# THÈSES

PRÉSENTÉES

# A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIA

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

### PAR M. L. LECORNU,

Ingénieur des Mines.

1re THÈSE. — Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles. 2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

soutenues le // novembre 1880, devant la Commission d'Examen.



MM. BOUQUET, Président.

O. BONNET,

TANNERY,

Examinateurs.

### PARIS.

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1880

### ACADÉMIE DE PARIS.

### FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

MM.		
DOYEN	MILNE EDWARDS, Professeur	r. Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
PROFESSEURS HONORAIRES	DUMAS. PASTEUR.	
PROFESSEURS	CHASLES P. DESAINS LIOUVILLE PUISEUX HÉBERT DUCHARTRE JAMIN SERRET H. Ste-CLAIRE DEVILLE DE LACAZE-DUTHIERS BERT HERMITE BRIOT. BOUQUET TROOST WURTZ	Physique. Mécanique rationnelle. Astronomie. Géologie. Botanique. Physique. Calcul différentiel et intégral. Chimie. Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée. Physiologie. Algèbre supérieure. Calcul des probabilités, Physique mathématique. Mécanique physique et expérimentale. Chimie. Chimie.
:	FRIEDEL O. BONNET	Astronomie.
agrėgės	J. VIEILLE	Sciences mathématiques. Sciences physiques.
SECRÉTAIRE PHILIPPON.		

6302 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER, Quai des Augustins, 55.

### A LA MÉMOIRE DE MON PÈRE,

A MA MÈRE,

A MES PARENTS ET A MES AMIS,

A M. OSSIAN BONNET,

HOMMAGE RESPECTUEUX.

L. LECORNU.

# PREMIÈRE THÈSE.

### SUR L'ÉQUILIBRE

DES

## SURFACES FLEXIBLES ET INEXTENSIBLES.

### INTRODUCTION.

Les conditions d'équilibre d'une courbe funiculaire, c'est-à-dire d'un fil flexible et inextensible dont les éléments sont sollicités par des forces formant un système continu, sont exposées dans tous les Traités de Mécanique. En désignant par ds la longueur d'un élément quelconque, par Pds la force qui le sollicite, par  $P_n$  et  $P_t$  les composantes normale et tangentielle de P, enfin par T la tension que l'élément éprouve de la part des éléments voisins, on trouve sans difficulté les deux équations

$$P_{t} + \frac{dT}{ds} = 0,$$

$$P_{n} + \frac{T}{\rho} = 0;$$

 $\frac{1}{\rho}$  est la courbure au point considéré. On a, de plus, la condition que le plan osculateur de la courbe passe par la direction de P.

En rapportant la courbe à trois axes rectangulaires fixes et appelant

X, Y, Z les composantes de la force parallèles à ces trois axes, on obtient les trois équations suivantes, qui résolvent également le problème :

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X ds = 0,$$

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y ds = 0,$$

$$d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Z ds = 0.$$

Lorsque les forces sont données en grandeur, direction et sens, ces trois équations déterminent la forme de la courbe et la tension en chaque point. Si au contraire on suppose donnée la forme de la courbe, elles fournissent deux conditions auxquelles doivent satisfaire les forces et permettent, en outre, de calculer les tensions qui résultent de l'application de forces satisfaisant à ces deux conditions.

Il est naturel de chercher la généralisation du problème en étudiant ce qui arrive lorsqu'une surface parfaitement flexible et inextensible est sollicitée en chacun de ses points par des forces du même ordre de grandeur que les éléments correspondants. On peut se demander en particulier :

- 1° Quelles sont les conditions d'équilibre d'une surface soumise à des forces déterminées?
- 2° Quelles sont les lois d'après lesquelles se développent les efforts de tension entre les divers éléments d'une surface en équilibre?
- 3° Quelle déformation subit une surface donnée sous l'action de forces qui ne satisfont pas aux conditions d'équilibre?

Après avoir fait de nombreuses recherches pour connaître les travaux auxquels ces questions pouvaient avoir donné lieu, j'ai acquis la conviction que personne ne les avait encore abordées, et leur nouveauté m'a décidé à leur consacrer le présent travail. Sans prétendre épuiser un sujet aussi étendu que difficile, je serai heureux si j'ai réussi à poser les jalons d'une théorie qui mérite de prendre place dans la Science.

Je n'ai pas besoin de rappeler ici les beaux travaux auxquels ont donné lieu les propriétés géométriques des surfaces; ils m'ont naturellement fourni un appui continuel. La théorie de la déformation des surfaces, devenue classique aujourd'hui grâce aux découvertes de MM. Ossian Bonnet, Bour, Codazzi, etc., m'a été particulièrement utile.

#### CHAPITRE I.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LA THÉORIE DES SURFACES.

Nous croyons devoir établir tout d'abord, aussi rapidement que possible, les formules fondamentales de la théorie des surfaces. Ce résumé d'une théorie bien connue nous fournira l'occasion de fixer, pour n'y plus revenir, un certain nombre de notations et de faire en outre quelques remarques qui nous seront utiles dans la suite.

Une surface quelconque peut être définie par l'expression des coordonnées cartésiennes x, y, z en fonction de deux paramètres arbitraires  $\lambda, \mu$ :

(1) 
$$x = \varphi_1(\lambda, \mu), \quad \gamma = \varphi_2(\lambda, \mu), \quad z = \varphi_3(\lambda, \mu).$$

Les courbes  $\lambda = \text{const.}$ ,  $\mu = \text{const.}$  dessinent sur la surface un réseau qui est orthogonal si l'on s'impose la condition

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial z}{\partial \lambda} \frac{\partial z}{\partial \mu} = 0,$$

que nous écrirons sous la forme abrégée

$$\sum \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial u} = 0.$$

Nous appellerons L, M les coefficients métriques correspondant aux deux courbes  $\mu = \text{const.}$ ,  $\lambda = \text{const.}$ , c'est-à-dire que  $Ld\lambda$ ,  $Md\mu$  représentent respectivement les longueurs des arcs de ces deux courbes comprises entre les courbes  $\lambda$ ,  $\lambda + d\lambda$  et  $\mu$ ,  $\mu + d\mu$ . Nous appellerons  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  les rayons de courbure géodésique des deux courbes, supposés positifs lorsqu'ils sont dirigés dans le sens des arcs positifs  $Md\mu$ ,  $Ld\lambda$ ;  $R_1$ ,  $R_2$  désigneront les rayons de courbure normaux et  $T_1$ ,  $T_2$  les rayons de torsion

géodésique. Le sens positif de R<sub>1</sub>, R<sub>2</sub>, T<sub>4</sub>, T<sub>2</sub> sera un certain sens, arbitrairement choisi sur la normale.

Cela posé, on a

(3) 
$$L^{2} = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^{2}, \quad M^{2} = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^{2}.$$

Des considérations géométriques très simples donnent d'autre part

(4) 
$$\frac{L^2M}{\rho_1} = \sum_{\lambda} \frac{\partial x}{\partial \mu} \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2}, \quad \frac{LM^2}{\rho_2} = \sum_{\lambda} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 x}{\partial \mu^2}.$$

Soient X, Y, Z les cosinus directeurs de la normale, définis par les équations

$$LMX = \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial z}{\partial \mu} - \frac{\partial y}{\partial \mu} \frac{\partial z}{\partial \lambda},$$

$$LMY = \frac{\partial z}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \mu} - \frac{\partial z}{\partial \mu} \frac{\partial x}{\partial \lambda},$$

$$LMZ = \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial x}{\partial \mu} \frac{\partial y}{\partial \lambda}.$$

On trouve sans peine

(5) 
$$\frac{L^2}{R_1} = \sum_{X} X \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2}, \quad \frac{LM}{T_1} = \frac{LM}{T_2} = \sum_{X} X \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu}, \quad \frac{M^2}{R_2} = \sum_{X} X \frac{\partial^2 x}{\partial \mu^2},$$

d'où T, = T<sub>2</sub>. Nous représenterons par T la valeur commune donnée par  $\frac{LM}{T} = \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu}$ .

Pour que cette formule soit exacte en signes, il suffit de convenir que, lorsque T est positif, le sens positif de la normale au point  $(\lambda, \mu)$  fait un angle aigu avec le sens positif de la tangente au point  $(\lambda, \mu + d\mu)$  à la courbe  $\lambda = \text{const.}$ 

Les groupes (3), (4), (5) donnent sept équations qui font connaître L, M,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ , R<sub>1</sub>, R<sub>2</sub>, T en fonction de x, y, z. Si l'on y joint l'équation (2), on obtient un système de huit équations entre lesquelles on peut éliminer x, y, z, ce qui conduit à cinq équations distinctes entre L, M,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ , R<sub>1</sub>, R<sub>2</sub>, T. Nous allons former ces cinq équations.

L'équation (2) donne

$$\sum \frac{\partial x}{\partial \mu} \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} + \sum \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu} = 0.$$

DE L'ÉQUILIBRE DES SURFACES FLEXIBLES ET INEXTENSIBLES.

Par suite,

$$\frac{\mathbf{L}^2 \mathbf{M}}{\rho_1} = -\sum \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu}.$$

On tire d'ailleurs de la première des équations (3)

$$L \frac{\partial L}{\partial \mu} = \sum \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu}.$$

Done

$$\frac{\mathrm{L}^2\mathrm{M}}{\rho_1} = -\,\mathrm{L}\,\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial\mu},$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{\frac{\partial L}{\partial \mu}}{LM};$$

de même,

(6) 
$$\frac{1}{\rho_2} = -\frac{\frac{\partial M}{\partial \lambda}}{LM}.$$

La définition de X, Y, Z conduit immédiatement aux relations

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$
 
$$\sum_{\alpha} X \frac{\partial x}{\partial \dot{a}} = 0, \quad \sum_{\alpha} X \frac{\partial x}{\partial a} = 0.$$

On en déduit

$$\begin{split} & \sum X \frac{\partial X}{\partial \lambda} = 0, \\ & \sum \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial X}{\partial \lambda} = -\sum X \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} = \frac{-L^2}{R_1}, \\ & \sum \frac{\partial x}{\partial \mu} \frac{\partial X}{\partial \lambda} = -\sum X \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu} = \frac{-LM}{1}. \end{split}$$

Si l'on considère, dans ces trois équations,  $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \lambda}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \lambda}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \lambda}$  comme des inconnues, et si l'on remarque que

$$\begin{vmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} & \mathbf{Z} \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{z}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial \mu} & \frac{\partial z}{\partial \mu} \end{vmatrix} = \mathbf{LM},$$

il vient

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \lambda} = -\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{R}_1} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{T}} \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{M}} \frac{\partial x}{\partial \mu}.$$

On aurait de même

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mu} = -\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{R}_2} \frac{\partial x}{\partial \mu} - \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{T}} \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{L}} \frac{\partial x}{\partial \lambda}.$$

Dérivons, par rapport à  $\mu$ , la valeur de  $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \lambda}$ , par rapport à  $\lambda$  celle de  $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mu}$ , et égalons les deux résultats obtenus; nous trouvons

$$\begin{split} &\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu} \left( \frac{\mathbf{i}}{R_2} - \frac{\mathbf{i}}{R_1} \right) - \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{\mathbf{i}}{R_1} \right) + \frac{\partial x}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\mathbf{i}}{R_2} \right) \\ &- \frac{\mathbf{i}}{T} \left( \frac{L}{M} \frac{\partial^2 x}{\partial \mu^2} - \frac{M}{L} \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} \right) - \frac{\partial x}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{L}{MT} \right) + \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{M}{LT} \right) = 0. \end{split}$$

Multiplions cette équation par  $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$  et ajoutons-la aux équations semblables en y et z. En tenant compte, de plus, des relations

$$\sum \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu} = -\frac{L^2 M}{\rho_1},$$

$$\sum \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 x}{\partial \mu^2} = \frac{M^2 L}{\rho_2},$$

$$\sum \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} = L \frac{\partial L}{\partial \lambda},$$

nous parvenons à l'équation

(7) 
$$\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{M}} \frac{\partial \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{R}_{1}}}{\partial \mu} - \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{L}} \frac{\partial \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{T}}}{\partial \lambda} + \frac{\mathbf{I}}{\rho_{1}} \left( \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{R}_{2}} - \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{R}_{1}} \right) + \frac{2}{\rho_{2}} \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{T}} = \mathbf{0}.$$

On aurait de même

$$\frac{1}{L}\frac{\partial \frac{1}{R_2}}{\partial \lambda} - \frac{1}{M}\frac{\partial \frac{1}{T}}{\partial \mu} + \frac{1}{\rho_2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{2}{\rho}\frac{1}{T} = 0.$$

Les groupes (6) et (7) fournissent déjà quatre des équations cherchées

Pour obtenir la dernière, calculons  $\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2}$  au moyen des équations

$$\begin{split} \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} &= \frac{L^2}{R_1}, \\ \sum \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} &= L \frac{\partial L}{\partial \mu}, \\ \sum \frac{\partial x}{\partial \mu} \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} &= \frac{L^2 M}{\rho_1}; \end{split}$$

il vient

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} = \frac{L^2}{R_1} X + \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{L^2}{M \rho_1} \frac{\partial x}{\partial x}$$

Prenant la dérivée par rapport à  $\mu$ , multipliant par  $\frac{\partial x}{\partial \mu}$  et ajoutant les deux autres expressions analogues, on trouve

$$\sum \frac{\partial x}{\partial \mu} \frac{\partial^3 x}{\partial \lambda^2 \partial \mu} = -\frac{L^2 M^2}{R_1 R_2} + \frac{M}{L} \frac{\partial L}{\partial \lambda} \frac{\partial M}{\partial \lambda} + \frac{L^2}{\rho_1} \frac{\partial M}{\partial \mu} + \frac{M}{L} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{L^2}{M \rho_1} \right).$$

On a, d'autre part, les équations

$$\begin{split} &\sum_{\mathbf{X}} \mathbf{X} \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu} = \frac{\mathbf{L} \mathbf{M}}{\mathbf{T}}, \\ &\sum_{\mathbf{X}} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu} = \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mu}, \\ &\sum_{\mathbf{X}} \frac{\partial x}{\partial \mu} \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu} = -\sum_{\mathbf{X}} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 x}{\partial \mu^2} = -\frac{\mathbf{L} \mathbf{M}^2}{\rho_2}, \end{split}$$

et par suite, en opérant comme ci-dessus,

$$\sum \frac{\partial x}{\partial \mu} \frac{\partial^3 x}{\partial \lambda^2 \partial \mu} = - \frac{L^2 M^2}{T^2} + \frac{LM}{\rho_1} \frac{\partial L}{\partial \mu} - \frac{ML}{\rho_2} \frac{\partial M}{\partial \lambda} - M^2 \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{L}{\rho_2}\right).$$

En égalant les deux valeurs de  $\sum \frac{\partial x}{\partial \mu} \frac{\partial^3 x}{\partial \lambda^2 \partial \mu}$  et faisant quelques réductions, on parvient à l'équation cherchée

$$\frac{1}{R_1R_2} - \frac{1}{T^2} + \left(\frac{1}{\rho_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho_2}\right)^2 - \frac{\partial \frac{1}{\rho_1}}{M \partial \mu} - \frac{\partial \frac{1}{\rho_2}}{L \partial \lambda} = 0.$$

Les relations fondamentales qui existent entre les éléments de la surface

sont donc

(8) 
$$\frac{\frac{1}{L} \frac{\partial \frac{1}{R_{1}}}{\partial \lambda} - \frac{1}{M} \frac{\partial \frac{1}{T}}{\partial \mu} + \frac{1}{\rho_{2}} \left( \frac{1}{R_{1}} - \frac{1}{R_{2}} \right) + \frac{2}{\rho_{1}} \frac{1}{T} = 0,}{\frac{1}{M} \frac{\partial \frac{1}{R_{1}}}{\partial \mu} - \frac{1}{L} \frac{\partial \frac{1}{T}}{\partial \lambda} + \frac{1}{\rho_{1}} \left( \frac{1}{R_{2}} - \frac{1}{R_{1}} \right) + \frac{2}{\rho_{2}} \frac{1}{T} = 0,}{\frac{1}{T^{2}} - \frac{1}{R_{1}R_{2}} + \frac{1}{M} \frac{\partial \frac{1}{\rho_{1}}}{\partial \mu} + \frac{1}{L} \frac{\partial \frac{1}{\rho_{2}}}{\partial \lambda} - \frac{1}{\rho_{1}^{2}} - \frac{1}{\rho_{2}^{2}} = 0,}{\frac{1}{\rho_{1}} - \frac{\partial L}{\partial \mu}}, \quad \frac{1}{\rho_{2}} = -\frac{\partial M}{\partial \lambda}.$$

Ces équations montrent immédiatement que, dans la déformation d'une surface inextensible, les coefficients L et M restant par définition des fonctions invariables de  $\lambda$  et de  $\mu$ , il en est de même des courbures géodésiques et de la courbure totale  $\frac{1}{R_1R_2} - \frac{1}{T^2}$ . Quand on se propose de trouver toutes les surfaces qui se déduisent les unes des autres par une déformation sans extension, il suffit de considérer L, M,  $\rho_4$ ,  $\rho_2$  comme des fonctions données et  $R_4$ ,  $R_2$ , T comme des inconnues. Les trois premières équations (8) déterminent alors ces inconnues, et toute la difficulté est ramenée à celle de l'intégration de ces équations (1).

Nous serons conduits, dans la suite de ce travail, à envisager d'une façon spéciale les déformations infiniment petites d'une surface donnée. Si l'on désigne par l, m,  $\theta$  les variations inconnues qui résultent pour  $\frac{1}{R_1}$ ,  $\frac{1}{R_2}$  et  $\frac{1}{T}$  d'une telle déformation, les équations du problème deviennent

(9) 
$$\begin{cases} \frac{1}{L} \frac{\partial m}{\partial \lambda} - \frac{1}{M} \frac{\partial \theta}{\partial \mu} + \frac{l - m}{\rho_2} + \frac{2\theta}{\rho_1} = 0, \\ \frac{1}{M} \frac{\partial l}{\partial \mu} - \frac{1}{L} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} + \frac{m - l}{\rho_1} + \frac{2\theta}{\rho_2} = 0, \\ \frac{l}{R_2} + \frac{m}{R_1} - \frac{2\theta}{T} = 0. \end{cases}$$

<sup>(1)</sup> M. Ossian Bonnet a démontré (Journal de l'École Polytechnique, XLII<sup>e</sup> Cahier, p. 35), que sept fonctions L, M, ρ<sub>1</sub>, ρ<sub>2</sub>, R<sub>1</sub>, R<sub>2</sub>, T satisfaisant aux équations (8) déterminent toujours une surface, et une seule.

Ces équations sont plus simples que les équations (8), car elles sont linéaires en l, m,  $\theta$ . Il peut donc arriver qu'elles soient intégrables sans qu'il en soit de même des équations (8).

Si l'on pose, pour abréger,

$$a = \frac{\mathrm{T}}{{}_{2}\mathrm{R}_{2}}, \quad b = \frac{\mathrm{T}}{{}_{2}\mathrm{R}_{1}}$$

la troisième équation (9) devient

$$\theta = al + bm$$
.

Cette valeur de  $\theta$ , portée dans les deux premières, conduit au système suivant :

$$(a) \begin{cases} -\frac{a}{L} \frac{\partial l}{\partial \lambda} + \frac{\mathbf{I}}{M} \frac{\partial l}{\partial \mu} - \frac{b}{L} \frac{\partial m}{\partial \lambda} + \frac{m-l}{\rho_1} + \frac{2}{\rho_2} (al + bm) - \frac{\mathbf{I}}{L} \left( l \frac{\partial a}{\partial \lambda} + m \frac{\partial b}{\partial \lambda} \right) = \mathbf{0} \\ -\frac{a}{M} \frac{\partial l}{\partial \mu} + \frac{\mathbf{I}}{L} \frac{\partial m}{\partial \lambda} - \frac{b}{M} \frac{\partial m}{\partial \mu} + \frac{l-m}{\rho_2} + \frac{2}{\rho_1} (al + bm) - \frac{\mathbf{I}}{M} \left( l \frac{\partial a}{\partial \mu} + m \frac{\partial b}{\partial \mu} \right) = \mathbf{0} \end{cases}$$

Choisissons arbitrairement, pour tous les points d'une courbe  $f(\lambda, \mu) = 0$ , les valeurs de l et m. Les deux équations

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial l}{\partial \mu} d\mu - dl = 0,$$

$$\frac{\partial m}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial m}{\partial \mu} d\mu - dm = 0,$$

jointes aux deux précédentes, déterminent en général les valeurs de  $\frac{\partial l}{\partial \lambda}$ ,  $\frac{\partial m}{\partial \mu}$ ,  $\frac{\partial m}{\partial \mu}$ . On connaît alors les valeurs des inconnues pour les points d'une courbe infiniment voisine de la première, et, en marchant ainsi de proche en proche, on trouvera la déformation de toute la surface.

Mais, lorsque le déterminant des quatre équations est nul, c'est-à-dire lorsque

$$\begin{vmatrix} -\frac{a}{L} & \frac{1}{M} & -\frac{b}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{a}{M} & \frac{1}{L} & -\frac{b}{M} \\ d\lambda & d\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d\lambda & d\mu \end{vmatrix} = 0,$$

les quatre équations sont incompatibles, à moins que chacune d'elles ne soit une conséquence des trois autres. En développant le déterminant, on trouve

$$bL^2d\lambda^2 + LMd\lambda d\mu + aM^2d\mu^2 = 0$$

ou

$$\frac{\mathrm{L}^2}{\mathrm{R_1}}d\lambda^2 + \frac{^2\mathrm{LM}}{\mathrm{T}}d\lambda d\mu + \frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{R_2}}d\mu^2 = \mathrm{o.}$$

Cette équation est celle des lignes asymptotiques.

On peut donc dire que:

Les lignes asymptotiques d'une surface sont les caractéristiques de ses déformations infiniment petites.

Pour une ligne quelconque tracée sur la surface, on peut se donner arbitrairement la déformation subie; au contraire, une ligne asymptotique ne peut être déformée que suivant une loi déterminée.

On trouvera facilement cette loi en supposant que les courbes  $\lambda = \text{const.}$  constituent l'un des systèmes de lignes asymptotiques. Alors  $\frac{1}{R_2} = 0$ , et, par suite, a est nul ainsi que ses dérivées (nous excluons ici le cas des surfaces développables, dans lequel  $\frac{1}{R_2} = 0$  entraînerait  $\frac{1}{T} = 0$ ). Faisons a = 0 dans les équations (10) et éliminons  $\frac{\partial m}{\partial \lambda}$ ; il vient

(11) 
$$\left( \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{M}} \frac{\partial l}{\partial \mu} - \frac{b^2}{\mathbf{M}} \frac{\partial m}{\partial \mu} + \left( \frac{b}{\rho_2} - \frac{\mathbf{I}}{\rho_1} \right) l + \left[ \frac{\mathbf{I}}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2} + 2b \left( \frac{\mathbf{I}}{\rho_2} + \frac{b}{\rho_1} \right) - \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{L}} \frac{\partial b}{\partial \lambda} - \frac{b}{\mathbf{M}} \frac{\partial b}{\partial \mu} \right] m = 0.$$

Pour satisfaire à cette équation, on peut choisir d'une façon quelconque les valeurs de m; l est alors déterminé par une équation linéaire du premier ordre. Mais il est impossible, dans le cas général, de trouver comment varient l et m lorsqu'on passe d'une caractéristique à la caractéristique infiniment voisine. Il faudrait, pour cela, obtenir des valeurs de l et m satisfaisant à l'équation (11) et à l'une des équations (10), par exemple

$$\frac{1}{L} \frac{\partial m}{\partial \lambda} - \frac{b}{M} \frac{\partial m}{\partial \lambda} + \frac{l-m}{\rho_2} + \left(\frac{2b}{\rho_1} - \frac{1}{M} \frac{\partial b}{\partial \mu}\right) m = 0.$$

Signalons ici une propriété intéressante de la ligne asymptotique

1 1

 $\lambda = \text{const.}$  Si l'on suppose que l'on ait, pour cette ligne, m = 0,  $\theta$  s'annule également, puisque a = 0. Mais l peut varier en restant seulement assujetti à la condition

$$\frac{1}{M}\frac{\partial l}{\partial \mu} + \left(\frac{b}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right)l = 0.$$

Les équations m = 0 et  $\theta = 0$ , jointes à celle qui exprime la constance de la courbure géodésique, indiquent que la ligne asymptotique considérée n'éprouve aucune déformation. Donc :

On peut faire subir à une surface une déformation infiniment petite, telle que la figure d'une ligne asymptotique donnée reste invariable.

Cette propriété n'appartient qu'aux lignes asymptotiques. En effet, la première courbure  $\frac{1}{R_2}$  d'une ligne quelconque  $\lambda = \text{const.}$  ayant pour projection sur le plan tangent la courbure géodésique, qui reste toujours indépendante de la déformation, la première courbure ne peut être invariable que si l'angle formé par le plan osculateur avec le plan tangent ne se modifie pas. Dans ces conditions, la courbure normale, qui est égale à la projection de la première courbure sur le plan normal à la surface, ne change pas non plus. D'autre part, l'angle dz de deux plans osculateurs consécutifs est égal à la somme de la torsion géodésique  $d\beta$  et de l'accroissement  $d\gamma$  de l'angle formé par le plan osculateur avec le plan tangent correspondant. Quand la courbe ne se déforme pas, dz et  $d\gamma$  restent invariables : il en est donc de même de  $d\beta$ , et par conséquent de la torsion géodésique  $\frac{1}{R}$ . Enfin, la constance des quantités  $\frac{1}{R_s}$ ,  $\frac{1}{T}$  entraîne celle de  $\frac{1}{R_s}$ .

On a donc, pour tous les points de la courbe considérée, l = 0, m = 0,  $\theta = 0$ , et, par suite, d'après ce que nous avons vu, ces quantités sont nulles pour tous les points de la surface.

La condition m = 0, appliquée à une ligne asymptotique, est, d'après ce qui précède, suffisante pour que cette ligne demeure invariable. Elle exprime d'ailleurs que la courbure normale reste nulle, et l'on peut dire, par suite, que :

Lorsqu'une ligne asymptotique a pour transformée une ligne asymptotique, ces deux lignes sont identiques.

La proposition, démontrée pour une déformation infiniment petite, s'étend évidemment à une déformation finie quelconque, pourvu que la ligne soit asymptotique dans tous les états intermédiaires.

Réciproquement :

Si une ligne asymptotique ne se déforme pas, elle reste nécessairement asymptotique.

Car, si elle n'était pas asymptotique dans l'état final, on ne pourrait, sans la déformer, repasser à l'état initial : ce qui est inadmissible.

Si l'on s'imposait la condition que toutes les lignes asymptotiques d'un système  $\lambda = \text{const.}$  restassent asymptotiques dans la déformation, l'équation (12), dans laquelle on aurait à faire m = 0, donnerait l = 0, à moins que  $\frac{1}{\rho_1}$  ne fût nul, c'est-à-dire à moins que les lignes asymptotiques ne fussent des génératrices rectilignes. Les quantités  $\frac{1}{R_1}$ ,  $\frac{1}{R_2}$  et par suite  $\frac{1}{T}$  seraient donc invariables, et la surface ne serait pas déformable.

La démonstration n'est pas plus difficile dans le cas d'une déformation finie. Lorsque le système  $\lambda = \text{const.}$  est asymptotique, la courbure totale se réduit à  $-\frac{1}{T_2}$ , et, par conséquent, si le système reste asymptotique,  $\frac{1}{T}$  est invariable. Comme d'ailleurs  $\frac{1}{R_2} = 0$ , la première des équations (8) donne  $\frac{1}{R_1} = \text{const.}$ , à moins que  $\frac{1}{\rho_2}$  ne soit nul. Done :

Deux surfaces applicables l'une sur l'autre coïncident lorsque les lignes asymptotiques non rectilignes de l'un des systèmes dans l'une des surfaces ont pour transformées les lignes asymptotiques de l'un des systèmes dans l'autre surface.

Ce théorème est dû à M. Ossian Bonnet (Journal de l'École Polytechnique, XLII<sup>e</sup> Cahier, p. 44).

Nous n'insisterons pas davantage sur ces considérations purement géométriques, que nous avons exposées seulement à cause du rôle capital des lignes asymptotiques dans le problème de l'équilibre des surfaces. Dans un Mémoire lu le 23 mai 1853 devant l'Académie royale d'Irlande, le pro-

SUR L'ÉQUILIBRE DES SURFACES FLEXIBLES ET INEXTENSIBLES.

fesseur Jellett a étudié à un point de vue tout à fait analogue la déformation des surfaces. Les comptes rendus (*Proceedings of the royal Irish Academy*, vol. V, p. 441) contiennent seulement les conclusions de ce Mémoire, qui sont les suivantes :

### I. - Surfaces convexes (oval surfaces).

« Si une courbe ou une portion de courbe tracée sur une surface convexe inextensible est maintenue fixe, toute la surface reste également fixe.

#### II. - SURFACES DÉVELOPPABLES.

- » 1. Si un arc de courbe tracé sur la surface et n'appartenant ni à l'arête de rebroussement ni à une génératrice rectiligne est maintenu fixe, toute la portion de surface comprise entre l'arête de rebroussement et les génératrices rectilignes qui passent par les extrémités de l'arc de courbe reste également fixe.
- » 2. L'arête de rebroussement ou une génératrice rectiligne peut en général être rendue fixe sans rendre fixe aucune partie de la surface.
- » 5. Les génératrices rectilignes d'une surface développable sont rigides. »

Observons ici que ce dernier théorème n'est vrai que dans certaines limites de déformation, car, si l'on considère une portion de surface développable ne comprenant aucune partie de l'arête de rebroussement, on peut la développer sur un plan et l'enrouler ensuite sur une autre surface développable : il est évident qu'après cette déformation les nouvelles génératrices rectilignes ne correspondront pas, en général, aux premières.

