THESE

DE

MÉCANIQUE.

Soutenue le 30 Novembre 1811,

DEVANT LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS,

PAR A. T. PETIT,

DOCTEUR ÈS SCIENCES.

PARIS.

1812.

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES.

MM.

LACROIX,	Professeur de Calcul différentiel et intégral, Doyen de la Faculté.
BIOT,	Professeur d'Astronomie.
DINET,	Professeur Adjoint.
POISSON,	Professeur de Mécanique.
FRANCOEUR,	Professeur d'Algèbre supérieure.
GAY-LUSSAC,	Professeur de Physique.
HACHETTE,	Professeur Adjoint.
THÉNARD,	Professeur de Chimie.
HAUY,	Professeur de Minéralogie.
BRONGNIART,	Professeur Adjoint.
DESFONTAINES,	Professeur de Botanique.
MIRBEL,	Professeur Adjoint.
GEOFFROY-S.-HILAIRE,	Professeur de Zoologie.
BLAINVILLE,	Professeur Adjoint.

THÈSE

DE MÉCANIQUE.

THÉORIE MATHÉMATIQUE

DE L'ACTION CAPILLAIRE;

PAR M. PETIT, *Professeur de Physique au Lycée* Bonaparte, *Répétiteur à l'École polytechnique.*

[1.] TOUS les corps sont composés de molécules matérielles qui s'attirent entre elles. Cette force attractive est la cause des affinités chimiques. Les modifications qu'elle éprouve par la forme des molécules et par la force expansive du calorique, produisent les divers états d'agrégation sous lesquels les corps se présentent. La réfraction et l'élévation ou la dépression des liquides dans les espaces capillaires en résultent immédiatement, avec cette différence pourtant, que la réfraction est produite par l'attraction totale des molécules du corps réfringent, tandis que les phénomènes capillaires sont, comme nous le ferons voir par la suite, le résultat de la même cause modifiée par la courbure des surfaces.

Aucun des phénomènes dont nous venons de parler n'est propre à faire connaître la loi suivant laquelle s'exerce cette attraction moléculaire; mais tous l'assujettissent à être représentée par une fonction de la distance qui diminue avec une très-grande rapidité, de manière à devenir insensible aux plus petites distances sensibles, et qui devient finie lorsque la distance est nulle. Les fonctions de ce genre ne peuvent être mieux comparées qu'à des exponentielles négatives de la forme Ae^{-if}; e étant la base des logarithmes hyperboliques, f la distance, i un très-grand nombre positif, et A un coëfficient indépendant de f; il est évident que cette fonction satisfait aux conditions que nous venons d'énoncer.

Lorsqu'un corps se contracte ou se dilate, il est naturel de supposer que l'attraction qu'il exerce varie proportionnellement à sa densité; mais, lorsque la nature du corps change, rien n'indique si l'attraction varie par un changement de forme dans la fonction, ou si cette variation est simplement produite par celle d'un coëfficient dont la valeur ne dépende que de la constitution chimique du corps. Pour conserver au calcul toute sa généralité, nous admettrons la première hypothèse, c'est-à-dire, que nous ne statuerons rien sur la nature des différentes fonctions qui représentent les attractions, et que nous nous contenterons de les assujettir à la condition commune de devenir insensibles pour les plus petites distances perceptibles, et de devenir finies lorsque la distance est nulle.

[2.] Cela posé, désignons par $\varphi(f)$ la loi d'attraction des molécules d'un certain corps sur les molécules d'un autre corps, f étant la distance de la molécule attirante à la molécule attirée. Faisons de plus,

$$\int \varphi(f)\,df = H_1 - \varphi_1(f), \quad \int \varphi_1(f)\,df = H_2 - \varphi_2(f),$$
$$\int \varphi_2(f)\,df = H_3 - \varphi_3(f), \quad \text{\&c.},$$

les intégrales étant supposées prises depuis $f = 0$ jusqu'à une valeur déterminée de f, et les quantités H_1, H_2, H_3, &c. désignant les valeurs totales de ces intégrales. Les fonctions $\varphi_1(f)$, $\varphi_2(f)$, &c. jouiront évidemment, comme la fonction $\varphi(f)$, de la propriété de devenir insensibles pour des valeurs sensibles de (f), et de devenir finies lorsqu'on y fera f égal à zéro. Ces mêmes fonctions deviendront nulles, lorsqu'on supposera f égal à l'infini; les seconds membres des équations précédentes se réduiront alors aux quantités H_1, H_2, H_3, &c., qui représenteront, comme nous venons de le dire, les valeurs totales des intégrales

$$\int \varphi(f)df, \quad \int \varphi_1(f)df, \quad \int \varphi_2(f)df, \text{ \&c.},$$

c'est-à-dire, les valeurs de ces intégrales, prises depuis $f = 0$ jusqu'à $f = \infty$.

En changeant la nature des corps soumis à l'attraction, la fonction $\varphi(f)$ variera, et pourra être représentée par $\varphi'(f)$. Les fonctions φ_1, φ_2, φ_3, &c., et les intégrales totales H_1, H_2, H_3, éprouveront des changemens simultanés, et deviendront

$$\varphi'_1(f), \quad \varphi'_2(f), \quad \varphi'_3(f), \text{ \&c.}; \quad H'_1, \; H'_2, \; H'_3, \text{ \&c.}$$

Quoique la nature de ces fonctions ne soit pas connue, il est naturel de supposer que la fonction φ' est de même ordre que la fonction φ; la fonction φ'_1 de même ordre que la fonction φ_1, &c., et par suite, que les quantités H'_1, H'_2, H'_3, &c. sont respectivement de même ordre que les quantités H_1, H_2, H_3, &c.

[3.] Si l'on a deux intégrales de la forme

$$\int f^p \varphi_n(f)df \quad \text{et} \quad \int f^q \varphi_n(f)df,$$

dans lesquelles la fonction $\varphi_n(f)$ soit la même et du genre de celles que nous considérons ici, et qu'elle soit multipliée sous les signes d'intégration par des puissances différentes de f, la valeur totale de la première sera négligeable, par rapport à celle de la seconde, si p est plus grand que q, et *vice versâ*. En effet, la fonction $\varphi_n(f)$ n'étant sensible que pour des valeurs extrêmement petites de f, chaque élément de la première intégrale sera très-petit par rapport à l'élément correspondant de la seconde, puisque le rapport de ces deux élémens est égal à f^{p-q}; la valeur totale de la première intégrale sera donc incomparablement plus petite que celle de la seconde.

On peut étendre le même raisonnement à deux intégrales de la forme

$$\int F.\varphi_n(f)df \quad \text{et} \quad \int F'\varphi_n(f)df,$$

dans lesquelles les quantités F et F' sont deux fonctions de f qui ne sont pas assujetties à un décroissement aussi rapide que la fonction $\varphi_n(f)$. Si l'on développe F et F' suivant les puissances ascendantes de f, et qu'on représente par $A+A_1f+A_2f^2+$ &c. la valeur de F, et par $A'+A'_1f+A'_2f^2+$&c. celle de F', les intégrales précédentes deviendront

la première, $A\int\varphi_n(f)df+A_1\int\varphi_n(f)fdf+$ &c.,

et la seconde, $A'\int\varphi_n(f)df+A'_1\int\varphi_n(f)fdf+$ &c.

Il résulte de ce que nous venons de prouver, qu'on pourra ne conserver dans chacune de ces deux séries que le premier terme; en sorte que les intégrales proposées se réduiront à

$$A\int\varphi_n(f)df \quad \text{et à} \quad A'\int\varphi_n(f)df;$$

leur rapport sera donc égal à $\frac{A}{A'}$, c'est-à-dire au rapport des valeurs que prennent F et F' lorsqu'on y suppose $f=0$.

[4.] Si l'on intègre par parties la fonction $f^p\varphi(f)df$, on aura, en prenant les intégrales depuis $f=0$ jusqu'à une valeur déterminée de f,

$$\int f^p df\phi(f)=-f^p\phi_1(f)-pf^{p-1}\phi_2(f)-p(p-1)f^{p-2}\phi_3f\ldots.$$
$$-p(p-1)(p-2)\ldots2.1.\phi_{p+1}(f)+p(p-1)(p-2)\ldots2.1.H_{p+1},$$

et, en général,

$$\int f^p df\phi_n(f)=-f^p\phi_{n+1}(f)-pf^{p-1}\phi_{n+2}(f)-p(p-1)f^{p-2}\phi_{n+3}f\ldots$$
$$-p(p-1)(p-2)\ldots2.1.\phi_{n+p+1}(f)+p(p-1)(p-2)\ldots2.1.H_{n+p+1}.$$

Si l'on veut avoir les valeurs totales de ces intégrales, il faudra, dans les seconds membres des deux équations précédentes, faire $f=\infty$: or, l'extrême rapidité avec laquelle les fonctions ϕ_1, ϕ_2, &c. décroissent, rend évidemment nuls les produits $f^n\phi(f)$, $f^n\phi_1(f)$ &c., quelque grand que soit n, lorsqu'on y fait $f=\infty$; on aura donc pour les valeurs des intégrales,

$$\int f^p\phi(f)df \quad \text{et} \quad \int f^p\phi_n(f)df,$$

prises depuis $f=0$ jusqu'à $f=\infty$.

$$p\,(p-1)\,(p-2)\ldots\ldots 2.1.H_{p+1} \quad \text{pour la première,}$$

et

$$p\,(p-1)\,(p-2)\ldots\ldots 2.1.H_{n+p+1} \quad \text{pour la seconde.}$$

Ce résultat nous indique que les quantités H_1, H_2, H_3 sont respectivement de même ordre que les valeurs totales des intégrales

$$\int f df \phi f, \quad \int f^2 df \phi f, \quad \int f^3 df \phi f, \quad \&c.$$

Or, nous avons prouvé dans le numéro précédent, que ces différentes intégrales sont successivement négligeables les unes à l'égard des autres. Il en est donc de même des quantités H_1, H_2, H_3, &c.; ainsi H_2 est négligeable par rapport à H_1; H_3 est négligeable par rapport à H_2, et ainsi de suite.

