

THÉORIE

DE

L'ÉLECTRICITÉ

EXPOSÉ
DES
PHÉNOMÈNES ÉLECTRIQUES
ET MAGNÉTIQUES

FONDÉ UNIQUEMENT
SUR L'EXPÉRIENCE ET LE RAISONNEMENT

I
VAS

PAR

A. VASCHY

Ingénieur des Télégraphes
Examineur d'admission à l'École Polytechnique.

PARIS

LIBRAIRIE POLYTECHNIQUE, BAUDRY ET C^{ie}, ÉDITEURS

15, RUE DES SAINTS-PÈRES, 15
MAISON A LIÈGE, 21, RUE DE LA RÉGENCE

—
1896
Tous droits réservés.

INTRODUCTION

Le but de cet ouvrage est de présenter un exposé des phénomènes électriques et magnétiques fondé uniquement sur l'expérience et le raisonnement, en le dégageant entièrement des diverses hypothèses introduites jusqu'ici et dont quelques-unes ont fini par passer pour des principes évidents :

Les principes qui seront invoqués sont ceux que l'on admet en mécanique et dans toute la physique ; il n'y a pas lieu d'en créer spécialement pour l'électricité.

Forces électriques et magnétiques. — Il n'existe aucune raison pour attribuer aux forces électriques et magnétiques des propriétés différentes de celles des autres forces. On les mesure absolument comme celles-ci, soit par l'accélération qu'elles impriment à un corps dont la masse est connue (méthode des oscillations), soit par la grandeur et la direction d'autres forces susceptibles de leur faire équilibre (méthode statique). C'est ainsi qu'ont été établies les lois expérimentales de Coulomb (Electricité et Magnétisme), d'Amère (Electro-dynamique), de Biot et Savart (Electro-magnétisme). Quant à la *nature intime* des forces électriques, si elle nous est inconnue, on peut en dire autant de toutes les forces en général.

L'expérience nous montre les forces sous deux aspects différents. On sait en effet mesurer :

Soit la force f , dite résultante, qui s'exerce sur la *masse* d'un corps A et imprime à son centre de gravité une accélération proportionnelle à f ;

Soit les forces, dites superficielles, exercées sur les divers éléments de la *surface* du corps A par les corps qui sont en contact avec lui (pression d'un gaz ou d'un fluide, pression d'un poids reposant sur la face supérieure de A, etc.).

On a imaginé en outre des forces s'exerçant à distance. C'est là une notion suggérée, non par l'expérience, mais par l'analyse mathématique des phénomènes, qui nous permet souvent de considérer la force f appliquée à un corps comme la résultante de diverses forces élémentaires obéissant à des lois très simples. Ainsi Coulomb a admis que les actions électriques résultent de forces élémentaires exercées par des masses électriques, la grandeur de ces forces étant proportionnelle aux masses et à l'inverse du carré des distances. Or, on sait que des lois analogues d'actions en raison inverse du carré de la distance s'appliqueraient également bien à tous les phénomènes physiques, car elles résultent d'une simple identité mathématique (voir ch. III); mais elles n'ont par cela même aucun rapport avec ce que l'on appelle des lois physiques. L'idée d'actions s'exerçant réellement à distance doit donc être écartée en Électricité, comme elle l'est dans les autres branches de la Physique.

L'étude des forces électriques et magnétiques (ch. IV et IX) sera fondée sur le principe expérimental de la théorie de l'Elasticité des corps. D'après ce principe, l'action (électrique ou autre) qu'un corps A subit de la part des corps extérieurs s'exerce *au contact*, c'est-à-dire sur les divers éléments de sa surface S. La force ps appliquée à un élément s (infiniment petit) de S peut avoir une orientation quelconque; c'est une tension ou une pression, suivant qu'elle est dirigée vers l'extérieur ou vers l'intérieur de A. La connaissance d'un fait *expérimental* très simple nous permettra de calculer l'expression de cette force (§ 24).

Energies électrique et magnétique. — Nous connaissons diverses formes d'énergie : force vive, énergie élastique, chaleur, énergie chimique, etc. Ces énergies sont *localisées* dans les divers corps, et l'on sait calculer dans certains cas la part qui se trouve dans

un élément de volume quelconque. Tout nous porte à croire que les énergies de formes nouvelles que nous pourrions découvrir sont également localisées, c'est-à-dire réparties dans le volume des divers corps; nous ne les concevons pas autrement.

Ces énergies, quoique ayant des formes nettement différentes, ont une mesure commune, c'est-à-dire sont comparables entre elles et se transforment incessamment les unes dans les autres, conformément au *principe de la conservation de l'énergie*, qui n'a jamais été mis en défaut et que l'on admet comme un des mieux établis par l'expérience.

De la notion de localisation de l'énergie résulte celle de sa transmission de proche en proche, par opposition à l'idée d'une transmission instantanée à distance. Ainsi un corps reçoit de l'énergie des corps extérieurs *par sa surface* et leur en transmet de même. L'échange d'énergie entre deux corps contigus A_1 et A_2 peut du reste se produire de diverses manières. Par exemple de la chaleur peut être transmise à travers leur surface de séparation Σ soit par conductibilité, soit par rayonnement. De même si dans A_1 , on vient à créer un champ électrique ou magnétique qui se propage à l'intérieur de A_2 , on conçoit qu'il y aura par là même échange d'énergie entre ces corps, sans savoir encore sous quelle forme.

Un autre mode fréquent d'échange d'énergie est la production d'un travail. Considérons, par exemple, un déplacement de la surface de séparation Σ , à laquelle sont appliquées les forces égales et opposées que A_1 et A_2 exercent l'un sur l'autre; ces forces engendrent des travaux $\delta\mathcal{C}_1$ et $\delta\mathcal{C}_2$ égaux et de signes contraires. Si les systèmes A_1 et A_2 ne subissent aucun autre échange d'énergie, les accroissements δW_1 et δW_2 de leurs énergies dans le même temps sont respectivement égaux et de signe contraire à leurs travaux $\delta\mathcal{C}_1$ et $\delta\mathcal{C}_2$ en vertu du principe de la conservation de l'énergie :

$$\delta\mathcal{C}_1 = -\delta W_1 = \delta W_2 = -\delta\mathcal{C}_2$$

Le travail n'est pas de l'énergie; c'est l'*équivalent* de l'énergie transmise d'un corps à l'autre. On en pourrait faire abstraction et

ne voir, dans le phénomène précédent, qu'une cession d'énergie — δW_1 faite par A_1 à A_2 à travers la surface Σ .

Ceci posé, considérons le système A des corps situés dans un champ électrique (ce champ ayant forcément une étendue *limitée*, contrairement aux idées de la théorie des fluides). Si ces corps viennent à se déplacer sous l'action des forces électriques, celles-ci produiront un certain travail $\delta \mathcal{E}$ (que nous supposerons utilisé à l'extérieur pour soulever un poids P, par exemple, d'une hauteur H : $\delta \mathcal{E} = P H$). En supposant l'expérience disposée de telle sorte : 1° qu'il n'y ait pas, entre le système A et les corps extérieurs, d'autre échange d'énergie que ce travail $\delta \mathcal{E}$; 2° qu'il n'y ait à l'intérieur de A aucun développement de force vive, ni de chaleur, ni de réactions chimiques, — le travail ($-\delta \mathcal{E}$) exécuté par les forces extérieures sur le système A aura pour effet d'accroître l'énergie W de celui-ci de la quantité δW ($= -\delta \mathcal{E}$) *sous une nouvelle forme* dite électrique. La formule :

$$\delta W_e = -\delta \mathcal{E}$$

servira précisément à définir l'accroissement de l'énergie électrique W_e du champ considéré. L'expression des forces électriques étant connue, on saura calculer leur travail $\delta \mathcal{E}$ et, par suite, l'expression de l'énergie électrique W_e (§ 30).

La même méthode est évidemment applicable au calcul de l'énergie magnétique (§ 108).

Principe de l'égalité de l'action et de la réaction. — Ce principe n'est nullement lié à l'hypothèse d'actions à distance. La suppression de cette hypothèse permet au contraire de définir les conditions dans lesquelles l'application du principe en question est légitime. En voici un exemple.

Supposons qu'un système de deux corps électrisés A et B se transporte, *sans déplacement relatif*, dans un milieu fluide homogène indéfini (dans l'air, par exemple). L'état du champ électrique créé par ces corps et entraîné avec eux ne variant point, son énergie électrique ne varie pas non plus. D'après le principe de la

conservation de l'énergie, les forces électriques appliquées aux deux corps mobiles ont donc dans un intervalle de temps quelconque un travail total nul. Ainsi, quand les deux corps se déplacent comme un système de forme invariable, le travail de leurs réactions mutuelles est nul : d'où il résulte, en vertu d'un théorème de Mécanique bien connu, que *l'ensemble de ces réactions constitue un système de forces en équilibre*. C'est précisément là l'énoncé du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, qui découle, comme on le voit, du principe plus général de la conservation de l'énergie.

Toutefois ce raisonnement n'est légitime que si la vitesse de déplacement des corps A et B est négligeable par rapport à la vitesse de propagation des ondes électro-magnétiques. Le déplacement de chaque corps crée en effet autour de lui une perturbation électrique qui se propage dans tout le champ et s'y éteint très vite, car on sait par l'expérience que le champ électrique atteint avec une extrême rapidité le nouvel état stable correspondant à la nouvelle position des corps. Mais si la vitesse des corps devenait comparable à la vitesse de propagation des perturbations, il est clair que l'état du champ ne pourrait plus être considéré comme stable, et le principe de l'égalité de l'action et de la réaction serait en défaut.

Lois de la distribution électrique et magnétique. — L'état d'un champ électrique, en chaque point (x, y, z) de l'espace qu'il occupe, est caractérisé par la grandeur et la direction de son intensité h en ce point (v. § 8). Les projections X, Y, Z de cette intensité h sur trois axes de coordonnées sont des fonctions de x, y, z et du temps t , que l'on a à déterminer pour connaître à une époque quelconque l'état du champ en ses divers points.

Lorsque cet état est stable (cas de l'électrostatique et des courants permanents), la distribution de l'intensité (X, Y, Z) du champ est régie par deux lois que nous déterminerons *expérimentalement*. L'une de ces lois est l'existence du potentiel électrique, qui se traduit par les relations :

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$$

et qui est équivalente à la condition de stabilité du champ (§ 40, 419). L'autre loi, applicable même à l'état variable du champ, se traduit par l'équation (§ 51) :

$$\frac{\partial i_x}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y} + \frac{\partial i_z}{\partial z} = 0$$

i_x , i_y , i_z étant les composantes d'un vecteur i défini en fonction de l'intensité h et du pouvoir inducteur, ainsi que de la conductibilité du corps situé au point (x, y, z) .

Les lois de la distribution magnétique seront aussi établies expérimentalement dans le cas d'un champ stable.

Quant aux lois de l'état variable d'un champ électro-magnétique, elles pourront se déduire, par une simple application du principe de la conservation de l'énergie, des résultats obtenus antérieurement.

Dans cette étude de la distribution électrique, comme dans celle des forces et de l'énergie, nous ne rencontrerons ni masses électriques mobiles dans les conducteurs, ni forces électromotrices agissant sur elles, ni actions quelconques à distance, etc. Tout repose sur trois notions *expérimentales* précises : intensité du champ électrique, pouvoir inducteur et conductibilité des corps.

Théorie de Maxwell. — Les lois mathématiques des forces, de l'énergie et de la distribution électrique, auxquelles on arrive en suivant la marche indiquée ci-dessus, sont identiques à celles que Maxwell a données comme résultant de sa théorie. Il convient donc d'ajouter quelques mots à ce sujet.

Maxwell ne s'est point affranchi de l'hypothèse des fluides et des actions à distance pour établir la théorie de l'Electrostatique, des courants et du Magnétisme. Mais il a montré comment les formules établies dans cette théorie peuvent s'interpréter conformément aux idées de Faraday sur les actions au contact. On lui doit deux notions très importantes, que ne pouvait suggérer la théorie des actions à distance : celle de la *localisation* de l'énergie et celle des forces électro-magnétiques qui s'exercent en tout point

du champ (comme les forces élastiques). Enfin Maxwell a introduit un nouvel élément, qui lui a permis d'achever le premier une théorie mathématiquement exacte de l'Electricité et du Magnétisme. Cet élément, c'est le *déplacement électrique*, qu'il ne définit point avec précision, mais auquel il attribue, par une intuition remarquable, une propriété (incompressibilité de l'électricité) équivalente à une loi physique dont on peut démontrer l'exactitude expérimentalement (loi du § 51 ci-après).

Après un premier exposé des phénomènes électriques et magnétiques emprunté en grande partie aux anciennes théories, Maxwell développe ses propres idées sur la nature de l'Electricité dans sa *Théorie dynamique de l'Electro-magnétisme* (t. II de son *Traité*). Cette théorie, qui tend à faire rentrer l'Electricité dans le domaine de la Mécanique, est fondée sur les conceptions suivantes :

L'énergie d'un corps se divise en énergie *potentielle* et énergie *cinétique*.

L'énergie *cinétique* T comprend la force vive T_m (ou énergie cinétique mécanique) et l'énergie T_e due aux courants (ou énergie électrocinétique.)

Les forces qui agissent sur un corps sont calculables par la formule de Lagrange généralisée :

$$X' = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial T}{\partial x'} - \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial (T_m + T_e)}{\partial x'} - \frac{\partial (T_m + T_e)}{\partial x} \quad (1)$$

x désignant, par exemple, le déplacement du corps, x' ($= \frac{dx}{dt}$) sa vitesse, et X' la résultante de la force mécanique X'_m et de la force électro-magnétique X'_e . (Une formule analogue s'applique aux forces *électromotrices*.)

Comme la formule de Lagrange proprement dite donne :

$$X'_m = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial T_m}{\partial x'} - \frac{\partial T_m}{\partial x} \quad (2)$$

il résulte de la comparaison de (1) et de (2) :

$$X'_e = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T_e}{\partial x'} - \frac{\partial T_e}{\partial x}$$

Toutefois l'application de cette formule conduirait à des résultats exactement opposés à ceux que l'on doit trouver pour l'expression des forces électro-magnétiques. Aussi Maxwell change le signe de X'_e , ce qui revient à remplacer la formule (4) de la force résultante X' qui agit sur le corps par celle-ci :

$$X' = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial (T_m - T_e)}{\partial x'} - \frac{\partial (T_m - T_e)}{\partial x}$$

La courte explication par laquelle il explique ce changement de signe est manifestement insuffisante (v. t. II, § 573).

Maxwell suppose en outre que l'énergie électro-cinétique T_e , étant assimilable à la force vive $\left(T = \frac{1}{2} \sum mv^2\right)$, est une fonction homogène et du second degré par rapport aux intensités des courants (assimilées à des vitesses).

Grâce à ces hypothèses et à certains résultats d'expériences, il est parvenu à établir entièrement sa théorie de l'Electro-magnétisme.

Malgré l'autorité de Maxwell, nous ne croyons pas qu'il soit possible d'établir une théorie purement mécanique de l'Electricité, à moins d'y introduire des hypothèses. Les diverses tentatives d'explication mécanique des phénomènes électriques, notamment par des mouvements de l'éther, ne paraissent pas de nature à donner des idées plus justes que celles de la théorie des fluides (v. § 9).

Cet ouvrage contient, à quelques modifications près, les leçons que j'ai professées en 1893-94 à l'Ecole supérieure de Télégraphie, et que M. Heina, élève ingénieur, avait bien voulu rédiger.

EXPOSE
DES
PHÉNOMÈNES ÉLECTRIQUES
ET MAGNÉTIQUES

SYSTÈMES ABSOLUS D'UNITÉS ¹

1. Unités géométriques. — La longueur, la surface ou le volume d'un objet bien défini ont des grandeurs intrinsèques bien déterminées. Si l'on compare entre elles deux longueurs, ou deux surfaces, ou deux volumes dont les grandeurs intrinsèques sont bien déterminées — par exemple la longueur du mètre-étalon et celle du yard anglais, ou l'aire d'une toise carrée et celle d'un centiare, ou le volume d'un litre et celui d'un pied cube — on a la notion précise du rapport numérique de ces grandeurs, sans qu'il soit nécessaire de représenter chacune d'elles par un nombre. Si donc on fait intervenir ces grandeurs dans les calculs par des valeurs numériques représentatives, ces valeurs numériques sont assujetties à une condition, savoir que le rapport des nombres représentatifs de deux longueurs (ou de deux surfaces, ou de deux volumes) soit égal au rapport des grandeurs intrinsèques correspondantes. Cette condition laissant indéterminées les valeurs des nombres représentatifs, on peut fixer arbitrairement l'un de ceux-ci ou, ce qui revient au même, fixer arbitrairement la grandeur intrinsèque de la longueur (ou de la surface ou du volume) que l'on veut représenter par le nombre 1.

¹ Depuis quelques années de nombreux auteurs ont exposé la question des unités. En présence des divergences *extrêmes* qui existent entre eux, nous croyons utile d'en dire quelques mots ici pour faire connaître notre manière de comprendre cette question.

Si l'on compare des rectangles dont les côtés ont respectivement pour valeurs numériques a et b , a' et b' , a'' et b'' ,..... en désignant par S , S' , S'' les valeurs numériques de leurs surfaces, on démontre en géométrie que l'on doit avoir :

$$\frac{S}{ab} = \frac{S'}{a'b'} = \frac{S''}{a''b''} = \dots = k$$

La valeur commune k de ces rapports dépend des unités de longueur et de surface, qui ont été choisies arbitrairement. La formule

$$S = k a b$$

servira donc à évaluer l'aire d'un rectangle dont on connaît les côtés a et b .

Mais *la grandeur intrinsèque de l'aire d'un rectangle est parfaitement définie quand on donne les grandeurs intrinsèques des côtés de ce rectangle*. Dans la formule de S , a et b sont donc des éléments essentiels, k n'est qu'un coefficient parasite. On a intérêt, au point de vue de la simplification des formules, à ce que k soit égal à 1. On définira donc l'aire S par la formule :

$$S = a b \tag{1}$$

en s'astreignant évidemment à choisir pour unité de surface l'aire d'un rectangle dont les côtés ont l'unité de longueur ($S = 1$ pour $a = 1$ et $b = 1$).

