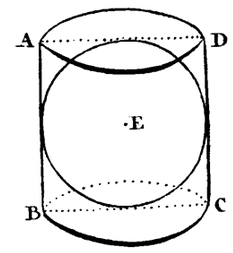
127.



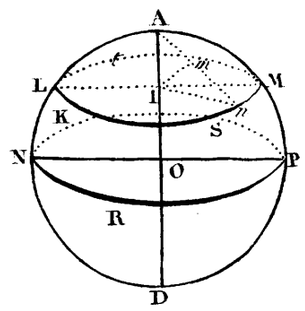
128.



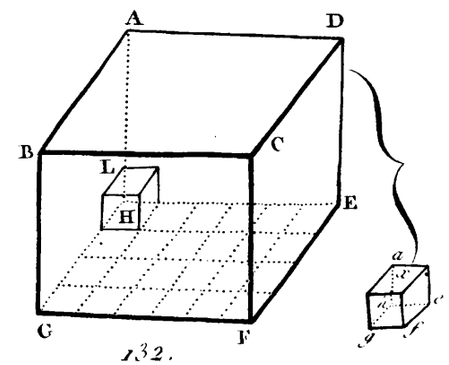
129.



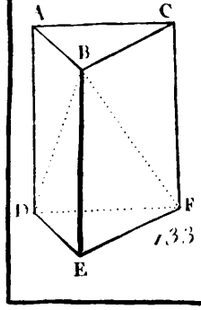
130.



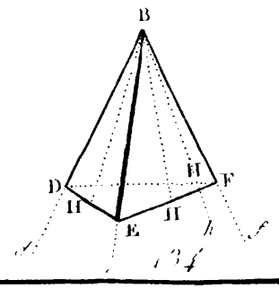
131.



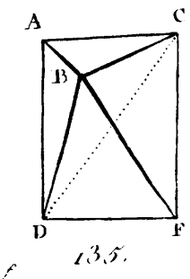
132.



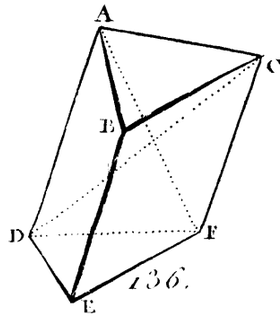
133.



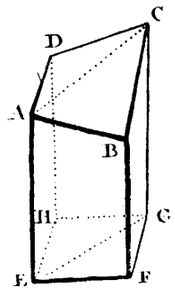
134.



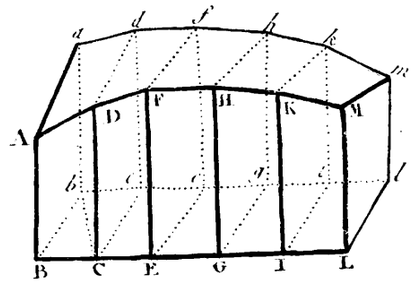
135.



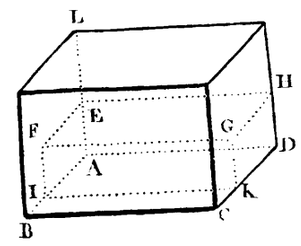
136.



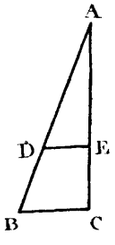
137.



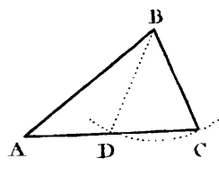
138.



139.

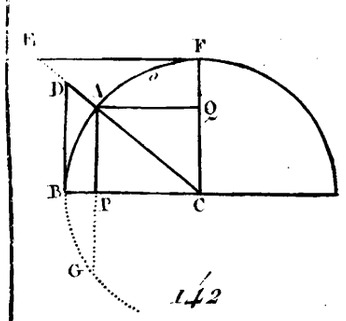


140.

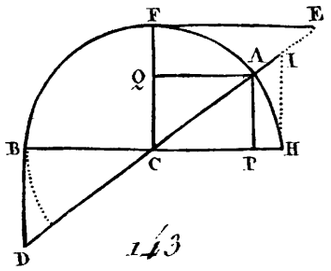


141.

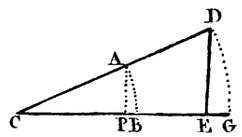
Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II