Si l'on retranche de ces valeurs totales les valeurs des mêmes intégrales prises depuis $f = 0$ jusqu'à une valeur déterminée de f, les restes

$$f^p \phi_1(f) + pf^{p-1}\phi_2(f) + p(p-1)f^{p-2}\phi_3(f) + \ldots\ldots$$
$$+ p\,(p-1)\,(p-2)\ldots\ldots 2.1.\,\phi_{p+1}(f)$$

et

$$f^p \phi_{n+1}(f) + pf^{p-1}\phi_{n+2}(f) + p\,(p-1)f^{p-2}\phi_{n+3}(f) + \ldots\ldots$$
$$+ p\,(p-1)\,(p-2)\ldots\ldots 2.1\,.\phi_{n+p+1}(f),$$

représenteront les valeurs des mêmes intégrales prises depuis une valeur déterminée de f jusqu'à $f = \infty$.

[5.] Nous avons supposé jusqu'ici que, pour avoir la valeur totale des différentes intégrales qui contenaient des fonctions de f, assujetties à un décroissement extrêmement rapide, il fallait les prendre depuis $f = 0$ jusqu'à $f = \infty$; mais ce décroissement de la fonction est tel, qu'elle devient insensible, lorsque la variable a acquis une valeur finie, et par conséquent que l'élément correspondant de l'intégrale devient tout-à-fait négligeable. On peut donc ne prendre l'intégrale que depuis $f = 0$ jusqu'à une valeur quelconque finie de f; et réciproquement, toutes les fois qu'une des intégrales dont nous venons de parler aura pour une de ses limites une valeur finie de f, on pourra, sans aucune erreur, étendre cette intégrale jusqu'à f infini. Cette remarque est de la plus grande importance dans la théorie de l'action capillaire.

Ces préliminaires étant établis, nous allons en faire l'application à la détermination des lois de l'élévation ou de l'abaissement des liquides dans les espaces capillaires, en prenant pour guide la théorie que M. *Laplace* en a donnée dans le supplément au X.^e Livre de la *Mécanique céleste*.

De l'Élévation et de la Dépression des Liquides dans les tubes capillaires.

[6.] IMAGINONS un tube cylindrique à base quelconque, et dont les arêtes soient perpendiculaires au plan de la base : supposons qu'il plonge verticalement dans un liquide, et que ce liquide s'élève dans le tube au-dessus du niveau ; il est évident que cette ascension du liquide est produite par l'attraction que le tube exerce sur le liquide, et par celle que ce dernier exerce sur lui-même. En effet, la couche liquide adhérente aux parois, et d'une épaisseur égale au rayon de la sphère d'activité sensible du tube, est soulevée par l'action de ce tube. Cette lame de fluide soulève à son tour celle qui lui est contiguë, et ainsi de suite, jusqu'à ce que le poids du fluide soulevé fasse équilibre aux forces qui tendent à l'élever davantage. Essayons de déterminer le volume de ce fluide à l'instant où l'équilibre s'établit.

Concevons pour cela à l'extrémité inférieure du tube un autre tube idéal, dont les parois, infiniment minces, soient le prolongement de la surface intérieure du premier tube, et qui, n'ayant aucune action sur le liquide, n'empêche pas l'action réciproque du tube et du liquide. Supposons que ce second tube, d'abord vertical, se recourbe horizontalement, et qu'enfin il se redresse verticalement jusqu'à la surface de niveau du fluide contenu dans le vase, en conservant dans toute son étendue la même forme et la même largeur. Il est évident que, dans l'état d'équilibre, les pressions doivent être les mêmes dans le premier tube et dans la seconde branche verticale du second tube ; et comme le liquide est plus élevé dans le premier tube, l'excès de pression qui en résulte doit être balancé par les forces attractives qui tendent à élever le liquide. Analysons ces différentes attractions.

Le fluide contenu dans la première branche verticale du second tube (c'est-à-dire celle qui est le prolongement de la surface intérieure du premier tube) est attiré verticalement vers le bas, 1.° par lui-même, 2.° par le fluide qui entoure ce second tube; mais ces deux attractions sont détruites par les attractions semblables qu'éprouve le fluide contenu dans la seconde branche verticale du même tube. Les forces qui sollicitent vers le haut le fluide de la première branche verticale du second tube, sont, 1.° l'attraction du fluide contenu dans le premier tube ; mais cette attraction est détruite par l'action réciproque que le fluide du second tube exerce de haut en bas sur celui du premier tube ; 2.° l'attraction de la matière du premier tube qui produit une force verticale que nous représenterons par Q, et qui contribue à détruire la pression exercée par le fluide soulevé dans le premier tube.

Passons aux forces dont le fluide du premier tube est animé. Il est sollicité dans sa partie inférieure, 1.° par lui-même ; mais les attractions réciproques d'un corps se détruisent mutuellement s'il est solide, et rien n'empêche de concevoir le fluide du premier tube consolidé ; 2.° il est attiré vers le bas par le fluide contenu dans la première branche verticale du second tube ; mais nous venons de voir que cette attraction détruisait celle qui était produite par l'action du fluide du second tube sur celui du premier ; 3.° il est sollicité vers le bas par l'attraction du fluide qui environne le second tube, et de cette attraction résulte une force verticale que nous désignerons par $-Q'$, parce qu'elle agit dans le sens opposé de la force Q ; 4.° enfin, dans sa partie supérieure, il est attiré verticalement en haut par le tube; et il est évident que la force qui résulte de cette attraction est la même que la force Q. En effet, si l'on conçoit le fluide partagé en une infinité de petites colonnes verticales, et que par l'extrémité supérieure de chacune de ces colonnes, on mène un plan horizontal, la partie du tube inférieure à ce plan ne produira aucune force verticale dans la colonne; par conséquent, l'action verticale entière du tube sur cette colonne sera la même que celle qu'il exerce sur une colonne semblablement située dans le fluide du second tube.

En réunissant toutes ces attractions, on aura une seule force $2Q-Q'$, qui agira de bas en haut, et qui devra faire équilibre au poids du liquide soulevé au-dessus du niveau. Si l'on représente donc par V le volume de ce liquide, par D son poids spécifique, et par g la pesanteur, on aura l'équation

$$2Q - Q' = gDV, \quad \text{(a)}$$

dans laquelle il ne s'agit plus que de déterminer les valeurs de Q et Q'.

[7.] Pour y parvenir, nous observerons d'abord que la force Q, représentant l'action verticale du tube sur le fluide qu'il renferme, on peut, dans la détermination de cette force, supposer que le liquide soit terminé par une surface plane et horizontale; car si l'on considère une des petites colonnes verticales dans lesquelles nous avons précédemment divisé ce liquide, et que, par l'extrémité supérieure de cette colonne, on mène un plan horizontal, la partie du tube supérieure à ce plan produira seule une force verticale dans la colonne : or, les attractions cessant d'être sensibles aux plus petites distances, on conçoit qu'il est permis d'élever ou d'abaisser verticalement d'une hauteur quelconque la petite colonne que nous considérons, pourvu toutefois que son extrémité supérieure se trouve toujours à une distance sensible de l'extrémité supérieure du tube. En raisonnant ainsi pour toutes les colonnes qui composent le fluide contenu dans le tube, on voit qu'il est possible de les transporter toutes verticalement, de manière qu'elles aient leurs extrémités supérieures sur un même plan horizontal. C'est dans cette position que nous allons considérer le liquide soulevé, et que nous allons déterminer la quantité Q, c'est-à-dire, la force totale avec laquelle le tube soulève verticalement le fluide qu'il contient.

Décomposons

Décomposons le liquide en une infinité de tranches verticales angulaires d'une épaisseur infiniment petite, de manière que chacune d'elles soit comprise entre deux plans verticaux consécutifs et perpendiculaires au contour de la base du tube : la droite d'intersection des deux plans verticaux qui terminent l'une quelconque de ces tranches, sera évidemment la verticale passant par le centre de courbure correspondant de la base du tube.

Déterminons l'action verticale du tube sur l'une quelconque de ces tranches.

Prenons pour plan des xy le plan horizontal qui termine supérieurement le liquide ; pour axe des x, la normale à la base du tube qui divise en deux parties égales la base de la tranche ; pour axe des y, la tangente à la base du tube, et pour axe des z, l'arête correspondante de ce tube : si l'on représente par r le rayon de courbure de la base au point qu'on considère, et par ds la différentielle de l'arc de cette base, l'élément de la tranche sera représenté par $\frac{ds}{r}(r-x)dx\,dz$.

Maintenant, soit f la distance de cet élément à une molécule quelconque dm du tube, et x', y', z' les coordonnées de cette molécule : l'attraction du tube entier sur la tranche décomposée parallèlement à l'axe des z, sera

$$\int^5 \frac{z+z'}{f}.\phi(f).dm.\frac{ds}{r}.(r-x).dx.dz$$

$\phi(f)$ étant la loi d'attraction à la distance f.

Or, on a

$$\frac{z+z'}{f}\,dz = \frac{df}{dz}\,dz.$$

Si l'on intègre donc l'expression précédente par rapport à z, depuis $z=0$ jusqu'à z infini, ce qui est toujours permis, lorsque le liquide soulevé dans le tube a une hauteur finie, on obtiendra

$$\int^4 dm\frac{ds}{r}(r-x)dx\,\phi_1(f),$$

puisque $\int \Phi(f)\,df = H_1 - \Phi_1(f)$. Cette intégrale représente l'attraction verticale du tube entier sur une colonne parallèle à l'axe des z, et composée des élémens de la tranche pour lesquels x est le même : de plus, z étant supposé nul dans l'élément de cette intégrale, f représente maintenant la distance de la molécule du tube au pied de la colonne fluide verticale dont il s'agit, sur le plan horizontal qui termine supérieurement le liquide.

Représentons par ϖ l'angle que f forme avec le plan des xy et par θ l'angle que la projection de f sur ce plan forme avec l'axe des y; l'élément dm du tube pourra être remplacé par $f^2.df.d\theta.d\varpi.\cos.\varpi$; l'intégrale précédente se changera donc en

$$\int^4 f^2.df.\Phi_1(f).d\theta.d\varpi.\cos.\varpi.\frac{ds}{r}(r-x)\,dx.$$

L'intégration relative à f doit être faite depuis la valeur de f correspondante à la paroi intérieure du tube jusqu'à la valeur de cette même variable correspondante à la paroi extérieure. Cette seconde valeur étant nécessairement finie, lorsque le tube a une épaisseur sensible, nous pourrons étendre l'intégration jusqu'à $f=\infty$. On aura donc, n.° [4.],

$$\int f^2\,df\,\Phi_1(f) = f^2\,\Phi_2(f) + 2f\Phi_3(f) + 2\,\Phi_4(f),$$

et par conséquent, l'intégrale précédente deviendra

$$\int^3 [f^2\Phi_2(f) + 2f\Phi_3(f) + 2\,\Phi_4(f)]\,d\theta\,d\varpi\cos.\varpi\,\frac{ds}{r}(r-x)dx,$$

dans laquelle f représente maintenant la distance du pied d'une colonne verticale quelconque de la tranche à l'une des molécules du tube, située sur sa paroi intérieure. Il reste maintenant à intégrer par rapport à x, ϖ et θ.