Pour la même raison on est conduit à définir le volume u d'un parallépipède rectangle ayant pour côtés a , b , c , par la formule :

$$u = a b c \tag{2}$$

déarrassée du coefficient parasite. L'unité de volume sera par là même définie dès que celle de longueur aura été fixée.

L'unité de longueur reste donc une unité arbitraire ou *fondamentale*. Les unités de surface et de volume qui s'en déduisent sont dites unités *dérivées*. La relation établie entre ces unités dérivées et l'unité fondamentale tient à ce que *une surface et un volume ont des grandeurs intrinsèques bien définies quand on connaît les grandeurs intrinsèques de certaines longueurs* (longueurs

des côtés d'un rectangle ou du rayon d'un cercle, ou des côtés d'un parallépipède, etc.).

2. Unités de temps, de vitesse et d'accélération. — D'après la définition du temps donnée en mécanique, le rapport des grandeurs intrinsèques de deux temps bien définis (durées d'écoulement de deux sabliers, par exemple) a une valeur numérique parfaitement déterminée. Les valeurs numériques représentatives de divers temps bien définis sont donc assujetties à la condition unique d'avoir entre elles des rapports déterminés, ce qui laisse arbitraire l'une d'elles. L'unité de temps peut donc être fixée arbitrairement; c'est une unité *fondamentale* comme celle de longueur. Rien du reste ne rattachant la définition d'un temps à celle d'une longueur, il n'y a aucune raison naturelle pour rattacher l'unité de temps à l'unité de longueur comme on l'a fait pour les unités de surface et de volume.

La vitesse v d'un mobile animé d'un mouvement uniforme est définie comme le rapport de la longueur l du chemin parcouru au temps t mis à le parcourir :

$$v = \frac{l}{t} \quad (3)$$

Il n'y a pas lieu d'introduire dans cette formule un coefficient k ($v = k \frac{l}{t}$), qui serait *parasite*, puisque la *grandeur intrinsèque de la vitesse est parfaitement définie quand on connaît les grandeurs intrinsèques de la longueur du chemin parcouru et du temps mis à le parcourir*.

De même l'accélération a d'un mobile animé d'un mouvement uniformément varié est le rapport de l'accroissement v de vitesse du mobile au temps t correspondant à cet accroissement.

Les unités de vitesse et d'accélération sont donc des unités dérivées, bien déterminées quand les unités de longueur et de temps sont fixées :

$$a = \frac{v}{t} \quad (4)$$

3. Unités de masse, de force, de travail, etc. — Une notion nouvelle, ne se rattachant en rien à celles de longueur et de temps

intervient en mécanique ; c'est celle de masse. Deux masses, dont les grandeurs intrinsèques sont bien définies ont entre elles un rapport numérique bien déterminé. Mais on peut choisir arbitrairement la grandeur intrinsèque de la masse à laquelle on veut attribuer la valeur numérique 1. En d'autres termes l'unité de masse est arbitraire ou *fondamentale*.

D'après la définition des forces, les grandeurs intrinsèques des forces qui impriment à des masses m, m', m'' respectivement les accélérations a, a', a'' sont proportionnelles aux produits $m a, m' a', m'' a''$ Comme du reste la connaissance des grandeurs intrinsèques d'une masse et de l'accélération qui lui est imprimée par une force suffit entièrement pour définir la grandeur intrinsèque de cette force, on est conduit à adopter la formule :

$$f = m. a \quad (5)$$

comme définition de la valeur numérique de la force.

Le travail d'une force f , dont le point d'application décrit un chemin de longueur l dans la direction de cette force, est par définition :

$$w = f l \quad (6)$$

De même, par définition, $m v$ est la quantité de mouvement et $\frac{1}{2} m v^2$ la force vive d'une masse m animée d'une vitesse v . De même toutes les autres grandeurs que l'on considère en mécanique sont définies uniquement en fonction des grandeurs précédentes. Leurs unités sont par conséquent des unités dérivées comme celles de force, de travail, de force vive et de quantité de mouvement, de telle sorte que l'on ne rencontre en mécanique que trois unités arbitraires ou *fondamentales* : celles de longueur, de temps et de masse.

Mais la mécanique n'étudie qu'une partie restreinte des phénomènes physiques. Rien n'autorise à penser que l'étude d'une nouvelle branche de la physique ne saurait introduire des notions nouvelles indépendantes de celles de longueur, de masse et de temps.

4. Systèmes absolus d'unités. — En résumé, la méthode de définitions que nous venons de suivre et que nous suivrons cons-

tamment dans l'étude de l'électricité et du magnétisme est la suivante :

Chaque fois que l'on rencontre la notion d'une quantité mécanique ou physique d'un nouveau genre, on commence par en donner une définition telle que le rapport des grandeurs intrinsèques de deux quantités de ce genre bien déterminées en elles-mêmes ait une valeur numérique parfaitement déterminée. Puis on représente les diverses quantités de ce genre par des nombres assujettis à la seule condition que le rapport de deux d'entre eux soit égal au rapport des grandeurs intrinsèques correspondantes ; mais alors se pose la question du choix d'une unité. Deux cas peuvent se présenter :

1^{er} cas. — La grandeur de nouvelle espèce ne se rattache à aucune de celles définies antérieurement, son unité reste arbitraire et est dite *fondamentale* (exemple : longueur, temps et masse).

2^o cas. — La grandeur q de nouvelle espèce se rattache à d'autres grandeurs a, b, c déjà définies et dont la connaissance suffit pour la déterminer elle-même intrinsèquement (exemple : une vitesse est définie en fonction d'une longueur et d'un temps). Si la définition de q conduit à une formule :

$$q = f(a, b, c, \dots \dots k, k', k'' \dots \dots)$$

où f désigne une fonction de forme donnée, $k, k', k'' \dots$ des coefficients parasites n'intervenant pas pour fixer la grandeur intrinsèque de la quantité q , on attribue à ces coefficients les valeurs arbitraires qui conviennent le mieux en vue de la simplification des formules. — L'unité de q est alors évidemment une unité dérivée.

Par opposition aux anciens systèmes dans lesquels les unités des diverses grandeurs étaient toutes arbitraires, le système d'unités fondamentales et d'unités dérivées — qui résulte de la fixation, une fois pour toutes des coefficients parasites de manière à simplifier les calculs — a reçu le nom de *système absolu d'unités*.

5. Changements d'unités. Formules de dimensions. — Si, ayant fixé primitivement les unités de longueur, de temps et de masse

(par exemple : toise, minute, masse d'une toise cube d'eau à 4°), on se propose, dans une nouvelle série de calculs, de choisir de nouvelles unités (mètre, seconde, masse d'un mètre cube d'eau) respectivement L fois, T fois et M fois plus grandes, on devra évidemment remplacer en même temps les anciennes unités de surface, de volume, de vitesse,..... par les nouvelles unités correspondantes S fois, U fois, V fois..... plus grandes. Nous sommes donc conduits à chercher les relations qui existent entre les divers coefficients de transformation L, T, M, S, U, V.....

Or, si a , b , s désignent les anciennes valeurs numériques des côtés et de l'aire d'un rectangle déterminé, les nouvelles valeurs seront évidemment $\frac{a}{L}$, $\frac{b}{L}$, $\frac{s}{S}$, puisque ces valeurs doivent varier en raison inverse des grandeurs des unités. En vertu de la relation (1) établie indépendamment du choix des unités, on doit donc avoir simultanément :

$$s = ab \quad \text{et} \quad \frac{s}{S} = \frac{a}{L} \cdot \frac{b}{L}$$

On déduit de là :

$$S = L^2 \tag{1'}$$

Par des raisonnements semblables, les formules (2), (3), (4), (5) et (6) conduiraient évidemment aux relations :

$$U = L^3 \tag{2'}$$

$$V = LT^{-1} \tag{3'}$$

$$A = VT^{-1} \tag{4'}$$

$$F = MA \tag{5'}$$

$$W = FL \tag{6'}$$

Ces formules permettent de calculer la transformation des unités dérivées (de surface, de volume, de vitesse.....) qui doit accompagner une transformation donnée des unités fondamentales de longueur, de temps et de masse. On les appelle *formules de dimensions* d'une surface, d'un volume, d'une vitesse..., et on les énonce en disant :

qu'une surface a pour dimensions	2	en longueur,
qu'un volume	—	3 en longueur,
qu'une vitesse	—	1 en longueur et — 1 en temps, etc.

6. Divers systèmes d'unités fondamentales. — Par suite du mode d'exposition que nous avons adopté, nous avons été conduits à prendre comme unités fondamentales celles de longueur, de temps et de masse, et par conséquent à considérer comme arbitraires les coefficients de transformation L, T, M , les autres coefficients étant des fonctions de ceux-là définies par les équations (1') à (6').

Mais rien n'empêche évidemment de considérer comme fondamentales ou arbitraires trois autres unités, par exemple celles de longueur, de temps et de force. D'une manière générale, on peut choisir comme fondamentales trois unités quelconques, pourvu qu'elles soient *indépendantes* entre elles, c'est-à-dire que l'une d'elles ne soit pas déterminée par la fixation des deux autres. Ainsi les trois unités de longueur, de force et de travail ne conviendraient pas, parce que leurs coefficients de transformation L, F, W sont liés entre eux par la relation (6') : $W = FL$ et, par conséquent, ne peuvent être choisis tous les trois arbitrairement.

Si l'on choisit comme unités fondamentales celles de longueur, de temps et de masse, par exemple, et que l'on exprime les dimensions des diverses grandeurs mécaniques S, U, V, \dots en fonction de L, T, M , on dit que l'on adopte le système de dimensions (L, T, M) . Voici le tableau des dimensions des grandeurs considérées jusqu'ici dans le système (L, T, M) et dans un autre système (A, F, W) ; leur calcul est déduit des formules (1') à (6') :

Système absolu (L, T, M)	{	longueur . . . L	{	accélération . A
		temps . . . T		force F
		masse M		travail . . . W
		surface . . . $S = L^2$		longueur . . . $L = F^{-1} W$
		volume . . . $U = L^3$		surface . . . $S = F^{-2} W^2$
		vitesse . . . $V = LT^{-1}$		volume . . . $U = F^{-3} W^3$
		accélération . $A = LT^{-2}$		temps $T = A^{-\frac{1}{2}} F^{-\frac{1}{2}} W^{\frac{1}{2}}$
		force $F = LMT^{-2}$		vitesse . . . $V = A^{\frac{1}{2}} F^{-\frac{1}{2}} W^{\frac{1}{2}}$
		travail . . . $W = L^2MT^{-2}$		masse $M = A^{-1} F$

7. Systèmes usuels d'unités absolues. — Les physiciens adoptent généralement le système (L, M, T) et prennent pour unités : le *centimètre* (C), la masse d'un centimètre cube d'eau distillée à 4° que l'on appelle le *gramme-masse* (G), la *seconde* (S) ;

de là le nom de *système C, G, S*, appliqué à ce système particulier. Les unités C, G, S de force et de travail s'appellent la *dyne* et l'*erg* (Congrès des électriciens, Paris, 1884).

En électricité, le système C, G, S entraînant l'adoption d'unités dérivées (de résistance, de force électromotrice, etc.) d'un usage peu commode, on a créé un nouveau système d'unités, dit *pratique*, qui du reste dérive d'une manière très simple du système C, G, S et que l'on emploie couramment. Les coefficients de transformation des principales unités, pour passer du système C, G, S au système pratique, sont :

Unité pratique de longueur	: L = 10 ⁹	C.G.S.
— masse	: M = 10 ⁻¹¹	—
— temps	: T = 1	—
— force	: F = LMT ⁻² = 10 ⁻²	—
— travail	: W = L ² MT ⁻² = 10 ⁷	—
— puissance	: P = L ² MT ⁻³ = 10 ⁷	—

Ainsi l'unité pratique de longueur est égale à 10⁹ centimètres, à peu près la longueur du quart du méridien terrestre. Les unités pratiques de travail et de puissance (travail par unité de temps) ont reçu respectivement les noms de *joule* et de *watt* (Congrès des électriciens, Chicago, 1894).

Les mécaniciens emploient de préférence le système L, F, T et choisissent comme grandeurs des unités fondamentales ; le *mètre* (M), le *kilogramme-poids* (K), et la *seconde* (S) ; nous appellerons ce système M, K, S. Il offre un inconvénient au point de vue des relations internationales des savants ; c'est que l'unité de force, définie comme le poids d'un litre d'eau, varie d'un pays à un autre avec l'accélération terrestre *g*.

Si l'on veut passer du système C, G, S au système M, K, S, quel sera le changement à faire subir aux diverses unités ?

1° Un mètre étant 100 fois plus grand qu'un centimètre, le coefficient de transformation L sera : L = 100 ;

2° L'unité de temps étant la même dans les deux systèmes, on aura : T = 1 ;

3° Le kilogramme-poids a pour valeur dans le système C, G, S le nombre $F = mg$, *m* désignant la valeur C, G, S de la masse d'un décimètre cube d'eau, c'est-à-dire le nombre 1 000, et *g* étant

la valeur C, G, S de l'accélération terrestre, soit $g = 981$ (à Paris).

On formera ainsi le tableau :

$$\begin{aligned} L &= 100 & T &= 1 & F &= 981\ 000 \\ M &= L^{-1}FT^2 & &= 9\ 810 \\ W &= LF & &= 98\ 100\ 000 \\ & \dots & & \dots & & \dots \end{aligned}$$

c'est-à-dire que, dans le système M, K, S l'unité de force (kilogramme-poids) vaut 981 000 dynes, l'unité de masse vaut 9 810 grammes-masse, l'unité de travail (kilogrammètre) vaut 98 100 000 ergs.

On en déduit les relations suivantes, qu'il est utile de se rappeler :

- 1 kilogramme-poids = 98 100 000 unités pratiques de force.
- 1 kilogrammètre = 9,81 joules.
- 1 cheval-vapeur = $9,81 \times 75 = 735,7$ watts.

8. Grandeurs comparables entre elles. — Si deux quantités q et r ont mêmes dimensions ($Q = R$), leur rapport a une valeur numérique qui, étant multipliée par $\frac{Q}{R} = 1$, lorsqu'on fait un changement d'unités, se trouve être en réalité indépendante des grandeurs des unités choisies arbitrairement. Ce rapport ne dépend que des grandeurs intrinsèques des quantités q et r et peut être considéré comme représentant le rapport de ces grandeurs elles-mêmes, qui sont dites *comparables* (ou homogènes) entre elles. Ainsi un travail, une force vive, le moment d'un couple, qui ont mêmes dimensions $L^2 M T^{-2}$, sont des grandeurs comparables entre elles.

Considérons au contraire deux quantités q et r dont les grandeurs intrinsèques sont bien définies, mais dont les dimensions Q et R sont différentes, ce qui revient à dire que l'on a :

$$\frac{Q}{R} = L^\alpha M^\beta T^\gamma$$

α, β, γ n'étant pas nuls simultanément. Le rapport des valeurs numériques de ces deux quantités variera avec le choix des unités et pourra être multiplié par tel facteur n que l'on voudra, puisqu'il

est toujours possible de choisir des valeurs de L , M , T satisfaisant à la relation :

$$L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma} = n$$

quel que soit n . — On dit alors que les quantités q et r ne sont pas comparables entre elles. Ainsi une longueur n'est pas comparable à une vitesse, ni une masse à un volume ou à une force.

9. Unités calorifiques. — L'étude de la chaleur introduit la notion de nouvelles grandeurs : température, quantité de chaleur, conductibilité et capacité calorifiques, etc.

La définition de la température absolue déduite du principe de Carnot est telle que deux températures ayant des grandeurs intrinsèques bien définies (températures d'ébullition et de congélation de l'eau, par exemple) ont un rapport numérique bien déterminé. Les valeurs numériques représentatives des diverses températures seront donc parfaitement déterminées dès que l'on aura fixé l'unité de température, qui n'a du reste aucun lien naturel avec les unités de longueur, de temps et de masse, et qui par conséquent sera une unité arbitraire ou *fondamentale*.

De même l'unité de chaleur a été longtemps définie d'une manière arbitraire. La découverte expérimentale du principe de l'équivalence de la chaleur et du travail a rattaché naturellement l'unité de chaleur à celle de travail. On sait en effet qu'un travail effectué w peut se transformer en chaleur, et réciproquement, la quantité de chaleur ch développée étant proportionnelle à w : $w = J ch$.

Le coefficient de proportionnalité J dépend des unités de travail et de chaleur choisies (ainsi une grande calorie vaut 425 kilogrammètres); mais l'expérience montre que la *valeur de ce coefficient est indépendante de toute circonstance physique*, c'est-à-dire que la connaissance de la grandeur intrinsèque d'un travail suffit pour fixer la grandeur intrinsèque de la chaleur équivalente, indépendamment de toute autre donnée. Il est donc un coefficient purement parasite, que l'on a intérêt à faire égal à l'unité pour simplifier les formules :

$$w = ch$$

On s'astreint par là même à adopter comme unité la quantité de chaleur équivalente à l'unité de travail, c'est-à-dire l'*erg* dans le système C, G, S, ou le *joule* dans le système pratique. Ainsi :

$$\begin{aligned} 1 \text{ petite calorie} &= 425 \text{ grammètres.} \\ - &= 4,17 \cdot 10^7 \text{ ergs.} \\ - &= 4,17 \text{ joules.} \end{aligned}$$

Il résulte de là qu'une quantité de chaleur aura mêmes dimensions, c'est-à-dire même coefficient de transformation d'unité W , qu'un travail. On pourra dire encore qu'une quantité de chaleur est une grandeur comparable à un travail. Cette propriété résulte de l'expérience et exprime une *loi physique*, tandis que jusqu'ici les grandeurs comparables que nous avons rencontrées en mécanique l'étaient en vertu de leur *définition mathématique*. — Nous verrons en électromagnétisme (§ 69) un exemple semblable de deux quantités étudiées d'abord séparément, sans relation apparente, et entre lesquelles l'expérience vient à montrer qu'il existe un rapport invariable, analogue au coefficient parasite J (densité de courant électrique = densité de masse vectorielle magnétique).

Il est inutile de donner ici des explications au sujet de l'extension du principe de l'équivalence du travail et de la chaleur, généralisé sous le nom de *principe de la conservation de l'énergie*; nous le supposerons bien connu. On adoptera, dans cet ouvrage, comme unité d'énergie, la quantité d'énergie sous une forme quelconque, calorifique, chimique, électrique, etc., qui est *équivalente* à l'unité de travail.