#### III. - SURFACES CONCAVO-CONVENES.

Le professeur Jellett désigne sous le nom de courbes de flexion (curves of flexure) les lignes asymptotiques, qui sont alors réelles, et énonce ces trois théorèmes :

« 1. Si un arc de courbe autre qu'une courbe de flexion est maintenu

fixe sur la surface et si l'on mène par chaque extrémité de cet arc les deux courbes de flexion, le quadrilatère compris entre les quatre courbes de flexion ainsi formées reste fixe.

- » 2. On peut fixer une courbe de flexion sans empécher la déformation d'aucune portion finie de surface.
- » 3. Si deux arcs de courbe de flexion partant du même point sont maintenus fixes, le quadrilatère compris entre ces deux arcs et les deux autres courbes de flexion menées par leurs secondes extrémités reste également fixe. »

La démonstration de tous ces théorèmes se déduit sans peine des formules précédemment établies. Nous aurons du reste à démontrer, au sujet de l'état d'équilibre, des propositions du même genre.

Lorsqu'on cherche à traiter le cas d'une déformation infiniment petite, on peut, au lieu des courbures normales et de la torsion géodésique, considérer le déplacement que subit chaque point de la surface et prendre comme inconnues les projections de ce déplacement sur trois axes rectangulaires donnés. Les coefficients différentiels du premier ordre satisfont, avant comme après la déformation, aux équations

$$\sum \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 = L^2, 
\sum \left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 = M^2, 
\sum \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \mu} = 0.$$

Si donc  $\xi$ , n,  $\zeta$  désignent les variations infiniment petites de x, y, z, on a

$$\sum_{\frac{\partial x}{\partial \lambda}} \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} = 0,$$

$$\sum_{\frac{\partial r}{\partial \mu}} \frac{\partial \xi}{\partial \mu} = 0,$$

$$\sum_{\frac{\partial x}{\partial \lambda}} \frac{\partial \xi}{\partial \mu} + \sum_{\frac{\partial x}{\partial \mu}} \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} = 0.$$

Faisons coı̈ncider les axes Ox, Oy, Oz respectivement avec les tan-

gentes aux courbes  $\mu = \text{const.}$ ,  $\lambda = \text{const.}$  et avec la normale à la surface au point (x, y, z). Les trois équations se réduisent à

$$\frac{\partial \xi}{\partial \lambda} = 0$$
,  $\frac{\partial \eta}{\partial \mu} = 0$ ,  $L \frac{\partial \xi}{\partial \mu} + M \frac{\partial \eta}{\partial \lambda} = 0$ .

Soient, d'une manière générale,  $h_1$ ,  $h_2$ , k les projections du déplacement  $(\xi, n, \zeta)$  sur les deux tangentes et sur la normale. On a, pour la position actuelle des axes de coordonnées,

$$h_1 = \xi$$
,  $h_2 = n$ ,  $k = \zeta$ .

De plus, on trouve sans difficulté, en laissant fixes les axes Ox, Oy, Oz et faisant varier la position du point (x, y, z),

$$\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{L}}\frac{\partial \xi}{\partial \lambda} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{L}}\frac{\partial h_1}{\partial \lambda} - \frac{h_2}{\rho_1} - \frac{k}{\mathbf{R}_1}, \quad \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{M}}\frac{\partial \xi}{\partial \mu} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{M}}\frac{\partial h_1}{\partial \mu} + \frac{h_2}{\rho_2} - \frac{k}{\mathbf{T}},$$

$$\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{M}}\frac{\partial \eta}{\partial \mu} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{M}}\frac{\partial h_2}{\partial \mu} - \frac{h_1}{\rho_2} - \frac{k}{\mathbf{R}_2}, \quad \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{L}}\frac{\partial \eta}{\partial \lambda} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{L}}\frac{\partial h_2}{\partial \lambda} + \frac{h_1}{\rho_1} - \frac{k}{\mathbf{T}}.$$

Les inconnues  $h_1, h_2, k$  doivent donc satisfaire aux trois équations

(13) 
$$\begin{cases} \frac{1}{L} \frac{\partial h_1}{\partial \lambda} = \frac{h_2}{\rho_1} + \frac{k}{R_1}, \\ \frac{1}{M} \frac{\partial h_2}{\partial \mu} = \frac{h_1}{\rho_2} + \frac{k}{R_2}, \\ \frac{1}{M} \frac{\partial h_1}{\partial \mu} + \frac{1}{L} \frac{\partial h_2}{\partial \lambda} = \frac{2k}{T} - \frac{h_2}{\rho_1} - \frac{h_1}{\rho_1}. \end{cases}$$

En éliminant T, on obtient entre  $h_1$  et  $h_2$  deux équations du premier ordre dont les caractéristiques sont encore, ainsi qu'il est facile de s'en assurer, les lignes asymptotiques de la surface.

Les équations (13) peuvent servir à la démonstration des théorèmes que nous avons exposés concernant la déformation des surfaces; mais il est inutile de nous arrêter davantage sur ce sujet.

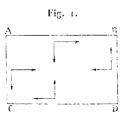
16 L. LECORNU.

#### CHAPITRE II.

### PROPRIÉTÉS STATIQUES DES SURFACES.

Considérons une surface en équilibre sous l'action de forces données que nous appellerons forces extérieures, et imaginons qu'on découpe dans cette surface un contour fermé quelconque. La portion de surface ainsi détachée restera en équilibre si l'on applique sur le contour des forces convenablement choisies, tangentes à la surface. Nous les désignerons dans tout ce qui suit sous le nom de forces de tension, et nous les supposerons toujours rapportées à l'unité de longueur, comme dans un fluide on rapporte les pressions à l'unité de surface. La force de tension qui s'exerce sur un élément de contour est, en général, oblique à cet élément: elle a donc une composante normale et une composante tangentielle. On peut appeler la première force d'arrachement ou de compression, suivant son signe, et la seconde force de cisaillement (dénominations empruntées à la théorie de la résistance des matériaux). Tout élément linéaire de la surface est soumis à une force d'arrachement et à une force de cisaillement, dont le sens se renverse suivant que l'on considère l'une ou l'autre des portions de surface qu'il sépare.

L'élément de surface compris entre deux courbes orthogonales  $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ 



et  $(u, \mu + d\mu)$  se projette sur son plan tangent suivant une figure ABCD (fig. 1), qu'on peut confondre avec un rectangle, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier. Dans les mêmes limites d'approximation, les tensions se projettent en vraie grandeur; de plus, elles sont constantes sur chacun des côtés et égales, mais de signes contraires, sur deux côtés

parallèles. Si l'on prend la somme des moments de toutes les forces par rapport à la normale menée au centre du rectangle, on voit sans peine que les forces extérieures et les forces d'arrachement ne peuvent donner que des moments du second ordre, tandis que les forces de cisaillement t et t', exercées l'une sur AB et CD, l'autre sur AC et BD, donnent le moment résultant :

$$(t-t')$$
 AB  $\times$  BD.

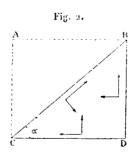
L'équilibre de l'élément rectangulaire n'est donc possible que si t := t'. De là ce théorème :

Les forces de cisaillement développées en un point donné sur deux éléments linéaires qui se coupent à angle droit sont égales.

L'égalité t = t' suppose que les forces t et t', appliquées tangentiellement aux côtés CA et CD se dirigent toutes les deux vers C ou bien en divergent toutes les deux. Nous admettrons que, pour un rectangle dont les côtés CD et CA sont positifs de C vers D et de C vers A, les forces de cisaillement sont positives lorsqu'elles se dirigent vers C. On verra plus tard la raison de cette convention.

Nous définirons le sens des forces d'arrachement qui s'exercent sur le même rectangle en admettant que, sur les deux côtés CD et CA, elles sont positives quand elles sont de même sens que les directions positives CA, CD.

Projetons maintenant sur son plan tangent un élément triangulaire formé par les courbes orthogonales  $\lambda$ ,  $\mu$  et par une troisième courbe assujettie



seulement à passer à une distance infiniment petite du point de rencontre des deux premières. En négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier, on obtient pour projection un triangle rectangle CBD (fig. 2), qu'on peut regarder comme égal à la moitié du rectangle ABCD. Soit  $\alpha$  l'angle aigu BCD. Il est aisé de reconnaître que les forces de tension, supposées positives pour CD et DB, ont les directions représentées par les flèches. Nous appellerons t la force de cisaillement commune à BD et CD,  $n_4$  et  $n_2$  les forces d'arrachement exercées sur CD et BD. Le côté BC est également soumis à des tensions. Nous supposerons que le sens positif de la force de cisaillement T est celui de C vers B et que celui de la force d'arrachement N est le sens qui pénètre vers l'intérieur du triangle.

En projetant toutes les forces sur BC et sur sa perpendiculaire, et remarquant que les forces extérieures ne donnent que des termes du second ordre, on a

(14) 
$$\begin{cases} \mathbf{N} = n_1 \cos^2 \alpha + n_2 \sin^2 \alpha + 2t \sin \alpha \cos \alpha, \\ \mathbf{T} = t (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - (n_1 - n_2) \sin \alpha \cos \alpha. \end{cases}$$

La seconde formule montre que T s'annule en chaque point pour deux directions OX, OY réelles et rectangulaires, définies par

$$\tan 2\alpha = \frac{2t}{n_1 - n_2}.$$

En faisant coïncider AC et BC avec ces deux directions, qu'on peut appeler directions principales de tension, on a

$$N = n_1 \cos^2 \alpha + n_2 \sin^2 \alpha,$$
  

$$T = -(n_1 - n_2) \sin \alpha \cos \alpha.$$

Soit (fig. 3) OM la direction  $\alpha$ . Menons une droite OF, représentant en direction, sens et grandeur, à une échelle arbitraire, la tension correspondante. Les coordonnées du point F sont

$$x = T\cos\alpha + N\sin\alpha = n_2\sin\alpha,$$
  

$$y = T\sin\alpha - N\cos\alpha = -n_4\cos\alpha,$$

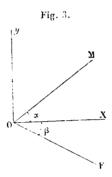
sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles. 19 d'où, en appelant β l'angle FOX,

$$\tan \alpha \tan \beta = -\frac{n_1}{n_2}$$

Lorsque a varie, le point F décrit l'ellipse

$$\frac{x^2}{n_2^2} - \frac{y^2}{n_1^2} = 1;$$

mais la considération de cette ellipse est sans utilité, parce qu'elle ne



relie pas d'une manière simple les directions OF et OM. Si nous portons sur OM la longueur OM =  $\frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{n_1 \cos^2 \alpha + n_2 \sin^2 \alpha}}$ , les coordonnées du point M sont

$$x = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n_1 \cos^2 \alpha + n_2 \sin^2 \alpha}},$$

$$\beta = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n_1 \cos^2 \alpha + n_2 \sin^2 \alpha}},$$

d'où

$$n_1 x^2 + n_2 y^2 = 1$$
.

En comparant cette équation à celle qui donne le produit tang a tang β, on reconnaît immédiatement que OF et OM sont deux directions conjuguées de la conique ainsi obtenues. Nous appellerons cette conique *indicatrice des tensions*. Rapportée à deux axes rectangulaires de direction quelconque, son équation devient

$$n_1 x^2 + 2txy + n_2 y^2 = 1$$
.

20 L. LECORNU.

Lorsque l'indicatrice est une ellipse réelle, tous les éléments linéaires menés par le point considéré sont soumis de la part de la surface à des efforts normaux de compression. Lorsque c'est une ellipse imaginaire, les efforts normaux de compression sont remplacés par des efforts de traction. Lorsque c'est une hyperbole, l'action normale produit pour certaines directions un effort de compression, pour d'autres un effort de traction, et, dans ce cas, il existe deux directions réelles pour lesquelles l'action normale se réduit à zéro.

Il peut être intéressant, dans certains cas, de connaître l'intensité totale de la tension exercée sur un élément linéaire. Le carré de cette quantité est donné par

$$N^2 + T^2 = n_1^2 \cos^2 \alpha + n_2^2 \sin^2 \alpha$$
.

La plus grande valeur de la tension totale correspond, d'après cela, à la direction du petit axe de l'indicatrice des tensions.

Les propriétés connues des diamètres d'une conique, énoncées pour l'indicatrice, se traduisent par une série de théorèmes sur les tensions auxquels il est inutile de nous arrêter. Établissons seulement une relation qui nous servira dans la suite.

Les deux directions  $\alpha$  et  $\beta$  étant conjuguées, si l'on désigne par  $\phi$  l'angle qu'elles forment entre elles, par  $N_1$  et  $N_2$  leurs tensions normales, et par  $N_1'$  la tension normale de l'élément dont la direction est  $\frac{\pi}{2} + \alpha$ , on a évidemment

$$\frac{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}{\frac{\sin^2 \varphi}{N_1 N_2}} = \frac{1}{n_1 n_2}},$$

$$N_4 + N_4' = n_4 + n_2.$$

On tire de là, en éliminant  $n_1$  et  $n_2$ ,

(15) 
$$N_4 + N_2 = \sin^2 \varphi (N_4 + N_4).$$

Les considérations que nous venons d'exposer montrent que, si l'on

trace sur une surface une double série de courbes orthogonales  $\lambda, \mu$ , il suffit de connaître en chaque point les efforts d'arrachement et l'effort commun de cisaillement qui s'exercent sur les éléments  $\mathrm{L}d\lambda, \,\mathrm{M}d\mu$  pour que l'état d'équilibre de la surface soit entièrement connu. Soient  $n_i$  l'effort d'arrachement sur  $\mathrm{L}d\lambda, \, n_2$  l'effort d'arrachement sur  $\mathrm{M}d\mu, \, t$  l'effort commun de cisaillement;  $n_i, \, n_2$  et t sont trois fonctions de  $\lambda$  et de  $\mu$  qu'il s'agit de déterminer.

En considérant l'élément superficiel dont les côtés sont L  $d\lambda$ , M  $d\mu$  comme un solide libre soumis aux forces extérieures et aux forces de tension qui se développent sur son contour, on pourrait écrire les équations d'équilibre d'un solide invariable. Les axes de projection seraient naturellement la normale à la surface et les tangentes aux courbes coordonnées. En poussant l'approximation jusqu'au second ordre dans les équations des projections des forces, jusqu'au troisième ordre dans celles des moments, on verrait que les équations des moments se réduisent à celles des projections, et l'on parviendrait sans difficulté aux conditions d'équilibre. Mais la méthode suivante conduit au but d'une façon plus rapide.

Appelons, comme nous l'avons fait précédemment,  $h_1$ ,  $h_2$ , k les projections des déplacements de chaque point de la surface sur les tangentes aux coordonnées et sur la normale après une déformation infiniment petite. On voit immédiatement que le travail des forces de tension est égal à

$$\left[\frac{\partial}{\partial\mu}\Big(\mathbf{L}n_{1}h_{2}-\mathbf{L}th_{1}\Big)+\frac{\partial}{\partial\nu}\Big(\mathbf{M}n_{2}h_{1}-\mathbf{M}th_{2}\Big)\right]d\lambda\,d\mu.$$

Soit, au point  $(\lambda, \mu)$ , F la force extérieure rapportée à l'unité de surface. Soient  $F_i$ ,  $F_2$  ses composantes suivant  $d\lambda, d\mu$ , et  $\Phi$  sa composante normale. Le travail élémentaire des forces extérieures appliquées à l'élément est

$$(\mathbf{F}_1 h_1 + \mathbf{F}_2 h_2 + \Phi k) \mathbf{L} \mathbf{M} d\lambda d\mu.$$

On doit done avoir, pour toutes les valeurs possibles de  $h_1$ ,  $h_2$ , k,

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \Big( \mathbf{L} \boldsymbol{n}_1 \boldsymbol{h}_2 - \mathbf{L} t \boldsymbol{h}_1 \Big) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \Big( \mathbf{M} \boldsymbol{n}_2 \boldsymbol{h}_1 - \mathbf{M} t \boldsymbol{h}_2 \Big) = \Big( \mathbf{F}_1 \boldsymbol{h}_1 + \mathbf{F}_2 \boldsymbol{h}_2 + \Phi \boldsymbol{k} \Big) \mathbf{L} \mathbf{M}$$

ou bien

$$\begin{split} &\frac{1}{\mathbf{M}} \bigg( n_{_{4}} \frac{\partial h_{_{2}}}{\partial \mu} + h_{_{2}} \frac{\partial n_{_{1}}}{\partial \mu} \bigg) - \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{M}} \bigg( t \frac{\partial h_{_{4}}}{\partial \mu} + h_{_{4}} \frac{\partial t}{\partial \mu} \bigg) + \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{L}} \bigg( n_{_{2}} \frac{\partial h_{_{1}}}{\partial \lambda} + h_{_{4}} \frac{\partial n_{_{2}}}{\partial \lambda} \bigg) - \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{L}} \bigg( t \frac{\partial h_{_{2}}}{\partial \lambda} + h_{_{2}} \frac{\partial t}{\partial \lambda} \bigg) \\ &+ (n_{_{4}} h_{_{2}} - t h_{_{4}}) \frac{\partial \mathbf{M}}{\mathbf{L} \mathbf{M}} + (n_{_{2}} h_{_{4}} - t h_{_{2}}) \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda} = \mathbf{F}_{_{4}} h_{_{4}} + \mathbf{F}_{_{2}} h_{_{2}} + \Phi k. \end{split}$$

Remplaçons les dérivées de  $h_1$  et de  $h_2$  par leur valeurs tirées des équations (13); puis, comme  $h_4$ ,  $h_2$ , k sont susceptibles d'une infinité de valeurs indépendantes, écrivons que les coefficients de ces trois quantités sont identiquement nuls. Il vient

(16) 
$$\begin{cases} \frac{1}{L} \frac{\partial n_{2}}{\partial \lambda} - \frac{1}{M} \frac{\partial t}{\partial \mu} + \frac{n_{1} - n_{2}}{\rho_{2}} + \frac{2t}{\rho_{1}} = F_{1}, \\ \frac{1}{M} \frac{\partial n_{1}}{\partial \mu} - \frac{1}{L} \frac{\partial t}{\partial \lambda} + \frac{n_{2} - n_{1}}{\rho_{1}} + \frac{2t}{\rho_{3}} = F_{2}, \\ \frac{n_{1}}{R_{2}} + \frac{n_{2}}{R_{1}} - \frac{2t}{T} = \Phi. \end{cases}$$

Telles sont les équations, nécessaires et suffisantes pour l'équilibre, qui donnent  $n_1$ ,  $n_2$  et t. Comme il y a autant d'inconnues que d'équations, il s'ensuit que  $F_4$ ,  $F_2$ ,  $\Phi$  ne sont assujettis à aucune condition et que, par conséquent :

Une surface peut rester en équilibre sous l'action de forces quelconques.

Ce théorème semble au premier abord paradoxal; mais il suffit de se rappeler que, lorsqu'une courbe tracée sur une surface reste fixe, toute la surface reste également fixe (à moins que la courbe ne soit une asymptotique), pour comprendre que les conditions d'équilibre d'une surface se réduisent à des conditions relatives aux limites. De là une différence complète entre le problème de la courbe funiculaire et celui qui nous occupe.

Les équations

$$P_{t} + \frac{dT}{ds} = 0,$$

$$P_{n} + \frac{T}{s} = 0$$

ont bien une certaine analogie de forme avec les équations (16), mais elles ne renferment qu'une tension inconnue, dont l'élimination conduit à la condition d'équilibre

$$P_t = \frac{d(P_n \rho)}{ds}$$
.

Rien de pareil dans le cas des surfaces.

Les conditions aux limites ne pourront s'écrire explicitement que lorsqu'on saura intégrer les équations d'équilibre. Si l'on trouve que ces conditions ne peuvent être satisfaites, on devra en conclure que l'équilibre de la surface n'a pas lieu et qu'elle se déforme nécessairement sous l'action des forces qui lui sont appliquées. On sera alors amené à aborder le troisième et dernier des problèmes énoncés dans l'Introduction:

Quelle déformation subit une surface donnée sous l'action de forces qui ne satisfont pas aux conditions d'équilibre?

On suppose ici, cela va sans dire, que l'on sache comment varient les forces quand la surface se déforme. Pour que le problème soit résoluble, il faut qu'on puisse déterminer toutes les surfaces applicables sur la surface donnée dans les conditions où l'on se trouve placé. Il faut ensuite que, pour chacune de ces surfaces, on sache intégrer les équations d'équilibre et former les conditions relatives aux limites. Quiconque a étudié la théorie de la déformation des surfaces et s'est rendu compte des difficultés qu'elle présente admettra sans peine que le problème dont nous venons de donner l'énoncé dépasse de beaucoup la portée actuelle de la science. J'ai réussi, pour quelques cas très particuliers, à obtenir dans cette voie des résultats qu'on trouvera exposés plus loin. Peut-être, en considérant des surfaces assujetties à ne subir que des déformations très petites et se contentant d'une certaine approximation, obtiendrait-on des théorèmes intéressants. Mais mes efforts se sont portés, dans ce travail, vers un but plus facile à atteindre : j'ai cherché à analyser les conditions d'équilibre des surfaces et les lois suivant lesquelles se développent les divers efforts de tension; j'ai concentré, en un mot, mon attention sur les deux premiers problèmes énoncés dans l'Introduction.

Il n'est pas inutile de faire ici une remarque en vue des applications pratiques dont cette théorie est susceptible : la répartition des tensions dans une surface en équilibre est tout à fait indépendante de l'inextensibilité que j'attribue à cette surface. Car, lorsqu'une surface extensible est en équilibre, on peut, sans rien changer, supprimer par la pensée son extensibilité. Les conditions relatives à l'équilibre d'une surface inextensible sont donc nécessaires pour l'équilibre de la même surface rendue extensible; seulement, elles ne sont pas en général suffisantes.

Les premiers membres des équations (16) sont identiques, sauf les noms des inconnues, à ceux des équations (9). De là il résulte immédiatement que:

Lorsqu'une surface ou une portion de surface n'est soumise à aucune force extérieure, les tensions  $n_1$ ,  $n_2$ , t qui peuvent s'y développer sont proportionnelles aux variations que subissent, dans une certaine déformation infiniment petite de la surface, les courbures  $\frac{1}{R_1}$ ,  $\frac{1}{R_2}$ ,  $\frac{1}{T}$ .

Ce théorème fondamental donne la clef de la liaison intime qui existe entre le problème de l'équilibre des surfaces et celui de leur déformation.

Les équations (16) sont susceptibles, quelles que soient les forces extérieures, d'une simplification importante. Posons

$$n_1 = n'_1 + \frac{a}{R_1}, \quad n_2 = n'_2 + \frac{a}{R_2}, \quad t = t' + \frac{a}{T}.$$

La troisième équation devient

$$\frac{n'_{1}}{R_{2}} + \frac{n'_{2}}{R_{1}} - \frac{2t'}{T} = \Phi - 2a\left(\frac{1}{R_{1}R_{2}} - \frac{1}{T^{2}}\right).$$

Nous pouvons, toutes les fois que  $\frac{1}{R_1R_2} - \frac{1}{T^2}$  n'est pas nul, c'est-à-dire toutes les fois que la surface n'est pas développable, déterminer la fonction a par la condition

$$2a\left(\frac{1}{R_1R_2}-\frac{1}{T^2}\right)=\Phi.$$

Portons cette valeur de a dans les expressions de  $n_1$ ,  $n_2$ , t. Les deux

SUR L'ÉQUILIBRE DES SURFACES FLEXIBLES ET INEXTENSIBLES.

premières équations (16) étant linéaires, leurs premiers membres s'annulent lorsqu'on remplace  $n_1, n_2, t$  par  $\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}, \frac{1}{T}$  ou par ces quantités multipliées par une constante. Il reste donc seulement

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}} \frac{\partial n'_2}{\partial \lambda} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{M}} \frac{\partial t'}{\partial \mu} + \frac{n'_1 - n'_2}{\rho_2} + \frac{2t'}{\rho_1} = \mathbf{F}_1 - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}\mathbf{R}_2} \frac{\partial a}{\partial \lambda} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{M}\mathbf{T}} \frac{\partial a}{\partial \mu} = \mathbf{F}'_1,$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{M}} \frac{\partial n'_1}{\partial \mu} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}} \frac{\partial t'}{\partial \lambda} + \frac{n'_2 - n'_1}{\rho_1} + \frac{2t'}{\rho_2} = \mathbf{F}_2 - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{M}\mathbf{R}_1} \frac{\partial a}{\partial \mu} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}\mathbf{T}} \frac{\partial a}{\partial \lambda} = \mathbf{F}'_2.$$

On conclut de là que, a étant une fonction déterminée comme on vient de le voir et les forces tangentielles F<sub>1</sub>, F<sub>2</sub> étant mises sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{1} &= \mathbf{F}_{1}^{'} + \frac{\mathbf{I}}{\mathsf{LR}_{2}} \frac{\partial a}{\partial \lambda} - \frac{\mathbf{I}}{\mathsf{MT}} \frac{\partial a}{\partial \mu}, \\ \mathbf{F}_{2} &= \mathbf{F}_{2}^{'} + \frac{\mathbf{I}}{\mathsf{MR}_{1}} \frac{\partial a}{\partial \mu} - \frac{\mathbf{I}}{\mathsf{LT}} \frac{\partial a}{\partial \lambda}, \end{aligned}$$

le système des forces extérieures peut être divisé en deux parties :

1° La force normale Φ et les forces tangentes

$$\frac{1}{LR_*} \frac{\partial a}{\partial \lambda} - \frac{1}{MT} \frac{\partial a}{\partial \mu},$$

$$\frac{1}{MR_*} \frac{\partial a}{\partial \mu} - \frac{1}{LT} \frac{\partial a}{\partial \lambda}.$$

Ce système admet, comme solutions particulières, les tensions  $n_1 = \frac{a}{R_1}$ ,  $n_2 = \frac{a}{R_2}$ ,  $t = \frac{a}{T}$ . Nous le désignerons sous le nom de système normal.

2° Les forces tangentielles F'<sub>1</sub>, F'<sub>2</sub> sans forces normales. Ce système, que nous désignerons sous le nom de système tangentiel, donne lieu à des tensions déterminées par les équations suivantes, dans lesquelles nous effaçons les accents devenus inutiles :

(17) 
$$\begin{cases} \frac{1}{L} \frac{\partial n_{2}}{\partial \lambda} - \frac{1}{M} \frac{\partial t}{\partial \mu} + \frac{n_{1} - n_{2}}{\rho_{2}} + \frac{2t}{\rho_{1}} = F_{1}, \\ \frac{1}{M} \frac{\partial n_{1}}{\partial \mu} - \frac{1}{L} \frac{\partial t}{\partial \lambda} + \frac{n_{2} - n_{1}}{\rho_{1}} + \frac{2t}{\rho_{2}} = F_{2}, \\ \frac{n_{1}}{R_{2}} + \frac{n_{2}}{R_{1}} - \frac{2t}{T} = 0. \end{cases}$$

L.

26 L. LECORNU.

Quand on saura trouver trois valeurs  $n_1$ ,  $n_2$ , t formant une solution particulière de ce système, il suffira de leur ajouter terme à terme les solutions  $\frac{a}{R_1}$ ,  $\frac{a}{R_2}$ ,  $\frac{a}{T}$  du système normal et les valeurs générales qui satisfont aux équations sans second membre pour avoir la solution générale des équations (16).

L'intégration des équations sans second membre constitue le problème de la déformation des surfaces, simplifié par l'hypothèse que l'on a affaire à une déformation infiniment petite. Par conséquent, la difficulté spéciale du problème de l'équilibre réside dans la recherche d'une solution particulière relative au système de forces tangentielles.

Si l'on connaît deux solutions particulières  $(l', m', \theta')$ ,  $(l'', m'', \theta'')$  des équations (9), on peut appliquer à la recherche d'une solution particulière des équations (17) la méthode de la variation des constantes arbitraires.

En posant

$$n_1 = al' + bl'',$$
  

$$n_2 = am' + bm'',$$
  

$$t = a\theta' + b\theta'',$$

on aura, pour déterminer les fonctions a et b, les deux équations

$$\begin{split} &\frac{m'}{L}\frac{\partial a}{\partial\lambda} + \frac{m''}{L}\frac{\partial b}{\partial\lambda} - \frac{\theta'}{M}\frac{\partial a}{\partial\mu} - \frac{\theta''}{M}\frac{\partial b}{\partial\mu} = F_{\text{\tiny $1$}}, \\ &\frac{l'}{M}\frac{\partial a}{\partial\mu} + \frac{l''}{M}\frac{\partial b}{\partial\mu} - \frac{\theta'}{L}\frac{\partial a}{\partial\lambda} - \frac{\theta''}{L}\frac{\partial b}{\partial\lambda} = F_{\text{\tiny $2$}}. \end{split}$$

Dans ces deux équations, les inconnues n'entrent plus que par leurs dérivées. Cette méthode conduit à un résultat avantageux lorsque les équations (9) admettent une solution l'', m'',  $\theta''$  telle qu'on ait

$$\theta''^2 - l'' m'' = 0.$$

Si l'on écrit

$$\frac{l''}{\theta''} = \frac{\theta''}{m''} = k,$$

sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles. a et b conduisent à la suivante :

$$\frac{km'-\theta'}{L}\frac{\partial a}{\partial \lambda}+\frac{l'-k\theta'}{M}\frac{\partial a}{\partial \nu}=kF_1+F_2,$$

équation à une seule inconnue dont l'intégration est incomparablement plus facile que celle de deux équations simultanées.

L'expression  $\theta''^2 - \ell''m''$  peut être regardée comme l'invariant de l'indicatrice des tensions, en supposant que les forces extérieures soient nulles. Si l'on appelle  $\ell$ , m les tensions principales, on doit avoir

$$lm = l''m'' - \theta''^2 = 0$$

d'où l = 0 ou m = 0.

