

N° D'ORDRE

245.

H. F. n. f. 166. (7, 7.)  
**THÈSES**

PRÉSENTÉES

**A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS**

POUR

LE DOCTORAT ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

**PAR ALBERT DE ST-GERMAIN,**

LICENCIÉ ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES.

**1° THÈSE DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE** SUR LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE L'ÉLASTICITÉ ET LES SURFACES ISODYNAMIQUES.

**2° THÈSE D'ASTRONOMIE** SUR LA DURÉE DES ÉCLIPSES DES SATELLITES DE JUPITER.

**Soutenues le 22 décembre 1862 devant la Commission d'Examen.**

MM. LAMÉ, *Président.*  
LIOUVILLE, } *Examinateurs.*  
PUISEUX, }

**PARIS**

IMPRIMÉ PAR E. THUNOT ET C<sup>e</sup>,

26, RUE RACINE, PRÈS DE L'ODÉON.

1862

# ACADÉMIE DE PARIS.

---

## FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

---

<b>DOYEN.—PROFESSEUR.</b> . .	MILNE EDWARDS . . . .	Zoologie, Anatomie, Physiologie.
<b>PROFESSEUR HONORAIRE.</b>	PONCELET.	
	DUMAS . . . . .	Chimie.
	DESPRETZ . . . . .	Physique.
	DELAFOSSÉ . . . . .	Minéralogie.
	BALARD . . . . .	Chimie.
	LEFÉBURE DE FOURCY.	Calcul différentiel et intégral
	CHASLES . . . . .	Géométrie supérieure.
	LE VERRIER . . . . .	Astronomie.
	DUHAMEL . . . . .	Algèbre supérieure.
<b>PROFESSEURS</b> . . . . .	N . . . . .	Anatomie, Physiologie com- parée, Zoologie.
	LAMÉ . . . . .	Calcul des probabilités, Phy- sique mathématique.
	DELAUNAY . . . . .	Mécanique physique.
	C. BERNARD . . . . .	Physiologie générale.
	P. DESAINS . . . . .	Physique.
	LIOUVILLE . . . . .	Mécanique rationnelle.
	HÉBERT . . . . .	Géologie.
	PUISEUX . . . . .	Astronomie.
	DUCHARTRE . . . . .	Botanique.
<b>AGRÉGÉS</b> . . . . .	BERTRAND . . . . .	} Sciences mathématiques.
	J. VIEILLE . . . . .	
	PELIGOT . . . . .	Sciences physiques.
<b>SECRETARE</b> . . . . .	E. PREZ-REYNIER.	

---

# THÈSE DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

---

On peut regarder comme le premier résultat de la géométrie analytique la représentation géométrique des propriétés des équations algébriques ; aussi dut-elle d'abord employer le système de coordonnées le plus simple, celui des coordonnées rectilignes. Mais il cesse d'être le plus naturel dans beaucoup de questions où l'algèbre n'est plus qu'un instrument, comme dans l'étude des figures sphériques, et surtout la physique, qui considère des familles de surfaces courbes, surfaces de niveau, isothermes ou isostatiques. Définir chacune de ces surfaces en disant qu'une coordonnée  $y$  a une valeur constante, c'est un grand avantage, indispensable pour faire que les intégrales des équations aux différences partielles conviennent à l'état donné pour la surface courbe des corps que l'on considère. On prend toujours les trois familles de surfaces coordonnées orthogonales, car leurs éléments géométriques ont des relations simples, parmi lesquelles je rappellerai celles qui me seront utiles pour la théorie que je veux esquisser. J'établirai directement les équations les plus générales de l'élasticité des corps solides, et je donnerai une méthode très-simple pour développer ces équations lorsque l'élasticité du corps est la même dans toutes les directions. Je considère ensuite les systèmes isodynamiques, pour lesquels il est avantageux de ne point changer la forme primitive des équations, et j'intègre celles-ci dans quelques cas particuliers. Nous verrons que les surfaces isothermes ne sont pas généralement isodynamiques : mais cela ne sépare point la théorie de la chaleur et celle de l'élasticité. Il est au contraire bien naturel d'attribuer la chaleur à un mouvement vibratoire, et de rattacher la théorie mécanique de la chaleur au théorème des forces vives. Je dois une partie de ce travail

aux savantes leçons que M. Lamé a faites l'année dernière à la Faculté de Paris.

Soient 3 familles de surfaces orthogonales dont les équations renferment un paramètre arbitraire

$$\rho_0 = f_0(x, y, z), \quad \rho_1 = f_1(x, y, z), \quad \rho_2 = f_2(x, y, z).$$

Par chaque point de l'espace on peut mener une surface de chaque espèce, en sorte que les paramètres  $\rho_0, \rho_1, \rho_2$  peuvent être considérés comme les coordonnées curvilignes du point. Je désignerai par  $i, j$  deux des indices 0 1 2, mais différents pour une même équation. Pour simplifier l'écriture, je supprimerai l'indice et l'accent O.

Les angles que la normale à  $\rho_i$  fait avec les axes ont pour cosinus

$$\frac{1}{h_i} \frac{d\rho_i}{dx}, \quad \frac{1}{h_i} \frac{d\rho_i}{dy}, \quad \frac{1}{h_i} \frac{d\rho_i}{dz}$$

$$h_i^2 = \left(\frac{d\rho_i}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_i}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_i}{dz}\right)^2. \quad (1)$$

Désignons par  $s_i$  l'arc perpendiculaire à  $\rho_i$ , et formé par l'intersection des 2 autres surfaces; sa tangente étant normale à  $\rho_i$  au point commun aux 3 surfaces, on a

$$\frac{dx}{ds_i} = \frac{1}{h_i} \frac{d\rho_i}{dx}, \text{ etc.};$$

d'où

$$ds_i = \frac{1}{h_i} d\rho_i, \quad (2)$$

$$\frac{dx}{d\rho_i} = \frac{1}{h_i^2} \frac{d\rho_i}{dx} \quad \frac{dy}{d\rho_i} = \frac{1}{h_i^2} \frac{d\rho_i}{dy} \quad \frac{dz}{d\rho_i} = \frac{1}{h_i^2} \frac{d\rho_i}{dz}. \quad (3)$$

Étant donnée une fonction de point  $F(x, y, z)$ , on nomme son paramètre différentiel du 1<sup>er</sup> ordre,  $\Delta_1 F$ , la racine carrée de la somme des carrés de ses dérivées partielles par rapport à  $xyz$ . Le paramètre différentiel du 2<sup>e</sup> ordre,  $\Delta_2 F$ , est la somme des dérivées secondes prises deux fois par rapport à la même variable,  $x, y$ , ou  $z$ . Ces paramètres sont constants pour un point donné, quelle que soit la direction des axes des  $x, y, z$ , pourvu qu'ils soient rectangulaires. On a pour leur expression en coordonnées curvilignes :

$$\begin{aligned}
 (\Delta_1 F)^2 &= \left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2 = h^2 \left(\frac{dF}{d\rho}\right)^2 + h_1^2 \left(\frac{dF}{d\rho_1}\right)^2 + h_2^2 \left(\frac{dF}{d\rho_2}\right)^2 \\
 \Delta_2 F &= \frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{d^2 F}{dy^2} + \frac{d^2 F}{dz^2} = hh_1 h_2 \left[ \frac{d \cdot \frac{h}{h_1 h_2} \frac{dF}{d\rho}}{d\rho} + \frac{d \cdot \frac{h_1}{h_2 h} \frac{dF}{d\rho_1}}{d\rho_1} + \frac{d \cdot \frac{h_2}{h h_1} \frac{dF}{d\rho_2}}{d\rho_2} \right] \quad (4)
 \end{aligned}$$

M. Dupin a démontré que trois séries de surfaces orthogonales se coupent respectivement suivant leurs lignes de courbure. Ce théorème a permis d'exprimer la courbure des surfaces et ses variations par des formules qui nous seront utiles. Si  $r_i^{(j)}$  désigne le rayon de courbure de  $\rho_i$  suivant l'arc  $s_j$ , qui est sur cette surface, on a

$$\frac{1}{r_i^{(j)}} = \frac{h_i}{h_j} \frac{dh_j}{d\rho_i} = h_i \frac{d \cdot \log h_j}{d\rho_i} \quad (5)$$

Les variations des courbures sont soumises à deux lois, savoir : 1° La variation d'une courbure de ces surfaces suivant l'arc normal à son plan, c'est-à-dire la dérivée de la courbure par rapport à l'arc, est égale au produit de sa conjuguée en arc par son excès sur sa conjuguée en surface. De là six relations :

$$\begin{aligned}
 \frac{d \frac{1}{r'}}{ds_2} &= \frac{1}{r'_2} \left( \frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} \right) \\
 \frac{d \frac{1}{r''}}{ds_1} &= \frac{1}{r''_1} \left( \frac{1}{r''} - \frac{1}{r'} \right) \\
 \frac{d \frac{1}{r''_1}}{ds} &= \frac{1}{r''_1} \left( \frac{1}{r''_1} - \frac{1}{r_1} \right) \\
 \frac{d \frac{1}{r_1}}{ds_2} &= \frac{1}{r_2} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r''_1} \right) \\
 \frac{d \frac{1}{r_2}}{ds_1} &= \frac{1}{r_1} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r'_2} \right) \\
 \frac{d \frac{1}{r'_2}}{ds} &= \frac{1}{r'_2} \left( \frac{1}{r'_2} - \frac{1}{r_2} \right).
 \end{aligned} \quad (6)$$

2° Le produit des deux courbures d'une surface, augmenté de la somme des carrés de leurs conjuguées en arc, est égal à la somme des

dérivées de ces dernières courbures par rapport à leurs arcs réciproques.  
D'où les 3 équations :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1' r_2''} + \left(\frac{1}{r_2''}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_1''}\right)^2 &= \frac{d\frac{1}{r_2'}}{ds_2} + \frac{d\frac{1}{r_1''}}{ds_1} \\ \frac{1}{r_1'' r_1} + \left(\frac{1}{r_1''}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_2''}\right)^2 &= \frac{d\frac{1}{r_1''}}{ds} + \frac{d\frac{1}{r_2''}}{ds_2} \\ \frac{1}{r_2' r_2} + \left(\frac{1}{r_1''}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_1'}\right)^2 &= \frac{d\frac{1}{r_1''}}{ds_1} + \frac{d\frac{1}{r_1'}}{ds} \end{aligned} \quad (7)$$

---

## ÉQUATIONS DE L'ÉLASTICITÉ DES CORPS SOLIDES.

---

Lorsqu'un solide naturel est soumis à l'action de forces extérieures, il subit des déformations que je supposerai toujours peu considérables; puis il se développe des réactions intérieures, souvent énergiques, qui tendent à ramener le corps à sa forme primitive, et qui établissent en tous ses points l'équilibre, si le corps est en repos, l'équilibre idéal du principe de d'Alembert, s'il est en mouvement. Sans rien préjuger sur la grandeur et la direction de ces forces, on peut établir des équations différentielles qui donnent la loi des forces élastiques pour tous les points du corps.

Considérons généralement l'élément parallépipède  $OMNPM'N'P'O'$  compris entre trois surfaces orthogonales et les trois surfaces infiniment voisines, et écrivons qu'il est en équilibre sous l'action des forces élastiques, extérieures et d'inertie. Mais d'abord il faut évaluer les éléments géométriques de ce petit volume, que nous traiterons comme des infiniment petits, c'est-à-dire en négligeant les quantités d'ordre plus élevé que celui que l'on considère dans chaque expression. Soit  $O$  le sommet de l'élément qui sera pris pour origine de 3 axes rectangulaires, tangents aux arcs  $s_i$ . Nous supposerons, pour plus de facilité, toutes les courbures positives.

Le volume de l'élément est  $d\omega = ds_1 ds_2 ds_3$ ; sa masse  $Dd\omega$ . Les faces en  $O$  ont pour aires respectives :  $ds_1 ds_2$ ,  $ds_2 ds_3$ ,  $ds_3 ds_1$ .

Les faces en  $O'$  peuvent aussi être mesurées par le produit de leurs deux côtés non aboutissant en  $O'$ , et il suffit de calculer ces arcs. En négligeant des infiniment petits du 3<sup>e</sup> ordre, je puis remplacer les éléments de la face  $OMPN'$  par leur projection sur le plan  $ZOX$ . Désignons la projection des points  $MN'P$  par  $mn'p$ , et prolongeons l'arc  $mn'$  de



bure propre, ce sera  $\frac{ds}{p}$ . Si par M je mène une parallèle à OY, et que je la prenne pour l'axe d'un cône dont la génératrice soit la perpendiculaire à C<sub>1</sub>M dans le plan OC<sub>1</sub>M, notre tangente sera dans un plan tangent au cône et infiniment peu différente d'une génératrice : donc à moins d'infiniment petits du 2<sup>e</sup> ordre, l'angle de la tangente avec OY est  $\frac{\pi}{2} - \frac{ds}{r_1}$ . De même son angle avec OZ est  $\frac{\pi}{2} - \frac{ds}{r_2}$ . Si l'on écrit que la somme des carrés des cosinus de ces trois angles fait 1, et qu'on néglige les quantités du 3<sup>e</sup> ordre, on a la formule :

$$\left(\frac{1}{p}\right)^2 = \left(\frac{1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_2}\right)^2.$$

Quant à la tangente à MN', on voit de suite qu'elle fait avec OZ l'angle  $\frac{ds}{r_2}$ . En menant un cône dont l'axe serait parallèle à OX et la génératrice la projection de MC<sub>2</sub> sur un plan parallèle à ZOX, on trouve que son angle avec OX est  $\frac{\pi}{2} + \frac{ds}{r_2}$ . Les carrés des cosinus des angles  $\frac{ds}{r_2}$  et  $\frac{\pi}{2} + \frac{ds}{r_2}$  ayant pour somme 1, il faut que la tangente à MN' fasse rigoureusement avec OY un angle de  $\frac{\pi}{2}$ .

On trouve de même que la tangente à MP' fait respectivement avec OX, OY et OZ les angles :  $\frac{\pi}{2} + \frac{ds}{r_1}$ ,  $\frac{ds}{r_1}$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ; et par notre permutation tour-  
nante, on forme le tableau suivant :

TABLEAU DES ANGLES.

(8)

DE LA TANGENTE AUX ARCS.		AVEC OX.	AVEC OY.	AVEC OZ.
En M. . . .	OM. . . .	$\frac{ds}{p}$	$\frac{\pi}{2} - \frac{ds}{r_1}$	$\frac{\pi}{2} - \frac{ds}{r_2}$
	MP'. . . .	$\frac{\pi}{2} + \frac{ds}{r_1}$	$\frac{ds}{r_1}$	$\frac{\pi}{2}$
	MN'. . . .	$\frac{\pi}{2} + \frac{ds}{r_2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{ds}{r_2}$
En N. . . .	NM'. . . .	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} + \frac{ds_1}{r_2'}$	$\frac{ds_1}{r_2'}$
	ON. . . .	$\frac{\pi}{2} - \frac{ds_1}{r'}$	$\frac{ds_1}{p_1}$	$\frac{\pi}{2} - \frac{ds_1}{r_2'}$
	NP. . . .	$\frac{ds_1}{r'}$	$\frac{\pi}{2} + \frac{ds_1}{r'}$	$\frac{\pi}{2}$
En P. . . .	PM'. . . .	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{ds_2}{r_1''}$	$\frac{\pi}{2} + \frac{ds_2}{r_1''}$
	PN'. . . .	$\frac{ds_2}{r''}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} + \frac{ds_2}{r''}$
	OP. . . .	$\frac{\pi}{2} - \frac{ds_2}{r''}$	$\frac{\pi}{2} - \frac{ds_2}{r_1''}$	$\frac{ds_2}{p_2}$

Cela posé, nous désignerons par  $F_i^{(s)}$  la composante parallèle à  $s_i$  de la force sollicitant la face  $\rho_i$  qui passe au point O, cette composante étant rapportée à l'unité de surface. En passant du point O au point O', ces forces varient de quantités proportionnelles à la distance des faces  $\rho_i$  en O et O'. La force qui sur la face ONPM' était  $ds_1 ds_2 F$ , est sur la face parallèle O'N'P'M' :

$$\left( F + \frac{dF}{ds} ds \right) ds_1 ds_2 (1 - \sigma ds) = ds_1 ds_2 \left[ F + \left( \frac{dF}{ds} - \sigma \right) ds \right]. \quad (9)$$

Soient  $E, E_1, E_2$  les composantes des forces extérieures, rapportées à l'unité de masse.

On ne change pas l'état du corps considéré en supposant que l'élément  $d\omega$  devienne un solide invariable, et l'on peut lui appliquer les équations d'équilibre, et d'abord celles des moments. Nous supposons les forces appliquées au centre de gravité des éléments qu'elles sollicitent. En égalant à zéro la somme des moments des forces par rapport à OX,

nous négligerons les quantités du 4<sup>e</sup> ordre, par suite, les moments des forces extérieures et d'inertie, ceux des  $F_i F_i$ , ceux des forces qui passent à une distance du 2<sup>e</sup> ordre de OX, enfin ceux des forces qui agissent sur des faces opposées et sont à une distance du 4<sup>e</sup> ordre de OX, car ces dernières sont de signes contraires, et ne diffèrent que de quantités du 3<sup>e</sup> ordre. Nous n'aurons finalement que deux forces tendant à faire tourner  $d\omega$  en sens contraire, la composante suivant  $s_2$  de la force qui agit sur  $\rho_1'$ , et la composante suivant  $s_1$  de la force qui sollicite  $\rho_2'$ . Les moments de ces forces devant être égaux, on a

$$ds ds_2 F_1'' \times ds_1 = ds ds_1 F_2' \times ds_2; \quad F_1'' = F_2'.$$

On a de même

$$F_2 = F'', \quad F' = F_1;$$

ce qui réduit à 6 les composantes des forces élastiques qui agissent sur les trois faces O. Cette réduction est un cas particulier du théorème de réciprocité, énoncé par Cauchy : étant donnés deux éléments plans qui passent en un point, la force élastique qui sollicite un élément, estimée suivant la normale à l'autre, est égale à la force qui agit sur le second, estimée suivant la normale au premier. Nous poserons :

$$\begin{aligned} F &= A, & F_1 &= A_1, & F_2'' &= A_2; \\ F_1'' &= F_2' = \tau, & F_2 &= F'' = \tau_1, & F' &= F_1 = \tau_2. \end{aligned}$$

Écrivons actuellement que la somme des projections sur chacun des axes est nulle. Nous appellerons UVW les projections du déplacement du centre de gravité, servant à exprimer les forces d'inertie ; nous prendrons 1 pour le cosinus d'un angle très-petit,  $\epsilon$  pour  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right)$ , et en général nous négligerons les termes du 4<sup>e</sup> ordre. Nous aurons les cosinus des angles que font les arêtes de  $d\omega$  avec les axes par le tableau (8), et en nous servant de l'équation (9), divisant tout par  $ds ds_1 ds_2$ , nous avons les équations les plus générales de l'élasticité :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA}{ds} + \frac{d\tau_2}{ds_1} + \frac{d\tau_1}{ds_2} + \left(E - \frac{d^2U}{dt^2}\right) D &= \frac{A-A_1}{r'} + \frac{A-A_2}{r''} + \left(\frac{2}{r_1} + \frac{1}{r_1''}\right) \tau_2 + \left(\frac{2}{r_2} + \frac{1}{r_2'}\right) \tau_1 \\ \frac{d\tau_2}{ds} + \frac{dA_1}{ds_1} + \frac{d\tau}{ds_2} + \left(E_1 - \frac{d^2V}{dt^2}\right) D &= \frac{A_1-A_2}{r_1''} + \frac{A_1-A}{r_1} + \left(\frac{2}{r_2'} + \frac{1}{r_2}\right) \tau + \left(\frac{2}{r_1'} + \frac{1}{r_1''}\right) \tau_2 \\ \frac{d\tau_1}{ds} + \frac{d\tau}{ds_1} + \frac{dA_2}{ds_2} + \left(E_2 - \frac{d^2W}{dt^2}\right) D &= \frac{A_2-A}{r_2} + \frac{A_2-A_1}{r_2'} + \left(\frac{2}{r_1''} + \frac{1}{r_1'}\right) \tau_1 + \left(\frac{2}{r_2''} + \frac{1}{r_2}\right) \tau \end{aligned} \right\} (10)$$

On en déduit les équations pour le cas où les surfaces coordonnées deviennent des plans, en supposant les rayons de courbure infinis, et changeant  $s$  en  $x$ ,  $s_1$  en  $y$ ,  $s_2$  en  $z$ .