HOMOGENÉITÉ DES FORMULES

10. — Les formules de géométrie, de mécanique et de physique sont *des relations entre les nombres représentatifs de certaines grandeurs*. Elles sont généralement établies sans fixation des grandeurs intrinsèques des unités; elles doivent donc subsister lorsqu'on change les grandeurs des unités arbitraires (ou fondamentales) et, par suite, les valeurs numériques des quantités qui entrent dans

ces formules. Il résulte de là des conséquences intéressantes que nous allons développer.

Supposons que l'on ait établi une relation :

$$\varphi (a_1, a_2, \dots, a_p) = 0$$

dans laquelle nous mettons en évidence toutes les quantités, constantes ou variables, a_1, a_2, \dots, a_p , dont les valeurs numériques dépendent du choix des unités. Ces valeurs numériques qui étaient primitivement a_1, a_2, \dots, a_p , deviendront $\frac{a_1}{A_1}, \frac{a_2}{A_2}, \dots, \frac{a_p}{A_p}$ si les grandeurs intrinsèques des unités correspondantes sont multipliées par A_1, A_2, \dots, A_p ; et l'on devra encore avoir :

$$\varphi \left(\frac{a_1}{A_1}, \frac{a_2}{A_2}, \dots, \frac{a_p}{A_p} \right) = 0$$

Mais les coefficients A_1, A_2, \dots, A_p sont liés en général par certaines relations, et un certain nombre d'entre eux seulement peuvent être considérés comme arbitraires. Si, par exemple, on n'a que des grandeurs mécaniques, on n'aura que trois arbitraires : L, M, T , par exemple, avec des relations telles que :

$$A_1 = L^{\alpha'} M^{\beta'} T^{\gamma'} \quad A_2 = L^{\alpha''} M^{\beta''} T^{\gamma''} \dots$$

On pourra donc exprimer que la relation :

$$\varphi \left(\frac{a_1}{L^{\alpha'} M^{\beta'} T^{\gamma'}}, \frac{a_2}{L^{\alpha''} M^{\beta''} T^{\gamma''}}, \dots \right) = 0$$

a lieu quelles que soient les valeurs attribuées à L, M, T .

Une équation qui jouit de cette propriété est dite *homogène*. Si donc une formule établie, en laissant les unités arbitraires, n'est pas homogène, elle est incorrecte.

On peut exprimer sous la forme d'un théorème plus précis cette propriété de l'homogénéité des formules. Supposons qu'au lieu de trois unités arbitraires (ou fondamentales) seulement, on en ait n , savoir les trois unités de la mécanique (L, M, T) et d'autres introduites par l'étude de la chaleur, de l'électricité, etc. Si, dans l'exemple ci-dessus, les p coefficients A_1, A_2, \dots, A_p sont liés entre eux par $(p - k)$ relations, on pourra considérer comme arbitraires k

d'entre eux, soient A_1, A_2, \dots, A_k . Les autres coefficients s'exprimeront en fonction de ceux-là par des formules telles que :

$$A_{k+1} = A_1^{a_1} A_2^{a_2} \dots A_k^{a_k} \quad A_{k+2} = A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \dots A_k^{\beta_k} \dots A_p = \dots \quad (7)$$

Or, l'équation donnée :

$$\varphi(a_1, a_2, \dots, a_p) = 0$$

peut évidemment se mettre sous la forme :

$$\psi\left(a_1 \dots a_k, \frac{a_{k+1}}{a_1^{a_1} \dots a_k^{a_k}}, \frac{a_{k+2}}{a_1^{\beta_1} \dots a_k^{\beta_k}}, \dots\right) = 0$$

Par le changement d'unités indiqué plus haut (coefficients de transformation A_1, A_2, \dots, A_p), cette formule devient :

$$\psi\left(\frac{a_1}{A_1}, \dots, \frac{a_k}{A_k}, \frac{a_{k+1}}{a_1^{a_1} \dots a_k^{a_k}}, \dots, \frac{a_p}{a_1^{\lambda_1} \dots a_k^{\lambda_k}}\right) = 0$$

en tenant compte des relations (7). Et, comme elle doit être satisfaite, quelles que soient les valeurs attribuées à A_1, A_2, \dots, A_k , il en résulte que la nouvelle fonction ψ ne doit pas en réalité contenir ces coefficients arbitraires. Comme ces coefficients n'entrent respectivement que dans les rapports $\frac{a_1}{A_1}, \frac{a_2}{A_2}, \dots, \frac{a_k}{A_k}$, la relation donnée se réduit à :

$$\psi\left(\frac{a_{k+1}}{a_1^{a_1} \dots a_k^{a_k}}, \dots, \frac{a_p}{a_1^{\lambda_1} \dots a_k^{\lambda_k}}\right) = 0$$

On remarquera que les valeurs numériques des $(p-k)$ paramètres restants $\frac{a_{k+1}}{a_1^{a_1} \dots a_k^{a_k}} \dots$ sont indépendantes du choix des grandeurs des unités, puisque leurs coefficients de transformation sont égaux à l'unité en vertu de (7).

Donc, toute relation homogène entre p quantités a_1, a_2, \dots, a_p , dont les valeurs numériques dépendent du choix des unités, est réductible à une relation entre $(p-k)$ paramètres qui sont des combinaisons monômes de a_1, a_2, \dots, a_p et ont des dimensions nulles ($L^0 M^0 T^0 \dots = 1$), pourvu que, parmi les p unités des grandeurs a_1, a_2, \dots, a_p , on en

puisse choisir k arbitrairement. Ce nombre k ne peut évidemment être supérieur au nombre n des unités fondamentales.

11. Application des considérations d'homogénéité. Calcul de la durée des oscillations d'un pendule dans le vide. — Si l'on se propose de calculer la durée θ des oscillations, dans le vide, d'un pendule simple, de longueur l , de masse m , l'écart angulaire initial étant α et la vitesse initiale étant nulle, on peut diviser le problème en deux parties :

1° Reconnaître les éléments dont dépend l'inconnue θ ; ces quantités sont uniquement les données l , m , α et l'intensité g de la pesanteur, de telle sorte que la formule de θ sera forcément de la forme :

$$\psi(\theta, l, m, \alpha, g) = 0$$

tous les paramètres susceptibles de varier étant mis en évidence.

2° Pour déterminer la forme de la fonction φ , appliquer au mouvement du pendule les principes de la dynamique, de manière à mettre le problème en équations ; c'est-à-dire poser les équations différentielles et les conditions initiales du mouvement, puis intégrer ces équations.

On peut, sans savoir résoudre la deuxième partie du problème, obtenir un résultat important par de simples considérations d'homogénéité. La relation cherchée peut en effet se mettre sous la forme :

$$\psi\left(\theta, l, m, \alpha, \frac{g\theta^2}{l}\right) = 0$$

Comme les unités des grandeurs θ , l , m (temps, longueur et masse) sont indépendantes entre elles, et que d'autre part les paramètres α (angle = rapport de l'arc au rayon) et $\frac{g\theta^2}{l}$ ont des dimensions nulles, un raisonnement semblable à celui qui a conduit au théorème précédent montre que cette relation doit se réduire à :

$$\psi\left(\alpha, \frac{g\theta^2}{l}\right) = 0 \quad \text{d'où : } \theta = \sqrt{\frac{l}{g}} \chi(\alpha)$$

χ désignant une fonction que les considérations d'homogénéité sont impuissantes à faire connaître.

En désignant par C la constante $\gamma (o)$, on voit que lorsque l'amplitude α des oscillations devient infiniment petite, leur durée θ tend vers la limite $\theta_0 = C \sqrt{\frac{l}{g}}$

Une expérience suffit donc pour déterminer la constante C ($C = \pi$).

Nous verrons dans le cours d'électricité d'autres applications des considérations d'homogénéité.

L'utilité de ces considérations provenant de ce que les grandeurs des unités fondamentales sont maintenues arbitraires, on peut se demander s'il n'y aurait pas avantage à laisser aussi arbitraires les autres unités, en conservant dans les formules les coefficients parasites que nous avons supprimés. Or, il n'en est rien ; car si, par exemple, on avait défini l'aire d'un rectangle, dont les côtés sont a et b , par la formule : $S = k a b$, en maintenant le coefficient parasite k , afin de laisser arbitraire l'unité de surface, les relations qui doivent contenir S contiendraient la combinaison $\frac{S}{k}$, ce qui serait une complication sans avantage.

CHAPITRE PREMIER

PROPRIÉTÉS ÉLECTRIQUES DES CORPS

1. *Etude sommaire des actions électriques.* — Dans ce chapitre, nous chercherons simplement à mettre en évidence les *propriétés électriques* générales des corps. Il suffira à cet effet de rappeler quelques expériences fondamentales relatives aux actions qui s'exercent entre les corps électrisés.

Une étude sommaire de ces actions consistera, par exemple, à promener aux environs d'un conducteur électrisé (plongé dans l'air, dans l'alcool, etc.) un pendule à balle électrisée, ou mieux encore à déplacer le conducteur en présence du pendule et à observer l'action produite sur celui-ci. On constate très facilement que la force d'attraction ou de répulsion observée, varie avec la distance des deux corps en présence et, en outre, avec la nature du milieu et la position relative des corps situés dans leur voisinage.

2. *Ecrans électriques.* — Si le pendule d'épreuve, promené d'abord dans l'air, dans l'alcool, etc., vient à être plongé dans un vase contenant de l'eau, toute action sur ce pendule cesse, même à proximité du conducteur électrisé. Lorsqu'on retire le pendule de l'eau, on constate qu'il n'est plus électrisé; néanmoins il est encore attiré dans l'air par le conducteur.

Au lieu de plonger le pendule directement dans l'eau, mettons-le dans un tube de verre fermé et plongeons ce tube dans l'eau. Le pendule reste encore insensible à l'action des corps électrisés extérieurs à l'eau; mais il est sensible à celle des corps électrisés que l'on a placés dans le tube avec lui.

On peut rapprocher ce fait du suivant : si le pendule d'épreuve

est introduit dans une cage *métallique* fermée, un corps électrisé placé en dehors de la cage n'exerce sur lui aucune action. Que l'on ouvre la cage, l'action électrique reparaitra. D'autre part, le même corps électrisé, placé à l'intérieur de la cage fermée avec le pendule, agit sur celui-ci. La cage métallique forme donc une sorte d'*écran* contre les actions électriques entre deux corps situés de part et d'autre de ses parois (*Expérience de la cage de Faraday*). En outre, si le pendule d'épreuve touche la paroi intérieure de la cage métallique, on constate qu'il n'est plus électrisé.

La cage métallique joue donc un rôle analogue à celui de l'eau. D'autres corps possèdent la même propriété que l'eau et les métaux, c'est-à-dire jouent le rôle d'écrans électriques. Ils s'électrisent très facilement ; mais ni leur électrisation, ni celle des corps voisins n'exercent une action quelconque dans leur intérieur.

3. Champ électrique. — Tout l'espace où l'on constate l'existence d'actions sur le pendule d'épreuve s'appelle *champ électrique*. Ainsi un corps électrisé crée un champ électrique dans l'air, dans les gaz en général, dans l'alcool, le pétrole et certains autres liquides. Au contraire, dans l'eau et divers liquides, il ne paraît pas possible de créer un tel champ, même par le voisinage de corps fortement électrisés. D'ailleurs, si à l'intérieur d'un corps métallique (cage) ou d'une masse d'eau il existe une cavité contenant de l'air, on peut créer un premier champ électrique dans l'espace extérieur à ce corps et un deuxième dans la cavité ; *ces deux champs sont indépendants entre eux*, c'est-à-dire que, si dans l'un d'eux on introduit ou l'on déplace un corps électrisé, ce déplacement agit naturellement sur un pendule d'épreuve placé dans le même champ, mais est sans action sur un pendule placé dans l'autre champ.

On verra plus loin (§ 8) comment l'*intensité du champ électrique* en un point est définie et peut se mesurer par l'observation de la force électrique à laquelle est soumis le pendule d'épreuve placé en ce point. Cette intensité varie, en général, d'un point à un autre du champ, en grandeur et en direction.

Le champ électrique existe-t-il dans les corps solides ? Il n'est pas possible de le reconnaître par une exploration au moyen du

pendule d'épreuve ; mais un artifice permet de tourner cette difficulté. Supposons qu'à l'intérieur d'un corps solide A on ait creusé une cavité, et que l'on observe, au moyen du pendule d'épreuve, ce qui se passe dans cette cavité lorsqu'on déplace des corps électrisés à l'extérieur dans le voisinage de A. Si la substance de A est métallique, nous avons vu que l'on n'observe aucune action. Il en est de même pour certaines autres substances : charbon, etc. Mais si A est du verre, du caoutchouc, etc., tout déplacement de corps électrisé à l'extérieur exerce une action sensible sur le pendule placé dans la cavité. Ces substances ne se comportent donc pas comme des écrans ; elles permettent aux actions électriques de se transmettre à travers elles. Donc il doit y exister un champ électrique ; car si elles ne laissaient pas le champ pénétrer dans leur masse, il paraît évident qu'elles ne le laisseraient pas pénétrer au delà à travers elles-mêmes (en vertu de ce principe fondamental de la physique moderne, d'après lequel l'action d'un corps sur un autre se transmet, non directement à *distance*, mais par l'intermédiaire du milieu interposé entre eux).

Inversement, d'après le même principe, le champ électrique ne doit pas exister à l'intérieur des substances formant écran. Nous avons vu en effet que le voisinage d'un corps électrisé ne crée aucun champ à l'intérieur d'un *liquide*-écran : eau, etc. Toutefois il pourrait subsister un doute au sujet de la non-existence du champ dans la masse d'un écran *solide*. Ainsi on pourrait imaginer que dans un corps métallique creux le champ électrique peut être créé jusqu'à une certaine profondeur à partir de la surface extérieure, puis s'affaiblir peu à peu de manière à disparaître entièrement avant d'arriver à la paroi intérieure et à la cavité, ce qui serait en apparence conforme à l'expérience. Mais, s'il en était ainsi, en amincissant de plus en plus l'épaisseur du métal creux, on pourrait arriver à faire pénétrer le champ jusque dans la cavité. Or, en réduisant l'épaisseur autant qu'on peut le faire pratiquement, à une faible fraction de millimètre, on n'a jamais pu atteindre ce résultat. Il en faut conclure que le champ est nul en réalité dans toute la masse du corps écran, sauf peut-être dans une couche d'épaisseur inconnue excessivement faible à la surface de séparation du corps et de l'air ambiant.

Le champ électrique n'étant défini jusqu'ici que par l'une de ses manifestations, savoir les forces observées (sur le pendule d'épreuve par exemple), l'idée de l'existence de ce champ dans un corps solide ne présente rien de bien net. Mais cette existence se révèle par d'autres manifestations dans l'intérieur même des solides. Ainsi on a mis en évidence d'une manière non douteuse l'existence de légères variations du volume d'un corps dans lequel existe un champ électrique (dilatation du verre de la bouteille de Leyde dans l'expérience de Duter), et d'effets de double réfraction optique dans une substance qui était isotrope avant la création du champ (expérience de Kerr). L'existence du champ électrique dans les substances solides qui ne forment pas écran est encore démontrée par la production des étincelles qui y éclatent lorsque l'intensité du champ dépasse une certaine limite, alors qu'elles n'éclatent pas à l'intérieur des substances écrans ni dans leurs cavités (cage de Faraday). Ajoutons que l'étude entière de l'électricité montre qu'*au point de vue des propriétés électriques générales des corps il n'y a pas lieu d'établir une distinction entre les solides et les liquides ou les gaz.*

4. Conductibilité électrique. — Cherchons à préciser les propriétés des corps où l'on peut maintenir un champ électrique par le voisinage d'un corps électrisé, et de ceux où on ne le peut pas. D'après ce que nous avons vu, au contact des premiers, l'électrisation du pendule d'épreuve se maintient : au contact des seconds elle disparaît instantanément en partie, ou même en totalité suivant les cas.

Par contre, si un corps de cette seconde catégorie, un métal par exemple, a la forme d'un fil fin communiquant par une de ses extrémités avec un pendule non électrisé A, dès que l'autre extrémité vient toucher un second pendule électrisé B, l'électrisation de B est affaiblie ; mais A devient électrisé. Il semble que l'électrisation n'ait pas été anéantie par le fil intermédiaire, mais qu'elle ait été partagée en quelque sorte entre les deux pendules et le fil lui-même, dont on constate aussi l'électrisation. Du reste, sous forme de fil ou sous toute autre forme, le contact d'un métal, de l'eau et des autres corps dans l'intérieur desquels ne paraît pas

pouvoir exister un champ électrique, produit des effets analogues : c'est pourquoi on a donné à ces corps le nom de *conducteurs* de l'électricité. Les autres corps, dont le contact n'affaiblit pas l'électrisation du pendule d'épreuve et au travers desquels les actions électriques se transmettent, sont appelés *isolants* ou, d'après Faraday, *diélectriques*.

Cette division de tous les corps en conducteurs et isolants est toute conventionnelle et n'a rien d'absolu. Ainsi l'air qui est un isolant presque parfait lorsqu'il est pur et sec, devient un peu *conducteur* lorsqu'il est humide ; c'est-à-dire que dans l'air humide on constate que les actions exercées par un corps électrisé et mesurées soit par le pendule d'épreuve, soit par un autre instrument plus délicat (électroscope) deviennent de plus en plus faibles. (On dit que le corps *perd son électrisation*.) Le champ s'affaiblit donc graduellement et, suivant l'état de l'air, peut mettre des années (expérience de lord Kelvin), ou des jours, ou quelques minutes seulement à disparaître presque entièrement.

