ACADÉMIE DE PARIS.
FACULTÉ DES SCIENCES.

THÈSES

DE

MÉCANIQUE ET D'ASTRONOMIE,

SOUTENUES

DEVANT LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR ÊTRE ADMIS AU GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES,

Par Frédéric PETIT.

Professeurs.

MM. THÉNARD, Doyen.
LACROIX.
BIOT.
POISSON.
FRANCOEUR.
BEUDANT.
DULONG.
GEOFFROY-S^T-HILAIRE.
MIRBEL.

Professeurs adjoints.

MM. DE BLAINVILLE.
POUILLET.
CONSTANT PRÉVOST.
DUMAS.
AUGUSTE S^T-HILAIRE.
LIBRI.

Suppléant.

M. LEFÉBURE DE FOURCY.

PARIS,
IMPRIMERIE DE BACHELIER,
RUE DU JARDINET, N° 12, DERRIÈRE L'ÉCOLE DE MÉDECINE.
1835

A MM. ROMIEU ET BOISGIRAUD,

PROFESSEURS A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

A M. COMBES,

PROFESSEUR A L'ÉCOLE DES MINES DE PARIS.

Hommage de Reconnaissance

Pour les témoignages d'affection qu'ils m'ont donnés.

Petit.

THÈSE

DE MÉCANIQUE.

Calcul de l'effet des Machines en mouvement. Application du principe des forces vives.

On appelle *machine* tout instrument destiné à transmettre l'action des forces; ces forces peuvent, en général, être évaluées en poids qui leur seraient équivalens.

Dans une machine qui fonctionne, on distingue les forces en forces mouvantes et en forces résistantes; les premières sont celles dont les points d'application se meuvent dans le sens de leurs directions, ou plus généralement en formant des angles aigus avec ces directions; les secondes sont celles dont les points d'application se déplacent en sens contraire, c'est-à-dire en formant avec elles des angles obtus.

Les machines sont telles, qu'elles n'ont en général que deux mouvemens possibles et inverses l'un de l'autre; il suit de là qu'il suffira d'une seule équation pour déterminer leur mouvement quand le sens de ce mouvement sera connu; cette équation se déduit, en effet, du principe des vitesses virtuelles, combiné avec le principe de D'Alembert.

Désignons, pour la trouver, par Fdf, $F'df'$, etc., les momens virtuels des forces appliquées aux différens points m, m', etc., de la machine, par v, v', etc., les vitesses de ces mêmes points à un instant quelconque, c'est-à-dire après le temps t; par dv, dv', etc., les accroissemens de ces vitesses dans l'instant dt suivant; il résulte des deux principes énoncés, qu'en réunissant sous le signe Σ tous les termes de même forme, on aura

$$(A)\ldots\ \frac{1}{2}d\Sigma mv^2 = \Sigma F df,$$

et cette équation intégrée nous donne

$$(B)\ldots\ \frac{1}{2}\ \Sigma m(v^2 - v_0^2) = \int_{v_0}^{v} \Sigma F df,$$

en appelant v_0 la vitesse initiale.

Le second membre de l'équation (B) contient des termes dus aux forces mouvantes, et d'autres provenant des forces résistantes; en appelant Pdp, $P'dp'$, etc., les premiers; Qdq, $Q'dq'$, etc., les seconds; cette équation peut s'écrire

$$(C)\ldots\ \frac{1}{2}\Sigma m(v^2 - v_0^2) = \int_{v_0}^{v} \Sigma P dp - \int_{v_0}^{v} \Sigma Q dq.$$

Quelle que soit la nature des forces P, Q, sur lesquelles nous présenterons plus tard quelques considérations, on pourra toujours exprimer les intégrales $\int Pdp$, $\int Qdq$, par le moyen de poids descendus ou montés d'une certaine hauteur; il en est de même du premier membre de l'équation (C), car en supposant les vitesses v_0, v dues à de certaines hauteurs, ce premier membre prend la même forme que le second. On appelle, assez généralement, *quantités de travail élémentaire moteur et résistant*, les produits Pdp, Qdq; les intégrales de notre équation expriment par conséquent les quantités de travail développées pendant que les différentes parties de la machine sont passées des vitesses v_0, v'_0, etc., aux vitesses v, v', etc.

Si, par exemple, $\Sigma mv^2 = \Sigma mv_0^2$, il s'ensuit que le travail moteur total développé pendant cette période du mouvement de la machine, est égal au travail résistant produit pendant cette même période; c'est ce qui a lieu quand on considère le mouvement de la machine depuis le moment où elle part du repos, jusqu'au moment où elle y revient, et cela, quelles qu'aient été les variations des vitesses de ses différentes parties entre ces deux époques. Dans ce cas, si l'on suppose les forces de la machine remplacées par des poids, toujours le produit des poids P par le chemin vertical h dont ils sont descendus, est égal au produit des poids Q par le chemin vertical h' dont ils sont montés; on pourra donc disposer arbitrairement de l'une ou l'autre des deux quantités P, h, pour produire le travail nécessaire à la destruction du travail résistant Qh'.

On voit, d'après ces considérations, que pour comparer des ouvrages d'espèce différente, il suffit d'évaluer par le calcul ou l'expérience, l'une ou l'autre des deux quantités $\int Pdp$, $\int Qdq$, entre les deux limites correspondantes à $\Sigma mv^2 = \Sigma mv_0{}^2$; car alors ces deux quantités sont aussi égales entre elles; on prend pour unités, dans cette évaluation, le travail nécessaire pour élever 1 kilogramme ou quelquefois 1,000 kilogrammes à 1 mètre de hauteur verticale; ces deux unités prennent le nom de *petite* et de *grande unité dynamique*. Cependant on sent que le temps devrait entrer comme élément dans l'appréciation d'un ouvrage fait; aussi, pour s'en rendre indépendant, a-t-on choisi une autre unité appelée *force de cheval*, qui le renferme implicitement; mais ces considérations d'économie industrielle nous écarteraient de notre but, et nous nous dispenserons d'y insister plus long-temps.

Il n'entre point dans notre sujet de considérer toutes les forces qui peuvent se trouver dans P et dans Q, forces qui, du reste, sont excessivement variées; cependant nous dirons quelques mots de celles qui donnent lieu à des observations intéressantes.

Les forces motrices principales sont : la chaleur et la gravité. Les lois de cette dernière sont très simples, nous ne nous y arrêterons pas, mais nous présenterons quelques considérations sur celles de la chaleur, qui le sont un peu moins.

La chaleur agit comme force motrice par l'effet des dilatations qu'elle produit; d'après cela tous les corps, solides, liquides, ou gazeux, peuvent servir d'intermédiaire pour recueillir sa puissance; mais un corps solide se dilatant très peu et dans tous les sens, il serait difficile, par son moyen, d'utiliser tout l'effet de la chaleur; il produirait, il est vrai, des pressions énormes, mais ces pressions ne parcourraient que de très petits chemins, et par conséquent ne donneraient lieu qu'à de très petits mouvemens, tandis que dans les machines on a souvent besoin de mouvemens considérables; il en serait de même des corps liquides; seulement, ceux-ci peuvent se déformer, et s'il était possible de les enfermer dans des vases solides qui ne participassent pas à leur température, on conçoit que par ce moyen on porterait, si cela était nécessaire, toute leur expansion dans un sens.