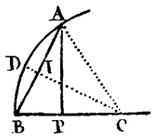
142



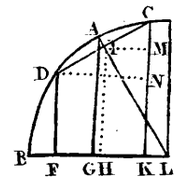
143



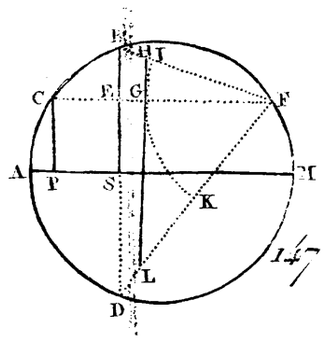
144



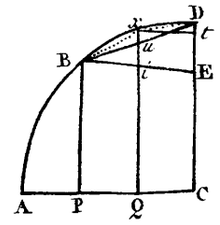
145



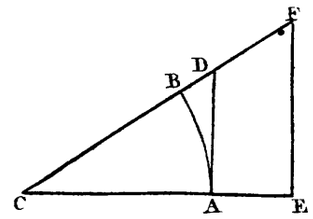
146



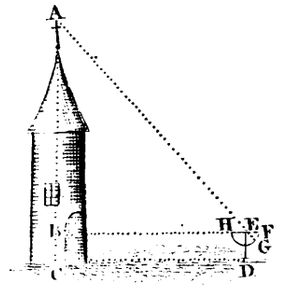
147



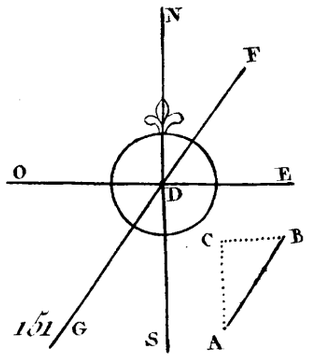
148



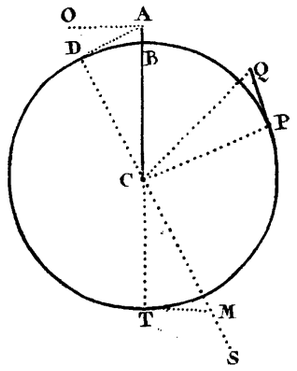
149



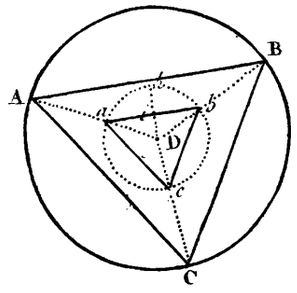
150



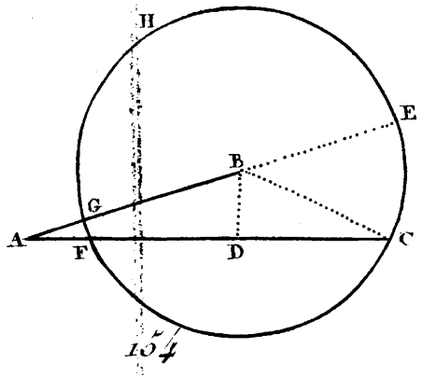
151



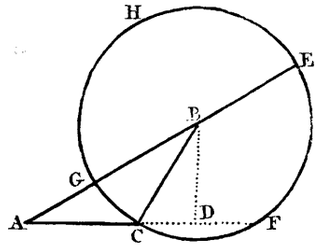
152



153



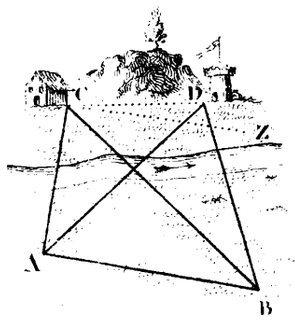
154



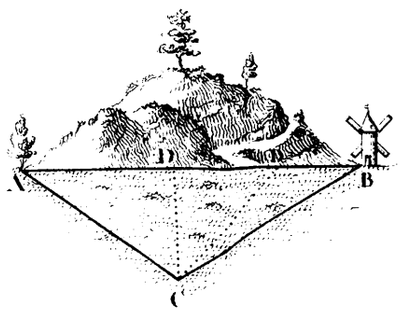
155



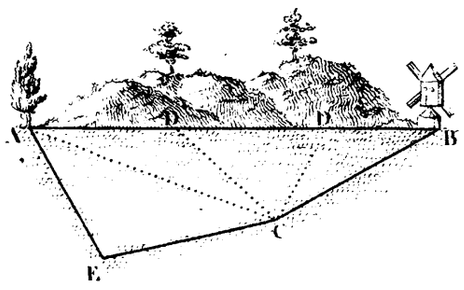
156



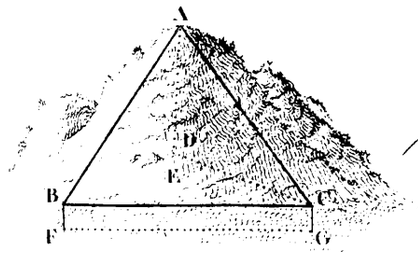
157



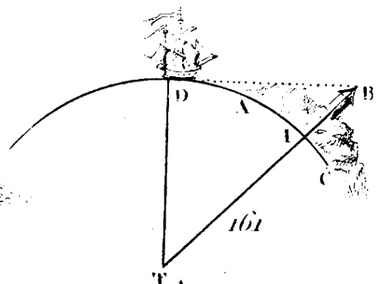
158



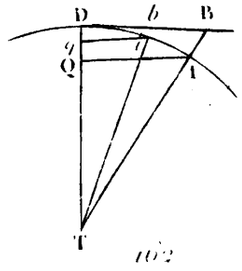
159



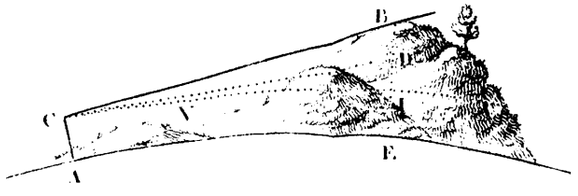
160



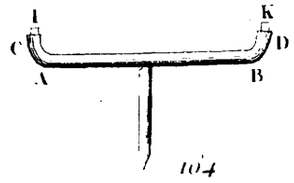
161



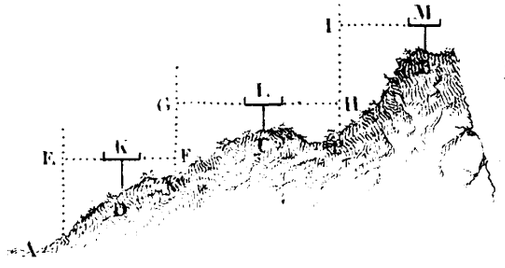
162



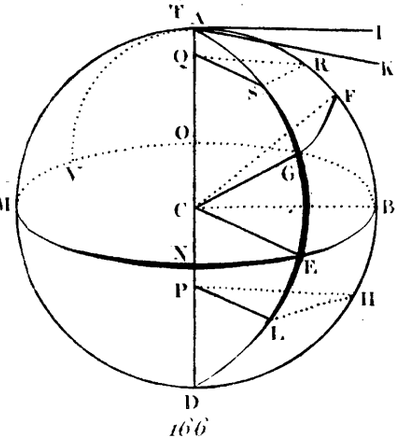
163



164

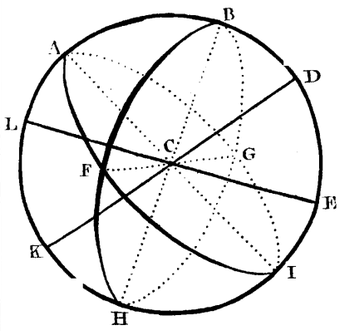


165

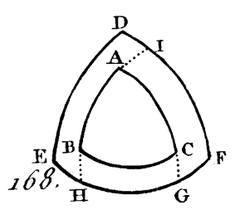


166

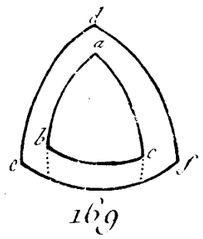
Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II



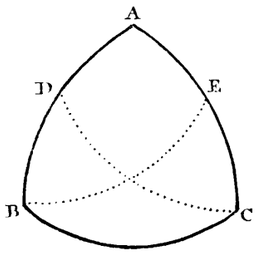
167.



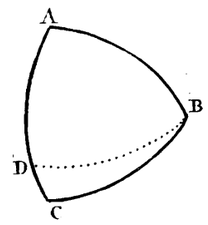
168.



169

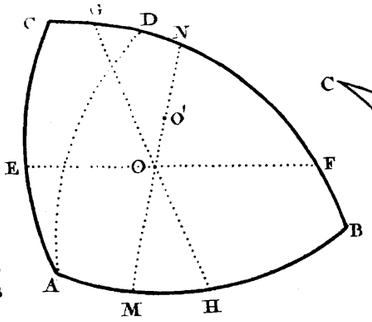


170.

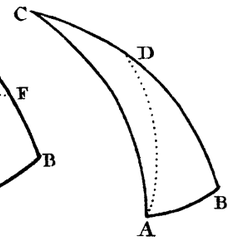


171.

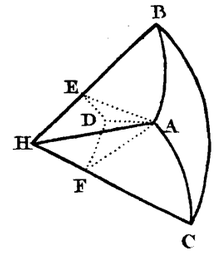
172.



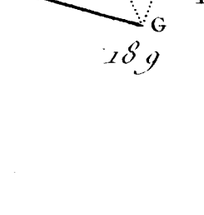
173.



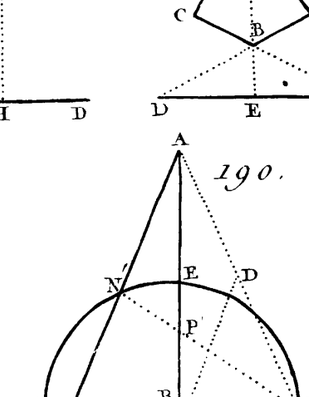
174.



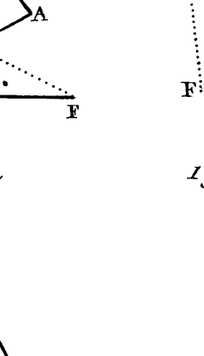
175.



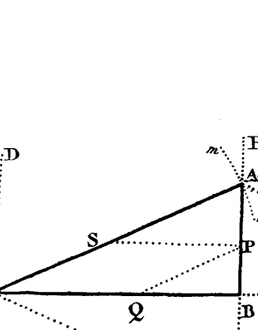
176.



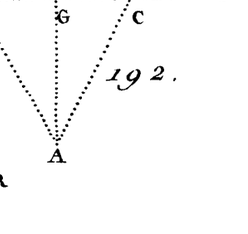
177



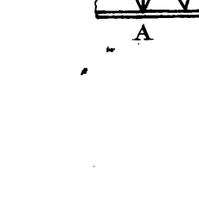
178.



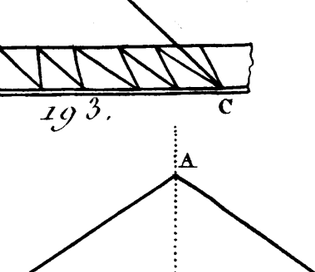
179.



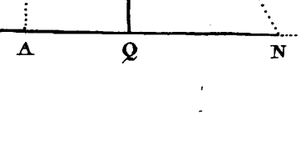
180.



181.

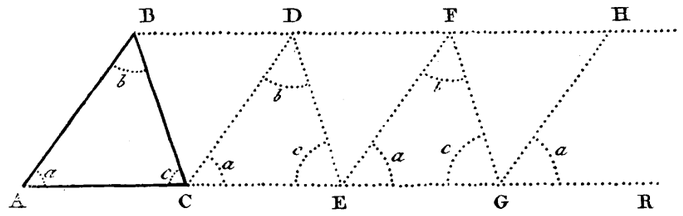


182.

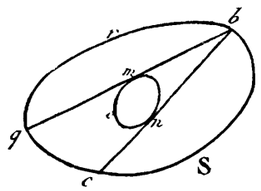


183.

184.

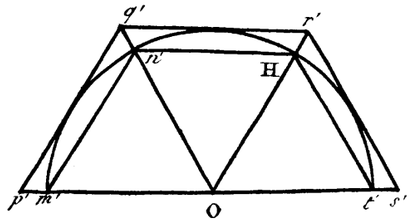


185.

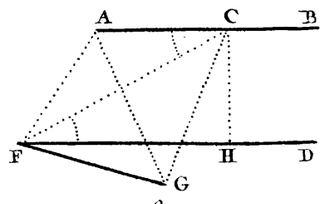


186.

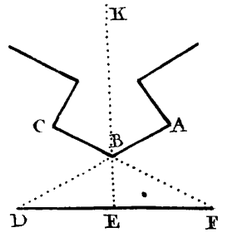
187



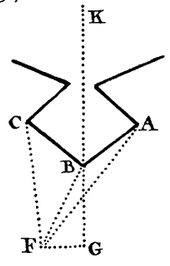
188



189

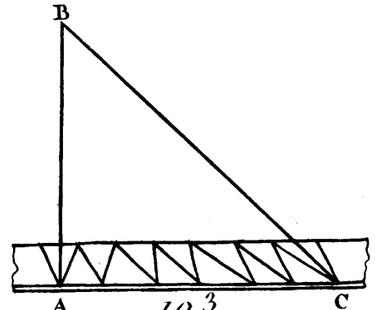


190.



191.

192.



193.

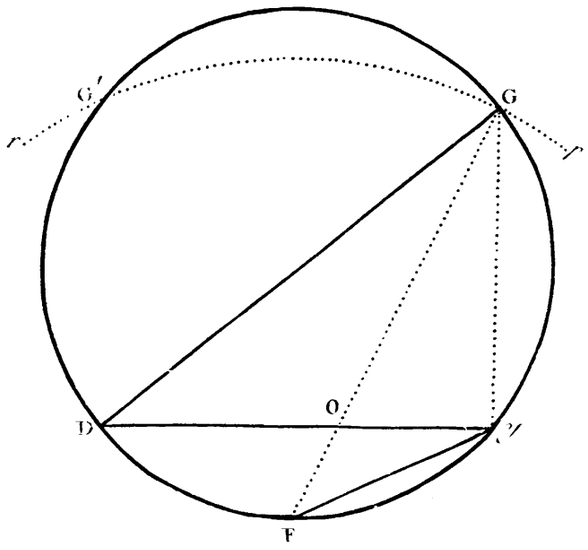
194

195.

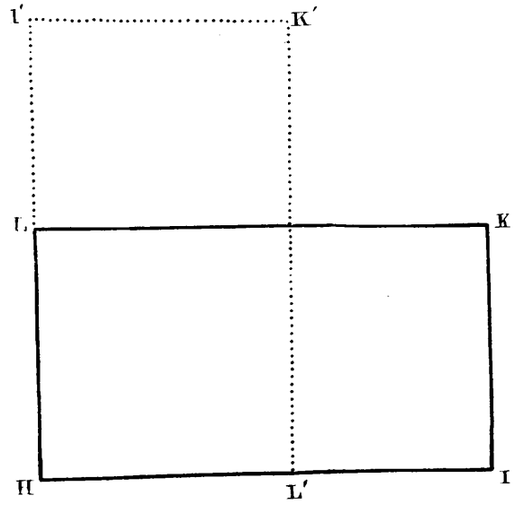
196.