Pour cela, substituons à la base du tube sa parabole osculatrice, ce qui est évidemment permis, à cause de la très-petite étendue des attractions; l'équation sera, en désignant par x' et y' les coordonnées de l'un quelconque de ses points,

$$y'^2 = 2rx';$$

mais on a

$$x' = x - f\cos.\varpi\sin.\theta \quad \text{et} \quad y' = f\cos.\varpi\cos.\theta\,;$$

partant,

$$f^2\cos.^2\varpi\cos.^2\theta = 2r(x - f\cos.\varpi\sin.\theta),$$

d'où

$$x = f\cos.\varpi\sin.\theta + \frac{f^2\cos.^2\varpi\cos.^2\theta}{2r}.$$

Or, θ et ϖ sont supposés constans dans la différentielle dx de l'intégrale précédente; on aura donc, en substituant la variable f à la variable x,

$$dx = df\left(\cos.\varpi\sin.\theta + \frac{f\cos.^2\varpi\cos.^2\theta}{r}\right);$$

par conséquent,

$$(r - x)dx = df\left(\cos.\varpi\sin.\theta + \frac{f\cos.^2\varpi\cos.^2\theta}{r}\right)\left(r - f\cos.\varpi\sin.\theta - \frac{f^2\cos.^2\varpi\cos.^2\theta}{2r}\right).$$

Le second membre de cette équation pourra être mis sous la forme

$$df\left(r\cos.\varpi\sin.\theta + Af + \frac{B}{r}f^2 + \frac{C}{r^2}f^3\right);$$

A, B, C représentant des fonctions de ϖ et θ seulement.

L'attraction verticale du tube sur la tranche deviendra donc, après cette transformation,

$$\frac{ds}{r}\int^3 df\left[f^2\Phi_2(f) + 2f\Phi_3(f) + 2\Phi_4(f)\right]\left[r\cos.\varpi\sin.\theta + Af + \frac{B}{r}f^2 + \frac{C}{r^2}f^3\right]d\theta\, d\varpi\cos.\varpi.$$

Ne considérons d'abord que la partie

$$\frac{ds}{r}\int^3 ds\,[f^2\Phi_2 f + 2f\Phi_3 f + \Phi_4(f)]\,r\cos.^2\varpi\sin.\theta\, d\varpi\, d\theta\,;$$

et intégrons-la par rapport à f. Dans l'intégrale primitive, les limites de l'intégration relative à x étaient $x=0$ et $x=r$, ou, ce qui revient au même, $x=0$ et $x=\infty$, puisque le rayon de courbure est supposé fini. Ayant remplacé la variable x par la variable f, les limites de l'intégration relative à f doivent être les valeurs de f correspondantes aux valeurs extrêmes de x; d'où il suit que l'on doit intégrer l'expression précédente, depuis $f = 0$ jusqu'à $f = \infty$: on a dans ce cas, n.° [4.],

$$\int df\,[f^2\varphi_2(f) + 2f\varphi_3(f) + 2\varphi_4(f)] = 6H_5;$$

l'intégrale précédente se réduit donc à

$$6H_5\,ds.\int^2 d\theta\, d\varpi \text{ sin. } \theta \text{ cos. } \varpi,$$

qu'il faut intégrer par rapport à ϖ, depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = 100°$, et depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 200°$, puisque f est nul dans cette dernière intégrale. Or on a dans ces limites,

$$\int d\theta\, d\varpi \text{ sin. } \theta \text{ cos.}^2\, \varpi = \frac{\pi}{2},$$

π étant la demi-circonférence dont le rayon est égal à l'unité.

La partie de l'intégrale dont nous venons de déterminer la valeur, se réduit donc à $3\pi H_5\,ds$. En intégrant les termes dont nous n'avons pas tenu compte précédemment, on trouverait pour résultat, en suivant une marche semblable,

$$12\,H_6\,\frac{ds}{r}\int^2 A\,d\theta\, d\varpi \text{ cos. } \varpi + 40\,H_7\,\frac{ds}{r^2}\int^2 B\,d\theta\, d\varpi \text{ cos. } \varpi$$
$$+ 180\,H_8\,\frac{ds}{r^3}\int^2 C\,d\theta\, d\varpi \text{ cos. } \varpi.$$

Or H_6, et, à plus forte raison, H_7, H_8, &c. sont incomparablement plus petits que H_5; et, quoique le rayon de courbure entre aux dénominateurs des différens termes de cette expression, tant que sa valeur sera finie, cette seconde partie de l'intégrale sera toujours négligeable par rapport à la première : ainsi l'action verticale du tube sur une des tranches dans lesquelles nous avons décomposé le liquide, se réduit à $3\pi H_5\,ds$: résultat qui nous indique que cette attraction est indépendante de la courbure du tube, pourvu toutefois que le rayon de courbure ait une valeur finie.

On aura la valeur de la force Q, c'est-à-dire, l'attraction verticale du tube sur le fluide qu'il contient, en intégrant la quantité $3\pi H_5\,ds$

dans toute l'étendue de la base du tube. En désignant le contour de cette base par C, on aura donc

$$Q = 3\pi H_5 . C.$$

Si l'espace capillaire dans lequel le liquide s'élève est renfermé entre deux tubes dont l'un soit placé dans l'intérieur de l'autre, il est évident qu'on aura

$$Q = 3\pi H_5 . c + 3\pi K_5 . b,$$

b étant le contour de la base du tube intérieur, et K_5 la valeur de H_5 correspondante à ce tube. Si les deux tubes sont de même matière, la valeur précédente de Q se réduit à $3\pi H_5 (c+b)$.

Revenons au cas d'un seul tube capillaire plongeant dans un fluide; la force Q se réduit alors, comme nous venons de le voir, à $3\pi H_5 . c$: or, la force Q' est produite par une attraction qui ne diffère de celle que nous venons de déterminer, que parce qu'elle résulte de l'action de molécules fluides sur des molécules fluides, tandis que la force Q était produite par l'attraction que les molécules du tube exercent sur les molécules fluides. On pourra donc remplacer Q' par $3\pi H'_5 c.$, H'_5 étant une quantité de même ordre que H_5, et représentant, par rapport à l'attraction du fluide sur lui-même, ce que nous avons désigné par H_5 par rapport à l'attraction du tube sur le liquide. L'équation (a) du n.° précédent deviendra donc

$$3\pi . c (2 H_5 - H'_5) = g D V; \qquad \text{(b)}$$

résultat qui devient tout-à-fait semblable à celui auquel M. *Laplace* est parvenu d'une autre manière, page 18 du *Supplément à la Théorie de l'action capillaire*, en y changeant $3\pi H_5$ et $3\pi H'_5$ en ρ et ρ'.

En appelant a la surface de la base du tube, et h la hauteur moyenne du liquide soulevé au-dessus du niveau. On a $V = a h$, et par conséquent,

$$h = \frac{3\pi (2H_5 - H'_5)}{g D} . \frac{c}{a},$$

c'est-à-dire que, *dans des tubes de même matière, plongeant dans un même* *fluide, la hauteur moyenne du liquide soulevé est proportionnelle au contour de la base du tube et réciproque à la surface de cette base.*

Le même résultat peut être étendu au cas où le contour de la base du tube serait discontinu ; car les raisonnemens dont nous avons fait usage, ne cessent d'être applicables que vers les arêtes du tube correspondantes aux points où la base éprouve une discontinuité dans son contour : or, l'étendue dans laquelle cet effet a lieu, étant imperceptible, l'erreur qui en résulte doit être insensible.

Si les bases des différens tubes sont circulaires, les contours sont proportionnels aux rayons et les surfaces aux carrés de ces mêmes rayons ; ainsi les hauteurs moyennes sont réciproques aux rayons des bases. La même loi se conserve pour des tubes prismatiques dont les bases sont des polygones réguliers d'un même nombre de côtés.

[8.] Si l'espace capillaire est compris entre deux tubes dont l'un soit situé dans l'intérieur de l'autre, nous venons de voir que l'on avait

$$Q = 3\pi H_5 c + 3\pi K_5 b;$$

on aura aussi

$$Q' = 3\pi H'_5 (c + b),$$

et l'équation (a) deviendra, en appelant a la surface de la base du tube extérieur, d la surface de la base du tube intérieur, et h la hauteur moyenne du fluide soulevé,

$$3\pi c(2H_5 - H'_5) + 3\pi b(2K_5 - H'_5) = gDh(a - d).$$

Si les deux tubes sont de même nature, H_5 est alors égal à K_5, et l'équation précédente donne

$$h = \frac{3\pi(2H_5 - H'_5)}{gD} \, \frac{(c + b)}{a - d},$$

c'est-à-dire que l'élévation moyenne du liquide est encore proportionnelle au contour total de la base de l'espace capillaire, et réciproque à la surface de cette base.

Si les bases des deux tubes sont circulaires et concentriques, en appelant r le rayon de la plus grande base, et r' celui de la plus petite, l'équation précédente donnera

$$h = \frac{3\pi(2H_5 - H'_5)}{gD} \cdot \frac{2\pi(r + r')}{\pi(r^2 - r'^2)} = \frac{3\pi(2H_5 - H'_5)}{gD} \cdot \frac{2\pi(r - r')}{\pi(r - r')^2};$$

c'est-à-dire que l'élévation sera la même que dans un tube circulaire, dont la base aurait pour rayon la différence des rayons des tubes.

Ce résultat étant indépendant de la grandeur des rayons r et r', on peut l'étendre au cas où ces rayons deviennent infinis. La hauteur moyenne du liquide soulevé sera donc la même que dans un tube cylindrique qui aurait pour rayon la distance des plans, et cette hauteur sera représentée par

$$2 \cdot \frac{3\pi(2H_5 - H'_5)}{gD.l},$$

l étant la distance des plans.