Les gaz se dilatent beaucoup; mais les vapeurs, qui du reste ne paraissent être que des gaz à saturation, ont sur ces derniers l'avantage de pouvoir être liquéfiées, c'est-à-dire occuper un très petit espace après en avoir occupé un très grand; aussi sont-elles les agens mécaniques les plus employés; et parmi elles, évidemment, la plus économique est la vapeur d'eau, à laquelle se rapporteront principalement les considérations suivantes.

Les vapeurs agissent par leur élasticité; on sait que cette élasticité reste constante, tant que l'espace qui les renferme en est saturé, et que leur température ne change pas, mais qu'elle varie dans le cas contraire; si, par conséquent, comme cela a toujours lieu dans les machines, on les fait agir au-dessus du piston d'un cylindre dont la section perpendiculaire à l'axe serait égale à A, le travail moteur qu'elles produisent pendant la descente de ce piston sera exprimé par $Ape + A\int_e^E \varphi dh$. En désignant par P l'élasticité de la vapeur à saturation, supposée introduite pendant la partie e de la course totale du piston, par E cette course totale, et par φ la pression variable de la vapeur correspondant à la hauteur h parcourue par le piston, h étant compris entre E et e.

En admettant qu'au moyen d'une source extérieure on fournit la chaleur devenue latente par la dilatation de la vapeur, on a, d'après la loi de Mariotte, qui dans ce cas est applicable, $\varphi = P\frac{e}{h}$, et par suite, le travail moteur a pour expression $Ape\left(1 + \log\frac{E}{e}\right)$.

Ce travail moteur pourrait, d'après cela, devenir infini; mais il est évident que l'on doit borner la valeur de E d'après la pression résistante P', qui agit ordinairement derrière le piston, et à laquelle s'ajoutent encore les frottemens, etc.

Quand au lieu de fournir la chaleur absorbée par la dilatation de la vapeur, on laisse celle-ci se détendre sans entretenir sa température constante, l'expression de $\int_e^E \varphi dh$ n'est plus aussi facile à déterminer; car la loi de Mariotte n'est plus applicable, et ne peut plus donner la valeur de φ en fonction de P et de h.

Désignons par c, c' les chaleurs spécifiques de la vapeur à pression constante et à volume constant; il est facile de se convaincre que l'abaissement $(-d\theta)$ de température produit par une augmentation dv du volume v de vapeur dans le cas dont nous parlons, a pour expression $\left(\frac{c}{c'}-1\right)\left(\frac{1+\alpha\theta}{\alpha}\right)\frac{dv}{v}$, α étant le coefficient de dilatation $= 0,00375$ des gaz et des vapeurs, et θ la température de la vapeur contenue dans le volume $v = Ah$.

On ne sait rien de bien positif sur le rapport $\frac{c}{c'}$, du moins pour ce qui regarde la vapeur d'eau; MM. Gay-Lussac et Dulong pensent, d'après quelques expériences, que pour l'air atmosphérique, il est indépendant de la température; mais pour les autres gaz, les expériences n'ont pas été assez variées; cependant, si l'on admet que pour la vapeur d'eau il est aussi constant, en le désignant par n, il est facile d'arriver à l'expression $\int_e^E \varphi dh = \frac{PE^{(1-n)}e^n - Pe}{1-n}$, en se rappelant que la force élastique d'une vapeur est liée à sa température par l'équation $P = K\rho\,(1+\alpha t)$, K étant un coefficient constant, et ρ la densité de la vapeur à la température t.

Cependant, nous n'avons pas assez de notions sur n pour pouvoir ainsi le supposer constant; d'après cela, notre calcul ne saurait être regardé comme rigoureux; mais on peut y suppléer au moyen des formules empiriques de MM. Dulong et Arago, et du principe de MM. Clément et Desormes.

Les deux premiers de ces physiciens ont trouvé que la force élastique de la vapeur à saturation pouvait s'exprimer en fonction de sa température par la formule $P = C(a+bt)^{\mu}$, P étant la pression en kilogrammes par centimètre carré, t étant la température au-dessus de zéro en degrés centigrades, a, b, C, μ, étant des coefficiens numériques dont les valeurs sont différentes, suivant qu'on applique la formule aux températures comprises de zéro à 145° ou de 145° à 224; aussi devrons-nous supposer dans ce qui va suivre que les températures correspondant à E et à e sont comprises toutes deux en même temps dans l'une ou l'autre de ces limites, ce qui a lieu en général dans les machines.

MM. Clément et Desormes admettent qu'une masse donnée de vapeur contient toujours la même quantité de chaleur, quelles que soient sa pression et sa température, pourvu qu'elle soit à son *maximum* de densité; de sorte que si l'on a une certaine masse de vapeur à saturation, et qu'on la laisse se dilater sans addition ni soustraction de chaleur, l'espace qui la renfermera sera toujours saturé.

D'après cela on pourra prendre

$$\varphi = P\,\frac{(a+b\theta)^{\mu}}{(a+bt)^{\mu}}, \quad h = e\,\frac{(1+\alpha\theta)\,(a+bt)^{\mu}}{(1+\alpha t)\,(a+b\theta)^{\mu}},$$

t étant la température correspondant à la pression P, et l'on arrivera à l'expression

$$\int_e^E \varphi dh = \frac{Pe}{(1+\alpha t)}\left[\alpha(t-\theta_{,})(\mu-1)+\mu\log\left(\frac{a+bt}{a+b\theta_{,}}\right)\left(1-\frac{a\alpha}{b}\right)\right],$$

en désignant par $\theta_{,}$ la température correspondant à l'espace E parcouru par le piston, et qui sera donnée par un manomètre et la formule de MM. Arago et Dulong.

Il est facile de déduire des formules précédentes que sous le rapport de l'économie, il y a un très grand avantage à élever la vapeur à une haute température, et à la laisser se détendre pendant une partie de sa course; mais ce serait sortir de notre sujet que d'entrer ici dans des calculs numériques, et nous nous contenterons de faire cette observation en passant.

Examinons maintenant quelques-unes des forces résistantes.

Tant que la machine est en repos, il n'entre dans Q que les pressions ou tractions des corps sur lesquels elle doit agir ou qu'elle doit modifier; mais quand elle se met en mouvement, il naît de nouvelles forces résistantes tenant au frottement, à la raideur des cordes, à la résistance des milieux dans lesquels elle se meut, etc.; enfin, on doit remarquer que les corps solides qui constituent ses différentes parties et que l'on regarde comme rigides, ne le sont pas rigoureusement, mais s'allongent ou se raccourcissent toujours même sous l'action de petites forces, ce que l'on conclut par analogie du cas où les forces produisent des compressions ou des allongemens sensibles; dès lors, l'élasticité produit des attractions ou des répulsions suivant que le corps a été allongé ou raccourci; ainsi il faudrait dans le second membre de l'équation (C) tenir compte de ces nouvelles forces; de même on devrait tenir compte dans le premier des vitesses moléculaires que ces forces impriment indépendamment du mouvement général.