197.

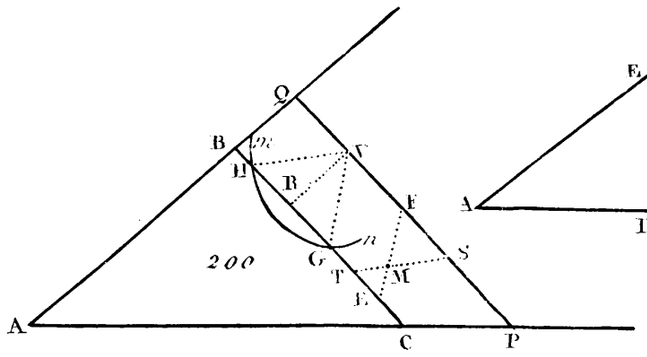
Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II



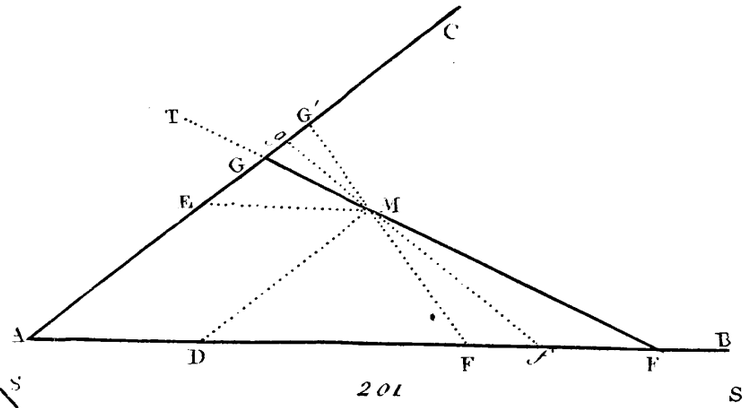
198



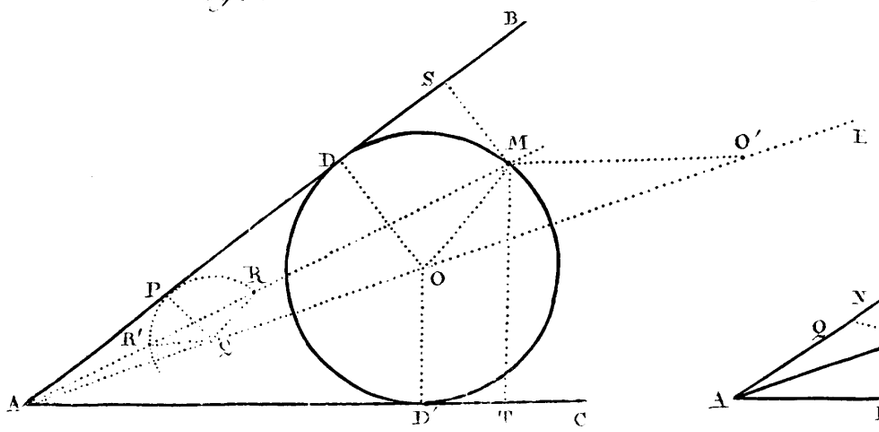
199.



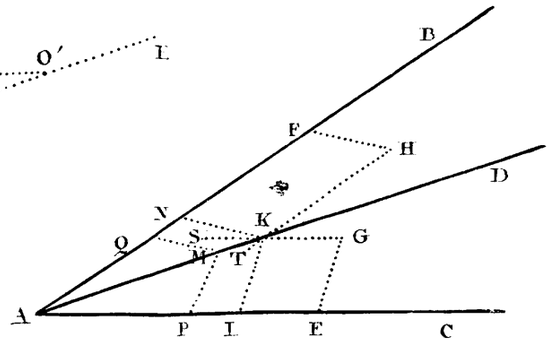
200



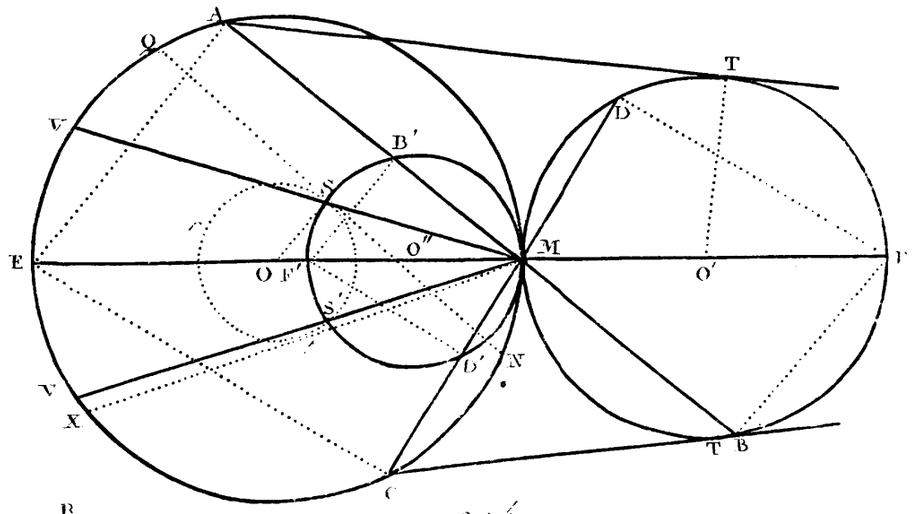
201



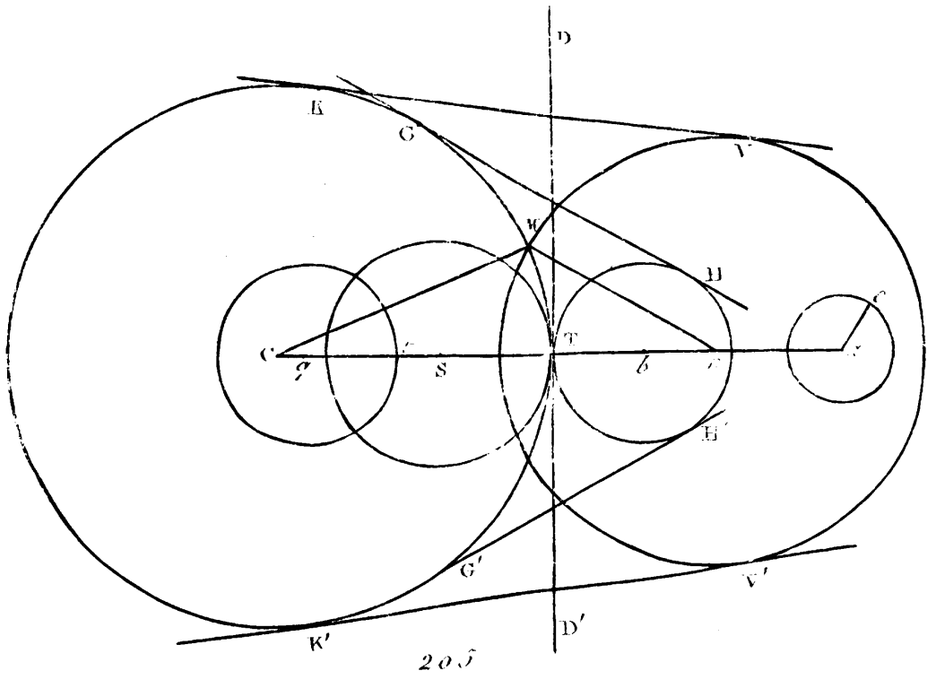
202



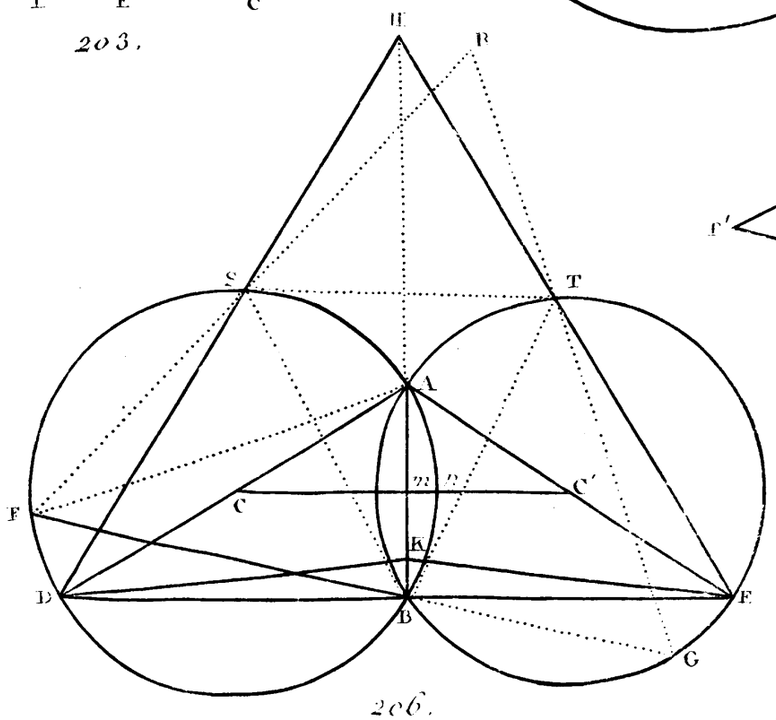
203.