Soit par exemple l = 0. On a d'ailleurs, pour les directions principales,  $\theta = 0$ . Si donc on suppose que les équations (9) soient rapportées aux lignes de tension principales, elles se réduisent à

$$\frac{1}{L}\frac{\partial m}{\partial \lambda} - \frac{m}{\rho_2} = 0, \quad \frac{m}{\rho_1} = 0, \quad \frac{m}{R_1} = 0.$$

Pour que ces équations puissent être satisfaites sans faire m=0 (ce qui entraînerait  $l''=m''=\theta''=0$ ), il faut que  $\frac{1}{\rho_1}$  et  $\frac{1}{R_1}$  soient nuls tous les deux, ce qui n'a lieu que dans le cas des génératrices rectilignes.

La solution  $\theta''^2 - \ell'' m'' = 0$  ne peut donc exister, et, par suite, le procédé d'intégration que nous en avons déduit n'est applicable que lorsqu'il s'agit d'une surface réglée.

Revenons au système général dont l'équilibre est exprimé par les équations (16). On peut évidemment, en substituant à la place de  $n_1$ ,  $n_2$ , t des fonctions quelconques de  $\lambda$  et de  $\mu$ , trouver pour  $F_4$ ,  $F_2$ ,  $\Phi$  une infinité de valeurs qui rendront l'intégration possible. Si l'on pose par exemple, en appelant A une constante,

$$n_1 = \frac{\Lambda}{L}$$
,  $n_2 = \frac{\Lambda}{M}$ ,  $t = 0$ ,

on trouve

$$F_1 = \frac{A}{L\rho_2}, \quad F_2 = \frac{A}{M\rho_1}, \quad \Phi = A\left(\frac{I}{LR_1} + \frac{I}{MR_2}\right).$$

28

Il serait puéril de multiplier les exemples de ce genre; cependant, le cas suivant mérite d'être signalé.

Si l'on a

$$F_{1} = \frac{1}{L} \frac{\partial \varpi}{\partial \lambda}, \quad F_{2} = \frac{1}{M} \frac{\partial \varpi}{\partial \mu},$$

æ étant une fonction quelconque, ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left(LF_{_{4}}\right) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(MF_{_{2}}\right),$$

on peut poser

$$n_1 = n'_1 + \varpi,$$

$$n_2 = n'_2 + \varpi,$$

et les équations se réduisent à

$$\frac{1}{L} \frac{\partial n'_{2}}{\partial \lambda} - \frac{1}{M} \frac{\partial t}{\partial \mu} + \frac{n'_{1} - n'_{2}}{\rho_{2}} + \frac{2t}{\rho_{1}} = 0,$$

$$\frac{1}{M} \frac{\partial n'_{1}}{\partial \mu} - \frac{1}{L} \frac{\partial t}{\partial \lambda} + \frac{n'_{2} - n'_{1}}{\rho_{1}} + \frac{2t}{\rho_{2}} = 0,$$

$$\frac{n'_{1}}{R_{2}} + \frac{n'_{2}}{R_{1}} - \frac{2t}{T} = \Phi - \varpi \left( \frac{1}{R_{1}} + \frac{1}{R_{2}} \right).$$

Posons encore  $n'_1 = \frac{k}{R_1} + n''_1$ ,  $n'_2 = \frac{k}{R_2} + n''_2$ ,  $t = \frac{k}{T} + t''$ , k étant une constante. Les deux premières équations ne changent pas de forme, et le second membre de la dernière devient

$$\Phi - \varpi \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - 2k \left( \frac{1}{R_1 R_2} - \frac{1}{T^2} \right)$$
.

Si cette expression est nulle, les trois équations se trouvent privées de second membre et l'on est ramené au problème de la déformation infiniment petite. La même chose arriverait si k, au lieu d'être une constante, était une fonction satisfaisant aux deux équations

$$\frac{1}{LR_{\star}}\frac{\partial k}{\partial \lambda} - \frac{1}{MT}\frac{\partial k}{\partial \mu} = 0,$$

$$\frac{1}{LT}\frac{\partial k}{\partial \lambda} - \frac{1}{MR_{\star}}\frac{\partial k}{\partial \mu} = 0.$$

Ce dernier cas n'est possible que si  $\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{R}_1}\mathbf{R}_2 - \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{T}^2} = \mathbf{o}$ , c'est-à-dire si la surface est développable; mais alors k disparaît de l'expression de la force normale, qui se réduit à

$$\Phi - \varpi \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$
.

Il est intéressant de rechercher quelles conditions doivent remplir les forces extérieures pour que l'on ait constamment  $n_1 = n_2$  et t = 0, c'est-à-dire pour que toutes les directions passant par un même point soient soumises à des tensions identiques. Les équations (16) se réduisent, en vertu de ces hypothèses, en remplaçant  $n_1$  et  $n_2$  par  $n_2$ , et désignant par  $\frac{1}{R}$  la courbure moyenne  $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ , à

$$\frac{1}{L} \frac{\partial n}{\partial \lambda} = \mathbf{F}_{+},$$

$$\frac{1}{M} \frac{\partial n}{\partial \mu} = \mathbf{F}_{2},$$

$$\frac{2 n}{B} = \Phi.$$

Si l'on pose L $d\lambda = ds_1$ , M $d\alpha = ds_2$ , les conditions cherchées peuvent s'écrire

$$\begin{split} \mathbf{2}\,\mathbf{F}_4 &= \frac{\partial \left(\Phi\,R\right)}{\partial s_1}\,,\\ \mathbf{2}\,\mathbf{F}_2 &= \frac{\partial \left(\Phi\,R\right)}{\partial s_2}\,. \end{split}$$

En éliminant n entre les valeurs de  $F_4$  et de  $F_2$ , on trouve cette troisième condition, qui rentre dans les deux premières,

$$\frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial s_2} - \frac{\mathbf{F}_1}{\rho_1} = \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial s_1} - \frac{\mathbf{F}_2}{\rho_2}.$$

Quand les forces extérieures sont partout normales à la surface, la condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse avoir  $n_1 = n_2$  et t = 0 est que  $\Phi R$  soit constant. S'il en est ainsi, la valeur de n est également constante en tous les points de la surface.

30 L. LECORNU.

Les points d'une surface pour lesquels  $n_i = n_2$  et t = 0 jouent, par rapport aux tensions, un rôle analogue à celui des ombilies par rapport aux courbures; on peut désigner ces points sous le nom de points d'équilibre ombilieal.

Pour que l'analogie fût complète, il faudrait que, sur une surface en équilibre, ils fussent généralement isolés, à la manière des ombilics. Nous allons faire voir qu'il n'en est pas ainsi.

Considérons en effet une surface en équilibre, et rapportons les équations aux lignes de tension principales. Il suffit pour cela de faire t=0, ce qui donne

$$\frac{1}{L} \frac{\partial n_2}{\partial \lambda} + \frac{n_1 - n_2}{\rho_2} = F_1,$$

$$\frac{1}{M} \frac{\partial n_1}{\partial \mu} + \frac{n_2 - n_1}{\rho_1} = F_2,$$

$$\frac{n_1}{R_2} + \frac{n_2}{R_1} = \Phi.$$

Pour qu'un point soit ombilical, il faut et il suffit que l'on ait  $n_1 = n_2$ . Pour qu'un point infiniment voisin soit également ombilical, il faut et il suffit qu'on puisse trouver une direction  $d\mu = kd\lambda$  telle que l'on ait

$$\frac{\partial n_1}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial n_1}{\partial \mu} d\mu = \frac{\partial n_2}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial n_2}{\partial \mu} d\mu.$$

Or, de l'égalité  $n_1 = n_2$ , il résulte

$$\frac{\partial n_2}{\partial \lambda} = \mathbf{F}_1 \mathbf{L}, \quad \frac{\partial n_1}{\partial \mu} = \mathbf{M} \mathbf{F}_2.$$

En différentiant la troisième équation par rapport à  $\lambda$ , puis faisant  $n_1 = n_2$  et  $\frac{1}{R_*} + \frac{1}{R_*} = \frac{2}{R}$ , on trouve

$$\frac{\partial n_1}{\partial \lambda} = R_2 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial R}{\partial \lambda} - \frac{F_1 L}{R_1} \right);$$

de même

$$\frac{\partial n_2}{\partial \mu} = R_1 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - \frac{2}{R_2} \frac{\partial R}{\lambda} - \frac{F_2 M}{R_2} \right).$$

SUR L'ÉQUILIBRE DES SURFACES FLEXIBLES ET INEXTENSIBLES.

Ces valeurs, portées dans l'équation

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{\frac{\partial n_1}{\partial \lambda} - \frac{\partial n_2}{\partial \lambda}}{\frac{\partial n_2}{\partial \mu} - \frac{\partial n_1}{\partial \nu}},$$

déterminent une direction (toujours unique, à moins qu'elle ne soit quelconque) suivant laquelle existe un point ombilical infiniment voisin du premier.

Par suite, lorsqu'il existe un point de tension ombilicale, il en existe une infinité, formant sur la surface une ligne de tension ombilicale.

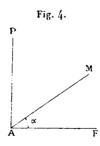
Lorsqu'une ligne ombilicale appartient à l'un des systèmes de lignes principales, sa forme est complètement déterminée dès que l'on connaît l'un de ses points. En effet, si nous supposons que l'ombilicale soit représentée par  $\mu = \text{const.}$ , nous avons pour cette ligne, en vertu des équations générales,

$$\frac{1}{L}\frac{\partial n}{\partial \lambda} = F_1, \quad n = \frac{\Phi R}{2},$$

d'où, en remplaçant L  $d\lambda$  par ds,

$$\frac{d(\Phi R)}{ds} = 2 F_{1}.$$

En chaque point de la surface, il existe toujours une direction, et une



seule, pour laquelle cette condition est remplie. Soit en effet AF (fig. 4) la projection de la force extérieure sur le plan tangent au point A.

Soit AM = ds un élément passant par A et faisant avec AF l'angle  $MAF = \alpha$ . Soient  $d\sigma$ ,  $d\sigma'$  les projections de cet élément sur AF et sur la

32 L. LECORNU.

perpendiculaire AP à AF. On a

$$\frac{d(\Phi R)}{ds} ds = \frac{\partial(\Phi R)}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial(\Phi R)}{\partial \sigma'} d\sigma'$$

ou

$$\frac{d(\Phi R)}{ds} = \frac{\partial(\Phi R)}{\partial \sigma} \cos \alpha + \frac{\partial(\Phi R)}{\partial \sigma'} \sin \alpha.$$

D'ailleurs, la composante F, de la force extérieure suivant AM est égale à F cos \alpha. Par suite, la condition trouvée plus haut peut s'écrire

$$\frac{\partial (\Phi R)}{\partial \sigma} \cos \alpha + \frac{\partial (\Phi R)}{\partial \sigma'} \sin \alpha = F \cos \alpha,$$

d'où

$$\tan \alpha = \frac{\mathbf{F} - \frac{\partial^{\top} \Phi \mathbf{R}}{\partial \sigma}}{\frac{\partial^{\top} \Phi \mathbf{R}}{\partial \sigma'}},$$

direction tout à fait indépendante des fonctions arbitraires introduites par l'intégration.

Tandis que les autres lignes de tension principales se déforment d'une façon quelconque suivant les conditions relatives aux limites, la ligne ombilicale dépend d'une seule constante arbitraire. En particulier, quand il n'y a pas de forces normales, la ligne ombilicale est toujours une trajectoire orthogonale des forces tangentielles.

Quelles que soient les forces extérieures, on peut répéter, à propos des équations (16), une grande partie des remarques qui ont été faites précédemment sur les équations (9). Ainsi, il est possible en général de choisir arbitrairement les valeurs de deux des inconnues pour tous les points d'une courbe tracée sur la surface, et l'on détermine ainsi l'état de toute la surface. Cependant, cette proposition ne peut être entièrement vraie, car, sans cela, en considérant une portion de surface limitée à un contour fermé et soumise à des forces extérieures quelconques, on pourrait s'imposer la condition que la force d'arrachement et la force de cisaillement fussent nulles pour tous les points du contour. On arriverait ainsi à conclure qu'une portion de surface entièrement libre reste en équilibre quelles

que soient les forces extérieures, résultat évidemment absurde. Il est facile de voir en quoi le raisonnement est vicieux. Traçons sur la portion de surface une série de courbes fermées, s'entourant les unes les autres et commençant par le contour donné pour se réduire finalement à un point isolé P. La loi des tensions auxquelles le contour est soumis déterminera celle des tensions auxquelles est soumise la courbe infiniment voisine, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive au point P. Mais, pour une courbe infiniment petite enveloppant le point P, la loi des tensions est bien déterminée; elle s'exprime, en négligeant les quantités infiniment petites, par les formules (14), dans lesquelles figurent seulement trois constantes arbitraires. Les fonctions arbitraires introduites par l'intégration doivent être déterminées en conséquence; elles doivent, de plus, être choisies de telle façon que les tensions au point P ne soient pas infinies. Par conséquent, il n'est pas permis de supposer a priori que le contour n'est soumis à aucun effort de tension.

Dans le cas des surfaces à courbures opposées, les tensions qui s'exercent sur un contour fermé satisfont encore à une autre condition. Il est évident que les équations (16), comme les équations (9), admettent pour caractéristiques les lignes asymptotiques de la surface, lignes réelles pour ce genre de surfaces. Les deux fonctions arbitraires introduites par l'intégration sont chacune fonction de l'un des paramètres des caractéristiques. En d'autres termes, la solution générale peut être mise sous la forme

$$n_1 = f_1[\lambda, \mu, \varphi_1(\alpha_1), \varphi_2(\alpha_2)],$$

$$n_2 = f_2[\lambda, \mu, \varphi_1(\alpha_1), \varphi_2(\alpha_2)],$$

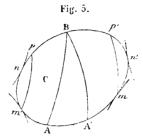
$$t = f_3[\lambda, \mu, \varphi_1(\alpha_1), \varphi_2(\alpha_2)],$$

 $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  désignant deux fonctions arbitraires, et  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  étant deux quantités dont chacune reste constante quand on se déplace sur une courbe appartenant à l'un des deux systèmes de lignes asymptotiques.

Considérons le contour fermé C (fig. 5), et choisissons arbitrairement, pour un point A de ce contour, les valeurs de  $n_1$  et  $n_2$ . Soit AB la ligne asymptotique passant au point A, pour laquelle  $\alpha_2$  reste constant. Les

34 L. LECORNU.

valeurs des tensions aux divers points de cette ligne ne dépendent plus que de la seule fonction arbitraire  $\varphi_1(\alpha_1)$ , et, en éliminant celle-ci, on obtient entre  $n_1$ ,  $n_2$ , t une relation  $F_1(n_1, n_2, t) = 0$  sans fonction arbi-



traire. Soit B le second point de rencontre de l'asymptotique avec le contour. Au point B passe une autre ligne asymptotique qui coupe le contour en un autre point A', et, si les tensions en A' sont connues, on a, pour le point B, une nouvelle relation  $F_2(n_1, n_2, t) = 0$ . Ces deux relations, jointes à

$$\frac{n_1}{R_2} + \frac{n_2}{R_1} - \frac{2t}{T} = \Phi,$$

déterminent  $n_1$ ,  $n_2$  et t. D'après cela, si l'on connaît les tensions en A et A', on les connaît également en B. Soient m, n les points de contact de deux lignes asymptotiques tangentes au contour, appartenant au même système que AB; soient m', n' ceux de deux lignes asymptotiques du même système que A'B'. Si les points m et m' sont choisis de façon que l'arc mAA'm' ne comprenne pas les points n et n', et si l'on mène les asymptotiques m'p, mp' qui coupent le contour aux points p et p', on voit sans peine que la connaissance des tensions exercées sur l'arc mm' entraîne la connaissance complète des tensions exercées sur l'arc pp' et ne laisse sur chacun des arcs mn'p', m'np qu'une seule tension indéterminée.

Rien de pareil n'a lieu pour les surfaces convexes, puisque leurs lignes asymptotiques sont imaginaires. Nous verrons plus tard, sur un exemple particulier, comment les choses se passent dans ce cas.

## CHAPITRE III.

## ÉTUDE DES SYSTÈMES TANGENTIELS.

Nous avons montré, dans le Chapitre précédent, de quelle façon un système quelconque de forces appliquées à une surface peut être décomposé en deux systèmes, que nous avons appelés système normal et système tangentiel. Nous avons prouvé que l'on a toujours une intégrale du premier et que toute la difficulté du problème consiste dans l'intégration du second : c'est celui-ci qui va maintenant nous occuper exclusivement.

Un système tangentiel est caractérisé par l'absence de composante normale des forces extérieures. On a toujours, en pareil cas,

$$\frac{n_1}{R_2} + \frac{n_2}{R_1} - \frac{2t}{T} = 0.$$

En prenant comme lignes de coordonnées les lignes de courbure, cette équation devient

$$\frac{n_1}{R_2} + \frac{n_2}{R_1} = 0.$$

Elle montre que  $\frac{n_1}{n_2}$  est toujours de signe contraire à  $\frac{R_1}{R_2}$ , et par conséquent que :

Pour les surfaces convexes, l'indicatrice des tensions est toujours hyperbolique.

La même proposition peut encore être énoncée de cette façon :

Une surface convexe, soumise à des forces tangentielles, présente toujours deux systèmes de lignes travaillant uniquement par cisaillement.

Dans le cas des surfaces à courbures opposées, l'indicatrice des tensions peut être elliptique ou hyperbolique, et, par conséquent, les lignes dont il s'agit peuvent être réelles ou imaginaires. Tout ce qu'on peut conclure du fait que pour les lignes de courbure  $\frac{n_1}{n_2}$  est positif, c'est que l'angle aigu formé en un point par les lignes de glissement, quand elles sont réelles, ne comprend jamais une direction principale de la surface. On s'en rend compte immédiatement en remarquant que, dans une hyperbole, deux diamètres rectangulaires ne peuvent avoir leurs carrés de mêmes signes que s'ils sont compris tous les deux dans l'angle obtus des asymptotes.

Considérons une surface rapportée à ses directions de tension normale, pour lesquelles t = 0. L'équation de l'indicatrice des tensions est

$$n_1 x^2 + n_2 y^2 = 1$$
.

Les coefficients angulaires m, m' de deux directions conjuguées sont liés par la relation

$$mm' = -\frac{n_1}{n_2}$$
.

L'équation de l'indicatrice ordinaire de la surface est

$$\frac{x^2}{R_1} + \frac{2xy}{T} + \frac{y^2}{R_2} = 1.$$

Les coefficients angulaires  $\mu$ ,  $\mu'$  des directions asymptotiques sont les racines de

$$\frac{\mu^2}{R_2} + \frac{2\mu}{T} + \frac{1}{R_1} = 0,$$

ce qui donne

$$\mu\mu' = \frac{R_2}{R_1}$$

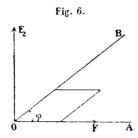
Comme  $\frac{n_1}{R_2} + \frac{n_2}{R_1} = 0$ , nous pouvons énoncer ce théorème fondamental :

Les directions asymptotiques de la surface sont deux directions conjuguées de la courbe des tensions.

Ou, en d'autres termes :

Les tensions qui agissent sur une ligne asymptotique sont parallèles aux lignes asymptotiques de l'autre système.

En raison de cette propriété et de celles qui ont été déjà établies pour les lignes asymptotiques, il est intéressant de rechercher ce que deviennent les équations d'équilibre quand on les rapporte à ces lignes comme lignes de coordonnées. On pourrait établir directement les équations ainsi transformées, mais on réussit aussi bien par un changement de coordonnées. A cet effet, imaginons que les coordonnées primitives se composent d'un système de lignes asymptotiques et de ses trajectoires orthogonales. Si les lignes asymptotiques constituent le système  $\mu = \text{const.}$  et si  $\phi$  désigne l'angle



de deux lignes asymptotiques OA, OB (fig. 6), on a, d'après le théorème précédent, en se rappelant les conventions de signes,

$$t = -n_{\star} \cot \varphi$$
.

Soit n la tension normale qui s'exerce sur OB. Il résulte de la formule (15) que l'on a

$$n + n_1 = \sin^2 \varphi (n_1 + n_2).$$

Les deux premières équations d'équilibre deviennent, en posant, pour abréger,  $Ld\lambda = ds_1$ ,  $Md\mu = ds_2$ ,

$$\frac{\partial n_2}{\partial s_1} - \frac{\partial t}{\partial s_2} + \frac{n_1 - n_2}{\rho_2} + \frac{2t}{\rho_1} = \mathbf{F}_1,$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial s_2} - \frac{\partial t}{\partial s_1} + \frac{n_2 - n_1}{\rho_1} + \frac{2t}{\rho_2} = \mathbf{F}_2.$$

Soit f une fonction quelconque de  $\lambda$  et de  $\mu$ ; soit F ce que devient cette fonction lorsqu'on l'exprime au moyen des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  des

lignes asymptotiques, de telle sorte que

$$f(\lambda, \mu) = F(\alpha, \beta).$$

On tire de là

$$rac{\partial f}{\partial \lambda} d\lambda + rac{\partial f}{\partial \mu} d\mu = rac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}} d\mathbf{z} + rac{\partial \mathbf{F}}{\partial eta} d\mathbf{\beta}.$$

Soient A, B les coefficients métriques qui correspondent à  $\alpha$  et  $\beta$ . Les déplacements  $d\sigma_{+}$  et  $d\sigma_{-}$  effectués suivant OA et OB, sont exprimés par

$$d\sigma_{4} = A d\alpha, \quad d\sigma = B d\beta,$$

et l'on a, par suite,

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{ds_i}{L} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{ds_i}{M} = \frac{\partial F}{\partial \alpha} \frac{d\sigma_i}{A} + \frac{\partial F}{\partial \beta} \frac{d\beta}{B}$$

ou bien

$$\frac{\partial f}{\partial s_1} ds_1 + \frac{\partial f}{\partial s_2} ds_2 = \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} d\sigma_1 + \frac{\partial F}{\partial \sigma} d\sigma.$$

D'ailleurs, la fig. 6 montre que

$$ds_1 = d\sigma_1 + \cos\varphi \, d\sigma,$$
$$ds_2 = \sin\varphi \, d\sigma.$$

et, par suite,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial F}{\partial \sigma_1}\right) d\sigma_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial s_1}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial s_2}\sin\varphi - \frac{\partial F}{\partial\sigma}\right) d\sigma = 0,$$

d'où, comme  $d\sigma$  et  $d\sigma$ , sont arbitraires,

$$\frac{\partial f}{\partial s_1} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_1},$$

$$\frac{\partial f}{\partial s_2} = \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial F}{\partial \sigma} - \cot \varphi \frac{\partial F}{\partial \sigma_1}.$$

En faisant  $f = t = -n_1 \cot \varphi$ , on a

$$\frac{\partial t}{\partial s_1} = -\cot \varphi \frac{\partial n_1}{\partial \sigma_1} + \frac{n_1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_1},$$

$$\frac{\partial t}{\partial s_2} = -\frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial n_1}{\partial \sigma} + \cot^2 \varphi \frac{\partial n_1}{\partial \sigma_1} + \frac{n_1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} - \frac{n_1 \cos \varphi}{\sin^3 \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_1}.$$

Pour 
$$f = n_2 = \frac{n}{\sin^2 \varphi} + n_4 \cot^2 \varphi$$
, il vient 
$$\frac{\partial n_2}{\partial s_1} = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial n}{\partial \sigma_1} + \cot^2 \varphi \frac{\partial n_1}{\partial \sigma_1} - 2 \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_1} (n + n_4).$$

Enfin, en posant  $f = n_i$ , on obtient

$$\frac{\partial n_1}{\partial s_2} = \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial n_1}{\partial \sigma} - \cot \varphi \frac{\partial n_1}{\partial \sigma_1}.$$

Les équations d'équilibre deviennent, par la substitution de ces valeurs, en multipliant tout par  $\sin^2 \varphi$ ,

$$\begin{split} \frac{\partial n}{\partial \sigma_1} &+ \cos \varphi \, \frac{\partial n_1}{\partial \sigma} - (2 \, n - n_1) \, \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \, \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_1} \\ &- \frac{n_1}{\sin \varphi} \, \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} - \frac{n + n_1 \cos 2\varphi}{\rho_2} - \frac{n_1}{\rho_1} \sin 2\varphi = \mathbf{F}_1 \sin^2 \varphi, \\ \sin \varphi \, \frac{\partial n_1}{\partial \sigma} &- n_1 \, \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_1} + \frac{n + n_1 \cos 2\varphi}{\rho_1} - \frac{n_1}{\rho_2} \sin 2\varphi = \mathbf{F}_2 \sin^2 \varphi. \end{split}$$

Soient f, f, les composantes de la force extérieure suivant OB et OA. On a

$$F_{4} = f_{4} + f \cos \varphi,$$

$$F_{2} = f \sin \varphi,$$

d'où l'on déduit sans difficulté

$$\sin \varphi \frac{\partial n}{\partial \sigma_1} - n \left( 2 \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_1} + \frac{\sin \varphi}{\rho_2} + \frac{\cos \varphi}{\rho_1} \right) - n_1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} - \frac{\sin \varphi}{\rho_2} + \frac{\cos \varphi}{\rho_1} \right) = f_1 \sin^3 \varphi,$$

$$\sin \varphi \frac{\partial n_1}{\partial \sigma} + \frac{n}{\rho_1} - n_1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_1} - \frac{\cos 2\varphi}{\rho_1} + \frac{\sin 2\varphi}{\rho_2} \right) = f \sin^3 \varphi.$$

Introduisons la courbure géodésique  $\frac{1}{\rho}$  de la ligne asymptotique OB. Pour la calculer, il suffit de projeter sur son plan tangent le triangle curviligne élémentaire formé par les deux lignes asymptotiques et par la trajectoire orthogonale au point O des lignes appartenant au système OA, en remarquant que l'angle des tangentes extrêmes à l'un des côtés de la projection est égal au quotient de l'arc projeté par son rayon de courbure géodésique, et que la somme des déviations que subit la tangente en un point de l'un des côtés lorsqu'on fait le tour complet dutriangle est

égale à zéro. On trouve ainsi, en attribuant à p un signe convenable,

$$-\frac{1}{\rho} = \frac{\partial p}{\partial \sigma} + \frac{\cos p}{\rho_1} - \frac{\sin \varphi}{\rho_2},$$

et les formules précédentes deviennent

$$\begin{split} \sin\varphi \frac{\partial n}{\partial \sigma_1} - n \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} + \frac{1}{\rho} + 2\cos\varphi \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_1} + \frac{1}{\rho_1} \right) \right] + \frac{n_1}{\rho} &= f_1 \sin^3\varphi, \\ \sin\varphi \frac{\partial n_1}{\partial \sigma} + \frac{n}{\rho_1} - n_1 \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_1} + \frac{1}{\rho_1} + 2\cos\varphi \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} + \frac{1}{\rho} \right) \right] &= f \sin^3\varphi. \end{split}$$

En posant, pour abréger,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{u},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{u},$$

on obtient finalement

(18) 
$$\begin{cases} \sin \varphi \frac{\partial n}{\partial \sigma_1} - n \left( \frac{1}{u} + \frac{2 \cos \varphi}{u_1} \right) + \frac{n_1}{\rho} = f_1 \sin^3 \varphi, \\ \sin \varphi \frac{\partial n_1}{\partial \sigma} - n_1 \left( \frac{1}{u_1} + \frac{2 \cos \varphi}{u} \right) + \frac{n}{\rho_1} = f \sin^3 \varphi. \end{cases}$$

Telle est la forme très simple que prennent les équations d'équilibre quand on les rapporte aux lignes asymptotiques. Il est d'ailleurs à remarquer que l'on parviendrait exactement aux mêmes équations pour deux lignes quelconques conjuguées par rapport aux tensions; mais les asymptotiques sont les seules lignes de ce genre qui soient connues a priori et dont la situation ne dépende ni des forces données ni des fonctions arbitraires introduites par l'intégration. Il va sans dire que, pour l'intégration,  $d\sigma$  et  $d\sigma$ , doivent être exprimés en fonction des paramètres des lignes asymptotiques.

La propriété dont jouissent les lignes asymptotiques d'être les caractéristisques des tensions développées sur la surface est bien mise en évidence par les équations (18). Par exemple, les valeurs de  $n_i$  pourront être choisies arbitrairement pour tous les points de la courbe sur laquelle sont mesurés les arcs  $\sigma$ ; mais alors la deuxième équation donnera sans aucune

indétermination les valeurs correspondantes de n, pourvu que  $\frac{1}{\rho_1}$  ne soit pas nul, c'est-à-dire pourvu que les asymptotiques de l'autre système ne soient pas des génératrices rectilignes (nous laissons pour le moment ce cas de côté). n et  $n_i$  étant ainsi déterminés, la première équation donnera  $\frac{\partial n}{\partial \sigma_1}$ , c'est-à-dire qu'elle fera connaître n pour les points d'une courbe infiniment voisine de la première, et la seconde équation fournira la valeur correspondante de  $n_i$  avec introduction d'une constante arbitraire. En continuant ainsi, on aura l'état de toute la surface; mais il s'introduira une constante arbitraire chaque fois qu'on passera d'une caractéristique à la suivante, ce qui revient à dire qu'on pourra assigner à la tension  $n_i$  une série de valeurs arbitraires pour tous les points de rencontre d'une courbe quelconque avec les caractéristiques successives. Si l'on fait coıncider cette nouvelle courbe avec une caractéristique de l'autre système, on obtient le théorème suivant:

Pour connaître l'état d'équilibre de la surface, il est nécessaire et suffisant de connaître l'une des tensions auxquelles sont soumises deux lignes asymptotiques n'appartenant pas au même système.