L'expérience prouve cependant que l'on peut faire abstraction de ces vitesses et de ces forces moléculaires naissant des déformations des pièces rigides, pourvu que ces déformations ne soient pas persistantes; et cela se conçoit en effet, car les forces moléculaires paraissent dépendre seulement des distances qui séparent les molécules, puisqu'elles redeviennent nulles quand ces distances redeviennent les mêmes, ou que le corps reprend sa forme primitive; dès lors, en désignant par $\varphi(r)$ l'une de ces actions moléculaires dues à la compression ou à la dilatation, le travail résistant $\int \varphi(r)dr$, dû à cette action pendant la compression ou la dilatation, sera égal au travail moteur développé pendant la seconde période du phénomène, c'est-à-dire pendant que le corps reprend sa première forme, puisque le terme $\varphi(r)dr$ passe successivement par les mêmes valeurs; de même les vitesses des molécules dues à l'action de ces forces ne sauraient altérer le premier membre de l'équation (C), puisqu'elles sont nulles au commencement et à la fin des déformations.

Il n'y a que le cas du choc où les réactions moléculaires ne peuvent se négliger en général, car presque toujours l'élasticité est altérée, c'est-à-dire que le corps ne reprend pas exactement sa forme primitive; par conséquent l'intégrale $\int\varphi(r)dr$, quoique changeant de signe, sans doute, pendant la durée du phénomène, ne s'étend pas aux mêmes limites ou valeurs de r après le changement de signe qu'avant ce changement; peut-être aussi le terme $\varphi(r)dr$ n'a-t-il plus les mêmes valeurs dans les deux cas, pour des valeurs égales de r; la différence entre les deux valeurs de cette intégrale exprime donc le travail résistant développé par le choc, et en observant que la durée du choc est inappréciable, que par conséquent les forces qu'il développe doivent être très grandes, puisqu'elles communiquent des vitesses finies dans un temps très court, et qu'il est permis à côté de ces forces très considérables de négliger pendant ce petit laps de temps l'action des autres forces ordinaires, on peut se convaincre par l'équation (C) elle-même que la demi-somme des forces vives perdues dans la durée du choc, mesure à très peu près le travail résistant développé par ce dernier.

Le mouvement de la machine produit aussi des vibrations qui se communiquent à l'air, aux supports, à la terre, etc., et par conséquent des corps qui lui sont étrangers absorbent des forces vives dont il faudrait tenir compte dans le premier membre de l'équation (C); en même temps les actions de ces corps sur les parties de la machine font naître des forces qui devraient entrer dans le second membre de cette même équation; mais on sent qu'il serait à peu près impossible de tenir compte de toutes ces forces; heureusement qu'elles sont en général assez faibles à côté de celles mesurées qui sont appliquées à la machine, et qu'on peut en faire abstraction dans la pratique, sans que pour cela l'équation (C) cesse de donner des résultats suffisamment exacts; du reste, ces considérations importent peu aux idées générales que nous nous sommes proposé de présenter ici; nous remarquerons seulement que la résistance des milieux peut être supposée comprise dans les dernières forces que nous venons d'énumérer; quant au frottement, il est regardé comme une force appliquée en sens inverse du mouvement qui a lieu et dans le plan tangent aux deux surfaces qui frottent; il agit par conséquent toujours comme force résistante; ses lois ainsi que celles de la raideur des cordes, ont été déterminées par expérience; nous nous contenterons d'en citer une à laquelle nous aurons peut-être occasion de recourir plus tard; elle consiste en ce que dans le cas de deux corps solides il a été reconnu proportionnel à la pression exercée entre les deux surfaces en contact.

Indépendamment des forces précédentes, il entre dans P,Q les actions mutuelles des diverses parties de la machine, telles, par exemple, que celles qui s'exercent entre les différens points d'une masse fluide; ces dernières, comme on sait, sont de deux sortes; les unes s'étendent à de grandes distances, les autres au contraire n'ont de valeurs sensibles que pour des distances insensibles; mais les unes et les autres doivent entrer dans le second membre de l'équation (C), car les secondes ne pourraient être négligées, qu'autant que l'on aurait tenu compte des pressions intérieures auxquelles elles donnent lieu.

Enfin, il arrive quelquefois que des corps abandonnent la machine ou bien y arrivent avec une certaine vitesse; on sent qu'il faut les faire entrer dans le premier membre de l'équation (C), et que ces corps diminuant ou augmentant la somme des forces vives, peuvent être considérés comme produisant un travail résistant ou un travail moteur.

Après ces considérations sur les forces P, Q, revenons à l'équation (C); supposons que la machine parte du repos, alors l'équation (C) devient

$$(D) \ldots \frac{1}{2}\Sigma mv^2 = \int_0^v \Sigma P dp - \int_0^v \Sigma Q dq,$$

et pour que la machine se mette en mouvement, il faut que dans les premiers instans le travail moteur surpasse le travail résistant; le mouvement ira en s'accélérant tant que cela aura lieu, mais à mesure que la vitesse s'accroît, il arrive ordinairement que ΣPdp diminue, tandis que ΣQdq augmente, et qu'après un temps assez court $\Sigma Pdp = \Sigma Qdq$; dans ce moment, le mouvement de la machine devient uniforme, car on ne peut supposer qu'en général il y ait compensation entre le gain et la perte de force vive de ses différentes parties; pendant tout le temps où cette égalité se maintient, on voit que le travail moteur ΣPdp est employé à vaincre le travail résistant ΣQdq; mais ce dernier ne comprend pas seulement le travail utile, il comprend aussi le travail résistant né du mouvement, en vertu des forces passives que nous avons énumérées plus haut; enfin, il vient une nouvelle période où à chaque instant ΣQdq surpasse ΣPdp, et le mouvement de la machine se ralentit; elle finirait même par s'arrêter si après avoir atteint un *minimum*, les forces vives ne croissaient de nouveau; quand ces accroissemens et ces diminutions de forces vives sont devenus périodiques, ce qui a lieu ordinairement après peu de temps, on dit que la machine est parvenue à un état stable de mouvement; en représentant par conséquent le mouvement des machines au moyen d'une courbe dont les ordonnées seraient les forces vives et dont les abscisses seraient les temps, cette courbe se releverait à l'origine et ne tarderait pas à onduler régulièrement entre deux lignes droites parallèles à l'axe des temps.

D'ailleurs, tant que ΣPdp est plus grand que ΣQdq, on voit que l'excès de travail moteur se transforme en forces vives, et qu'au contraire les forces vives se transforment en travail résistant, c'est-à-dire sont employées à vaincre ce dernier, tant que ΣPdp est plus petit que ΣQdq. Cela a souvent lieu dans les machines; le pendule, par exemple, pendant qu'il descend, transforme en forces vives le travail moteur que la pesanteur lui transmet, et ce sont ces forces vives qui, pendant qu'il remonte, sont employées à vaincre le travail résistant que cette même pesanteur lui oppose; dans les sonnettes, le mouton n'agit sur le pieu qu'au moyen des forces vives qu'il a acquises en tombant; presque constamment enfin on voit s'opérer cette transformation du travail moteur en forces vives ou réciproquement, et cela justifie la dénomination de forces vives.

Il y a dans certaines machines des pièces dont il importe que le mouvement soit uniforme, par exemple, dans les filatures, les moulins à blé, etc., qui doivent aller assez vite pour faire un certain ouvrage et pas trop, afin de ne pas briser les fils ou échauffer les grains, etc.; or, il est impossible de conserver ce mouvement uniforme dans une machine s'il y a des pièces à mouvement alternatif où les vitesses de ces pièces sont nulles par intervalles, et d'autres fois très considérables; mais on peut se rapprocher de cette uniformité.