Si l'on a un tube prismatique dont la base soit un rectangle, et qu'on suppose deux faces contiguës de ce prisme d'une même substance, et les deux autres faces d'une autre substance, on aura, en désignant par m le grand côté de la base, et par n le petit côté,

$$h = \frac{3\pi}{gD} \cdot \frac{1}{n} \left[(2H_5 - H'_5) + (2K_5 - H'_5)\right]\left(1 + \frac{n}{m}\right).$$

Si m est très-grand par rapport à n, on pourra négliger la fraction $\frac{n}{m}$, et l'équation précédente deviendra

$$h = \frac{3\pi}{gD} \cdot \frac{1}{n} \left[(2H_5 - H'_5) + (2K_5 - H'_5)\right]:$$

or, ce cas est celui de deux plans parallèles distans l'un de l'autre de la quantité n. On en conclut donc le théorème suivant :

L'élévation d'un fluide entre deux plans parallèles de nature différente, est en raison inverse de leur distance mutuelle, et elle est égale à la demi-somme des élévations qui auraient lieu, si l'on supposait d'abord le premier plan de même matière que le second, et ensuite le second de même matière que le premier.

Si le tube qui plonge par sa partie inférieure dans un liquide est oblique à l'horizon, les forces $2Q$ et Q' étant alors dirigées parallèlement aux arêtes du tube, leur résultante doit faire équilibre au poids du liquide soulevé, décomposé parallèlement à ces arêtes, c'est-à-dire à ce poids multiplié par le sinus de l'inclinaison du tube à l'horizon. Il est facile de conclure de là, que la hauteur verticale moyenne du liquide est indépendante de l'inclinaison du tube, en sorte qu'elle est la même que lorsque le tube est vertical.

[9.] Nous avons toujours supposé jusqu'ici que le fluide s'élevait dans les différens tubes que nous avons considérés. Mais l'équation (b) fait voir que le liquide s'abaisse dans le tube toutes les fois que $2H_5$ est plus petit que H'_5, puisqu'alors le volume V devient négatif. La valeur de h, prise positivement, indique alors la dépression du liquide dans le tube ; et il est facile de s'assurer que ces dépressions dans les différens tubes sont soumises aux mêmes lois que celles auxquelles nous venons de parvenir pour les élévations. Il suffit donc d'y joindre le théorème suivant, au moyen duquel on peut déterminer les circonstances dans lesquelles le liquide est soulevé ou déprimé.

Il y aura élévation toutes les fois que le double de l'intensité d'attraction de la matière du tube sur le fluide sera plus grand que l'attraction du fluide sur le même, et il y aura dépression dans le cas contraire. Si l'intensité d'attraction de la matière du tube sur le liquide est précisément égale à la moitié de celle de ce dernier sur lui-même, le fluide ne sera ni élevé ni déprimé.

Nous allons maintenant déterminer la nature des surfaces qui terminent les fluides contenus dans les espaces capillaires. Cette recherche servira à confirmer quelques-uns des résultats que nous venons d'obtenir, et nous en fournira d'autres, auxquels il serait difficile de parvenir directement par la marche que nous venons de suivre.

Équation

Équation générale de la surface des Fluides renfermés dans des espaces Capillaires.

[10.] Il résulte de la propriété caractéristique des fluides, que la force qui anime chaque molécule de la surface libre d'un fluide en équilibre est perpendiculaire à cette surface : or, les molécules d'un fluide renfermé dans un espace capillaire ne sont sollicitées que par la pesanteur et par l'attraction du fluide environnant, tant qu'on les suppose à des distances sensibles des parois des vases. L'équilibre d'une pareille masse fluide exige donc que les composantes tangentielles à la surface des deux actions dont nous venons de parler, se détruisent mutuellement par chaque point de cette surface.

Prenons pour origine des coordonnées un point quelconque de la surface du fluide, pour plan des xy le plan tangent à la surface à ce point, et la normale correspondante pour axe de z; et déterminons d'abord les composantes parallèles aux axes des x et des y de la force qui résulte des attractions exercées sur l'origine par toutes les molécules de la masse fluide. La valeur de z, donnée par l'équation de la surface et développée suivant les puissances ascendantes de x et de y, sera nécessairement de la forme

$$z = Ax^2 + \lambda xy + By^2 + Cx^3 + Dx^2y + Exy^2 + Fy^3 + \&c.$$

Les attractions sur l'origine n'étant sensibles que dans un très-petit espace, on peut négliger les termes supérieurs à la troisième dimension. En représentant par f la distance d'une molécule quelconque du fluide à l'origine, et par θ l'angle que la projection de f sur le plan des xy forme avec l'axe des x, on pourra représenter l'élément de la masse fluide par $z.fdfd\theta$, en supposant que la projection de f lui est égale dans toute l'étendue dans laquelle s'exercent les attractions; ce qui n'est permis qu'autant que les rayons de courbure de la masse fluide au point qu'on considère ont des grandeurs sensibles.

Cela posé, si l'on désigne par $\phi(f)$ la loi d'attraction à la distance f, des molécules du fluide sur elles-mêmes, l'action totale de la masse fluide sur l'origine des coordonnées sera, en la décomposant parallèlement à l'axe des x,

$$\iint z f\, df\, d\theta \cos.\theta\, \varphi(f) \quad \text{et} \quad \iint z f\, df\, d\theta \sin.\theta\, \varphi(f),$$

parallèlement à l'axe des y. Remplaçant z par sa valeur, et observant que l'on a

$$x = f\cos.\theta \quad \text{et} \quad y = f\sin.\theta,$$

les expressions précédentes deviendront

$$\iint \varphi(f)\, df\, d\theta\, [f^3(A\cos.^3\theta + \lambda\cos.^2\theta\sin.\theta + B\cos.\theta\sin.^2\theta) \ldots\ldots$$
$$+ f^4(C\cos.^4\theta + D\cos.^3\theta\sin.\theta + E\cos.^2\theta\sin.^2\theta + F\cos.\theta\sin.^3\theta)],$$
$$\iint \varphi(f)\, df\, d\theta\, [f^3(A\cos.^2\theta\sin.\theta + \lambda\cos.\theta\sin.^2\theta + B\sin.^3\theta) \ldots\ldots$$
$$+ f^4(C\cos.^3\theta\sin.\theta + D\cos.^2\theta\sin.^2\theta + E\cos.\theta\sin.^3\theta + F\sin.^4\theta)].$$

On doit intégrer par rapport à θ, depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 400°$: or, il est évident que toute intégrale de la forme $\int \sin.^p\theta \cos.^q\theta\, d\theta$, prise entre ces limites, est toujours nulle, excepté dans le cas où les exposans p et q sont tous deux pairs ; les intégrales précédentes se réduiront donc à

$$\iint f^4\, df\, \varphi(f)\, d\theta\, (C\cos.^4\theta + E\cos.^2\theta\sin.^2\theta)$$

et

$$\iint f^4\, df\, \varphi(f)\, d\theta\, (F\sin.^4\theta + D\cos.^2\theta\sin.^2\theta);$$

effectuant l'intégration relative à θ dans les limites prescrites, on obtiendra

$$\frac{\pi}{4}(3C+E)\int f^4\, df\, \varphi(f) \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{4}(3F+D)\int f^4\, df\, \varphi(f).$$

L'intégrale relative à f peut être prise depuis $f = 0$ jusqu'à $f = \infty$; $\int f^4\, df\, \varphi f$ est alors égale à $24 H'_5$, n.° [4.].

La force tangentielle parallèle aux x est donc

$$6 H'_5\, \pi\, (3C + E),$$

et celle parallèle aux y,

$$6 H'_5\, \pi\, (3F + D).$$

mais on a

$$C = \frac{1}{6}\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right),\ D = \frac{1}{2}\left(\frac{d^3 z}{dx^2\, dy}\right),\ E = \frac{1}{2}\left(\frac{d^3 z}{dx\, dy^2}\right),\ F = \frac{1}{6}\left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right),$$

en supposant x et y nuls dans ces divers coèfficiens aux différences partielles, ou, ce qui revient au même, en supposant qu'ils se rapportent à l'origine des coordonnées.

Or, on sait que, pour qu'il y ait équilibre dans une masse fluide, il suffit que la somme des produits de chaque force par l'élément de sa direction soit nulle, en assujettissant ces élémens à appartenir à la surface du fluide. En nommant donc D la densité du fluide, g la pesanteur, et $-du$ l'élément de sa direction, on aura l'équation

$$3\pi H'_5\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\,dx + \frac{d^3 z}{dx^2\, dy}\,dy + \frac{d^3 z}{dx\, dy^2}\,dx + \frac{d^3 z}{dy^3}\,dy\right) - gD\,du = 0.$$

Le facteur qui multiplie $3\pi H'_5$ est évidemment la différentielle totale de

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 z}{dy^2}.$$

Or, l'équation qui donne le plus grand et le plus petit rayon de courbure d'une surface se réduit à

$$R^2\left[\frac{d^2 z}{dx^2}\cdot\frac{d^2 z}{dy^2} - \left(\frac{d^2 z}{dx\, dy}\right)^2\right] - R\left(\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 z}{dy^2}\right) + 1 = 0,$$

lorsqu'on y suppose nuls x, y, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, comme cela a lieu pour le point que nous considérons. En appelant donc R et R' les deux rayons de courbure à l'origine des coordonnées, on aura

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}.$$

L'équation de la surface fluide deviendra donc

$$3\pi H'_5 . d\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = gD\,du;$$

d'ailleurs, les rayons de courbure R et R' étant indépendans de la position des coordonnées, on peut transporter l'origine au point de la surface pour lequel le plan tangent est perpendiculaire à la direction de la pesanteur; l'élément $-du$ de la direction de cette force se changera en $-dz$, et l'équation précédente deviendra

$$3\pi H'_5 . d\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)=gDdz;$$

intégrant :

$$3\pi H'_5\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)=gDz+3\pi H'_5\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{B'}\right),$$

B et B' étant les rayons de courbure de la surface à la nouvelle origine.