Ce qu'on peut encore énoncer en disant :

La valeur la plus générale des tensions est de la forme

$$n = \varphi \left[\alpha, \beta, \varpi(\alpha), \chi(\beta)\right], \quad n_i = \varphi_i \left[\alpha, \beta, \varpi(\alpha), \chi(\beta)\right],$$

 $\alpha$  et  $\beta$  étant les paramètres des lignes asymptotiques et  $\varpi$ ,  $\chi$  deux fonctions arbitraires.

Comme la connaissance des tensions exercées en un point sur deux directions entraîne celle des tensions exercées sur toutes les directions possibles, la forme que nous venons d'établir s'applique quel que soit le système de coordonnées, et l'on peut toujours représenter les solutions du problème par

$$n_1 = \mathbf{N}_1[\alpha, \beta, \varpi(\alpha), \chi(\beta)],$$
  

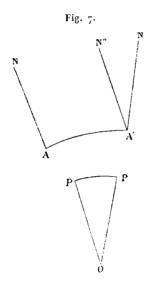
$$n_2 = \mathbf{N}_2[\alpha, \beta, \varpi(\alpha), \chi(\beta)],$$
  

$$t = \Theta[\alpha, \beta, \varpi(\alpha), \chi(\beta)].$$

6

Si la surface est convexe,  $\alpha$  et  $\beta$  sont des quantités imaginaires conjuguées. Il faut alors choisir  $\varpi$  et  $\chi$  de façon à obtenir pour les tensions des valeurs réelles.

Les équations (18) peuvent servir à transformer d'une façon remarquable le problème de l'équilibre des surfaces. Soit AA' (fig. 7) l'élément  $d\sigma$  d'une ligne asymptotique. Construisons l'indicatrice sphérique de la surface en menant, par le centre O d'une sphère de rayon 1, des parallèles OP, OP' aux



normales AN, A'N'. En vertu de la définition des lignes asymptotiques, la normale A'N' se projette sur le plan NAA' suivant une droite A'N'' qui est parallèle à AN. L'élément PP' de l'indicatrice sphérique est parallèle au plan N'A'N'': il est donc perpendiculaire à AA'. Par suite :

L'indicatrice sphérique d'une ligne asymptotique a ses tangentes perpendiculaires à celles de la ligne asymptotique.

Les plans tangents aux points correspondants de la surface et de la sphère étant d'ailleurs parallèles, nous pouvons ajouter que :

Les angles de contingence géodésique des deux courbes sont constamment égaux.

Enfin, la longueur ds = PP' de l'élément d'indicatrice mesure l'angle N'A'N'', lequel est égal à  $\frac{d\sigma}{T}$ ,  $\frac{1}{T}$  étant la torsion géodésique de la ligne

SUR L'ÉQUILIBRE DES SURFACES FLEXIBLES ET INEXTENSIBLES.

asymptotique, c'est-à-dire la racine carrée de la courbure totale (prise positivement). Donc

$$ds = \frac{d\sigma}{\Gamma}$$
.

Soit  $d\alpha$  l'angle de contingence commun aux deux courbes; soit r le rayon de courbure géodésique de l'indicatrice sphérique. On aura

$$\frac{d\alpha}{ds} = T \frac{d\alpha}{d\sigma}$$
 ou  $\frac{1}{r} = \frac{T}{\rho}$ .

Revenons maintenant aux équations (18), et remarquons que les indicatrices de deux lignes asymptotiques forment sur la sphère le même angle  $\varphi$  que ces lignes sur la surface. Nous pouvons remplacer les quantités  $\frac{1}{d\sigma}$ ,  $\frac{1}{d\sigma_1}$ ,  $\frac{1}{\rho}$ ,  $\frac{1}{\rho}$ , par les quantités égales  $\frac{1}{Tds}$ ,  $\frac{1}{Tds_1}$ ,  $\frac{1}{Tr}$ ,  $\frac{1}{Tr}$ . Par conséquent, si l'on désigne par v et  $v_i$  les quantités qui correspondent sur la sphère à u et  $u_i$ , les équations deviennent

$$\sin \varphi \frac{\partial n}{\partial s_4} - n \left( \frac{1}{\nu} + \frac{2}{\nu_1} \cos \varphi \right) + \frac{n_1}{r} = f_1 \operatorname{T} \sin^3 \varphi,$$

$$\sin \varphi \frac{\partial n_1}{\partial s} - n_4 \left( \frac{1}{\nu_4} + \frac{2}{\nu} \cos \varphi \right) + \frac{n}{r_1} = f \operatorname{T} \sin^3 \varphi.$$

Si les indicatrices sphériques des lignes asymptotiques étaient sur la sphère des lignes de tension conjuguées et si les composantes des forces extérieures suivant les tangentes à ces courbes étaient f, T, f T, les équations d'équilibre seraient précisément celles que nous venons d'obtenir.

Done:

Lorsqu'on connaît l'état d'équilibre d'une sphère de rayon 1 soumise à des forces extérieures données, on peut en déduire l'état d'équilibre de toutes les surfaces pour lesquelles les lignes asymptotiques admettent comme indicatrices sphériques des lignes de tension conjuguées sur la sphère et qui sont soumises en chaque point à une force tangentielle perpendiculaire à celle du point correspondant de la sphère, le rapport des deux forces étant égal à la racine carrée de la courbure totale.

44 L. LECORNU.

Observons que le système des forces appliquées à la sphère n'a nullement besoin d'être tangentiel. On peut même, étant donnée une surface soumise à des forces tangentielles quelconques, effectuer la transformation qui vient d'être indiquée, puis chercher à déterminer, pour la sphère, des forces normales telles que les transformées des lignes asymptotiques puissent être des lignes de tension conjuguées. Le calcul se fait sans difficulté de la manière suivante.

Soit

$$n_1 x^2 + 2 t x y + n_2 y^2 = 1$$

l'indicatrice des tensions en un point de la sphère. Deux directions conjuguées sont liées par la relation

$$n_2 m m' + t(m + m') + n_1 = 0.$$

Si cette équation est satisfaite par deux directions données pour lesquelles mm'=a, m+m'=b, on a

$$an_2 + bt + n_1 = 0$$
,

relation qui, jointe aux trois équations générales, permet d'éliminer  $n_1$ ,  $n_2$ , t. On obtient ainsi une équation qui détermine la force normale  $\Phi$ . Mais cette équation est aux dérivées partielles du second ordre et ne peut être, en général, d'aucune utilité pour la solution du problème. Le véritable intérêt de la transformation que nous avons indiquée est celui qui résulte de l'énoncé du théorème précédent : il consiste en ce que toute solution trouvée pour la sphère sera susceptible d'une généralisation immédiate.

Cette généralisation sera souvent facilitée par l'emploi des coordonnées géographiques isothermes, dont l'invention est due à M. Ossian Bonnet (Journal de Liouville, 2<sup>e</sup> série, t. V) et qui fournissent pour l'étude des surfaces un instrument si précieux. On les obtient en mettant l'équation du plan tangent sous la forme

$$X \sin \theta \cos \varphi + Y \sin \theta \sin \varphi + Z \cos \theta = \delta$$

SUR L'ÉQUILIBRE DES SURFACES ÉLEXIBLES ET INEXTENSIBLES.

$$x = \varphi,$$
  
 $y = \log \tan \frac{\theta}{2},$   
 $z = -\frac{\delta}{\sin \theta}.$ 

L'équation du plan tangent devient alors

$$X\cos x + Y\sin x + Zi\sin iy + z = 0.$$

L'interprétation géométrique de x, y, z est très simple. Si, par l'origine, on mène une parallèle à chaque normale de la surface, et qu'on prenne son point de rencontre M avec une sphère de rayon 1, ayant l'origine pour centre, la projection stéréographique M' de ce point sur le plan des XY a pour coordonnées par rapport aux axes OX, OY des quantités x', y' qui sont liées à x, y par les formules

$$x' + iy' = e^{y+ix},$$
  
$$x' - iy' = e^{y-ix},$$

c'est-à-dire que y + ix, y - ix sont les logarithmes népériens de x' + iy', x' - iy'. La troisième coordonnée, z, est la distance de l'origine à la trace du plan tangent sur le plan des xy. Les coordonnées cartésiennes  $\xi$ , n,  $\zeta$  sont liées à x, y, z par les équations

$$\xi \sin x - n \cos x = p,$$

$$\xi \cos x + n \sin x = -z - qi \tan q iy,$$

$$\zeta \cos iy = q.$$

En désignant, suivant l'usage, par p, q, r, s, t les dérivées partielles de z par rapport à x et y, et posant

$$u = r + i \operatorname{tang} i y q + z,$$
  
 $v = s,$   
 $w = t + i \operatorname{tang} i y q,$ 

46 L. LECORNU.

on trouve que l'équation différentielle des lignes asymptotiques est

$$u\,dx^2 + 2v\,dx\,dy + w\,dy^2 = 0.$$

La courbure totale est égale à  $\frac{1}{\cos^2 iy(uw-v^2)}$  et, par suite, la force tangentielle appliquée sur la surface sera égale à celle qui est appliquée sur la sphère, divisée par  $\cos iy\sqrt{v^2-uw}$ .

Une nouvelle transformation permet de ramener l'étude de l'équilibre de la surface donnée à celle de l'équilibre d'un plan. Il suffit pour cela de considérer la projection stéréographique qui nous a servi à interpréter les coordonnées x, y, z. Cette projection n'altère pas les angles, et elle réduit les longueurs infiniment petites dans un rapport facile à calculer : ce rapport est  $\frac{1+e^{2y}}{2}$ . Partant de là, on verra, comme précédemment, que les deux équations applicables à la sphère deviennent applicables au plan, pourvu qu'on multiplie les forces  $f_1$  T, f T par  $\frac{1+e^{2y}}{2}=e^y\cos iy$ .

Ici, nous ne sommes plus maîtres d'introduire des forces normales pour faire en sorte que les transformées des lignes asymptotiques soient des lignes de tension conjuguées. En effet, la troisième équation d'équilibre

$$\frac{n_1}{R_2} + \frac{n_2}{R_1} - \frac{2t}{T} = \Phi$$

se réduit, dans le cas du plan, à  $\Phi = 0$ , c'est-à-dire que :

Un plan ne peut être en équilibre que s'il contient toutes les forces qui lui sont appliquées.

Mais, en revanche, quand un plan est soumis à des forces tangentielles, on n'a plus à satisfaire que deux équations entre les trois inconnues  $n_1, n_2, t$ , et l'on peut s'imposer une troisième condition, par exemple celle qu'un réseau de courbes données forme des lignes de tension conjuguées. Supposons que ce réseau ait pour équation différentielle, rapportée à des coordonnées orthogonales quelconques  $\lambda, \mu$ ,

$$Ud\lambda^2 + 2Vd\lambda d\mu + Wd\mu^2 = 0$$

ou, en posant  $\frac{M d\mu}{1 dt} = m$ ,

$$L^{2}Wm^{2} + 2VLMm + UM^{2} = 0.$$

L'équation de l'indicatrice des tensions étant

$$n_{1}X^{2} + 2tXY + n_{2}Y^{2} = 1$$

deux directions conjuguées  $\mu$ ,  $\mu'$  sont liées par la relation

$$n_2 \mu \mu' + t(\mu + \mu') + n_4 = 0.$$

Si  $\mu$  et  $\mu'$  sont racines de l'équation en m, on a

$$\mu\mu' = \frac{\mathrm{UM}^2}{\mathrm{WL}^2}, \quad \mu + \mu' = -\frac{2\mathrm{V}}{\mathrm{W}}\,\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{M}},$$

d'où la condition

$$n_2 \text{UM}^2 - 2 \text{VLM} t + n_4 \text{WL}^2 = 0.$$

Telle est l'équation qui, jointe à

$$\frac{1}{L}\frac{\partial n_2}{\partial \lambda} - \frac{1}{M}\frac{\partial t}{\partial \mu} + \frac{n_1 - n_2}{\rho_2} + \frac{2t}{\rho_1} = F_1,$$

$$\frac{1}{M}\frac{\partial n_1}{\partial \mu} - \frac{1}{L}\frac{\partial t}{\partial \lambda} + \frac{n_2 - n_1}{\rho_1} + \frac{2t}{\rho_2} = F_2,$$

déterminera les valeurs de  $n_1$ ,  $n_2$ , t qui conviennent au problème.

En remplaçant  $\lambda$ ,  $\mu$  par les coordonnées isothermes x, y, nous aurons à poser

$$L = M = \frac{\mathbf{I}}{\cos i y},$$

$$\frac{\mathbf{I}}{\rho_1} = 0, \quad \frac{\mathbf{I}}{\rho_2} = -\cos i y;$$

U, V, W deviendront, pour les transformées des lignes asymptotiques,  $u, v, \omega$ . Les équations d'équilibre prendront d'après cela la forme

$$\frac{\partial n_2}{\partial x} - \frac{\partial t}{\partial y} + n_2 - n_4 = \frac{\mathbf{F}_1}{\cos iy},$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial y} - \frac{\partial t}{\partial x} - 2t = \frac{\mathbf{F}_2}{\cos iy},$$

$$n_2 u - 2vt + n_1 w = 0.$$

Les quantités  $F_1$ ,  $F_2$  qui figurent dans les seconds membres sont, dans le plan, les composantes de la force extérieure suivant les deux directions y = const., x = const. En désignant par  $\alpha$ ,  $\beta$  les angles formés avec la première de ces directions par les transformées des lignes asymptotiques, on a

$$\mathbf{F}_{1} = \mathbf{T}e^{y}\cos iy(f_{1}\cos\alpha + f_{2}\cos\beta),$$

$$\mathbf{F}_{2} = \mathbf{T}e^{y}\cos iy(f_{1}\sin\alpha - f_{2}\sin\beta);$$

tanga et tangs sont les racines de l'équation du second degré

$$wm^2 + 2vm + u = 0.$$

La transformation s'achève donc ici sans aucune difficulté. En effectuant la transformation inverse, on pourra toujours, connaissant les conditions d'équilibre d'une portion de plan soumise à des forces données, en déduire les conditions d'équilibre d'une infinité de surfaces placées dans une situation que l'on saura déterminer.

### CHAPITRE IV.

#### APPLICATIONS.

L'objet de ce Chapitre est d'appliquer à un certain nombre de cas particuliers les théories générales qui viennent d'être exposées.

La plus simple de toutes les surfaces est le plan. Ses propriétés statiques diffèrent radicalement de celles de toutes les autres surfaces et se résument dans les deux propositions suivantes, que nous avons déjà en l'occasion de démontrer :

- I. Un plan ne peut être en équilibre que s'il contient toutes les forces qui lui sont appliquées.
- II. L'équilibre d'un plan est défini, lorsqu'il est possible, par un système de deux équations entre trois inconnues, ce qui permet de s'imposer une troisième condition quelconque.

49

En coordonnées cartésiennes, les équations d'équilibre sont

$$\frac{\partial n_2}{\partial x} - \frac{\partial t}{\partial y} = \mathbf{F}_4,$$

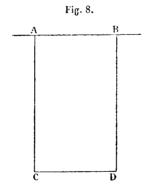
$$\frac{\partial n_1}{\partial y} - \frac{\partial t}{\partial x} = \mathbf{F}_2.$$

Si l'on s'impose la condition t = const., elles se réduisent à

$$\frac{\partial n_2}{\partial x} = \mathbf{F}_1, \quad \frac{\partial n_1}{\partial y} = \mathbf{F}_2,$$

équations dont l'intégration se ramène à de simples quadratures;  $n_i$  renfermera une fonction arbitraire de x, et  $n_2$  une fonction arbitraire de y.

Soit, par exemple, un rectangle vertical ABCD (fig. 8), dont le côté



horizontal AB est maintenu fixe, dont les trois autres côtés sont libres, qui pèse un poids constant P par unité de surface et qui supporte à sa partie inférieure un poids  $\infty \times CD$  uniformément réparti sur CD. En prenant CD, CA comme axes des x et des y et posant AC = h, CD = l, on aura, avec l'hypothèse t = 0,

$$\frac{\partial n_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial n_1}{\partial y} = P,$$

d'où

$$n_2 = \text{fonct.} y, \quad n_4 = Py + \text{fonct.} x.$$

 $n_2$ , devant s'annuler pour x = 0 et pour x = l quel que soit y, est identiquement nul. La fonction arbitraire que renferme n, se détermine en faisant y = 0, ce qui donne, que l que soit  $x, n_1 = \infty$ . L'état d'équilibre  $L_{\bullet}$ 

est donc

$$n_1 = Py + \varpi$$
,  $n_2 = 0$ ,  $t = 0$ .

Si le côté BD, au lieu d'être libre, était soumis à un effort d'arrachement variable exprimé par la condition  $n_2 = Y$  (Y étant une fonction de y), on ne pourrait plus faire l'hypothèse t = 0; mais on pourrait supposer t = F(y), F étant une fonction de y convenablement choisie. En effet, on aurait alors

$$\frac{\partial n_2}{\partial x} - \mathbf{F}'(y) = \mathbf{o},$$

ďoù

$$n_2 = F'(y) x + \text{fonct.} y$$
.

La seconde fonction de y serait nulle, puisque  $n_2$  serait encore assujetti à s'annuler pour x = 0. En faisant x = l, on aurait

$$l\mathbf{F}'(\mathbf{y}) = \mathbf{Y},$$

ce qui déterminerait F. La valeur de n, ne serait pas modifiée.

En coordonnées polaires  $\rho$ ,  $\omega$ , les équations d'équilibre du plan sont, en remarquant que le rayon de courbure géodésique de chaque circonférence est  $-\rho$ , en vertu de nos conventions de signes,

$$\frac{\partial n_2}{\partial \rho} - \frac{\mathbf{i}}{\rho} \frac{\partial t}{\partial \omega} - \frac{n_1 - n_2}{\rho} = \mathbf{F}_1,$$

$$\frac{\mathbf{i}}{\rho} \frac{\partial n_1}{\partial \omega} - \frac{\partial t}{\partial \rho} - \frac{2t}{\rho} = \mathbf{F}_2.$$

Appliquons ces formules au cas d'un cercle soumis à des forces extérieures F qui sont dirigées partout suivant le rayon et constantes pour chaque valeur de  $\rho$ .

En supposant t = 0, on a, pour un point quelconque,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial n_1}{\partial \omega} = 0,$$

$$\frac{n_2}{\partial \rho} - \frac{n_1 - n_2}{\rho} = F.$$

La première équation montre que  $n_i$  ne dépend que de  $\rho$ . Soit

SUR L'ÉQUILIBRE DES SURFACES FLEXIBLES ET INEXTENSIBLES.

 $n_i = \frac{d\chi}{d\rho} = \chi'(\rho)$ . La seconde équation donne

$$\frac{d}{d\rho}(n_2\rho) = \chi'(\rho) + \mathrm{F}\rho,$$

ďoù

$$n_2 \rho \stackrel{\cdot}{=} \stackrel{\star}{\chi} (\rho) + \int_0^{\rho} \operatorname{F} \rho \, d\rho + \Omega,$$

 $\Omega$  étant une fonction de  $\omega$ . On tire de là

$$n_2 = \frac{\chi(\rho)}{\rho} + \frac{1}{\rho} \int_0^{\rho} \mathbf{F} \rho \, d\rho + \frac{\Omega}{\rho}$$

Pour que  $n_2$  puisse rester fini quand on approche du centre, il faut d'abord que  $\Omega$  soit identiquement nul. Il faut de plus que  $\chi(\rho)$  tende vers zéro. S'il en est ainsi, la limite de  $n_2$  sera  $\chi'(\rho)$ : elle sera donc égale à celle de  $n_4$ . Sans cette égalité, t ne pourrait être nul pour toutes les directions au voisinage du centre. En résumé, l'état d'équilibre est représenté par

$$n_1 = \chi'(\rho),$$

$$n_2 = \frac{\chi(\rho)}{\rho} + \frac{1}{\rho} \int_0^{\rho} \mathbf{F} \rho \, d\rho,$$

$$t = 0.$$

La fonction arbitraire  $\chi(\rho)$  est assujettie seulement à s'annuler pour  $\rho = 0$  et à prendre une valeur déterminée quand  $\rho$  devient égal au rayon du cercle.

Si, au lieu d'un cercle, on considère la zone circulaire comprise entre deux circonférences de rayons  $\rho$  et  $\rho'$  sur lesquelles s'exercent des efforts normaux constants par unité de longueur, les mêmes formules sont applicables. Dans ce cas, la fonction  $\chi$  n'a pas besoin de devenir nulle pour  $\rho = 0$ , mais elle doit prendre des valeurs déterminées pour les rayons limites  $\rho$  et  $\rho'$ .

Nous allons donner, pour le cas très simple qui vient d'être étudié, un exemple des transformations dont il a été question dans le Chapitre précédent.

L'indicatrice des tensions a pour équation

$$\chi'(\rho) x^2 + \frac{\chi(\rho) + \int F \rho \, d\rho}{\rho} y^2 = 1.$$

La relation entre deux directions conjuguées m, m' est donc

$$mm'[\chi(\rho) \dashv -\int F\rho d\rho] + \rho \chi'(\rho) = 0.$$

Introduisons les coordonnées isothermes, et posons pour cela

$$\rho = e^{\gamma}$$
.

Soient  $\varpi(y)$  ce que devient  $\chi(\rho)$  et  $\varphi(y)$  ce que devient  $\int F_{\rho} d\rho$ . On a

$$\rho \chi'(\rho) = \frac{d\sigma}{dy} = \sigma'(y).$$

Donc

$$mm'[\varpi(y) + \varphi(y)] + \varpi'(y) = 0.$$

Pour que les transformées des lignes asymptotiques d'une surface satisfassent à cette équation, il faut qu'on ait

$$\frac{u}{w} = -\frac{\varpi'(y)}{\varpi(y) + \varphi(y)}$$

ou, en posant  $\frac{\varpi'(y)}{\varpi(y) + \varphi(y)} = -K$ ,

$$\frac{u}{w} = K$$
.

Supposons, pour simplifier, qu'on ait en outre v = 0 (ce qui revient à dire que les transformées sont également inclinées sur le rayon polaire). Si l'on se reporte à la définition de u, v, w, on trouve d'abord

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

d'où

$$z = X + Y$$
.

X et Y représentent deux fonctions, l'une de x, l'autre de y. On a, de plus,

$$r + i \tan i y q + z - K(t + i \tan i y q) = 0$$

sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles. 53 ou bien

$$X'' + i \tan i y Y' + X + Y - K(Y'' + i \tan i y Y') = o.$$

K étant nécessairement une fonction de y seul, cette équation n'est possible que si, en appelant C une constante, on a

$$X'' + X = C,$$
 $KY'' + (K - 1)i tang i y Y' - Y = C.$ 

Cette dernière équation s'intègre dans certains cas particuliers. Si l'on a, par exemple, K = -1, elle devient

$$Y'' + 2 i tang i y Y' + Y + C = 0$$

et l'on trouve, h et g étant deux constantes,

$$Y = h(\cos iy + iy\sin iy) + g\sin iy - C;$$

X est d'ailleurs égal à  $A\cos x + B\sin x + C$ .

Par suite,

$$z = h(\cos iy + iy\sin iy) + g\sin iy + A\cos x + B\sin x.$$

On peut toujours, suivant une remarque de M. Ossian Bonnet, faire disparaître par un simple changement d'origine les termes en  $\cos x$ ,  $\sin x$  et  $\sin iy$ . Il reste donc

$$z = h(\cos iy + iy \sin iy).$$

On tire de là

$$q = -hy\cos iy,$$
  
$$z + i\tan iy q = h\cos iy,$$

et, en passant aux coordonnées cartésiennes,

$$\xi^2 + n^2 = (z + i \log i y \cdot q)^2 = h^2 \cos^2 i y,$$

$$\zeta = \frac{q}{\cos i y} = -hy.$$

Ces équations représentent une surface de révolution dont la méridienne

est donnée par

$$\xi = h \cos i y,$$
$$\zeta = -h y$$

ou

$$\xi = \frac{h}{2} \left( e^{\frac{\xi}{h}} + e^{-\frac{\xi}{h}} \right)$$

C'est une chaînette, dont la directrice coıncide avec l'axe de révolution. La surface engendrée de cette façon a été étudiée par plusieurs géomètres, et Bour lui a donné le nom d'alysséide. C'est la seule surface de révolution qui soit minima; elle jouit, en outre, de la propriété d'être applicable sur un hélicoïde réglé.

Le demi-angle des lignes asymptotiques a pour tangente

$$\sqrt{\frac{\varpi'(y)}{\varpi(y) + \varphi(y)}} = \sqrt{-K} = 1.$$

Ces lignes sont donc réelles et se coupent à angle droit, propriété caractéristique des surfaces minima.

Puisque 
$$\frac{\varpi'(\gamma)}{\varpi(\gamma) + \varphi(\gamma)} = 1$$
, on a  $\varpi'(\gamma) = \varpi(\gamma) + \varphi(\gamma)$ 

ou bien

$$ho \, \chi'(
ho) = \chi(
ho) + \int \mathrm{F} 
ho \, d
ho, \ \chi'(
ho) = rac{\chi(
ho) + \int \mathrm{F} 
ho \, d
ho}{
ho};$$

de là résulte  $n_1 = n_2$ , et, comme t = 0, chaque point de la surface est à l'état d'équilibre ombilical. Donc :

Lorsqu'une portion d'alysséide, sollicitée par des forces extérieures tangentes aux parallèles et constantes le long de chacun d'eux, se termine à un parallèle sur les éléments duquel s'exerce une tension constante, tous les points sont à l'état d'équilibre ombilical.

La loi suivant laquelle varie la tension quand on passe d'un parallèle à

un autre dépend naturellement de F. Il ne faut pas oublier que F est la force appliquée dans le plan. Pour avoir la force correspondante de la surface, il suffit de se rappeler que ses composantes suivant les lignes asymptotiques sont égales aux composantes analogues pour le plan, multipliées par  $\frac{1}{Te^y\cos iy}$ . Comme, dans le cas actuel, l'angle des lignes asymptotiques avec les lignes coordonnées ne varie pas dans la transformation, la force appliquée à la surface est dirigée tangentiellement au parallèle et égale à  $\frac{F}{Te^y\cos iy}$ ; T est l'inverse de la racine carrée de la courbure; sa valeur pour l'alysséide est  $h\cos^2 iy$ . La force appliquée est donc

$$\frac{F}{he^{x}\cos^{3}ix}$$
.

Quand la force extérieure est constamment nulle, on a F=o. L'équation qui détermine  $\chi$  se réduit alors à

$$\rho \chi'(\rho) - \chi(\rho) = \mathbf{0},$$

d'où

$$\frac{\chi(\rho)}{\rho} = \text{const.} = a,$$

et par suite  $\chi'(\rho) = a$ . Dans ce cas, les tensions  $n_1$ ,  $n_2$  sont égales et constantes pour tous les points de la surface.

Les surfaces développables sont, d'après ce que nous savons déjà, les seules pour lesquelles on ne puisse faire disparaître la composante normale des forces extérieures.

Prenons pour coordonnées  $\mu = \text{const.}$  les génératrices rectilignes. On voit immédiatement que

$$\frac{1}{R_1}=0, \quad \frac{1}{\rho_1}=0, \quad \frac{1}{T}=0.$$

Comme  $\frac{\partial L}{\partial \mu} = -\frac{LM}{\rho_1} = 0$ , on a L = fonct.  $\lambda$ , et l'on peut, en choisissant convenablement  $\lambda$ , poser L = 1.

Les équations générales de la théorie des surfaces se réduisent alors à

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda} = -\frac{\mathbf{M}}{\rho_2},$$

$$\frac{\partial \frac{\mathbf{I}}{R_2}}{\partial \lambda} = \frac{\mathbf{I}}{R_2 \rho_2},$$

$$\frac{\partial \frac{\mathbf{I}}{\rho_2}}{\partial \lambda} = \frac{\mathbf{I}}{\rho_2^2}.$$

La dernière équation peut s'écrire

$$\frac{1}{\rho_2^2}\left(1+\frac{\partial\rho_2}{\partial\lambda}\right)=0.$$

Si  $\frac{1}{\beta_2}$  = 0, M et R<sub>2</sub> sont fonctions de  $\mu$  seulement; ils sont alors constants tout le long d'une même génératrice; il est facile de voir que cela n'est possible que pour les cylindres. Dans les autres cas, on a

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial \lambda} + 1 = 0,$$

ďoù

$$\rho_2 = a - \lambda$$
.

a est une fonction de  $\mu$  qui représente la distance du point pour lequel  $\lambda = 0$  au point de contact avec l'arête de rebroussement. On en déduit

$$\mathbf{M} = -\frac{\mathbf{I}}{b}(a - \lambda),$$

$$\mathbf{R}_2 = +\mathbf{R}\left(\frac{a - \lambda}{a}\right),$$

en désignant par b et R deux autres fonctions de  $\mu$ .

Les équations d'équilibre deviennent, par suite,

$$\begin{split} (\lambda-a)\frac{\partial n_2}{\partial \lambda}-b\frac{\partial t}{\partial \mu}+n_2-n_1&=\mathrm{F}_1(\lambda-a)\,,\\ b(\lambda-a)\frac{\partial n_1}{\partial \mu}-(\lambda-a)^2\frac{\partial t}{\partial \lambda}-2(\lambda-a)\,t&=\mathrm{F}_2(\lambda-a)^2\,,\\ n_1&=-\,\mathrm{R}\,\Phi\Big(\frac{\lambda-a}{a}\Big), \end{split}$$

ou, en posant

$$\begin{split} n &= (\lambda - a) \, n_2, \\ \theta &= - \, (\lambda - a)^2 \, t, \\ \frac{\Phi \mathbf{R}}{a} &= - \, \Psi, \\ \frac{\partial n}{\partial \lambda} &= - \, \frac{b}{(\lambda - a)^2} \, \frac{\partial \theta}{\partial \mu} + (\mathbf{F}_1 + \Psi) (\lambda - a) + \frac{2\theta \, b}{(\lambda - a)^3} \, \frac{\partial a}{\partial \mu}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} &= \left( \, \mathbf{F}_2 - b \, \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} \right) (\lambda - a)^2 + b \, \Psi (\lambda - a) \, \frac{\partial a}{\partial \mu}, \\ n_1 &= \Psi (\lambda - a). \end{split}$$

La troisième équation donne immédiatement  $n_i$ . La deuxième détermine  $\theta$  au moyen d'une équation qu'on intègre par une simple quadrature, en considérant  $\mu$  comme constant. La valeur de  $\theta$  renfermera une fonction arbitraire de  $\mu$ . On aura ensuite n au moyen de la première équation, qu'on intégrera également par quadrature et qui introduira une nouvelle fonction arbitraire de  $\mu$ .