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dx} + \frac{d\tau_2}{dy} + \frac{d\tau_1}{dz} + \left( E - \frac{d^2U}{dt^2} \right) D &= 0 \\ \frac{d\tau_2}{dx} + \frac{dA_1}{dy} + \frac{d\tau}{dz} + \left( E_1 - \frac{d^2V}{dt^2} \right) D &= 0 \\ \frac{d\tau_1}{dx} + \frac{d\tau}{dy} + \frac{dA_2}{dz} + \left( E_2 - \frac{d^2W}{dt^2} \right) D &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Les trois équations que nous avons trouvées ne suffisent pas pour déterminer l'état du corps, car elles renferment 6 composantes et les 3 projections du déplacement. Comme c'est ce déplacement qui produit les forces élastiques, si l'on en connaît la loi, ainsi que la constitution du corps, il doit être possible de déterminer les forces. Il faut nous faire une idée nette de la manière dont les déplacements inégaux des molécules déforment le corps, et tout d'abord, un de ses éléments. Les côtés du parallépipède changent de longueur, et ces angles cessent d'être droits. L'arc OM, avant et après la déformation, est égal, à moins d'infiniment petits du 3<sup>e</sup> ordre, à sa projection sur OX; son allongement est donc la différence entre le déplacement de M estimé suivant OX, et celui de O, ou en vertu du tableau (8) :

$$-U + \left( U + \frac{dU}{ds} ds \right) \cos \frac{ds}{p} + \left( v + \frac{dV}{ds} ds \right) \cos \left( \frac{\pi}{2} + \frac{ds}{r_1} \right) + \left( W + \frac{dW}{ds} ds \right) \cos \left( \frac{\pi}{2} + \frac{ds}{r_2} \right)$$

c'est-à-dire

$$\left( \frac{dU}{ds} - v \frac{1}{r_1} - W \frac{1}{r_2} \right) ds.$$

L'angle dont la ligne ON a tourné de manière à diminuer le dièdre OM a pour mesure le quotient par  $ds$ , de la projection sur OP du déplacement de N moins celui de O, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{1}{ds_1} \left[ \left( U + \frac{dU}{ds_1} ds_1 \right) \cos \frac{\pi}{2} + \left( v + \frac{dV}{ds_1} ds_1 \right) \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{ds_1}{r_2} \right) + \right. \\ \left. \left( W + \frac{dW}{ds_1} ds_1 \right) \cos \frac{ds_1}{r_2} - W \right] = \frac{dW}{dr_1} + \frac{v}{r_2}. \end{aligned}$$

D'ailleurs l'angle NOP déformé pourra encore être pris pour la mesure du dièdre OM, et sa diminution, ou distorsion, sera la somme des angles dont ON et OP auront tourné. Si donc on appelle  $\delta s_i$  la dilatation suivant  $s_i$ ,  $\epsilon s_i$  la distorsion autour de cette arête, on aura

$$\begin{aligned}
 \delta s &= \frac{dU}{ds} - \frac{V}{r_1} - \frac{W}{r_2} \\
 \delta s_1 &= \frac{dV}{ds_1} - \frac{W}{r'_2} - \frac{U}{r'} \\
 \delta s_2 &= \frac{dW}{ds_2} - \frac{U}{r''} - \frac{V}{r''_1} \\
 \epsilon s &= \frac{dV}{ds_2} + \frac{dW}{ds_1} + \frac{V}{r'_2} + \frac{W}{r''_1} \\
 \epsilon s_1 &= \frac{dW}{ds} + \frac{dU}{ds_2} + \frac{W}{r''} + \frac{U}{r_2} \\
 \epsilon s_2 &= \frac{dU}{ds_1} + \frac{dV}{ds} + \frac{U}{r_1} + \frac{V}{r'}
 \end{aligned} \tag{12}$$

L'élément augmente de volume, et sa dilatation cubique sera :

$$\theta = \delta s + \delta s_1 + \delta s_2 = \frac{dU}{ds} + \frac{dV}{ds_1} + \frac{dW}{ds_2} - U\sigma - V\sigma_1 - W\sigma_2 \tag{13}$$

Ce sont ces dilatations et ces distorsions qui produisent les forces élastiques. Soit  $F$  une des composantes que nous avons considérées. Si l'on déforme le corps de manière à produire seulement une petite dilatation  $\delta s_i$ ,  $F$  lui sera proportionnelle,  $F = C_i \delta s_i$ ; si l'on donne une distorsion  $\epsilon s_i$ , on aura  $F = D_i \epsilon s_i$ . Donc, en vertu du principe de la superposition des petits effets, si l'on imprime aux éléments leurs trois dilatations et leurs trois distorsions,  $F$  sera de la forme

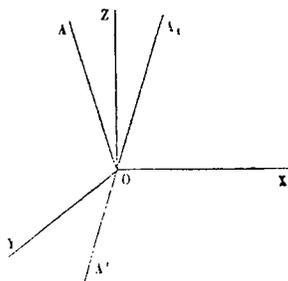
$$F = C\delta s + C_1\delta s_1 + C_2\delta s_2 + D\epsilon s + D_1\epsilon s_1 + D_2\epsilon s_2. \tag{14}$$

Les coefficients, au nombre de 36, qu'on devra considérer, ne dépendant que de la nature du corps. Si l'on substitue dans les équations (10) aux forces élastiques leurs valeurs (14), on aura trois équations en  $UVW$ , et le problème de physique est ramené à une intégration.

## CAS OU L'ÉLASTICITÉ EST LA MÊME DANS TOUS LES SENS.

Les 36 coefficients des expressions (14) se réduisent à un plus petit nombre quand on suppose au corps trois axes de symétrie, ou quand un déplacement donnant naissance à certaines réactions élastiques, un déplacement symétrique dans un des autres trièdres ayant leur sommet en O y produit des forces symétriques des premières. Je dis d'abord que les coefficients ne dépendent point de la courbure des surfaces orthogonales. Concevons en effet un élément  $d\omega'$  dont les faces touchent celles de  $d\omega$  en O, dont les arêtes soient égales à celles de  $d\omega$ . D'un côté les forces qui agissent sur les deux éléments en O sont les mêmes, et comme les sommets homologues sont l'un de l'autre à des distances du 2<sup>e</sup> ordre, ils s'accompagnent après la déformation, et les dilatations et distorsions sont les mêmes sur  $d\omega$  et  $d\omega'$ . Donc la loi qui lie les forces aux déplacements doit être toujours la même sur un corps donné, les coefficients (14) sont constants, et je puis étudier leur réduction avec des coordonnées planes.

Prenons les trois axes de symétrie du corps pour axes coordonnés, et



exerçons une simple traction telle que les molécules ne se déplacent que parallèlement à OZ.

Les déplacements sont symétriques par rapport aux 3 plans coordonnés; donc si le déplacement des molécules supérieures donne sur la face supérieure de XOY une réaction oblique OA, il se produira sur sa face inférieure une réaction symétrique OA', laquelle prise en signe contraire pour s'appliquer à la face supérieure donne OA<sub>1</sub>.

La résultante de OA et OA<sub>1</sub> est normale à XOY. D'où l'on conclut que dans le cas d'une traction les forces élastiques sont normales aux plans de symétrie, et les  $\tau_i$  sont nulles, celles-ci ne renfermant pas de termes en  $\delta s_i$ .

Maintenant tordons le corps autour de OZ : une force latérale ZOZ verra les molécules s'éloigner d'elle d'un côté, et s'en rapprocher de

l'autre, en se mouvant parallèlement à XOY. La force qui agit sur une face sera symétrique de celle qui agit sur l'autre, par rapport au plan ZOY : prenant cette dernière force en signe contraire, on aura une résultante parallèle à OX. De même ZOY sera sollicité par une force parallèle à OY : et l'on sait que ces deux forces ont une même valeur  $\tau_2$ . Quant au plan ZOY, aucune force n'agit sur lui, car les déplacements sont de sens contraire des deux côtés, ils produisent sur une même face deux forces opposées qui se détruisent. Donc la seule force qui contienne  $\epsilon s$ , dans son expression est  $\tau_2$ . Et ainsi des autres torsions, ce qui réduit à 12 les 36 coefficients de (14).

$$A_i = C_{0,i} \delta s + C_{1,i} \delta s_1 + C_{2,i} \delta s_2; \quad \tau_i = E_i \epsilon s_i.$$

Si les 3 axes de symétrie sont identiques, dans les  $A_i$ ,  $\delta s$ , aura le même coefficient, qu'on appelle  $\lambda + 2\mu$ ; les deux autres  $\delta s$  ont un autre coefficient  $\lambda$ ; enfin les  $E_i$  sont les mêmes. On a, en vertu de l'équation (13),

$$A_i = \lambda \theta + 2\mu \delta s_i, \quad \tau_i = E \epsilon s_i.$$

Si le corps n'est plus un cristal, mais un corps amorphe à symétrie complète, il faut en outre que la composante normale de la force qui agit sur un élément plan quelconque soit égale à  $\lambda \theta$  augmenté du produit de  $2\mu$  par la dilatation suivant la normale à l'élément. Si  $mnp$  sont les cosinus des angles de cette normale avec les axes, nous montrerons que ladite composante est

$$N = m^2 A + n^2 A_1 + p^2 A_2 + 2np\tau + 2pm\tau_1 + 2mn\tau_2 = \\ \lambda \theta + 2\mu(m^2 \delta s + n^2 \delta s_1 + p^2 \delta s_2) + 2E(np\epsilon s + pm\epsilon s_1 + mn\epsilon s_2).$$

Mais la dilatation suivant la normale est

$$SN = m^2 \delta s + n^2 \delta s_1 + p^2 \delta s_2 + 2np\epsilon s + 2pm\epsilon s_1 + 2mn\epsilon s_2.$$

Donc la condition nécessaire et suffisante pour la symétrie complète est  $E = \mu$ ; et l'on a dans ce cas

$$\begin{array}{lll} A = \lambda \theta + 2\mu \delta s & A_1 = \lambda \theta + 2\mu \delta s_1 & A_2 = \lambda \theta + 2\mu \delta s_2 \\ \tau = \mu \epsilon s & \tau_1 = \mu \epsilon s_1 & \tau_2 = \mu \epsilon s_2. \end{array} \quad (15)$$

On en déduit inversement les déformations en fonction des forces élas-

tiques qui s'exercent en chaque point, savoir, en faisant  $3\lambda + 2\mu = Q$ ,

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{Q} (A + A_1 + A_2) \\ \delta s &= \frac{1}{2\mu Q} [\lambda(2A - A_1 - A_2) + 2\mu A] \\ \delta s_1 &= \frac{1}{2\mu Q} [\lambda(2A_1 - A_2 - A) + 2\mu A_1] \\ \delta s_2 &= \frac{1}{2\mu Q} [\lambda_1(2A_2 - A - A_1) + 2\mu A_2] \\ \varepsilon s_i &= \frac{1}{\mu} \tau_i. \end{aligned} \tag{16}$$

En remplaçant les forces par leurs expressions (15) dans les équations générales de l'élasticité, on verra ce qu'elles deviennent pour le cas de l'élasticité constante; et si l'on y remplace les déformations par leur expression (12) et (13), on aura trois équations explicites entre les 3 projections UVW. Considérons la première des équations (10) dont les autres se déduisent par permutations tournantes; exprimons-y les forces au moyen des équations (15), et ajoutons aux deux membres  $2\mu \frac{d(\delta s_1 + \delta s_2)}{ds}$ ,

nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{d\theta}{ds} + \left( E - \frac{d^2U}{dt^2} \right) D \right] &= 2 \left( \frac{d\delta s_1}{ds} + \frac{d\delta s_2}{ds} \right) - \\ \left( \frac{d\varepsilon s_2}{ds_1} + \frac{d\varepsilon s_1}{ds_2} \right) + 2 \frac{\delta s - \delta s_1}{r'} + 2 \frac{\delta s - \delta s_2}{r''} + \left( \frac{2}{r_1} + \frac{1}{r''_1} \right) \varepsilon s_2 &+ \left( \frac{2}{r_2} + \frac{1}{r''_2} \right) \varepsilon s_1. \end{aligned}$$

Je désigne par P le second membre que je dois exprimer au moyen de UVW et des coordonnées curvilignes,  $\rho_i$ . Il ne faut pas commencer par introduire les  $h_i$  et  $\rho_i$  dans les équations (10), mais exprimer P au moyen des arcs et des rayons de courbure, par les formules (12). On fera attention que les  $s_i$  n'étant pas des variables indépendantes, l'ordre de différentiation par rapport à ces variables n'est pas indifférent. En n'effaçant que les quantités qui se détruisent en vertu de leurs signes, on a d'abord

$$P = \left\{ \begin{aligned}
 & U \left( -2 \frac{d\frac{1}{r'}}{ds} - 2 \frac{d\frac{1}{r''}}{ds} - \frac{d\frac{1}{r_1}}{ds_1} - \frac{d\frac{1}{r_2}}{ds_2} + \frac{2}{(r')^2} + \frac{2}{(r'')^2} + \frac{2}{(r_1)^2} + \frac{2}{(r_2)^2} + \frac{1}{r_1 r''} + \frac{1}{r_2 r'} \right) \\
 & + V \left( -2 \frac{d\frac{1}{r_1''}}{ds} - \frac{d\frac{1}{r'}}{ds_1} - \frac{2}{r_1 r''} + \frac{2}{r'' r_1''} + \frac{1}{r' r_1''} \right) \\
 & + W \left( -2 \frac{d\frac{1}{r_2'}}{ds} - \frac{d\frac{1}{r''}}{ds_2} - \frac{2}{r_2 r'} + \frac{2}{r' r_2'} + \frac{1}{r'' r_2'} \right) \\
 & - \frac{d\frac{dU}{ds_2}}{ds_2} - \frac{d\frac{dU}{ds_1}}{ds_1} + \frac{1}{r_1} \frac{dU}{ds_1} + \frac{1}{r_1''} \frac{dU}{ds_1} + \frac{1}{r_2} \frac{dU}{ds_2} + \frac{1}{r_2'} \frac{dU}{ds_2} \\
 & + 2 \frac{d\frac{dV}{ds_1}}{ds_1} - \frac{d\frac{dV}{ds}}{ds} - \frac{1}{r_1''} \frac{dV}{ds} - \frac{3}{r'} \frac{dV}{ds_1} + \frac{2}{r_1} \frac{dV}{ds} \\
 & + 2 \frac{d\frac{dW}{ds_2}}{ds_2} - \frac{d\frac{dW}{ds}}{ds} - \frac{1}{r_2'} \frac{dW}{ds} - \frac{3}{r''} \frac{dW}{ds_2} + \frac{2}{r_2} \frac{dW}{ds}
 \end{aligned} \right.$$

Si l'on ajoute les deux dernières équations (7), après avoir tout fait passer dans le premier membre, on trouve :

$$\frac{1}{(r')^2} + \frac{1}{(r'')^2} + \frac{1}{(r_1)^2} + \frac{1}{(r_2)^2} + \frac{1}{r_1 r_1''} + \frac{1}{r_2 r_2'} - \frac{d\frac{1}{r'}}{ds} - \frac{d\frac{1}{r''}}{ds} - \frac{d\frac{1}{r_1}}{ds_1} - \frac{d\frac{1}{r_2}}{ds_2} = 0.$$

Ajoutant le double du premier membre au coefficient de U, on est réduit aux termes :

$$U \left( \frac{d\frac{1}{r_1}}{ds_1} + \frac{d\frac{1}{r_2}}{ds_2} - \frac{1}{r_1 r_1''} - \frac{1}{r_2 r_2'} \right)$$

De même la 3<sup>e</sup> et la 6<sup>e</sup> équation du tableau (6), respectivement, réduisent les termes en V et W aux suivants :

$$V \left( -\frac{d\frac{1}{r'}}{ds_1} + \frac{1}{r' r_1''} \right) + W \left( -\frac{d\frac{1}{r''}}{ds_2} + \frac{1}{r'' r_2'} \right)$$

Après ces simplifications, c'est le moment de remplacer les  $ds_i$  par

$\frac{1}{h_i} d\rho_i$  (2), et les  $r_i^{(j)}$  par leur expression (5). On trouve d'abord :

$$\begin{aligned}
 \frac{P}{h_1 h_2} = & \left\{ \begin{aligned}
 & \text{U} \left( \frac{1}{h_1} \frac{d}{d\rho_2} \frac{h_2}{h} \frac{dh}{d\rho_2} + \frac{1}{h_1} \frac{d}{d\rho_1} \frac{h_1}{h} \frac{dh}{d\rho_1} - \frac{h_1}{hh_2^2} \frac{dh}{d\rho_1} \frac{dh_2}{d\rho_1} - \frac{h_2}{hh_1^2} \frac{dh}{d\rho_2} \frac{dh_1}{d\rho_2} \right) \\
 & + \text{V} \left( - \frac{d}{h_2} \frac{h}{h_1} \frac{dh_1}{d\rho} + \frac{h}{h_1 h_2^2} \frac{dh_1}{d\rho} \frac{dh_2}{d\rho_1} \right) + \text{W} \left( - \frac{d}{h_1} \frac{h}{h_2} \frac{dh_2}{d\rho} + \frac{h}{h_1^2 h_2} \frac{dh_2}{d\rho} \frac{dh_1}{d\rho_2} \right) \\
 & - \frac{1}{h_2} \frac{d}{d\rho_1} \frac{h_1}{h} \frac{dU}{d\rho_1} - \frac{1}{h_1} \frac{d}{d\rho_2} \frac{h_2}{h} \frac{dU}{d\rho_2} + \frac{h_1}{h_2} \left( \frac{dh}{hd\rho_1} + \frac{dh_2}{h_2 d\rho_1} \right) \frac{dU}{d\rho_1} - \frac{h_2}{h_1} \left( \frac{dh}{hd\rho_2} + \frac{dh_1}{h_1 d\rho_2} \right) \frac{dU}{d\rho_2} \\
 & + 2 \frac{h}{h_1 h_2} \frac{d}{d\rho} \frac{h_1}{h} \frac{dV}{d\rho_1} - \frac{d}{h_2} \frac{h}{h_1} \frac{dV}{d\rho} - \frac{h}{h_2^2} \frac{dV}{d\rho} \frac{dh_2}{d\rho_1} - \frac{3h}{h_1 h_2} \frac{dh_1}{d\rho} \frac{dV}{d\rho_1} + \frac{2}{h_2} \frac{dh}{d\rho_1} \frac{dV}{d\rho} \\
 & + 2 \frac{h}{h_1 h_2} \frac{d}{d\rho} \frac{h_2}{h} \frac{dW}{d\rho_2} - \frac{d}{h_1} \frac{h}{h_2} \frac{dW}{d\rho} - \frac{h}{h_1^2} \frac{dh_1}{d\rho_2} \frac{dW}{d\rho} - \frac{3h}{h_1 h_2} \frac{dh_2}{d\rho} \frac{dW}{d\rho_2} - \frac{2}{h_1} \frac{dh}{d\rho_2} \frac{dW}{d\rho} .
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Les termes en U forment deux dérivées exactes, les termes en V et W en forment aussi deux, et les deux premières lignes donnent :

$$\text{U} \frac{d}{d\rho_1} \frac{h_1}{hh_2} \frac{dh}{d\rho_1} + \text{U} \frac{d}{d\rho_2} \frac{h_2}{hh_1} \frac{dh}{d\rho_2} - \text{V} \frac{d}{d\rho_1} \frac{h}{h_1 h_2} \frac{dh_1}{d\rho} - \text{W} \frac{d}{d\rho_2} \frac{h}{h_1 h_2} \frac{dh_2}{d\rho} . \quad (17)$$

Dans la ligne suivante, les termes où entrent  $\frac{dU}{d\rho_i}$  peuvent se grouper ainsi :

$$\frac{h_1}{hh_2} \frac{dh}{d\rho_1} \frac{dU}{d\rho_1} - \left( \frac{1}{h_2} \frac{d}{d\rho_1} \frac{h_1}{h} \frac{dU}{d\rho_1} - \frac{1}{h_2^2} \frac{dh_2}{d\rho_1} h_1 \frac{dU}{d\rho_1} \right) = \frac{h_1}{hh_2} \frac{dh}{d\rho_1} \frac{dU}{d\rho_1} - \frac{d}{d\rho_1} \frac{h_1}{h_2} \frac{dU}{d\rho_1} .$$

Combinant avec le premier terme de l'expression (17), on a

$$\frac{d}{d\rho_1} \left[ \text{V} h_1 \frac{dh}{hh_2} \frac{d\rho_1} - \frac{h_1}{h_2} \frac{dU}{d\rho_1} \right] = - \frac{d}{d\rho_1} \left( \frac{h_2}{hh_1} \frac{d}{d\rho_1} \frac{U}{h} \right) .$$

On a de même :

$$- \frac{d}{d\rho_2} \left( \frac{hh_2}{h_1} \frac{d}{d\rho_2} \frac{U}{h} \right) .$$

Il est un peu plus long de faire la réduction, dans  $\frac{P}{h_1 h_2}$ , des termes où entrent V et ses dérivées. Cependant, comme on a :

$$\frac{2h}{h_1 h_2} \frac{d \cdot h_1}{d\rho} \frac{dV}{d\rho_1} = \frac{2h}{h_2} \frac{d^2 V}{d\rho d\rho_1} + \frac{2h}{h_1 h_2} \frac{dh_1}{d\rho} \frac{dV}{d\rho_1} -$$

$$\frac{d \cdot h}{h_2 d\rho_1} \frac{dV}{d\rho} = - \frac{h}{h_2} \frac{d^2 V}{d\rho d\rho_1} - \frac{1}{h_2} \frac{dV}{d\rho} \frac{dh}{d\rho_1};$$

les termes qui contiennent les dérivées de V se réduisent à

$$\frac{h}{h_2} \frac{d^2 V}{d\rho d\rho_1} - \frac{h}{h_2^2} \frac{dV}{d\rho} \frac{dh_2}{d\rho_1} - \frac{h}{h_1 h_2} \frac{dh_1}{d\rho} \frac{dV}{d\rho_1} + \frac{1}{h_2} \frac{dV}{d\rho} \frac{dh}{d\rho_1} =$$

$$\frac{d}{d\rho_1} \left( \frac{h}{h_2} \frac{dV}{d\rho} \right) - \frac{h}{h_1 h_2} \frac{dh_1}{d\rho} \frac{dV}{d\rho_1};$$

Si on ajoute le 3<sup>e</sup> terme de l'expression (17), on trouve :

$$\frac{h}{d\rho_1} \left( \frac{h}{h_2} \frac{dV}{d\rho} - \frac{Vh}{h_1 h_2} \frac{dh_1}{d\rho} \right) = \frac{d}{d\rho_1} \left( \frac{hh_1}{h_2} \frac{dV}{d\rho} \right).$$

Les termes en W donnent de même  $\frac{d}{d\rho_2} \left( \frac{hh_2}{h_1} \frac{dV}{d\rho} \right)$ .