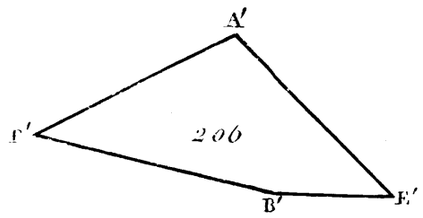
204



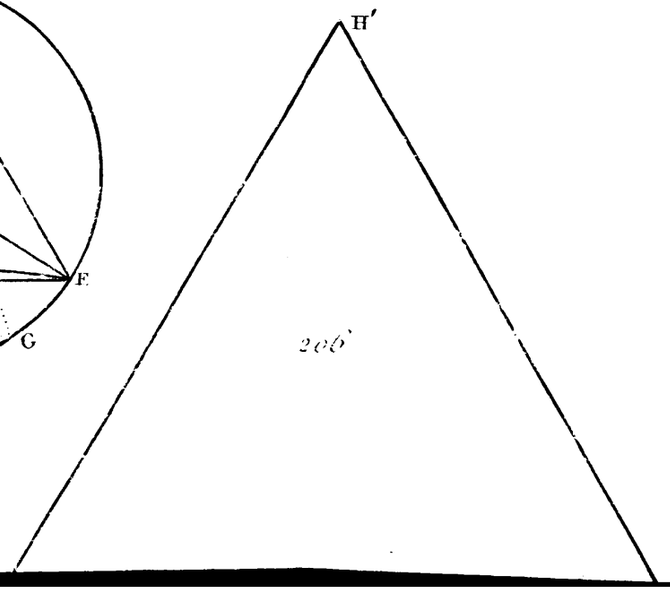
205



206.



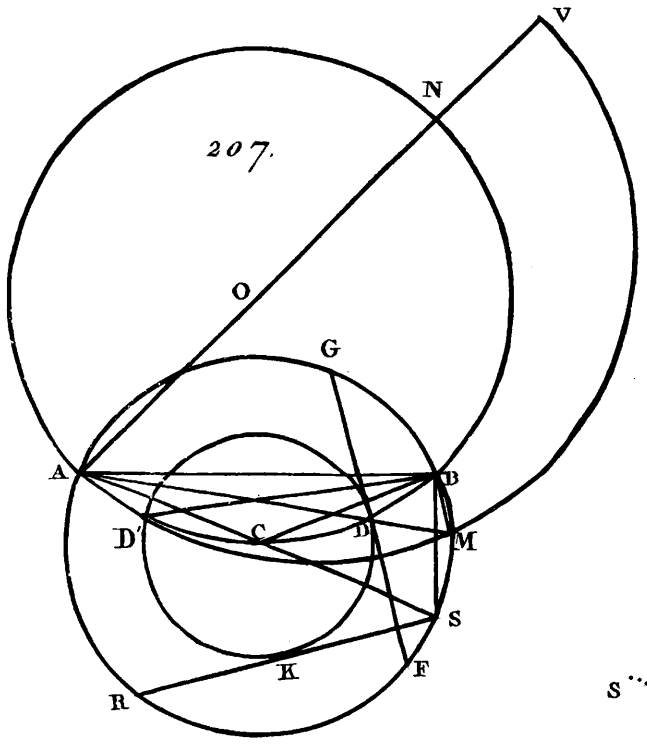
206



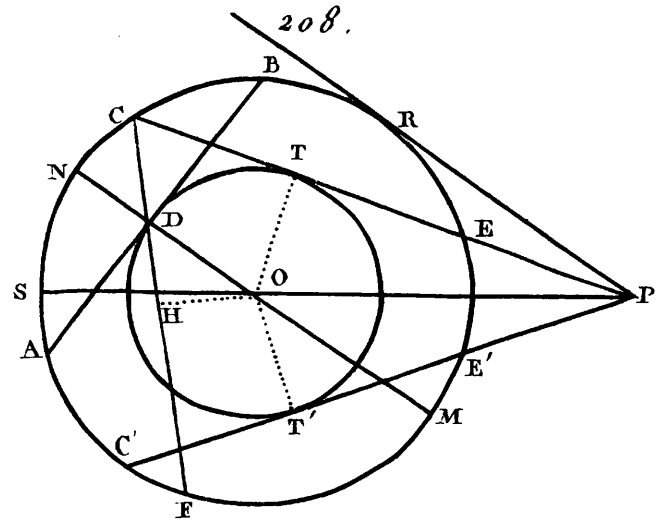
206

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

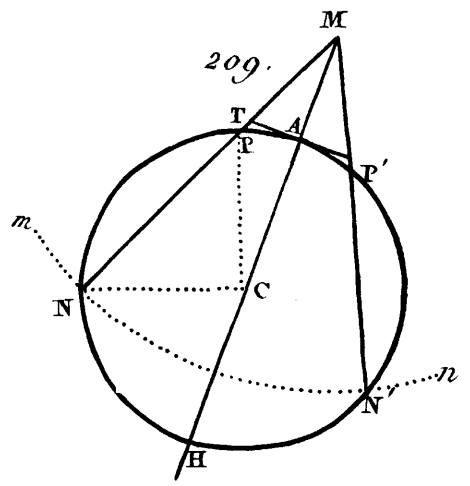
207.



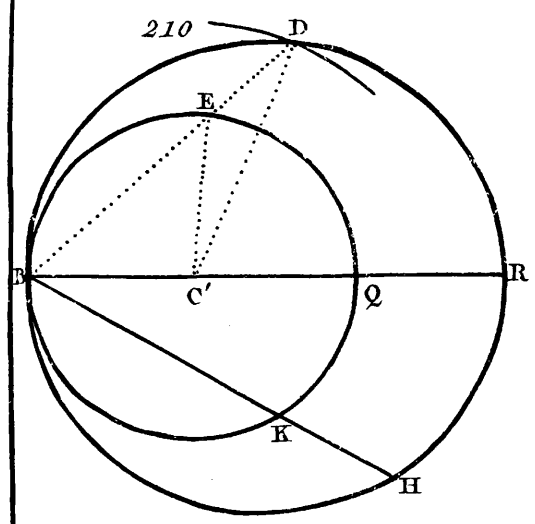
208.



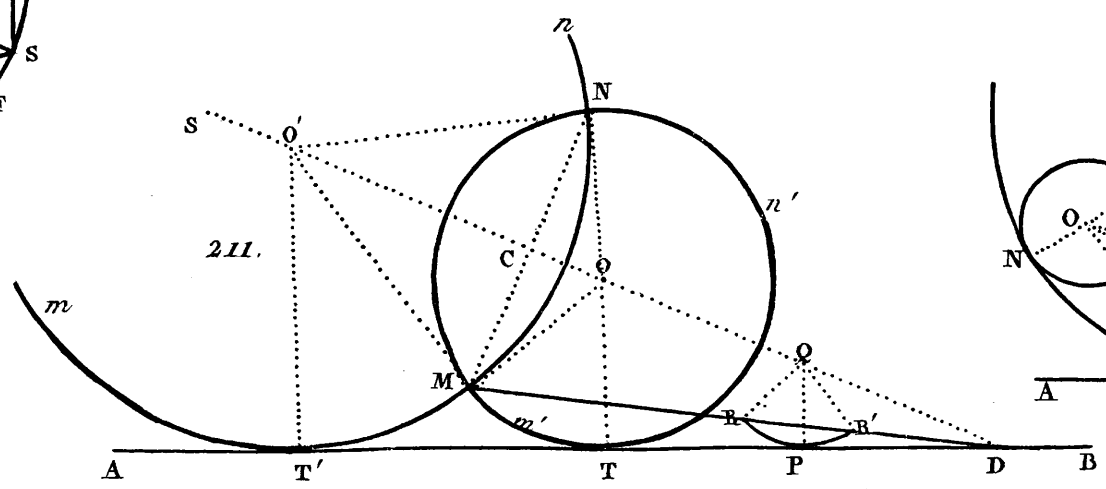
209.



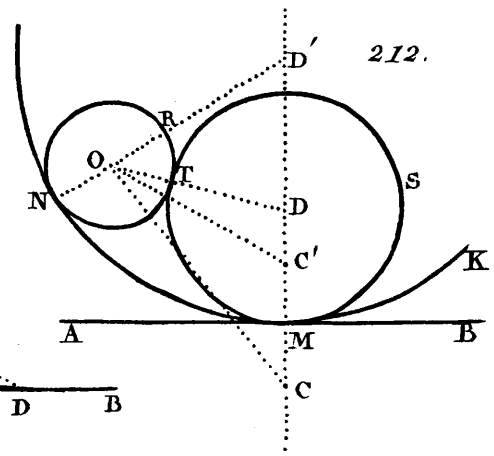
210



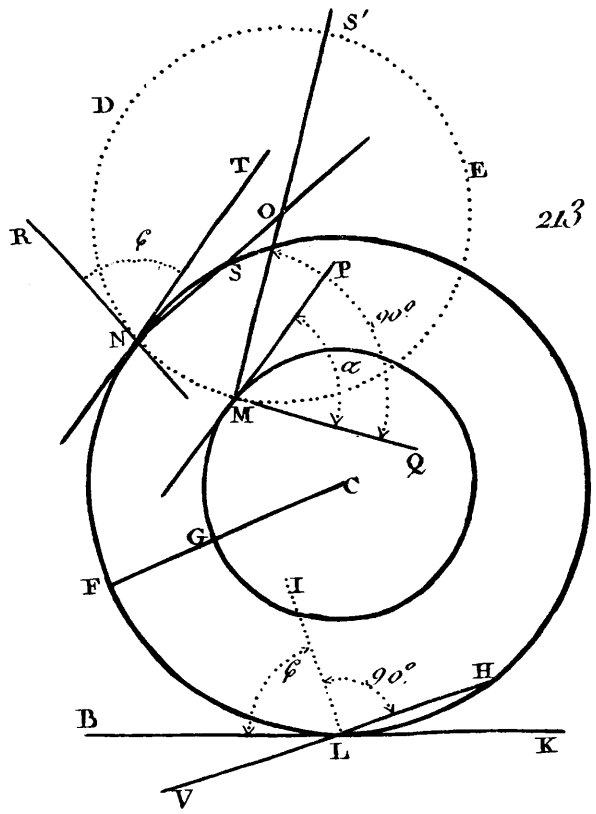
211.