En effet, on sait que dans une machine on peut déduire en général de la vitesse ω d'une pièce quelconque à mouvement continu celle de toutes les autres pièces douées d'un mouvement de même nature; l'accroissement des forces vives de toutes ces pièces pourra s'exprimer par $A\,(\omega^2-\omega_0^2)$, A étant un facteur constant qui dépend des momens d'inertie des pièces à mouvement de révolution et des masses de celles à mouvement de translation continu, telles que des chaînes sans fin, etc. En isolant dans le premier membre de l'équation (C) ce terme de celui qui exprimerait les forces vives des pièces à mouvement alternatif et que nous laisserons sous la forme $\Sigma\, m\,(v^2-v_0^2)$, cette équation (C) devient

$$(\mathrm{E})\ldots\ \tfrac{1}{2}A\,(\omega^2-\omega_0^2)+\tfrac{1}{2}\Sigma\, m\,(v^2-v_0^2)=\int\Sigma\,\mathrm{P}dp-\int\Sigma\,\mathrm{Q}dq;$$

d'où l'on tire

$$\omega-\omega_0=\frac{\mathrm{S}}{A\left(\frac{\omega+\omega_0}{2}\right)},$$

en posant

$$\mathrm{S}=\int\Sigma\,\mathrm{P}dp-\int\Sigma\,\mathrm{Q}dq-\tfrac{1}{2}\Sigma\, m\,(v^2-v_0^2);$$

Et l'on voit que pour une certaine augmentation de travail moteur ou de travail résistant, la variation $\omega-\omega_0$ de vitesse angulaire sera d'autant plus faible que la vitesse angulaire moyenne $\frac{\omega+\omega_0}{2}$ ou le facteur A seront plus grands. Or, pour ne pas augmenter les momens d'inertie de toutes les pièces de la machine à mouvement continu, ce qui causerait un excès de dépense et en même temps des pertes de travail par suite des frottemens, etc.,[1] comme, d'ailleurs, la vitesse moyenne $\frac{\omega+\omega_0}{2}$ ne peut dépasser certaines limites dépendant de la nature de l'ouvrage qu'on veut exécuter, on se contente d'augmenter le moment d'inertie d'une seule des pièces qu'on appelle volant, et qui consiste en un corps solide placé à la plus grande distance possible d'un axe horizontal autour duquel il tourne.

L'énergie du volant étant proportionnelle à son moment d'inertie, et celui-ci pouvant être regardé comme proportionnel à sa masse et au carré de son rayon, on voit qu'il y a un très grand avantage à augmenter la grandeur de ce dernier, car on évite par là de lui donner un trop grand poids qui chargerait beaucoup la machine et augmenterait les frottemens sans influer autant que le rayon sur la valeur de A.

Le volant peut être considéré comme un réservoir de forces vives à cause de son grand moment d'inertie; c'est lui qui, dans beaucoup de cas, fournit le travail moteur nécessaire pour vaincre certaines résistances instantanées. Dans les lamineries, par exemple, quand on présente une barre de fer aux cylindres il est possible qu'à cet instant les forces mouvantes soient bien inférieures à celles résistantes, et le mouvement ne se continue alors qu'en vertu des forces vives déjà acquises, dont une très grande partie était, pour ainsi dire, emmagasinée dans le volant. Du reste, pour que le moment d'inertie de celui-ci soit le plus petit possible, ce qui évidemment est avantageux, parce que sa masse charge aussi la machine, il est bon de faire que les pièces à mouvement alternatif s'équilibrent entre elles autant que possible; par exemple, que les centres de gravité de certaines d'entre elles s'élèvent quand ceux des autres s'abaissent, etc., alors les forces mouvantes pourront être plus uniformes, moins considérables, et dans les momens où elles seraient insuffisantes, le volant aura moins de sa force vive à dépenser, ce qui permettra de le rendre plus petit. On sent d'ailleurs qu'il faut y recourir le moins possible, parce que lui aussi consomme du travail pour se mettre en mouvement et arriver à son état de vitesse stable; par conséquent cet état de stabilité est aussi plus lent à s'établir dans la machine, et lors, surtout, que celle-ci doit s'arrêter souvent, l'emploi du volant serait excessivement nuisible, car à chaque reprise il consommerait une partie du travail, et il serait bien difficile d'utiliser ce travail, du moins en entier, pendant la période où on laisserait la machine s'arrêter, c'est-à-dire où l'on suspendrait l'action des forces motrices.

On a souvent à considérer les mouvemens relatifs dans les machines; par exemple, quand des particules liquides sont entraînées dans l'espace au moyen d'une roue à aubes sur laquelle elles-mêmes ont un mouvement qui leur est propre : or il est facile de voir dans ce cas comment on doit modifier le principe des forces vives; car en tenant compte des résistances normales et tangentielles occasionées par les surfaces sur lesquelles ont lieu les mouvemens relatifs, ainsi que des actions mutuelles exercées entre les différens points de la machine, on peut regarder chacun de ces points comme entièrement libre, et prendre, par conséquent, pour vitesses virtuelles des déplacemens quelconques; ce qui permet de considérer soit le mouvement absolu et l'augmentation de forces vives qui en résulte, soit le mouvement relatif et l'augmentation de forces vives qui en résulte aussi : nous verrons même que dans ce dernier cas les résistances normales opposées par les surfaces disparaissent de l'équation.

Supposons donc que x, y, z représentent après le temps t les coordonnées d'un point quelconque m, dont les forces accélératrices totales, en y comprenant l'action des surfaces, etc., aient pour composantes X, Y, Z; soient $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ les composantes de sa vitesse absolue que nous ferons égales à $\left(\frac{d_{,}x}{dt}+\frac{d'x}{dt}\right)$, $\left(\frac{d_{,}y}{dt}+\frac{d'y}{dt}\right)$, $\left(\frac{d_{,}z}{dt}+\frac{d'z}{dt}\right)$, en regardant le mouvement du système comme composé de deux autres, et représentant par $d_{,}$ les accroissemens de coordonnées résultant du mouvement relatif de ses différens points, et par d' les accroissemens de ces mêmes coordonnées résultant du mouvement commun dans lequel les distances de ces points ne varieraient pas. Si, de plus, nous appellons $X\delta x$, $Y\delta y$, $Z\delta z$ les momens virtuels des forces X, Y, Z, et si nous posons $\frac{dx}{dt}=\mu=\mu_{,}+\mu'$, $\frac{dy}{dt}=\lambda=\lambda_{,}+\lambda'$, $\frac{dz}{dt}=\gamma=\gamma_{,}+\gamma'$, l'équation des vitesses virtuelles pourra s'écrire

$$\Sigma m\,(X\,\delta x+Y\,\delta y+Z\delta z)=\Sigma m\left(\frac{d\mu}{dt}\delta x+\frac{d\lambda}{dt}\delta y+\frac{d\gamma}{dt}\,\delta z\right).$$

Et comme nous pouvons supposer tous les points du système parfaitement libres d'après la nature des forces X, Y, Z, prenons $\delta x=d_{,}x$, $\delta y=d_{,}y$, $\delta z=d_{,}z$, et cette équation donnera

$$(F) \ldots \quad \tfrac{1}{2}\,\Sigma m\,(\varpi^2-\varpi_0^2)=\int_{\varpi_0}^{\varpi} F d_{,}f+\int_{\varpi_0}^{\varpi} L d_{,}l,$$

en représentant par ϖ la vitesse relative de m; par $d_{,}f$, la projection du déplacement relatif de m sur la force F résultante de mX, mY, mZ, par L une force égale et directement opposée à celle dont $\frac{d\mu'}{dt}$, $\frac{d\lambda'}{dt}$, $\frac{d\gamma'}{dt}$ sont les composantes, et par $d_{,}l$ la projection sur la force L du déplacement relatif de m.