Nous avons ainsi toutes les réductions possibles, et on aurait l'équation cherchée. Mais on voit qu'on augmentera sa symétrie et celle des suivantes en posant :

$$\frac{h_1 h_2}{h} \left( \frac{dV}{d\rho_2} \frac{dW}{dh_1} - \frac{dW}{d\rho_1} \frac{dV}{dh_2} \right) = \alpha, \quad \frac{h_2 h}{h_1} \left( \frac{dW}{d\rho} \frac{dU}{dh_2} - \frac{dU}{d\rho_2} \frac{dW}{dh} \right) = \beta, \quad \frac{hh_1}{h_2} \left( \frac{dU}{d\rho_1} \frac{dV}{dh} - \frac{dV}{d\rho} \frac{dU}{dh_1} \right) = \gamma.$$

Les équations de l'élasticité constante deviennent :

$$\frac{d\beta}{d\rho_2} - \frac{d\gamma}{d\rho_1} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{h}{h_1 h_2} \frac{d\theta}{d\rho} + \frac{1}{\mu} \frac{D}{h_1 h_2} \left( E - \frac{d^2 U}{dt^2} \right)$$

$$\frac{d\gamma}{d\rho} - \frac{d\alpha}{d\rho_2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{h_1}{h_2 h} \frac{d\theta}{d\rho_1} + \frac{1}{\mu} \frac{D}{h_2 h} \left( E_1 - \frac{d^2 V}{dt^2} \right) \quad (18)$$

$$\frac{d\alpha}{d\rho_1} - \frac{d\beta}{d\rho} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{h_2}{hh_1} \frac{d\theta}{d\rho_2} + \frac{1}{\mu} \frac{D}{hh_1} \left( E_2 - \frac{d^2 W}{dt^2} \right).$$

Il faut avoir  $\theta$  au moyen des UVW. La transformation de l'équation (13) donne sans difficulté :

$$0 = hh_1h_2 \left( \frac{d}{d\rho} \frac{U}{h_1h_2} + \frac{d}{d\rho_1} \frac{V}{h_2h} + \frac{d}{d\rho_2} \frac{W}{hh_1} \right). \quad (19)$$

Le système des équations (18) et (19) met complètement le problème en équation. Mais  $\theta$  peut se calculer directement; car si on ajoute respectivement les équations (18) différenciées respectivement par rapport à  $\rho, \rho_1, \rho_2$ , on a zéro dans le premier membre; et dans le second, si on a égard à la valeur précédente de  $\theta$  et à l'équation (4) qui donne  $\Delta_1\theta$ , on trouve :

$$0 = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \Delta_2\theta - \frac{D}{\mu} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{hh_1h_2}{\mu} \left( \frac{d}{d\rho} \frac{E}{h_1h_2} + \frac{d}{d\rho_1} \frac{E_1}{h_2h} + \frac{d}{d\rho_2} \frac{E_2}{hh_1} \right) D. \quad (20)$$

Si les forces extérieures sont nulles, ou de la forme :  $E_i = h_i \frac{dF}{d\rho_i}$  et qu'on ait  $\Delta_1 F = 0$ , on a la relation remarquable

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d + 2\mu}{D} \Delta_2\theta = \Omega^2 \Delta_2\theta.$$

On a ramené le système de 3 équations du 2<sup>e</sup> ordre aux dérivées partielles à un double système de 2 équations du 1<sup>er</sup> ordre, et une du 2<sup>e</sup> ordre, (20). Quand on aura trouvé VVW au moyen de fonctions arbitraires ou mieux d'un nombre infini de constantes, on en déduira les  $A_i$  et les  $\tau_i$  par des équations bien connues, qui résultent des équations (15), (12) et (13), et on exprimera que les forces élastiques ont des valeurs données à l'origine du temps en tous les points, et pour toutes les époques sur la surface du corps qui est une des surfaces coordonnées.

Si les coordonnées sont planes, les équations (18) ne changent pas de forme, et les expressions de  $\alpha\beta\gamma\theta$  se simplifient parce que les  $h_i$  deviennent égaux à l'unité. Mais elles peuvent prendre une autre forme. Dans la 1<sup>re</sup> équation (18), je fais tout passer dans le second membre, et je remarque que

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dx} &= \frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2V}{dxdy} + \frac{d^2W}{dxdz}, \\ \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} &= \frac{d^2U}{dy^2} - \frac{d^2V}{dxdy} + \frac{d^2W}{dz^2} - \frac{d^2W}{dxdz}; \end{aligned}$$

alors les équations de l'élasticité prennent la forme :

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \frac{d\theta}{dx} + \mu \Delta_2 U + D \left( E - \frac{d^2 U}{dt^2} \right) &= 0, \\(\lambda + \mu) \frac{d\theta}{dy} + \dots &= 0, \\(\lambda + \mu) \frac{d\theta}{dz} + \dots &= 0.\end{aligned}$$

Si l'on connaît  $\theta$  par l'équation (20), on n'a plus à considérer d'équations simultanées. Mais avec les coordonnées curvilignes, à cause de la valeur finie des rayons de courbure, les mêmes simplifications ne réussissent plus, et on doit fatalement considérer un système de trois équations simultanées.

## DES SURFACES ISODYNAMIQUES.

Considérons un solide naturel en équilibre sous l'action de forces extérieures. Si par un de ses points O je conçois un élément plan, il sera soumis sur ses deux faces à des forces égales et opposées, dont l'intensité peut s'exprimer au moyen des  $A_i$  et  $\tau_i$  définis comme nous l'avons fait dans le parallépipède  $d\omega$ , et au moyen des cosinus  $mnp$  des angles que la normale à l'élément fait avec les  $s_i$ . La force cherchée diffère infiniment peu de celle qui agirait sur un élément parallèle, infiniment peu éloigné de O, et formant avec les arêtes de  $d\omega$  un tétraèdre à sommet trirectangle. Si j'appelle  $FF_1, F_2$  les composantes de la force qui sollicite l'élément plan  $\omega$ , et si je remarque que les faces du tétraèdre ont pour aires  $m\omega, n\omega, p\omega$ , et que les forces extérieures du 3<sup>e</sup> ordre sont négligeables, j'ai pour les 3 premières équations de l'équilibre du tétraèdre :

$$\begin{aligned}F &= mA + n\tau_2 + p\tau_1, \\F_1 &= m\tau_2 + nA_1 + p\tau_1, \\F_2 &= m\tau_1 + n\tau_2 + pA_2.\end{aligned}$$

Il suffit de projeter ces 3 composantes sur une direction quelconque

pour avoir la composante suivant cette direction de la force qui agit sur  $\omega$ . Or si par le point O je mène trois droites rectangulaires  $x'y'z'$  définies par les cosinus de leur angles avec OX, OY, OZ :

$$x' \{ m \cdot n \cdot p \}, \quad y' \{ m_1 \cdot n_1 \cdot p_1 \}, \quad z' \{ m_2 \cdot n_2 \cdot p_2 \},$$

je puis regarder ces droites comme tangentes aux arêtes d'un second élément  $d\omega'$ , et je trouverai comme je viens de dire les composantes suivant chaque arête de  $d\omega'$  des forces qui agissent sur chacune de ses faces : il n'y a que six composantes distinctes, les  $A'_i$  et les  $\tau'_i$  répondant aux  $A_i$  et  $\tau_i$  de  $d\omega$ . On a :

$$A' = m^2 A + n^2 A_1 + p^2 A_2 + 2np\tau + 2pm\tau_1 + 2mn\tau_2$$

. . . . .

$$\tau' = m_1 m_2 A + n_1 n_2 A_1 + p_1 p_2 A_2 + (n_1 p_2 + p_1 n_2)\tau + (p_1 m_2 + m_1 p_2)\tau_1 + (m_1 n_2 + n_1 m_2)\tau_2$$

. . . . .

On aurait précisément les mêmes résultats si on prenait la surface

$$Ax^2 + A_1 y^2 + A_2 z^2 + 2\tau yz + 2\tau_1 xz + 2\tau_2 xy = 1,$$

et qu'on voulût la rapporter à trois axes  $x'y'z'$  de manière à mettre son équation sous la forme :

$$A'x'^2 + A_1'y'^2 + A_2'z'^2 + 2\tau'y'z' + 2\tau'z'x' + 2\tau_2'x'y' = 1.$$

La théorie des surfaces du 2<sup>e</sup> ordre indique un système d'axes unique pour lequel les  $\tau'_i$  sont nuls, c'est-à-dire pour lequel les faces de  $d\omega'$  sont pressées normalement. Les  $A_i$  et  $\tau_i$  varient aux divers points du corps, l'orientation du parallépipède pressé normalement varie aussi, mais d'une façon continue, et l'on peut concevoir trois familles de surfaces orthogonales, dites isostatiques, qui sont en tous leurs points pressées normalement. Leur nature dépend des forces extérieures, de la distribution de l'élasticité dans le corps, et on ne les connaît pas en général ; mais si on pouvait les prendre pour surfaces coordonnées, les équations (10) se simplifieraient par la supposition de  $\tau = \tau_1 = \tau_2 = 0$ . Comme il y a équilibre, si je néglige les forces extérieures, j'ai :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA}{ds} &= \frac{A - A_1}{r'} + \frac{A - A_2}{r''} \\ \frac{dA_1}{ds_1} &= \frac{A_1 - A_2}{r_1''} + \frac{A_1 - A}{r_1} \\ \frac{dA_2}{ds_2} &= \frac{A_2 - A}{r_2} + \frac{A_2 - A_1}{r_2'} \end{aligned} \right\} 21)$$

On déduira de ces équations les expressions de  $A_i$ , et on vérifiera qu'elles satisfont aux conditions initiales et à la surface, ce qui légitimera l'hypothèse de leur isostaticité.

Comme dans un système isostatique les  $\varepsilon_s$  sont nulles, pourvu que le corps ait 3 axes de symétrie, il semble qu'on puisse trouver le déplacement des divers points en égalant à zéro les seconds membres des trois dernières équations (12). Mais on aura en général des identités; car les deux premières, par exemple, indiquent que les surfaces  $\rho_2$  sont isostatiques; les deux autres surfaces isostatiques devant être orthogonales aux autres sont déterminées, et la 3<sup>e</sup> équation est nécessaire.

Les équations (18) ne se simplifient pas quand on suppose les coordonnées faisant partie d'un système isostatique, le parti le plus avantageux est de conserver les équations (21) qui, en général, suffiront pour déterminer  $A, A_1, A_2$ . On en déduira les  $\delta s_i$  et  $\varepsilon s_i$  qui sont liés aux  $A_i$  et  $\tau_i$  par 6 équations du 4<sup>er</sup> degré, dans le cas général. On aura ensuite UVW par trois des équations (12), à condition qu'on n'en prenne pas trois dont les premiers membres soient connus par le seul fait de la nullité des  $\tau_i$ .

Si l'on a un corps terminé par deux surfaces  $\rho$ , il est clair qu'on pourra déterminer les forces extérieures de manière que les surfaces  $\rho$  soient isostatiques: il faudra en tous cas que les forces extérieures soient normales. Mais si les forces ont la même intensité sur toute l'étendue d'une paroi, comme lorsque le corps serait pressé par un fluide, alors il est très-peu de surfaces qui peuvent être isostatiques. Nous appellerons surfaces isodynamiques une famille de surfaces telles que, si deux d'entre elles sont pressées normalement et avec une intensité constante sur chacune, les autres surfaces soient dans les mêmes conditions. Les équations de l'élasticité doivent donner la pression de chaque surface isodynamique en fonction du paramètre seul de la surface.

Pour les surfaces développables, il est facile d'exprimer à quelles conditions elles sont isodynamiques. Soient  $\rho_i$  les surfaces conjuguées de  $\rho$  qui partagent avec celles-ci un système de lignes de courbure droites : on aura

$$\frac{1}{r''} = \frac{1}{r_1''} = 0.$$

Les équations (21) deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\rho} &= \frac{1}{h_1} \frac{dh_1}{d\rho} (A - A_1), \\ \frac{dA_1}{d\rho_1} &= \frac{1}{h} \frac{dh}{d\rho_1} (A_1 - A), \\ \frac{dA_2}{d\rho_2} &= \frac{1}{h} \frac{dh}{d\rho_2} (A_2 - A) + \frac{1}{h_1} \frac{dh_1}{d\rho_2} (A_2 - A_1). \end{aligned}$$

Je différentie la première par rapport à  $\rho_1$ , et j'arrive à :

$$0 = -\frac{1}{h_1} \frac{dh_1}{d\rho} \frac{dA_1}{d\rho_1} + (A - A_1) \frac{d}{d\rho_1} \left( \frac{1}{h_1} \frac{dh_1}{d\rho} \right) = \frac{(A - A_1)}{h} \left( \frac{1}{h_1} \frac{dh_1}{d\rho} \frac{dh}{d\rho_1} + h \frac{d}{d\rho_1} \frac{1}{h_1} \frac{dh_1}{d\rho} \right).$$

Le premier facteur ne peut être nul, sinon A serait constant; il faut que l'autre soit nul; son intégrale par rapport à  $\rho_1$  doit ne dépendre que de  $\rho$  et  $\rho_2$  :

$$\frac{h}{h_1} \frac{2h_1}{d\rho} = \frac{1}{r'} = \varphi(\rho \cdot \rho_2).$$

La courbure finie des surfaces cherchées ne dépend pas du paramètre de la développable orthogonale; elle reste donc la même tout le long d'une ligne de courbure. La surface sera tangente à une sphère suivant chacune de ces lignes. D'ailleurs les normales tout le long des génératrices forment des plans dont chacun devra contenir le centre des sphères. Il faut donc que ces plans normaux passent tous par une même droite, et que la surface enveloppe d'une sphère dont le centre suit une ligne droite, et qui en touche une autre dans le plan de la première, soit un cylindre ou un cône circulaires droites.

Examinons ces deux cas, et d'abord celui du cylindre, qui a pour surfaces conjuguées ses plans méridiens et ses plans de section droite. On a

$$h = 1, \quad h_1 = \frac{1}{\rho}, \quad h_2 = 1,$$

$$\frac{1}{r'} = -\frac{1}{\rho}, \quad \frac{1}{r''} = \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_1''} = \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_2'} = 0,$$

et les équations de l'élasticité donnent :

$$\frac{dA}{d\rho} = \frac{A_1 - A}{\rho}, \quad \frac{dA_1}{d\rho_3} = 0, \quad \frac{dA_2}{d\rho_2} = 0. \quad (22)$$

Notre système n'est pas complètement déterminé par ces équations. Il faut y joindre une condition, par exemple que  $A_2$  soit nulle, ou bien que le cylindre ne s'allonge pas. Cherchons si ces deux hypothèses conviennent à un système isodynamique. Les équations (16) nous donnent les dilatations en fonction des forces; on se servira de l'expression (22) de  $A_1$  en  $A$  et  $\frac{dA}{d\rho}$ , et selon qu'on fera  $A_2 = 0$ , ou  $\delta s_2 = 0$ , on trouvera, en supposant l'élasticité constante :

$$\text{par } A_2 = 0 \left\{ \begin{array}{l} \delta s = \frac{1}{2\mu Q} \left( \lambda \left( A - \rho \frac{dA}{d\rho} \right) + 2\mu A \right) \\ \delta s_1 = \frac{1}{2\mu Q} \left( \lambda \left( A + 2\rho \frac{dA}{d\rho} \right) + 2\mu \left( A + \rho \frac{dA}{d\rho} \right) \right) \\ \delta s_1 = -\frac{\lambda}{2\mu Q} \left( 2A + \rho \frac{dA}{d\rho} \right); \end{array} \right.$$

$$\text{par } \delta s_2 = 0 \left\{ \begin{array}{l} \delta s = \frac{1}{4\mu Q(\lambda + \mu)} \left( -3\lambda^2 \rho \frac{dA}{d\rho} + 6\lambda\mu A - 2\lambda\mu\rho \frac{dA}{d\rho} + 4\mu^2 A \right) \\ \delta s_1 = \frac{1}{4\mu Q(\lambda + \mu)} \left( 3\lambda^2 \rho \frac{dA}{d\rho} + 6\lambda\mu A + 8\lambda\mu\rho \frac{dA}{d\rho} + 4\mu^2 A + 4\mu^2 \rho \frac{dA}{d\rho} \right). \end{array} \right.$$

D'autre part, les équations (12) donnent pour le cylindre, en observant que par symétrie,  $V$  et les dérivées de  $U$  et de  $W$  par rapport à  $\rho$ , doivent être nulles :

$$\delta s = \frac{dU}{d\rho}, \quad \delta s_1 = \frac{U}{\rho}, \quad \delta s_2 = \frac{dW}{d\rho_2}, \quad 0 = \frac{dW}{d\rho}.$$

Si l'on élimine  $\frac{dU}{d\rho}$  entre les deux premières, on trouve :

$$\delta s = \frac{d \cdot \rho \delta s_1}{d\rho}.$$

Si l'on remplace  $\delta s$  et  $\delta s_1$  par leurs valeurs, on trouve qu'en supprimant le facteur commun  $2(\lambda + \mu)\rho$  pour la 1<sup>re</sup> hypothèse,  $(3\lambda^2 + 8\lambda\mu + 4\mu^2)\rho$  pour la seconde, on a la même équation :

$$3 \frac{dA}{d\rho} + \rho \frac{d^2A}{d\rho^2} = 0;$$

d'où

$$A = C + \frac{C'}{\rho^2}, \quad \frac{dA}{d\rho} = -\frac{2C'}{\rho^3}.$$

La 1<sup>re</sup> hypothèse donne  $\delta s_1 = \frac{\lambda C}{\mu Q}$ , et  $W$  est proportionnel à la hauteur.

On détermine les constantes  $C$  et  $C'$  au moyen de la pression à l'extérieur et à l'intérieur, on peut former  $\delta s_1$ , et  $U = \rho \delta s_1$ , ce qui complète la solution, et montre que les 2 hypothèses donnent des surfaces isodynamiques. Nous ne rendrons pas plus explicites les calculs pour ce cas idéal, car nous les reprendrons complètement dans le cas de la sphère.