Supposant

$$\frac{1}{B}+\frac{1}{B'}=\frac{2}{b} \quad \text{et} \quad \frac{gD}{3\pi H'_5}=2\alpha,$$

on aura

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=2\alpha z+\frac{2}{b};$$

remplaçant R et R' par leurs valeurs générales, et faisant, pour abréger,

$$\frac{dz}{dx}=p.\ \frac{dz}{dy}=q.\ \frac{d^2z}{dx^2}=r.\ \frac{d^2z}{dx\,dy}=s.\ \text{et}\ \frac{d^2z}{dy^2}=t.$$

L'équation de la surface du fluide sera

$$\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}=2\alpha z+\frac{2}{b}. \qquad (c)$$

[11.] On peut parvenir à cette même équation, en comparant les forces perpendiculaires à la surface dont les différentes molécules sont animées. Dans ce cas, nous nous bornerons, pour la valeur de z, aux termes du second ordre; car il est facile de s'assurer que ceux du troisième ne produiraient que des quantités insensibles. La surface sera ainsi réduite à son paraboloïde osculateur, et l'on aura

$$z=Ax^2+\lambda xy+By^2.$$

Plaçons toujours l'origine des coordonnées en un point quelconque de la surface fluide, et supposons que l'axe des z soit dirigé suivant la normale à cette surface. Soit f la distance d'une molécule quelconque de la masse fluide à la molécule attirée, que nous supposerons située sur l'axe des z et à une distance r de l'origine. Représentons par s la projection de f sur le plan des xy, et par θ l'angle que cette projection fait avec l'axe des x. L'élément différentiel de la masse fluide sera $s\,ds\,d\theta\,dz$. L'attraction du fluide entier sur la molécule que nous considérons, décomposée parallèlement à l'axe des z, sera donc

$$\int\int\int s\,ds\,d\theta\,dz.\varphi(f)\,\frac{z-r}{f}\,\varphi(f),$$

$\varphi(f)$ étant la loi d'attraction à la distance f.

L'intégrale relative à z doit commencer à la valeur de z correspondante aux points de la surface fluide. Comme nous supposons, d'ailleurs, qu'elle se termine à une valeur sensible de cette variable, on pourra l'étendre jusqu'à $z=\infty$: or, on a

$$\frac{z-r}{f}\,dz = \frac{df}{dz}.dz;$$

l'intégrale précédente deviendra donc, après avoir effectué l'intégration par rapport à z,

$$\int\int s\,ds\,d\theta\,\varphi_1(f'),$$

f' étant la valeur de f relative aux points de la surface. En appelant z' la valeur correspondante de z, on a

$$z' = Ax^2 + \lambda xy + By^2 = s^2(A\cos.\theta + \lambda\sin.\theta\cos.\theta + B\sin.^2\theta)$$

et

$$f'^2 = s^2 + r^2 - 2rz',$$

en négligeant z'^2 par rapport à s^2; on a donc

$$s\,ds = f'df' + r\,dz';$$

si l'on veut que cette valeur de $s\,ds$ soit celle qui convient à la double intégrale précédente, il faut supposer θ constant dans dz' et df', on aura donc

$$dz' = 2s\,ds\,(A\cos.^2\theta + \lambda\sin.\theta\cos.\theta + B\sin.^2\theta);$$

partant,

$$f'df' = s\,ds\,[1 - 2r(A\cos.^2\theta + \lambda\sin.\theta\cos.\theta + B\sin.^2\theta)]:$$

mais r est nécessairement très-petit, tant que $\varphi_1(f')$ a une valeur sensible; on peut donc en négliger le càrré et les puissances supérieures. Ainsi l'équation précédente donnera pour sds la valeur suivante,

$$sds = f'df'\,[1 + (2Ar\cos.^2\theta + 2\lambda r\sin.\theta\cos.\theta + 2Br\sin.^2\theta)];$$

la double intégrale précédente deviendra par-là

$$\iint f'df'\varphi_1(f')d\theta\,[1 + (2Ar\cos.^2\theta + 2\lambda r\sin.\theta\cos.\theta + 2Br\sin.^2\theta)].$$

Intégrant par rapport à θ, depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 400°$, on obtiendra

$$2\pi\int f'df'\,[1 + (A+B)r]\,\varphi_1(f');$$

intégrant ensuite par rapport à f', depuis $f' = r$ jusqu'à $f' = \infty$, on aura, n.° [4.],

$$\int f'df'\varphi_1(f') = r\varphi_2(r) + \varphi_3(r);$$

l'attraction cherchée sera donc

$$2\pi\,[1 + (A+B)r]\,[r\varphi_2(r) + \varphi_3(r)].$$

Or, en désignant par R et R' le plus grand et le plus petit rayon de courbure de la surface fluide à l'origine des coordonnées, on a

$$A + B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right);$$

l'expression précédente devient donc

$$2\pi\left[1 + \frac{r}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right][r\varphi_2(r) + \varphi_3(r)].$$

Si l'on veut avoir l'action de la masse fluide sur un canal infiniment étroit et perpendiculaire à la surface, il faut multiplier la quantité précédente par dr, et l'intégrer depuis $r = 0$ jusqu'à $r = \infty$: on a, entre ces limites,

$$\int dr\,[r\varphi_2(r) + \varphi_3(r)] = 2H'_4$$

et

$$\int\frac{dr}{2}\,[r^2\varphi_2(r) + r\varphi_3(r)] = \frac{3}{2}H'_5.$$

L'action totale de la masse fluide sur le canal sera donc

$$4\pi H'_4 + 3\pi H'_5\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Cette expression est relative aux corps terminés par des surfaces convexes. Lorsqu'elles sont concaves, ou convexes dans un sens et concaves dans l'autre, il faut supposer négatif le rayon de courbure correspondant à la concavité.

Si la surface est plane, R et R' sont infinis ; la quantité précédente se réduit alors à $4\pi H'_4$. On voit donc que l'attraction d'un corps terminé par une surface quelconque sur une colonne fluide infiniment étroite et perpendiculaire à cette surface, est composée de trois termes : le premier, incomparablement plus grand que les deux autres, exprime l'action que le même corps exercerait, s'il était terminé par une surface plane ; le second et le troisième sont des fractions qui ont le même numérateur et qui ont pour dénominateur : la première, le plus petit rayon osculateur de la surface au point où la colonne fluide la rencontre, et la seconde, le plus grand rayon osculateur de la surface au même point. Ces deux derniers termes étant négligeables par rapport au premier, on est en droit de les supprimer toutes les fois que le premier reste dans le calcul (comme cela a lieu, par exemple, dans le cas de la réfraction) ; mais il est nécessaire d'en tenir compte, lorsque ce premier terme disparaît, comme nous allons voir que cela arrive dans le cas de l'action capillaire.

Concevons de nouveau un tube vertical plongeant dans un fluide, et imaginons par un point quelconque de la surface du fluide soulevé un canal infiniment étroit, qui se replie horizontalement au-dessous du tube, et qui remonte ensuite verticalement jusqu'à la surface de niveau du fluide dans le vase. L'équilibre dans ce canal exige que les pressions soient égales à ses deux extrémités. Si l'on représente par h' la hauteur du point le plus bas de la surface du fluide soulevé au-dessus du niveau dans le vase, et qu'on prenne toujours ce point pour l'origine des coordonnées, l'excès de poids de la première branche verticale du canal sur la seconde sera $g(h'+z)$; d'ailleurs, l'attraction du fluide environnant produit dans la première branche une force

$$4\pi H'_4 + 3\pi H'_5\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right),$$

et dans la seconde la force

$$4\pi H'_4:$$

on aura donc pour l'équilibre

$$3\pi H'_5\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right) = -gD(h'+z).$$

Cette équation nous fait voir d'abord que la surface du fluide sera nécessairement concave s'il s'élève, et convexe s'il y a dépression, puisque, dans le premier cas, les rayons de courbure R et R' sont négatifs, et que, dans le second, ils sont positifs. En les prenant toujours positivement l'équation précédente pourra être mise sous la forme

$$3\pi H'_5\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right) = gD(h'+z).$$

Mettant pour R et R' leurs valeurs générales, et faisant toujours

$$\frac{gD}{3\pi H'_5} = 2\alpha,$$

nous aurons

$$\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\alpha(h'+z). \qquad \text{(d)}$$

Cette équation est visiblement la même que l'équation (c), à laquelle nous sommes précédemment parvenus. Elle n'est intégrable par aucune méthode connue; cependant on peut en conclure la loi du n.° [7.], en la traitant par un moyen particulier. La comparaison des résultats obtenus par les deux méthodes fournit un moyen de connaître le rapport des intensités d'attraction de la matière du tube sur le liquide, et du liquide sur lui-même.

[12.]

[12.] Pour cela, mettons l'équation (d) sous la forme

$$3\pi H'_5\left[\frac{(1+q^2)\frac{dp}{dx}-pq\left(\frac{dp}{dy}+\frac{dq}{dx}\right)+(1+p^2)\frac{dq}{dy}}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\right]=gD(h'+z);$$

multipliant les deux membres par $dx\,dy$, et mettant à part dans le second, les termes où p et q sont différenciés par rapport à x, et ceux où ces mêmes quantités sont différenciées par rapport à y, on aura

$$dx\,dy\,g.D(h'+z)=3\pi H'_5\left[\frac{(1+p^2+q^2)\frac{dp}{dx}-p^2\frac{dp}{dx}-pq\frac{dq}{dx}}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}dx\,dy\right.$$
$$\left.+\frac{(1+p^2+q^2)\frac{dq}{dy}-q^2\frac{dq}{dy}-pq\frac{dp}{dy}}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}dx\,dy\right].$$

Si l'on intègre les deux membres par rapport à x et à y, et que les intégrales soient prises dans toute l'étendue de la section intérieure horizontale du prisme, l'intégrale du premier membre représentera évidemment le poids total du liquide soulevé : or, le premier terme du second membre est intégrable par rapport à x, et donne pour intégrale

$$\left[\frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}-\frac{(p)}{\sqrt{[1+(p)^2+(q)^2]}}\right]dy;$$

le second s'intègre exactement par rapport à y, et donne

$$\left[\frac{q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}-\frac{(q)}{\sqrt{[1+(p)^2+(q)^2]}}\right]dx;$$

les quantités (p) et (q) désignant les valeurs de p et de q, relatives au commencement de l'intégrale, on aura donc

$$gD\int\!\!\int(h'+z)dx\,dy=3\pi H'_5\left\{\int\left[\frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2}}-\frac{(p)}{\sqrt{[1+(p)^2+(q)^2]}}\right]dy\right.$$
$$\left.+\int\left[\frac{q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}-\frac{(q)}{\sqrt{[1+(p)^2+(q)^2]}}\right]dx\right\}. \qquad \text{(e)}$$

Les limites des intégrales qui entrent dans cette dernière équation, sont déterminées par la section intérieure horizontale du tube; d'ailleurs, les élémens dx et dy de la double intégrale,

$$\int\int (h' + z)\,dx\,dy$$

doivent être supposés positifs dans toute son étendue, pour qu'elle représente le volume du fluide soulevé ; ces élémens devront donc être aussi considérés comme positifs dans les intégrales simples du second membre : or, si l'on suppose que la section du tube soit comprise dans l'angle droit formé par les axes des x et des y, l'élément $\frac{p\,dy}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}$ devra se rapporter à la partie de la courbe concave vers l'axe des y, et l'élément $\frac{(p)\,dy}{\sqrt{[1 + (p)^2 + (q)^2]}}$ à la partie de la courbe convexe vers le même axe. De même, l'élément $\frac{q\,dx}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}$ se rapportera à la partie de la courbe concave vers l'axe des x, et l'élément $\frac{(q)\,dx}{\sqrt{[1 + (p)^2 + (q)^2]}}$ à la partie de la courbe convexe vers le même axe.