Nous remarquerons que les résistances normales dues aux surfaces n'entrent pas dans notre équation (F). En effet, si l'on désigne par $M=0$ l'équation d'une de ces surfaces exprimée au moyen du temps t et des coordonnées x, y, z rapportées à des axes fixes, le point m devra se trouver constamment sur cette surface en vertu de son mouvement absolu, et l'on peut supposer qu'il y resterait en vertu du mouvement commun du système; de sorte que cette équation $M=0$ devra être satisfaite par la substitution à la place de t, x, y, z, soit de $t+dt$, $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, soit de $t+dt$, $x+d'x$, $y+d'y$, $z+d'z$; ce qui conduira à la relation $\frac{dM}{dx}d_{,}x+\frac{dM}{dy}d_{,}y+\frac{dM}{dz}d_{,}z=0$, en vertu de laquelle les résistances normales opposées par les surfaces disparaissent de l'équation (F).

Cette équation exprime que la demi-variation des forces vives dans le mouvement relatif est égale au travail développé par les forces F réellement appliquées, et les forces fictives L qui, à un instant quelconque, détruiraient les forces relatives au mouvement général du système.

Si tous les points matériels m se meuvent sur une surface qui a un mouvement uniforme et rectiligne dans l'espace, en prenant ce mouvement pour le mouvement général du système, $\frac{d\mu'}{dt}$, $\frac{d\lambda'}{dt}$, $\frac{d\gamma'}{dt}$, sont nuls, et le terme $\int\Sigma L d_{,}l$ disparaît de l'équation (F). Il en est de même si le mouvement de la surface est circulaire et uniforme, celui, par exemple, d'une roue hydraulique tournant autour d'un axe avec la vitesse angulaire α, et si les particules m, après avoir oscillé sur cette surface, la quittent à la même distance de l'axe que celle à laquelle elles y sont entrées; car en désignant par r la distance d'une de ces particules à l'axe de rotation, l'intégrale $\int\Sigma L d_{,}l$ devient égale à $\alpha^2\Sigma m\int r d_{,}r$, et est nulle quand les valeurs extrêmes de r sont égales entre elles.

La détermination du travail moteur que produisent des particules liquides en mouvement sur des surfaces qui se meuvent elles-mêmes, est une des principales applications du théorème des forces vives dans les mouvemens relatifs; mais, afin de rendre plus claire cette application, séparons, dans le second nombre de nos équations, les différentes forces qui s'y trouvent, et que jusqu'ici nous avions laissées confondues sous un même symbole. Soient H la résultante de toutes les forces extérieures données qui agissent sur la particule m; $\pm$R l'action attractive ou répulsive qui s'exerce entre cette particule et une autre particule dont elle est séparée par la distance r; N la résistance normale que le point m éprouve de la part de la surface sur laquelle il se meut, et qui est égale et opposée à l'action de m sur cette surface; F la force naissant du frottement. Désignons en outre, par les caractéristiques d, $d_{,}$, d', les accroissemens virtuels dans le mouvement absolu, dans le mouvement relatif et dans le mouvement général; il résulte des principes énoncés, que l'on aura les deux équations

$$(1)\ldots \text{ Mouv. absolu. } \frac{1}{2}\Sigma m(v^2-v_0^2)=\int_{v_0}^{v}\Sigma \mathrm{H}\,dh\pm\int_{v_0}^{v}\Sigma \mathrm{R}\,dr+\int_{v_0}^{v}\Sigma \mathrm{N}\,dn-\int_{v_0}^{v}\Sigma \mathrm{F}\,df.$$

$$(2)\ldots \text{ Mouv. relatif.. } \frac{1}{2}\Sigma m(\varpi^2-\varpi_0^2)=\int_{\varpi_0}^{\varpi}\Sigma \mathrm{H}\,d_{,}h\pm\int_{\varpi_0}^{\varpi}\Sigma \mathrm{R}\,d_{,}r-\int_{\varpi_0}^{\varpi}\Sigma \mathrm{F}\,d_{,}f+\int_{\varpi_0}^{\varpi}\Sigma \mathrm{L}$$

en regardant dans (1) dn comme positif ou négatif, suivant que le déplacement virtuel se projette sur N ou sur son prolongement.

D'ailleurs, en posant $\int_{v_0}^{v}\Sigma \mathrm{N}\,dn = -\mathrm{K}$, la quantité K exprimera le travail moteur développé par les particules m contre les surfaces; quant au terme dû au frottement, il est ordinairement le même dans les deux équations (1), (2); enfin, le terme dû aux actions mutuelles, est aussi le même évidemment, si l'on suppose que ϖ, ϖ_0, v, v_0 correspondent aux mêmes valeurs du temps, et que le mouvement général du système est choisi de telle sorte que dans ce mouvement les distances r ne changent pas. On peut par conséquent déterminer la valeur de K au moyen de ces équations; car, en retranchant la seconde de la première, tout ce qui n'est pas immédiatement fourni par la question disparaît, excepté K, et l'on trouve

$$(\mathrm{G})\ldots\ \tfrac{1}{2}\Sigma m(v^2-v_0^2)-\tfrac{1}{2}\Sigma m(\varpi^2-\varpi_0^2)=\int\Sigma \mathrm{H}\,d'h-\int\Sigma \mathrm{L}\,d_{,}l-\mathrm{K},$$

en observant que $dh-d_{,}h=d'h$; d'où l'on tire le travail moteur K transmis aux surfaces.

Les vitesses relatives sont, avec les vitesses communes, les composantes des vitesses totales; de sorte qu'en appelant u la vitesse commune, on a

$$v^2 = \varpi^2 + u^2 + 2\varpi u \cos(\varpi u),$$
$$v_0^2 = \varpi_0^2 + u_0^2 + 2\varpi_0 u_0 \cos(\varpi_0 u_0),$$

et par suite

$$(\text{H})\ldots\ \tfrac{1}{2}\Sigma m(u^2 - u_0^2) + \Sigma m[\varpi u \cos(\varpi u) - \varpi_0 u_0 \cos(\varpi_0 u_0)]$$
$$= \int \Sigma \text{H} d'h - \int \Sigma \text{L} d_l l - \text{K}.$$

Quoique le frottement n'entre pas explicitement dans cette dernière équation, cependant, comme il influe évidemment sur la valeur de ϖ, on voit qu'en définitive il a aussi de l'influence sur la valeur de K.