Considérons en second lieu un solide compris entre 2 cônes droits ayant même axe et même sommet; les cônes isodynamiques ont pour paramètre l'angle  $\theta$  que font leurs génératrices avec l'axe; les surfaces conjuguées sont des sphères de rayon  $\rho_1$ , et des plans méridiens dont l'azimut est  $\varphi$ . On a pour les équations (21) :

$$\frac{dA}{d\theta} = (A_2 - A) \cot \theta, \quad \frac{dA_1}{d\rho_1} = \frac{A + A_2 - 2A_1}{\rho_1}, \quad \frac{dA_2}{d\varphi} = 0.$$

Si j'élimine  $A$ , entre les deux premières, et si je multiplie le résultat par  $\rho_1$ , j'ai :

$$\rho_1^2 \frac{dA_1}{d\rho_1} + 2\rho_1 A_1 = \rho_1 \left( 2A + \frac{dA}{d\theta} \operatorname{tg} \theta \right).$$

Je puis intégrer par rapport à  $\rho_1$ , et si je suppose que  $\rho_1$  puisse devenir nul, ou que le corps commence au sommet des cônes, pour que  $A_1$  reste fini, il faut que la constante d'intégration soit 0 :

$$A_1 = A + \frac{1}{2} \frac{dA}{d\theta} \operatorname{tg} \theta;$$

donc

$$\frac{dA_1}{d\rho_1} = 0 \quad \text{et} \quad A_2 = A + \frac{dA}{d\theta} \operatorname{tg} \theta.$$

Par les formules (16) on exprime les  $\delta s_i$  en A et  $\frac{dA}{d\theta}$

$$\begin{aligned}\delta s &= \frac{1}{2\mu Q} \left( -\frac{3}{2} \lambda \frac{dA}{d\theta} \operatorname{tg} \theta + 2\mu A \right), \\ \delta s_1 &= \frac{1}{2\mu Q} 2\mu \left( A + \frac{1}{2} \frac{dA}{d\theta} \operatorname{tg} \theta \right), \\ \delta s_2 &= \frac{1}{2\mu Q} \left( \frac{3}{2} \lambda \frac{dA}{d\theta} \operatorname{tg} \theta + 2\mu \left( A + \frac{dA}{d\theta} \operatorname{tg} \theta \right) \right).\end{aligned}$$

Les équations (12) deviennent dans ce cas, avec  $W = 0$ :

$$\rho_1 \delta s = \frac{dU}{d\theta} + V, \quad \delta s_1 = \frac{dV}{d\rho_1}, \quad \delta s_2 = \frac{U \cot \theta}{\rho_1} + \frac{V}{\rho_1}, \quad 0 = \frac{dV}{d\theta} - U.$$

Si l'on admet que le sommet des cônes ne se déplace pas, la seconde s'intègre sans constante arbitraire :

$$V = \frac{\rho_1}{Q} \left( A + \frac{1}{2} \frac{dA}{d\theta} \operatorname{tg} \theta \right).$$

Si l'on élimine U entre la 3<sup>e</sup> et la 4<sup>e</sup>, on trouve :

$$\delta s_2 = \frac{V}{\rho_1} + \frac{\cot \theta}{\rho_1} \frac{dV}{d\theta}$$

ou

$$\frac{d^2 A}{d\theta^2} + \left( 3 \cot \theta - \frac{3\lambda}{4\mu} \operatorname{tg} \theta \right) \frac{dA}{d\theta} = 0.$$

Si on l'élimine au contraire entre la 1<sup>re</sup> et la 3<sup>e</sup>, on arrive à :

$$\frac{d^2 A}{d\theta^2} + \left( 3 \cot \theta + \frac{4}{\sin 2\theta} \right) \frac{dA}{d\theta} = 0.$$

A devant vérifier deux équations incompatibles, il s'ensuit que les cônes eux-mêmes ne peuvent être isodynamiques.

Parmi les surfaces aux deux courbures finies, on ne sait pas *a priori* quelles sont celles qui peuvent être isodynamiques. Il est probable que leur nombre est très-limité, mais il est évident qu'elles comprennent les sphères concentriques, dont j'appelle le rayon  $\rho$ . Je prends pour surfaces conjuguées les cônes de latitude  $\varphi$ , et les plans méridiens de longitude  $\psi$ .

On trouve par de simples considérations géométriques :

$$h = 1 \quad h_1 = \frac{1}{\rho} \quad h_2 = \frac{1}{\rho \cos \varphi}$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r''} = \frac{1}{\rho} \quad \frac{1}{r'_1} = \frac{\tan \varphi}{\rho} \quad \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r'_2} = 0.$$

Les équations (21) de l'élasticité deviennent pour la sphère :

$$\frac{dA}{d\rho} = \frac{A_1 + A_2 - 2A}{\rho} \quad \frac{dA_1}{d\varphi} = (A_1 - A_2) \operatorname{tg} \varphi \quad \frac{dA_2}{d\psi} = 0 \quad (23)$$

Éliminant  $A_2$  entre les deux premières, et multipliant par  $2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$  :

$$2 \left( 2A + \rho \frac{dA}{d\rho} \right) \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = 2 \left( 2A_1 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi - \frac{dA_1}{d\varphi} \cos^2 \varphi d\varphi \right).$$

Comme  $A$  et  $\frac{dA}{d\rho}$  ne dépendent que de  $\rho$ , on peut intégrer, et pour que  $A_1$  reste fini quand  $\cos \varphi$  est nul, il ne faut pas introduire de constante :

$$A_1 = A + \frac{\rho}{2} \frac{dA}{d\rho},$$

et comme  $\frac{dA_1}{d\rho}$  est alors nul,  $A_1 - A_2 = 0$ , et

$$A_1 = A_2 = A + \frac{1}{2} \rho \frac{dA}{d\rho}. \quad (24)$$

Nos équations sont encore insuffisantes pour déterminer les  $A_i$ . Mais les équations (12) étant en nombre supérieur à celui des projections du déplacement peuvent nous servir à compléter le problème en donnant à la fois  $UVW$  et les  $A_i$ . Toutefois, nous simplifierons beaucoup en observant que, la sphère devant conserver sa figure, à cause de la parfaite symétrie, les molécules ne se déplacent que suivant les rayons,  $V$  et  $W$  sont nuls. Pour utiliser les équations (12), il faut exprimer les  $\delta s_i$  au moyen des équations (16) et (24). Nous rendons à  $\theta$  sa signification de dilatation cubique, et nous trouvons :

$$\delta s = \frac{1}{2\mu Q} \left( -\lambda \rho \frac{dA}{d\rho} + 2\mu A \right)$$

$$\delta s_1 = \delta s_2 = \frac{1}{2\mu Q} \left( \frac{1}{2} \lambda \rho \frac{dA}{d\rho} + 2\mu \left( A + \frac{1}{2} \rho \frac{dA}{d\rho} \right) \right) \quad (25)$$

$$\theta = \frac{1}{Q} \left( 3A + \rho \frac{dA}{d\rho} \right).$$

Parmi les équations (12), les deux premières seules ne sont pas des identités, et donnent :

$$\frac{dU}{d\rho} = \delta s, \quad U = \rho \delta s_1.$$

Éliminant  $\frac{dU}{d\rho}$ , j'ai :

$$\delta s = \delta s_1 + \rho \frac{d\delta s_1}{d\rho}.$$

Si je remplace  $\delta s$  et  $\delta s_1$  par leur valeur (23), et si j'effectue, je trouve le facteur commun  $\lambda + 2\mu$  que je supprime, et il reste :

$$\rho \frac{d^2 A}{d\rho^2} + 4 \frac{dA}{d\rho} = 0;$$

d'où

$$\frac{dA}{d\rho} = \frac{C}{\rho^3}, \quad A = C' - \frac{C}{3\rho^3}.$$

Soient  $RR'$  les rayons intérieur et extérieur de la couche sphérique,  $PP'$  les pressions à l'intérieur et à l'extérieur ; en les substituant à  $-A$  avec les valeurs convenables de  $\rho$ , on détermine les deux constantes, et l'on trouve sans peine les éléments du problème :

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\rho} &= \frac{3(RR')^3(P-P')}{(R'^3 - R^3)\rho^3}, \\ A &= \frac{PR^3 - P'R'^3}{R'^3 - R^3} - \frac{(RR')^3(P-P')}{(R'^3 - R^3)\rho^3}, \\ A_1 = A_2 &= \frac{PR^3 - P'R'^3}{R'^3 - R^3} + \frac{1}{2} \frac{(RR')^3(P-P')}{(R'^3 - R^3)\rho^3}, \\ 0 &= \frac{3}{Q} \frac{PR^3 - P'R'^3}{R'^3 - R^3}, \\ U &= \frac{1}{4\mu} \frac{(RR')^3(P-P')}{(R'^3 - R^3)\rho^2} + \frac{\rho}{Q} \frac{PR^3 - P'R'^3}{R'^3 - R^3}. \end{aligned}$$

Ainsi se résout un problème si difficile dans le cas où les forces extérieures sont quelconques. On peut se proposer, si la sphère est creuse, de calculer l'augmentation de son volume intérieur. Il suffit de faire  $\rho = R$  dans  $U$  et de prendre :

$$4\pi \left( R^3 U + R U^2 + \frac{1}{3} U^3 \right).$$

Cette expression est peu remarquable; mais si l'on suppose  $P = 0$ , et si la déformation est assez petite pour qu'on puisse négliger le carré  $U^2$ , on trouve la formule suivante, qui a servi à M. Regnault dans ses expériences sur la compressibilité des liquides; en appelant  $\Omega$  l'augmentation du volume intérieur, on a :

$$\Omega = -\frac{9\lambda + 2\mu}{4\mu Q} \frac{PR^3}{R^3 - R^3}.$$

On peut avoir l'interprétation mécanique de la quantité  $Q$ . En effet, soit qu'on suppose  $R = 0$ , c'est-à-dire la sphère pleine, soit  $P' = P$ , ou la pression la même en dedans qu'en dehors, on trouve :

$$0 = -\frac{3P'}{Q};$$

Cela prouve que la sphère se contracte de la même façon dans nos deux hypothèses, et que  $\frac{4}{Q}$  est le tiers de la compressibilité cubique de la substance. On trouve la même chose pour un prisme également pressé sur toutes ses faces. Mais si je le suppose pressé sur ses bases seulement par une pression  $P'$ , si  $\frac{4}{E}$  est son coefficient de compressibilité linéaire, on a pour le déplacement d'un point  $(x, y, z)$  :

$$U = -\frac{P'}{E}x, \quad V = ay, \quad W = az.$$

On exprime  $E$  et  $a$  au moyen de  $\lambda$  et  $\mu$  en écrivant que les valeurs des pressions sur les bases et sur les côtés, telles qu'elles sont données par les formules (15) sont  $-P'$  et  $0$ , et l'on trouve ensuite :

$$0 = -\frac{P'}{Q} \quad \delta x = -\frac{P'}{E} = -\frac{\lambda + \mu}{\mu Q} P'.$$

On voit que le prisme se comprime trois fois moins que s'il était pressé en tous sens; et, d'autre part, on a le moyen d'exprimer  $\lambda$  et  $\mu$  au moyen de  $E$  et de  $Q$ , qui sont des données d'expérience :

$$\lambda = \frac{Q(Q-E)}{3Q-E} \quad \mu = \frac{QE}{3E-Q}.$$

Les expériences de Cagniard de Latour donnent  $\lambda = \mu$ , celles de Wertheim  $\lambda = 2\mu$ ; mais il est impossible de décider *a priori* sans faire d'hypothèse sur la constitution des corps.

Nous allons chercher si les ellipsoïdes homofocaux peuvent être isodynamiques. Soit le système triplement orthogonal :

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} &= 1 && \text{ellipsoïde.} \\ \frac{x^2}{\rho_1^2} + \frac{y^2}{\rho_1^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \rho_1^2} &= 1 && \text{hyperboloïde à une nappe.} \\ \frac{x^2}{\rho_2^2} - \frac{y^2}{b^2 - \rho_1^2} - \frac{z^2}{c^2 - \rho_1^2} &= 1 && \text{hyperboloïde à deux nappes.} \end{aligned}$$

Les équations (1) et (2) donnent :

$$\frac{1}{h_i^2} = \left(\frac{dx}{d\rho_i}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\rho_i}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\rho_i}\right)^2.$$

D'ailleurs les équations du système donnent pour les points de rencontre des trois surfaces, en valeur absolue :

$$x = \frac{\rho\rho_1\rho_2}{bc}, \quad y = \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \rho_2^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}, \quad z = \frac{\sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \rho_1^2}\sqrt{c^2 - \rho_2^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}.$$

On en déduit les  $h_i$ , les courbures et les équations de l'élasticité, en supposant *a priori* les ellipsoïdes isodynamiques :

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\rho} &= \frac{\rho}{\rho^2 - \rho_1^2} (A_1 - A) + \frac{\rho}{\rho^2 - \rho_2^2} (A_2 - A) \\ \frac{dA_1}{d\rho_1} &= \frac{\rho_1}{\rho_1^2 - \rho_2^2} (A_2 - A_1) + \frac{\rho_1}{\rho^2 - \rho_1^2} (A_1 - A) \\ \frac{dA_2}{d\rho_2} &= \frac{\rho_2}{\rho^2 - \rho_2^2} (A_2 - A) + \frac{\rho_2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} (A_2 - A_1)^2. \end{aligned} \tag{26}$$

Je puis éliminer  $A_2$  entre la 1<sup>re</sup> et la 2<sup>e</sup> ou  $A_1$  entre la 1<sup>re</sup> et la 3<sup>e</sup>. Le premier résultat s'intègre par rapport à  $\rho_1$ , le second par rapport à  $\rho_2$ , et si C et C' sont des arbitraires, on a :

$$A_1 = \frac{\rho_1^2 + C}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \left( A + \frac{\rho^2 - \rho_2^2}{2\rho} \frac{dA}{d\rho} \right),$$

$$A_2 = \frac{C' - \rho_2^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \left( A + \frac{\rho^2 - \rho_1^2}{2\rho} \frac{dA}{d\rho} \right).$$

Comme  $\rho_1 = \rho_2 = b$  sur tous les ombilics des ellipsoïdes, il faut que  $C$  soit une fonction de  $\rho_2$  qui devienne  $-b^2$  quand  $\rho_2 = b$ .  $C'$  est une fonction de  $\rho_1$  qui devient  $b^2$  pour  $\rho_1 = b$ . Cela ne détermine pas encore  $C$  et  $C'$ ; mais si l'on suppose que  $\rho$  grandisse indéfiniment, l'ellipsoïde tend vers une sphère, et l'on doit avoir  $A_1 = A_2$ , ce qui exige  $C = -\rho_2^2$ ,  $C' = \rho_1^2$ , et l'on a :

$$A_1 = A + \frac{\rho^2 - \rho_2^2}{2\rho} \frac{dA}{d\rho}, \quad A_2 = A + \frac{\rho^2 - \rho_1^2}{2\rho} \frac{dA}{d\rho}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la première équation (26), on n'a plus une identité, mais :

$$\left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\rho^2 - \rho_2^2}{\rho^2 - \rho_1^2} - \frac{1}{2} \frac{\rho^2 - \rho_1^2}{\rho^2 - \rho_2^2} \right) \frac{dA}{d\rho} = 0.$$

Comme  $\rho_1$  ne peut être généralement égal à  $\rho_2$ , cette égalité exige que  $A$  soit constant, ou bien il faut que  $\rho_1, \rho_2$  soient infiniment petits par rapport à  $\rho$ , c'est-à-dire que l'ellipsoïde devienne une sphère. Donc les ellipsoïdes homofocaux ne peuvent être isodynamiques, à moins que  $A, A_1, A_2$  n'aient une même valeur constante.

Malgré le résultat précédent, il est bon de s'assurer que les ellipsoïdes de révolution ne sont pas isodynamiques, car on peut craindre que les calculs généraux ne leur soient pas applicables; le défaut d'isodynamie se manifeste en effet plus tard, et bien que les équations d'où l'on part ne présentent pas d'impossibilité. Soit donc le système orthogonal :

$$\frac{x^2 + y^2}{\rho^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1, \quad \frac{x^2 + y^2}{\rho_1^2} - \frac{z^2}{c^2 - \rho_1^2} = 1, \quad y = x \operatorname{tg} \rho_2.$$

On trouve par les mêmes calculs que précédemment :

$$\frac{dA}{d\rho} = \rho \frac{A_1 - A}{\rho^2 - \rho_1^2} + \frac{1}{\rho} (A_2 - A),$$

$$\frac{dA}{d\rho_1} = \frac{\rho_1}{\rho^2 - \rho_1^2} (A - A) + \frac{1}{\rho_1} (A_2 - A_1),$$

$$\frac{dA}{d\rho_2} = 0.$$

Ces équations ne déterminent pas complètement les  $A_i$ , mais elles sont satisfaites si l'on pose :

$$A_1 = A + \frac{1}{2}\rho \frac{dA}{d\rho}, \quad A_2 = A + \frac{1}{2}\rho \left(1 - \frac{\rho_1^2}{\rho^2 - \rho_1^2}\right) \frac{dA}{d\rho}. \quad (27)$$

Toutefois cette condition est nécessaire, mais non suffisante : il faut encore que les valeurs des  $\delta s$ , qu'on en tire, combinées avec les équations (12), donnent pour  $A$  une valeur unique, fonction de  $\rho$  seule, et cette dernière condition n'est pas satisfaite. Formons d'abord :

$$\begin{aligned} \delta s &= \frac{1}{2\mu Q} \left[ \frac{\lambda}{2} \rho \left( \frac{\rho_1^2}{\rho^2 - \rho_1^2} - 2 \right) \frac{dA}{d\rho} + 2\mu A \right] \\ \delta s_1 &= \frac{1}{2\mu Q} \left[ \frac{\lambda}{2} \rho \frac{\rho^2}{\rho^2 - \rho_1^2} \frac{dA}{d\rho} + 2\mu \left( A + \frac{1}{2} \rho \frac{dA}{d\rho} \right) \right] \\ \delta s_2 &= \frac{1}{2\mu Q} \left[ \frac{\lambda}{2} \rho \left( 1 - \frac{2\rho_1^2}{\rho^2 - \rho_1^2} \right) \frac{dA}{d\rho} + 2\mu A + \mu \rho \left( 1 - \frac{\rho_1^2}{\rho^2 - \rho_1^2} \right) \frac{dA}{d\rho} \right]. \end{aligned}$$

La symétrie indique seulement que  $W$  est nul. Si l'on élimine  $U$  entre la 2<sup>e</sup> et la 3<sup>e</sup> équation (12), on a en général :

$$\frac{1}{r''} \delta s_1 - \frac{1}{r'} \delta s_2 = \frac{1}{r''} \frac{dV}{ds_1} + \frac{1}{r'r''_1} V.$$

Remplaçant les dilatations et les courbures par leurs valeurs, on arrive à l'équation qui détermine  $V$  :

$$\frac{dV}{d\rho_1} - \frac{\rho^2 V}{\rho_1(\rho^2 - \rho_1^2)} = \frac{1}{2\mu Q} \frac{\sqrt{\rho^2 - \rho_1^2}}{\sqrt{c^2 - \rho_1^2}} \left[ \frac{\lambda \rho^3 \rho_1^2}{(\rho^2 - \rho_1^2)^2} \frac{dA}{d\rho} - 2\mu \frac{\rho_1^2}{\rho^2 - \rho_1^2} A + \mu \frac{\rho \rho_1^4}{(\rho^2 - \rho_1^2)^2} \frac{dA}{d\rho} \right].$$

On a :

$$\int \frac{\rho^2 d\rho_1}{\rho_1(\rho^2 - \rho_1^2)} = \log \frac{C\rho_1}{\sqrt{\rho^2 - \rho_1^2}}.$$

Il s'ensuit que  $V$  sera de la forme  $\frac{\rho_1}{\sqrt{\rho^2 - \rho_1^2}} (F(\rho) + \varphi(\rho, \rho_1))$ .  $F$  étant une fonction arbitraire, et  $\varphi$  une fonction déterminée par la théorie des équations linéaires. Or  $\varphi$  s'annule quand on fait  $\rho_1 = c$ , et c'est ce qui fait réussir notre marche de calcul ; car la symétrie veut que  $V$  soit nul, non-seulement au pôle où  $\rho_1 = 0$ , mais à l'équateur, où  $\rho_1 = c$  ; il faut

donc égal à zéro la fonction arbitraire  $F(\rho)$  qui eût été embarrassante, et écrire :

$$V = \frac{\rho_1}{2\mu Q} \left[ \frac{(\lambda + \mu)\rho^3}{\sqrt{\rho^2 - \rho_1^2} \sqrt{\rho^2 - c^2}} \frac{dA}{d\rho} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{c^2 - \rho_1^2}}{\sqrt{\rho^2 - c^2}} - \mu \frac{\sqrt{c^2 - \rho_1^2}}{\sqrt{\rho^2 - \rho_1^2}} \left( 2A + \rho \frac{dA}{d\rho} \right) \right].$$

La 3<sup>e</sup> équation (12) donne alors :

$$U = \frac{\rho}{2\mu Q \sqrt{\rho^2 - c^2} \sqrt{\rho^2 - \rho_1^2}} \left\{ \frac{(\lambda + \mu)\rho^3 \sqrt{c^2 - \rho_1^2}}{\sqrt{\rho^2 - c^2}} \frac{dA}{d\rho} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{c^2 - \rho_1^2}}{\sqrt{\rho^2 - c^2}} + 2\mu(\rho^2 - c^2)A + \rho \left( \mu(\rho^2 - c^2 - \rho_1^2) + \frac{\lambda}{2} (\rho^2 - 3\rho_1^2) \right) \frac{dA}{d\rho} \right\}.$$

On voit que pour  $\rho_1 = 0$ ,  $\frac{dV}{d\rho_1}$  est nul, U maximum ; ce qui pourrait expliquer quelques phénomènes géologiques de soulèvement qui se manifestent vers les pôles de la terre.