Quand la portion de surface considérée renferme un arc de l'arête de rebroussement, les valeurs qui conviennent à cette arête s'obtiennent en faisant tendre  $\lambda - a$  vers zéro. Pour que  $n_2$  et t restent finis, il faut que n et  $\theta$  s'annulent, quel que soit  $\mu$ , pour  $\lambda = a$ . En écrivant qu'il en est ainsi, on aura deux équations qui détermineront les deux fonctions arbitraires de  $\mu$  pour tous les points compris entre les tangentes menées par les deux extrémités de l'arc de rebroussement. Ces deux conditions une fois remplies, on a, pour chaque point de l'arête,

$$\begin{split} n_2 &= \lim \frac{n}{\lambda - a} = \frac{\partial n}{\partial \lambda}, \\ t &= \lim - \frac{\theta}{(\lambda - a)^2} = - \frac{1}{2(\lambda - a)} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} = - \frac{b\Psi}{2} \frac{\partial a}{\partial \mu}. \end{split}$$

Comme  $\frac{\partial n}{\partial \lambda}$  peut s'écrire

$$(\mathbf{F}_{t} + \Psi)(\lambda - a) + b \frac{\partial t}{\partial \mu},$$

il reste seulement

$$n_2 = b \frac{\partial t}{\partial \mu}$$
.

Choisissons  $\mu$  de telle façon que  $d\mu$  soit l'angle de deux génératrices consécutives. Dans ce cas, b est égal à 1 et  $\frac{\partial a}{\partial \mu}$  représente le rayon r de première courbure de l'arête de rebroussement. On trouve ainsi le système de tensions

$$t = -\frac{\Psi r}{2} = \frac{\Phi}{2a} Rr,$$

$$n_2 = \frac{\partial t}{\partial \mu},$$

$$n_4 = 0.$$

Il est à remarquer que, lorsqu'on déforme la surface, a et b restent invariables. Par suite, lorsque  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $\Psi$ , ou, si l'on veut,  $F_1$ ,  $\dot{F}_2$  et  $\Phi R$ , conservent en chaque point des valeurs constantes, les équations d'équilibre ne se modifient pas. En particulier, lorsque  $\Phi = 0$ , on peut, sans changer les conditions d'équilibre, déformer la surface en conservant les mêmes forces tangentielles. Quel que soit  $\Phi$ , on peut, en laissant  $\Phi R$  constant, pousser la déformation jusqu'à ce que R soit infini, c'est-à-dire jusqu'à ce que la portion de surface donnée soit appliquée sur un plan. Les conditions d'équilibre des surfaces développables se trouvent ainsi identifiées avec celles du plan. Le seul cas d'exception est le cas, envisagé plus haut, où la portion de surface considérée renferme une partie de l'arête de rebroussement, parce que, dans le voisinage de cette arête, la surface n'est pas en réalité développable.

Toutes les fois que R est fini,  $n_*$  s'annule en même temps que  $\Phi$ . Par suite :

Lorsqu'une surface développable est soumise à des forces extérieures tangentielles, il ne se produit aucun effort d'arrachement sur les génératrices.

Nous avons laissé de côté le cas du cylindre. Cette surface est caractérisée par  $\frac{1}{\beta_0}$  = 0, ce qui entraîne

$$M = \text{fonct}(\mu), \quad R_2 = \text{fonct}(\mu).$$

SUR L'ÉQUILIBRE DES SURFACES FLEXIBLES ET INEXTENSIBLES.

59

On peut supposer M = 1, et les équations d'équilibre se réduisent alors à

$$\frac{\partial n_2}{\partial \lambda} - \frac{\partial t}{\partial \mu} = \mathbf{F}_4.$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial \mu} - \frac{\partial t}{\partial \lambda} = \mathbf{F}_2.$$

$$n_4 = \mathbf{R}_2 \Phi,$$

équations dont l'intégration se ramène encore à deux quadratures.

L'équation  $n_1 = R_2 \Phi$  est tout à fait analogue à l'équation  $T = -P_n \rho$ , qui correspond à l'équilibre d'une courbe funiculaire. Si l'on s'impose la condition t = 0, la deuxième équation se réduit à  $\frac{\partial n_1}{\partial \mu} = F_2$ , et elle équivaut alors à l'équation  $\frac{\partial T}{\partial s} = -P_t$  de l'équilibre funiculaire. Dans ce cas, la première équation se réduit à  $\frac{\partial n_2}{\partial \lambda} = F_1$ . Elle détermine les variations de la troisième tension  $n_2$  le long d'une génératrice du cylindre.

Le cône rentre dans le cas général des surfaces développables. Quelle que soit sa directrice, la quantité a est constante. La quantité b est aussi constante et peut être supposée égale à 1: ce qui revient à dire, en vertu de la formule  $\mathbf{M} = \frac{\lambda}{b}$ , que  $\mu$  représente la longueur de l'arc variable intercepté sur le cône, à partir d'une origine fixe, par la sphère de rayon 1 décrite de son sommet comme centre.

Considérons, comme cas particulier, la surface latérale d'un tronc de cône dont les bases sont entièrement libres et à laquelle on applique des forces quelconques. En faisant a = const., b = 1 et introduisant deux nouvelles fonctions  $f_4$ ,  $f_2$  définies par

$$\begin{split} (\lambda-a)^2\left(\mathbf{F}_2-\frac{\partial\Psi}{\partial\mu}\right)&=\frac{\partial f_2}{\partial\lambda},\\ (\mathbf{F}_4+\Psi)\left(\lambda-a\right)&-\frac{\mathbf{1}}{(\lambda-a)^2}\frac{\partial f_2}{\partial\mu}&=\frac{\partial f_1}{\partial\lambda}, \end{split}$$

on aura d'abord, en vertu des équations établies,

$$\frac{\partial \theta}{\partial \lambda} = \frac{\partial f_2}{\partial \lambda},$$

d'où  $\theta = f_2 + \varpi(u)$ ,  $\varpi$  désignant une fonction arbitraire, puis

$$\frac{\partial n}{\partial \lambda} = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{\Psi})(\lambda - a) - \frac{\mathbf{I}}{(\lambda - a)^2} \left[ \frac{\partial f_2}{\partial \mu} + \boldsymbol{\varpi}'(\mu) \right],$$

d'où

$$n = f_1 + \frac{1}{\lambda - a} \varpi'(\mu) + \chi(\mu),$$

χ étant encore une fonction arbitraire.

Les tensions  $n_1$ ,  $n_2$ , t ont, d'après cela, les valeurs

$$\begin{split} n_1 &= -\Phi \mathbf{R} \, \frac{\lambda - a}{a}, \\ n_2 &= \frac{\mathbf{I}}{\lambda - a} \left( f_1 + \chi \right) - \frac{\mathbf{I}}{(\lambda - a)^2} \, \varpi', \\ t &= -\frac{\mathbf{I}}{(\lambda - a)^2} \left( f_2 + \varpi \right). \end{split}$$

Il reste à déterminer  $\varpi(\mu)$  et  $\chi(\mu)$  de façon à remplir les conditions aux limites. Pour cela, nous supposerons qu'on ait pris pour bases du cône ses deux courbes d'intersection avec deux sphères de rayons a+c, a-c, décrites de son sommet comme centre. Ces deux courbes correspondent aux valeurs  $\pm c$  de  $\lambda$ .

D'après cela,  $n_2$  et t doivent s'annuler, quel que soit  $\mu$ , lorsqu'on fait  $\lambda = \pm c$ . Afin de pousser les calculs jusqu'au bout, nous allons supposer que  $\mathbf{F}_1 + \Psi$  et  $\mathbf{F}_2 = \frac{\partial \Psi}{\partial \mu}$  sont indépendants de  $\lambda$ . En posant

$$F_1 + \Psi = 2\mu_1,$$
  
$$F_2 - \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} = 3\mu_2,$$

nous aurons

$$f_{i} = (\lambda - a)^{2} (\mu_{i} - \frac{1}{2} \mu'_{2}),$$

$$f_{2} = (\lambda - a)^{3} \mu_{2}.$$

Il est inutile d'ajouter de nouvelles fonctions arbitraires, qui feraient

sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles. double emploi avec  $\varpi$  et  $\chi$ . Les valeurs de  $n_2$  et t sont, par suite,

$$\begin{split} n_2 &= \frac{1}{(\lambda - a)^2} \left[ \varpi' + \chi(\lambda - a) + (\mu_1 - \frac{1}{2}\mu'_2)(\lambda - a)^3 \right], \\ t &= -\frac{1}{(\lambda - a)^2} \left[ \varpi + (\lambda - a)^3 \mu_2 \right] \end{split}$$

et l'on en conclut immédiatement que, si n et t sont nuls, quel que soit  $\mu$ , pour  $\lambda = +c$  ou  $\lambda = -c$ , les quantités  $\varpi$ ,  $\chi$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  sont toutes identiquement nulles.

L'équilibre n'est donc possible que si l'on a  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_2 = 0$  ou bien

$$\mathbf{F}_{1} + \Psi = \mathbf{o}, \quad \mathbf{F}_{2} - \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} = \mathbf{o}.$$

Pour les points situés sur la courbe moyenne  $\lambda = 0$ , ces équations peuvent s'écrire

$$a\mathbf{F}_1 + \Phi\mathbf{R} = \mathbf{o}, \quad a\mathbf{F}_2 - \frac{\partial \Phi\mathbf{R}}{\partial \mu} = \mathbf{o}.$$

Si les forces appliquées au tronc de cône ne vérifient pas ces deux conditions, la surface se déforme nécessairement. En se déformant, elle conserve les mêmes caractères géométriques, et les mêmes équations d'équilibre continuent à lui être applicables. Si donc on suppose que  $F_4$ ,  $F_2$ ,  $\Phi$  ne varient pas durant la déformation, la condition  $aF_4 + \Phi R = 0$  déterminera R, et par suite la figure d'équilibre du cône. R étant ainsi déterminé, si la seconde condition  $aF_2 - \frac{\partial \Phi R}{\partial \mu} = 0$  n'est pas remplie, l'équilibre est irréalisable.

L'équation  $F_2 = \frac{\partial \Phi R}{a \partial \mu} = 0$  est exactement celle qu'on obtiendrait en appliquant à la courbe moyenne, considérée comme une courbe funiculaire, la force normale  $\Phi$  et la force tangentielle  $F_2$ , et cherchant la condition pour qu'elle ne se déforme pas.

Quand la figure d'équilibre est un cône de révolution, l'équation  $a\mathbf{F}_1 + \Phi \mathbf{R} = \mathbf{0}$  exprime que la somme des projections sur l'axe du cône des forces extérieures appliquées en un point quelconque est égale à zéro. En effet, si l'on appelle  $\alpha$  le demi-angle au sommet du cône, le rayon de

62

courbure de la section normale à l'arête faite à la distance a du sommet est  $R = a \tan \alpha$ , et, par suite, l'équation dont il s'agit peut s'écrire  $F_a \cos \alpha + \Phi \sin \alpha = 0$ .

# Surfaces gauches.

En prenant pour lignes de coordonnées les génératrices rectilignes ( $\mu = \text{const.}$ ) et leurs trajectoires orthogonales ( $\lambda = \text{const.}$ ), on a

$$\frac{1}{R_1} = 0, \quad \frac{1}{\rho_1} = 0,$$

d'où l'on déduit d'abord  $\frac{\partial L}{\partial \mu}$  = 0, ce qui permet, comme précédemment, de faire L = 1. Les équations générales de la théorie des surfaces deviennent alors

$$\frac{\frac{1}{\rho_2} = -\frac{\frac{\partial M}{\partial \lambda}}{M},}{\frac{\partial \frac{1}{R_2}}{\partial \lambda} - \frac{1}{M}\frac{\partial \frac{1}{T}}{\partial \mu} - \frac{1}{\rho_2}\frac{1}{R_2} = 0,}$$
$$\frac{\frac{\partial \frac{1}{T}}{\partial \lambda} + \frac{2}{\rho_2}\frac{1}{T} = 0,}{\frac{1}{T^2} + \frac{\partial \frac{1}{\rho_2}}{\partial \lambda} - \frac{1}{\rho^2} = 0.}$$

On tire des deux dernières

$$rac{\partial}{\partial\lambda}\left(rac{i}{T}+rac{1}{
ho_2}
ight)-\left(rac{i}{T}+rac{1}{
ho_2}
ight)^2=0, \ rac{\partial}{\partial\lambda}\left(rac{i}{T}-rac{1}{
ho_2}
ight)+\left(rac{i}{T}-rac{1}{
ho_2}
ight)^2=0,$$

et par suite, en appelant  $\mu_1$  et  $\mu_2$  deux fonctions de  $\mu_2$ 

$$\frac{\frac{1}{i} + \frac{1}{\rho_z}}{\frac{1}{T} + \frac{1}{\rho_z}} = \mu_z - \lambda,$$

$$\frac{\frac{1}{i} - \frac{1}{\rho_z}}{T - \frac{1}{\rho_z}} = -\mu_z + \lambda,$$

SUR L'ÉQUILIBRE DES SURFACES FLEXIBLES ET INEXTENSIBLES.

ou bien

$$\frac{2i}{T} = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} - \frac{1}{\mu_2 - \lambda} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{(\mu_1 - \lambda)(\mu_2 - \lambda)},$$

$$\frac{2}{\rho_2} = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} + \frac{1}{\mu_2 - \lambda} = \frac{\mu_1 + \mu_2 - 2\lambda}{(\mu_1 - \lambda)(\mu_2 - \lambda)}.$$

Les deux premières équations générales donnent ensuite, en appelant  $\mu_3$  une troisième fonction de  $\mu_3$ ,

$$\mathbf{M^2} \! = \! \frac{\mathbf{I}}{\mu_{\mathbf{3}}} \left( \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{1}} - \boldsymbol{\lambda} \right) \left( \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{2}} - \boldsymbol{\lambda} \right)$$

et

$$\frac{2 \vartheta \frac{1}{R_1}}{\vartheta \lambda} - \frac{1}{R_2} \left( \frac{1}{\mu_1 - \lambda} + \frac{1}{\mu_2 - \lambda} \right) \\
- i \sqrt{\frac{\mu_3}{(\mu_1 - \lambda)(\mu_2 - \lambda)}} \left[ \frac{\mu'_1}{(\mu_1 - \lambda)^2} - \frac{\mu'_2}{(\mu_2 - \lambda)^2} \right] = 0$$

ou

$$\begin{split} 2\sqrt{(\mu_{1}-\lambda)(\mu_{2}-\lambda)}\frac{\partial\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R}_{2}}}{\partial\lambda} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R}_{2}}\frac{2\lambda-\mu_{1}-\mu_{2}}{\sqrt{(\mu_{1}-\lambda)(\mu_{2}-\lambda)}}\\ -i\sqrt{\mu_{3}}\Big[\frac{\mu'_{1}}{(\mu_{1}-\lambda)^{2}} - \frac{\mu'_{2}}{(\mu_{2}-\lambda)^{2}}\Big] = \mathbf{0}. \end{split}$$

En intégrant et appelant  $\mu_{*}$  une quatrième fonction de  $\mu$ , il vient

$$2\sqrt{(\mu_{\scriptscriptstyle 4}-\lambda)(\mu_{\scriptscriptstyle 2}-\lambda)}\,\frac{1}{\mathrm{R}_{\scriptscriptstyle 2}}+i\sqrt{\mu_{\scriptscriptstyle 3}}\Big(\frac{\mu'_{\scriptscriptstyle 1}}{\mu_{\scriptscriptstyle 1}-\lambda}-\frac{\mu'_{\scriptscriptstyle 2}}{\mu_{\scriptscriptstyle 2}-\lambda}\Big)=\mu_{\scriptscriptstyle 4}.$$

M doit être réel pour toutes les valeurs réelles de  $\lambda$ : cela n'est possible que si les racines  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  du trinôme  $(\mu_1 - \lambda)(\mu_2 - \lambda)$  sont des quantités imaginaires conjuguées et si  $\mu_3$  est positif. Nous poserons donc

$$\mu_1 = \alpha - \beta i,$$

$$\mu_2 = \alpha + \beta i,$$

et nous ferons, ce qui est permis,  $\mu_3 = 1$ . En remplaçant de plus  $\mu_4$  par

 $2\gamma$ , nous trouvons

(19) 
$$\frac{\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{T}} = \frac{\beta}{(\lambda - \alpha)^2 + \beta^2},}{\frac{\mathbf{I}}{\rho_2} = -\frac{\lambda - \alpha}{(\lambda - \alpha')^2 + \beta^2},}$$

$$\frac{\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{R}_2} = \frac{\gamma}{\sqrt{(\lambda - \alpha)^2 + \beta^2}} + \frac{(\lambda - \alpha)\beta' + \alpha'\beta}{[(\lambda - \alpha)^2 + \beta^2]^2},}$$

$$\mathbf{M} = \sqrt{(\lambda - \alpha)^2 + \beta^2}.$$

Des considérations géométriques fort simples, indiquées par Bour dans sa théorie de la déformation des surfaces (Journal de l'École Polytechnique, XXXIX<sup>e</sup> Cahier, p. 33), permettent d'interpréter la signification des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ . Pour une génératrice déterminée,  $\alpha$  est la distance du point  $\lambda = 0$  au point central,  $\beta$  est le rapport de la plus courte distance entre deux génératrices infiniment voisines à l'angle de ces génératrices. Nous ajouterons que  $\gamma$  est susceptible d'une interprétation non moins simple. On peut écrire, en effet,

$$\frac{Md\mu}{R_a} = \gamma d\mu + d \arctan \frac{\beta}{\lambda - \alpha}$$

les différentielles étant prises en laissant  $\lambda$  constant. Or le premier membre exprime l'angle de contingence de la section faite dans la surface par le plan perpendiculaire à la génératrice au point considéré. Cet angle de contingence se compose évidenment :

1° De l'angle de deux plans centraux infiniment voisins;

2° De la variation de l'angle formé par le plan tangent à la surface avec le plan central correspondant. Cet angle a pour tangente  $\frac{\beta d\mu}{(\lambda - \alpha) d\mu} = \frac{\beta}{\lambda - \alpha}$ .

Cela posé, il suffit de considérer le second membre de l'égalité ci-dessus pour voir que son dernier terme représente précisément la seconde partie de l'angle de contingence et que, par suite, son premier terme représente la première.  $\gamma d\mu$  est donc l'angle de deux plans centraux infiniment voisins, et l'on peut dire que :

Le paramètre  $\gamma$  est le quotient de l'angle de deux plans centraux infiniment voisins par l'angle des génératrices correspondantes.

Si l'on construit une indicatrice sphérique de la surface gauche en menant par un point fixe des parallèles aux génératrices et prenant leur intersection avec la sphère de rayon 1 qui a le point fixe pour centre, on peut encore dire que :

Le paramètre  $\gamma$  est la courbure géodésique de l'indicatrice sphérique.

Au moyen des expressions (19), les équations générales d'équilibre deviennent, dans le cas des surfaces gauches,

$$\begin{split} \frac{\partial n_2}{\partial \lambda} &- \frac{1}{\sqrt{(\lambda - \alpha)^2 + \beta^2}} \frac{\partial t}{\partial \mu} + \frac{\lambda - \alpha}{(\lambda - \alpha)^2 + \beta^2} (n_2 - n_1) = \mathbf{F}_4, \\ &- \frac{\partial t}{\partial \lambda} + \frac{1}{\sqrt{(\lambda - \alpha)^2 + \beta^2}} \frac{\partial n_1}{\partial \mu} - \frac{\lambda - \alpha}{(\lambda - \alpha)^2 + \beta^2} 2t = \mathbf{F}_2, \\ n_1 \left[ \gamma + \frac{(\lambda - \alpha)\beta' + \alpha'\beta}{(\lambda - \alpha)^2 + \beta^2} \right] - \frac{2\beta t}{\sqrt{(\lambda - \alpha)^2 + \beta^2}} = \Phi \sqrt{(\lambda - \alpha)^2 + \beta^2}. \end{split}$$

La dernière donne  $n_i$  en fonction de t, et, en portant cette valeur dans la précédente, on obtient t au moyen d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre; t renferme donc dans son expression une fonction arbitraire d'une certaine quantité, qui est évidemment le paramètre des lignes asymptotiques non rectilignes : nous appellerons ces lignes lignes asymptotiques du second système. La première équation donne enfin  $n_2$  par quadrature, avec une fonction arbitraire de  $\mu$ , c'est-à-dire du paramètre des génératrices rectilignes. Pour retomber sur le cas des surfaces développables, il suffit de faire  $\beta = \mathbf{0}$ .

Lorsque les forces extérieures sont nulles, l'équation en t est de la forme

$$A\frac{\partial t}{\partial \lambda} + B\frac{\partial t}{\partial \mu} = Ct,$$

A, B, C dépendant uniquement de  $\lambda$  et de  $\mu$ . Si l'on représente par  $f(\lambda, \mu) = u$  l'intégrale de l'équation

$$\frac{d\lambda}{\Lambda} == \frac{d\mu}{B},$$

ou, en d'autres termes, si l'on appelle u le paramètre des asymptotiques du L.

second système, si de plus  $t = \theta(\lambda, \mu)$  est une solution particulière, différente de zéro, de l'équation en t, on voit sans peine que la solution générale est de la forme

$$t = \theta . \varpi(u),$$

expression dans laquelle & désigne une fonction arbitraire.

De là il résulte que, si t est assujetti à s'annuler pour tous les points d'un segment de génératrice, les valeurs correspondantes de  $\varpi(u)$  sont nulles. Comme  $\varpi(u)$  est constant le long d'une asymptotique quelconque du second système, il s'ensuit que :

Lorsque t est nul pour tous les points d'un segment de génératrice, si l'on mène par les deux extrémités du segment les lignes asymptotiques non rectilignes, t reste nul pour toute la portion de surface comprise entre ces deux lignes asymptotiques.

La relation  $\frac{n_1}{R_2} - \frac{2t}{T} = 0$  montre que, si  $\frac{1}{R_2}$  n'est pas nul, comme c'est le cas général, le même théorème peut être énoncé pour la tension  $n_1$ .

Géométriquement, on peut conclure de là une propriété des surfaces réglées dont je n'ai rencontré nulle part l'énoncé. Il suffit pour cela de se rappeler qu'en l'absence de toute force extérieure les valeurs de  $n_1$ ,  $n_2$ , t sont proportionnelles aux variations infiniment petites que peuvent subir  $\frac{1}{R_1}$ ,  $\frac{1}{R_2}$ ,  $\frac{1}{T}$ . Dire que  $n_1$  est nul pour une portion de surface réglée revient donc à dire que  $\frac{1}{R_1}$  ne varie pas, et par conséquent reste nul. Donc :

Lorsque, dans la déformation infiniment petite d'une surface réglée, une génératrice quelconque reste rectiligne sur une certaine longueur, toutes les génératrices restent également rectilignes pour la portion terminée aux deux mêmes lignes asymptotiques du second système.

Le théorème s'étend à une déformation finie quelconque; mais alors les deux asymptotiques qui limitent la bande considérée se modifient progressivement dans la déformation, et il faudrait une discussion spéciale pour trouver, dans chaque cas, les portions de génératrice qui demeurent rec-

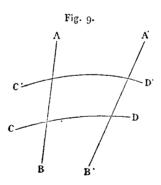
tilignes. Cette difficulté disparaît quand une génératrice reste rectiligne sur toute sa longueur, et l'on peut énoncer la propriété suivante :

Quand une génératrice de surface réglée reste rectiligne pour une certaine déformation de la surface, toutes les génératrices restent également rectilignes.

Ce théorème peut être regardé comme la réciproque d'un théorème établi par M. Ossian Bonnet (Journal de l'École Polytechnique, XLII Cahier) et que nous énoncerons ainsi :

Quand une surface réglée reste réglée après sa déformation, une génératrice quelconque reste rectiligne.

Le théorème de M. Ossian Bonnet peut d'ailleurs se déduire, sans aucun calcul, de celui que nous avons énoncé. Considérons pour cela une surface réglée dont les génératrices rectilignes soient AB, A'B', ... (fig. 9).



Admettons que, par suite d'une certaine déformation, un système de lignes géodésiques CD, C'D' ... puisse devenir rectiligne.

Imaginons une troisième déformation dans laquelle, laissant fixe la génératrice AB, nous fassions croître les rayons de courbure normaux de la ligne CD jusqu'à ce qu'ils deviennent infinis. CD sera alors une ligne droite, et, comme la surface  $\Sigma$  ainsi obtenue peut se ramener par une déformation convenable à celle qui admet CD, C'D', ... comme génératrices rectilignes, notre théorème montre que, sur la surface  $\Sigma$ , les lignes CD, C'D', ... sont

68 L. LECORNU.

toutes rectilignes. Mais AB, et par conséquent toutes les lignes analogues, restent également droites. Donc :

Si les deux systèmes AB, A'B', ... et CD, C'D', ... ne coïncident pas, la surface  $\Sigma$  possède un double système de génératrices rectilignes : c'est donc une surface de second degré.

Les surfaces applicables sur celles du second degré sont donc les seules qui puissent rester réglées sans que les génératrices primitives restent toutes rectilignes. C'est la seule exception au théorème de M. Ossian Bonnet, exception signalée d'ailleurs par ce savant.

Quand la surface est à plan directeur,  $\gamma$  est nul, et, si l'on suppose de plus qu'on ait réduit le système des forces à un système tangentiel, la troisième équation d'équilibre prend la forme

$$n_1 \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \operatorname{arc tang} \frac{\beta}{\lambda - \alpha} \right) = \frac{2\beta t}{\sqrt{(\lambda - \alpha)^2 + \beta^2}}.$$

Considérons, en particulier, la surface de vis à filet carré. Cette surface est caractérisée par la constance de  $\alpha$  et de  $\beta$ . On peut faire en sorte que  $\alpha$  soit nul. Dans ces conditions, la dernière équation donne immédiatement t = 0. Les deux autres se réduisent à

$$\begin{split} \frac{\partial n_2}{\partial \lambda} + \frac{\lambda}{\lambda^2 + \beta^2} \left( n_2 - n_1 \right) &= \mathbf{F}_1, \\ \frac{\partial n_1}{\partial u} &= \mathbf{F}_2 \sqrt{\lambda^2 + \beta^2}. \end{split}$$

En posant  $F_2 = \frac{\partial f_2}{\partial \mu}$ , d'où  $f_2 = \int F_2 d\mu$ , et supposant cette intégrale prise depuis une limite inférieure déterminée, par exemple depuis  $\mu = 0$ , on a

$$n_1 = f_2 \sqrt{\lambda^2 + \beta^2} + \varpi(\lambda);$$

puis

$$\frac{\partial n_2}{\partial \lambda} + n_2 \frac{\lambda}{\lambda^2 + \beta^2} = \mathbf{F}_1 + \frac{n_1 \lambda}{\lambda^2 + \beta^2},$$

SUR L'ÉQUILIBRE DES SURFACES FLEXIBLES ET INEXTENSIBLES.

ou, en multipliant par  $\sqrt{\lambda^2 + \beta^2}$ ,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left( n_{\scriptscriptstyle 2} \sqrt{\lambda^2 + \beta^2} \right) = \mathbf{F}_{\scriptscriptstyle 1} \sqrt{\lambda^2 + \beta^2} + \varpi(\lambda) \, \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \beta^2}} + f_{\scriptscriptstyle 2} \lambda.$$

Posons encore

$$F_{1}\sqrt{\lambda^{2}+\beta^{2}}+\varpi(\lambda)\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^{2}+\beta^{2}}}+\int_{2}\lambda=\frac{\partial f_{1}}{\partial\lambda};$$

il vient

$$n_2\sqrt{\lambda^2+\beta^2}=f_1+\chi(u).$$

L'intégrale qui donne  $f_i$  est supposée prise depuis une valeur déterminée de  $\lambda$ , par exemple depuis  $\lambda = 0$ .

Les deux fonctions arbitraires renferment donc l'une  $\lambda$ , l'autre  $\mu$ , ce qu'on pouvait prévoir en remarquant que les lignes asymptotiques de la surface de vis à filet carré se composent des génératrices rectilignes et de leurs trajectoires orthogonales. La valeur de  $n_1$  peut s'écrire

$$n_1 = \varpi(\lambda) - \int \mathbf{F}_2 \mathbf{M} \, d\mu.$$

Elle exprime que, lorsqu'on se déplace sur l'une des asymptotiques du second système ( $\lambda = \text{const.}$ ), la variation de la force d'arrachement exercée entre deux génératrices consécutives est égale à l'intégrale des projections, sur les tangentes à l'asymptotique, des forces extérieures correspondantes.