Si l'on partage donc la courbe qui sert de base au tube en quatre parties déterminées par les points de contact des deux tangentes extrêmes parallèles à l'axe des x et des deux tangentes extrêmes parallèles à l'axe des y, on pourra supposer que les deux élémens

$$\frac{p\,dy}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}} \quad \text{et} \quad \frac{q\,dx}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}$$

se rapportent au même point de celle des quatre parties de la courbe qui est concave à-la-fois vers l'axe des x et vers l'axe des y : mais, dans toute cette portion de la courbe, le dy et le dx sont de signes différens ; on pourra donc représenter la somme des deux élémens précédens par

$$-\left[\frac{p\,dy}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}} - \frac{q\,dx}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}\right],$$

les différentielles dy et dx étant celles de la section, et dx étant supposé toujours positif.

De même, on pourra faire coïncider les deux élémens

$$\frac{-(p)\,dy}{\sqrt{[1 + (p)^2 + (q^2)]}} \quad \text{et} \quad \frac{-(q)\,dx}{\sqrt{[1 + (p)^2 + (q)^2]}}$$

dans toute la partie de la courbe convexe à-la-fois vers les deux axes. Les différentielles dx et dy de la section étant encore de signes différens, la somme de ces deux élémens sera

$$\left[\frac{(p)\,dy}{\sqrt{[1+(p)^2+(q)^2]}} - \frac{(q)\,dx}{\sqrt{[1+(p)^2+(q)^2]}}\right].$$

En supposant encore que les différentielles dx et dy appartiennent au contour de la base du tube, et que dx reste toujours positif, on pourra faire coïncider les deux élémens

$$\frac{p\,dy}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \text{ et } \frac{-(q)\,dx}{\sqrt{[1+(p)^2+(q)^2]}}$$

dans la partie de la courbe concave vers l'axe des y, et convexe vers l'axe des x; dx et dy seront alors de mêmes signes, en les considérant comme relatifs à la courbe, et la somme des deux élémens précédens sera

$$\left[\frac{p\,dy}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} - \frac{(q)\,dx}{\sqrt{[1+(p)^2+(q)^2]}}\right].$$

Enfin, si l'on suppose que les élémens

$$\frac{q\,dx}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \text{ et } \frac{-(p)\,dy}{\sqrt{[1+(p)^2+(q)^2]}}$$

se rapportent aux mêmes points de la portion de la courbe concave vers l'axe des x et convexe vers l'axe des y, la somme des deux élémens sera

$$-\left[\frac{(p)\,dy}{\sqrt{[1+(p)^2+(q)^2]}} - \frac{q\cdot dx}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}\right].$$

Or, à chaque point de la section intérieure du tube, il ne correspond jamais que deux des quatre élémens considérés; on peut donc représenter leur somme par

$$\pm\left[\frac{p\,dy - q\,dx}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}\right].$$

Le signe $+$ ayant lieu dans la partie de la courbe convexe vers l'axe des x, et le signe $-$ ayant lieu dans la partie concave. Cette expression devra s'étendre alors au contour entier de la section du tube, et les différentielles dy et dx seront celles de cette section.

L'équation (e) deviendra ainsi,

$$gDV = \pm 3\pi H'_5 \int \frac{p\,dy - q\,dx}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}, \qquad \text{(f)}$$

en appelant V le volume du fluide soulevé, c'est-à-dire, la valeur totale de l'intégrale

$$\int\int (h' + z)\,dx\,dy.$$

Maintenant, si l'on désigne par ϖ l'angle que le plan tangent à la surface du fluide fait avec les parois du tube supposé vertical, on aura en général,

$$\cos.\,\varpi = \frac{\sqrt{(p^2 + q^2)}}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}.$$

Si, par le point de contact, on fait passer un plan parallèle à celui des xy, et qu'on désigne par dx et dy les différentielles des coordonnées de la courbe d'intersection, par ds, la différentielle de l'arc de cette courbe, on aura

$$p\,dx + q\,dy = 0,$$

et

$$p = \pm \frac{dy}{ds} \sqrt{(p^2 + q^2)} \quad \text{et} \quad q = \mp \frac{dx}{ds} \sqrt{(p^2 + q^2)};$$

par conséquent,

$$\sqrt{(p^2 + q^2)} = \pm \frac{p\,dy - q\,dx}{ds},$$

et

$$\cos.\,\varpi = \pm \frac{p\,dy - q\,dx}{ds.\sqrt{(1 + (p^2 + q^2)}}.$$

Si l'on suppose que l'angle ϖ se rapporte aux points de la surface fluide, situés à l'extrémité de la sphère d'activité sensible du tube, ds représentera la différentielle de l'arc de sa base, et l'équation (f) deviendra

$$gDV = 3\pi H'_5 \int \cos.\,\varpi\,ds:$$

or, nous avons fait voir n.° [7.], que l'action d'un tube sur une tranche infiniment mince du fluide qu'il contient, est indépendante de la courbure du tube; l'angle des plans tangens extrêmes de la surface fluide et des parois du tube supposé vertical, doit donc être constant, tant que la nature du tube et celle du fluide ne changent pas; l'équation précédente devient donc

$$gDV = 3\pi H'_5 \cos.\varpi . c,$$

c étant le contour entier de la section intérieure horizontale du tube.

Cette équation confirme le résultat obtenu dans le n.° [7.]. En comparant les deux valeurs de gDV, on a

$$H'_5 \cos.\varpi = 2H_5 - H'_5;$$

partant,

$$H_5 = H'_5 \cos.^2 \tfrac{1}{2}\varpi.$$

Cette équation fournit la relation suivante entre les intensités d'attractions du tube sur le liquide, et de ce dernier sur lui-même.

L'intensité de l'attraction du tube sur le liquide est égale à l'intensité de l'attraction du liquide sur lui-même, multipliée par le carré du cosinus de la moitié de l'angle constant formé par la partie inférieure des parois du tube supposé vertical, avec le plan tangent à la surface du fluide à l'extrémité de la sphère d'activité sensible du tube.

Si l'intensité d'attraction du tube sur le liquide égale celle de l'attraction de ce dernier sur lui-même, c'est-à-dire, si $H_5 = H'_5$, l'angle ϖ est nul, c'est-à-dire, que le fluide est tangent à la surface des parois.

Si $H_5 = \frac{1}{2}H'_5$, ϖ est égal à 100°, ce qu'il était facile de prévoir d'avance, puisque, dans ce cas, il n'y a ni élévation ni dépression. Entre ces deux limites, l'angle ϖ est aigu. Si $H_5 = 0$, ϖ est égal à 200°. Pour toutes les valeurs de H_5 comprises entre 0 et $\frac{H'_5}{2}$, l'angle ϖ est obtus.

Lorsque H_5 est plus grand que H'_5, la formule précédente devient illusoire, puisqu'elle donne pour cos. $\frac{1}{2}\varpi$ une quantité plus grande que l'unité ; mais, dans ce cas, le tube soulève une colonne fluide qui l'enveloppe intérieurement, et qui peut être considérée comme un nouveau tube dans lequel $H_5 = H'_5$, et par conséquent dans lequel l'angle ϖ est nul. Ce cas paraît être celui de l'eau et des huiles dans les tubes de verre.

[13.] L'équation (c) du n.° [10.] est aux différences partielles du second ordre. On déterminerait les fonctions arbitraires introduites par son intégration, par l'équation de la surface des parois du tube dans lequel le fluide est renfermé, et par l'inclinaison des plans extrêmes de la surface du fluide; inclinaison qui doit être la même pour tous ces plans, lorsque les parois sont verticales. L'intégration de cette équation se refuse à toutes les méthodes connues, lorsqu'on lui conserve toute sa généralité; dans quelques cas particuliers que nous allons examiner, on en peut obtenir l'intégrale sous forme finie, ou par une approximation très-convergente.

1.° Supposons que le tube soit cylindrique à base circulaire, et que son axe soit vertical, la surface du fluide est alors de révolution; dans ce cas, l'équation dont il s'agit peut être ramenée à une équation aux différences ordinaires, susceptible d'une intégration très-approchée.

La surface du fluide étant de révolution, on a entre les coëfficiens différentiels du premier ordre p et q la relation $py = qx$, qui donne, en la différenciant successivement par rapport à x et à y,

$$yr = q + xs \quad \text{et} \quad p + ys = xt.$$

Or, il suffit de connaître la courbe génératrice de la surface, c'est-à-dire, son intersection par un plan quelconque passant par l'axe des z; par exemple, par le plan des xz.

On a alors $y = 0$, et les relations précédentes nous donnent

$$q = 0 . s = 0 \quad \text{et} \quad t = \frac{p}{x}.$$

L'équation (c) devient donc

$$\frac{r + \frac{p}{x}(1 + p^2)}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} - 2\alpha z = \frac{2}{b},$$

et remplaçant p et r par

$$\frac{dz}{dx} \text{ et } \frac{d^2 z}{dx^2},$$

et multipliant par $x\,dx$,

$$\frac{x\,\frac{d^2 z}{dx} + dz\left(1 + \frac{dz^2}{dx^2}\right)}{\left(1 + \frac{dz^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}} - 2\alpha z\,dx = \frac{2x\,dx}{b};$$

intégrant, on aura

$$\frac{x\,\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left(1 + \frac{dz^2}{dx^2}\right)}} - 2\alpha \int z\,x\,dx = \frac{x^2}{b} + \text{constante.} \qquad (g)$$

Supposant que l'intégrale $\int z\,x\,dx$ commence avec z, la constante sera nulle, puisqu'à l'origine des coordonnées, la tangente se confond avec l'axe des x.