Dans d'autres corps, surtout des solides ou des liquides (bois, etc.) classés comme isolants, le champ électrique créé disparaît beaucoup plus rapidement. Dans d'autres encore (eau pure, etc.), le champ que l'on cherche à créer, soit par l'introduction, soit simplement par le voisinage d'un corps électrisé, ne se manifeste qu'un temps excessivement court et peut être même imperceptible. On peut mettre en évidence, par l'un des deux procédés suivants, l'existence momentanée du champ dans ces corps : 1° En creusant l'un de ces corps, de manière à pouvoir observer les actions électriques à l'intérieur de la cavité, on constatera qu'à l'état de *repos* les corps électrisés extérieurs n'exercent aucune action dans cette cavité, mais que par contre leur *déplacement rapide* a une action sensible sur l'instrument d'épreuve employé. 2° En combattant la tendance à l'affaiblissement du champ dans un tel corps par sa mise en communication permanente avec une puissante source d'électricité (pile ou machine) — ou, comme on dit, *en réparant les pertes*, — on peut y maintenir pendant un temps assez long un champ d'intensité sensible. C'est ainsi que M. Gouy a constaté et mesuré l'attraction de plaques métalliques (électromètre à quadrants) plongées dans de l'eau où il maintenait par ce

procédé un champ électrique (*C. R. de l'Ac. d. Sc.*, t. CVI, p. 540 et 930).

Enfin dans certains corps, même liquides, dits bons conducteurs, il a été impossible jusqu'ici d'obtenir des manifestations de forces électriques. Il n'en résulte pas néanmoins qu'aucun champ ne puisse y être créé. L'étude des courants électriques, notamment de la chaleur dégagée dans la masse des conducteurs, prouve l'existence du champ électrique dans ces corps.

A ces diverses catégories de substances, dont la délimitation serait sans intérêt, on applique souvent les noms d'isolants, mauvais isolants, médiocres conducteurs et bons conducteurs. Il n'existe pas d'*isolant parfait*, où un champ électrique puisse se maintenir de lui-même indéfiniment ; mais dans l'air sec, avec des supports convenables, on arrive à maintenir l'intensité d'un champ — ou, comme on dit ordinairement, l'électrisation des corps — sensiblement constante pendant la durée d'une série d'expériences.

En résumé, on peut considérer la *conductibilité électrique* comme une propriété appartenant à des degrés divers à tous les corps et consistant en une tendance du champ électrique établi dans ces corps à s'y affaiblir plus ou moins rapidement, de telle sorte que, dans une expérience d'électrostatique, un champ créé dans un système quelconque de corps (air, alcool, eau, etc.) ne devient sensiblement *stable* qu'à partir du moment où il a cessé d'exister dans ceux d'entre eux qui sont dits bons conducteurs. Telle est la *première propriété électrique des corps* que nous avons à mettre en évidence.

5. Pouvoir inducteur électrique. — Deux plateaux métalliques parallèles, placés en regard l'un de l'autre et reliés respectivement aux deux pôles d'une machine électrique, exercent l'un sur l'autre une attraction que l'on peut mesurer. C'est là le principe de certains électromètres : électromètre à plateau attiré de Harris, électromètre absolu de sir W. Thomson, etc. Si l'on rapproche les plateaux, on constate que l'attraction augmente ; si dans la couche d'air interposée entre eux on introduit une lame de verre ou une autre substance isolante, l'attraction augmente également. Les forces électriques dépendent donc de la nature

du milieu diélectrique dans lequel sont plongés les corps électrisés.

Le procédé qui conviendrait le mieux pour étudier cette propriété consisterait à placer les corps électrisés en présence dans un milieu diélectrique homogène, et à faire varier d'une expérience à l'autre la nature de ce milieu (air, essence de térébenthine, eau, etc.), tout en maintenant la même électrisation dans les divers cas. On pourrait aussi répéter dans divers milieux l'expérience du pendule d'épreuve (des essais analogues ont été faits). Citons encore l'expérience de M. Gouy, dans laquelle l'action réciproque de deux plateaux métalliques, électrisés toujours de la même manière, était environ 90 fois plus grande dans l'eau que dans l'air.

L'influence de la nature du milieu diélectrique sur la grandeur des forces électriques est une *deuxième propriété électrique des corps*. Elle ne dépend que d'un coefficient spécifique du milieu, auquel on a donné le nom de pouvoir inducteur électrique et qui sera défini d'une manière précise au paragraphe 22.

Le pouvoir inducteur du milieu diélectrique influe non seulement sur la grandeur des forces électriques, mais encore sur la quantité d'énergie électrique emmagasinée dans le milieu. Il est facile d'en comprendre la raison, puisque l'énergie électrique, créée par le travail des forces électriques, est proportionnelle, toutes choses égales d'ailleurs, à ces forces. Nous nous bornerons ici à citer un fait. Si deux condensateurs, dont les formes géométriques sont identiques, mais dont les lames diélectriques sont de substances différentes, viennent à être chargés de la même manière (par une même pile), chacun d'eux possédera une quantité d'énergie électrique équivalente à la chaleur qu'il est susceptible de dégager par sa décharge. Or, les quantités de chaleur dégagées par les deux condensateurs à la décharge sont différentes, et leur rapport est égal au rapport des pouvoirs inducteurs des deux diélectriques.

Le rôle du pouvoir inducteur ne pourra être compris entièrement qu'après l'étude des forces et de l'énergie électriques (§ 22, 24 et 30).

6. Sur le courant électrique. — Nous n'avons rencontré jusqu'ici que trois notions expérimentales nouvelles :

1° Celle du *champ électrique*, dont l'intensité en chaque point sera définie d'une manière plus précise au paragraphe 8 ;

2° Celles des propriétés électriques des corps : *conductibilité*, *pouvoir inducteur* (ces noms, suggérés par la théorie des fluides électriques, ne rappellent point les véritables propriétés expérimentales).

Les fluides électriques et les propriétés physiques qu'on leur a prêtées ne nous apparaissent dans aucune expérience ; ce sont de pures fictions. Le mouvement supposé de ces fluides dans les conducteurs, qui constituerait un *courant électrique*, n'a donc aucun sens ; il en est de même de la *résistance* que les corps sont censés opposer à ce mouvement, ainsi que des *forces électromotrices* qui agissent sur les fluides, et du *travail* desdites forces.

Ce que l'on appelle ordinairement *courant électrique* est purement et simplement l'*existence du champ électrique dans un conducteur*. Un dégagement de chaleur est *essentiellement lié* à l'existence de ce champ dans chaque élément de volume. Pour se rendre compte de la nature de ce phénomène, il convient de dire dès maintenant, par anticipation, quelques mots au sujet de la loi de Joule (v. § 47). D'après cette loi expérimentale :

La quantité de chaleur Q dégagée, par unité de temps, dans l'unité de volume en un point d'un conducteur où existe un champ électrique, est proportionnelle : 1° au carré de l'intensité h du champ en ce point ; 2° à un coefficient spécifique c de la substance du conducteur, appelé sa conductibilité électrique :

$$Q = ch^2 \tag{1}$$

(Cette formule sert précisément à fixer l'unité de conductibilité.)

Il résulte de là une conséquence très importante, notamment au point de vue de la rigueur des raisonnements que l'on fait dans le calcul de l'énergie électrique ; c'est que les diélectriques ou isolants *théoriquement* parfaits étant ceux dont la conductibilité est nulle, l'existence du champ électrique n'y produit aucun dégagement de chaleur.

Nous verrons d'autre part au paragraphe 31 que la quantité *w*

d'énergie électrique qui existe dans l'unité de volume, en un point où l'intensité du champ est h , a pour valeur :

$$w = \frac{1}{8\pi} kh^2 \quad (2)$$

k désignant le coefficient spécifique appelé pouvoir inducteur électrique de la substance du corps ($\pi = 3,14159\dots$).

De la comparaison des formules (1) et (2) on déduit :

$$Q = \frac{8\pi c}{k} w \quad (3)$$

c'est-à dire que, dans chaque élément de volume (unité) d'un conducteur, la quantité Q de chaleur dégagée par unité de temps est une fraction invariable $\frac{8\pi c}{k}$ de la quantité w d'énergie électrique qui y existe actuellement. En d'autres termes, l'énergie électrique existante dans une partie quelconque d'un conducteur tend à s'y dissiper, par voie de transformation en chaleur, avec une rapidité représentée par la fraction $\frac{8\pi c}{k}$, qui est, comme c et k , un coefficient spécifique de la substance du conducteur. Le coefficient inverse $\frac{k}{8\pi c}$, égal à $\frac{w}{Q}$, est un temps et a, par conséquent, un sens qui nous est plus familier que ceux de c et de k (v. § 48).

Ainsi se trouve précisée la nature de la conductibilité électrique, c'est-à-dire de la tendance d'un champ électrique établi dans un conducteur à s'y affaiblir plus ou moins rapidement, et à finir par disparaître à moins que l'énergie électrique ne soit renouvelée par une source indéfinie (pile, etc.).

On trouvera une analogie assez remarquable entre ce phénomène et celui où l'énergie élastique, développée par des déformations mécaniques dans un corps dit imparfaitement élastique, tend à s'y dissiper plus ou moins rapidement par voie de transformation en chaleur.

CHAPITRE II

ÉTUDE DU CHAMP ÉLECTRIQUE

7. **Exploration du champ.** — Nous allons revenir d'une manière plus détaillée sur la définition de l'intensité du champ électrique.

Imaginons une petite sphère métallique électrisée (sphère d'épreuve) que l'on portera successivement aux divers points du champ pour y déterminer, en grandeur et en direction, la force qui s'exerce sur elle. Cette méthode d'exploration est analogue à celle de la balance de torsion de Coulomb. Dans cette balance, l'une des sphères électrisées, soit A, est fixe et développe autour d'elle un certain champ électrique ; l'autre B (sphère d'épreuve) est mobile et peut être considérée comme servant à explorer le champ de A. La force exercée sur B aux divers points du champ (ou plutôt son moment par rapport à l'axe de rotation) est mesurée par comparaison avec le couple de torsion du fil de suspension. La sphère d'épreuve, il est vrai, au lieu d'explorer tout le champ, ne décrivait, dans les expériences de Coulomb, qu'un arc de cercle horizontal, parce que Coulomb, ayant l'idée préconçue que la force devait s'exercer dans la direction de la ligne des centres des deux sphères, ne cherchait à faire varier que la distance de celles-ci. Mais on peut imaginer un dispositif permettant d'étudier la direction en même temps que la grandeur de la force qui s'exerce sur la sphère d'épreuve, et cela en tout point de l'espace.

Les expériences de Coulomb peuvent être répétées dans des milieux fluides autres que l'air (essence de térébenthine, etc.). Des expériences de ce genre ont été faites par divers expérimentateurs.

Supposons donc qu'il s'agisse d'explorer un champ existant

dans l'air et dans d'autres diélectriques, ou même un ensemble de deux champs indépendants entre eux, tels que ceux que l'on peut créer à l'extérieur et à l'intérieur d'un conducteur creux. On déterminera, en grandeur et en direction, aux divers points $M_1 M_2 M_3 \dots$ du champ, les forces $f_1 f_2 f_3 \dots$ qui s'y exercent sur une petite sphère d'épreuve s , dont nous supposons l'électrisation maintenue constante pendant toute la durée de l'expérience.

Si l'on prend une deuxième sphère d'épreuve s' , ayant une électrisation quelconque maintenue constante, et qu'on la porte aux mêmes points $M_1 M_2 M_3 \dots$ pour mesurer les forces $f'_1 f'_2 f'_3 \dots$ qui s'y exercent sur elle, l'expérience donne les résultats suivants :

8. Intensité du champ électrique. — En premier lieu, *en tout point M_k les forces qui s'exercent respectivement sur les sphères s et s' ont même direction* (ou des directions opposées si les électrisations de s et de s' sont de signes contraires). En second lieu, *le rapport des grandeurs f_k et f'_k de ces deux forces est indépendant de la position du point M_k et de la nature du diélectrique*. Il résulte de là des conséquences importantes :

1° La valeur commune des rapports :

$$\frac{f'_1}{f_1} = \frac{f'_2}{f_2} = \frac{f'_3}{f_3} = \dots = \lambda$$

dépend seulement des deux sphères d'épreuve choisies s et s' et de leur état d'électrisation, et nullement de l'état du champ électrique. On peut donc considérer λ comme le rapport de deux *coefficients d'influence* q et q' propres aux sphères s et s' respectivement. En supposant que le *coefficient* q de la sphère s ait été choisi *arbitrairement une fois pour toutes*, l'expérience précédente fera connaître le coefficient d'influence q' de la sphère s' :

$$q' = \lambda q = q \frac{f'_1}{f_1}$$

Des expériences analogues permettront de déterminer les coefficients q'' ($= q \frac{f''_1}{f_1}$), $q''' \dots$, propres à d'autres sphères électrisées s'' , $s''' \dots$. Deux coefficients tels que q et q' devront d'ailleurs être affectés

tés du même signe ou de signes contraires, suivant que les forces f_1 et f'_1 ont même direction ou des directions opposées.

2° Nous pouvons dès lors écrire :

$$\frac{f_1}{q} = \frac{f'_1}{q'} = \frac{f''_1}{q''} = \dots = h_1$$

La valeur du rapport h_1 , mesurée au point M_1 du champ, est donc la même, par suite du choix des coefficients $q, q', q'' \dots$, quelle que soit la sphère d'épreuve employée ($s, s', s'' \dots$). On aurait de même, pour le point M_2 du champ :

$$\frac{f_2}{q} = \frac{f'_2}{q'} = \frac{f''_2}{q''} = \dots = h_2$$

et ainsi de suite. Chacun des rapports $h_1, h_2, h_3 \dots$ est donc indépendant de la nature de la sphère d'épreuve choisie, et ne dépend que de l'état du champ respectivement aux points $M_1, M_2, M_3 \dots$; c'est-à-dire que $h_1, h_2, h_3 \dots$ sont des coefficients caractéristiques de l'état du champ en ces divers points.

Nous avons ainsi en évidence, dans l'expression de la force f qui agit sur une sphère d'épreuve quelconque s en un point M , un coefficient q qui ne dépend que de la sphère s et de son état d'électrisation, et un coefficient h qui ne dépend que de l'état du champ au point M :

$$f = h q$$

Imaginons aux points $M_1, M_2, M_3 \dots$ des vecteurs ayant mêmes directions que les forces $f_1, f_2, f_3 \dots$ et ayant pour grandeurs respectives $h_1, h_2, h_3 \dots$; nous appellerons ces vecteurs *intensités du champ électrique* aux points $M_1, M_2, M_3 \dots$, et nous écrirons en conséquence :

$$\vec{f} = \vec{h} q \quad (1)$$

la notation \vec{f} (ou \vec{h}) représentant *en grandeur et en direction* un vecteur de grandeur f (ou h).

En réalité, aucune expérience aussi complète que celle que nous venons d'indiquer n'a peut-être été faite dans le but spécial d'établir la notion expérimentale et précise de l'intensité h aux divers

points d'un champ électrique. Cette notion a plutôt été admise comme évidente *a priori* par tous les expérimentateurs depuis Coulomb, mais on peut la considérer comme parfaitement établie par l'ensemble de leurs expériences, qui constitue une vérification *a posteriori*.

9. Généralité de la notion d'intensité du champ électrique. — L'intensité h , relativement facile à mesurer dans un champ électrique stable, existe encore évidemment dans un champ variable, quoique étant alors plus difficile à déterminer. Les variations d'état du champ peuvent même être si rapides que la mesure de l'intensité au moyen de la sphère d'épreuve ne soit plus possible. Mais, comme on le verra par la suite, *ce vecteur h intervient dans l'étude de toutes les manifestations de l'électricité*; de telle sorte que nous aurons d'autres procédés pour la mesurer, même dans les corps solides. Les théories de l'électrostatique, des courants électriques, de l'induction électromagnétique, etc., malgré la dissemblance apparente des phénomènes, *ont pour but en effet la détermination de la loi de variation du vecteur h* , d'abord dans l'état stable et ensuite dans l'état variable du champ électrique. La loi complète de cette variation sera exprimée finalement par des équations contenant les dérivées partielles (par rapport au temps et à l'espace) du vecteur h , de même que la loi des vibrations d'un corps élastique est représentée par des équations contenant les dérivées partielles d'un vecteur (déplacement des molécules).

Indépendamment de la notion d'intensité du champ, l'étude ultérieure de l'électricité ne nous fournira que deux *nouvelles notions expérimentales* précises, savoir celles des deux coefficients spécifiques électriques des corps : le pouvoir inducteur k et la conductibilité c . Toutes les autres notions qu'il sera utile de créer pour faciliter le langage : potentiel électrique, quantité d'électricité, capacité électrostatique, intensité du champ magnétique d'un courant, etc., seront définies uniquement en fonction du vecteur h , de ses dérivés partielles et des coefficients spécifiques k , etc.

Le vecteur h doit donc jouer un rôle capital, et il importe de se familiariser avec cette notion, comme en mécanique on se familia-

rise avec celle de force. Dans toute la mécanique rationnelle on ne définit les forces qu'*en grandeur et en direction*, car on n'en saurait définir la nature. La définition de l'intensité h d'un champ électrique donnée ci-dessus est donc aussi complète que celle de la force.

Y a-t-il lieu de chercher quelle est la nature physique ou *mécanique* de ce vecteur h , qui joue un rôle aussi important en électricité, et par là même de faire rentrer les phénomènes électriques dans le domaine de la mécanique rationnelle ? C'est là une tendance naturelle et très générale des esprits ; mais on a toujours fait fausse route en s'y abandonnant. La mécanique rationnelle n'étudie qu'une partie restreinte des phénomènes physiques ; rien n'autorise à penser que l'étude d'une nouvelle branche de la physique ne saurait introduire des notions irréductibles à celles de longueur, de masse et de temps. Or, malgré l'étendue de nos connaissances en électricité, la notion d'intensité du champ électrique ne se rattache pas plus aux trois notions fondamentales de la mécanique que celles-ci ne se rattachent entre elles. Nous la considérerons donc elle-même comme *fondamentale* ; mais toutes les autres que nous rencontrerons en électricité seront des notions dérivées de celle-là et de celles de longueur, temps et masse.

10. Existence d'un potentiel électrique dans un champ stable.

— Considérons le champ électrique créé par des corps électrisés, et supposons d'abord que le diélectrique soit de l'air parfaitement isolant, de telle sorte que l'état du champ soit *stable*. Si l'on déplace des conducteurs électrisés, on constate que l'état du champ varie ; mais *si l'on ramène ces conducteurs dans leurs positions initiales, le champ reprend identiquement son état primitif*. Ces déplacements ayant été faits sans création de forces vives, ni dégagement de chaleur (v. § 6), ni réactions chimiques, l'énergie totale du système des corps situés dans le champ n'a pas varié. *Le travail total des forces électriques doit donc être nul* lorsque les conducteurs ont repris leurs positions initiales.