Si la surface est limitée à une courbe asymptotique et que celle-ci forme bord libre, c'est-à-dire qu'elle ne soit soumise à aucune force d'arrachement ou de glissement, on doit avoir, quel que soit  $\mu$ ,  $n_2 = 0$  pour  $\lambda = a$  (a étant le paramètre de la courbe considérée). Cette condition détermine  $\chi(\mu)$  lorsque  $\varpi$  est connu, car elle peut s'écrire

$$\chi(\mu) = -f_1(\lambda, \mu)_{(\lambda=a)}.$$

Pour déterminer  $\varpi(\lambda)$ , il suffit de connaître la loi des variations de  $n_2$  le long d'une génératrice. Supposons, par exemple, que  $\varpi(\lambda)$  soit de la forme  $A\lambda$ , A étant une constante, et admettons de plus que les forces extérieures  $F_1$  et  $F_2$  soient nulles. On aura, pour une génératrice quel-

conque,  $n_1 = \varpi(\lambda) = A\lambda$ ; puis l'équation

$$\frac{\partial f_1}{\partial \lambda} = \varpi(\lambda) \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \beta^2}} = A \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2 + \beta^2}}$$

donne

$$f_{i} = A \left[\lambda \sqrt{\lambda^{2} + \beta^{2}} - \beta^{2} \log(\lambda + \sqrt{\lambda^{2} + \beta^{2}})\right],$$

et  $\chi(\mu)$  se réduit à la constante

$$- A \left[ a \sqrt{a^2 + \beta^2} - \beta^2 \log \left( a + \sqrt{a^2 + \beta^2} \right) \right].$$

Pour les surfaces applicables sur la surface de vis à filet carré, et dans les limites où les génératrices restent rectilignes,  $\alpha$  et  $\beta$  sont les mêmes que pour la surface de vis; mais  $\gamma$  est une fonction quelconque de  $\mu$ .

Les équations générales d'équilibre sont donc, dans ce cas,

$$\begin{split} &\frac{\partial n_2}{\partial \lambda} - \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\lambda^2 + \beta^2}} \frac{\partial t}{\partial \mu} + \frac{\lambda}{\lambda^2 + \beta^2} (n_2 - n_1) = \mathbf{F_1}, \\ &- \frac{\partial t}{\partial \lambda} + \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\lambda^2 + \beta^2}} \frac{\partial n_1}{\partial \mu} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + \beta^2} \ 2 \ t = \mathbf{F_2}, \\ &n_1 \gamma - \frac{2 \beta t}{\sqrt{\lambda^2 + \beta^2}} = \Phi \sqrt{\lambda^2 + \beta^2}. \end{split}$$

Cherchons d'abord les intégrales de ces équations privées de second membre. En remplaçant, pour abréger,  $\sqrt{\lambda^2 + \beta^2}$  par M, nous aurons :

$$n_{i} = \frac{2\beta}{M\gamma}t,$$

$$\frac{\partial n_{i}}{\partial \mu} = \frac{2\beta}{M} \left( \frac{1}{\gamma} \frac{\partial t}{\partial \mu} - \frac{t}{\gamma^{2}} \frac{d\gamma}{d\mu} \right).$$

et par suite

$$-\frac{\partial t}{\partial \lambda} + \frac{2\beta}{\gamma M^2} \frac{\partial t}{\partial \mu} - \frac{2}{M^2} \left(\lambda + \frac{\beta}{\gamma^2} \frac{d\gamma}{d\mu}\right) t = 0.$$

Pour intégrer cette équation, formons les équations simultanées

$$\frac{d\lambda}{-1} = \frac{d\mu}{\frac{2\beta}{\gamma M^2}} = \frac{dt}{\frac{2t}{M^2} \left(\lambda + \frac{\beta}{\gamma^2} \frac{d\gamma}{d\mu}\right)},$$

d'où

$$\gamma d\mu + \frac{2\beta}{M^2} d\lambda = 0,$$

$$\frac{dt}{t} + \frac{2d\lambda}{M^2} \left(\lambda + \frac{\beta}{\gamma^2} \frac{d\gamma}{d\mu}\right) = 0$$

ou bien

$$\gamma d\mu + \frac{2\beta}{M^2} d\lambda = 0,$$

$$\frac{dt}{t} + \frac{2\lambda d\lambda}{M^2} - \frac{d\gamma}{\gamma} = 0,$$

d'où

$$\int \gamma \, d\mu + 2 \arctan \frac{\lambda}{\beta} = \text{const.},$$

$$\frac{M^2 t}{\gamma} = \text{const.}$$

L'intégrale générale est donc, en appelant @ une fonction arbitraire,

$$t = \frac{\gamma}{M^2} \varpi \Big( \int \gamma \, d\mu + 2 \arctan \frac{\beta}{\lambda} \Big);$$

par suite

$$n_4 = \frac{2\beta}{M^3} \varpi.$$

Enfin,  $n_2$  est donné par la première équation d'équilibre, de la quelle on tire

$$M \frac{\partial n_2}{\partial \lambda} + \frac{\lambda n_2}{M} = \frac{1}{M^4} (2 \beta \varpi + \gamma' \varpi M^2 + \gamma^2 \varpi' M^2)$$

ou bien

$$n_2 = rac{1}{\mathrm{M}} \int rac{d\lambda}{\mathrm{M}^4} (2eta arphi + \gamma' arphi \mathrm{M}^2 + \gamma^2 arphi' \mathrm{M}^2) + \mathrm{fonct}\, \mu.$$

Les valeurs de  $n_i$ ,  $n_2$ , t présentent ceci de remarquable, qu'elles sont obtenues sous forme explicite sans faire aucune hypothèse sur la fonction  $\gamma$ .

On ne peut, en général, parvenir à un résultat semblable quand les seconds membres sont quelconques. Imposons-nous la condition que les équations complètes admettent un système particulier de solutions pour lequel  $n_i$  soit nul. Cette condition sera obtenue en écrivant que les deux

72

dernières équations sont compatibles, c'est-à-dire en éliminant t entre

$$\begin{split} \frac{\partial t}{\partial \lambda} + \frac{2\lambda}{\lambda^2 + \beta^2} t &= -\mathbf{F}_2, \\ 2\beta t &= -\Phi \mathbf{M}^2. \end{split}$$

On trouve ainsi

$$M^{2} \, \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \to 4 \, \lambda \Phi == 2 \, F_{2} \, \beta. \label{eq:mass_eq}$$

On aura, dans ce cas,

$$t = -\frac{\Phi M^2}{2\beta t}, \quad n_i = 0$$

et

$$\frac{\partial n_2}{\partial \lambda} + \frac{\lambda n_2}{M^2} = F_4 - \frac{1}{2M} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\Phi M^2}{\beta}\right),$$

d'où

$$n_{2} = \frac{1}{\mathcal{M}} \int \left[ \mathcal{M} \mathcal{F}_{4} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{\Phi \mathcal{M}^{2}}{\beta} \right) \right] d\lambda.$$

Donc, lorsque la condition écrite ci-dessus est remplie, l'équilibre des surfaces applicables sur la surface de vis à filet carré est exprimé par

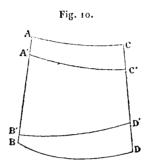
$$\begin{split} n_{*} &= \frac{2\beta}{\mathrm{M}^{3}}\varpi, \\ t &= -\frac{\Phi\mathrm{M}^{2}}{2\beta} + \frac{\gamma}{\mathrm{M}^{2}}\varpi, \\ n_{2} &= \frac{1}{\mathrm{M}}\int_{0}^{\lambda} \left[\mathrm{MF}_{*} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{\Phi\mathrm{M}^{2}}{\beta}\right)\right] d\lambda \\ &+ \frac{1}{\mathrm{M}}\int_{0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\mathrm{M}^{2}} (2\beta\varpi + \gamma'\varpi\mathrm{M}^{2} + \gamma^{2}\varpi'\mathrm{M}^{2}) + \chi, \end{split}$$

expressions dans lesquelles  $\chi$  et  $\varpi$  sont deux fonctions arbitraires, l'une de  $\mu$ , l'autre de  $\int \gamma d\mu + 2 \arctan \frac{\lambda}{\beta}$ .

Cela posé, imaginons qu'une portion de surface de vis à filet carré soit limitée au quadrilatère formé par deux génératrices AB, CD et deux trajectoires orthogonales AC, BD (fig. 10), que la ligne AB soit maintenue fixe et que les trois autres côtés restent libres, enfin que cette portion de sur-

SUR L'ÉQUILIBRE DES SURFACES FLEXIBLES ET INEXTENSIBLES. face soit sollicitée par des forces satisfaisant à la condition énoncée plus hant.

D'après un théorème établi précédemment, la génératrice CD reste droite, dans chaque déformation, sur une certaine partie C'D' de sa longueur. Lorsque la surface sera à l'état d'équilibre, on aura, pour tous les points de CD,  $n_1 = 0$ . Pour tous les points de la partie commune à CD et C'D', comme les équations précédentes sont applicables, il en résulte ∞ = o. En menant les asymptotiques du second système qui passent par



les extrémités de cette partie commune, on délimitera une région dans toute l'étendue de laquelle æ est nul. Pour tous les points de la partie commune à CD et C'D', on a en outre t = 0. Comme  $\varpi$  est déjà égal à zéro, la valeur de t montre que  $\Phi$  doit être nul ou  $\gamma$  infini.

Si les asymptotiques A'C', B'D' menées par C' et D' sont à l'intérieur de ABCD, nos équations cessent d'être applicables pour les portions ACA'C', BDB'D', et CC', DD' peuvent en outre se désormer d'une façon quelconque. Si les lignes A'C', B'D' sont entièrement extérieures à ABCD, nos équations sont applicables pour toute l'étendue de ABCD, et la génératrice CD reste tout entière rectiligne. Dans ce cas, que nous allons maintenant envisager exclusivement, @ est nul pour tous les points de la portion de surface considérée, et par suite, pour toute la longueur CD, on a  $\Phi = \mathbf{o}$  ou  $\gamma = \infty$ , ce qui revient à dire que l'équilibre n'est possible, dans les conditions où nous nous supposons placés, que si le long de CD la surface est soumise à des forces exclusivement tangentielles, ou bien si l'indicatrice sphérique de la surface présente un rebroussement au point correspondant.

Lorsque  $\Phi$  est nul pour tous les points de CD, la composante  $F_2$  de la L.

10

force extérieure est également nulle, en vertu de la relation

$$\mathbf{F}_{2} = \frac{\mathbf{M}^{2}}{2\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + 2 \frac{\lambda}{\beta} \Phi.$$

La génératrice ne peut donc, dans ce cas, être sollicitée que par des forces dirigées suivant sa longueur.

Le long des courbes AC, BD, on doit avoir  $n_2 = 0$  et t = 0. Comme  $\varpi$  est supposé nul, la condition t = 0 entraîne encore  $\Phi = 0$  ou  $\gamma = \infty$ . Mais il est impossible que  $\gamma$  soit infini pour tous les points d'un arc de courbe fini autre qu'un segment de génératrice. On doit donc avoir  $\Phi = 0$ .  $n_2$  est donné par la formule

$$n_2 = \frac{1}{M} \int_0^{\lambda} \left[ MF_4 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{\Phi M^2}{\beta} \right) \right] d\lambda + \chi.$$

Cette tension doit s'annuler, quel que soit  $\mu$ , pour deux valeurs constantes  $\lambda$ , et  $\lambda_2$  de  $\lambda$ , et, comme  $\chi$  est fonction de  $\mu$  seul, on est ainsi conduit à la condition

$$\frac{1}{M_1} \int_0^{\lambda_1} \left[ MF_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{\Phi M^2}{\beta} \right) \right] d\lambda = \frac{1}{M_2} \int_0^{\lambda_2} \left[ MF_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{\Phi M^2}{\beta} \right) \right] d\lambda,$$

 $M_1$  et  $M_2$  étant les valeurs de M pour  $\lambda = \lambda_1$  et  $\lambda = \lambda_2$ .

Cette relation doit avoir lieu pour toutes les valeurs de  $\mu$  correspondant aux génératrices comprises entre AB et CD.

Si  $F_4$  et  $\Phi$  ne dépendent pas de  $\gamma$ , cette relation ne pourra, en général, être remplie, et par conséquent l'équilibre sera impossible dans les conditions que nous avons supposées. Mais, si  $F_4$  et  $\Phi$  dépendent de  $\gamma$ , nous avons affaire à une équation en  $\gamma$  qui déterminera cette inconnue, et par conséquent la forme d'équilibre.

Considérons, par exemple, un système de forces normales. Pour que F<sub>2</sub> soit nul, on doit avoir

$$M^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + 4\lambda \Phi = 0,$$

ce qu'on peut écrire

$$(\lambda^2 + \beta^2)^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + 4\lambda(\lambda^2 + \beta^2) \Phi = 0$$

ou

$$\Phi(\lambda^2 + \beta^2)^2 = \text{fonct } \mu.$$

Supposons que la fonction de  $\mu$  placée dans le second membre soit  $\int \gamma d\mu$ , les limites étant prises de façon que cette intégrale s'annule pour la génératrice CD. La condition imposée à  $\gamma$  sera, en faisant  $F_1 = 0$ ,

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{M_1}} \int_0^{\lambda_1} \frac{\mathbf{M^2}}{\beta} \, \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \, d\lambda = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{M_2}} \int_0^{\lambda_2} \frac{\mathbf{M^2}}{\beta} \, \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \, d\lambda$$

ou

$$\frac{\gamma}{M_1} \int_0^{\lambda_1} \frac{d\lambda}{M^2} = \frac{\gamma}{M_2} \int_0^{\lambda_1} \frac{d\lambda}{M^2},$$

$$\frac{\gamma}{M_1}$$
 arc tang  $\frac{\lambda_1}{\beta} = \frac{\gamma}{M_2}$  arc tang  $\frac{\lambda_2}{\beta}$ ,

et comme, en général, les coefficients de  $\gamma$  dans les deux membres sont inégaux, il en résulte  $\gamma = 0$ , c'est-à-dire que la surface d'équilibre est la surface de vis à filet carré.

Les surfaces du second degré peuvent être traitées comme des surfaces réglées, à génératrices réelles ou imaginaires, et par conséquent on est certain a priori que, pour ces surfaces, la séparation des inconnues pourra toujours être effectuée. Le problème se ramène même à l'intégration de deux équations aux dérivées totales, linéaires et du premier ordre : car, si l'on rapporte la surface à ses génératrices on trouve immédiatement, en appliquant les formules (18), dans lesquelles on doit faire  $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} = 0$ ,

$$\sin \varphi \frac{\partial n}{\partial \sigma_1} - n \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} + 2 \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_1} \right) = f_1 \sin^3 \varphi,$$

$$\sin \varphi \frac{\partial n_1}{\partial \sigma} - n_1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_1} + 2 \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \right) = f \sin^3 \varphi.$$

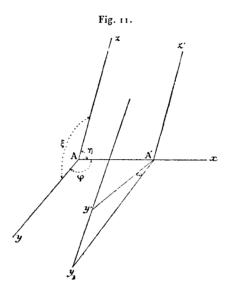
Nous allons étudier spécialement le cas du paraboloïde hyperbolique, pour lequel les calculs et les formules deviennent d'une grande simplicité.

Lorsqu'on rapporte un paraboloide hyperbolique à trois axes obliques formés par les génératrices rectilignes Ax, Ay (fig. 11), qui se croisent en

un point A de la surface et par la parallèle à l'axe, Az, l'équation du paraboloïde prend la forme

$$xy = kz$$
.

Nous donnerons à k le nom de paramètre de la surface au point A.



Soient  $\xi$ , n les angles yAz, xAz et  $\varphi$  l'angle yAx. Prenons sur Ax une longueur infiniment petite  $AA' = \varepsilon$ ; la génératrice du système Ay passant en A' a pour équations

$$x = \varepsilon,$$

$$z = \frac{\varepsilon}{k} \gamma.$$

Elle est située dans le plan  $z'A'y_1$ , parallèle à zAy. Soient A'y' cette génératrice et  $\omega$  l'angle infiniment petit  $y'A'y_1$ . Le triangle  $y'A'y_1$ , dont le côté  $y'y_1$  est parallèle à Az, donne

$$\frac{\sin \omega}{\sin(\xi-\omega)} = \frac{y'y_1}{A'y_1} = \frac{\varepsilon}{k},$$

d'où, comme ω est infiniment petit,

$$\omega = \frac{\varepsilon}{k} \sin \xi$$
.

Si l'on rapporte la surface aux nouveaux axes A'x, A'y', A'z', on a

$$x = x' + \varepsilon = x' + \frac{k}{\sin \xi} \omega,$$

$$\frac{y}{y'} = \frac{A'y_1}{A'y'} = \frac{\sin(\xi - \omega)}{\sin \xi}, \quad y = y'(1 - \omega \cot \xi),$$

$$z = z' + y'y_4 = z' + y\frac{\varepsilon}{k} = z' + \frac{\omega y'}{\sin \varepsilon}(1 - \omega \cot \xi).$$

L'équation de la surface devient, d'après cela,

$$\left(x' + \frac{k}{\sin\xi}\omega\right)y'(\mathbf{I} - \omega\cot\xi) = kz' + k\frac{\omega y'}{\sin\xi}(\mathbf{I} - \omega\cot\xi)$$

ou

$$x'y'(1-\omega\cot\xi)=kz'.$$

Si donc k' est la nouvelle valeur de k, on a

$$k' = \frac{k}{1 - \omega \cot \xi} = k (1 + \omega \cot \xi),$$

ou bien, en posant k' - k = dk et  $\omega = -d\xi$ ,

$$\frac{dk}{k} = -\cot\xi \, d\xi,$$

ce qui donne

$$\log k = -\log \sin \xi + \text{const.}$$

La constante est une fonction de n, puisque cet angle reste constant lorsqu'on se déplace sur la génératrice Ax. Comme rien ne distingue les deux génératrices, on trouverait de même

$$\log k = -\log \sin n + \text{const.}$$

Par suite, on a, en général,

$$\log k = -\log \sin \xi - \log \sin \eta + \text{const.},$$

d'où

$$k = \frac{k_0}{\sin \xi \sin \eta};$$

 $k_0$  est la valeur de k pour  $\xi = n = \frac{\pi}{2}$ , c'est-à-dire pour le sommet du paraboloïde.

Le déplacement suivant Ax s'exprime, en fonction de  $\xi$  et de n, par

$$d\sigma = \varepsilon = k \frac{\omega}{\sin \xi} = -\frac{k_0 d\xi}{\sin^2 \xi \sin \eta}.$$

De même,

$$d\sigma_{\scriptscriptstyle 4} = -\frac{k_{\scriptscriptstyle 0}\,d\eta}{\sin\xi\sin^2\eta}$$
.

Si l'on pose

$$\frac{d\xi}{\sin\xi} = dx$$
,  $\frac{d\eta}{\sin\eta} = dy$ ,

les formules précédentes deviennent

$$k = k_0 \cos ix \cos iy,$$
  
 $d\sigma = -k_0 \cos ix \cos iy dx,$   
 $d\sigma_1 = -k_0 \cos ix \cos iy dy.$ 

L'angle  $\varphi$  est donné, dans le trièdre Axyz, par

$$\cos \varphi = \cos \xi \cos \eta + \sin \xi \sin \eta \cos \Lambda$$
,

A étant le dièdre suivant Ax, c'est-à-dire l'angle des plans directeurs. Cette formule peut s'écrire

$$\cos \varphi = -\tan ix \tan iy + \frac{\cos A}{\cos ix \cos iy}.$$

Supposons maintenant qu'un paraboloïde hyperbolique soit soumis à un système de forces tangentielles, et appliquons-lui les formules (18), dans lesquelles nous ferons  $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} = 0$ , et que nous diviserons par  $\sin^3 \varphi$ :

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} \frac{\partial n}{\partial \sigma_1} - 2n \frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi} \frac{\partial\varphi}{\partial \sigma_1} - \frac{n}{\sin^3\varphi} \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} = f_1,$$

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} \frac{\partial n_1}{\partial\sigma} - 2n_1 \frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi} \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} - \frac{n}{\sin^3\varphi} \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_1} = f.$$

Considérons seulement la première équation et posons  $\frac{n}{\sin^2 q} = N$ . Il vient

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \sigma_1} - \frac{\mathbf{N}}{\sin \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = f_1$$

ou bien, en remplaçant  $\frac{d\varphi}{\sin\varphi}$  par du,

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \sigma_1} - \mathbf{N} \frac{\partial u}{\partial \sigma} = f_1,$$

ou encore, en substituant à  $d\sigma$  et  $d\sigma$ , leurs valeurs,

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} - \mathbf{N} \frac{\partial u}{\partial x} = -f_{1} k_{0} \cos ix \cos iy.$$

L'équation qui détermine  $\varphi$  conduit à la suivante,

$$-\sin\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -i \tan i y \left(1 + \tan^2 i x\right) + i \frac{\cos A \sin i x}{\cos^2 i x \cos i y},$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\sin \varphi} = \frac{i \tan \beta i y \left(1 + \tan \beta^2 i x\right) - i \frac{\cos A \sin i x}{\cos^2 i x \cos i y}}{1 - \left(\tan \beta i x \tan \beta i y - \frac{\cos A}{\cos i x \cos i y}\right)^2}$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{i(\sin i\gamma \cos i\gamma - \cos A \sin ix \cos i\gamma)}{\cos^2 ix \cos^2 i\gamma - (\sin ix \sin i\gamma - \cos A)^2}.$$

Cette équation peut s'écrire, en posant

$$v = \frac{1}{2} \log \left[ \cos^2 ix \cos^2 iy - (\sin ix \sin iy - \cos A)^2 \right],$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}.$$

L'équation en N devient par suite, en multipliant tout par e',

$$e^{\nu} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial r} + \mathbf{N} e^{\nu} \frac{\partial \nu}{\partial r} = -f_{i} k_{o} \cos ix \cos iy e^{\nu},$$

d'où

$$\mathbf{N}e^{v} = -k_{o}\cos ix \int_{0}^{y} f_{i}\cos iy e^{v} dy + \mathbf{X},$$

avec la condition

$$e^{2\nu} = \cos^2 ix \cos^2 iy - (\sin ix \sin iy - \cos A)^2;$$

N, serait donné par une formule analogue, et la question se trouve ainsi complètement résolue.

En remplaçant  $e^{\nu}$  par son équivalent  $\cos ix \cos iy \sin \varphi$  et N par  $\frac{n}{\sin^2 \varphi}$ , on peut encore écrire

$$\frac{n}{\sin\varphi} = -k_0 \frac{\cos ix}{\cos iy} \int_0^y f_1 \cos^2 iy \sin\varphi \, dy + X.$$

Enfin, en se rappelant que la résultante r des tensions exercées sur une asymptotique est dirigée suivant l'autre asymptotique et égale par suite à  $\frac{n}{\sin\varphi}$ , et en désignant de plus par F, la composante f,  $\sin\varphi$  des forces extérieures suivant la normale à la ligne asymptotique x=const., on obtient

$$r = r_0 - k_0 \frac{\cos ix}{\cos iy} \int_0^y \mathbf{F}_1 \cos^2 iy \, dy.$$

Lorsque F, est fonction de x seul, on a

$$r = r_0 - k_0 \frac{F_1 \cos ix}{4i \cos iy} (2iy + \sin 2iy).$$

Lorsque  $F_i$  est de la forme  $\frac{\varpi(x)}{\cos iy}$  ou bien, ce qui revient au même,  $\chi(\xi)\sin n$ ,  $\varpi$  et  $\chi$  étant des fonctions quelconques, on a

$$r = r_0 + k_0 \frac{\cos ix}{\cos iy} \varpi(x) i \sin iy = r_0 + \chi(\xi) k_0 \frac{\cos \eta}{\sin \xi}.$$

En particulier, si  $\chi(\xi) = \frac{A}{k_0} \sin \xi$ , A étant une constante, on trouve

$$r = r_0 + A \cos n$$
.

Dans ce cas,  $F_1$  est égal à  $\frac{A}{k_0} \sin \xi \sin n = \frac{A}{k}$ ; il est donc en raison inverse du paramètre.

Quand  $F_4 = 0$ , il reste seulement  $r = r_0$ , ce qu'on peut énoncer en disant :

Lorsque les forces extérieures tangentielles appliquées aux divers points d'une génératrice G sont dirigées suivant les génératrices de l'autre système, celles-ci éprouvent toutes la même tension, dirigée suivant G, aux points où elles rencontrent G.

## Surfaces de révolution.

En prenant pour lignes  $\lambda = \text{const.}$  les parallèles et pour lignes  $\mu = \text{const.}$  les méridiens, on a immédiatement

$$\frac{1}{\rho_1}=0, \quad \frac{1}{T}=0.$$

De plus, tous les autres paramètres sont des fonctions de  $\lambda$  seulement. On peut faire L=1, et les équations générales de la théorie des surfaces se réduisent alors à

$$\frac{d\frac{1}{R_2}}{d\lambda} + \frac{1}{\rho_2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = 0,$$

$$-\frac{1}{R_1 R_2} + \frac{d\frac{1}{\rho_2}}{d\lambda} - \frac{1}{\rho_2^2} = 0,$$

$$\frac{1}{\rho_2} = -\frac{\frac{dM}{d\lambda}}{M}.$$

On tire de là

$$\frac{1}{\rho_2}\frac{d\frac{1}{R_2}}{d\lambda} - \frac{1}{R_2}\frac{d\frac{1}{\rho_2}}{d\lambda} + \frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{\rho_2^2} + \frac{1}{R_2^2}\right) = 0,$$

d'où

$$rc ang\left(rac{
ho_2}{
m R_2}
ight) + \int rac{d\lambda}{
m R_1} = {
m const.},$$

relation facile à prévoir, car on voit géométriquement que  $\rho_2$  est la longueur de la tangente à la méridienne entre le point de contact et l'axe, que  $R_2$  est la longueur de la normale et que arctang  $\frac{\rho_2}{R_4}$  est, par conséquent, l'angle de la normale avec l'axe, angle dont la différentielle doit être, au signe près, égal à l'angle de contingence  $\frac{d\lambda}{R_4}$  de la méridienne. Posons

$$\operatorname{arctang} \frac{\rho_2}{R_2} = -\theta,$$

ďoù

$$\rho_2 = -R_2 \tan \theta$$

et

$$\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{R_1}} = \frac{d\theta}{d\lambda}$$
.

La deuxième équation générale peut s'écrire, en remplaçant  $\frac{1}{R_2}$  par  $-\frac{\tan g\theta}{\rho_2}$  et multipliant par  $\rho_2^2$ ,

$$\cos\theta \frac{d\rho_2}{d\lambda} - \sin\theta \frac{d\theta}{d\lambda} \rho_2 + \cos\theta = 0;$$

par suite,

$$\rho_2 = -\frac{1}{\cos\theta} \int \cos\theta \, d\lambda$$

et

$$R_2 = \frac{1}{\sin \theta} \int \cos \theta \, d\lambda.$$

La quantité M s'obtient par l'équation

$$\frac{d\mathbf{M}}{\mathbf{M}} = -\frac{d\lambda}{\rho_2} = -\frac{d\lambda \cos \theta}{\rho_2 \cos \theta} = \frac{d(\rho_2 \cos \theta)}{\rho_2 \cos \theta},$$

d'où

$$\mathbf{M} = f(\mu) \rho_2 \cos \theta.$$

On peut prendre  $M = -\rho_2 \cos \theta$ . C'est le rayon du parallèle.

Les formules précédentes réduisent les équations d'équilibre des surfaces de révolution soumises à des forces tangentielles à

$$\begin{split} \frac{\partial n_2}{\partial \lambda} &- \frac{1}{\int \cos \theta} \frac{\partial t}{\partial \lambda} - (n_1 - n_2) \frac{\cos \theta}{\int \cos \theta} d\lambda = \mathbf{F}_1, \\ &- \frac{\partial t}{\partial \lambda} - \frac{1}{\int \cos \theta} \frac{\partial n_1}{\partial \lambda} - 2t \frac{\cos \theta}{\int \cos \theta} d\lambda = \mathbf{F}_2, \\ &\frac{\sin \theta}{\int \cos \theta} \frac{\partial n_1}{\partial \lambda} + \frac{d\theta}{d\lambda} n_2 = \mathbf{o}. \end{split}$$

Si l'on pose  $\cos\theta = \frac{d\Lambda}{d\lambda} = \Lambda'$ , ces équations peuvent s'écrire

$$egin{aligned} \Lambda rac{\partial n_2}{\partial \lambda} + rac{\partial t}{\partial \mu} - (n_1 - n_2) \Lambda' = \mathbf{F}_1 \Lambda, \ \Lambda rac{\partial t}{\partial \lambda} + rac{\partial n_1}{\partial \mu} + 2 t \Lambda' = - \mathbf{F}_2 \Lambda, \ rac{n_1}{\Lambda} - rac{\Lambda''}{1 - \Lambda'^2} n_2 = 0, \end{aligned}$$

SUR L'ÉQUILIBRE DES SURFACES FLEXIBLES ET INEXTENSIBLES.

ou bien, en éliminant  $n_1$  et supprimant l'indice de  $n_2$ , devenu inutile,

$$\Lambda \frac{\partial n}{\partial \lambda} + \frac{\partial t}{\partial \mu} + n \frac{\Lambda'(\mathbf{I} - \Lambda'^2 - \Lambda \Lambda'')}{\mathbf{I} - \Lambda'^2} = \mathbf{F}_1 \Lambda,$$

$$\Lambda \frac{\partial t}{\partial \lambda} + \frac{\Lambda \Lambda''}{\mathbf{I} - \Lambda'^2} \frac{\partial n}{\partial \mu} + 2t\Lambda' = -\mathbf{F}_2 \Lambda.$$

Si l'on pose

$$n\Lambda\sqrt{1-\Lambda'^2} = N,$$
 $t\Lambda^2 = T,$ 

ces équations deviennent finalement

$$rac{\partial \mathbf{N}}{\partial \lambda} + rac{\sqrt{\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}'^2}}{\mathbf{\Lambda}^2} rac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mu} = \mathbf{F}_1 \mathbf{\Lambda} \sqrt{\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}'^2},$$
 $rac{\partial \mathbf{T}}{\partial \lambda} + rac{\mathbf{\Lambda} \mathbf{\Lambda}''}{\left(\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}'^2\right)^{\frac{3}{2}}} rac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mu} = -\mathbf{F}_2 \mathbf{\Lambda}^2.$ 

Considérons ces équations privées de second membre, et remplaçons, pour abréger, par L, et L<sub>2</sub> les coefficients de  $\frac{\partial T}{\partial \mu}$ ,  $\frac{\partial N}{\partial \mu}$ :

$$\begin{split} &\frac{\partial N}{\partial \lambda} + L_{1} \frac{\partial T}{\partial \mu} = o, \\ &\frac{\partial T}{\partial \lambda} + L_{2} \frac{\partial N}{\partial \mu} = o. \end{split}$$

Si l'on pose en outre

$$egin{aligned} rac{\partial ext{N}}{\partial \lambda} \, d\lambda &+ rac{\partial ext{N}}{\partial \mu} \, d\mu = d ext{N}, \ rac{\partial ext{T}}{\partial \lambda} \, d\lambda &+ rac{\partial ext{T}}{\partial \mu} \, d\mu = d ext{T}, \end{aligned}$$

on obtiendra les équations différentielles qui conviennent aux caractéristiques en écrivant que les quatre équations précédentes donnent pour  $\frac{\partial N}{\partial \lambda}$ ,  $\frac{\partial N}{\partial \mu}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial \lambda}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial \mu}$  des valeurs indéterminées. On trouve ainsi

$$\mathrm{L}_{_{2}}\mathrm{L}_{_{2}}d\lambda^{2}+d\mu^{2}=\mathrm{o},$$
  $\mathrm{L}_{_{2}}d\lambda\,d\mathrm{N}-d\mu\,d\mathrm{T}=\mathrm{o}$ 

ou bien

$$rac{d\mu}{d\lambda} = \pm \sqrt{-L_1 L_2},$$

$$\sqrt{L_2} dN = \pm \sqrt{-L_1} dT.$$

Nous nous bornerons à étudier le cas où la seconde équation est intégrable, ce qui arrive seulement lorsque  $\frac{L_2}{L_1}$  est constant. Cherchons d'abord quelles sont les surfaces de révolution qui jouissent de cette propriété.