Pour trouver A, je me sers de la 6<sup>e</sup> équation (12) qui se met sous la forme :

$$h_1^2 \frac{d \cdot U h}{d\rho_1} + h_2 \frac{d \cdot V h_1}{d\rho} = 0;$$

d'où :

$$\left[ \frac{(\lambda + \mu)\rho^3}{\sqrt{\rho^2 - c^2} \sqrt{c^2 - \rho_1^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{c^2 - \rho_1^2}}{\sqrt{\rho^2 - c^2}} - \mu\rho \right] \frac{d^2 A}{d\rho^2} = \left[ 3\mu - 2 \frac{(\lambda + \mu)\rho^4}{(\rho^2 - \rho_1^2)(\rho^2 - c^2)} - \frac{(\lambda + \mu)\rho^2 (\rho^2 - 3c^2)}{(\rho^2 - c^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{c^2 - \rho_1^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{c^2 - \rho_1^2}}{\sqrt{\rho^2 - c^2}} \right].$$

Mais cette équation ne donne point  $\frac{dA}{d\rho}$  en fonction de  $\rho$  seul, car si on la différentie par rapport à  $\rho_1$ , en supposant A indépendant de  $\rho_1$ , on a une équation incompatible avec la proposée. Donc les ellipsoïdes planétaires ne sont pas isodynamiques.

Les calculs précédents ne sont pourtant pas inutiles. Supposons une couche ellipsoïdale assez mince pour que  $\frac{dA}{d\rho}$  y soit constant et égal à  $\frac{P - P'}{R - R'}$ , si RR' sont les grands axes des couches intérieure et extérieure, PP' les pressions en dedans et en dehors. Les expressions précédentes de U et

de V donnent le mouvement de la paroi interne, en y supposant  $A = -P$ ,  $\rho = R$ . On peut calculer l'augmentation du volume intérieur : en effet, chaque élément  $ds_1 ds_2$  de la surface primitive décrit dans son déplacement une sorte d'hexaèdre curviligne dont le volume est à peu près  $U ds_1 ds_2$  : or avec nos coordonnées :

$$ds_1 ds_2 = \frac{R \rho_1 \sqrt{R^2 - \rho_1^2}}{c \sqrt{c^2 - \rho_1^2}} d\rho_1 d\rho_2.$$

L'augmentation de volume est le double de la somme de ces éléments calculée entre  $\rho_2 = 0$  et  $\rho_2 = 2\pi$ ,  $\rho_1 = 0$  et  $\rho_1 = c$  ; donc

$$\Omega = \frac{2\pi R^2}{\mu Q c \sqrt{R^2 - c^2}} \int_0^c \rho_1 d\rho_1 \left[ \frac{(\lambda + \mu) R^3}{\sqrt{R^2 - c^2}} \frac{dA}{d\rho} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{c^2 - \rho_1^2}}{\sqrt{R^2 - c^2}} - 2\mu \frac{R^2 - c^2}{\sqrt{c^2 - \rho_1^2}} P \right. \\ \left. + R \left( \mu \frac{R^2 - c^2 - \rho_1^2}{\sqrt{c^2 - \rho_1^2}} + \frac{1}{2} \lambda \frac{R^2 - 3\rho_1^2}{\sqrt{c^2 - \rho_1^2}} \right) \frac{dA}{d\rho} \right]$$

Cette intégrale s'obtient en posant  $c^2 - \rho_1^2 = \omega^2$ , et donne, en appelant  $l$  la ligne  $\sqrt{R^2 - c^2}$  :

$$\Omega = \frac{2\pi R^2}{\mu Q c l} \left[ \frac{\lambda + \mu}{2} \frac{R^3}{l} \left( R^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{c}{l - cl} \right) \frac{dA}{d\rho} - 2\mu c l^2 P + R \left( \left( \frac{\lambda}{2} - \mu \right) c (R^2 - 2c^2) + \frac{c^2 \mu}{3} \right) \frac{dA}{d\rho} \right].$$

Dans le cas où l'on suppose  $c = 0$ ,  $l = R$ , c'est-à-dire où l'ellipsoïde devient une sphère, on retrouve :

$$\Omega = \frac{2\pi R^3}{\mu Q} \left[ \mu \left( R \frac{dA}{d\rho} - 2\rho \right) + \frac{\lambda}{2} R \frac{dA}{d\rho} \right] = 4\pi R^2 U,$$

U désignant l'allongement du rayon.

Une autre application remarquable consiste en ce que les équations (27), qui s'obtiennent si vite, peuvent indiquer la plus grande traction qui s'exerce sur les deux faces d'un élément plan de l'enveloppe. Dans les conditions d'un récipient à gaz ordinaire ou d'une chaudière, cette tension maximum est donnée par la valeur de  $A$ . Il faut que cette tension soit inférieure à la tension T capable de dépasser la limite de l'élasticité de l'enveloppe, dont l'épaisseur est  $e$ . On calcule  $e$  par l'inégalité :

$$\frac{1}{2} R' \frac{P - P'}{e} - P' < T \quad e > \frac{R' P - P'}{2 T + P'}.$$

L'ellipsoïde de révolution ovaire donne lieu à des calculs analogues. Nous dirons seulement que l'épaisseur d'une chaudière soumise en dedans à la pression  $P$ ,  $P'$  en dehors, doit avoir une épaisseur

$$e > \frac{R' P - P'}{2 T + P'} \left( 1 - \frac{c^2}{R'^2} \right).$$

Et nous savons généralement que les ellipsoïdes homofocaux ne sont pas isodynamiques.

## RAPPROCHEMENT DE LA THÉORIE DE LA CHALEUR ET DE L'ÉLASTICITÉ.

---

On voit que les surfaces isodynamiques sont bien moins nombreuses que les surfaces isothermes, car il n'y en a peut-être que deux espèces : les sphères et les cylindres droits. Mais cette différence n'entraîne pas la moindre difficulté à la théorie qui attribue la chaleur à des vibrations, différentes des vibrations lumineuses. Les surfaces isothermes sont caractérisées par une égale amplitude de vibrations, mais sans qu'elles soient concordantes sur toute la surface, et encore moins sans que rien y indique l'existence de pressions normales ; elles répondent à un problème de dynamique, tandis que les surfaces isodynamiques répondent à une question de statique. Ce sont deux résultats d'ordre bien distinct de la théorie commune de l'élasticité. Insistons sur la manière dont la théorie de la chaleur naît de celle de l'élasticité, et sur quelques circonstances qui rendent cette origine évidente.

Considérons un corps symétrique par rapport aux axes coordonnés. Soient  $V$  la vitesse de propagation d'une onde plane dont le plan a pour équation

$$mx + ny + pz = Vt; \quad (28)$$

$\tau$ ,  $\alpha$  la durée et l'amplitude des vibrations,  $s$  le déplacement des molécules à une époque  $t$  et dans une direction faisant avec les axes des angles

dont les cosinus sont  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ . L'hypothèse la plus simple sur les vibrations donne :

$$s = \alpha \cos \frac{\pi}{\tau} \left( t - \frac{mx + ny + pz}{V} \right).$$

Reportons-nous aux équations (11) de l'élasticité, faisons

$$V = s\xi, \quad V = s\eta, \quad W = s\zeta, \quad q = m\xi + n\eta + p\zeta,$$

ces équations deviennent de la forme :

$$\begin{aligned} V^2\xi &= A^2mq + (n^2c^2 + p^2b^2)\xi - mnc^2\eta - mpb^2\zeta, \\ V^2\eta &= B^2nq + (p^2a^2 + m^2c^2)\eta - npa^2\zeta - nmc^2\xi, \\ V^2\zeta &= C^2pq + (m^2b^2 + n^2a^2)\zeta - pmb^2\xi - pna^2\eta. \end{aligned}$$

Si on les ajoute respectivement multipliées par  $m$ ,  $n$ ,  $p$ , on a

$$q(V^2 - A^2m^2 - B^2n^2 - C^2p^2) = 0. \quad (29)$$

Si l'on satisfait à cette équation en faisant  $q = 0$ , on a les vibrations lumineuses dont l'existence a été mise hors de doute par Fresnel ; mais si l'on annule l'autre facteur, on a d'autres vibrations possibles, qui doivent être les vibrations calorifiques.

La surface-enveloppe du plan (28), eu égard à l'équation (29), est un ellipsoïde ayant ses axes confondus avec les axes de cristallisation :

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1.$$

Si l'on représente par une équation semblable l'ellipsoïde principal de la théorie de la chaleur, M. Duhamel a montré dans le XIX<sup>e</sup> cahier du *Journal de l'École polytechnique* que les ellipsoïdes homothétiques à celui-là sont isothermes pour les cristaux dont nous parlons, de même que les sphères concentriques le sont pour des corps homogènes. Tout fait penser que l'ellipsoïde principal et la surface des ondes du troisième rayon ont leurs axes identiques, et cela encore que la symétrie du cristal sera quelconque. Si la chaleur rayonnante consiste en des vibrations de l'éther qui entraînent à peine les molécules des corps, tandis que la chaleur sensible

exige les vibrations intenses des molécules matérielles, et si l'éther a la même distribution élastique que les corps qu'il remplit, la coïncidence des deux ellipsoïdes devient nécessaire. L'onde plane, au lieu de se propager avec la grande vitesse qu'elle a dans les milieux diathermanes, sera fort ralentie lorsqu'il lui faudra entraîner dans son mouvement les molécules pesantes; mais elle le sera dans une proportion constante, quelle que soit sa direction, et l'ellipsoïde principal ne sera autre que la surface-enveloppe d'ondes qui se propagent lentement.

Les interférences calorifiques annoncées par MM. Fizeau et Foucault dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences* pour 1847, la polarisation de la chaleur, constituent de nouvelles analogies entre les rayons calorifiques et les rayons lumineux. Mais on voit une manière de les distinguer qui devra être vérifiée par l'expérience. Sans donner la valeur de  $\xi$ ,  $\mu$ ,  $\zeta$ , qui est compliquée, on voit qu'ils donnent en général une direction oblique à la surface de l'onde. On peut appeler plan de polarisation le plan

$$(p\eta - n\zeta)\xi + (m\zeta - p\xi)y + (n\xi - m\eta)z = 0,$$

qui contient la vibration et la normale à l'onde. Le caractère dont je parlais consiste en ce que deux rayons calorifiques, polarisés à angle droit, sont encore susceptibles d'interférer, ce qui n'est pas vrai pour des rayons de lumière.

Une analogie, qui réduit presque de moitié la partie intégrale de la physique mathématique, consiste en ce que l'équation :

$$A^2 \frac{d^2F}{dx^2} + B^2 \frac{d^2F}{dy^2} + C^2 \frac{d^2F}{dz^2} = KF$$

donne aussi bien la loi des températures d'un corps chauffé que celle de la dilatation cubique d'un système ébranlé; et M. Lamé a fondé sur cette analogie une théorie complète de la cristallisation (*XVI<sup>e</sup> leçon sur la théorie de la chaleur*).

La chaleur étant un mouvement, il faut du travail pour échauffer un corps, et un corps chaud représente de la force. Cette idée, émise en 1824 par Carnot dans son *Traité sur la force motrice du feu*, a été reprise par MM. Clapeyron, William Thomson, Reech, Rankine, Clausius, Hiru,

dans les Journaux de l'École polyt. de la Société d'Édimbourg, de M. Liouville, de Poggendorff et de l'Académie. Ces physiciens se sont surtout occupés des gaz et des vapeurs, et d'après le théorème des forces vives, l'absurdité du mouvement perpétuel, l'impossibilité de créer du travail sans êtres animés ou de perdre de la chaleur en pure perte, ils ont démontré qu'à une même quantité de travail détruit répond une quantité constante de chaleur produite, et si l'on dépense cette chaleur, on reproduit le travail primitif. Cherchons seulement l'expression analytique du travail représenté par un corps animé de vibrations calorifiques. Soient un prisme de base  $\sigma$ , de hauteur  $2kl$ ,  $l$  étant la longueur d'onde de l'espèce de chaleur que je considère, et  $k$  assez grand pour que le prisme contienne un nombre entier  $n$  de molécules dont il n'y a qu'une file dans le prisme,  $v$  le volume de chacune d'elles,  $\rho$  sa densité et son intensité de vibration,  $e$ ,  $\varepsilon$  la densité et la longueur de vibration de l'éther. Si le prisme était formé d'éther, sa puissance vive serait :

$$\frac{\sigma e}{2} \left( \frac{\pi \varepsilon}{\tau} \right)^2 \int_0^{2kl} \sin^2 2\pi \left( \frac{t}{\tau} - \frac{x}{l} \right) dx = \frac{1}{2} \sigma K l e \left( \frac{\varepsilon \pi}{\tau} \right)^2.$$

Il faut y ajouter la puissance vive des molécules matérielles, moins celle de l'éther qui remplirait les espaces  $v$ , c'est-à-dire

$$\frac{1}{2} V \frac{\pi^2}{\tau^2} (\rho d^2 - e \varepsilon^2) \sum_{i=1}^{i=n-1} \sin^2 \pi \left( \frac{t}{\tau} - \frac{Kl}{n} \right).$$

Si l'on appelle  $M$  la masse matérielle comprise dans le prisme,  $E$  la masse éthérée, la puissance vive du prisme sera :

$$T = \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{\tau^2} (E \varepsilon^2 + M \alpha^2).$$

Cette expression contredit la théorie de la dispersion de la lumière fondée sur ce que  $\frac{k}{n}$  n'est pas très-petit ; elle ne peut donner l'équivalent mécanique de la chaleur parce que nous n'avons pas d'idée sur la densité de l'éther et l'amplitude des vibrations ; mais elle montre que les vibrations lumineuses représentent du travail aussi bien que les vibrations calorifiques. Elle montre aussi que pour une même amplitude de

vibrations la puissance vive croît avec la vitesse des molécules ou la réfrangibilité du rayon ; mais c'est le carré de l'amplitude, sans doute proportionnel à la température qui a le plus d'influence ;  $\alpha$  doit varier dans un rapport énorme, selon que la chaleur est à l'état statique ou à l'état dynamique. Enfin, puisqu'on échauffe un corps en le frottant, un liquide en l'agitant, et d'un autre côté un disque de cuivre en le soumettant à une influence électrodynamique, du noir de fumée en faisant tomber sur lui de la chaleur rayonnante, il est prouvé que les vibrations des molécules pondérables peuvent entraîner celles de l'éther et réciproquement.

Vu et approuvé :

*Le Doyen,*

MILNE EDWARDS.

Le 27 novembre 1862.

Permis d'imprimer :

*Le Vice-Recteur,*

A. MOURIER.

# THÈSE D'ASTRONOMIE.

---

Dans le chapitre VIII du 8<sup>e</sup> livre de la *Mécanique céleste*, Laplace donne le moyen de trouver l'équation de l'ombre projetée par Jupiter et la durée des éclipses de ses satellites. Mais l'illustre géomètre néglige le carré de l'aplatissement de Jupiter, l'inclinaison de son équateur sur son orbite et l'ellipticité des orbites des satellites ; ses formules ne suffisent plus pour des observations précises et bien régulières de cet important phénomène. Je me propose dans cette thèse d'étudier quelques points d'analyse qui se rapportent à la théorie de ces éclipses, et de donner les éléments calculés par Laplace, mais avec une approximation dix fois plus grande.

Je diviserai mon travail en trois chapitres. Dans le 1<sup>er</sup>, je montrerai comment le calcul intégral et l'algèbre peuvent donner l'équation et quelques propriétés de la surface développable circonscrite à deux ellipsoïdes.

Dans le 2<sup>e</sup> j'examinerai le cas où l'on suppose que Jupiter soit un ellipsoïde de révolution, et que le centre du Soleil soit dans l'équateur. Je démontrerai par l'analyse les caractères que MM. Poncelet et Chasles ont trouvés pour les développables circonscrites à deux surfaces du 2<sup>e</sup> ordre, et je donnerai exactement les éléments et l'équation de la surface de l'ombre. Nous en déduirons la section plane de l'ombre pour toutes les positions du Soleil.

Dans le 3<sup>e</sup> je donnerai, avec des formules encore simples et l'approximation annoncée, l'époque où commence et finit l'éclipse d'un satellite, et l'éclipse du Soleil à la surface de Jupiter lors de la conjonction des satellites. Nous trouverons le terme numérique de correction qui fait concorder le calcul et l'observation, et enfin nous verrons les causes qui rendront inexacte l'observation pratique des éclipses des satellites.

Quoique je ne veuille pas calculer des tables, je vais d'abord définir avec quelques nombres les éléments du monde de Jupiter, qui nous permettront de faire les corrections utiles et d'apprécier l'ordre de la grandeur des quantités que nous considérons. Jupiter a la forme d'un ellipsoïde de révolution, dont l'aplatissement est  $\frac{1}{17}$ , et le demi grand axe est égal à 11,225 fois le rayon terrestre. C'est ce demi grand axe que nous prendrons pour unité de longueur. L'inclinaison de l'équateur sur l'orbite est de 3° 5', et l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique terrestre est de 1° 18' 52". Je désigne les astres par leurs signes astronomiques ordinaires, je lis dans Delambre le temps des révolutions moyennes, et dans Arago les distances à Jupiter et les diamètres apparents, car ses nombres, calculés avec moins de décimales que ceux de Delambre, en diffèrent et méritent plus de confiance : ce qui me donne le tableau suivant :

ASTRES.	DURÉE MOYENNE de la révolution sidérale.	ARC DÉCRIT en 1°, en parties du rayon.	DISTANCE MOYENNE à $\zeta$	DEMI-DIAMÈTRE.
☉	j h m s 4332 14 18 41	0,000 000 0168	11116	10
♃'	1 18 28 36	041 0892	6,05	0,014
♃''	3 13 15 54	020 4694	9,62	0,012
♃'''	7 3 59 36	010 1476	15,35	0,021
♃ <sup>iv</sup>	16 18 5 7	004 3407	26,00	0,015

Il est clair que pour le Soleil, le mot de révolution sidérale s'applique à son mouvement apparent par rapport à Jupiter.

Si l'on conçoit avec Laplace 4 plans fixes menés entre l'équateur et l'orbite de Jupiter par la ligne des nœuds, et faisant avec le plan de l'équateur les angles respectifs

$$6'', \quad 1'5'', \quad 5'2'', \quad 24'33''$$

(j'adopte la division sexagésimale du cercle), les satellites se meuvent suivant des ellipses peu excentriques dont les plans varient de manière à faire avec les plans fixes correspondants des angles de

$$0'', \quad 27'39'', \quad 12'0'', \quad 14'58''.$$

Nous pouvons nous former une idée des dimensions et des positions des astres que nous considérons.

## DE LA DÉVELOPABLE CIRCONSCRITE A DEUX ELLIPSOIDES.

---

Ce chapitre est le résumé rapide de quelques théorèmes, plus ou moins connus, dont l'ensemble peut donner une solution complète de la question de géométrie que je m'y suis proposée.

Je simplifierai les calculs en rapportant les deux ellipsoïdes à des axes parallèles à un système de diamètres conjugués commun aux deux surfaces. Il n'existe pas toujours un système de trois plans parallèles à trois plans diamétraux conjugués dans deux surfaces du 2<sup>e</sup> degré ; mais son existence est certaine quand l'une des surfaces est un ellipsoïde. Soient donc 2 surfaces :

$$F = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

$$f = ax^2 + a'y^2 + \dots + d = 0.$$

Les plans diamétraux conjugués à la direction de la droite

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$$

ont pour équation, relativement à chacune des deux surfaces :

$$(Al + B'n + B''m)x + (A'm + B'l + Bn)y + (A''n + Bm + B'l)z + Cl + C'm + C''n = 0,$$

$$(al + b'n + b''m)x + \dots = 0.$$

Pour que ces plans soient parallèles, il faut que les coefficients angulaires de  $xyz$  dans la première équation soient aux coefficients correspondants de la seconde dans un même rapport que j'appelle  $t$ . On pourrait l'éliminer, mais il vaut mieux garder les 3 équations :

$$\begin{aligned} (A - at)l + (B'' - b''t)m + (B' - b't)n &= 0 \\ (B'' - b''t)l + (A' - a't)m + (B - bt)n &= 0 \\ (B' - b't)l + (B - bt)m + (A'' - a''t)n &= 0 \end{aligned} \tag{E}$$

Pour que  $lmn$  ne soient pas nuls, il faut que le déterminant de ces équations soit nul. On peut l'écrire sous une forme analogue à celle que Cauchy a donnée à l'équation en  $s$ , savoir :

$$(T) \quad \left. \begin{aligned} & (A - a't) [(A' - at)(A'' - a''t) - (B - bt)^2] \\ - & [(A' - a't)(B' - b't)^2 + (A'' - a''t)(B'' - b''t)^2 - 2(B - bt)(B' - b't)(B'' - b''t)] \end{aligned} \right\} = 0.$$

On voit qu'il peut y avoir deux racines imaginaires, car si  $B'B''b'b''$  sont nuls, il ne reste que le premier terme composant un facteur du 2<sup>e</sup> degré qui peut ne pas s'annuler pour des valeurs réelles de  $t$ . Mais si  $f = 0$  représente un ellipsoïde, on voit que ce facteur s'annule, car il est négatif si  $A' = a't$ , et positif si  $t$  est grand, puisque le coefficient de  $t^2$  est  $a'a'' - b^2$  qui est positif. Pour les 2 valeurs de  $t$  qui annulent ce facteur,  $A' - a't$  et  $A'' - a''t$  ont le même signe, mais il est négatif pour la plus petite des racines, positif pour l'autre. Le premier membre de l'équation (T) se réduit à un carré positif pour la plus petite de ces racines, à un carré négatif pour l'autre. D'ailleurs le coefficient de  $t^3$  dans T :

$$aa'a'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2 + 2bb'b''$$

est positif comme on le reconnaît en mettant  $f$  sous la forme de trois carrés et d'un nombre. Il s'ensuit que lorsque  $t$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ , (T) change trois fois de signe, et passe trois fois par zéro.