Appliquons ceci au cas d'une petite sphère d'épreuve, à laquelle on fait décrire un chemin fermé quelconque C dans le champ. Le travail total T de la force variable f qui agit sur elle le long

de ce chemin est nul ; c'est-à-dire, en désignant par ds un élément du contour C :

$$\mathcal{E} = \int_C f ds \cos (f, ds) = 0$$

Il en résulte, en vertu d'un théorème de mécanique bien connu, que cette force $f = h q$ (§ 8) dérive d'un potentiel *uniforme* ; et il en est de même du vecteur \bar{h} (intensité du champ) qui ne diffère de f que par le facteur constant q , coefficient d'influence de la sphère d'épreuve. Nous allons du reste développer la démonstration de l'existence du *potentiel électrique*.

Si X, Y, Z désignent les projections, sur trois axes de coordonnées rectangulaires, du vecteur h existant au point (x, y, z) , l'équation ci-dessus peut s'écrire :

$$\frac{\mathcal{E}}{q} = \int_C h ds \cos (h, ds) = \int_C (X dx + Y dy + Z dz) = 0 \quad (2)$$

Or, par une transformation bien connue d'intégrale, dont nous ferons souvent usage dans la suite, on sait que l'on obtient l'identité :

$$\int_C X dx + Y dy + Z dz = \int_S \left\{ l \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right) + m \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \right) + n \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) \right\} dS \quad (3)$$

L'intégrale du premier membre est prise le long du contour fermé C dans le sens indiqué par les flèches (fig. 1) ; celle du second membre s'étend aux divers éléments dS d'une surface S quelconque limitée au contour C . On doit attribuer à S une face positive (+) et une face négative (—) définies par cette condition que, pour un observateur debout sur la face

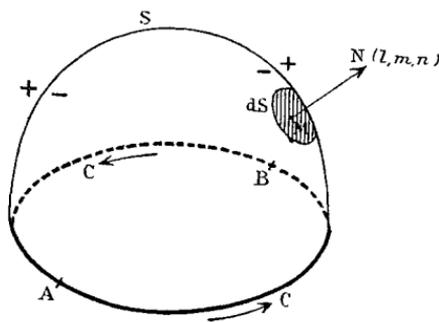


Fig. 1.

positive les pieds en M et la tête en N , le contour C paraisse décrit de droite à gauche ; l, m, n désignent les cosinus directeurs de la normale MN à la face positive.

La relation (2), étant vraie pour un contour C quelconque, l'est pour un contour infiniment petit, auquel correspond une surface S réduite à un élément infiniment petit dS . On doit donc avoir, d'après l'identité (3) :

$$\left\{ l \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right) + m \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \right) + n \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) \right\} dS = 0$$

quelle que soit d'ailleurs l'orientation (l, m, n) de l'élément de surface dS . Il en résulte les conditions suivantes, qui expriment l'existence d'un potentiel électrique :

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

Le potentiel sera une fonction V définie en chaque point B (x, y, z) par la formule

$$V_A - V_B = \int_A^B X dx + Y dy + Z dz = \int_A^B h ds \cos(h, ds) \quad (5)$$

V_A et V_B désignant les valeurs respectives de V en un point fixe arbitraire A et au point B (x, y, z) , et l'intégration étant faite le long d'un chemin *quelconque* allant de A à B. L'intégrale (5) a en effet la même valeur le long de deux chemins différents C' et C'' allant de A à B ; car l'ensemble de ces deux chemins formant un contour fermé C (fig. 1), on a d'après (2) :

$$\int_C h ds \cos(h, ds) = \int_{C'} h ds \cos(h, ds) - \int_{C''} h ds \cos(h, ds) = 0$$

La différence de potentiel $V_A - V_B$ ayant une valeur unique et bien déterminée, on dit que le potentiel est *uniforme*. (On verra aux paragraphes 84 et 72 des exemples de potentiel non uniforme.)

La formule (5) différenciée donne :

$$-dV = X dx + Y dy + Z dz$$

d'où :

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (6)$$

Telles sont les relations qui existent entre l'intensité (X, Y, Z) du champ électrique et le potentiel V.

11. Sur le sens du potentiel électrique. — Pour que le potentiel V_B au point (x, y, z) ait une valeur bien déterminée, il faut fixer une fois pour toutes la valeur de V_A , que l'on peut du reste choisir arbitrairement. Le potentiel électrique *en un point donné* n'est donc défini par la formule (5) qu'à une constante arbitraire près, et peut être à volonté positif, négatif ou nul. D'après cette définition même, le potentiel en un point donné n'est pas une quantité physique déterminée et mesurable comme la température ou la pression d'un gaz ; *il n'a même aucun rapport avec l'état physique du corps en ce point*. Par contre, la différence $(V_A - V_B)$ des potentiels en deux points donnés est une chose parfaitement définie et mesurable.

Comme la différence de potentiel entre deux points A et B intervient fréquemment en Électrostatique, on a cherché à en rendre le sens plus familier en la représentant comme une différence *de niveau* électrique, ou une différence *de pression* électrique, etc. Pour se rendre exactement compte du sens physique de cette quantité, il faut se reporter à sa définition par l'intégrale (5). On voit que la différence de potentiel ne peut être considérée comme *une différence d'état électrique* entre les points A et B, puisqu'elle est indépendante de l'état physique des corps en chacun des points A et B. *Elle dépend au contraire exclusivement de l'état électrique du champ dans l'intervalle qui sépare les deux points*. Pour préciser, supposons que l'on prenne comme chemin d'intégration la droite AB de longueur l ; le rapport

$$\frac{V_A - V_B}{l} = \frac{\int_A^B h \, ds \cos(h, ds)}{\int_A^B ds}$$

est la valeur moyenne, le long de la droite AB, du produit $h \cos(h, ds)$, c'est-à-dire de l'intensité h du champ projetée sur AB. La différence de potentiel $(V_A - V_B)$ est donc le produit de la longueur AB par l'intensité moyenne du champ suivant AB, et la véritable indication que fournit sa mesure est celle de cette *intensité moyenne du champ*.

Le raisonnement fait au paragraphe 10 pour établir l'existence

du potentiel dans un champ électrique *stable* ne s'applique rigoureusement qu'à l'air sec et à un très petit nombre de diélectriques ; car nous avons supposé : 1° qu'il n'intervient point de dégagement de chaleur ; 2° que le champ reprend exactement le même état lorsque les conducteurs électrisés déplacés repassent par leurs positions primitives. Dans les conducteurs, même extrêmement médiocres, puisqu'il y a déperdition d'énergie électrique par transformation en chaleur (§ 6), le raisonnement est inapplicable. Du reste, ces corps présentent plus ou moins le phénomène de l'*électrisation résiduelle* ; c'est-à-dire que si d'un mauvais isolant on approche un corps électrisé et qu'on éloigne ensuite celui-ci, on constate que l'état électrique final de cet isolant n'est pas identique à son état initial, ce qui modifie l'état du champ.

On ne saurait néanmoins conclure de là que la condition nécessaire de l'existence d'un potentiel est le parfait isolement du milieu. Nous verrons au contraire (§ 14) que lorsqu'on établit dans un conducteur un champ électrique *parfaitement stable*, on y constate *expérimentalement* l'existence du potentiel.

En réalité, *l'existence du potentiel nous apparaît comme la condition de stabilité du champ électrique* ; de telle sorte qu'un champ qui a subi une perturbation électrique et qui est abandonné à lui-même tend, par des variations progressives dont nous ne connaissons pas encore la loi, vers un état stable qu'il atteindra dès que la répartition du vecteur h (X , Y , Z) satisfera aux conditions (4) de l'existence du potentiel. Cette idée sera confirmée et précisée par l'étude du champ dans l'état variable (§ 119).

12. Surfaces équipotentiellles ; lignes de flux. — Considérons un champ électrique stable créé par des conducteurs électrisés dans un milieu parfaitement isolant. Ce champ admet un potentiel, c'est-à-dire que les trois fonctions X , Y , Z , composantes de l'intensité h , satisfont aux trois équations (4), lesquelles, comme on sait, se réduisent en réalité à deux relations distinctes. D'autre part les équations (6) montrent que la connaissance du potentiel V aux divers points du champ suffirait pour en déduire celle de X , Y , Z et, par suite, du vecteur h . Le calcul de la distribution de l'intensité h dans le champ tout entier se ramène donc à la détermina-

tion d'une seule fonction V ; c'est un problème que nous traiterons plus tard.

Le lieu des points du champ où le potentiel a une valeur constante C est une surface qui a pour équation

$$V(x, y, z) - C = 0$$

En donnant à C toutes les valeurs possibles, on aura une série continue de surfaces, dites *équipotentielles*. Les cosinus directeurs de la normale à une telle surface au point (x, y, z) , étant proportionnels à $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$, les formules (6) montrent : 1° que l'intensité h du champ en ce point a précisément la direction de la normale à la surface équipotentielle ; 2° que le sens de ce vecteur h est celui dans lequel le potentiel décroît.

Si donc on imagine le champ sillonné de lignes tangentes, en chacun de leurs points, à la direction du vecteur h en ce point, ces lignes, que nous appellerons *lignes de flux*, seront les trajectoires orthogonales des surfaces équipotentielles. Leurs équations différentielles sont, d'après leur définition même :

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

Nous attribuerons à une ligne de flux, en chacun de ses points, un sens de parcours déterminé, qui sera celui de l'intensité h du champ en ce point.

13. Rôle des conducteurs en électrostatique. — Dans le champ électrique stable que nous venons de considérer, nous savons que l'intensité h du champ est nulle dans tout le volume occupé par les conducteurs. Il en résulte que l'intégrale du second membre de l'équation (5), prise le long d'un chemin quelconque AB à l'intérieur d'un conducteur est nulle : $V_A - V_B = 0$; c'est-à-dire que le potentiel a une valeur constante dans tout le conducteur, notamment en tous les points de sa surface.

La surface d'un conducteur en contact avec le milieu diélectrique est pour les fonctions X, Y, Z une *surface de discontinuité du champ*, puisque celui-ci existe dans le diélectrique et ne pénètre pas dans le conducteur ; elle peut encore être considérée

comme une surface *limite* du champ. Elle est équipotentielle, et, par conséquent, les lignes de flux y aboutissent normalement; c'est-à-dire que l'intensité du champ au contact d'un conducteur est normale à sa surface.

L'égalité du potentiel aux divers points de la surface d'un conducteur est une des propriétés les plus rigoureusement démontrées par l'expérience journalière des électromètres. Considérons, par exemple, l'électromètre absolu, à plateaux parallèles, de sir W. Thomson, qui par sa construction est mis à l'abri de toute cause étrangère de perturbation; nous en supposons connu le dispositif essentiel, mais non la théorie, qui sera exposée au para-

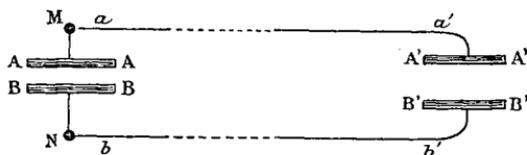


Fig. 2.

graphe 27. L'attraction réciproque des deux plateaux AA, BB (fig. 2) est d'autant plus grande que l'intensité du champ électrique compris entre eux est plus grande (ou que leur électrisation est plus forte, suivant le langage ordinaire); lorsque ce champ n'existe pas, l'attraction est nulle. Or, lorsque les bornes M et N de l'électromètre communiquent entre elles par un *conducteur continu*, quelle que soit la longueur de ce conducteur et quelque forte électrisation qu'on lui donne en le reliant, par exemple, à un pôle d'une machine électrique, on constate que l'attraction des plateaux est nulle; donc l'intensité h du champ entre eux est nulle. Par conséquent la différence de potentiel ($V_A - V_B$) entre les plateaux AA et BB (définie par l'intégrale de la formule 5) est nulle lorsqu'ils font partie d'un conducteur continu.

Supposons maintenant les deux bornes M et N reliées aux deux pôles d'une pile et, par conséquent, l'électromètre (AA, BB) *chargé*. Si l'on vient à faire communiquer avec ces bornes, — par l'intermédiaire de deux fils conducteurs aa' , bb' entourés d'une substance parfaitement isolante, — les plateaux A'A', B'B' d'un deuxième électromètre, celui-ci *se charge* aussi; et s'il est identique à l'élec-

tromètre (AA, BB), il donne la même indication que celui-ci. On en conclut que les champs électriques dans les deux électromètres sont identiques et que, par conséquent, les différences de potentiel ($V_A - V_B$) et ($V_{A'} - V_{B'}$) sont égales. Cette égalité peut se traduire ainsi :

Imaginons un contour *fermé* C allant : 1° du plateau AA au plateau A'A' par l'intérieur du fil conducteur aa' ; 2° de A'A' à B'B' par une ligne tracée dans le diélectrique ; 3° de B'B' à BB par le fil $b'b'$; 4° de BB à AA par le diélectrique. L'intégrale $\int h ds \cos (h, ds)$ est nulle pour la première et la troisième parties de ce contour, puisque h est nul dans les conducteurs ; elle est égale à $V_{A'} - V_{B'}$ pour la deuxième partie et à $V_B - V_A$ pour la quatrième. Donc :

$$\int h ds \cos (h, ds) = (V_{A'} - V_{B'}) - (V_A - V_B) \quad (7)$$

L'expérience précédente montre que cette intégrale est nulle, ce qui est conforme à la théorie (formule 2) et la vérifie.

Avant d'établir la communication entre les deux électromètres, $V_{A'} - V_{B'}$ est nul, mais $V_A - V_B$ est différent de zéro. Donc au moment précis où la communication est établie, l'intégrale (7) est différente de zéro, et l'état du champ ainsi créé ne peut subsister ; c'est-à-dire que l'on a produit une perturbation électrique qui, à partir des contacts M et N où elle a pris naissance, s'étend de proche en proche (avec une extrême rapidité) à l'espace environnant. Le nouvel état stable que le champ acquiert au bout d'un temps très court est tel que l'intégrale (7) doit être nulle et, par conséquent, que $V_{A'} - V_{B'} = V_A - V_B$. La condition (2) de stabilité du champ suffit donc à faire prévoir que le second électromètre doit s'électriser exactement comme le premier.

14. Existence du potentiel électrique dans les conducteurs. —

Un des moyens le plus fréquemment employés pour produire un champ électrique stable dans des corps conducteurs consiste à relier les deux pôles A et B d'une pile *constante* P (pile Daniell, par exemple) par une chaîne continue de conducteurs AMNLB (fig. 3). L'ensemble de la pile et de ces conducteurs forme un circuit *fermé*.

Si un fil métallique Mm touche ce circuit en un seul point M ,

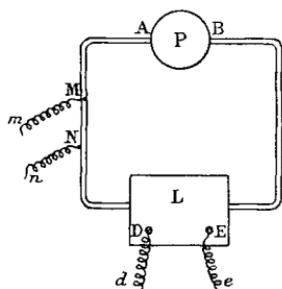


Fig. 3.

en reliant aux deux bornes d'un électromètre respectivement deux points quelconques de ce fil Mm , on constate une différence de potentiel nulle; le conducteur Mm non intercalé dans le circuit reste équipotentiel. Si au contraire on relie à l'électromètre deux points M et N du circuit par des fils Mm et Nn , cet instrument accuse une certaine différence de potentiel v , qui ne varie pas avec le temps, et dont la grandeur

est indépendante de l'électromètre employé, ainsi que de la longueur et du parcours des fils Mm et Nn .

La surface du conducteur $AMN\dots$ intercalé dans le circuit n'est donc pas équipotentielle. L'indication v de l'électromètre, qui ne dépend que de la position des points choisis M et N , représente la différence de potentiel $V_M - V_N$ de ces deux points mesurée dans le milieu ambiant, où nous savons qu'il existe un potentiel; c'est-à-dire que l'on a :

$$v = V_M - V_N = \int_M^N h \, ds \cos(h, ds)$$

cette intégrale devant être prise le long d'un chemin MN extérieur au circuit. Ce chemin suivra, par exemple, le fil Mm (où $h = 0$), — puis traversera le diélectrique de l'électromètre (ce qui donne l'élément d'intégrale v) et suivra le fil nN (où $h = 0$). Quant à l'intérieur du circuit, rien ne prouve encore que l'intégrale précédente ait une valeur indépendante du chemin suivi.

Pour étudier le champ électrique à l'intérieur même du circuit, supposons que l'on ait intercalé un conducteur liquide L . Si on relie les deux bornes de l'électromètre à deux points D et E du liquide par l'intermédiaire de deux fils métalliques fins Dd et Ee , recouverts d'une substance isolante et dénudés seulement à leurs extrémités D et E , on troublera très peu le champ électrique dans le volume L , et l'on constatera à l'électromètre une différence de potentiel v qui ne dépend (comme pour les points M et N) que de la position des points choisis D et E .

En particulier, on trouve : $v = 0$ quand D et E sont confondus. De là nous allons conclure à l'existence du potentiel dans le conducteur L .

Les points D et E étant confondus, considérons un contour C suivant l'intérieur des fils dD et Ee et se fermant à travers le diélectrique de l'électromètre. L'intégrale :

$$\int_C h ds \cos (h, ds) = \int_C X dx + Y dy + Z dz$$

prise le long de ce contour, se réduit évidemment à v , c'est-à-dire à zéro. En vertu de l'identité (3) du paragraphe 10, on peut donc écrire :

$$\int_S \left\{ l \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right) + m \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \right) + n \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) \right\} dS = 0 \quad (8)$$

S désignant une surface quelconque limitée au contour C . Cette surface S comprend :

1° Une partie S' située à l'extérieur du liquide, c'est-à-dire dans une région où les conditions (4) de l'existence du potentiel sont satisfaites ;

2° Une partie S'' située dans le liquide.

La partie de l'intégrale relative à S' étant donc nulle, il en est de même, d'après (8), de celle qui est relative à S'' . Mais le parcours des fils dD et eE à l'intérieur du liquide peut être choisi arbitrairement, ce qui revient à dire que l'on peut choisir arbitrairement la surface S'' . Si l'on suppose S'' réduite à un élément dS , l'équation (8) se réduit à :

$$\left\{ l \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right) + m \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \right) + n \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) \right\} dS = 0$$

et comme l'orientation de l'élément dS est arbitraire, on en conclut qu'en tout point du champ à l'intérieur du conducteur L les conditions (4) du potentiel sont satisfaites :

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$$

Un raisonnement semblable montrerait de même qu'un champ

électrique *stable* admet un potentiel aussi bien *dans les diélectriques à électrisation résiduelle* que dans les conducteurs.