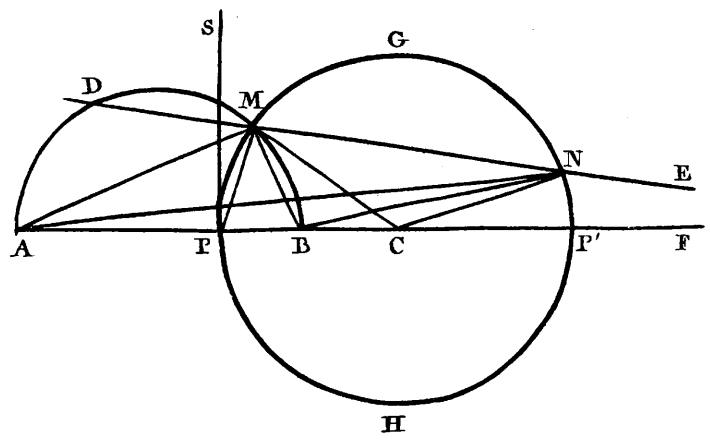
212.



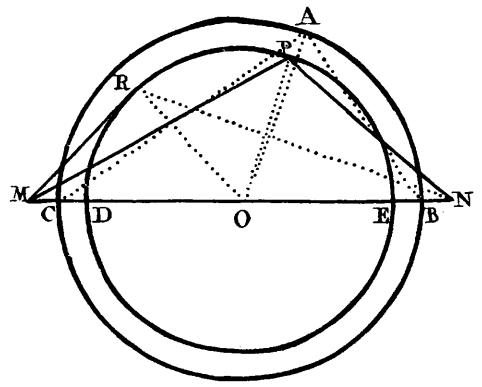
213.



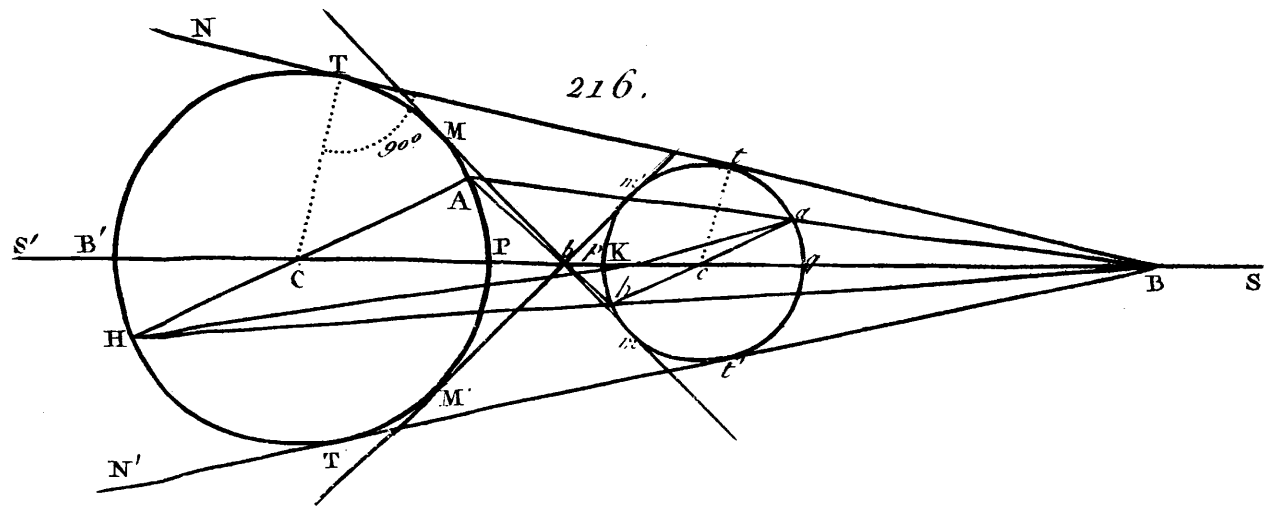
214.



215.

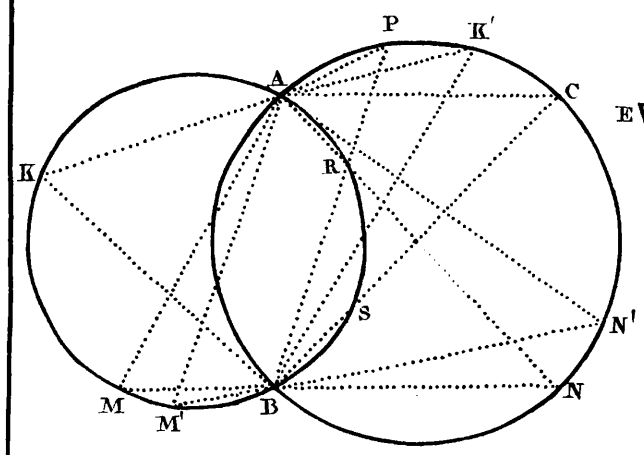


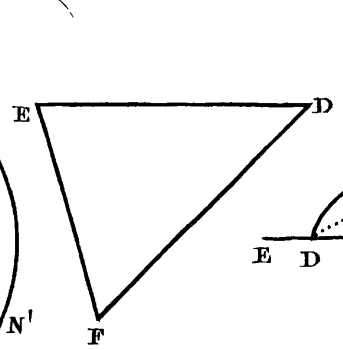
216.

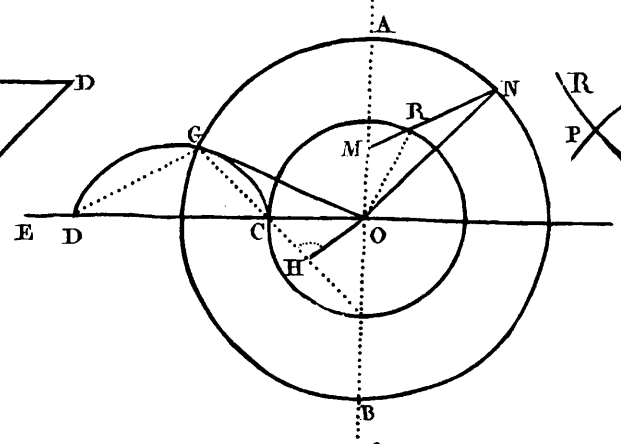


Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

217

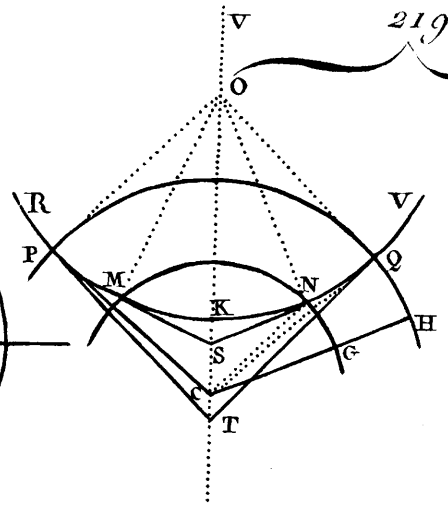


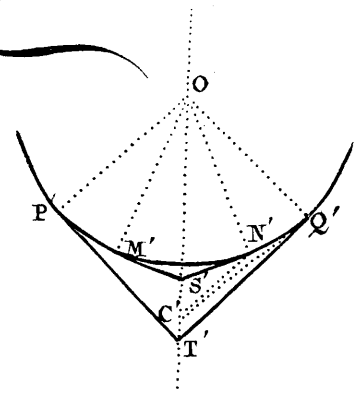


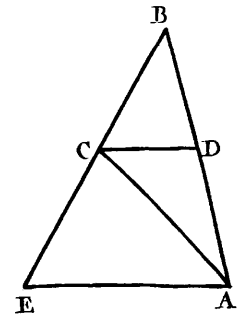


218.

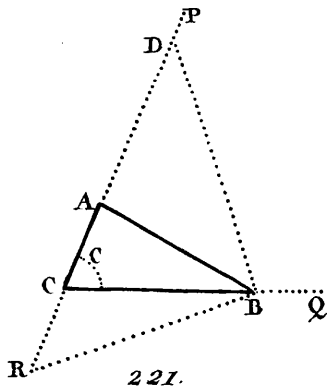
219



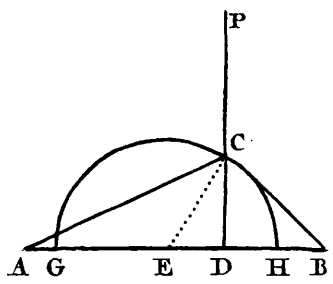




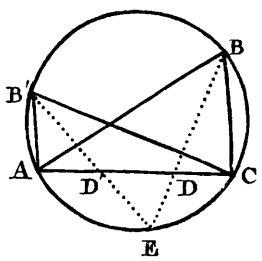
220



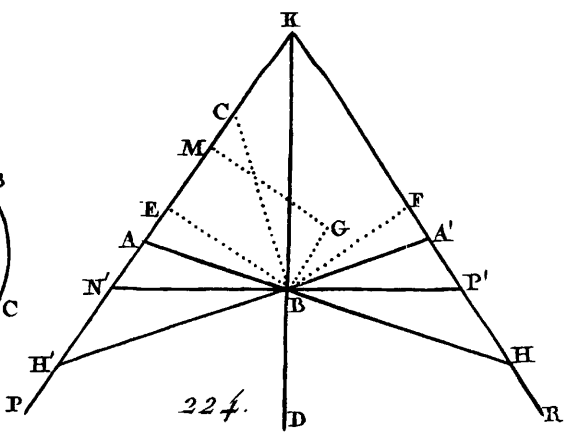
221.