A l'une des valeurs de  $t$  répond un plan bien défini que je prends pour plan  $yz$ , et la droite conjuguée pour axe des  $x$ . Les équations des surfaces conservent leur forme, si ce n'est que  $B'B''b'b''$  sont nuls. L'équation en  $t$  se réduit à son premier terme, qui est nul pour trois valeurs de  $t$ ; si on n'a pas  $A - at = 0$ , la 1<sup>re</sup> équation (D) donne  $t = 0$ , donc on a deux plans répondant à la question, passant par le nouvel axe des  $u$ . Ces plans et le plan  $yz$  sont parallèles à un système diamétral dans chacune des surfaces, mais il peut n'en pas exister si aucune des surfaces n'est un ellipsoïde, car cette existence entraîne la réalité des racines de (T), qui n'est pas toujours vraie.

On peut encore simplifier un peu davantage en supposant trois axes rectangulaires, des  $x'y'z'$ , et posant

$$x = kx' + \alpha, \quad y = k_1y' + \beta, \quad z = k_2z' + \gamma,$$

et choisissant  $k'k''\alpha\beta\gamma$  de manière que  $F = 0$  soit de la forme

$x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2$ . La figure primitive sera liée par des relations simples avec la nouvelle, où l'on considère une sphère et un ellipsoïde, au lieu de 2 ellipsoïdes. Supprimant les accents, j'ai les deux surfaces :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= R^2, \\ \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} + \frac{(z-\gamma)^2}{c^2} &= 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Je vais écrire immédiatement l'équation différentielle de la développable circonscrite à la sphère, en disant que son plan tangent est à la distance R de l'origine :

$$z = px + qy + R\sqrt{1 + p^2 + q^2}. \quad (2)$$

Pour montrer combien il est facile de tirer des propriétés de la seconde figure celles de la 1<sup>re</sup>, j'écris ainsi l'équation (2) :

$$\frac{px + qy - z}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{-R}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Cette équation indique que pour une valeur donnée de  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , c'est-à-dire pour les points situés sur une sphère concentrique à la sphère (1), la sphère coupe la développable suivant un angle constant ; donc la ligne d'intersection est une ligne de courbure de la développable, par un théorème de M. Joachimstahl. D'où l'on conclut ce théorème sur l'ellipsoïde :

Étant donnée une développable quelconque circonscrite à un ellipsoïde, si on la coupe par un ellipsoïde homothétique au proposé, et si par les points d'intersection on mène des lignes dont la direction est conjuguée au plan qui touche soit l'ellipsoïde homothétique, soit la développable au même point, on aura deux séries de lignes qui formeront les génératrices de 2 développables.

Voyons comme on intègre l'équation aux dérivées partielles

$$z = px + qy + \varphi(p, q) \quad (3)$$

qui est analogue à l'équation de Clairaut, et dont l'équation (2) est un cas particulier. Différentions par rapport à  $x$  et à  $y$  ; il vient :

$$\begin{aligned} 0 &= rx + sy + r \frac{d\phi}{dp} + s \frac{d\phi}{dq} \\ 0 &= sx + ty + s \frac{d\phi}{dp} + t \frac{d\phi}{dq}. \end{aligned}$$

On en déduit les deux suivantes :

$$(rt - s^2) \left( x + \frac{d\phi}{dp} \right) = (rt - s^2) \left( y + \frac{d\phi}{dq} \right) = 0.$$

Si l'on ne suppose pas que le premier facteur soit nul, on a deux équations qui donnent  $p$  et  $q$  en  $x$  et  $y$ ; reportant dans (3), on a une intégrale singulière, enveloppe de la surface que représente l'intégrale générale. Dans le cas de l'équation (2), c'est une sphère. L'intégrale générale est dans tous les cas une surface développable où l'on a :

$$\psi(p, q) = 0.$$

Revenons à la sphère. Nous pouvons déterminer  $\psi$  si nous avons la courbe de contact; en effet  $p, q$  auront sur un point quelconque de la développable les mêmes valeurs qu'en un point convenable  $(X, Y, Z)$  de la courbe de contact. Or on sait qu'en ce point on a :

$$X = -pZ \quad Y = -qZ \quad R = Z \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Et si dans l'équation de la courbe de contact différente de celle de la sphère on substitue à  $XYZ$  leur valeur en  $p$  et  $q$ , on aura la relation  $\psi = 0$ . Pour que chaque plan tangent

$$Xx + Yy + Zz = R^2$$

touche l'ellipsoïde (1), il faut qu'on ait :

$$a^2 X^2 + b^2 Y^2 + c^2 Z^2 = (R^2 - \alpha X - \beta Y - \gamma Z)^2;$$

ce qui donne :

$$a^2 p^2 + b^2 q^2 + c^2 = (R \sqrt{1 + p^2 + q^2} + p\alpha + q\beta - \gamma)^2. \quad (4)$$

L'équation (2), où  $p$  et  $q$  sont des constantes assujetties à l'équation (4), représente un plan, et si l'on élimine  $p$  et  $q$  entre cette équation, l'équa-

tion (4), et celle qu'on obtient en différentiant (2) par rapport à  $p$  et  $q$ , savoir :

$$0 = x + y \frac{dq}{dp} + \frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \left( p + q \frac{dq}{dp} \right), \quad (5)$$

on aura l'intégrale générale donnée par  $rt - s^2 = 0$ .

Nous sommes amenés au même calcul que Laplace : je vais seulement en indiquer la solution, mais la solution générale. Si je tire  $q$  de l'équation (4) et que je la porte dans (2) et (5), (5) sera la dérivée de (2) prise par rapport à  $p$ . Je puis donc éliminer d'abord  $q$  entre (2) et (4), et alors  $p$  entre la résultante et sa dérivée. Je tire  $\sqrt{1+p^2+q^2}$  de (2) pour le mettre dans (4), et je rends l'équation (2) rationnelle, ce qui me donne :

$$\begin{aligned} (z - px - qy)^2 &= R^2 (1 + p^2 + q^2) \\ a^2 p^2 + b^2 q^2 + c^2 &= (p(x - \alpha) + q(y - \beta) - (z - \gamma))^2. \end{aligned}$$

L'élimination de  $q$  entre ces deux équations donnera un résultat du 4<sup>e</sup> degré, de la forme :

$$Ap^4 + Bp^3 + Cp^2 + Dp + E = 0, \quad (6)$$

et il faut éliminer  $p$  entre cette équation et

$$4Ap^3 + 3Bp^2 + 2Cp + D = 0.$$

Le procédé le plus expéditif me paraît celui de M. Sylvester. Je multiplie la première par  $p, p^2, p^3$ , la seconde par  $p, p^2, p^3, p^4$ , et j'ai 7 équations :

$$\begin{aligned} Ap^7 + Bp^6 + Cp^5 + Dp^4 + Ep^3 &= 0 \\ Ap^6 + \dots + Ep^2 &= 0 \\ Ap^5 + \dots + Ep &= 0 \\ 4Ap^7 + 3Bp^6 + 2Cp^5 + Dp^4 &= 0 \\ 4Ap^6 + \dots + Dp^3 &= 0 \\ 4Ap^5 + \dots + Dp^2 &= 0 \\ 4Ap^4 + \dots + Dp &= 0 \end{aligned}$$

Si l'on regarde les diverses puissances de  $p$  comme des inconnues distinctes, pour qu'elles ne soient pas nulles, il faut que le déterminant du système précédent soit nul :

$$\begin{vmatrix} 4A & 3B & 2C & D & 0 & 0 & 0 \\ A & B & C & D & E & 0 & 0 \\ 0 & 4A & 3B & 2C & D & 0 & 0 \\ 0 & A & B & C & D & E & 0 \\ 0 & 0 & 4A & 3B & 2C & D & 0 \\ 0 & 0 & A & B & C & D & E \\ 0 & 0 & 0 & 4A & 3B & 2C & D \end{vmatrix} = 0$$

Je multiplie les lignes d'ordre pair par 4, et je retranche de chacune la ligne précédente. Je trouve le produit de 4A par un déterminant du 6<sup>e</sup> ordre qui, étant développé, donne la condition pour que l'équation (6) ait deux racines égales :

$$\left. \begin{aligned} 256A^3E^3 - 192A^2BDE^2 - 128A^2C^2E^2 + 144A^2CD^2E - 27A^2D^4 \\ + 144AB^2CE^2 - 6AB^2D^2E - 80ABC^2DE + 18ABCD^3 + 16AC^2E \\ - 4AC^3D^2 - 27B^4E^2 + 18B^3CDE - 4B^3D^3 - 4B^2C^3E + B^2C^2D^2 \end{aligned} \right\} = 0. \quad (7)$$

Si l'on suppose  $E=0$ ,  $D^2$  est en facteur commun, et en effet, s'il est nul, l'équation (6) et sa dérivée ont la racine zéro ; mais s'il n'est pas nul, et qu'on divise par lui, on a la condition pour que l'équation du 3<sup>e</sup> degré ait 2 racines égales, savoir :

$$27A^2D^2 - 18ABCD + 4AC^3 + 4B^3D - B^2C^2 = 0.$$

Si l'on fait maintenant  $D=0$ , et si l'on divise par  $C^2$ , on trouve la relation très-connue :

$$4AC - B^2 = 0.$$

Si l'on substitue dans l'égalité (7) aux coefficients leur valeur en  $xyz$ , on aura l'équation de l'ombre, intégrale de l'équation (2). On sait qu'elle est du 8<sup>e</sup> degré, comme l'a démontré M. Chasles dans son *Aperçu historique*; mais je la rendrai explicite dans un cas particulier.

## DE L'OMBRE DE JUPITER.

---

Je vais appliquer la théorie des polaires réciproques à l'étude des propriétés de la surface de l'ombre projetée par Jupiter quand le centre du Soleil est dans l'équateur. Le théorème fondamental consiste en ce qu'il existe une surface

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0. \quad (8)$$

par rapport à laquelle les plans polaires des points de la surface de Jupiter enveloppent le Soleil et réciproquement.

Le plan polaire, par rapport à la surface (8) d'un point  $(x', y', z')$ , est :

$$(Ax' + C)x + (A'y' + C')y + (A''z' + C'')z + Cx' + C'y' + C''z' + D = 0.$$

Comme cette équation est symétrique, par rapport à  $xyz$  et  $x'y'z'$ , le plan polaire du point  $xyz$  passe par  $x'y'z'$ . Si le lieu du point  $(x'y'z')$  est une certaine surface, en prenant deux autres points infiniment voisins, on a 3 plans qui se coupent en un point de la surface enveloppée par le plan polaire de  $(x'y'z')$ , et réciproquement le plan polaire de  $(xyz)$  touche la 4<sup>re</sup> surface.

Soient donc l'équation de la surface du Soleil :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

celle de la surface de Jupiter, dont je mets le centre sur l'axe des  $x$  :

$$\frac{(x - a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Un point de la surface de Jupiter aura des coordonnées de la forme :

$$x' = \alpha + a \cos \theta \cos \varphi, \quad y' = a \cos \theta \sin \varphi, \quad z' = c \sin \theta.$$

Écrivons que son plan polaire est à une distance R de l'origine :

$$\begin{aligned} R^2[(A\alpha + Aa \cos\theta \cos\varphi + C)^2 + (A'a \cos\theta \sin\varphi + C')^2 + (A''c \sin\theta + C'')^2] \\ = [C\alpha + Ca \cos\theta \cos\varphi + C'a \cos\theta \sin\varphi + C''c \sin\theta + D]^2. \end{aligned}$$

Je développe suivant les sinus et cosinus de  $\varphi$  et de  $2\varphi$ , et j'identifie les coefficients d'un même sinus ou cosinus dans les deux membres, ce qui me fournit 5 équations :

$$\begin{aligned} C^2 - C'^2 &= R^2(A^2 - A'^2) \\ CC' &= 0 \\ C(C\alpha + C''c \sin\theta + D) &= R^2A(C + A\alpha) \\ C'(C\alpha + C''c \sin\theta + D) &= R^2A'C' \\ a^2 \cos^2\theta \frac{C^2 + C'^2 - R^2(A^2 + A'^2)}{2} + (C\alpha + C''c \sin\theta + D)^2 \\ &= R^2((A\alpha + C)^2 + C'^2 + (A''c \sin\theta + C'')^2). \end{aligned}$$

Pour satisfaire à la 2<sup>e</sup> équation, on ne peut prendre  $C=0$ , qui donnerait  $A=A''=C=C''=0$ . Il faut prendre  $C'=0$ , et en exigeant que les équations aient lieu quel que soit  $\theta$ , on trouve que  $C''=0$  et que les autres inconnues sont finies, mais deux imaginaires. Toutes réductions faites, la surface, par rapport à laquelle la surface de Jupiter et du Soleil sont polaires réciproques, a pour équation :

$$(R+a)x^2 + \sqrt{-1} \left[ y^2 + \frac{a}{c} z^2 \right] \sqrt{x^2 - (R+a)^2} - 2aRx + R(\alpha^2 - Ra - a^2) = 0. \quad (8)$$

Cette surface n'a aucun point réel, car  $a$  et  $c$  étant positifs, il faudrait avoir :

$$y = 0, \quad z = 0, \quad (R+a)x^2 - 2aRx + R(\alpha^2 - Ra - a^2) = 0,$$

et la dernière n'a pas de racines réelles. La surface serait au contraire réelle si  $R+a$  était  $> a$ , ou si les surfaces proposées se coupaient.

La surface de l'ombre est la polaire réciproque de l'intersection du Soleil et de Jupiter. Donc on peut inscrire dans cette surface une infinité de surfaces du 2<sup>e</sup> ordre, de même que par l'intersection des deux astres on peut mener une infinité de surfaces de 2<sup>e</sup> ordre renfermées dans l'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 + \lambda \left( \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) = 0, \quad (9)$$

où  $\lambda$  est une constante arbitraire, qu'on peut déterminer de manière que la surface soit un cône. Mais pour bien discuter l'équation en  $\lambda$ , il faut supposer que Jupiter soit remplacé par un ellipsoïde dont les axes aient pour longueurs  $2a' 2b' 2c'$ , et le centre pour coordonnées  $\alpha' \beta' \gamma'$ . La surface qui doit devenir un cône est :

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 + \lambda \left[ \frac{(x - \alpha')^2}{a'^2} + \frac{(y - \beta')^2}{b'^2} + \frac{(z - \gamma')^2}{c'^2} - 1 \right] = 0.$$

Écrivons que les coordonnées du centre sont sur la surface ; ces coordonnées sont données par les équations :

$$x_1 + \lambda \frac{x_1 - \alpha'}{a'^2} = 0, \quad y_1 + \lambda \frac{y_1 - \beta'}{b'^2} = 0, \quad z_1 + \lambda \frac{z_1 - \gamma'}{c'^2} = 0.$$

Ajoutons après avoir multiplié par  $x, y, z$ , et tenons compte de ce que  $x, y, z$ , doivent vérifier l'équation de la surface, on arrive à l'équation en  $\lambda$  :

$$\frac{\alpha'^2 \lambda^2}{a'^4 + a'^2 \lambda} + \frac{\beta'^2 \lambda^2}{b'^4 + b'^2 \lambda} + \frac{\gamma'^2 \lambda^2}{c'^4 + c'^2 \lambda} + R^2 + \lambda \left( 1 - \frac{\alpha'^2}{a'^2} - \frac{\beta'^2}{b'^2} - \frac{\gamma'^2}{c'^2} \right) = 0.$$

Cette équation peut avoir 4 racines réelles, mais il y en a toujours 2 comprises entre  $-a^2$  et  $-b^2$ , et entre  $-b^2$  et  $-c^2$  ; il y a donc en général quatre, et toujours deux cônes du 2<sup>e</sup> degré qui passent par l'intersection d'une sphère et d'un ellipsoïde. Si  $\beta'$  et  $\gamma'$  tendent vers zéro, on voit que deux des racines tendent, l'une vers  $-b^2$ , l'autre vers  $-c^2$ . Donc l'équation (9) doit représenter un cône passant par l'intersection de Jupiter et du Soleil, lorsque  $\lambda$  aura la valeur  $-a^2$  ou  $-c^2$ , ou l'une des deux qui sont données par l'équation du 2<sup>e</sup> degré :

$$\frac{\alpha^2 \lambda^2}{a^4 + a^2 \lambda} + R^2 + \lambda \left( 1 - \frac{\alpha^2}{a^2} \right) = 0, \tag{10}$$

dont les racines sont réelles, à cause de la grandeur de  $\alpha$ . Mais nous examinerons d'abord les cônes donnés par  $\lambda = -a^2$ ,  $\lambda = -c^2$ . Ce sont deux cylindres projetants de la courbe d'intersection ; leurs équations donnent des surfaces réelles :

$$\frac{a^2 - c^2}{c^2} z^2 - 2ax + x^2 - a^2 + R^2 = 0, \tag{11}$$

$$\frac{a^2 - c^2}{c^2} (x^2 + y^2) + 2ax - x^2 + a^2 - \frac{a^2}{c^2} R^2 = 0. \tag{12}$$

Ce sont deux cylindres, l'un parabolique, l'autre circulaire, qui ne se rencontrent pas.

Les deux autres valeurs de  $\lambda$  données par l'équation (10) conviennent à deux cônes dont les sommets sont réels, et situés sur l'axe des  $x$  à des distances qu'on peut tirer des valeurs de  $\lambda$  puisque

$$x_1 = \frac{a\lambda}{a^2 + \lambda}.$$

Mais il est préférable de tirer la valeur de  $\lambda$ , qui est du 4<sup>e</sup> degré en  $x_1$ , et si on la substitue dans l'équation (10), on a une équation qui donne les deux valeurs de  $x_1$  :

$$ax_1^2 - (a^2 + R^2 - a^2)x_1 + aR^2 = 0. \quad (13)$$

Les racines sont réelles ainsi que l'équation du cône; mais le cône lui-même est imaginaire; car sa trace sur le plan des  $yz$  :

$$y^2 + z^2 - R^2 + \lambda \left( \frac{a^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) = 0$$

est une ellipse imaginaire, vu que le centre est à l'origine, et que, les deux racines de l'équation (10) étant  $> \frac{a^2 R^2}{a^2}$ , la courbe coupe les deux axes en des points imaginaires.