Si α était nul, l'équation précédente se réduirait à

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x}{\sqrt{(b^2 - x^2)}},$$

ce qui donne

$$z = b - \sqrt{(b^2 - x^2)},$$

c'est-à-dire que le liquide serait terminé par une surface sphérique dont le centre serait placé sur l'axe des z. En substituant cette première valeur de z très-approchée, lorsque le tube est d'un diamètre fort petit, dans l'intégrale $\int z\,x\,dx$, et intégrant de nouveau l'équation (g), on aurait une valeur plus approchée encore pour z.

En se contentant de la première approximation à laquelle nous venons de parvenir, il est facile de déterminer la hauteur moyenne du liquide soulevé ou déprimé dans un tube, lorsqu'on connaît celle du point le plus bas ou le plus élevé de la surface fluide, hauteur que nous avons désignée par h'.

En effet, le volume soulevé ou déprimé se compose du volume d'un cylindre qui aurait pour base la base du tube, et dont la hauteur serait h', et de la portion du liquide terminée latéralement par les parois du tube, inférieurement par le plan tangent horizontal de la surface, et supérieurement par la zone sphérique qui forme la surface fluide; cette zone est évidemment la base d'un secteur, dont l'angle est égal au double de celui que nous avons désigné par ϖ : le volume total soulevé sera donc représenté par

$$\pi r^2 \left[h' + \tfrac{1}{3} r \frac{(1 - \sin. \varpi)(1 + 2 \sin. \varpi)}{\cos.^3 \varpi} \right];$$

en appelant r le rayon de la base du tube. Le même volume est exprimé par $\pi r^2 h$; en représentant par h la hauteur moyenne du fluide, on a donc

$$h = h' + \tfrac{1}{3} r \frac{(1 - \sin. \varpi)(1 + 2 \sin. \varpi)}{\cos.^3 \varpi}.$$

Ainsi, pour avoir les hauteurs moyennes, il faut ajouter aux hauteurs des points où le plan tangent est horizontal, le tiers du rayon multiplié par

$$\frac{(1 - \sin. \varpi)(1 + 2 \sin. \varpi)}{\cos.^3 \varpi};$$

facteur qui se réduit à l'unité, lorsque l'angle ϖ est nul, et qui devient négatif, lorsque l'élévation se change en abaissement, puisqu'alors l'angle ϖ est obtus.

[14.] 2.° Prenons pour second exemple le cas d'un plan vertical plongeant dans un fluide. Le liquide soulevé ou déprimé est alors terminé par un cylindre dont les arêtes sont horizontales. Déterminons la section de ce cylindre par un plan perpendiculaire à ses arêtes.

L'équation (c) devient alors, en appelant x les coordonnées horizontales,

et

et z les coordonnées verticales,

$$\frac{\frac{d^2 z}{dx^2}}{\left(1+\frac{dz^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}} - 2\alpha z = 0,$$

en observant que la constante b est nulle dans le cas que nous considérons; multipliant cette équation par dz, et l'intégrant, on aura

$$-\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{dz^2}{dx^2}\right)}} = \alpha z^2 + \text{constante}.$$

Lorsque $z = 0$, $\frac{dz}{dx}$ est nul; on a donc constante $= -1$. L'équation précédente deviendra donc

$$dx = \frac{(1-\alpha z^2)\,dz}{z\sqrt{(\alpha)}\,\sqrt{(2-\alpha z^2)}}.$$

Nous avons toujours supposé que l'origine des coordonnées était au point le plus bas de la surface du fluide soulevé. Il est plus convenable, dans le cas qui nous occupe, de la placer sur la droite d'intersection de la surface de niveau du fluide et du plan qui plonge dans ce fluide. Il suffira, pour cela, de changer le signe de dx, et l'on aura

$$dx = \frac{(\alpha z^2 - 1)\,dz}{z\sqrt{(\alpha)}\,\sqrt{(2-\alpha z^2)}};$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$x = \text{const.} - \frac{2\sqrt{(1-\frac{1}{2}\alpha z^2)}}{\sqrt{(2\alpha)}} - \frac{1}{2\sqrt{(2\alpha)}}\log.\left[\frac{1-\sqrt{(1-\frac{1}{2}\alpha z^2)}}{1+\sqrt{(1-\frac{1}{2}\alpha z^2)}}\right].$$

Si l'on désigne par q la valeur de z correspondante à $x = 0$, on aura

$$\text{constante} = \frac{2\sqrt{(1-\frac{1}{2}\alpha q^2)}}{\sqrt{(2\alpha)}} + \frac{1}{2\sqrt{(2\alpha)}}\log.\left[\frac{1-\sqrt{(1-\frac{1}{2}\alpha q^2)}}{1+\sqrt{(1-\frac{1}{2}\alpha q^2)}}\right];$$

et par conséquent

$$x = \frac{2\sqrt{(1-\frac{1}{2}\alpha q^2)}}{\sqrt{(2\alpha)}} - \frac{2\sqrt{(1-\frac{1}{2}\alpha z^2)}}{\sqrt{(2\alpha)}}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{(2\alpha)}}\log.\left\{\frac{[1-\sqrt{(1-\frac{1}{2}\alpha q^2)}]\,[1+\sqrt{(1-\frac{1}{2}\alpha z^2)}]}{[1+\sqrt{(1-\frac{1}{2}\alpha q^2)}]\,[1-\sqrt{(1-\frac{1}{2}\alpha z^2)}]}\right\}.$$

La valeur de q sera d'ailleurs donnée par l'équation

$$-\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{dz^2}{dx^2}\right)}} = \alpha z^2 - 1.$$

En effet, lorsque $z = q$ la tangente à la courbe fait avec l'axe des z l'angle que nous avons désigné par ϖ; on a donc

$$\alpha q^2 - 1 = -\sin.\varpi \quad \text{et} \quad q = \sqrt{\left(\frac{1-\sin.\varpi}{\alpha}\right)}.$$

Il est nécessaire d'observer que le point pour lequel z est égal à q, n'est pas en contact avec le plan qui plonge dans le fluide; mais qu'il en est à une distance égale à celle où cesse l'attraction exercée par ce plan.

La valeur que nous venons de trouver pour x nous fait voir qu'il croît à mesure que z diminue, et qu'il devient infini lorsque z est nul. On en conclut donc que le plan horizontal du niveau du fluide dans le vase est asymptote de la surface du liquide soulevé. On obtiendrait des résultats analogues, si l'on supposait que le liquide s'abaissât par l'action du plan.

[15.] 3.° Examinons enfin le cas de deux plans verticaux parallèles plongeant dans un même fluide, le liquide peut alors ou s'élever près des deux plans, ou s'abaisser, ou enfin s'élever près de l'un, et s'abaisser près de l'autre. Nous allons discuter chacune de ces circonstances.

Supposons d'abord que le liquide s'élève vers chacun des plans; le liquide soulevé sera encore terminé par une surface cylindrique dont les arêtes seront horizontales. Déterminons la section de cette surface par un plan perpendiculaire à ses arêtes, et plaçons maintenant l'origine des coordonnées au point de cette courbe pour lequel la tangente est horizontale. Désignons par R le rayon de courbure de la section à ce point, on aura, en appelant toujours x les coordonnées horizontales, et

z les coordonnées verticales,

$$\frac{\frac{d^2 z}{dx^2}}{\left(1+\frac{dz^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}} - 2\alpha z = \frac{1}{R}.$$

Multipliant par dz, et intégrant, en observant que $\frac{dz}{dx}$ est nul lorsque z est égal à zéro, on aura

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{dz^2}{dx^2}\right)}} + \alpha z^2 = \frac{R-z}{R};$$

Si l'on désigne par q' la valeur de z correspondante au point de la courbe situé à la distance du plan à laquelle l'attraction cesse d'être sensible, l'équation précédente donnera, en représentant par ϖ l'angle formé par le plan et par la tangente à la courbe au point que nous considérons,

$$q' = -\frac{1}{2\alpha R} + \sqrt{\left(\frac{1-\sin.\varpi}{\alpha} + \frac{1}{4\alpha^2 R^2}\right)}.$$

Il est d'ailleurs évident que $\frac{1}{2\alpha R}$ est égal à la hauteur de l'origine des coordonnées au-dessus du niveau du fluide dans le vase. En appelant cette hauteur h, on a

$$q' + h = \sqrt{\left(\frac{1-\sin.\varpi}{\alpha} + \frac{1}{4\alpha^2 R^2}\right)};$$

$q' + h$ étant toujours plus grand que q, il en résulte que, quelle que soit la distance des deux plans, le fluide mouille toujours chacun d'eux à une plus grande hauteur intérieurement qu'extérieurement. En appliquant les mêmes calculs au cas où le fluide s'abaisserait vers chacun des deux plans, on trouverait, au contraire, que la hauteur à laquelle chacun des deux plans est mouillé extérieurement est plus grande que celle à laquelle chacun d'eux est mouillé intérieurement ; en sorte que la dépression extérieure est moindre que la dépression intérieure.

Examinons, en dernier lieu, le cas où le fluide serait déprimé près du premier plan et soulevé près du second. La section de la surface du fluide compris entre eux, aura un point d'inflexion, en supposant d'abord les deux plans à une assez grande distance l'un de l'autre. Il est évident que ce point sera au niveau de la surface du fluide indéfini dans lequel on suppose que les plans sont plongés, puisque le rayon de courbure y sera infini. Cela posé, représentons par z la hauteur au-dessus du niveau d'un point quelconque de la section de la surface du fluide intérieur, et par x la distance de ce point au premier plan : on aura

$$\frac{\frac{d^2 z}{dx^2}}{\left(1+\frac{dz^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = 2\alpha z;$$

multipliant par dz, et intégrant, il vient,

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{dz^2}{dx^2}\right)}} = \text{const.} - \alpha z^2.$$

Nommons ϖ l'angle aigu que la tangente au point de la section placé à la limite de la sphère d'activité sensible du premier plan, fait avec ce plan, et représentons par q' la dépression de ce point au-dessous du niveau, on aura

$$\text{const.} = \sin.\varpi + \alpha q'^2.$$

et par conséquent,

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{dz^2}{dx^2}\right)}} = \sin.\varpi + \alpha q^2 - \alpha z^2.$$

Soit ϖ' l'angle aigu que fait avec le second plan la tangente au point de la section situé à la limite de la sphère d'activité sensible de ce plan, et q'_1 l'élévation de ce point au-dessus du niveau, on aura

$$\sin.\varpi' + \alpha q'^2_1 = \sin.\varpi + \alpha q'^2.$$

Il est d'ailleurs évident que $\sin.\varpi + \alpha q'^2$ représentant le sinus de l'angle de la verticale fait avec la tangente à la section au point d'inflexion, cet angle ne peut pas être droit, car l'équation de la section deviendrait alors

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{dz^2}{dx^2}\right)}} = 1 - \alpha z^2,$$

équation qui est la même que celle du n.° précédent, et qui donnerait pour x une valeur infinie, lorsqu'on y ferait z égal à zéro ; ce qui ne peut pas avoir lieu tant qu'on suppose qu'il y a inflexion dans la surface du fluide intérieur.

$$\sin.\varpi + \alpha q'^2 \quad \text{et} \quad \sin.\varpi' + \alpha q'^2_1$$

sont donc tous deux moindres que l'unité. Si l'on appelle q la dépression du fluide à l'extérieur du premier plan, et q_1 son élévation à l'extérieur du second, on aura, en vertu de ce que nous avons démontré pour le cas d'un seul plan plongeant dans un fluide,

$$\alpha q^2 + \sin.\varpi = \alpha q_1^2 + \sin.\varpi' = 1;$$

et par conséquent,

$$q > q' \quad \text{et} \quad q_1 > q'_1;$$

c'est-à-dire que, lorsqu'il y a inflexion dans la surface du fluide compris entre deux plans verticaux parallèles plongeant dans un même fluide, le fluide est plus déprimé à l'extérieur qu'à l'intérieur du plan vers lequel il s'abaisse, et il est soulevé à une plus grande hauteur à l'extérieur qu'à l'intérieur de celui près duquel il s'élève.