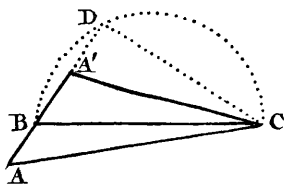
222.



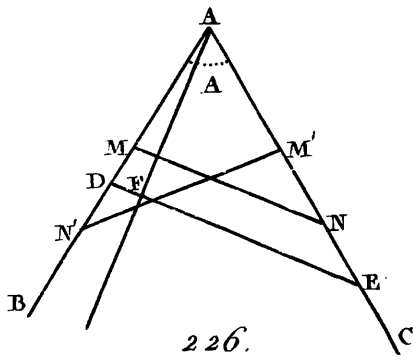
223.



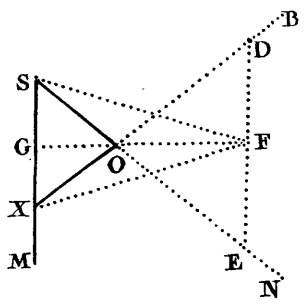
224.



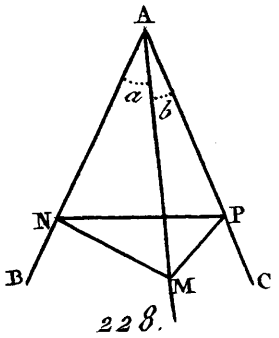
225.



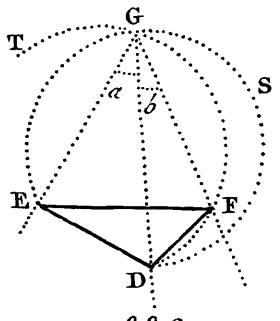
226.



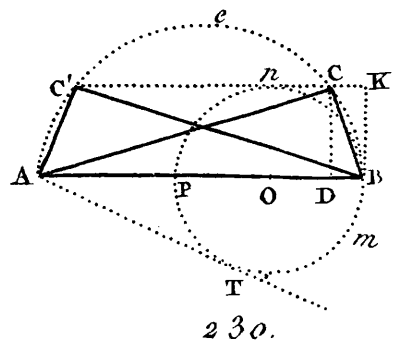
227



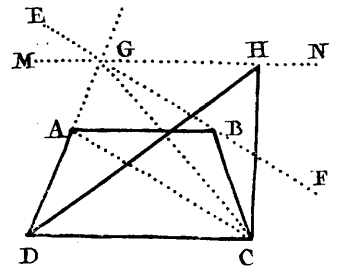
228.



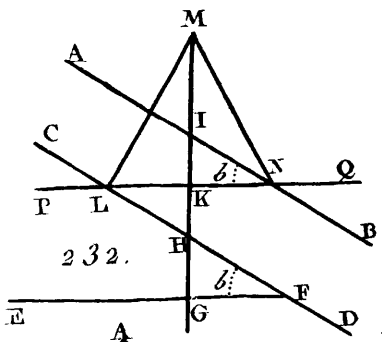
229.



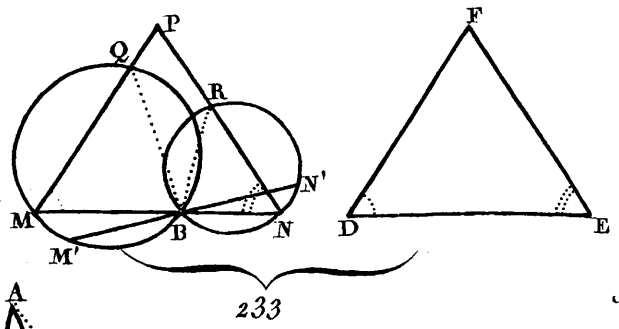
230.



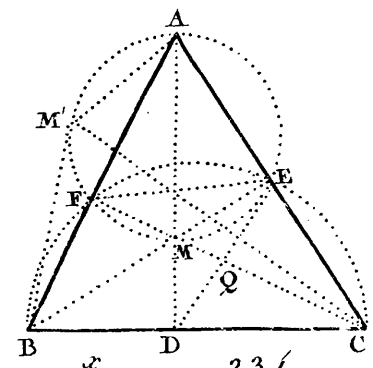
231.



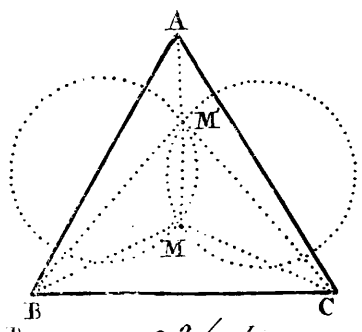
232.



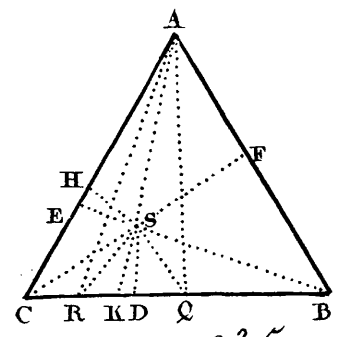
233



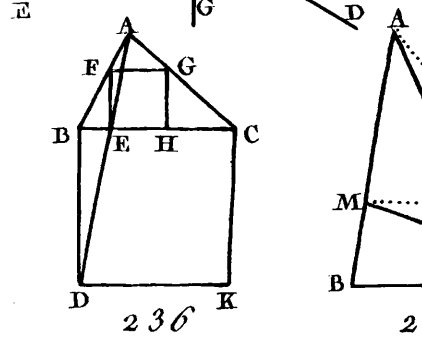
234.



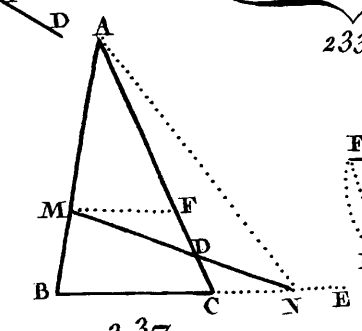
234 bis



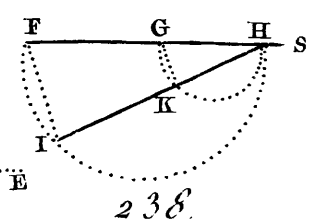
235.



236

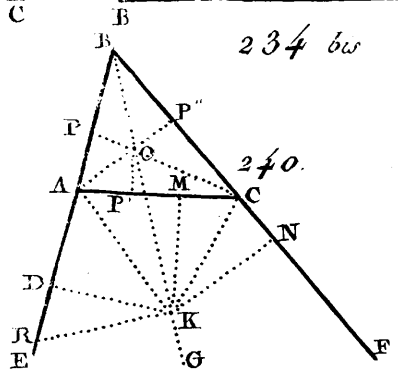


237

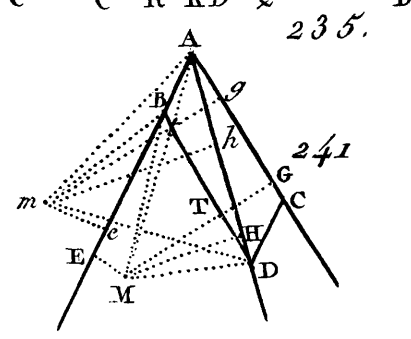


238.

239.



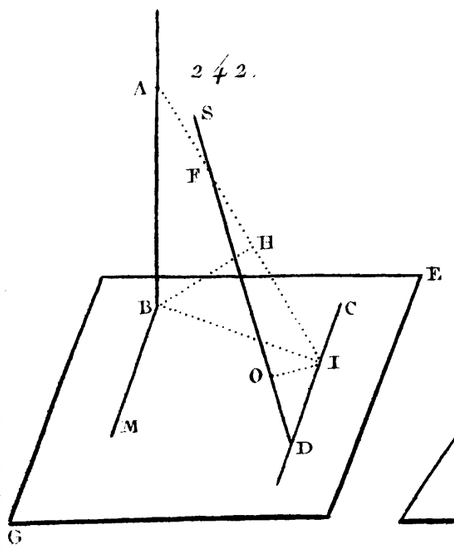
240.



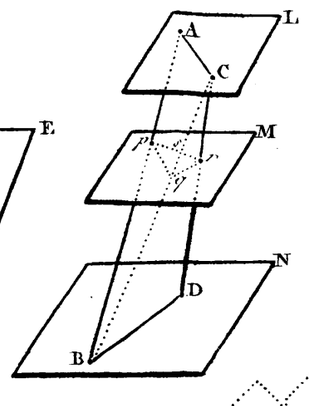
241

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

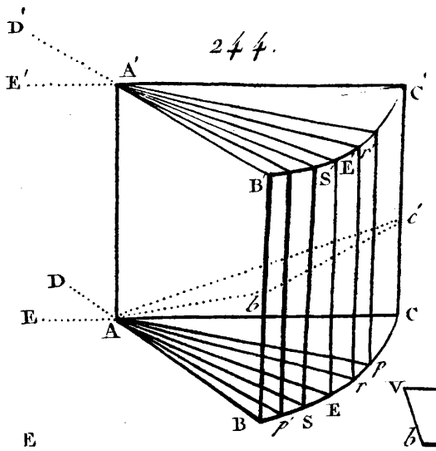
242.