Le champ électrique tout entier admet donc un potentiel uniforme dans le circuit conducteur AMNLB comme à l'extérieur. Toutefois il convient de faire une réserve *pour la partie du champ comprise dans le volume de la pile*, que nous n'avons pas étudiée et sur laquelle nous reviendrons au paragraphe 84.

Remarques. — On remarquera combien la méthode d'exploration du champ électrique dans les conducteurs est supérieure, au point de vue de la précision, à la méthode d'exploration par la sphère d'épreuve dans les isolants, *à cause de la stabilité* quasi absolue que l'on peut donner au champ par l'emploi de la pile. Tandis que dans les expériences d'électrostatique les variations du champ dues à la dissipation graduelle de l'énergie électrique créent de si grandes difficultés, cet inconvénient n'existe pas pour le champ stable de la pile, puisque l'énergie électrique dissipée en chaleur dans un circuit, même avec une grande rapidité, est réparée *instantanément*, comme le montre la constance absolue du champ (dès que le régime permanent du courant est atteint).

L'exploration du champ dans le liquide conducteur L au moyen de la sphère d'épreuve (§ 7) ne donnerait aucun résultat. En effet si l'on introduit une telle sphère en un point D du liquide, son état électrique ne dépend plus que de la position du point D dans le circuit et nullement de son électrisation primitive ; le coefficient d'influence g n'a plus de sens.

CHAPITRE III

MASSES ÉLECTRIQUES

15. Rôle des masses électriques. — Nous n'avons absolument aucune raison expérimentale pour croire à l'existence physique de masses électriques exerçant des actions à distance. Mais rien ne nous empêche d'imaginer des fonctions mathématiques jouissant, *par suite de leur définition même*, de propriétés que l'on pourra, en empruntant le langage de la Mécanique, énoncer sous la forme de lois d'actions exercées à distance par des masses fictives. En cela nous ne ferons pas autre chose que d'énoncer des identités mathématiques. *Tel est exactement le rôle curieux, mais inutile, que l'on doit attribuer aux masses électriques et aux actions à distance.*

Le présent chapitre, qui sera consacré à la démonstration de cette proposition, contient quelques formules mathématiques qui nous seront utiles dans la suite.

16. Théorème sur les actions en raison inverse du carré des distances. — La proposition énoncée ci-dessus résulte du théorème suivant.

Considérons un corps A (de dimensions minimales) qui, étant porté en divers points $M_1 M_2 M_3 \dots$ d'un certain espace U, y soit soumis respectivement à des forces $f_1 f_2 f_3 \dots$ d'origine quelconque (pesanteur, électricité, etc.). La force f qui s'exerce sur A en chaque point (x, y, z) étant bien déterminée en grandeur et en direction, mais variant d'un point à un autre de la région U *suivant une loi absolument quelconque*, on peut toujours imaginer une répartition convenable de *masses fictives* agissant à distance sur A, suivant les

lois indiquées ci-après, et qui, substituées à la cause véritable des forces f , exerceraient identiquement le même effet résultant sur A en tout point de la région U.

Ce système de masses fictives, dont la loi de distribution dans l'espace U sera donnée au paragraphe 17, comprend :

1° Des masses $m_1 m_2 m_3 \dots$ (positives ou négatives) (fig. 4)

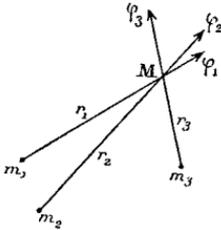


Fig. 4.

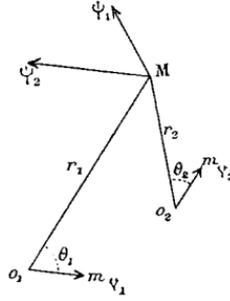


Fig. 5.

exerçant sur le corps A, placé en M, des forces $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \dots$ dirigées suivant les droites $m_1 M, m_2 M, \dots$ et obéissant à la loi de Newton :

$$\varphi_1 = \frac{m_1}{r_1^2} \quad \varphi_2 = \frac{m_2}{r_2^2} \quad \varphi_3 = \frac{m_3}{r_3^2}$$

2° Des masses *vectorielles*, ayant à la fois une grandeur et une direction, et représentées par les vecteurs $\overline{m_{v1}} \overline{m_{v2}} \overline{m_{v3}} \dots$ appliqués aux points $O_1 O_2 O_3 \dots$ (fig. 5). Ces masses vectorielles exercent sur le corps A, placé en M, des forces $\psi_1 \psi_2 \psi_3 \dots$ obéissant à la loi donnée par Laplace en Électromagnétisme (action d'un élément de courant, représenté par le vecteur m_{v1} , sur un pôle d'aimant, placé en M). Ainsi la force ψ_1 est perpendiculaire au plan de la droite $O_1 M$ et du vecteur m_{v1} , et dirigée de la droite vers la gauche pour un observateur couché le long du vecteur m_{v1} , les pieds en O_1 et la tête en m_{v1} , et regardant le point M (règle d'Ampère). En outre, la grandeur de cette force a pour expression :

$$\psi_1 = m_{v1} \frac{\sin \theta_1}{r_1^2} \quad \psi_2 = m_{v2} \frac{\sin \theta_2}{r_2^2}$$

θ_1 désignant l'angle de la droite $O_1 M$ et du vecteur m_{v1} .

Si l'on compose, en chaque point M de la région U, toutes ces

forces élémentaires $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \dots \psi_1 \psi_2 \psi_3 \dots$ qui sont *censées* s'y exercer sur A, leur résultante sera identique à la force f qui s'y exerce *réellement* ; ce qui s'exprime par l'égalité géométrique :

$$\bar{f} = \bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2 + \dots \bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2 + \dots$$

ou plus simplement :

$$f = \sum \frac{\bar{m}}{r^2} + \sum \overline{m_v \frac{\sin \theta}{r^2}} \quad (1)$$

Pour démontrer cette identité, il suffira évidemment de démontrer que la projection de la force f sur un axe quelconque, par exemple sur l'axe des x d'un système de coordonnées cartésiennes, est égale à la somme des projections des composantes $\frac{\bar{m}}{r^2}$ et $\overline{m_v \frac{\sin \theta}{r^2}}$.

A cet effet nous désignerons par α, β, γ les coordonnées de la position M du corps A ; par x, y, z celles d'une masse m ou d'une masse vectorielle m_v ; par X, Y, Z les projections de la force f sur les trois axes ; par m_x, m_y, m_z , les projections du vecteur m_v sur ces mêmes axes. La formule (1) donne alors, en projetant sur l'axe des x , et tenant compte de la direction de chaque force $\bar{\varphi}$ ou $\bar{\psi}$ définie ci-dessus :

$$X = \sum m \frac{\alpha - x}{r^3} + \sum \frac{(\beta - y) m_z - (\gamma - z) m_y}{r^3} \quad (2)$$

Telle est la formule que nous allons établir, en même temps que nous trouverons la loi de répartition des masses et des masses vectorielles dans la région U considérée. Dans cette démonstration, au lieu de considérer f spécialement comme une force, nous le considérerons comme un *vecteur* de nature quelconque (force, vitesse, intensité de champ électrique, flux de chaleur, etc.), afin de donner au théorème toute sa généralité.

17. Démonstration du théorème précédent. — Nous nous appuierons sur le lemme suivant, dont on fait un fréquent usage en électricité :

Lemme : Soit U un espace limité par une surface S et à l'inté-

rieur duquel φ , u , v , w sont des fonctions continues de (x, y, z) .
On a identiquement :

$$\int_u \left[\frac{d}{dx} (\varphi u) + \frac{d}{dy} (\varphi v) + \frac{d}{dz} (\varphi w) \right] d\omega + \int_S \varphi (lu + mv + nw) dS = 0 \quad (3)$$

$d\omega$ désignant un élément de volume infiniment petit ($dx dy dz$ par exemple) de la région U , et dS un élément infiniment petit de la surface S . Les notations \int_u et \int_S indiquent des intégrations s'étendant respectivement au volume U et à la surface S . Enfin

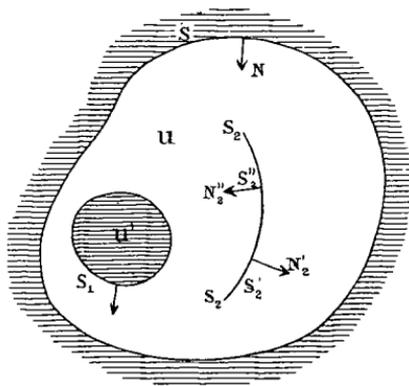


Fig. 6.

l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale N en un point de S dirigée vers la région U , comme l'indique la flèche (fig. 6).

Si la région U contient des cavités qui n'en fassent point partie (U' par exemple, figurée en hachures), la formule (3) s'applique encore, à la condition que la notation S comprenne toutes les surfaces limites de U , c'est-à-dire la surface extérieure S et les surfaces intérieures telles que S_1 .

Nous aurons encore à étudier des cas où les fonctions φ , u , v , w sont discontinues sur une (ou plusieurs) surface S_2, S_2' fermée ou non, située dans la région U ; c'est-à-dire où ces fonctions varient brusquement quand on traverse cette surface, mais sont, à part cela, continues dans tout le volume U . La formule (3) s'applique encore, à la condition de comprendre dans la notation S les deux faces S_2' et S_2'' de la surface S_2 , ce qui revient à exclure de la région U une sorte de cavité, de volume nul, comprise

entre ces deux faces. Les flèches N'_2 et N''_2 indiquent sur chaque face le sens de la normale dirigée vers l'intérieur de la région U.

Démonstration de la formule (2). — Considérons une région U, limitée par une surface S (pouvant comprendre des surfaces

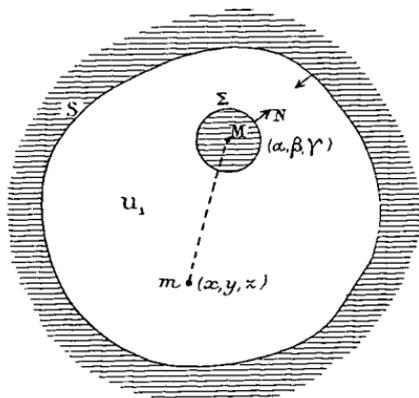


Fig. 7.

limites intérieures et des surfaces de discontinuité), et dans laquelle les composantes X, Y, Z d'un vecteur f soient des fonctions continues de x, y, z (fig. 7).

Si α, β, γ désignent les coordonnées d'un point fixe M, x, y, z celles d'un point variable m , et r la distance de ces deux points, on a :

$$r^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = \frac{\alpha - x}{r^3} \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} = \frac{\beta - y}{r^3} \quad \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} = \frac{\gamma - z}{r^3} \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{r} = 0 \quad (5)$$

Ceci posé, si l'on désigne par U_1 la région U diminuée de la cavité comprise à l'intérieur d'une sphère Σ , dont le centre est en M, par $S + \Sigma$ l'ensemble des surfaces qui composent S et de la sphère Σ , on aura, par des applications évidentes de la formule (3), les trois identités :

$$\int_{u_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(X \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(X \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(X \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) \right\} d\omega$$

$$+ \int_{S+\Sigma} X \left[l \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} u + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + n \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right] dS = 0$$

$$\int_{u_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(Y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(Y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right) \right\} d\omega + \int_{S+\Sigma} Y \left[m \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - l \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right] dS = 0$$

$$\int_{u_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(Z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(Z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) \right\} d\omega + \int_{S+\Sigma} Z \left[n \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - l \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right] dS = 0$$

Ajoutons membre à membre les trois identités, en tenant compte de la relation (5); on trouve, réductions faites :

$$\int_{u_1} \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \right) \right\} d\omega$$

$$+ \int_{S+\Sigma} \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} (lX + mY + nZ) - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} (lY - mX) + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} (nX - lZ) \right\} dS \left. \vphantom{\int_{u_1}} \right\} = 0 \quad (6)$$

Calculons la partie de cette intégrale relative à la sphère Σ . On a, en tout point (x, y, z) de cette sphère :

$$l = \frac{x - \alpha}{r} \quad m = \frac{y - \beta}{r} \quad n = \frac{z - \gamma}{r}$$

Donc, en tenant compte des relations (4) et désignant par $d\omega$ l'angle solide $\frac{dS}{r^2}$ sous lequel l'élément de sphère dS est vu du centre M , il vient :

$$\int_{\Sigma} \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} (lX + mY + nZ) - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} (lY - mX) + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} (nX - lZ) \right\} dS$$

$$= - \int_{\Sigma} \frac{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2}{r^2} X d\omega = - \int_{\Sigma} X d\omega = - 4\pi X_m$$

X_m désignant la valeur moyenne de X sur la sphère Σ .

Si l'on pose, pour abrégér :

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 4\pi\rho \tag{7}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 4\pi\mu_x \quad \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = 4\pi\mu_y \quad \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 4\pi\mu_z \tag{8}$$

$$lX + mY + nZ = 4\pi\sigma \tag{9}$$

$$nY - mZ = 4\pi\tau_x \quad lZ - nX = 4\pi\tau_y \quad mX - lY = 4\pi\tau_z \tag{10}$$

la formule (6) devient ainsi l'identité :

$$\begin{aligned} X_m = & \int_{U_1} \rho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\omega + \int_{U_1} \left[\mu_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \mu_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right] d\omega \\ & + \int_S \sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS + \int_S \left[\tau_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \tau_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right] dS \end{aligned}$$

Faisons enfin tendre vers zéro le rayon de la sphère Σ . Le volume U_1 devient le volume total U limité par la surface S , et l'intégrale relative à U_1 tend vers une valeur bien déterminée. Quant à la valeur moyenne X_m , elle devient égale à la valeur de X au point $M(\alpha, \beta, \gamma)$:

$$\left. \begin{aligned} X = & \int_U \rho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\omega + \int_U \left[\mu_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \mu_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right] d\omega \\ & + \int_S \sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS + \int_S \left[\tau_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \tau_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right] dS \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

Pour donner à cette formule la forme (2), imaginons dans chaque élément de volume $d\omega$ une masse fictive : $m' = \rho d\omega$, et sur chaque élément de surface dS une masse fictive $m'' = \sigma dS$; ρ désignera la *densité* des masses répandues dans le volume U , et σ la *densité superficielle* des masses réparties sur la surface S . En tenant compte des relations (4), on pourra poser :

$$\int_U \rho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\omega + \int_S \sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS = \sum m \frac{\alpha - x}{r^3}$$

m désignant l'une quelconque des masses m' ou des masses m'' , et la somme Σ se rapportant à l'ensemble de ces masses. On a ainsi le premier terme du second membre de la formule (2).

Imaginons de même dans chaque élément de volume $d\omega$, une masse vectorielle $m'_v = \mu d\omega$, dont les composantes suivant les axes de coordonnées aient pour valeurs :

$$m'_x = \mu_x d\omega \quad m'_y = \mu_y d\omega \quad m'_z = \mu_z d\omega$$

et, sur chaque élément de surface dS , une masse vectorielle $m''_v = \tau dS$, dont les composantes seront :

$$m''_x = \tau_x dS \quad m''_y = \tau_y dS \quad m''_z = \tau_z dS$$

les vecteurs $\bar{\mu}$ et $\bar{\tau}$ représenteront la *densité* des masses vectorielles m'_v et la *densité superficielle* des masses vectorielles m''_v . On pourra alors poser :

$$\int_U \left[\mu_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \mu_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right] d\omega + \int_S \left[\tau_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \tau_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right] dS = \sum \frac{(\beta - \gamma) m_z - (\gamma - z) m_y}{r^3}$$

Tel est le second terme du second membre de la formule (2).

Le théorème est donc démontré, et la loi de répartition des masses fictives, soit dans le volume U , soit sur la surface limite S (qui comprend les deux faces de chaque surface de discontinuité), est régie par les formules (7), (8), (9) et (10), qui font connaître en chaque point la *densité de volume* (ρ , μ) ou la *densité superficielle* (σ , τ).

18. Cas particuliers remarquables. — Nous donnerons à la région U , en chaque point de laquelle le vecteur f est bien déterminé, le nom de *champ du vecteur f* .

1° Si ce champ admet un potentiel, c'est-à-dire si les composantes X , Y , Z du vecteur f satisfont aux relations :

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$$

les relations (8) montrent que les composantes μ_x μ_y μ_z de la densité μ de masse vectorielle sont nulles. Donc alors il n'y a pas de masses vectorielles dans le volume U, et ce volume ne contient que des masses agissant à distance suivant la loi de Newton.

Nous dirons que ce champ est *newtonien*.

2° Supposons au contraire que l'on ait en tout point :

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

Alors, d'après la formule (7), la densité ρ de masse est nulle, et le volume U ne contient que des masses vectorielles agissant à distance suivant la loi de Laplace. Nous dirons que le champ est *laplacien*.

Dans ces deux cas la formule (1) prend les formes :

$$\bar{f} = \sum \frac{\bar{m}}{r^2} \text{ (champ newtonien)} \quad (12)$$

$$\bar{f} = \sum m_v \frac{\sin \theta}{r^2} \text{ (champ laplacien)} \quad (13)$$

La formule (1) montre en même temps qu'un *champ quelconque est la superposition d'un champ newtonien et d'un champ laplacien*.

Dans toutes les branches de la physique, on peut trouver des champs newtoniens et des champs laplaciens. En Optique on pourrait donner une explication des phénomènes par des actions laplaciennes à distance; en Chaleur on trouve des actions newtoniennes.

Application à la Chaleur. — Considérons un corps homogène dont une partie U est à température variable. La région U peut être considérée comme un *champ calorifique*, dont le vecteur f est, en chaque point, normal à la surface isotherme passant par ce point, et représente le *flux de chaleur* en ce point par unité de surface. Ce vecteur est lié à la température V par les formules :

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

en prenant la conductibilité du corps pour unité. Le champ admet

donc un potentiel V ; il est donc *newtonien*, et l'on peut lui appliquer l'identité (12). Cette identité exprime ici que le flux de chaleur f en un point (x, y, z) est identique à celui qui résulterait de l'action de *masses calorifiques* réparties dans le volume U et *envoyant instantanément* au point (x, y, z) en ligne droite, des quantités de chaleur $\frac{m}{r^2}$ proportionnelles à ces masses et à l'inverse du carré de la distance. Il est facile du reste de constater que la masse calorifique fictive m existante dans une parcelle quelconque du corps a même grandeur, au facteur 4π près, que la quantité de chaleur effectivement *rayonnée* par cette parcelle dans l'unité de temps.