On a

$$\frac{\mathrm{L}_2}{\mathrm{L}_1} = \frac{\Lambda^3 \Lambda''}{\left(1 - \Lambda'^2\right)^3} = \mathrm{const.} = -\frac{1}{c},$$

d'où

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda^3} + c \frac{\Lambda' \Lambda''}{(1 - \Lambda'^2)^2} = 0,$$

et, en intégrant,

$$\frac{1}{\Lambda^2} - \frac{c}{1 - \Lambda^{\frac{1}{2}}} = \text{const.} = b,$$

$$\Lambda' = \sqrt{\frac{(b+c)\Lambda^2 - 1}{b\Lambda^2 - 1}}.$$

La quadrature qui reste à effectuer dépend des fonctions elliptiques. Mais on peut interpréter géométriquement la relation qui existe entre  $\Lambda$  et  $\lambda$ . Remarquons pour cela que, si l'on remplace  $\Lambda'$  par  $\cos\theta$ , il vient

$$\frac{1}{\Lambda^2} = b + \frac{c}{\sin^2 \theta}$$
 on  $\Lambda = \frac{\sin \theta}{\sqrt{b \sin^2 \theta + c}}$ ,

et par suite

$$\Lambda' = \cos\theta = \frac{\sqrt{b\sin^2\theta + c\cos\theta} - \frac{b\sin^2\theta\cos\theta}{\sqrt{b\sin^2\theta + c}}}{b\sin^2\theta + c} \frac{d\theta}{d\lambda} - \frac{c\cos\theta}{\left(b\sin^2\theta + c\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{d\theta}{d\lambda},$$

$$d\lambda = \frac{c\,d\theta}{\left(b\sin^2\theta + c\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Rappelons que  $\lambda$  est l'arc de méridienne et  $\theta$  l'angle de la normale avec l'axe.

Or, si l'on considère l'ellipse  $\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1$  et si l'on appelle  $\theta$  l'angle

SUR L'ÉQUILIBRE DES SURFACES FLEXIBLES ET INEXTENSIBLES.

formé par la normale avec l'axe des y, on trouve sans difficulté les formules

$$dX = \frac{A^2 B^2 \cos\theta d\theta}{(A^2 \sin^2\theta + B^2 \cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}, \quad dY = -\frac{A^2 B^2 \sin\theta d\theta}{(A^2 \sin^2\theta + B^2 \cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}},$$

ďoù

$$d\lambda = \sqrt{dX^{2} + dY^{2}} = \frac{A^{2}B^{2}d\theta}{\left[(A^{2} - B^{2})\sin^{2}\theta + B^{2}\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{B^{2}}{\Lambda^{4}}d\theta}{\left[\frac{A^{2} - B^{2}}{A^{4}}\sin^{2}\theta + \frac{B^{2}}{\Lambda^{4}}\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette valeur de  $d\lambda$  devient identique à celle que nous avons trouvée ci-dessus si l'on pose

$$\frac{B^2}{A^4} = c, \quad \frac{A^2 - B^2}{A^4} = b.$$

Si c était négatif, l'ellipse devrait être remplacée par une hyperbole. Si b+c=0, il en résulte  $\frac{1}{\Lambda^2}=0$ , ce qui donne une parabole. Le cas d'intégrabilité que nous allons examiner est donc celui de toutes les surfaces de révolution du second degré. En rétablissant les seconds membres, les équations qu'on veut intégrer sont

$$\begin{split} &\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \lambda} + \mathbf{L}_{1} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mu} = \mathbf{F}_{1} \Lambda \sqrt{1 - \Lambda^{2}}, \\ &\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \lambda} + \mathbf{L}_{2} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mu} = - \mathbf{F}_{2} \Lambda^{2}. \end{split}$$

Remplaçons L, par sa valeur — cL<sub>2</sub> et ajoutons les deux équations membre à membre, après avoir multiplié la seconde par  $\sqrt{-c}$ . Il vient

$$\begin{split} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \lambda} + \sqrt{-\,c}\,\frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial \lambda} + \mathbf{L}_2\sqrt{-\,c}\left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mu} + \sqrt{-\,c}\,\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mu}\right) \\ = \mathbf{F}_1 \Lambda \sqrt{\mathbf{I} - \Lambda'^2} - \sqrt{-\,c}\,\mathbf{F}_2 \Lambda^2. \end{split}$$

En posant  $N + T\sqrt{-c} = \varpi$  et remplaçant le second membre par F, cette équation prend la forme

$$rac{\partial \varpi}{\partial \lambda} + \mathbf{L_2} \sqrt{-c} \, rac{\partial \varpi}{\partial \mu} = \mathbf{F};$$

elle s'intègre au moyen des équations simultanées

$$d\lambda = \frac{d\mu}{L_2\sqrt{-c}} = \frac{d\varpi}{F}.$$

En remplaçant  $\sqrt{-c}$  par  $-\sqrt{-c}$  et posant  $N-T\sqrt{-c}=\chi$ , on aurait un second système

$$d\lambda = -\frac{d\mu}{L_{\bullet}\sqrt{-c}} = \frac{d\chi}{F'}$$

Connaissant  $\varpi$  et  $\chi$ , on connaîtra N et T, et, par suite, le problème sera résolu. Les équations  $d\mu = \pm L_2 \sqrt{-c} \, d\lambda$  sont les équations différentielles des lignes asymptotiques.

Lorsque  $F_4$ ,  $F_2$ , et par suite F, F', sont fonctions de  $\lambda$  seulement, on a immédiatement, en appelant  $\alpha$ ,  $\beta$  les paramètres des lignes asymptotiques,

$$\varpi = \int F d\lambda + \text{fonct}(\alpha), \quad \chi = \int F' d\lambda + \text{fonct}(\beta).$$

Si l'on veut avoir sous forme explicite les relations qui caractérisent les lignes asymptotiques, il suffit de changer de variables en posant

$$dz = \sqrt{1 - \Lambda^{'2}} d\lambda = \sin \theta d\lambda.$$

Étant donnée la signification géométrique de  $\lambda$  et de  $\theta$ , on voit sans peine que dz n'est autre chose que la distance des plans de deux parallèles infiniment voisins. Avec cette nouvelle variable, on a

 $\Lambda = \int \cos\theta \, d\lambda = \int \cot\theta \, dz.$ 

Or,

$$d\lambda = \frac{c \, d\theta}{\left(b \sin^2 \theta + c\right)^{\frac{3}{2}}},$$

ce qui donne, en mesurant z à partir de l'équateur,

$$dz = \frac{c \tan \theta \left(1 + \tan^2 \theta\right) d\theta}{\left[c + (b+c)\tan^2 \theta\right]^{\frac{5}{2}}},$$

$$z = -\frac{c}{b+c} \frac{1}{\sqrt{c+(b+c)\tan^2 \theta}},$$

$$\cot \theta = \frac{(b+c)^{\frac{3}{2}}z}{\sqrt{c^2-c(b+c)^2z^2}}.$$

SUR L'ÉQUILIBRE DES SURFACES FLEXIBLES ET INEXTENSIBLES.

Donc

$$\Lambda = (b+c)^{\frac{3}{2}} \int \frac{z \, dz}{\sqrt{c^2 - c \, (b+c)^2 \, z^2}} = \frac{1}{c \, \sqrt{b+c}} \, \sqrt{c^2 - c \, (b+c)^2 \, z^2}.$$

La relation

$$d\mu = L_2 \sqrt{-c} d\lambda$$

ou

$$d\mu = \frac{1_{1}}{\sqrt{-c}} d\lambda = \frac{\sqrt{1 - \Lambda'^{2}}}{\Lambda^{2} \sqrt{-c}} d\lambda$$

devient ainsi

$$d\mu = \frac{c(b+c)dz}{\sqrt{-c}\left[c - (b+c)^2 z^2\right]}.$$

On en tire

$$\mu - \arctan\left[\frac{(b+c)z}{\sqrt{-c}}\right] = \text{const.}$$

Les quantités que nous avons appelées a et \beta sont donc

$$\mu \pm \operatorname{arc tang} \left[ \frac{(b+c)z}{\sqrt{-c}} \right].$$

Dans le cas de l'ellipsoide, c est positif et  $\alpha$ ,  $\beta$  sont imaginaires conjuguées;  $\Lambda$  et  $\sqrt{1-\Lambda'^2}$  sont réels. Pour que les valeurs de n et t,

$$n=\frac{\varpi+\chi}{2\Lambda\sqrt{1-\Lambda'^2}},$$

$$t=\frac{\varpi-\chi}{2\sqrt{-c}\,\Lambda^2},$$

soient réelles, il est nécessaire et suffisant que  $\varpi$  et  $\chi$  soient des quantités imaginaires conjuguées.

Nous allons pousser jusqu'au bout l'application de la méthode, en étudiant le problème très simple que voici :

Déterminer les conditions d'équilibre d'un ellipsoïde de révolution renfermant un fluide qui exerce sur tous les points de sa surface une pression normale constante.

La première chose à faire est de décomposer les forces en un système

88 L. LECORNU.

normal et un système tangentiel. Pour trouver le premier, il suffit, en appelant  $\Phi$  la force normale, de poser

$$\frac{{}^{2}a}{{}^{2}R_{1}}=\Phi, \quad \frac{{}^{1}}{{}^{1}LR_{2}}\frac{\partial a}{\partial \lambda}=F_{4}, \quad \frac{{}^{1}}{MR_{1}}\frac{\partial a}{\partial \mu}=F_{2}.$$

La première équation détermine a en fonction de  $\lambda$  seulement. La seconde donne la composante  $F_{\bullet}$  de la force extérieure suivant la tangente au méridien. La troisième montre que la composante  $F_{\bullet}$  de la force extérieure suivant le parallèle est égale à zéro.

Nous avons trouvé

$$\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{R}_1} = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{\sin\theta \, d\theta}{dz},$$

$$\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{R}_2} = \frac{\sin\theta}{\Lambda}.$$

Done

$$\frac{1}{R_1R_2} = \frac{\sin^2\theta}{\Lambda} \frac{d\theta}{dz}.$$

On a, de plus,

$$\cot \theta = \frac{(b+c)^{\frac{2}{2}}z}{\sqrt{c^2 - c(b+c)^2 z^2}},$$

d'où

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{1 + \cot^2 \theta} = \frac{c^2 - c(b + c)^2 z^2}{c^2 + b(b + c)^2 z^2}.$$

La valeur de A est

$$\Lambda = \frac{\sqrt{c^2 - c(b+c)^2 z^2}}{c\sqrt{b+c}} \cdot$$

Enfin,

$$\sin\theta \frac{d\theta}{dz} = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{(b\sin^2\theta + c)^{\frac{3}{2}}}{c} = c^2 \frac{(b+c)^{\frac{3}{2}}}{[c^2 + b(b+c)^2 z^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Il vient, par conséquent,

$$\frac{1}{R_1 R_2} = c^3 \frac{(b+c)^2}{\left[c^2 + b(b+c)^2 z^2\right]^2}$$

et

$$a = \frac{\Phi}{2} \frac{\left[c^2 + b(b+c)^2 z^2\right]^2}{c^3 (b+c)^2}.$$

Done

$$\frac{da}{dz} = \frac{2\Phi b}{c^3} z \left[c^2 + b(b+c)^2 z^2\right],$$

et, comme

$$\mathbf{F}_{1} = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{R}_{2}} \frac{da}{d\lambda} = \frac{\sin^{2}\theta}{\Lambda} \frac{da}{dz},$$

on obtient, en remplaçant  $\sin^2\theta$  et  $\frac{da}{dz}$  par leurs valeurs,

$$\mathbf{F}_{i} \Lambda = \frac{2\Phi b z}{c^{3}} [c^{2} - c(b+c)^{2}z^{2}],$$

En posant

$$B^2 = \frac{c}{(b+c)^2}, \quad \frac{2\Phi b(b+c)^2}{c^2} = P,$$

on peut encore écrire

$$\mathbf{F}_{1} \Lambda = \mathrm{P} z \left( \mathbf{B}^{2} - z^{2} \right).$$

D'après cela, les forces appliquées à l'ellipsoïde se composent :

1° Du système normal formé par les forces normales  $\Phi$  et par les forces tangentielles  $F_1 = \frac{Pz\left(B^2-z^2\right)}{\Lambda}$ , dirigées suivant les tangentes aux méridiens;

2° Du système tangentiel formé par les forces  $F_1' = -\frac{Pz(B^2-z^2)}{\Lambda}$ , tangentes aux méridiens.

Le premier système donne lieu, en chaque point, à l'effort d'arrachement  $n_1 = \frac{a}{R_1} = \frac{\Phi R_2}{2}$ , normal au méridien, et à l'effort d'arrachement  $n_2 = \frac{a}{R_2} = \frac{\Phi R_1}{2}$ , normal au parallèle; ces efforts devront être ajoutés à ceux qui résultent du second système.

L'équation en 

écrite précédemment devient ici

$$rac{\partial arpi}{\partial \lambda} + rac{\sqrt{\mathbf{I} - \Lambda'^2}}{\Lambda^2 \sqrt{-c}} rac{\partial arpi}{\partial \mu} = \mathbf{F'_1} \Lambda \sqrt{\mathbf{I} - \Lambda'^2}$$

ou, en remplaçant  $d\lambda$  par  $\frac{dz}{\sin\theta} = \frac{dz}{\sqrt{1-\Lambda^{/2}}}$  et  $\Lambda^2$  par  $\frac{B^2-z^2}{(b+c)B^2}$ ,

$$\frac{\partial \varpi}{\partial z} + i \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{B}^2 - z^2} \frac{\partial \varpi}{\partial \mu} = - \mathbf{P} z (\mathbf{B}^2 - z^2).$$

89

Les équations simultanées correspondantes sont

$$dz = \frac{\frac{du}{iB}}{\frac{iB}{B^2 - z^2}} = \frac{d\varpi}{-Pz(B^2 - z^2)}.$$

Elles ont pour intégrales

$$\mu - i \log \sqrt{\frac{\overline{B+z}}{B-z}} = \text{const.},$$
 $\varpi - \frac{P}{4} (B^2 - z^2)^2 = \text{const.}$ 

De là la valeur générale de @:

$$\varpi = \frac{P}{4} (B^2 - z^2)^2 + \varphi_i \left( \omega - i \log \sqrt{\frac{B+z}{B-z}} \right).$$

On trouverait de même

$$\chi = \frac{\mathrm{P}}{4} \left( \mathrm{B}^2 - z^2 \right)^2 + \varphi_2 \left( u + i \log \sqrt{\frac{\mathrm{B} + z}{\mathrm{B} - z}} \right),$$

puis

$$n = \frac{\varpi + \chi}{2\Lambda\sqrt{1 - \Lambda'^2}} = \frac{(\varpi + \chi)B^2\sqrt{b + c}\sqrt{1 + \frac{b}{c}\frac{z^2}{B^2}}}{2(B^2 - z^2)},$$

$$t = \frac{\varpi - \chi}{2\sqrt{-c}\Lambda^2} = \frac{(\varpi - \chi)(b + c)B^2}{2ic(B^2 - z^2)},$$

ou bien, en remplaçant b et c par leurs valeurs en fonction des axes de l'ellipse,

$$b = \frac{A^{2} - B^{2}}{A^{4}}, \quad c = \frac{B^{2}}{A^{4}},$$

$$n = \frac{(\varpi + \chi) \frac{B^{2}}{A} \sqrt{1 + \frac{A^{2} - B^{2}}{B^{4}} z^{2}}}{2(B^{2} - z^{2})},$$

$$t = \frac{(\varpi - \chi)B}{2i(B^{2} - z^{2})}.$$

Ces valeurs s'appliquent quelle que soit la portion d'ellipsoïde que l'on considère. S'il s'agit de l'ellipsoïde entier, elles doivent rester finies quand z tend vers  $\pm$  B. Pour cela, il est nécessaire que  $\varpi$  et  $\chi$  tendent

tous les deux vers zéro, quel que soit  $\mu$ . En considérant les expressions trouvées pour ces deux quantités et en posant

$$u = \mu + i \log \sqrt{\frac{B+z}{B-z}},$$
 $v = \mu + i \log \sqrt{\frac{B+z}{B-z}}.$ 

on doit avoir, quel que soit  $\mu$ ,

$$\varphi_1(u)_{u=x} = \varphi_2(v)_{v=x} = 0.$$

De plus, n et t, et par conséquent  $\varphi_{\iota}(u)$  et  $\varphi_{\iota}(v)$ , doivent, quels que soient u et v, rester finis, continus et bien déterminés; lorsqu'on décrit sur la surface un contour fermé absolument quelconque, on doit, en revenant au point de départ, retrouver les mêmes valeurs pour  $\varphi_{\iota}(u)$  et  $\varphi_{\iota}(v)$ .

D'après les propriétés connues des fonctions de variables imaginaires, une fonction telle que  $\varphi_{\iota}(u)$ , qui, pour toutes les valeurs possibles de la valeur qu'elle renferme, reste finie, continue et bien déterminée, se réduit forcément à une constante. Dans le cas présent, cette constante ne peut être autre chose que zéro, et nous avons simplement

$$\varpi = \chi = \frac{P}{4} (B^2 - z^2)^2$$
.

De là résulte immédiatement t = 0, c'est-à-dire que :

Les méridiens et les parallèles sont les lignes de tension principale de la surface.

Puis on trouve, pour l'effort d'arrachement exercé sur les parallèles,

$$\begin{split} n_2 &= n = -\frac{P}{4} \frac{B^2}{\Lambda} (B^2 - z^2) \sqrt{1 + \frac{A^2 - B^2}{B^4} z^2} \\ &= \frac{\Phi}{2} \frac{B^2 - z^2}{AB^2} \sqrt{1 + \frac{A^2 - B^2}{B^4} z^2} (A^2 - B^2). \end{split}$$

L'effort d'arrachement  $n_4$  exercé sur les méridiens s'obtient en multi-

pliant n par

$$\frac{\Lambda \Lambda''}{1 - \Lambda'^2} = -\frac{1 - \Lambda'^2}{\Lambda^2 c} = \frac{-c(b+c)}{c^2 + b(b+c)^2 z^2} = \frac{-\frac{A^2}{B^2}}{1 + \frac{A^2 - B^2}{B^4} z^2},$$

on trouve ainsi

$$n_{1} = -\frac{PA}{4} \frac{B^{2} - z^{2}}{\sqrt{1 + \frac{A^{2} - B^{2}}{B^{4}}z^{2}}} = -\frac{\Phi}{2} \frac{A(A^{2} - B^{2})}{B^{4}} \frac{B^{2} - z^{2}}{\sqrt{1 + \frac{A^{2} - B^{2}}{B^{4}}z^{2}}}.$$

Pour avoir les valeurs de  $n_i$  et  $n_2$  qui conviennent au problème, il faut ajouter à  $n_i$  et  $n_2$  ainsi déterminés les quantités qui proviennent du système normal, c'est-à-dire  $\frac{\Phi R_2}{2}$ ,  $\frac{\Phi R_1}{2}$ . Or, les formules précédemment établies donnent

$$R_1 = \frac{B^2}{A} \left( 1 + \frac{A^2 - B^2}{B^4} z^2 \right)^{\frac{3}{2}},$$
 $R_2 = A \sqrt{1 + \frac{A^2 - B^2}{B^4} z^2}.$ 

Par suite, les valeurs définitives de  $n_1$  et de  $n_2$  sont

$$n_{4} = \frac{\Phi}{2} A \frac{2 - \frac{A^{2}}{B^{2}} + 2 \frac{A^{2} - B^{2}}{B^{4}} z^{2}}{\sqrt{1 + \frac{A^{2} - B^{2}}{B^{4}} z^{2}}},$$

$$n_{2} = \frac{\Phi}{2} A \sqrt{1 + \frac{A^{2} - B^{2}}{B^{4}} z^{2}}.$$

Il est aisé de vérifier que  $n_1$  et  $n_2$  satisfont, comme cela doit être, à la condition

$$\frac{n_1}{R_2} + \frac{n_2}{R_1} = \Phi.$$

Une vérification plus importante des longues déductions qui nous ont amenés au résultat s'obtient en considérant une calotte ellipsoïdale terminée au parallèle z = const. et écrivant que la somme des projections sur l'axe des z des tensions normales à ce parallèle est égale à la somme des composantes, par rapport au même axe, des pressions exercées sur la

sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles. 95

calotte. Cette condition détermine immédiatement  $n_2$ , et l'on retrouve la valeur à laquelle nous sommes parvenus.

La valeur de n, peut s'écrire

$$n_4 = n_2 - \frac{\Phi}{2} \frac{A(A^2 - B^2)}{B^4} \frac{B^2 - z^2}{\sqrt{1 + \frac{A^2 - B^2}{B^4} z^2}}.$$

La différence  $n_1 - n_2$  a donc un signe constant, positif si l'ellipsoïde est allongé, négatif si l'ellipsoïde est aplati. Elle s'annule pour les deux pôles  $z = \pm B$ , qui sont, par suite, des points d'équilibre ombilical. Contrairement à ce qui a lieu en général, ces points ne se rattachent pas à une ligne de points jouissant de la même propriété. Cela tient à ce que, dans le cas actuel, l'équation différentielle de la ligne dont il s'agit se réduit à dz = 0.

En posant  $n_i = 0$ , on obtient l'équation

$$\frac{z^2}{B^2} = \frac{A^2 - 2B^2}{2(A^2 - B^2)},$$

qui ne peut être satisfaite que si A est supérieur à  $B\sqrt{2}$ . Quand cette condition est remplie, il existe toujours deux parallèles pour lesquels la tension perpendiculaire aux méridiens est nulle. Dans la zone comprise entre ces parallèles, les deux tensions principales sont de signes contraires, et l'on sait qu'il existe alors en chaque point deux directions dont les éléments travaillent uniquement par cisaillement.

Considérons maintenant, au lieu de l'ellipsoïde complet, une portion quelconque de la surface. On ne peut plus dire que  $\varphi_1(u)$  et  $\varphi_2(v)$  sont constants, car u et v ne passent plus par toutes les valeurs possibles. Comme  $\varphi_1(u)$  doit être une fonction périodique de  $\mu$ , ayant pour période  $2\pi$  ou un diviseur de  $2\pi$ , nous pouvons, sans introduire d'indétermination, prendre pour variable, au lieu de u, la quantité

$$e^{iu} = e^{i\mu - \log\sqrt{\frac{B+z}{B-z}}} = \sqrt{\frac{B-z}{B+z}} e^{i\mu}.$$

En posant  $z = B\cos\omega$ , on aura

$$e^{iu} = \tan \frac{\omega}{2} e^{i\mu}$$
 et  $\varphi_{i}(u) = \sqrt{\tan \frac{\omega}{2} e^{i\mu}}$ .

Si l'on considère une calotte de l'ellipsoïde ayant son centre au pôle  $\omega = 0$  et comprise tout entière dans la portion de surface donnée, l'expression  $\downarrow$ , devant rester finie, continue et bien déterminée pour tous les points de cette calotte, doit être développable en série ordonnée suivant les puissances entières de tang  $\frac{\omega}{2}e^{i\mu}$ . Nous aurons donc, dans les limites de la calotte ainsi définie,

$$\varphi_1 = A_0 + A_1 \tan \frac{\omega}{2} e^{i\mu} + A_2 \tan \frac{\omega}{2} e^{2i\mu}$$
.

On verra, comme précédemment, que  $\varphi_i$  doit s'annuler, quel que soit  $\mu$ , pour z = B, c'est-à-dire pour tang  $\frac{\omega}{2} = o$ . Pour les points voisins de z = B,  $\varphi_i$  doit être du même ordre que  $B^2 - z^2 = B^2 \sin^2 \omega$ . Cela exige que  $A_0$  et  $A_1$  soient nuls. En posant

$$\Lambda_2 = a_2 + ib_2, \quad \Lambda_3 = a_3 + ib_3, \quad \dots,$$

on aura done

De même

$$\varphi_2(v) = (a_2 - ib_2) \tan^2 \frac{\omega}{2} (\cos 2\mu - i \sin 2\mu) + \dots$$

Par suite, pour avoir  $n_2$ , on devra ajouter à la valeur précédemment trouvée l'expression

$$\begin{split} \frac{B^{2}}{A} \frac{\varphi_{1}(u) + \varphi_{2}(\nu)}{2(B^{2} - z^{2})} \sqrt{1 + \frac{A^{2} - B^{2}}{B^{4}} z^{2}} \\ &= \frac{\sqrt{A^{2} \cos^{2} \omega + B^{2} \sin^{2} \omega}}{2AB \cos^{4} \frac{\omega}{2}} \Big[ (a_{2} \cos 2 \mu - b_{2} \sin 2 \mu) \\ &+ \tan g \frac{\omega}{2} (a_{3} \cos 3 \mu - b_{3} \sin 3 \mu) + \dots \Big]; \end{split}$$

DE L'ÉQUILIBRE DES SURFACES FLEXIBLES ET INEXTENSIBLES.  $n_i$  sera modifié en conséquence, et  $t_i$ , au lieu d'être nul, sera égal à

$$\begin{split} \mathrm{B} \frac{\varphi_{1}(u) - \varphi_{2}(\nu)}{2i(\mathrm{B}^{2} - z^{2})} &= \frac{1}{2\mathrm{B}\cos^{4}\frac{\omega}{2}} \Big[ (a_{2}\sin 2\mu + b_{2}\cos 2\mu) \\ &+ \tan g\frac{\omega}{2} (a_{3}\sin 3\mu + b_{3}\cos 3\mu) + \ldots \Big] \end{split}$$

L'inspection de ces formules montre immédiatement pourquoi les fonctions arbitraires doivent s'annuler quand la surface est fermée : c'est parce qu'elles doivent rester finies, quel que soit  $\mu$ , lorsque  $\omega$  tend vers  $\pi$ , et par conséquent  $\cos \frac{\omega}{2}$  vers zéro.

L'indétermination introduite dans les conditions d'équilibre par les fonctions arbitraires n'a rien qui doive nous étonner : elle est tout à fait analogue à celle qu'on rencontre quand on cherche les réactions éprouvées par un solide invariable qui a plus de trois points d'appui.

### Surfaces minima.

Les surfaces minima sont caractérisées par la propriété d'avoir leurs lignes asymptotiques orthogonales. On peut donc appliquer à ces lignes les équations générales de la théorie des surfaces, et, comme on a alors  $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = 0$ , les équations dont il s'agit se réduisent à

$$\begin{split} \frac{\mathbf{I}}{\rho_1} &= -\frac{\frac{\partial L}{\partial \mu}}{LM}, \quad \frac{\mathbf{I}}{\rho_2} &= -\frac{\frac{\partial M}{\partial \lambda}}{LM}, \\ &- \frac{\mathbf{I}}{M} \frac{\partial \frac{\mathbf{I}}{T}}{\partial \mu} + \frac{2}{\rho_1} \frac{\mathbf{I}}{T} = \mathbf{0}, \\ &- \frac{\mathbf{I}}{L} \frac{\partial \frac{\mathbf{I}}{T}}{\partial \lambda} + \frac{2}{\rho_2} \frac{\mathbf{I}}{T} = \mathbf{0}, \\ \frac{\mathbf{I}}{T^2} &+ \frac{\mathbf{I}}{M} \frac{\partial \frac{\mathbf{I}}{\rho_1}}{\partial \mu} + \frac{\mathbf{I}}{L} \frac{\partial \frac{\mathbf{I}}{\rho_2}}{\partial \lambda} - \frac{\mathbf{I}}{\rho_1^2} - \frac{\mathbf{I}}{\rho_2^2} = \mathbf{0}. \end{split}$$

On tire de là

$$\frac{1}{M}\frac{\partial \frac{1}{T}}{\partial \mu} + \frac{2}{LM}\frac{\partial L}{\partial \mu}\frac{1}{T} = 0$$

ou bien

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\!\left(\frac{L^2}{T}\right)\!=\!o_{\bullet}$$

 $\frac{L^2}{T}$  est donc fonction de  $\lambda$  seulement, et, en choisissant convenablement cette variable, on peut faire en sorte que  $\frac{L^2}{T} = 1$ . De même  $\frac{M^2}{T} = 1$ . En posant  $T = \frac{1}{\theta^2}$ , on aura

$$L = M = \frac{1}{\theta}$$
.