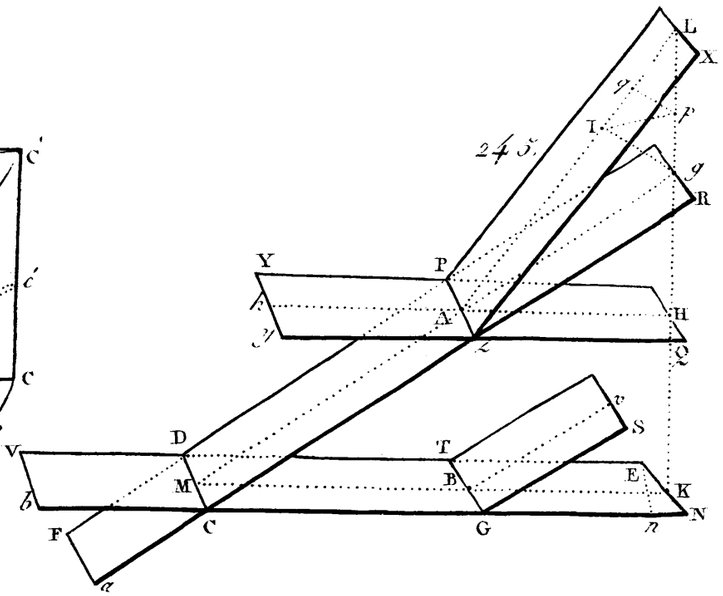
243.



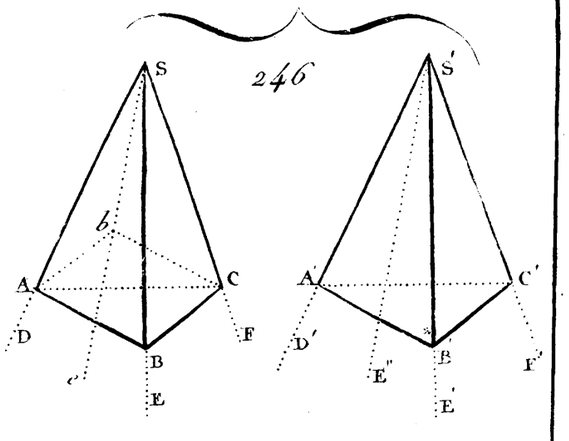
244.



245.



246.



247.

248.

249.

250.

251.

252.

253.

254.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Fig. 255.

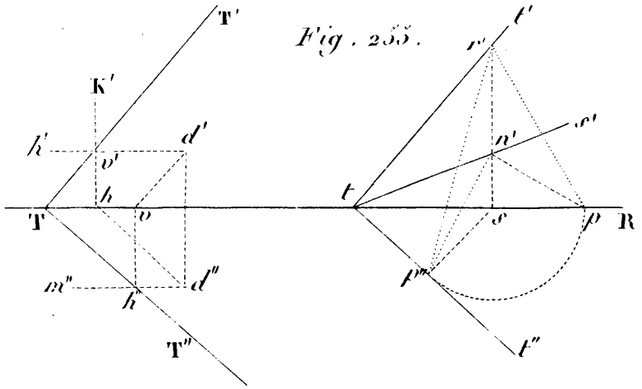


Fig. 256.

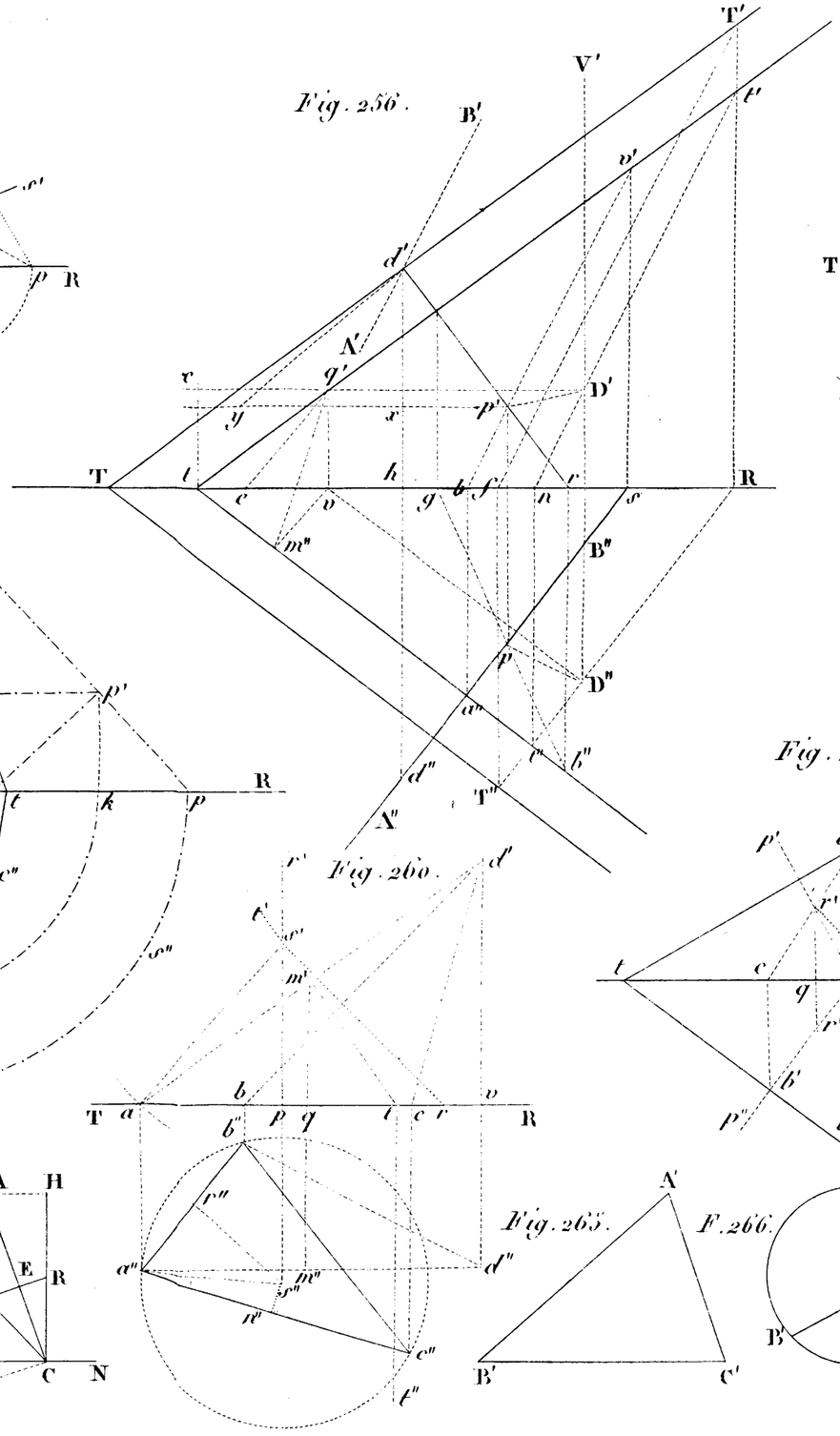


Fig. 257.

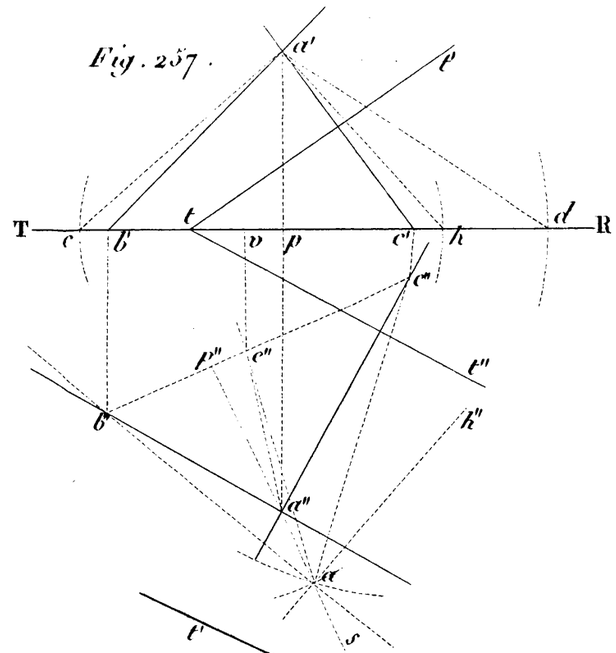


Fig. 258.

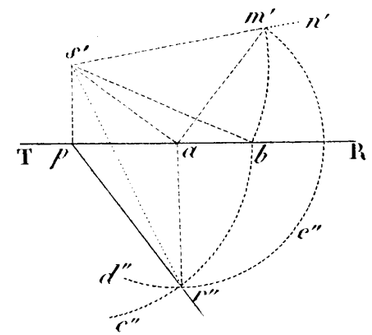


Fig. 259.