Nous allons nous servir utilement de ce que nous savons sur les sommets des cônes qui passent par l'intersection de Jupiter et du Soleil. Les plans polaires de ces points renferment les polaires des génératrices des cônes, et comme à toute surface (9) correspond une surface du 2<sup>e</sup> degré inscrite dans la surface de l'ombre, aux cônes répondront des surfaces infiniment aplaties ou des coniques inscrites dans la développable, et situées dans les plans polaires des sommets des cônes. L'équation du plan polaire de  $(x' y' z')$  peut s'écrire :

$$R + a)xx' + \sqrt{-1} \sqrt{a^2 - (R + a)^2} \left( yy' + \frac{a}{c} zz' \right) - xR(x + x') + R(a^2 - Ra - a^2) = 0.$$

On voit d'abord que les 2 cônes qui deviennent des cylindres ont des sommets à l'infini suivant l'axe des  $y$  ou des  $z$ ; leur plan polaire est donc le plan des  $xz$  ou des  $xy$ , et les coniques qui correspondent aux cônes,

c'est-à-dire les lignes de striction de M. Poncelet, sont formées par deux génératrices de la surface de l'ombre. On voit que le plan polaire d'un des sommets passe par les 3 autres. C'est aussi évident pour les sommets qui sont sur l'axe des  $x$ , comme leur  $y$  et leur  $z$  sont nuls, leur plan polaire est réel, perpendiculaire à l'axe des  $x$ , et le plan polaire de l'un passe par l'autre; car si l'on met dans l'équation

$$(R + a)xx' - \alpha R(x + x') + R(\alpha^2 - Ra - a^2),$$

le produit des racines de l'équation (43) au lieu de  $xx'$ , leur somme au lieu de  $x + x'$ , on a une identité :

$$(R + a)R^2 - \alpha R \frac{\alpha^2 + R^2 - a^2}{\alpha} + R(\alpha^2 - Ra - a^2) = 0.$$

Par la tangente en un point d'une de ces véritables lignes de striction on peut mener deux plans qui touchent la seconde ligne de striction; les droites qui joignent les points de contact sont des génératrices de la développable, et comme il en passe 2 par chaque point des lignes de striction, ces lignes sont les courbes de pénétration des surfaces de l'ombre de la pénombre. C'est pour cela que M. Chasles les appelle lignes nodales. Il est évident que, puisque ce sont des coniques, elles doivent être des ellipses dont les sommets sont situés dans le plan des  $xy$  et des  $xz$ . On connaît par l'équation (43) l'abscisse  $x_1$  du centre de chacune de ces ellipses; et, si l'on mène des tangentes communes au Soleil et à Jupiter dans le plan des  $xy$  et des  $xz$ , leurs demi-axes peuvent se mettre sous la forme :

$$l = mx_1 + R \sqrt{1 + m^2},$$

où  $m^2$  est l'une quelconque des deux racines de l'équation :

$$(\alpha^4 + R^4 + a^4 - 2\alpha^2 R^2 - 2\alpha^2 a^2 - 2R^2 a^2)m^4 + 2[(R^2 - \alpha^2)^2 - (R^2 + a^2)\alpha^2]m^2 + (R^2 - \alpha^2)^2 = 0.$$

si l'on considère le grand axe; pour le petit on prendra l'équation :

$$(\alpha^4 + R^4 + a^4 - 2\alpha^2 R^2 - 2\alpha^2 a^2 - 2R^2 a^2)m^4 + 2(R^4 - R^2 a^2 - R^2 c^2 + a^2 c^2 - \alpha^2 R^2 - \alpha^2 c^2)m^2 + (R^2 - c^2) = 0.$$

Et la surface de l'ombre et de la pénombre sera engendrée par une

droite qui glisse sur les deux lignes nodales, de manière à les rencontrer en deux points où les tangentes soient parallèles.

Ici nous allons faire subir aux deux ellipses qui définissent la surface de l'ombre deux changements très-légers qui n'altéreront pas la nature de la surface, et modifieront ses éléments d'une manière tout à fait insensible. Je puis développer comme il suit les racines de (13) :

$$x_1' = \frac{1}{2a} \left[ \alpha^2 + R^2 - a^2 - \alpha^2 \left( 1 - 2 \frac{R^2 + a^2}{\alpha^2} + \frac{(R^2 - a^2)^2}{\alpha^4} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \frac{R^2}{\alpha} + \frac{a^2 R^2}{\alpha^3} + \dots$$

$$x_1'' = \frac{1}{2a} \left[ \alpha^2 + R^2 - a^2 + \alpha^2 \left( 1 - 2 \frac{R^2 + a^2}{\alpha^2} + \frac{(R^2 - a^2)^2}{\alpha^4} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \alpha - \frac{a^2}{\alpha} - \frac{a^2 R^2}{\alpha^3} \dots$$

Les plans des lignes de striction sont donc très-près du centre des deux astres, et j'admettrai que les sections planes faites par ces centres soient des ellipses, et même que ces ellipses soient confondues avec les sections perpendiculaires à l'axe des  $x$  faites dans les deux astres. L'erreur qui en résulte sur les dimensions de l'ombre sera au plus de l'ordre de  $\frac{R^3}{\alpha^2}$ , ou de 0,000 01, en prenant toujours  $a$  pour unité de longueur. Nous avons donc un cercle et une ellipse pour courbes directrices :

$$y'^2 + z'^2 = R^2, \quad x' = 0$$

$$\frac{y''^2}{a^2} + \frac{z''^2}{c^2} = 1, \quad x'' = \alpha.$$

Les équations de notre génératrice seront :

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} (x - x'), \quad z - z' = \frac{z'' - z'}{x'' - x'} (x - x'),$$

et le parallélisme des tangentes en  $(x'y'z')$ ,  $(x'', y'', z'')$  donne :  $a^2 z'' y' = c^2 y'' z'$ .

Nous devons éliminer les 6 coordonnées entre les équations précédentes. Si l'on élimine d'abord  $x'x''y''z''$ , on a 3 résultantes :

$$\frac{y'^2 + z'^2}{a^2} + \frac{[ax + (x - \alpha)y']^2}{c^2} = x^2, \tag{14}$$

$$z' \frac{ay' + (x - \alpha)y'}{a^2} + y' \frac{az + (x - \alpha)z'}{c^2} = 0.$$

La 3<sup>e</sup> est l'équation dérivée de la 2<sup>e</sup> en ayant égard à la 1<sup>re</sup>; donc je devrai éliminer  $z'$  entre les 2 premières, et différencier le résultat par rapport à  $y'$ . La résultante des deux premières est une équation du 4<sup>e</sup> degré.

$$\left[ \frac{(ay + (x - \alpha)y')^2}{a^2} + \frac{\alpha^2 z^2}{c^2} - x^2 - (y^2 - R^2) \frac{(x - \alpha)^2}{c^2} \right]^2 + 4(y^2 - R^2) \frac{\alpha^2 z^2}{c^4} (x - \alpha) = 0.$$

Il faut exprimer que cette équation en  $y'$  a une racine double. Je simplifierai les calculs en posant :

$$y' \frac{x - \alpha}{c} - \frac{cay}{a^2 - c^2} = u, \quad R \frac{x - \alpha}{c} = \rho, \quad a^2 - c^2 = \varepsilon^2.$$

On a une équation en  $u$  privée de second terme :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\varepsilon^4}{a^4} u^4 - 2 \left[ \frac{\varepsilon^2}{a^2} \left( \frac{\alpha^2 y'^2}{\varepsilon^2} + \rho^2 + \frac{\alpha^2 z^2}{c^2} - x^2 \right) - 2 \frac{\alpha^2 z^2}{c^2} \right] u^2 + \\ & 8 \frac{\alpha^2 z^2 y}{c^2 \varepsilon^2} u + \left( \frac{\alpha^2 y'^2}{\varepsilon^2} + \frac{\alpha^2 z^2}{c^2} + \rho^2 - x^2 \right)^2 + 4 \left( \frac{c^2 \alpha^2 y'^2}{\varepsilon^4} - \rho^2 \right) \frac{\alpha^2 z^2}{c^2} \end{aligned} \right\} = 0. \quad (15)$$

Reportons-nous à la condition (7) pour que l'équation du 4<sup>e</sup> degré ait deux racines égales; seulement nous y ferons  $B = 0$ , et nous diviserons par le facteur  $A$ , qui répond à la racine double infinie; la condition peut s'écrire :

$$16E(4AE - C^2)^2 + D^2(144ACE - 27AD^2 - 4C^3) = 0.$$

Il semble que le résultat doive être une équation du 12<sup>e</sup> degré; mais on trouve d'abord :

$$4AE - C^2 = \frac{16\varepsilon^4}{a^4} \left( \frac{c^2 \alpha^2 y'^2}{\varepsilon^4} - \rho^2 \right) \frac{\alpha^2 z^2}{c^2} + 16 \frac{\varepsilon^2}{a^4} \left( \frac{\alpha^2 y'^2}{\varepsilon^2} + \frac{\alpha^2 z^2}{c^2} + \rho^2 - x^2 \right) \frac{\alpha^2 z^2}{c^2} - 16 \frac{\alpha^4 z^4}{c^4}.$$

On peut voir que  $\frac{\alpha^4 z^4}{c^4}$  est facteur commun, et en le supprimant, l'équation

de la développable circonscrite au Soleil et à Jupiter est du 8<sup>e</sup> degré :

$$\begin{aligned} & 4 \left[ \left( \frac{\alpha^2 y'^2}{\varepsilon^2} + \frac{\alpha^2 z^2}{c^2} + \rho^2 - x^2 \right)^2 + 4 \left( \frac{c^2 \alpha^2 y'^2}{\varepsilon^4} - \rho^2 \right) \frac{\alpha^2 z^2}{c^2} \right] \left[ \frac{\varepsilon^4}{a^4} \left( \frac{c^2 \alpha^2 y'^2}{\varepsilon^4} - \rho^2 \right) + \frac{\varepsilon^2}{a^2} \left( \frac{\alpha^2 y'^2}{\varepsilon^2} + \frac{\alpha^2 z^2}{c^2} + \rho^2 - x^2 \right) - \frac{\alpha^4 z^4}{c^4} \right]^2 \\ & = \frac{\alpha^2 c^2 y^2}{\varepsilon^4} \left\{ 9 \frac{\varepsilon^4}{a^4} \left[ \frac{2\varepsilon^2}{a^2} \left( \frac{\alpha^2 y'^2}{\varepsilon^2} + \frac{\alpha^2 y'^2}{c^2} + \rho^2 - x^2 \right) - 4 \frac{\alpha^2 z^2}{c^2} \right] \left[ \left( \frac{\alpha^2 y'^2}{\varepsilon^2} + \frac{\alpha^2 z^2}{c^2} + \rho^2 - x^2 \right)^2 + 4 \left( \frac{c^2 \alpha^2 y'^2}{\varepsilon^4} - \rho^2 \right) \frac{\alpha^2 z^2}{c^2} \right] + \right. \\ & \left. 108 \frac{\alpha^6 z^4 y^2}{a^4 c^2} - 2 \left[ \frac{\varepsilon^2}{a^2} \left( \frac{\alpha^2 y'^2}{\varepsilon^2} + \frac{\alpha^2 z^2}{c^2} + \rho^2 - x^2 \right) - 2 \frac{\alpha^2 z^2}{c^2} \right]^2 \right\}. \end{aligned}$$

Nous n'avons pas besoin d'expliciter cette équation, ni de voir ce qu'elle devient quand on néglige  $\varepsilon^4$ , comme fait Laplace. On peut cependant faire une vérification qui réussit : si l'on suppose  $\varepsilon$  infiniment petit, les termes les plus grands se détruisent, et ceux du 2<sup>e</sup> ordre donnent l'équation de 2 cônes droits :

$$\left(y^2 + z^2 - \frac{R^2}{a^2}(x - \alpha)^2 + \frac{a^2 x^2}{a^2}\right)^2 - 4R^2 a^2 x^2 \frac{(x - \alpha)^2}{a^4} = 0.$$

L'aplatissement de Jupiter étant  $\frac{1}{47}$ , l'erreur commise par Laplace est de l'ordre de  $\frac{1}{300}$ . Les erreurs que nous nous permettrons pourront altérer la largeur de l'ombre et la durée de l'éclipse de quantités comparables à 0,0001 de leur valeur. On aurait cette approximation si l'on connaissait exactement les dimensions de Jupiter. L'hypothèse que le Soleil est toujours dans l'équateur de Jupiter altère la largeur de l'ombre de quantités de l'ordre du carré de  $193^0$ , c'est-à-dire à peu près de l'ordre de notre  $\varepsilon^4$ , et Laplace gardait bien une approximation constante.

Quelle est la section de l'ombre par un plan perpendiculaire à l'axe, et dont l'abscisse est égale à  $\alpha + r$ ,  $r$  étant au plus  $\frac{1}{400}\alpha$ ? Nous ne prendrons pas l'équation générale de l'ombre, mais les équations (14), dans lesquelles nous négligerons  $r^2$  auprès de  $\alpha^2$  : elles deviennent :

$$y'^2 + z'^2 = R^2, \quad \frac{\alpha^2 y'^2 + 2xy' y'}{a^2} + \frac{\alpha^2 z'^2 + 2\alpha r z z'}{c^2} = x^2,$$

$$z' \frac{\alpha y + r y'}{a^2} + y' \frac{\alpha z + r z'}{c^2} = 0.$$

Si l'on tire  $z'$  de la seconde, et si l'on néglige toujours  $r^2$  près de  $\alpha^2$ ,  $R$  disparaît des résultats, et en éliminant  $y'$ , on trouve :

$$\left(\alpha^2 x^2 - \frac{c^2}{a^2} \alpha^2 y^2 - \alpha^2 z^2\right) \left[ \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right) \left(c^2 x^2 - \frac{c^2}{a^2} \alpha^2 y^2 - \alpha^2 z^2\right) + \frac{2\alpha^2 z^2}{c^2} + \frac{2x^2 \varepsilon^2 y^2}{a^4} \right] = 0.$$

D'où, avec l'approximation indiquée, on conclut que la section plane de la développable est formée de 2 ellipses, l'une pour l'ombre, l'autre pour la pénombre, et que même la 1<sup>re</sup> ellipse est homothétique avec l'ellipse génératrice de Jupiter projetée sur le plan de la section. On aura

encore un peu plus d'exactitude en calculant directement les axes de l'ellipse; et il serait exact de dire que la section de l'ombre, par un plan presque perpendiculaire à l'axe, s'approche également d'une ellipse dont nous pouvons calculer les axes.

Cherchons quelle est l'erreur résultant de l'hypothèse que l'axe de Jupiter soit perpendiculaire à son orbite, lors des solstices et des équinoxes. A cette dernière époque, pour laquelle nos calculs précédents sont applicables, le Soleil voit l'ellipse de Jupiter et la section de l'ombre avec leurs grands axes inclinés sur l'orbite de  $3^{\circ} 5' 30'' = \mu$ . Soient pour un instant  $\rho$  le rayon vecteur de l'ellipse compté à partir de son centre,  $\theta$  l'angle qu'il fait avec l'orbite de Jupiter; s'il s'agit de l'ellipse de cette planète on aura :

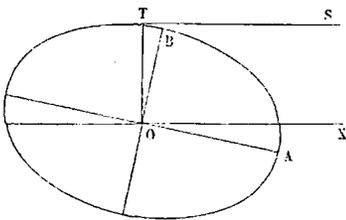
$$\rho^2 = \frac{a^2 c^2}{a^2 \sin^2(\theta - \mu) + c^2 \cos^2(\theta - \mu)}.$$

Si l'on suppose  $\mu = 0$ , on diminuera  $\rho^2$  d'une quantité qui peut s'écrire :

$$\frac{a^2 c^2 \varepsilon^2 (\sin^2 \theta - \sin^2(0 - \mu))}{(c^2 + \varepsilon^2 \sin^2(0 - \mu))(c^2 + \varepsilon \sin^2 \theta)} > \frac{c^2 \varepsilon^2 \sin \mu \sin(2\theta - \mu)}{a^2}.$$

La différence peut atteindre environ  $\mu \varepsilon^2 = 0,0538 \times 0,414 = 0,0061$ , erreur que nous ne pouvons admettre.

A l'époque des solstices, au contraire, le centre du Soleil étant sur OX,



négligeons l'angle de la génératrice supérieure ST de la développable avec OX; c'est cette génératrice qui sera la plus dérangée quand on remettra Jupiter dans sa vraie position, le grand axe étant dirigé suivant OA au lieu de OX. Cette génératrice est relevée d'une quantité égale à la

différence entre  $c$  et la distance OT de l'origine à ST. L'équation bien connue d'une tangente à l'ellipse donne pour cette différence :

$$-c + \cos \mu \sqrt{c^2 + a^2 \tan^2 \mu} = \sqrt{c^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \mu} - c = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{c} \sin^2 \mu = 0,00015c.$$

Nous pouvons, cette fois, tolérer cette erreur :

La configuration du monde de Jupiter et la discussion précédente nous conduisent à prendre des coordonnées jovicentriques (il serait plus

régulier de dire diocentriques, comme on dit géocentriques, héliocentriques, sélénocentriques). L'équateur de Jupiter sera notre plan des  $xy$ , et le plan des  $xz$  passera constamment par le centre du Soleil. Soit  $H$  la latitude du Soleil; la section de l'ombre par un plan parallèle au plan des  $yz$ ,  $x = -r_1$ , sera une ellipse, comme nous l'avons dit; mais il faut remarquer que son petit axe sera plus long que celui de la section droite faite au même endroit, dans le rapport de  $1$  à  $\cos H$ . La section de l'ombre sera donc une ellipse dont le petit axe sera parallèle à celui de Jupiter, et les deux demi-axes auront pour longueur :

$$a - r_1 \frac{R - a}{\alpha} \qquad c + \frac{1}{2} cH^2 - r_1 \frac{R - c}{\alpha}.$$

La section de la pénombre aura pour demi-axes :

$$a + r_1 \frac{R + a}{\alpha} \qquad c + \frac{1}{2} cH^2 + r_1 \frac{R + c}{\alpha},$$

et le centre de ces ellipses a pour coordonnées  $x_1 = -r$ ,  $y_1 = 0$ ,  $z_1 = -r_1 \operatorname{tg} H$ .

Comme  $r_1$  est multiplié par un facteur peu considérable dans l'expression des axes des ellipses, nous pourrions le remplacer par une valeur qui en diffère peu, telle que le rayon recteur  $r$  du satellite que l'on considère au moment de son opposition.

Ensuite on peut regarder la distance du Soleil  $\alpha$  comme constante pendant une éclipse, et aussi donner à sa latitude la valeur qu'elle a lors de l'opposition, car elle ne s'écarte pas de cette valeur de  $4''{,}5$  pendant les plus longues éclipses, et le déplacement d'un point du contour de l'ombre n'atteint pas  $r \sin 4''{,}5 < 0,00049$ , et nous pouvons le négliger.

Je ne dirai qu'un mot sur l'arête de rebroussement de la développable. Elle se compose de 2 parties, l'une entre Jupiter et le Soleil, l'autre derrière Jupiter. Nous allons déterminer la distance minimum de cette dernière partie à l'ellipse de Jupiter, distance à laquelle la section de l'ombre ne pourrait plus être regardée comme une ellipse. Soient deux génératrices infiniment voisines coupant sur l'ellipse un arc dont l'angle de contingence est  $U$ , et la courbure  $\frac{1}{\rho}$ ; elles se rencontrent à une distance  $l$  de l'ellipse, et on a sensiblement :

$$\frac{l}{\alpha + l} = \frac{\rho}{R} \quad l = \frac{\alpha\rho}{R - \rho} \quad \rho = \frac{(a^4 - \varepsilon^2 y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 c};$$

$\rho$  est minimum pour  $y = a$ , et on trouve pour ce cas  $l = 0,097 a = 1078$  : c'est plus de 41 fois la distance du 4<sup>e</sup> satellite.

## DE LA DURÉE DES ÉCLIPSES.

Nous supposerons connus par les tables astronomiques et les formules de la mécanique céleste les éléments qui définissent la situation des corps que nous considérerons ; mais il est bon de rapporter à notre système de coordonnées diocentriques les coordonnées ordinaires. Cherchons d'abord la latitude, ou plutôt la déclinaison du Soleil, et l'ascension droite du nœud de l'écliptique. Les ascensions droites seront comptées suivant l'équateur de Jupiter, et dans le sens direct, à partir du cercle de déclinaison du Soleil. Le mot *écliptique*, que j'ai employé, désigne l'orbite de Jupiter, et quand je parlerai de l'écliptique de la Terre, je le dirai expressément.

Les tables donnent par rapport à l'équinoxe vernal de la Terre,  $\Upsilon$  :

1° La longitude et la latitude héliocentriques  $L$  et  $\Lambda$  de  $\Upsilon$  ;

2° La longitude du nœud  $\Upsilon N$  et l'inclinaison  $N$  de l'orbe de Jupiter.

3° La longitude  $l$  du point automnal  $G$  de Jupiter.

Soient  $\Upsilon\Theta = \Theta$  la longitude du nœud ascendant, et  $G\Theta P = \varphi$  l'inclinaison d'un plan parallèle à l'équateur de Jupiter mené par le centre du Soleil. Abaissons l'arc de grand cercle  $GP$  perpendiculaire sur l'écliptique terrestre. Le triangle  $GNP$  donne

$$\text{tang } GN = \frac{\text{tang } (l - \Upsilon N)}{\cos N};$$

GN est bien défini, car il doit se trouver dans le même quadrant que  $l - \Upsilon N$ . Alors le triangle GN $\Theta$  me donne 5 équations :

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos N \cos G - \sin N \sin G \cos NG \\ \cos N &= \cos \varphi \cos G + \sin \varphi \sin G \cos \Theta G \\ \cos G &= \cos \varphi \cos N + \sin \varphi \sin N \cos (\theta - \Upsilon N). \quad (16) \\ \frac{\sin \Theta G}{\sin N} &= \frac{\sin (\theta - \Upsilon N)}{\sin G} = \frac{\sin NG}{\sin \varphi}. \end{aligned}$$

La première sert à calculer  $\varphi$ , les deux suivantes donnent le signe de  $\cos \Theta G$  et de  $\cos (\Theta - \Upsilon N)$ ; les deux dernières donnent le sinus des mêmes arcs, et leur expression logarithmique. On a  $\varphi$  sans ambiguïté car on sait que c'est que c'est un angle très-aigu; quand on l'a calculé, en rendant logarithmique la 1<sup>re</sup> formule (16), on a sans incertitude les arcs  $\theta$  et  $\Theta G = \Upsilon$ .