Supposons maintenant, pour appliquer notre théorème, une veine liquide cylindrique se mouvant uniformément par tranches parallèles, et venant frapper un plan doué lui-même d'un mouvement uniforme et rectiligne suivant sa normale; cherchons à déterminer la valeur de K dans cette circonstance, dont les analogues se présentent assez fréquemment dans les machines. Pour cela, nous remarquerons que le mouvement du plan étant supposé uniforme, en le prenant pour le mouvement général du système, nous aurons $\text{L} = 0$, $u = u_0$. Or, si nous désignons par I la pression normale des particules qui s'épanouissent sur le plan, on a $\text{K} = \text{I}u$ pour le travail moteur développé dans l'unité de temps par le fluide contre ce plan, de sorte que toutes les intégrales devront être prises dans l'unité de temps; notre équation devient par conséquent

$$(\text{K})\ldots\qquad \Sigma m\varpi_0 u \cos(\varpi_0 u) - \Sigma m\varpi u \cos(\varpi u) = \text{I}u,$$

en faisant abstraction du terme $\int \Sigma \text{H} d'h$, qui est dû au poids du liquide, et dont il est facile de tenir compte.

Si le plan est beaucoup plus large que la veine, celle-ci reste cylindrique jusque très près de lui, et vient ensuite s'y étendre en nappe très mince : on peut par conséquent admettre que les vitesses sont alors parallèles au plan, ce qui donnera $\cos \varpi u = 0$.

En désignant par φ la vitesse du fluide dans la veine, et par α l'angle de φ et de u, on a $\varpi_0 = \sqrt{\varphi^2 \sin^2\alpha + (\varphi \cos\alpha - u)^2}$, puisque $(\varphi \sin\alpha)$, $(\varphi \cos\alpha - u)$ sont les composantes parallèlement et perpendiculairement au plan mobile de cette vitesse relative; de

même $$\cos(\varpi_0 u) = \frac{\varphi \cos\alpha - u}{\sqrt{\varphi^2 \sin^2\alpha + (\varphi \cos\alpha - u)^2}};$$

d'où $$\varpi_0 u \cos(\varpi_0 u) = u\,(\varphi \cos\alpha - u).$$

Quant à Σm, c'est la quantité de liquide qui agit sur le plan dans l'unité de temps; or, si a représente la section de la veine fluide perpendiculairement à son axe, D la densité du fluide, il est facile de voir que l'on a $\Sigma m = \frac{a\mathrm{D}}{g \cos\alpha}(\varphi \cos\alpha - u)$,

et par suite $$\frac{a\mathrm{D}}{g \cos\alpha}(\varphi \cos\alpha - u)^2 u = \mathrm{I}u;$$

d'où l'on tire, pour la pression normale de la veine contre le plan,

$$\frac{a\mathrm{D}}{g \cos\alpha}(\varphi \cos\alpha - u)^2 = \mathrm{I}.$$

Si le plan est normal à la veine fluide, il vient

$$\frac{a\mathrm{D}}{g}(\varphi - u)^2 = \mathrm{I};$$

et si le plan est immobile, $\frac{a\mathrm{D}}{g}\varphi^2 = \mathrm{I}$;

c'est-à-dire que la pression contre ce plan est alors double de celle qui aurait lieu dans l'état de repos, en supposant qu'il eût à supporter une hauteur de la veine fluide capable de produire la vitesse φ. Les expériences de M. Savart ont vérifié cette formule lorsque le plan était assez large pour qu'on eût sensiblement

$$\cos(\varpi u) = 0.$$

Lorsqu'au lieu d'être plane, la surface en mouvement est une surface courbe, on peut encore déterminer facilement la valeur de K, dans l'hypothèse où cette surface serait de révolution autour d'un axe coïncidant avec l'axe de la veine fluide, et se mouvrait d'ailleurs comme précédemment d'un mouvement uniforme; on a alors

$$\varpi_0 = \varphi - u, \quad \cos(\varpi_0 u) = 1.$$

Pour déterminer ϖ, nous avons besoin de recourir à l'équation (F); mais si nous supposons, afin de simplifier le problème, l'axe de la veine horizontal, le terme dû aux forces extérieures, qui se réduisent ici à la pesanteur, peut être négligé dans cette équation; car une partie du liquide se relève vers le haut de la surface, tandis qu'une partie égale descend vers le bas, en admettant, ce qui est sensiblement vrai, que les particules liquides se replient suivant la surface, de manière à s'échapper dans le sens de la tangente extrême à son méridien; le frottement et les actions mutuelles sont aussi négligeables, surtout quand la surface a peu d'étendue, et le terme relatif au mouvement commun est nul, puisque ce mouvement est uniforme; par conséquent, l'équation (F) nous donne $\varpi = \varpi_0$, et l'on obtient pour la valeur de la pression normale, ou plutôt de la pression dans le sens de l'axe de la surface,

$$\Sigma m(\varphi - u)[1 - \cos(\varpi u)] = \mathrm{I};$$

comme d'ailleurs $\qquad \Sigma m = \dfrac{a\mathrm{D}}{g}(\varphi - u),$

cette expression devient $\dfrac{a\mathrm{D}}{g}(\varphi - u)^2[1 - \cos(\varpi u)] = \mathrm{I},$

valeur qui rentre dans celle relative au plan, quand l'angle φ formé par les directions de ϖ et de u est égal à 90°.

Si cet angle est égal à 180°, par exemple, dans le cas d'une demi-sphère concave, il vient

$$\frac{2aD}{g}(\varphi - u)^2 = I,$$

et si $\quad u = 0, \quad \frac{2aD}{g}\varphi^2 = I,$

c'est-à-dire que la pression I est double de celle relative au plan. Cette théorie a encore été vérifiée par les expériences de M. Savart.

Enfin, si l'angle de ϖ et de u est égal à zéro, on trouve que I est aussi égal à zéro; et cela se conçoit, puisque alors il n'y a pas de vitesse relative perdue.

On pourrait examiner le cas où l'axe de la veine serait vertical au lieu d'être horizontal; alors ϖ serait plus petit ou plus grand que ϖ_0, suivant que la surface serait concave ou convexe; car, dans ce cas, l'influence de la pesanteur ne pourrait plus être négligée dans l'équation (F); mais après la discussion précédente, cette application est très simple, et nous ne nous y arrêterons pas.

Tous ces résultats évidemment ne sont qu'approchés, car ils sont fondés sur des hypothèses qui sont loin d'être rigoureuses; néanmoins ils donnent une idée de la manière dont on peut appliquer le théorème des forces vives dans les mouvemens relatifs.

Vu et approuvé par le doyen de la Faculté des Sciences,

1er Septembre 1835,

Baron THÉNARD.

Permis d'imprimer,

Pour M. l'Inspecteur général chargé de l'administration de l'Académie de Paris,

L'Inspecteur de l'Académie délégué,

VIGUIER.

THÈSE

D'ASTRONOMIE.

Mouvement de la Terre autour de son centre de gravité.