19. Application à l'Électrostatique. — La base de notre théorie de l'électricité est la notion expérimentale et précise de l'*intensité du champ électrique*. La simple donnée de l'existence de ce vecteur \bar{h} , sans connaître aucune de ses propriétés expérimentales, nous permet d'appliquer le théorème précédent.

Considérons un champ électrique (ou même une partie quelconque U de ce champ), dont l'intensité \bar{h} au point (x, y, z) a pour composantes X, Y, Z . Imaginons la distribution suivante de masses fictives dans le champ :

1° Des *masses électriques* agissant à distance suivant la loi de Newton, et dont les densités de volume ρ et de surface σ sont définies par les formules (7) et (9) ;

2° Des *masses vectorielles électriques* agissant à distance suivant la loi de Laplace, et dont les densités de volume $\bar{\mu}$ et de surface $\bar{\tau}$ sont définies par les formules (8) et (10).

L'action de l'une de ces masses, placée en un point (x, y, z) , sur un point (α, β, γ) du champ consiste à créer en ce point une intensité élémentaire de champ égale à $\frac{m}{r^2}$ ou à $m_v \frac{\sin \theta}{r^2}$; la résultante de toutes les intensités élémentaires ainsi créées sera, *en vertu de la définition même des masses*, identique à l'intensité h réellement existante :

$$\bar{h} = \sum \frac{\bar{m}}{r^2} + \sum m_v \frac{\sin \theta}{r^2} \quad (14)$$

Ce théorème s'applique à un champ électrique quelconque stable

(comme en électrostatique) ou variable (phénomènes d'induction électromagnétique) et est indépendant de la nature des corps homogènes ou non, conducteurs ou diélectriques, situés dans le champ.

Dans le cas particulier d'un champ stable, qui admet un potentiel, nous savons que les masses vectorielles disparaissent et qu'il ne reste en jeu que les masses électriques proprement dites agissant suivant la loi de Newton (ou de Coulomb) ; la formule 14 se réduit à :

$$\bar{h} = \sum \frac{\bar{m}}{r^2} \quad (15)$$

On déduirait de là facilement que le potentiel électrique est égal à $\Sigma \frac{m}{r}$, à une constante arbitraire près.

On comprend immédiatement pourquoi l'hypothèse des fluides électriques agissant suivant la loi de Coulomb devait réussir en Électrostatique, où le champ admet un potentiel, et donner un *semblant d'explication* des phénomènes. Il est non moins évident que la théorie des fluides devait échouer dans l'état variable du champ, où la formule (15) est inexacte et doit être remplacée par la formule générale (14). Les nombreux efforts tentés par d'illustres savants, notamment par Gauss et Weber, pour compléter cette théorie en imaginant de nouvelles actions *dues au mouvement* supposé des masses électriques n'ont pu aboutir ; il eût suffi d'imaginer des masses vectorielles électriques (analogues aux masses vectorielles magnétiques ou éléments de courant dont le génie de Laplace a deviné la loi d'action à distance) (v. § 106).

Citons quelques propriétés des masses électriques :

1° On donne quelquefois comme *loi physique* (principe de la conservation de l'électricité) la propriété suivante : La somme des masses électriques d'un champ complet (par exemple du champ créé à l'intérieur d'un conducteur creux) est toujours nulle : $\Sigma m = 0$. Faraday avait déjà reconnu que l'on ne peut créer des masses électriques d'un certain signe sans créer en égale quantité des masses électriques de signe contraire. *Cette loi n'est que la constatation d'une identité mathématique résultant de la définition des masses.* En effet une application évidente de la for-

mule (3) du paragraphe 17 au champ électrique U donne l'identité :

$$\int_U \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) d\omega + \int_S (lX + mY + nZ) dS = 0$$

ou, en tenant compte des notations (7) et (9) :

$$\int_U \rho d\omega + \int_S \sigma dS = \Sigma m = 0$$

2° On dit, dans la théorie des fluides électriques que l'électricité se porte à la surface des conducteurs, c'est-à-dire : 1° que les masses électriques se transportent de l'intérieur d'un conducteur à sa surface qu'elles ne peuvent franchir ; 2° qu'il se forme ainsi sur cette surface une couche de masses électriques. De ces deux propositions la première est une pure hypothèse dénuée de vérification expérimentale ; la seconde est une conséquence mathématique du

fait expérimental de la discontinuité du champ à la surface d'un conducteur (§ 13), en vertu de la définition même des masses. En effet nous avons vu (§ 17) que, sur chacune des deux faces S' et S'' (fig. 8) d'une surface de discontinuité SS du champ d'un

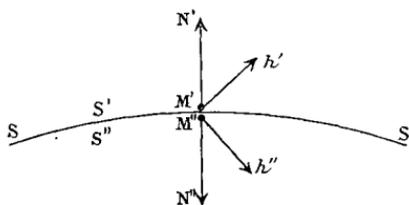


Fig. 8.

vector \vec{f} (ou \vec{h}), existe une couche de masses fictives dont la densité superficielle est définie par la formule (9). Au point M' de la face S' on a donc une densité σ' , et au point M'' (coïncidant avec M') de la face S'' on a une densité σ'' :

$$\begin{aligned} 4\pi\sigma' &= l'X' + m'Y' + n'Z' = h'_{n'} \\ 4\pi\sigma'' &= l''X' + m''Y'' + n''Z'' = h''_{n''} \end{aligned}$$

$h'_{n'}$ désignant la projection de l'intensité h' du champ en M' sur la normale $M'N'$ à la face S' , $h''_{n''}$ la projection de l'intensité h'' en M'' sur la normale $M''N''$ à la face S'' . La densité superficielle de l'ensemble des deux couches est donc :

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = \frac{h'_{n'} + h''_{n''}}{4\pi} \quad (16)$$

Or, si SS est la surface d'un conducteur, l'intensité h'' sur la face S'' (côté du conducteur) est nulle, et l'intensité h' sur la face S' (côté du diélectrique) a une valeur h et est normale à la surface (§ 13). Il existe donc sur la surface d'un conducteur situé dans un champ électrique une couche fictive de masses électriques dont la densité est :

$$\sigma = \frac{h}{4\pi} \quad (17)$$

C'est là la formule bien connue de Coulomb. On en déduit que la masse électrique totale M qui existe sur la surface S d'un conducteur est égale à :

$$M = \int_S \sigma dS = \frac{1}{4\pi} \int_S h dS \quad (18)$$

h devant être pris positivement ou négativement, suivant que le sens de cette intensité est celui de la normale extérieure au conducteur ou le sens opposé (car h représente le h'' de la formule 16).

Ces exemples suffisent pour montrer quelle est, dans la théorie des fluides électriques, la part des vérités purement géométriques qui n'ont pas besoin de vérification expérimentale et auxquelles on a attribué à tort le sens d'une réalité physique. Nous allons indiquer maintenant quelle est la part des lois réellement expérimentales.

20. Lois expérimentales de l'Électrostatique. — Coulomb, étudiant les actions réciproques de deux sphères électrisées au moyen de la balance de torsion, a trouvé la loi suivante, que nous admettons sans discuter le degré de précision de ses expériences. La force \bar{f} exercée sur la sphère mobile (que nous considérerons comme une sphère d'épreuve ayant un coefficient d'influence q (§ 8) était dirigée vers le centre de la sphère fixe et inversement proportionnelle au carré de la distance r des centres des deux sphères. On déduit de là que l'intensité h ($= \frac{\bar{f}}{q}$) du champ créé par la sphère fixe était aussi inversement proportionnelle à r^2 :

$$h = \frac{M}{r^2} \quad (19)$$

et, par conséquent, que ce champ était identique, du moins à l'ex-

térieur de la sphère fixe, à celui qu'aurait créé une masse électrique *unique* M placée au centre de celle-ci. Dans un tel champ, la densité électrique ρ étant nulle en tout point autre que le centre, on en conclut, d'après la formule (7) du paragraphe 16, que, dans l'expérience de Coulomb, la distribution de l'intensité h du champ satisfaisait à la relation :

$$4\pi\rho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \quad (20)$$

Cette relation, qui pourrait encore se déduire de la formule (19) par le calcul direct de la fonction ρ , est la *véritable conclusion expérimentale* de l'expérience de Coulomb (car la loi de l'inverse du carré de la distance *résulte de l'identité* : $h = \Sigma \frac{m}{r^2}$ et non de l'expérience).

L'application de la formule (18) montre que la masse électrique fictive de la sphère fixe, dont nous désignerons le rayon par R et la surface par S , avait précisément pour valeur M :

$$\frac{1}{4\pi} \int_S h dS = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{M}{R^2} dS = \frac{M}{4\pi R^2} \int_S dS = M$$

La propriété (20) : $\rho = 0$, constatée dans les expériences de Coulomb, a été étendue immédiatement, sans preuve expérimentale, à tout autre dispositif d'expérience et à tout autre diélectrique que l'air ; car elle exprimait, dans la théorie des fluides, que les isolants sont impénétrables aux masses électriques.

A la loi expérimentale (20) il faut ajouter la suivante : « La masse électrique totale M d'un conducteur reste constante tant que ce corps est entouré d'une substance parfaitement isolante. » (Invariabilité de la *charge* d'un conducteur.)

Enfin une troisième loi exprimant l'existence du potentiel :

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$$

résultait forcément, dans la théorie des fluides, de l'hypothèse que les actions électriques sont newtoniennes $\left(h = \Sigma \frac{m}{r^2} \right)$.

On sait que l'ensemble de ces trois lois suffit à la résolution

des problèmes relatifs à la distribution électrique (calcul de la répartition des *charges* sur les conducteurs, et des forces exercées).

En se bornant au cas où le milieu diélectrique est de l'air parfaitement isolant, les lois ci-dessus peuvent être admises et n'entraînent aucune erreur dans le problème de la distribution électrique. Si leurs preuves expérimentales *directes* sont insuffisantes, on peut les considérer comme parfaitement démontrées par l'usage journalier d'instruments de précision (électromètres, etc.), par l'accord entre les chiffres calculés et mesurés des capacités de condensateurs à air, de fils télégraphiques aériens etc. ; car la théorie des électromètres, le calcul des capacités, etc., sont essentiellement fondés sur les lois en question.

NOTA : L'identité mathématique :

$$\bar{h} = \sum \frac{\bar{m}}{r^2}$$

où h désigne l'*intensité* du champ électrique en un point A, est essentiellement distincte de la loi hypothétique de Coulomb :

$$\bar{f} = \sum \frac{\bar{m}}{r^2}, m' = h. m'$$

où f désigne la *force* que les masses électriques m du champ sont censées exercer sur une masse m' située en A. L'étude des forces électriques (chap. iv) montrera dans quelles conditions restreintes la loi de Coulomb est admissible.

CHAPITRE IV

FORCES ET ÉNERGIE ÉLECTRIQUES

21. Influence de la nature du milieu diélectrique sur les forces électriques. — Nous avons vu au paragraphe 20 que la répartition de l'intensité h du champ électrique dans l'air parfaitement isolant satisfait à la condition :

$$4\pi\rho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

L'étude d'un champ *stable* dans un conducteur *homogène* (§ 38) montrera que dans un tel corps la relation : $\rho = 0$ est encore satisfaite. Entre ces deux extrêmes se placent des corps intermédiaires, isolants imparfaits, pour lesquels la vérification expérimentale de la relation : $\rho = 0$ dans un champ stable présente de grandes difficultés dues au phénomène dit d'électrisation résiduelle (dont on verra l'explication au paragraphe 55). La réalisation approchée de la propriété $\rho = 0$ ne paraît possible que dans un très petit nombre de bons isolants. Quoi qu'il en soit, les données expérimentales peu nombreuses que l'on possède au sujet de ceux-ci nous ont appris le fait suivant.

Supposons que l'on répète l'expérience fondamentale de Coulomb dans divers diélectriques $D_1 D_2 D_3 \dots$ au moyen de deux sphères S et S' , dont l'électrisation est maintenue constante pendant toute la série d'expériences (ou renouvelée dans l'air toujours dans les mêmes conditions). Soient q et q' les coefficients d'influence (§ 8) de ces sphères. La sphère S étant fixe, et S' servant de sphère d'épreuve, on constatera dans le milieu D_1 la loi

connue de variation d'intensité du champ (qui équivaut à $\rho = 0$) :

$$h_1 = \frac{M_1}{r^2}$$

La mesure de h_1 à une distance connue r permettra ainsi de calculer la valeur de M_1 dans cette expérience.

En opérant de même dans le milieu D_2 on constate qu'à la même distance r l'intensité h prend une valeur h_2 différente de h_1 ; la formule :

$$h_2 = \frac{M_2}{r^2}$$

donne donc une nouvelle valeur M_2 différente de M_1 . De même dans les milieux D_3, D_4, \dots on trouvera des coefficients M_3, M_4, \dots différents des précédents. Pour un même état d'électrisation de la sphère S , le diélectrique exerce par conséquent sur l'intensité h du champ créé par cette sphère une influence qui peut être représentée par des coefficients $\frac{1}{k_1} \frac{1}{k_2} \frac{1}{k_3} \dots$ proportionnels à M_1, M_2, M_3, \dots ; de telle sorte que l'on aura :

$$k_1 M_1 = k_2 M_2 = \dots = Q$$

Si l'on choisit *provisoirement* une valeur arbitraire pour le coefficient k_1 du milieu D_1 , ces égalités, dans lesquelles M_1, M_2, M_3, \dots ont des valeurs mesurées, détermineront les valeurs à attribuer aux coefficients k_2, k_3, \dots des milieux D_2, D_3, \dots . D'après ce choix même des coefficients k_1, k_2, k_3, \dots le produit $kM = Q$ a même valeur dans tous les diélectriques D_1, D_2, D_3, \dots et ne dépend que de la sphère électrisée S . En écrivant :

$$h_1 = \frac{M_1}{r^2} = \frac{1}{k_1} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

on mettra donc en évidence les coefficients d'influence k_1 (du diélectrique D_1) et Q (de la sphère S) sur l'intensité h_1 du champ créé par cette sphère à la distance r de son centre.

Nous voyons ainsi qu'une sphère électrisée S possède un *premier* coefficient d'influence q , si on la considère comme *subissant* l'action d'un champ électrique (§ 8), et un *deuxième* coefficient d'influence Q , si on la considère comme *créant* un champ élec-

trique. Nous allons montrer que ces deux coefficients sont identiques.

La force :

$$f_1 = h_1 q' = \frac{1}{k_1} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot q'$$

subie par la sphère S' en présence de la sphère S , est égale et opposée à la force :

$$f'_1 = \frac{1}{k_1} \frac{Q'}{r^2} q$$

subie par S en présence de S' , en vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction (Q' désigne le *second* coefficient d'influence de la sphère S' , considérée comme créant un champ). On déduit de l'égalité de ces deux forces :

$$\frac{Q}{q} = \frac{Q'}{q'} = \varepsilon$$

Le rapport $\frac{Q}{q}$ ne dépend que de la sphère S et de son état d'électrisation ; le rapport $\frac{Q'}{q'}$ ne dépend que de la sphère S' et de son état d'électrisation. L'égalité de ces rapports, vraie quelles que soient les sphères choisies, montre qu'en réalité ε est une constante absolue ou un coefficient *purement parasite*.

Pour rendre ε égal à 1, il suffit de prendre Q égal à q ; alors le coefficient k_1 que nous avons laissé arbitraire ne l'est plus, car le choix des coefficients $k_1 k_2 k_3 \dots$ par les formules :

$$k_1 M_1 = k_2 M_2 = \dots = Q = q$$

sera complètement déterminé.

22. Pouvoir inducteur électrique. — En résumé l'expérience nous fait connaître une propriété électrique des corps, qui ne dépend que d'un coefficient spécifique ($k_1 k_2 \dots$). Nous donnerons au coefficient k d'un diélectrique le nom de *pouvoir inducteur électrique* (nom adopté dans la théorie des fluides).

D'après ce que nous venons de voir, l'action réciproque de deux sphères électrisées, dont les coefficients d'influence sont q et q' ,

dans un milieu diélectrique ayant un pouvoir inducteur égal à k , a pour expression indifféremment :

$$f = \frac{1}{k} \frac{qq'}{r^2} = \frac{Mq'}{r^2} = k \cdot \frac{MM'}{r^2}$$

en posant : $q = Mk$ et $q' = M'k$.

A distance constante r , cette force f est :

1° Inversement proportionnelle au pouvoir inducteur k du diélectrique, si l'on maintient constants les coefficients q et q' des deux sphères quand on passe d'un milieu à un autre (c'est le cas que nous venons d'étudier);

2° Proportionnelle à ce pouvoir inducteur, si l'on maintient au contraire constants les coefficients M et M' ;

3° Constante, si l'on maintient constants les coefficients M et q' .

Comment réaliser le deuxième cas, c'est-à-dire la constance de M et de M' ? Maintenir à M et à M' les mêmes valeurs dans deux milieux différents, c'est maintenir constante l'intensité :

$$\bar{h} = \frac{\bar{M}}{r^2} + \frac{\bar{M}'}{r'^2}$$

du champ *créé* par les masses M et M' et, par suite, aussi la différence $V - V'$ de potentiel des deux sphères S et S' , puisque :

$$V - V' = \int_S^{S'} h ds \cos(h, ds)$$

On réalisera la constante de $V - V'$ en reliant les sphères par des fils fins aux deux pôles d'une pile. Cette méthode, applicable dans les liquides conducteurs (beaucoup moins conducteurs toutefois que les sphères métalliques S et S') est bien préférable à la précédente (où l'on maintient constants q et q') à cause de la stabilité assurée du champ (v. § 14); elle permettra donc de comparer plus facilement le pouvoir inducteur d'un tel liquide à celui de l'air par l'observation des forces exercées à la même distance r dans les deux milieux. Du reste, en remplaçant les deux sphères par deux autres conducteurs de forme quelconque, par exemple par

les parties fixes et mobile d'un électromètre (à quadrants), on pourra constater que le rapport des pouvoirs inducteurs des deux milieux est *indépendant de la forme de ces conducteurs* et de leur distance (v. § 27).