Soient  $A_1$  et  $H_1$  l'ascension droite et la déclinaison de Jupiter, estimées avec le plan  $\Theta G$ , et le nœud  $\Theta$  pour origine. Les formules bien connues de la transformation des coordonnées sphériques nous donneront :

$$\begin{aligned} \cos(L - \theta) \cos \Lambda &= \cos A_1 \cos H_1 \\ \sin A_1 \cos H_1 &= \sin(L - \theta) \cos \Lambda \cos \varphi + \sin \Lambda \sin \varphi \\ \sin H_1 &= -\sin(L - \theta) \cos \Lambda \sin \varphi + \sin \Lambda \cos \varphi. \end{aligned}$$

$H_1$ , qui est très-petit, se tirera de la dernière, et les deux autres feront connaître  $A_1$ ,

Si l'on prenait Jupiter pour centre de ces mêmes coordonnées, avec le nœud descendant de l'écliptique terrestre pour origine, on aurait

$$\odot = A_1 - 180^\circ, \quad H = -H_1;$$

Or d'après les coordonnées diocentriques que nous avons résolu d'adopter, il faut que l'ascension droite du Soleil soit nulle, il faut donc diminuer les ascensions droites de  $A_1 - 180^\circ$ , ajoutant ou retranchant  $360^\circ$  pour avoir des ascensions droites comprises entre 0 et  $360^\circ$ . Ainsi l'ascension droite du point G sera

$$\Upsilon - A_1 + 180^\circ = \psi.$$

On sait que si l'on imagine un plan passant par la ligne des équinoxes, compris entre l'équateur et l'écliptique, ce qui donne  $\psi$  pour ascension

droite de son nœud descendant, et faisant un angle  $i$  avec l'équateur ; un satellite se mouvra dans un autre plan qui fait avec le précédent un angle  $j$ , et dont le nœud ascendant sur le plan fixe fait avec le point vernal un angle  $w$ , on trouvera l'ascension droite du nœud ascendant  $\Omega$  du plan de l'orbe du satellite, et son inclinaison  $\omega$  par des formules semblables aux formules (15) :

$$\begin{aligned} \cos \omega &= \cos i \cos j - \sin i \sin j \cos w \\ \cos j &= \cos i \cos \varphi - \sin i \sin \varphi \cos (\Omega - \psi) \\ \frac{\sin (\Omega - \psi)}{\sin j} &= - \frac{\sin w}{\sin \varphi}. \end{aligned}$$

Si de plus on nous donne à l'époque de l'opposition, le grand axe et l'excentricité de l'orbe du satellite ainsi que son rayon vecteur, nous aurons tout ce qu'il faut pour calculer le temps de l'éclipse des satellites.

Le premier élément à calculer, c'est l' $y$  du point où le satellite entre dans l'ombre ou bien en sort. Mais il y a une cause d'erreur à discuter. J'ai dit qu'en prenant  $r$  au lieu de l'abscisse  $r_1$  du plan de la section de l'ombre, on n'en altère pas sensiblement les dimensions. Mais on peut altérer d'une manière notable la position du centre de l'ellipse, car on l'altère de  $(r - r_1) \operatorname{tg} H$ ;  $r - r_1$  est de l'ordre de  $\frac{a^2}{2r}$ , et pour le 1<sup>er</sup> satellite, l'erreur qui en résulterait serait de l'ordre de  $\frac{1}{240}$ , que nous ne pouvons négliger. Mais la corde décrite par les satellites ne diffère pas sensiblement de  $2\sqrt{a^2 - r^2} \operatorname{tg}^2 H$ , on prendra sans erreur sensible, à cause de la petitesse de  $\omega$

$$r_1 = r \left( 1 + \frac{1}{2} H^2 \right) - \frac{a^2}{2r}.$$

Cela posé, nous écrivons l'équation du plan d'un des satellites : sa trace faisant avec l'axe des  $x$  l'angle  $\Omega$ , son inclinaison sur le plan  $xy$  étant  $\omega$ , son équation est

$$x \sin \omega \sin \Omega - y \sin \omega \cos \Omega + z \cos \omega = 0.$$

Sa trace sur le plan  $x = r - r_1$  est

$$z = r_1 \sin \Omega \operatorname{tg} \omega + y \cos \Omega \operatorname{tg} \omega. \quad (17)$$

La trace sur le plan des  $yz$  donne la déclinaison  $h$  du satellite au moment de l'opposition :

$$\operatorname{tg} h = -\frac{z}{x} = \sin \Omega \operatorname{tg} \omega.$$

Il s'agit de trouver l'intersection dans le plan  $x = -r$ , de la droite (17) avec l'ellipse

$$\frac{y^2}{\left(a - r \frac{R-a}{\alpha}\right)^2} + \frac{(z + r_1 \operatorname{tg} H)^2}{\left(c + \frac{c}{2} H^2 - r \frac{R-c}{\alpha}\right)^2} = 1.$$

L'élimination de  $z$  conduit à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & \left[ \left( c + \frac{c}{2} H^2 - r \frac{R-c}{\alpha} \right)^2 + \cos^2 \Omega \operatorname{tg}^2 \omega \left( a - 2 \frac{R-a}{\alpha} \right)^2 \right] y^2 + \\ & 2r_1 \cos \Omega \operatorname{tg} \omega \left( \operatorname{tg} H + \sin \Omega \operatorname{tg} \omega \right) \left( a - r \frac{R-a}{\alpha} \right) y + r_1^2 \left( a - r \frac{R-a}{\alpha} \right)^2 \left( \operatorname{tg} H + \sin \Omega \operatorname{tg} \omega \right)^2 - \\ & \left( a - r \frac{R-a}{\alpha} \right)^2 \left( c + \frac{c}{2} H^2 - r \frac{R-c}{\alpha} \right)^2 = 0. \end{aligned}$$

$\omega$  ne peut dépasser la valeur  $40'$ , et sa tangente est au plus de l'ordre de  $0,04$  ; nous pourrions en profiter pour simplifier l'équation précédente, en effaçant le 2<sup>e</sup> terme du coefficient de  $y^2$ , ainsi que le carré du coefficient du terme en  $y$ , qui se présenterait sous le radical de l'expression de  $y$ , et nous pourrions mettre les racines sous la forme

$$\begin{aligned} y = & -\frac{a^2 r}{c^2} \omega \cos \Omega (H + \omega \sin \Omega) \\ \pm & \frac{a - r \frac{R-a}{\alpha}}{c + \frac{c}{2} H^2 - r \frac{R-c}{\alpha}} \sqrt{\left( c + \frac{c}{2} H^2 - r \frac{R-c}{\alpha} \right)^2 - (\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} \omega \sin \Omega)^2 r_1^2} \quad (18) \end{aligned}$$

La condition pour qu'il y ait éclipse, c'est que les racines soient réelles, ou qu'on ait

$$c + \frac{c}{2} H^2 - r \frac{R-c}{\alpha} > (\operatorname{tg} H + \operatorname{tg} \omega \sin \Omega) r_1.$$

On a au plus  $\operatorname{tg} H + \operatorname{tg} \omega \sin \Omega = \operatorname{tg} 3^\circ 5' 30'' + \operatorname{tg} 39' 31'' = 0,065507$ , le 4<sup>e</sup> satellite ne s'éclipse pas toujours. Mais pour le 3<sup>e</sup> satellite,  $\omega$  ne dépasse pas  $17' 2''$ , donc  $\operatorname{tg} H + \operatorname{tg} \omega < 0,058967$ ,  $r_1 < 15,4$ ; leur pro-

duit est  $< 0,907$  qui est  $< c - r \frac{R}{\alpha}$ . Donc le 3<sup>e</sup> satellite, et à *fortiori* les deux premiers s'éclipseront à toutes leurs révolutions.

Appelons  $y'$  et  $y''$  les deux valeurs de  $y$  données par la formule (18),  $y'$  étant la plus petite. Si  $r$  reste constant, on aura pour l'arc  $v$  décrit par le satellite en vertu du mouvement synodique depuis l'entrée dans l'ombre jusqu'à l'opposition, ou depuis l'opposition jusqu'à la sortie,

$$v = \frac{y}{r} + \frac{1}{6} \frac{y^3}{r^3}.$$

Cependant on peut tenir compte de la variation du rayon vecteur, ainsi que de la variabilité de la vitesse angulaire durant l'éclipse. On sait que, quelles que soient les perturbations d'un corps qui tourne autour d'un centre fixe, on peut à chaque instant le regarder comme se mouvant sur une ellipse dont les éléments changent avec le temps. Soient donc, à l'époque de l'opposition :  $s$  le demi grand axe de l'ellipse que décrit le satellite (et il change par l'influence des termes en  $\frac{1}{n' - 2n'' + 3n'''}$ );  $e$  l'excentricité, qui est petite,  $V$  l'anomalie vraie, que je prends pour variable indépendante,  $u$  l'anomalie excentrique. Dans les termes de correction, on néglige le carré de  $e$ . Enfin j'appelle  $T$  le temps de la révolution d'un satellite,  $n$  son moyen mouvement. Les formules du mouvement elliptique donnent

$$r \cos V = s (\cos u - e) \quad r \sin V = s \sin u \sqrt{1 - e^2},$$

Éliminant  $u$ , on en déduit

$$(r \cos V + se)^2 + \frac{r^2 \sin^2 V}{1 - e^2} = s^2,$$

d'où, en négligeant  $e^2$

$$r = s (1 - e \cos V), \quad \frac{dr}{dV} = se \sin V.$$

On a d'un autre côté

$$\frac{dt}{dV} = \frac{r^2 T}{2\pi s^2 \sqrt{1 - e^2}}$$

$$\frac{d^2 t}{dV^2} = \frac{rT}{\pi s^2 \sqrt{1 - e^2}} \frac{dr}{dV} = \frac{Te \sin V}{\pi}.$$

Ces formules établies, si le rayon est  $r$  à l'époque de l'opposition, quand le satellite aura décrit un angle  $v$ , en avant ou en arrière de cette position, le rayon sera devenu  $r + v \frac{dr}{dV} = r + sve \sin V$ , de sorte qu'en faisant l'inverse du rayon vecteur égal à  $\frac{1}{r}(1 - ve \sin V)$ , on aura, au lieu de l'expression simple de  $v$ , une équation

$$v = \frac{y}{r} - \frac{y}{r} ve \sin V + \frac{1}{6} \frac{y^3}{r^3}.$$

Substituant dans le 2<sup>e</sup> membre à  $v$  sa valeur approchée  $\frac{y}{r}$ , on trouve avec beaucoup plus d'exactitude

$$v = \frac{y}{r} - \frac{y^2}{r^2} e \sin V + \frac{1}{6} \frac{y^3}{r^3}.$$

Le temps écoulé depuis l'opposition jusqu'au passage de l'astre par l'abscisse  $y$  est

$$\begin{aligned} t &= v \frac{dt}{dV} + \frac{1}{2} v^2 \frac{d^2t}{dV^2} = \frac{vr^2T}{2\pi s^2 \sqrt{1-e^2}} + \frac{v^2 Te \sin V}{2\pi} \\ &= \frac{ryT}{2\pi s^2 \sqrt{1-e^2}} - \frac{y^2 Te \sin V}{s^2} \frac{1}{2\pi} + \frac{y^3 T}{12\pi s^3} + \frac{y^2 Te \sin V}{s^2} \frac{1}{2\pi}. \end{aligned}$$

Deux termes se détruisent, ce qui simplifie beaucoup l'expression, et montre qu'on n'a pas besoin de connaître l'anomalie vraie du satellite, ni, par suite, la position des absides. Nous avons parlé comme si le satellite avançait dans l'ombre par son mouvement sidéral ; or c'est le mouvement synodique qu'il faut considérer, et à cause de la faible vitesse angulaire du Soleil, on en tiendra suffisamment compte en remplaçant  $\frac{2\pi}{T}$  par le mouvement synodique  $N$  ; et alors la formule (18) donne :

$$(19) \quad t = \frac{1}{N} \left\{ \begin{aligned} &\pm \frac{r}{s^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{a-r}{c+\frac{c}{2}H^2-r\frac{R-c}{\alpha}} \sqrt{\left(c+\frac{c}{2}H^2-r\frac{R-c}{\alpha}\right)^2 - (\text{tg}H + \sin \Omega \text{tg} \omega)^2 r_1^2} \\ &- \frac{a^2}{e^2} \omega \cos \Omega (H + \omega \cos \Omega) \pm \frac{1}{6s^3} [c^2 - (H + \omega \cos \Omega)^2 r^2]^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \right.$$

En doublant les deux termes précédés du signe  $\pm$ , on a la durée totale

de l'éclipse. Comme en définitive nous n'avons commis qu'un petit nombre de fois des erreurs capables d'altérer  $t$  de 0,0004, on peut estimer que la valeur précédente est exacte à  $\frac{1}{2000}$  près, et il est clair que c'est au moins dix fois plus exact que les formules de Laplace.

Ce serait la durée exacte d'une éclipse si le satellite disparaissait précisément lors de l'entrée de son centre dans l'ombre pure. En réalité nous cessons de l'apercevoir quand il pénètre dans une surface parallèle à celle de l'ombre, et qui en est située à une distance  $\delta$ , différente pour les divers satellites. Si l'on connaissait cette valeur  $\delta$ , on l'ajouterait à  $a$  et à  $c$  dans les termes où ces lignes sont accompagnées de corrections, telles que  $r \frac{R-a}{a}$ , et l'on aurait la vraie durée de l'éclipse, du moins en admettant qu'on l'observe dans des conditions aussi identiques que possible.

Il faut recourir à l'observation pour trouver cette valeur de  $\delta$ . Le meilleur moyen consiste à supposer le satellite dans ses nœuds écliptiques; sa déclinaison est égale et de signe contraire à celle du Soleil, ce qui donne :

$$\operatorname{tg} H + \operatorname{tg} \omega \sin \Omega = 0.$$

La durée de l'éclipse, en corrigeant  $a$  et  $c$  de  $\delta$ , sera :

$$\tau = \frac{2}{N} \left[ \frac{r}{s^2 \sqrt{1-e^2}} \left( a + \delta - r \frac{R-a}{a} \right) + \frac{1}{6} \frac{c^3}{s^3} \right].$$

On peut supposer que  $\frac{r}{s^2 \sqrt{1-e^2}}$  soit égal à  $\frac{1}{s}$ ; puis on a :

pour $\mathcal{Q}'$	$\frac{a}{s} - \frac{R-a}{a} + \frac{1}{6} \frac{c^3}{s^3} = 0,4653 :$	$\frac{N}{2} = 0,000\ 020\ 536\ 2$
— $\mathcal{Q}''$	. . . . . 0,1033.	. . . . . 010 226 3
— $\mathcal{Q}'''$	. . . . . 0,06437.	. . . . . 005 065 4
— $\mathcal{Q}''''$	. . . . . 0,03765.	. . . . . 002 461 9

Comparons les durées qu'on en déduit avec celles que donne De+  
lambre d'après l'observation :

Satellites.	Durée calculée.	Durée observée.	Différence = $\frac{-2\delta}{N-r}$ .
1 <sup>er</sup>	<sup>h</sup> 2 <sup>m</sup> 44 <sup>s</sup> 9	<sup>h</sup> 2 <sup>m</sup> 45 <sup>s</sup> 45	— 4 36
2 <sup>e</sup>	2 48 21	2 52 5	— 3 45
3 <sup>e</sup>	3 31 49	2 33 40	— 1 51
4 <sup>e</sup>	4 50 16	4 45 31	+ 4 25

On en déduit :

$$\delta' = 0,0119, \quad \delta'' = 0,0221, \quad \delta''' = 0,0086, \quad \delta^{iv} = -0,0148.$$

Les changements à faire à la largeur de l'ombre sont à peu près de la grandeur des demi-diamètres des satellites. Il est remarquable que pour le 4<sup>e</sup> la correction ne soit pas dans le même sens que pour les autres ; mais ces variations ne peuvent être exactes que si l'on a exactement les éléments du monde de Jupiter.

Lorsque les satellites sont près de leur conjonction, ils projettent leur ombre comme un point noir sur le disque de Jupiter. Ce point est en ligne droite avec le centre du Soleil et le centre du satellite. L'éclipse de Soleil à la surface de Jupiter dure pendant que le centre du satellite est dans un cône circonscrit à Jupiter, et ayant pour sommet le centre du Soleil. La section étant une ellipse qui a pour demi axes :

$$a - r_1 \frac{R}{\alpha}, \quad c + \frac{c}{2} H^2 - r_1 \frac{R}{\alpha},$$

l'époque du commencement et de la fin de l'éclipse, en prenant pour origine du temps l'instant de la conjonction, sera donnée par la formule (49), sauf le changement des termes  $r \frac{R - a}{\alpha}$  et  $r \frac{R - c}{\alpha}$  en  $r \frac{R}{\alpha}$ . On considère ces satellites comme des sphères, et eu égard à leurs diamètres, que j'ai rapportés, on trouve pour longueurs de leurs cônes d'ombre :

$$l' = 15,6, \quad l'' = 13,3, \quad l''' = 22,4, \quad l^{iv} = 16,7.$$

Les trois premiers donnent à chaque révolution une éclipse totale de Soleil ; le 4<sup>e</sup> ne donne que des éclipses annulaires, et dans certaines positions du Soleil, il n'en donne plus du tout.

L'époque où nous apercevons les éclipses, surtout celles des satellites, ne coïncide pas exactement avec l'époque que nous venons de déter-

miner : la différence tient à plusieurs causes perturbatrices qu'il est impossible de bien apprécier. Elle dépend de la distance apparente des satellites à Jupiter, dont l'éclat affaiblit leur lumière, par un effet d'irradiation ; elle dépend de l'aptitude plus ou moins grande de leur surface visible à réfléchir la lumière du Soleil ; elle dépend de l'éloignement de la terre, de la pureté de notre atmosphère, de la puissance de notre vue et de nos instruments. Elle dépend enfin de la loi d'éclairement des corps placés aux différents points de la pénombre, et, par suite, de la réfraction et de l'extinction des rayons solaires dans l'atmosphère considérable qui entoure Jupiter.

Bailly espérait déterminer avec précision l'époque de l'éclipse sensible en observant le satellite peu avant son immersion dans l'ombre, et diminuant l'ouverture de l'objectif jusqu'à ce qu'il cessât d'apercevoir l'astre.

Supposons que cette ouverture ait dû être réduite à la fraction  $\frac{1}{K}$  de sa grandeur ordinaire, Bailly pensait que l'astre doit disparaître quand il est  $K$  fois moins éclairé qu'avant d'atteindre la pénombre ; et il en concluait que le satellite disparaissait quand son centre ne pouvait plus être éclairé que par la fraction  $\frac{1}{K}$  de la surface du Soleil. On peut calculer approximativement dans quelle zone de la pénombre un observateur verrait une partie donnée du disque solaire. Soient  $\zeta$  la réfraction horizontale d'un rayon qui n'est pas absorbé presque complètement dans l'atmosphère de Jupiter,  $\Delta$  le diamètre apparent du Soleil,  $l$  la largeur de la pénombre à la distance de l'observateur ; si ce dernier est à une distance  $ml$  du bord extérieur de la pénombre, la phase de l'éclipse sera pour lui :

$$1 - m + \frac{2\zeta}{\Delta}.$$

en ne prenant cette fraction ni  $< 0$ , ni  $> 1$ . En négligeant la courbure du contour apparent de Jupiter comparée à celle du Soleil, et l'extinction des rayons dans l'atmosphère de Jupiter, influences qui agissent en sens contraire, la portion du disque solaire visible pour l'observateur sera

$$R^2 \left\{ \arccos \frac{(2m-1)\Delta - 4\zeta}{\Delta} - 2 \frac{(2m-1)\Delta - 4\zeta}{\Delta^2} \sqrt{[(1-m)\Delta + 2\zeta][(m\Delta - 2\zeta)]} \right\}.$$

On ne prendra cette surface ni négative ni supérieure à  $\pi R^2$ . Mais si l'on égale son expression à  $\frac{\pi}{K} R^2$ , on en déduira la valeur de  $m$  qui donne la position du centre du satellite lors de son éclipse sensible. Ce procédé fut abandonné par Delambre et par Bailly lui-même, parce qu'il suppose que le disque solaire ait un éclat uniforme, et qu'un corps sera toujours également visible, pourvu qu'il soit éclairé en ses divers points avec une intensité dont la moyenne soit constante, et quelles que soient les variations de l'intensité aux divers points. Mais cette méthode pourra être reprise quand l'observation aura montré comment il faut rectifier les deux dernières hypothèses.

Vu et approuvé :

*Le Doyen,*

MILNE EDWARDS.

Paris, le 27 novembre 1862.



Permis d'imprimer :

*Le Vice-Recteur,*

A. MOURIER.