Si l'on imagine par le centre de gravité de la terre supposé fixe dans l'espace deux systèmes d'axes de coordonnées rectangulaires, l'un x, y, z, immobile aussi dans l'espace, c'est-à-dire correspondant toujours aux mêmes étoiles; l'autre $x_{\prime}, y_{\prime}, z_{\prime}$, tournant avec la terre, fixe dans son intérieur et correspondant à ses axes principaux; et si l'on désigne par A, B, C, les momens d'inertie de la terre relatifs à ces derniers axes, par (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c''), les cosinus des angles formés par les axes des $x_{\prime}, y_{\prime}, z_{\prime}$ avec ceux des x, y, z, par p, q, r, les expressions $\left(c\frac{db}{dt} + c'\frac{db'}{dt} + c''\frac{db''}{dt}\right)$, $\left(a\frac{dc}{dt} + a'\frac{dc'}{dt} + a''\frac{dc''}{dt}\right)$, $\left(b\frac{da}{dt} + b'\frac{da'}{dt} + b''\frac{da''}{dt}\right)$; par M la masse du soleil, par α, β, γ, les coordonnées de son centre de gravité relatives aux axes des $x_{\prime}, y_{\prime}, z_{\prime}$, par ρ la distance de ce centre de gravité à celui de la terre, par $M', \alpha', \beta', \gamma', \rho'$, les quantités correspondantes pour la lune, on trouve, pour déterminer à un instant quelconque, la position de l'axe instantané de rotation, deux des trois équations suivantes qui renferment implicitement la troisième

$$(1)\ldots\ldots\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x_{\prime}\dfrac{da}{dt} + y_{\prime}\dfrac{db}{dt} + z_{\prime}\dfrac{dc}{dt} = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} = x_{\prime}\dfrac{da'}{dt} + y_{\prime}\dfrac{db'}{dt} + z_{\prime}\dfrac{dc'}{dt} = 0, \\ \dfrac{dz}{dt} = x_{\prime}\dfrac{da''}{dt} + y_{\prime}\dfrac{db''}{dt} + z_{\prime}\dfrac{dc''}{dt} = 0, \end{cases}$$

ou bien, deux des équations

$$(2)\ldots \quad py_{,} - qx_{,} = 0, \quad rx_{,} - pz_{,} = 0, \quad qz_{,} - ry_{,} = 0,$$

qui se déduisent immédiatement des précédentes; et pour le mouvement de la terre en ne tenant compte que des actions du soleil et de la lune qui sont les corps célestes les plus influens, et se bornant aux termes de plus grande dimension, on obtient les équations

$$(\mathrm{A})\ldots \begin{cases} \mathrm{C}\dfrac{dr}{dt} + (\mathrm{B}-\mathrm{A})pq = \dfrac{3\mathrm{M}\,\alpha\beta}{\rho^5}(\mathrm{B}-\mathrm{A}) + \dfrac{3\mathrm{M}'\alpha'\beta'}{\rho'^5}(\mathrm{B}-\mathrm{A}), \\ \mathrm{B}\dfrac{dq}{dt} + (\mathrm{A}-\mathrm{C})pr = \dfrac{3\mathrm{M}\alpha\gamma}{\rho^5}(\mathrm{A}-\mathrm{C}) + \dfrac{3\mathrm{M}'\alpha'\gamma'}{\rho'^5}(\mathrm{A}-\mathrm{C}), \\ \mathrm{A}\dfrac{dp}{dt} + (\mathrm{C}-\mathrm{B})qr = \dfrac{3\mathrm{M}\beta\gamma}{\rho^6}(\mathrm{C}-\mathrm{B}) + \dfrac{3\mathrm{M}'\beta'\gamma'}{\rho'^5}(\mathrm{C}-\mathrm{B}). \end{cases}$$

Si l'on avait $\mathrm{B} = \mathrm{C} = \mathrm{A}$, ces dernières équations donneraient pour p, q, r, des valeurs constantes; l'axe de rotation serait donc lui-même fixe dans le corps et dans l'espace; car les points, dont à chaque instant la vitesse serait nulle, étant toujours les mêmes, il est clair que ces points demeureraient immobiles pendant toute la durée du mouvement.

En supposant la terre de révolution autour de l'axe des $z_{,}$, on trouve que r seul doit être constant; comme d'ailleurs la vitesse de rotation autour de l'axe instantané est égale à $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$, on a nommé p, q, r, les composantes rectangulaires de la vitesse de rotation autour des $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, et si p, q, étaient très petits et devaient rester toujours très petits, la vitesse de rotation se réduirait à r, et la terre tournerait sensiblement autour de l'axe des $z_{,}$. Ces valeurs de p, q, r, étant donc très importantes pour notre objet, nous nous occuperons d'abord de leur discussion, et pour cela nous allons leur faire subir une transformation qui rendra cette discussion plus facile.

Soient θ l'angle des z avec les $z_{,}$, ψ, φ, les angles formés par l'intersection des plans xy, $x_{,}y_{,}$, avec les axes x, $x_{,}$, et comptés des x, $x_{,}$ positifs vers les y, $y_{,}$ négatifs ; en faisant entrer ces angles dans les valeurs de a, b, c, a', etc., on trouve pour ces quantités :

$$\begin{cases} a = \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\cos\theta, \quad b = -\sin\varphi\cos\psi + \sin\psi\cos\varphi\cos\theta, \quad c = \sin\theta\sin\psi; \\ a' = \frac{da}{d\psi}, \quad b' = \frac{db}{d\psi}, \quad c' = \frac{dc}{d\psi}; \\ a'' = \frac{1}{\sin\psi}\cdot\frac{da}{d\theta}, \quad b'' = \frac{1}{\sin\psi}\cdot\frac{db}{d\theta}, \quad c'' = \frac{1}{\sin\psi}\cdot\frac{dc}{d\theta}; \end{cases}$$

et par suite,

$$(4)\ldots p = \sin\varphi\sin\theta\frac{d\psi}{dt} - \cos\varphi\frac{d\theta}{dt}, \quad q = \cos\varphi\sin\theta\frac{d\psi}{dt} + \sin\varphi\frac{d\theta}{dt}, \quad r = \frac{d\varphi}{dt} - \cos\theta\frac{d\psi}{dt}.$$

Revenons maintenant aux équations (A). Si l'on néglige d'abord l'action des forces perturbatrices qui forment le second membre, et que l'on suppose la terre de révolution autour de l'axe des $z_{,}$, on trouve

$$(5)\ldots \ r = \text{constante} = n, \quad p = \mathrm{M}\sin(\mu t + \mathrm{N}), \quad q = \mathrm{M}h\cos(\mu t + \mathrm{N});$$

dans ces équations M, N, sont deux constantes arbitraires ; h, μ, sont des quantités déterminées qui dépendent des momens d'inertie A, B, C, et qui sont réelles, à cause que C est le plus grand des trois ; et comme maintenant p, q, sont très petits, puisque la terre tourne sensiblement autour de l'axe des $z_{,}$, il s'ensuit que la valeur de M est très petite, et que par conséquent la terre ne cessera à très peu près de tourner autour de cet axe avec une vitesse constante. Du reste, la période des variations de p, q, serait assez rapide pour que l'observation pût facilement découvrir ces variations, si elles existaient ; sans que M fût très petit, car la valeur de μ est assez considérable ; ainsi l'axe de la terre est un axe principal et ne peut être modifié que par les forces perturbatrices.

Pour tenir compte de ces forces, nous supposerons toujours A$=$B, ce qui donnera encore $r = n$; cette valeur de r étant substituée dans la dernière des équations (4), on obtient $\varphi = nt + \omega$, ω étant une constante arbitraire, en observant que φ varie beaucoup plus rapidement que ψ; dès lors les seconds membres des équations (A) prennent la forme $(G \sin\varphi + H \cos\varphi)$, $(G \cos\varphi - H \sin\varphi)$, G, H, contenant les coordonnées du soleil et de la lune, relatives aux axes des x, y, z, et dépendant par conséquent des mouvemens des ces astres autour de la terre, mouvemens que nous supposerons s'exécuter d'une manière uniforme et circulaire dans le sens qui va des x positifs vers les y positifs. D'après cela, on voit tout de suite sans calculer exactement p et q, que l'on trouverait pour ces quantités des expressions analogues à celles du cas précédent, et l'on peut conclure encore que les valeurs de p, q, qui sont maintenant insensibles, le resteront toujours. Nous pouvons observer aussi qu'en supposant p, q, seulement très petits, et non pas rigoureusement nuls, l'argument qui multiplierait le temps sous les signes *sinus* ou *cosinus* dans la valeur de ces quantités dépendant principalement de la durée du jour, leurs variations seraient à très courtes périodes et bien plus rapides encore que dans l'hypothèse où les seconds membres des équations (A) étaient égaux à zéro.