Lorsque les angles ϖ et ϖ' sont égaux, il y a toujours inflexion dans la surface du fluide, et le point d'inflexion est à égale distance des deux plans. Le théorème précédent a donc toujours lieu dans ce cas.

Lorsque l'un des angles ϖ et ϖ' est droit, il est nécessaire que les plans soient à une distance infinie l'un de l'autre pour qu'il puisse y avoir inflexion, puisqu'alors

$$\alpha q'^2 + \sin.\varpi \quad \text{et} \quad \alpha q'^2_1 + \sin.\varpi'$$

sont égaux à l'unité : donc, pour toutes les distances finies des deux plans, le fluide intérieur s'élevera ou s'abaissera près de chacun des plans, selon que ce sera l'angle ϖ ou l'angle ϖ' qui sera droit.

Supposons enfin ϖ et ϖ' inégaux et tous les deux aigus, et soit ϖ le plus grand des deux; il est évident que la ligne d'inflexion de la surface intérieure se rapprochera de plus en plus du premier plan, à mesure que la distance des deux plans diminuera : or, tant que cette ligne d'inflexion existe, q', diminue à mesure que les deux plans se rapprochent; il existe donc une distance pour laquelle on a

$$q'_{,}{}^{2} = \sin.\varpi - \sin.\varpi',$$

et par conséquent,

$$q' = 0;$$

c'est-à-dire que la ligne d'inflexion coïncide avec le premier plan.

En continuant à rapprocher les deux plans, l'inflexion cessera d'avoir lieu, et le fluide s'élevera près de chacun d'eux; mais toujours à une plus grande hauteur vers le second que vers le premier. Il est facile de déterminer la distance des deux plans pour laquelle l'élévation du fluide à l'intérieur du premier plan sera égale à sa dépression à l'extérieur du même plan : dans ce cas,

$$\alpha q'^{2} = \alpha q^{2} = 1 - \sin.\varpi;$$

l'équation différentielle de la section devient

$$dx = \frac{(1 - \alpha z^{2})\, dz}{z\sqrt{(\alpha)}\,\sqrt{(2 - \alpha z^{2})}};$$

et donne, en intégrant,

$$x = \text{cons.} + \frac{2\sqrt{(1 - \frac{1}{2}\alpha z^{2})}}{\sqrt{(2\alpha)}} + \frac{1}{2\sqrt{(2\alpha)}}\ \text{log. hyp.} \left[\frac{1 - \sqrt{(1 - \frac{1}{2}\alpha z^{2})}}{1 + \sqrt{(1 - \frac{1}{2}\alpha z^{2})}}\right].$$

Lorsque x est nul, z est égal à q', et par conséquent αz^{2} est égal à

$$1 - \sin.\varpi.$$

Si l'on nomme ensuite l la distance mutuelle des plans dans le cas que nous considérons, on aura z égal à q', lorsqu'on fera x égal à l; on aura donc alors

$$\alpha z^2 = 1 - \sin.\varpi,$$

représentant de plus par θ et θ' les complémens des angles ϖ et ϖ', on aura enfin

$$l = \frac{1}{\sqrt{(2\alpha)}} \text{ log. hyp. } \left(\frac{\text{tang. } \frac{1}{4}\theta'}{\text{tang. } \frac{1}{4}\theta}\right) - \frac{2}{\sqrt{(2\alpha)}} \left(\cos. \tfrac{1}{2}\theta - \cos. \tfrac{1}{2}\theta'\right).$$

Pour cette même distance, on a évidemment

$$q'_1 = q_1;$$

c'est-à-dire, qu'à cet instant l'élévation intérieure, par rapport au second plan, est égale à celle qui a lieu extérieurement.

Pour toutes les distances des deux plans plus petites que l, le fluide sera plus élevé à l'intérieur du premier plan, qu'il ne sera déprimé à l'extérieur de ce même plan.

[16.] Il est facile de conclure des résultats obtenus dans le numéro précédent, l'explication des mouvemens à l'aide desquels deux petits plans qui nagent à la surface d'un fluide, à une petite distance l'un de l'autre, s'approchent ou s'éloignent suivant certaines circonstances, en déterminant directement les pressions que supporte, tant à l'intérieur qu'à l'extérieur, chaque élément des deux plans; on trouve que, dans toute l'étendue dans laquelle ils sont mouillés des deux côtés, les pressions qu'ils éprouvent se détruisent; et que, dans la partie où ils ne sont mouillés que d'un côté, elles sont inégales, de manière que l'excès de pression qui en résulte pour chaque élément, est égal au poids d'une colonne liquide qui aurait pour base cet élément, et dont la hauteur serait l'élévation de ce même élément au-dessus du niveau du fluide dans le vase où les plans sont plongés. Prenant la somme de toutes ces pressions, on est facilement conduit au théorème suivant.

« Quelles que soient les substances dont les plans sont composés, la » tendance de chacun d'eux vers l'autre est égale au poids d'un prisme

» fluide, dont la hauteur est la différence des élévations au-dessus du
» niveau des points extrêmes du contact du liquide intérieur et exté-
» rieur avec ce plan, dont la profondeur est la demi-somme de ces
» mêmes élévations, et dont la largeur est celle des plans dans le sens
» horizontal. On doit supposer l'élévation négative, lorsqu'elle se change
» en dépression, et observer que, si le produit des trois dimensions pré-
» cédentes est négatif, la tendance devient répulsion. »

[17.] Les principes que nous avons exposés suffisent pour soumettre au calcul les différens phénomènes qui dépendent de l'attraction moléculaire. L'ouvrage dans lequel M. *Laplace* a déduit d'une analyse rigoureuse l'explication et les lois de ces phénomènes, renferme, en outre, la solution de plusieurs questions importantes qui dépendent, par leur nature, de la cause générale des effets capillaires. La conformité remarquable des résultats de l'observation et de ceux auxquels le calcul conduit, assure d'une manière incontestable la légitimité de l'hypothèse qui sert de fondement à cette théorie.

FIN.

UNIVERSITÉ IMPÉRIALE.

ACADÉMIE DE PARIS.

PROGRAMME

DE LA THÈSE D'ASTRONOMIE,

Qui doit être soutenue, le 18 Décembre 1811,

DEVANT LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS,

PAR ALEXIS PETIT,

Répétiteur à l'École Impériale Polytechnique.

On a pris pour sujet la Théorie des réfractions astronomiques.

De la Réfraction en géneral.

1. En supposant que les différens mouvemens de la lumière soient le résultat de l'action des forces attractives ou répulsives, le principe de la moindre action doit être

vérifié dans toutes les hypothèses de réfraction; on conclut des relations au moyen desquelles on peut déterminer la loi des vîtesses de la lumière, lorsque l'on connaît celles des directions des rayons lumineux, et réciproquement.

2. Applications aux cas de la réfraction ordinaire, et de la réfraction extraordinaire dans les substances cristallisées.

3 Examen particulier du cas de la réfraction ordinaire. Loi à laquelle elle est soumise. Démonstration de cette loi, par le principe de la conservation des forces vives. Discussion des différentes circonstances que présente le mouvement de la lumière dans des milieux dont la puissance réfractive varie d'une manière quelconque. Détermination de l'angle correspondant à la réfraction totale. Explication du mirage.

4. Moyen de déterminer la puissance réfractive des corps diaphanes et des corps opaques.

Des Réfractions astronomiques.

5. Application des résultats précédens aux attractions successives que les différentes couches de l'atmosphère exercent sur les molécules lumineuses qui les traversent. Équation différentielle du mouvement de la lumière.

6. *Intégration de cette équation.* Pour l'effectuer généralement, il faut connaître la loi suivant laquelle la densité des couches atmosphériques varie avec leur hauteur. Les deux limites de cette loi sont une densité constante, et une densité décroissante en progression géométrique, pour des hau-

teurs en progression arithmétique. Examen du premier cas. La réfraction qui en résulte est beaucoup trop faible.

7. La seconde hypothèse suppose une température uniforme dans toute l'étendue de l'atmosphère. Intégration de l'équation différentielle dans cette supposition. Elle donne une réfraction trop forte.

8. Intégration de l'équation différentielle, dans l'hypothèse où la densité de l'air décroîtrait en progression arithmétique pour des couches d'égale épaisseur. Cette supposition donne une réfraction trop petite, mais plus rapprochée que celle qui résulte d'une densité constante. La vraie constitution de l'atmosphère est donc intermédiaire entre cette dernière supposition et celle d'une température uniforme.

9. Intégration de l'équation différentielle dans une hypothèse composée des deux précédentes. Les formules qui en résultent pour les réfractions et le décroissement de chaleur de l'air, s'accordent avec les phénomènes observés.

10. Formule qui donne la réfraction pour toutes les hauteurs qui surpassent 12°. Discussion des Élémens qui entrent dans cette formule.

11. Examen de l'influence que peut avoir l'humidité de l'air sur les réfractions.

12. Des réfractions terrestres. Détermination des formules qui les expriment.

Vu par le Doyen de la Faculté des Sciences.

S. F. LACROIX.

De l'Imprimerie de Mme Veuve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Grands-Augustins, n° 57.