On trouve ensuite

$$\frac{1}{\rho_1} = -\theta^2 \frac{\partial \frac{1}{\theta}}{\partial \mu} = \frac{\partial \theta}{\partial \mu},$$
$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{\partial \theta}{\partial \lambda},$$

enfin

$$heta^4 + heta \left( \frac{\partial^2 heta}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 heta}{\partial \mu^2} \right) - \left( \frac{\partial heta}{\partial \lambda} \right)^2 - \left( \frac{\partial heta}{\partial \mu} \right)^2 = \mathbf{o}$$

ce qu'on peut écrire, en divisant par  $\theta^2$ ,

$$\theta^2 + \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} (\log \theta) + \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} (\log \theta) = 0,$$

ou bien, en posant  $dx = d\lambda + i d\mu$ ,  $dy = d\lambda - i d\mu$ ,

$$2 \frac{\partial^2 (\log \theta^2)}{\partial x \, \partial y} = - \theta^2.$$

Si l'on remplace  $\theta^2$  par 4u, cette équation devient

$$\frac{\partial^2(\log u)}{\partial x \partial y} = -2u.$$

L'intégrale générale, due à M. Liouville, est

$$u = -\frac{X'Y'}{(X+Y)^2},$$

X désignant une fonction arbitraire de x et Y une fonction arbitraire

97

de y, et X', Y' étant les dérivées de ces deux fonctions.  $\theta^2$  est donc égal à  $-\frac{4X'Y'}{(X+Y)^2}$ .

L'élément linéaire de la surface

$$ds^2 = L^2 d\lambda^2 + M^2 d\mu^2,$$

sera par conséquent

$$ds^2 = \frac{1}{\theta^2} (d\lambda^2 + d\mu^2) = -\frac{(X + Y)^2}{4X'Y'} dx dy.$$

Si l'on pose

$$\frac{dx}{2X'} = dx_1, \quad \frac{dy}{2Y'} = -dy_1,$$

et si l'on appelle  $X_1$ ,  $Y_1$  les fonctions X et Y exprimées en  $x_1$ ,  $y_2$ , on obtient la formule suivante, donnée par M. Ossian Bonnet (Journal de Liouville, 2<sup>e</sup> série, t. V):

$$ds^2 = (X_1 + Y_1)^2 dx_1 dy_1$$
.

Cela posé, considérons une surface minima soumise à un système de forces tangentielles et cherchons les équations d'équilibre rapportées aux lignes asymptotiques. Ces lignes, étant, d'une façon générale, des lignes de tension conjuguées, doivent être, dans le cas actuel, des lignes de tension principales. On a donc t=0.

D'ailleurs  $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = 0$ . La dernière équation d'équilibre disparaît donc entièrement. Les deux premières se réduisent à

$$\frac{1}{L}\frac{\partial n_2}{\partial \lambda} + \frac{n_1 - n_2}{\rho_2} = F_4,$$

$$\frac{1}{M}\frac{\partial n_1}{\partial u} + \frac{n_2 - n_1}{\rho_1} = F_2,$$

ou bien

$$\theta \frac{\partial n_2}{\partial \lambda} + (n_1 - n_2) \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} = \mathbf{F}_1,$$

$$\theta \frac{\partial n_1}{\partial \mu} + (n_2 - n_1) \frac{\partial \theta}{\partial \mu} = \mathbf{F}_2,$$

ďoù

$$\theta \frac{\partial^2 n_2}{\partial \lambda \partial \mu} + \frac{\partial n_2}{\partial \lambda} \frac{\partial \theta}{\partial \mu} + (n_1 - n_2) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \lambda \partial \mu} + \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \frac{\partial (n_1 - n_2)}{\partial \mu} = \frac{\partial \mathbf{F_i}}{\partial \mu},$$

ou bien, en remplaçant  $\frac{\partial n_2}{\partial \lambda}$  par sa valeur et posant  $n_1 - n_2 = u$ :

$$\theta^2 \frac{\partial^2 n_2}{\partial \lambda \partial \mu} + \frac{\partial \theta}{\partial \mu} \Big( \mathbf{F}_{\mathbf{i}} - u \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \Big) + u \theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial \lambda \partial \mu} + \theta \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \frac{\partial u}{\partial \mu} = \frac{\partial \mathbf{F}_{\mathbf{i}}}{\partial \mu} \theta;$$

de même on aurait

$$\theta^2 \frac{\partial^2 n_4}{\partial \lambda \partial \mu} + \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \Big( \mathbf{F}_2 - u \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \Big) - u \theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial \lambda \partial \mu} - \theta \frac{\partial \theta}{\partial \mu} \frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \lambda} \theta,$$

et, en retranchant, on trouve

$$\begin{split} \theta^{2} \frac{\partial^{2} u}{\partial \lambda \partial \mu} + 2 u \left( \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \frac{\partial \theta}{\partial \mu} - \theta \frac{\partial^{2} \theta}{\partial \lambda \partial \mu} \right) - \theta \frac{\partial \theta}{\partial \mu} \frac{\partial u}{\partial \lambda} - \theta \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \frac{\partial u}{\partial \mu} \\ = \theta \left( \frac{\partial F_{2}}{\partial \lambda} - \frac{\partial F_{1}}{\partial \mu} \right) + F_{1} \frac{\partial \theta}{\partial \mu} - F_{2} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \end{split}$$

Posons maintenant  $u = v \theta$ , d'où

$$\frac{\theta \frac{\partial u}{\partial \lambda} - u \frac{\partial \theta}{\partial \lambda}}{\theta^{2}} = \frac{\partial v}{\partial \lambda},$$

$$\frac{\theta^{2} \frac{\partial^{2} u}{\partial \lambda \partial \mu} + u \left(2 \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \frac{\partial \theta}{\partial \mu} - \theta \frac{\partial^{2} \theta}{\partial \lambda \partial \mu}\right) - \theta \frac{\partial \theta}{\partial \mu} \frac{\partial u}{\partial \lambda} - \theta \frac{\partial u}{\partial \mu} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda}}{\theta^{2}} = \frac{\partial^{2} v}{\partial \lambda \partial \mu}.$$

D'après ces formules, l'équation qui donne  $\nu$  peut s'écrire, en posant  $\frac{F_4}{\theta} = f_4, \frac{F_2}{\theta} = f_2,$ 

$$\theta \frac{\partial^2 v}{\partial \lambda \partial \mu} - v \frac{\partial^2 \theta}{\partial \lambda \partial \mu} = \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} - \frac{\partial f_1}{\partial \mu}.$$

Connaissant v, n, et  $n_2$  seront donnés par une seule quadrature. La fonction  $\theta$  est définie par la relation

$$\theta^2 = -\frac{4X'Y'}{(X+Y)^2}$$

Mais nous avons à exprimer cette quantité en fonction de  $\lambda$  et de  $\mu$ . Remarquons pour cela que, si l'on pose

$$\log(X + Y) = \varphi,$$

il vient

$$\theta^2 = -4 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

ov. comme  $x = \lambda + i\mu$ ,  $y = \lambda - i\mu$ ,

$$\theta^2 = -\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\right)^2\right]$$

, étant égal à  $\frac{1}{L}$ , doit être forcément réel; par suite,  $\left(\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mu}\right)^2$  doit être réel et négatif.

 $\varphi$  est une fonction de  $\lambda$  et de  $\mu$ , qu'on peut toujours mettre sous la forme

$$\varphi = P(\lambda, \mu) + iQ(\lambda, \mu),$$

P et Q étant deux fonctions réelles. On aura alors

$$-\theta^{2} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\right)^{2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\right)^{2} = \left(\frac{\partial P}{\partial \lambda}\right)^{2} + \left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)^{2} - \left(\frac{\partial Q}{\partial \lambda}\right)^{2} - \left(\frac{\partial Q}{\partial \mu}\right)^{2} + 2i\left(\frac{\partial P}{\partial \lambda}\frac{\partial Q}{\partial \lambda} + \frac{\partial P}{\partial \mu}\frac{\partial Q}{\partial \mu}\right).$$

Pour que le soit réel, il faut que la condition

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \lambda} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mu} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mu}$$

soit remplie. Il reste alors

$$\theta^2 = \left(\frac{\partial Q}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial \mu}\right)^2 - \left(\frac{\partial P}{\partial \lambda}\right)^2 - \left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)^2$$

D'autre part,  $e^{\circ}$ , étant égal à X + Y, doit être de la forme

fonct 
$$(\lambda + i\mu)$$
 + fonct  $(\lambda - i\mu)$ ,

ce qui entraîne la condition

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}(e^{\varphi}) + \frac{\partial^2}{\partial \mu^2}(e^{\varphi}) = 0$$

ou bien

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\right)^2 = 0,$$

ou, en développant,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial \mu^2} + \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mu}\right)^2 - \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \lambda}\right)^2 - \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mu}\right)^2 + i\left(\frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{\partial \mu^2}\right) = \mathbf{0},$$

d'où

$$\begin{split} \frac{\partial^2 Q}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial \mu^2} &= o\,, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \mu^2} + \left(\frac{\partial P}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)^2 &= \left(\frac{\partial Q}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial \mu}\right)^2 \cdot \end{split}$$

Soit  $\varpi$  une fonction de  $\lambda$  et de  $\mu$ , telle que l'on ait

$$\frac{\partial \varpi}{\partial \lambda} = \frac{\partial Q}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial \varpi}{\partial \mu} = -\frac{\partial Q}{\partial \lambda}.$$

La fonction  $\varpi$  existe, puisque  $\frac{\partial^2 Q}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial \mu} = 0$ .

La relation  $\frac{\partial P}{\partial \lambda} \frac{\partial Q}{\partial \lambda} + \frac{\partial P}{\partial \mu} \frac{\partial Q}{\partial \mu} = 0$  devient

$$\frac{\partial P}{\partial \lambda} \frac{\partial \sigma}{\partial \mu} - \frac{\partial P}{\partial \mu} \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} = 0,$$

ce qui exige évidemment que P soit fonction de a. Il en résulte

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial P}{\partial \sigma} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \mu^2} = \frac{\partial P}{\partial \sigma} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \mu}\right)^2,$$

et, par suite, en remarquant que  $\frac{\partial^2 \varpi}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 \varpi}{\partial \mu^2} = 0$ ,

$$\theta^2 = rac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} + rac{\partial^2 P}{\partial \mu^2} = rac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2} \Big[ \Big(rac{\partial \sigma}{\partial \lambda}\Big)^2 + \Big(rac{\partial \sigma}{\partial \mu}\Big)^2 \Big].$$

P n'est pas une fonction quelconque de a, car la condition

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial \mu^2} + \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mu}\right)^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mu}\right)^2$$

peut s'écrire

$$\left[\frac{\partial^2 P}{\partial \varpi^2} + \left(\frac{\partial P}{\partial \varpi}\right)^2\right] \left[\left(\frac{\partial \varpi}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varpi}{\partial \mu}\right)^2\right] = \left(\frac{\partial \varpi}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varpi}{\partial \mu}\right)^2$$

ou

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial \mathbf{\varpi}^2} + \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{\varpi}}\right)^2 = 1.$$

On tire de là, en comprenant dans @ la constante introduite par l'intégration,

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{\varpi}} = \frac{e^{2\,\mathbf{\varpi}} - \mathbf{I}}{e^{2\,\mathbf{\varpi}} + \mathbf{I}},$$

et

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial \mathbf{\varpi}^2} = \frac{4e^{2\mathbf{\varpi}}}{(e^{2\mathbf{\varpi}} + \mathbf{I})^2} = \frac{4}{(e^{\mathbf{\varpi}} + e^{-\mathbf{\varpi}})^2} = \frac{\mathbf{I}}{\cos^2 i\mathbf{\varpi}}.$$

Donc enfin:

La valeur la plus générale de  $\theta$  est, en appelant  $\varpi$  une fonction isotherme de  $\lambda$  et de  $\mu$ , c'est-à-dire une solution quelconque de l'équation  $\frac{\partial^2 \varpi}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 \varpi}{\partial \mu^2} = 0,$ 

$$\theta = \frac{1}{\cos i \varpi} \sqrt{\left(\frac{\partial \varpi}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varpi}{\partial \mu}\right)^2}.$$

Lorsque  $\varpi$  est fonction de  $\lambda$  seulement, il ne peut être isotherme que s'il se réduit à  $A\lambda$ , A étant une constante. On a alors  $\theta = \frac{A}{\cos i A\lambda}$ , d'où  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial \lambda \partial \mu} = 0$ , et l'équation en  $\nu$  se réduit à

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial \lambda \partial \mu} = \frac{\cos i \mathbf{A} \lambda}{\mathbf{A}} \left( \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} - \frac{\partial f_1}{\partial \mu} \right).$$

 $\rho$  peut donc être obtenu au moyen de deux quadratures successives. L'hypothèse  $\varpi = \text{fonct}(\lambda)$  donne  $\frac{1}{\rho_1} = \frac{\partial \theta}{\partial \mu} = 0$ , c'est-à-dire que la surface minima est réglée. On sait que la seule surface minima jouissant de cette propriété est la surface de vis à filet carré : nous retombons ainsi sur un cas précédemment étudié.

Lorsque les quantités  $f_1$ ,  $f_2$  sont les dérivées partielles d'une même fonction (ce qui arrive chaque fois que l'intervalle entre deux trajectoires orthogonales consécutives des forces extérieures varie d'un point à l'autre de l'une de ces trajectoires en raison inverse de  $\sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \frac{\mathrm{F}}{\theta}$ ), on a

 $\frac{\partial f_2}{\partial \lambda} - \frac{\partial f_1}{\partial \mu} = 0$ . L'équation en  $\nu$  devient, par suite,

$$(20) \qquad \frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 \nu}{\partial \lambda \partial \mu} = \frac{1}{\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \lambda \partial \mu}.$$

Sous cette forme remarquable, on aperçoit immédiatement la solution  $\frac{\nu}{\theta} = \text{const.}$  Par conséquent, pour une surface minima quelconque soumise à des forces tangentielles qui satisfont à la condition  $\frac{\partial f_2}{\partial \lambda} - \frac{\partial f_1}{\partial \mu} = 0$  on saura toujours déterminer un état particulier d'équilibre : il suffira de choisir convenablement les conditions relatives aux limites.

#### Surface de révolution minima.

Dans le cas de la surface de révolution minima,  $\theta$  reste constant pour chaque parallèle, c'est-à-dire pour chaque ligne telle que  $\lambda - \mu$  soit constant. Si l'on pose

$$\lambda + \mu = \alpha$$

$$\lambda - \mu = \beta$$

et si l'on prend  $\alpha$ ,  $\beta$  comme nouvelles variables,  $\theta$  dépend seulement de  $\alpha$ . La fonction isotherme  $\varpi$  se réduit alors à  $\alpha$ , et  $\theta$  a pour valeur

$$\theta = \frac{\sqrt{2}}{\cos i \alpha}$$
.

On tire de là

$$\frac{\partial \theta}{\partial \lambda} = \frac{\partial \theta}{\partial \mu} = \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = i \, \theta \, \text{tang} \, i \, \alpha,$$

et les équations d'équilibre, supposées d'abord sans second membre,

$$\theta \frac{\partial n_2}{\partial \lambda} + (n_1 - n_2) \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} = 0,$$

$$\theta \frac{\partial n_1}{\partial u} + (n_2 - n_1) \frac{\partial \theta}{\partial u} = 0,$$

donnent

$$\frac{\partial n_2}{\partial \lambda} = -\frac{\partial n_1}{\partial \mu} \cdot$$

$$n_{\scriptscriptstyle 4} = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \lambda}, \quad n_{\scriptscriptstyle 2} = -\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mu},$$

et cette fonction est définie par l'équation

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial \lambda \partial \mu} - \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mu}\right) \frac{\frac{d\theta}{dz}}{\theta} = \mathbf{0}$$

ou bien

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial \beta^2} - 2 i \tan \beta i \alpha \frac{\partial P}{\partial \alpha} = 0.$$

**Posons** 

$$x = i \tan i \alpha,$$
  
 $y = \beta;$ 

x et y sont deux intégrales des équations

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial \alpha^2} - 2i \operatorname{tang} i \alpha \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \alpha} = \mathbf{o}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial \beta^2} = \mathbf{o}.$$

Si l'on prend x et y comme variables indépendantes, on trouve

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial x^2} \left( \frac{dx}{d\alpha} \right)^2 - \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial y^2} = \mathbf{0};$$

mais

$$\frac{dx}{d\alpha} = -\left(1 + \tan^2 i\alpha\right) = -\left(1 - x^2\right).$$

L'équation dont dépend la solution du problème peut donc s'écrire, en remplaçant P par z,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (1 - x^2)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Pour effectuer l'intégration, nous commencerons par chercher s'il existe des solutions de la forme

$$r = XY$$

X et Y étant des fonctions l'une de x seul, l'autre de y seul. En faisant la substitution, on trouve

$$XY'' = (I - x^2)^2 YX'',$$

ce qui n'est possible que si l'on a, en appelant a une constante,

$$Y'' = a^2 Y,$$
 $X'' = \frac{a^2}{(1 - x^2)^2} X.$ 

L'équation en Y s'intègre sans difficulté. L'équation en X rentre dans l'un des types généraux d'équations linéaires étudiés par M. J. Tannery (Annales de l'École Normale, 1875). Nous suivrons la méthode qu'il a indiquée pour en trouver une solution. Posons

$$X = (1 - x^2)^p u,$$

u étant une nouvelle inconnue et p un coefficient indéterminé. L'équation à résoudre devient, en divisant tout par  $(1-x^2)^{p-2}$ ,

$$(\mathbf{I} - x^2)^2 u'' - 4px(\mathbf{I} - x^2)u' - 2p(\mathbf{I} - x^2)u + 4p(p-\mathbf{I})x^2u - a^2u = 0.$$

Si nous posons

$$4p(p-1)=a^2,$$

le premier membre devient divisible par  $x^2$ , et il reste

$$(1-x^2)u'' - 4pxu' - 2p(2p-1)u = 0.$$

Changeons de variable, en écrivant

$$2t = x + 1$$

ďoù

$$1-x^2=4t(1-t).$$

Il vient

$$t(t-1)\frac{d^2u}{dt^2}+2p(2t-1)\frac{du}{dt}+2p(2p-1)u=0.$$

En introduisant trois nouveaux paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  tels que l'on ait

$$\gamma = 2p,$$

$$\alpha + \beta + 1 = 4p,$$

$$\alpha\beta = 2p(2p - 1),$$

sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles. 105 l'équation prend enfin la forme

$$(t^2-t)\frac{d^2u}{dt^2}-\left[\gamma-(\alpha+\beta+1)t\right]\frac{du}{dt}+\alpha\beta u=0.$$

C'est une équation étudiée par Gauss et qui admet pour solution la série hypergéométrique

$$\mathbf{F}(\alpha,\beta,\gamma,t) = \mathbf{I} + \frac{\alpha\beta}{\mathbf{I}\cdot\gamma}t + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\mathbf{I}\cdot2\cdot\gamma\cdot(\gamma+1)}t^2 + \dots$$

Pour que cette série soit convergente, il faut que t soit inférieur à 1. Cette condition est toujours remplie lorsque a, et par suite p, est réel, car, pour toutes les valeurs réelles de  $\alpha$ , la quantité

$$x = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}$$

reste comprise entre +1 et -1, et, par suite, t varie entre 1 et 0. Il faut en outre, en général, que  $\gamma$  ne soit pas un entier négatif. Mais, ici, cette restriction est inutile, car on reconnaît immédiatement que  $\alpha$  et  $\beta$  sont les racines de l'équation du second degré

$$m^2 + (1 - 4p)m + 2p(2p - 1) = 0,$$

racines qui sont égales à 2p et 2p-1 ou  $\gamma$  et  $\gamma-1$ . En prenant, par exemple,  $\beta=\gamma$ , la série hypergéométrique se réduit à

$$1+(\gamma-1)t+\frac{(\gamma-1)\gamma}{1\cdot2}t^2$$

ou bien à

$$(1-t)^{t-\gamma}$$
.

La valeur de X est, d'après cela,

$$\mathbf{X} = (\mathbf{I} - x^2)^p \left(\frac{\mathbf{I} - x}{2}\right)^{\mathbf{I} - 2p} = \frac{\mathbf{I} - x}{2^{2p-1}} \left(\frac{\mathbf{I} + x}{\mathbf{I} - x}\right)^p \cdot$$

En prenant pour Y la valeur  $Ge^{ay}$ , dans laquelle C désigne une constante arbitraire, et laissant de côté le facteur  $2^{2p-1}$ , on obtient la valeur

L,

suivante de z:

$$z = Ce^{ay}(1-x)\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{p}.$$

Pour en déduire la valeur de la tension inconnue  $n_i$ , il suffit de remarquer que

$$n_1 = \frac{\partial z}{\partial \lambda} = \frac{\partial z}{\partial \alpha} + \frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} - (1 - x^2) \frac{\partial z}{\partial x}.$$

En faisant le calcul, il vient

$$n_{i} = C e^{ay} \frac{(1+x)^{p}}{(1-x)^{p-1}} (a-2p+1+x)$$

La valeur correspondante de  $n_2$  est

$$n_2 = Ce^{ay} \frac{(1+x)^p}{(1-x)^{p-1}} (a+2p-1-x).$$

Pour vérifier ces résultats, cherchons comment varie  $n_i$  lorsqu'on se déplace sur la courbe  $\lambda = \text{const.}$  ou  $d\alpha + d\beta = 0$ , ou, ce qui revient au même,

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dx} = -\frac{1}{1-x^2} + y' = 0.$$

En considérant y comme une fonction de x définie par cette équation et prenant la dérivée de  $n_i$  par rapport à x, on trouve

$$dn_1 = dx C e^{ay} (1+x)^{p-1} (1-x)^{-p} (2p-1-x) 2x$$

ou bien

$$dn_1 = \frac{xdx}{1-x^2}(n_2-n_1),$$

ou encore, en remplaçant  $\frac{dx}{1-x^2}$  par  $-d\alpha$  et x par i tang  $i\alpha$ ,

$$dn_{i} = i \tan i \alpha d\alpha (n_{i} - n_{2}).$$

Comme, par hypothèse,  $d\lambda = 0$ , ce qui entraîne  $d\alpha = d\mu$ , on peut

sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles. 107 écrire

$$\frac{\partial n_1}{\partial \mu} = i \operatorname{tang} i \alpha (n_1 - n_2) = \frac{\frac{\partial \theta}{\partial \mu}}{\theta} (n_1 - n_2).$$

C'est la première des équations auxquelles doivent satisfaire  $n_1$  et  $n_2$ . La seconde s'obtiendrait d'une façon analogue.

Soient p, p' les deux racines de l'équation

$$4p(p-1)=a^2$$
.

On peut, dans les valeurs de  $n_1$  et  $n_2$  trouvées ci-dessus, substituer indifféremment à p l'une ou l'autre de ces racines. On obtient ainsi deux systèmes de solutions, ce qui permet de former les solutions complètes

$$n_{1} = Ce^{ay} \frac{(1+x)^{p}}{(1-x)^{p-1}} (a-2p+1+x) + C'e^{ay} \frac{(1+x)^{p'}}{(1-x)^{p'-1}} (a-2p'+1+x),$$

$$n_{2} = Ce^{ay} \frac{(1+x)^{p}}{(1-x)^{p-1}} (a+2p-1-x) + C'e^{ay} \frac{(1+x)^{p'}}{(1-x)^{p'-1}} (a+2p'-1-x).$$

Comme p + p' = 1, on peut encore écrire

$$n_1 = Ce^{ay} \frac{(1+x)^p}{(1-x)^{p-1}} (a-2p+1+x) + C'e^{ay} \frac{(1-x)^p}{(1+x)^{p-1}} (a+2p-1+x),$$

$$n_2 = Ce^{ay} \frac{(1+x)^p}{(1-x)^{p-1}} (a+2p-1-x) + C'e^{ay} \frac{(1-x)^p}{(1+x)^{p-1}} (a-2p+1-x).$$

Enfin l'on déduira de là les intégrales générales en considérant C et C' comme deux fonctions arbitraires de a,  $\varphi(a)$ ,  $\psi(a)$ , et prenant les intégrales définies par rapport à a entre deux limites déterminées  $a_1$  et  $a_2$ :

$$\begin{split} n_1 &= (1+x) \int_{a_1}^{a_2} e^{ay} \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^{p-1} (a-2p+1+x) \varphi(a) da \\ &+ (1-x) \int_{a_1}^{a_2} e^{ay} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{p-1} (a+2p-1+2) \psi(a) da, \\ n_2 &= (1+x) \int_{a_1}^{a_2} e^{ay} \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^{p-1} (a+2p-1-x) \varphi(a) da \\ &+ (1-x) \int_{a_1}^{a_2} e^{ay} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{p-1} (a-2p+1-x) \psi(a) da. \end{split}$$

108 L. LECORNU.

Pour résoudre le problème général de l'équilibre de la surface de révolution minima, il reste à trouver une solution particulière des équations avec second membre. On y parviendra en reprenant les valeurs de  $n_1$  et  $n_2$  qui renferment deux constantes arbitraires C et C' et en appliquant la méthode de variation des constantes arbitraires. On sera ainsi conduit à deux équations de la forme

$$\begin{split} &A\frac{\partial C}{\partial \lambda} + A'\frac{\partial C'}{\partial \lambda} = F_{_1}, \\ &A\frac{\partial C}{\partial \mu} + A'\frac{\partial C'}{\partial \mu} = F_{_2}. \end{split}$$

Ces équations ne peuvent être résolues que dans des cas particuliers. Par exemple, lorsque  $\frac{F_1}{A}$  est fonction de  $\lambda$  seulement et  $\frac{F_2}{A'}$  de  $\mu$  seulement, on peut supposer  $\frac{\partial C}{\partial \mu} = o$  et  $\frac{\partial C'}{\partial \lambda} = o$ ; alors C et C' sont donnés par de simples quadratures.

Lorsque  $\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{F_1}{A}\right) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{F_2}{A}\right)$ , on peut supposer C' = o et avoir C par une quadrature. Si  $\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{F_1}{A'}\right) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{F_2}{A'}\right)$ , on supposera au contraire C = o et on aura C' par une quadrature. Enfin, chaque fois que  $\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{F_1}{b}\right) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{F_2}{b'}\right)$ , on se procure immédiatement une solution particulière, sans recourir à la variation des constantes arbitraires, par la méthode précédemment indiquée.

En dehors des cas qui viennent d'être étudiés, l'intégration générale de l'équation (20) me paraît impraticable, quelque hypothèse que l'on fasse sur la fonction θ. M. Moutard a étudié, dans le XLV<sup>e</sup> Cahier du Journal de l'École Polytechnique, les équations de la forme

$$\frac{1}{\nu}\frac{\partial^2 \nu}{\partial \lambda \partial \mu} = f(\lambda, \mu),$$

et déterminé les conditions que doit remplir le second membre pour qu'il y ait une intégrale générale explicite. Je ne crois pas qu'on puisse trouver des valeurs de  $\theta$  appartenant aux surfaces minima et donnant en même temps, pour  $\frac{1}{6} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \lambda \partial \mu}$ , l'un des cas d'intégrabilité établis par M. Moutard.

Je ne multiplierai pas davantage les applications : celles qui précèdent me paraissent suffire pour élucider la théorie générale exposée dans les premiers Chapitres. Au sujet de ces applications, il y a lieu de remarquer que les cas dans lesquels j'ai réussi à trouver les intégrales générales explicites du problème se rapportent tous à des surfaces réglées. Il était aisé de prévoir, à l'inspection des équations (18), que ces surfaces seraient de beaucoup les plus faciles à traiter, car, lorsqu'on fait  $\frac{1}{\rho} = 0$ , l'inconnue  $n_{\perp}$  disparaît de la première équation.

Si l'on voulait étendre ces recherches et trouver d'autres surfaces pour lesquelles il fût possible d'obtenir la solution générale, il faudrait éliminer l'inconnue  $n_4$  entre les équations (18) privées de second membre, ce qui conduirait à une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 n}{\partial \alpha \partial \beta} + A \frac{\partial n}{\partial \alpha} + B \frac{\partial n}{\partial \beta} + C n = 0,$$

α et β désignant les paramètres des lignes asymptotiques. On ferait ensuite, sur les valeurs de A, B, C, les diverses hypothèses qui permettraient l'intégration de cette équation. Si l'on pouvait déterminer en même temps les surfaces correspondant à chaque hypothèse, il ne resterait plus qu'à leur appliquer des systèmes de forces tels que leur introduction dans le second membre n'empêchât pas l'intégration de s'effectuer; mais ce champ d'études est trop vaste pour que j'essaye aujourd'hui d'y entrer.

Vu et approuvé:

Paris, le 12 juillet 1880.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

MILNE EDWARDS.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 13 juillet 1880.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GRÉARD.

# SECONDE THÈSE.

## PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Multiplication et division de l'argument dans les fonctions elliptiques.

Vu et approuvé:

Paris, le 12 juillet 1880.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

MILNE EDWARDS.

Vu et permis d'imprimer:

Paris, le 13 juillet 1880.

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris.

GRÉARD.