D'après cette discussion, on voit que la terre tournera toujours sensiblement autour de son axe principal actuel de rotation, et son mouvement diurne sera donné par l'équation

$$(6)\ldots\quad \varphi = nt + \omega.$$

La recherche des variations de θ, ψ, présente aussi de l'intérêt, et nous allons nous en occuper; elles donneront, l'une les phénomènes relatifs à la nutation, l'autre les phénomènes de la précession des équinoxes. Mais afin de simplifier nos calculs et de ne rien emprunter à la théorie des perturbations planétaires, nous supposerons que le plan de l'écliptique reste constamment confondu avec le plan des xy, quoique cette supposition ne soit pas rigoureuse et même influe notablement sur la valeur des angles que nous allons calculer. Cependant cette influence périodique et très lente présente beaucoup moins d'intérêt que les actions dont nous tiendrons compte, et c'est pour cela que nous croyons pouvoir nous permettre de la négliger ici.

Commençons par calculer θ: si dans les équations (4) on multiplie p par $(-\cos\varphi)$, q par $\sin\varphi$, et que l'on ajoute les deux résultats, on obtient

$$(7)\ldots \qquad q\sin\varphi - p\cos\varphi = \frac{d\theta}{dt}.$$

En substituant dans cette équation, pour p, q, φ, leurs valeurs en fonction de t et intégrant, on aurait aussi θ en fonction de t: mais nous nous sommes contentés de trouver quelle serait la forme des valeurs de p, q pour prouver que ces quantités resteront toujours très petites, sans calculer leur véritable valeur : aussi faut-il recourir à une autre méthode.

Pour cela, ajoutons les deux dernières des équations (A) après avoir multiplié la seconde par $\cos\varphi$, et la troisième par $\sin\varphi$, et posons

$$\begin{aligned} L = {} & \frac{3M\gamma}{\rho^5}[(A-C)\alpha\cos\varphi + (C-B)\beta\sin\varphi] \\ & + \frac{3M'\gamma'}{\rho'^5}[(A-C)\alpha'\cos\varphi + (C-B)\beta'\sin\varphi], \end{aligned}$$

il vient

$$(8)\ldots \qquad \frac{d.Bq\cos\varphi}{dt} + \frac{d.Ap\sin\varphi}{dt} + nC\frac{d\theta}{dt} = L;$$

d'ou, intégrant en observant que p, q doivent rester toujours insensibles, et que par conséquent on peut, après l'intégration, négliger les deux premiers termes de l'équation (8), on obtient

$$(9)\ldots \qquad nC\theta = \int L\,dt.$$

La valeur de L est très petite; on pourra, en la formant, faire abstraction des termes qui, par l'intégration, n'acquerront pas de petits diviseurs, tels que ceux dépendant de la durée du jour et même des mouvemens moyens du soleil et de la lune, parce qu'il reste un terme beaucoup plus remarquable dû au mouvement de la ligne des nœuds de la lune sur l'écliptique. En observant, de plus, que $\cos\theta$ varie bien plus lentement que θ; et désignant par $\theta_{,}$ la valeur initiale de cet angle, par I l'inclinaison de l'orbite lunaire sur le plan des xy, par f, $f_{,}$ des quantités dépendant des moyens mouvemens de la ligne des nœuds de la lune et de celle du soleil sur l'écliptique, la valeur de θ est donnée sensiblement par l'équation

$$(10)\ldots \quad nC(\theta-\theta_{,}) = \frac{3M'\,I\cos\theta}{4\rho'^3 f}(2C-A-B)[\cos(ft+f_{,})-\cos f_{,}],$$

dans laquelle le second nombre exprime une inégalité périodique assez rapide, de 18 ans environ, temps employé par la ligne des nœuds de la lune pour faire le tour de l'écliptique.

Venons maintenant au calcul de ψ. Les deux premières des équations (4) multipliées l'une par $\sin\varphi$, l'autre par $\cos\varphi$ et ajoutées, nous donnent

$$(11)\ldots \quad p\sin\varphi + q\cos\varphi = \sin\theta\,\frac{d\psi}{dt};$$

et en ayant égard à cette relation et à l'équation (6), on tire des deux dernières équations (A) :

$$(12)\ldots \quad \frac{d.Ap\cos\varphi}{dt} - \frac{d.Bq\sin\varphi}{dt} + Cn\sin\theta\,\frac{d\psi}{dt} = L',$$

en faisant

$$L' = \frac{3My}{\rho^5}[(C-B)\beta\cos\varphi - (A-C)\,\alpha\sin\varphi]$$
$$+\frac{3M'y'}{\rho'^5}[(C-B)\beta'\cos\varphi - (A-C)\,\alpha'\sin\varphi].$$

Or si l'on fait des transformations analogues à celles que demande le calcul de l'angle θ, on arrive à l'équation

$$(13)\ldots \quad Cn\frac{d\psi}{dt} = \frac{3\cos\theta}{4}(2C-A-B)\left(\frac{M}{\rho^3}+\frac{M'}{\rho'^3}\right);$$

d'où l'on tire, en désignant par $\psi_{,}$, la valeur initiale de ψ, ou celle qui correspond à $t=0$.

$$(14) \ldots \quad Cn(\psi-\psi_{,})=\frac{3\cos\theta}{4}(2C-A-B)\left(\frac{M}{\rho^3}+\frac{M'}{\rho'^3}\right)t;$$

c'est-à-dire que la valeur de l'angle ψ croît proportionnellement au temps; cela est sensiblement vrai, mais n'est pas complétement rigoureux à cause des inégalités périodiques dont nous n'avons pas tenu compte.

D'après la manière dont nous avons compté l'angle ψ, il s'ensuit que le mouvement des équinoxes est rétrograde; car $(2C-A-B)$ est positif; et réciproquement, si, par l'observation, on découvrait que le mouvement des équinoxes est rétrograde, c'est-à-dire qu'il a lieu en sens inverse du mouvement de translation du soleil et de la lune autour de la terre, on pourrait conclure de l'équation (14) que $(2C-A-B)$ est positif, ou que la terre est aplatie, en supposant toutefois qu'elle est homogène.

Il serait facile d'avoir égard à plusieurs des autres inégalités que pourraient présenter les valeurs de θ et de ψ, telles que celles provenant du balancement de l'écliptique, du mouvement de translation du soleil et de la lune autour de la terre, etc.; mais les termes que nous avons conservés dans nos équations représentent les principaux phénomènes, et nous nous bornerons aux résultats précédens.

Vu et approuvé par le doyen de la Faculté des Sciences,

1er Septembre 1835,

Baron THÉNARD.

Permis d'imprimer,

Pour M. l'Inspecteur général chargé de l'administration de l'Académie de Paris,

L'Inspecteur de l'Académie délégué,

VIGUIER.