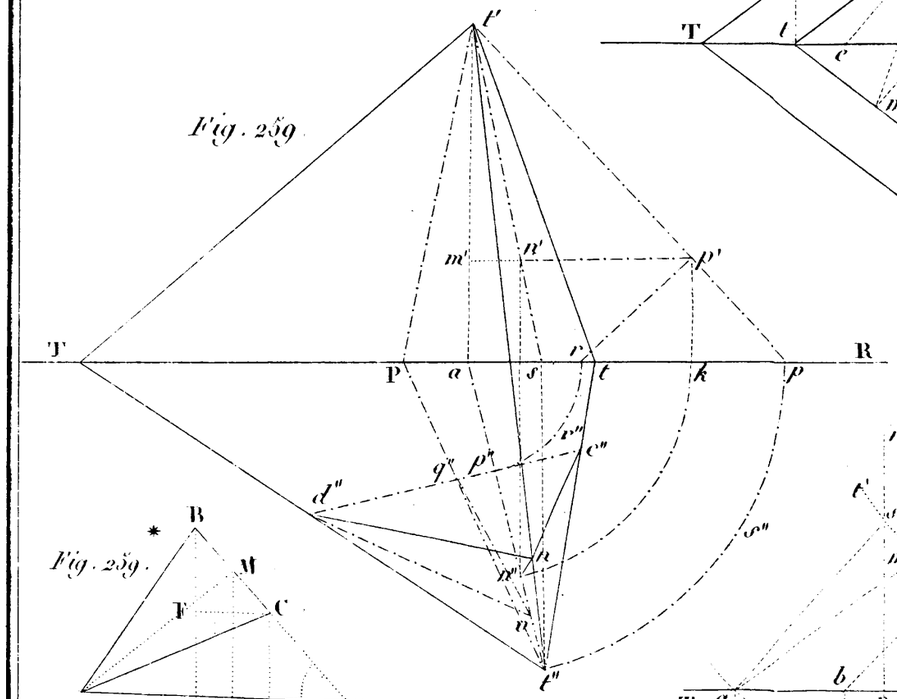


Fig. 260.

Fig. 261.

Fig. 262

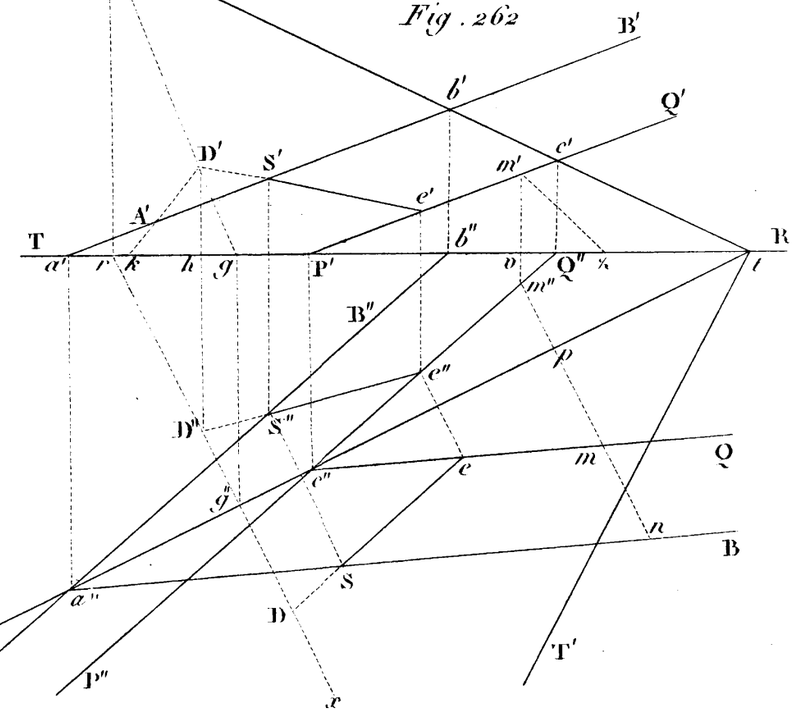


Fig. 263

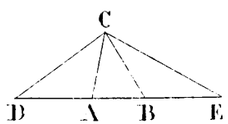


Fig. 264

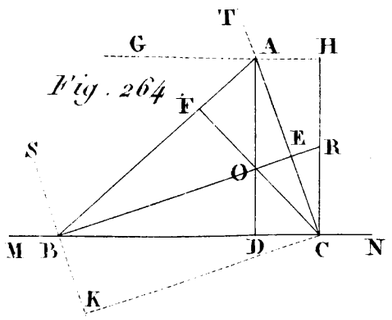


Fig. 265.

F. 266.

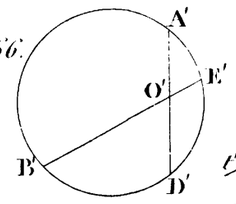


Fig. 259.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II

Fig. 267

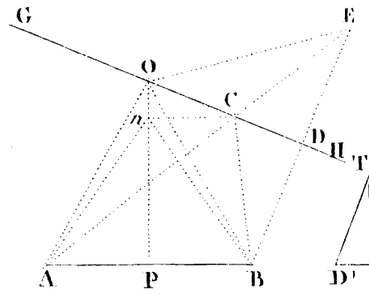


Fig. 268.

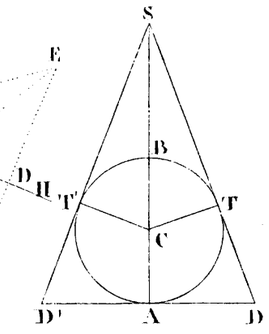


Fig. 269.

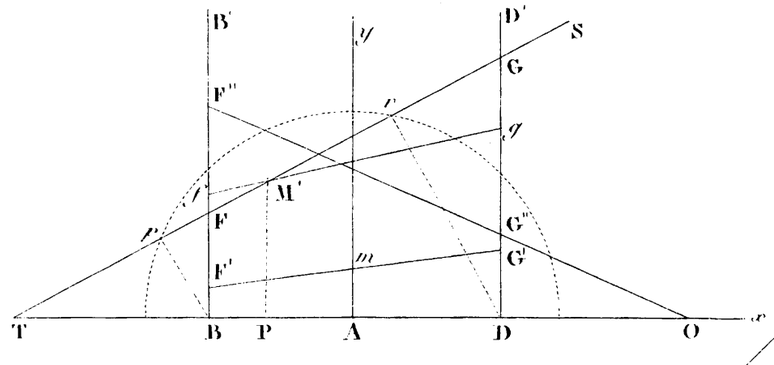


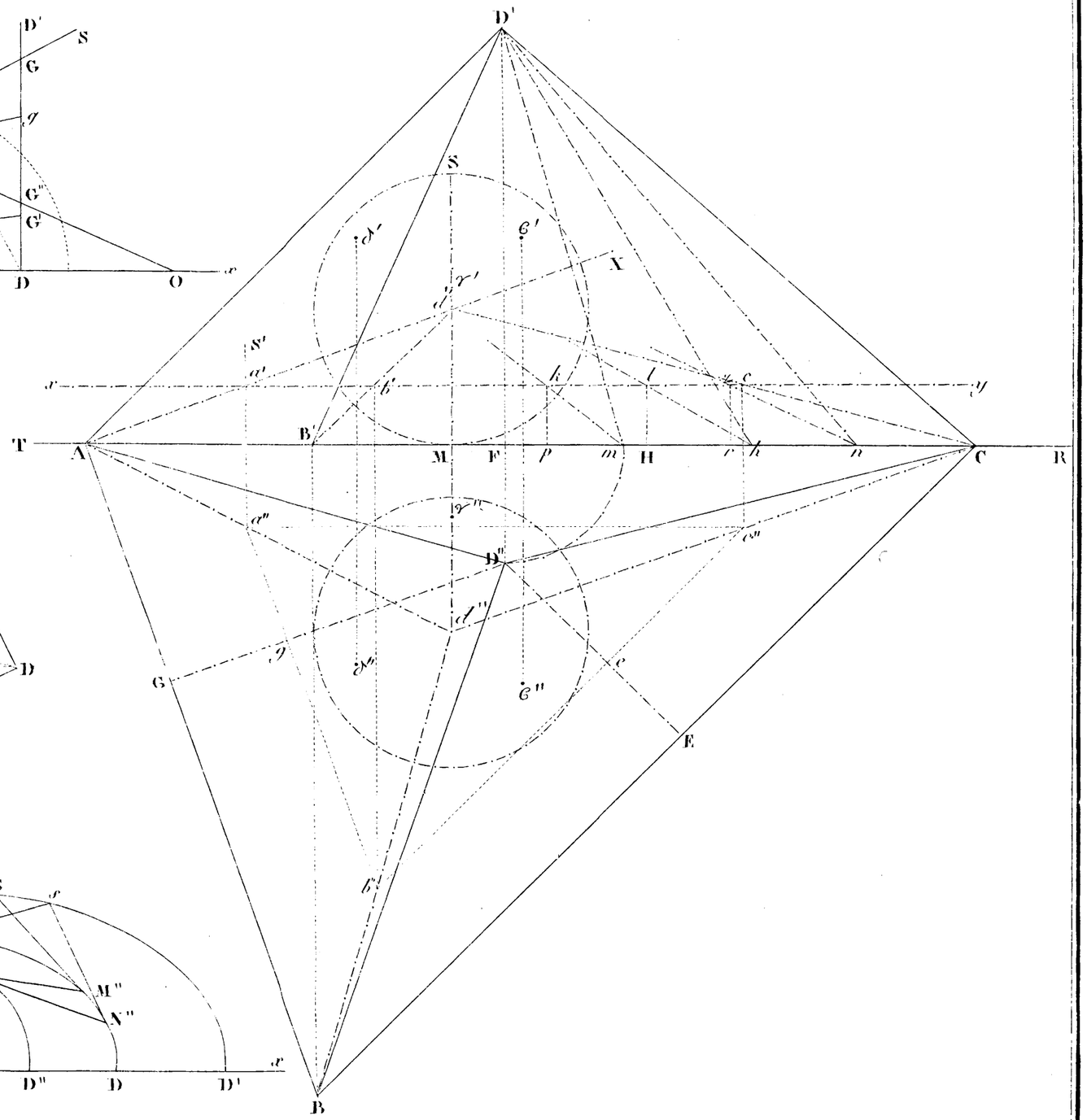
Fig. 270

Fig. 271.

Fig. 272.

Fig. 274.

Fig. 275.



Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : PB 192 B II