Ce que l'on appelle *charge* électrique de la sphère S, c'est-à-dire ce qui reste invariable lorsque ce corps est porté d'un isolant dans un autre, c'est son coefficient $Q = q$; nous l'appellerons *quantité d'électricité* de la sphère S. Au contraire la masse $M = \frac{q}{k}$ ne caractérise nullement l'état d'électrisation de cette sphère; elle a un sens plus complexe et représente l'intensité du champ créé par la sphère q à l'unité de distance de son centre dans un milieu dont le pouvoir inducteur est k . *Cette distinction entre la masse électrique M et la quantité d'électricité q* (grandeurs qui ne sont pas plus comparables entre elles que ne le sont une longueur et un temps) *est essentielle* pour éviter une confusion dans laquelle on tombe fréquemment.

FORCES ÉLECTRIQUES

23. Calcul général des forces électriques. — Soit Σ une surface

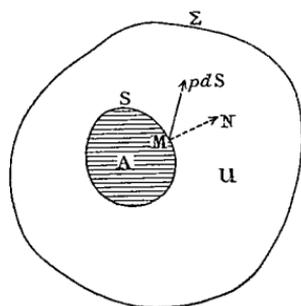


Fig. 9.

enveloppant un champ électrique qui admet un potentiel (fig. 9). Divisons ce champ en deux parties, l'une A limitée par une surface S, l'autre U. Le corps (ou ensemble de corps) A est soumis, de la part de la région extérieure U, à des forces électriques appliquées aux divers éléments de la surface S, chaque élément dS subissant une force $p dS$, qui dépend de l'orientation de cet élément et de

l'état électrique du champ au point M où il se trouve, suivant une certaine loi que nous nous proposons de déterminer.

Si l'on désigne par p_x, p_y, p_z les composantes, suivant trois axes rectangulaires, de la force p appliquée à l'unité de surface, la résultante des forces qui s'exercent sur la surface S du volume A aura pour projections sur les trois axes :

$$\int_S p_x dS \quad \int_S p_y dS \quad \int_S p_z dS$$

Mais la région U subit, de la part de A, des *actions égales et opposées*, dont nous désignerons les composantes par R_x , R_y , R_z . On aura ainsi :

$$\int_S p_x dS + R_x = 0 \quad (1)$$

Ces actions ne dépendant d'ailleurs que de l'état du champ sur la surface S, on ne les modifiera pas en apportant dans la région U telles modifications que l'on voudra, pourvu qu'elles ne fassent point varier cet état. Nous allons profiter de cette remarque pour modifier la région U de manière à simplifier le calcul de R_x .

Supposons d'abord que, le milieu diélectrique étant homogène dans le voisinage de la surface S et ayant un pouvoir inducteur égal à k , on remplace par un diélectrique de même nature que lui toutes les substances, isolantes ou conductrices, existantes dans la région U. Cette première modification faite, divisons par la pensée la région U en éléments de volume infiniment petits 1, 2, 3, ..., p , ...; et imaginons que chacun de ces éléments contienne une sphère conductrice électrisée, dont le volume soit infiniment petit par rapport au sien, la masse électrique de la sphère contenue dans un élément de volume quelconque p étant d'ailleurs égale à la masse électrique m_p qui existait dans le même volume élémentaire p avant la double modification apportée à la région U. Finalement la région U contiendra un diélectrique homogène, dans lequel sont réparties les sphères électrisées 1, 2, 3, ... p ...

Cette double modification ne changera en rien (ou changera infiniment peu) l'état stable du champ existant primitivement dans la région A et à sa surface S. En effet, avant la modification, on avait, en vertu de l'identité (15) démontrée au paragraphe 19 :

$$\bar{h} = \sum \frac{\bar{m}}{r^2}$$

la somme Σ se rapportant à toutes les masses électriques fictives existantes dans le champ. Cette identité ne faisant intervenir que la répartition des masses et nullement la nature du diélectrique,

comme cette répartition a été infiniment peu modifiée à l'extérieur de A, l'état stable du champ dans A n'est donc pas modifié.

D'autre part, la composante R_x de l'action exercée par A sur le milieu extérieur U par sa surface S, est identique à la composante, suivant l'axe des x , de la résultante des forces électriques que les corps situés dans la région U subissent en présence de A. Ces corps sont, après la modification précédente, les petites sphères électrisées. Une sphère S située dans un élément de volume $d\omega$, où la densité de masse électrique (formule 7 du § 16) était ρ avant la modification, possède une masse électrique égale à $\rho d\omega$ ou, ce qui revient au même (V. fin du § 22), une quantité d'électricité égale à $k \rho d\omega = q$. Si donc $h(X, Y, Z)$ est l'intensité primitive du champ au point où l'on imagine la sphère S, celle-ci, considérée comme sphère d'épreuve, subit une force égale à $h q$, dont la composante suivant l'axe des x est $X q = X k \rho d\omega$. On peut donc poser :

$$R_x = \int_U X k \rho d\omega = \frac{k}{4\pi} \int_U X \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) d\omega \quad (2)$$

Or, des applications évidentes de la formule (3) du paragraphe 17 à la région U limitée par les surfaces S et Σ donnent les deux identités :

$$\begin{aligned} \frac{k}{4\pi} \int_U \left[\frac{\partial \cdot X^2}{\partial x} + \frac{\partial \cdot (XY)}{\partial y} + \frac{\partial \cdot (XZ)}{\partial z} \right] d\omega + \frac{k}{4\pi} \int_{S+\Sigma} (lX^2 + mXY + nXZ) dS = 0 \\ - \frac{k}{8\pi} \int_U \frac{\partial}{\partial x} (X^2 + Y^2 + Z^2) d\omega - \frac{k}{8\pi} \int_{S+\Sigma} l (X^2 + Y^2 + Z^2) dS = 0 \end{aligned}$$

Ajoutons ces deux équations, en tenant compte : 1° de ce que, sur la surface Σ qui enveloppe le champ et lui est extérieure, l'intensité h du champ est nulle ($X = Y = Z = 0$); 2° de ce que le champ admet un potentiel :

$$\left(\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} \right)$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{k}{4\pi} \int_U X \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) d\omega \\ + \frac{k}{8\pi} \int_S \left[2X (lX + mY + nZ) - l (X^2 + Y^2 + Z^2) \right] dS = 0 \end{aligned}$$

On en déduit, d'après (1) et (2) :

$$\begin{aligned} R_x &= -\frac{k}{8\pi} \int_S \left[2X \left(lX + mY + nZ \right) - l \left(X^2 + Y^2 + Z^2 \right) \right] dS \\ &= - \int_S p_x dS \end{aligned}$$

et, par suite :

$$\int_S \left(p_x - P_x \right) dS = 0 \quad (3)$$

en posant :

$$P_x = \frac{k}{8\pi} \left[2X \left(lX + mY + nZ \right) - l \left(X^2 + Y^2 + Z^2 \right) \right]$$

24. Force électrique sur l'unité de surface. — Ainsi, dans le champ électrique considéré, l'intégrale (3) est nulle pour toute surface fermée S au voisinage de laquelle le diélectrique est homogène. Supposons maintenant que ce champ vienne à être modifié d'une manière quelconque dans une région quelconque B , ou, ce qui revient au même, qu'à ce premier champ vienne s'en superposer un nouveau créé dans la région B . L'équation (3) sera encore satisfaite. Mais si la région B empiète sur le volume intérieur à S , une partie S_1 de la surface S appartiendra à B et $(p_x - P_x)$ pourra y être modifié d'une manière quelconque, tandis que sur le reste S_2 de la surface S il n'y a rien de changé. La partie de l'intégrale (3) relative à S_2 restant invariable, il en est de même de la partie relative à S_1 , puisque la somme de ces deux parties est nulle.

L'intégrale $\int_{S_1} (p_x - P_x) dS$ conserve donc une valeur constante K quand l'état du champ varie d'une manière quelconque sur S_1 . On voit du reste que K est nul dans le cas particulier où le champ n'existe pas ($h = 0$); donc :

$$\int_{S_1} \left(p_x - P_x \right) dS = 0$$

Ceci, étant vrai pour une surface non fermée d'étendue quelconque, est applicable à un élément de surface infiniment petit dS ; on en conclut que $(p_x - P_x)$ est nul en tout point de la surface S . On aura donc, en remplaçant P_x par son expression en fonction de (X, Y, Z) :

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \frac{k}{8\pi} \left[2X (lX + mY + nZ) - l (X^2 + Y^2 + Z^2) \right] \\ p_y &= \frac{k}{8\pi} \left[2Y (lX + mY + nZ) - m (X^2 + Y^2 + Z^2) \right] \\ p_z &= \frac{8\pi}{k} \left[2Z (lX + mY + nZ) - n (X^2 + Y^2 + Z^2) \right] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

les deux dernières formules se déduisant de la première par des permutations circulaires des lettres (X, Y, Z) , (l, m, n) .

Telles sont les expressions des composantes de la force électrique p qui s'exerce, par unité de surface, sur un élément de surface

dS du volume A (fig. 9) en un point où l'intensité du champ est $h(X, Y, Z)$ et où le diélectrique a un pouvoir inducteur égal à k ; l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale MN extérieure à A ou intérieur à U (se reporter au lemme du paragraphe 17). *A égale intensité du champ cette force est proportionnelle au pouvoir inducteur k du diélectrique.*

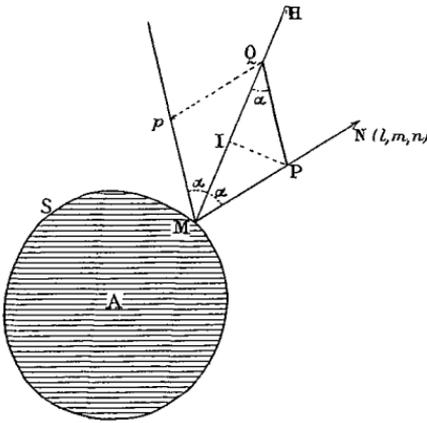


Fig. 10.

Construction du vecteur $(p_x,$

$p_y, p_z)$. — Soient (fig. 10) : MN la normale extérieure à la surface S du corps A au point M ; MH la direction de l'intensité h du champ, qui fait avec MN un angle α . On a :

$$\begin{aligned} lX + mY + nZ &= h \cos \alpha \\ X^2 + Y^2 + Z^2 &= h^2 \end{aligned}$$

On voit donc, par les formules (4), que le vecteur p (force par unité de surface au point M) est la résultante des deux vecteurs suivants :

1° Le vecteur PM , égal à $\frac{kh^2}{8\pi}$, dirigé en sens inverse de la normale extérieure MN (composantes : $-l \frac{kh^2}{8\pi}$, $-m \frac{kh^2}{8\pi}$, $-n \frac{kh^2}{8\pi}$) ;

2° Le vecteur MQ , égal à $2 \frac{kh^2}{8\pi} \cos \alpha$, c'est-à-dire au double de la

projection MI du vecteur MP sur la direction MH (composantes : $2 \frac{kXh}{8\pi} \cos \alpha$, $2 \frac{kYh}{8\pi} \cos \alpha$, $2 \frac{kZh}{8\pi} \cos \alpha$).

La force p , représentée par le vecteur Mp , est donc égale et parallèle à la résultante PQ des vecteurs PM et MQ; et, comme le triangle MPQ est isocèle, PQ est égal à $PM = \frac{kh^2}{8\pi}$ et fait avec MQ l'angle α . Il en résulte cette règle très simple :

Le vecteur p , représentant la force électrique qui s'exerce au point M sur l'unité de surface du corps A, est le symétrique, par rapport à la direction MH de l'intensité du champ, du vecteur MP égal à $\frac{kh^2}{8\pi}$ porté sur la normale extérieure MN à la surface.

Ainsi la grandeur de la force p est indépendante de l'orientation de l'élément de surface autour du point M, et égale à $\frac{kh^2}{8\pi}$; mais sa direction varie avec cette orientation, c'est-à-dire avec l'angle α .

Sur un élément de surface normal à l'intensité h du champ ($\alpha = 0$), la direction Mp coïncide avec MP, et la force p est une *tension* normale à la surface. En particulier, si A est un conducteur, sa surface S est équipotentielle (électrostatique) et, par suite, normale en tout point à l'intensité h du champ; la force qui s'exerce sur elle, par unité de surface, est donc une tension normale égale à $\frac{kh^2}{8\pi}$.

Si l'angle α est compris entre 0 et 45° , la force p est toujours une *tension* (dirigée vers l'extérieur de A). Pour $\alpha = 45^\circ$, elle devient tangente à l'élément de surface sur lequel elle s'exerce; c'est une force de *glissement*. Quand α est compris entre 45° et 90° , la force devient une *pression* (dirigée vers l'intérieur de A). Enfin, sur un élément de surface parallèle à l'intensité h du champ ($\alpha = 90^\circ$), la force p est une pression normale à la surface.

La règle précédente montre que la force p est la même pour deux intensités du champ égales à h ayant même direction MH, mais des sens opposés. Il est donc inutile d'examiner les cas où α est supérieur à 90° .

25. Force électrique sur l'unité de volume. — La résultante \bar{R} des forces électriques qui s'exercent sur le corps A (fig. 10) n'est autre chose que la résultante des forces $p dS$ appliquées à chaque élément de sa surface, et dont nous connaissons les composantes

$p_x dS$, $p_y dS$, $p_z dS$ par les formules (4). En particulier, la composante R_x de R sera donnée par la formule :

$$R_x = \int_S p_x dS = \int_S k \left[l \frac{X^2 - Y^2 - Z^2}{8\pi} + m \frac{XY}{4\pi} + n \frac{XZ}{4\pi} \right] dS$$

Pour traiter le cas général d'un milieu non homogène, nous ne supposons point constant le coefficient k de ce milieu d'un point à un autre. Nous ne ferons non plus aucune hypothèse sur la loi de distribution de l'intensité h du champ.

Une application évidente de la formule (3) du paragraphe 17 au corps A (en remplaçant la lettre U par A, et changeant les signes de l , m , n , qui sont ici les cosinus directeurs de la normale *extérieure*, et non pas intérieure, à la région A) donne :

$$\int_A \left\{ \frac{\partial}{\partial x} k \left(\frac{X^2 - Y^2 - Z^2}{8\pi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} k \left(\frac{XY}{4\pi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} k \left(\frac{XZ}{4\pi} \right) \right\} d\omega \\ - \int_S k \left[l \frac{X^2 - Y^2 - Z^2}{8\pi} + m \frac{XY}{4\pi} + n \frac{XZ}{4\pi} \right] dS = 0$$

L'expression de R_x prend ainsi la forme :

$$R_x = \int_A \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{X^2 - Y^2 - Z^2}{8\pi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{XY}{4\pi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{XZ}{4\pi} \right) \right\} d\omega$$

En particulier, si l'on prend un volume A infiniment petit égal à $d\omega$, la force R_x se réduit à un élément de cette intégrale ; et comme, en désignant par F_x , F_y , F_z les composantes de la force électrique F qui s'exerce sur l'unité de volume au point (x, y, z) , l'expression de R_x est aussi égale à $F_x d\omega$, on en déduit l'égalité :

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{X^2 - Y^2 - Z^2}{8\pi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{XY}{4\pi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{XZ}{4\pi} \right) \\ = \frac{X}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} (kX) + \frac{\partial}{\partial y} (kY) + \frac{\partial}{\partial z} (kZ) \right] \\ + \frac{kY}{4\pi} \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) - \frac{kZ}{4\pi} \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \right) - \frac{h^2}{8\pi} \frac{\partial k}{\partial x}$$

En posant :

$$\frac{\partial}{\partial x} (kX) + \frac{\partial}{\partial y} (kY) + \frac{\partial}{\partial z} (kZ) = 4\pi\delta \quad (2)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 4\pi\mu_x \quad \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = 4\pi\mu_y \quad \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 4\pi\mu_z \quad (6)$$

il vient finalement la première des relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} F_x &= X\delta + k \left(Y\mu_z - Z\mu_y \right) - \frac{h^2}{8\pi} \frac{\partial k}{\partial x} \\ F_y &= Y\delta + k \left(Z\mu_x - X\mu_z \right) - \frac{h^2}{8\pi} \frac{\partial k}{\partial y} \\ F_z &= Z\delta + k \left(X\mu_y - Y\mu_x \right) - \frac{h^2}{8\pi} \frac{\partial k}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Ces trois formules seront remplacées avantageusement par l'équation géométrique de la résultante \bar{F}

$$\bar{F} = \bar{h} \delta + k \overline{h\mu \sin(h, \mu)} - \frac{h^2}{8\pi} \frac{\partial k}{\partial n} \quad (8)$$

La force électrique \bar{F} sur l'unité de volume de la substance qui existe au point (x, y, z) peut donc être considérée comme la résultante de trois forces, dont nous allons étudier la signification :

1° *Composante $\bar{h} \delta$.* Cette force qui a pour projections sur les axes de coordonnées $X\delta, Y\delta, Z\delta$ (premiers termes de F_x, F_y, F_z), a la direction de l'intensité h du champ au point (x, y, z) et lui est proportionnelle. Elle est de même sens que \bar{h} ou de sens contraire suivant le signe du facteur δ . Nous donnerons à ce facteur, défini par la formule (5), le nom de *densité de quantité d'électricité* au point (x, y, z) et le produit $\delta \cdot d\omega$ s'appellera la quantité d'électricité contenue dans l'élément de volume $d\omega$. Grâce à cette définition, on voit que l'élément de volume $d\omega$, en raison de l'existence d'une quantité d'électricité $q = \delta \cdot d\omega$, est soumis à une première force hq égale au produit de l'intensité h du champ par cette quantité q .

2° *Composante $\overline{kh\mu \sin(h, \mu)}$.* Cette force, qui a pour projections sur les axes $k(Y\mu_z - Z\mu_y) \dots$ est, comme on le voit, perpendiculaire à la fois à l'intensité \bar{h} du champ et au vecteur $\bar{\mu}$ dont les composantes μ_x, μ_y, μ_z sont définies par les équations (6). Elle est proportionnelle aux grandeurs de ces deux vecteurs \bar{h} et $\bar{\mu}$, au sinus de l'angle (h, μ) qu'ils font entre eux, et au pouvoir inducteur k de la substance sur laquelle elle s'exerce. Elle n'existe que lorsque le

champ n'admet pas de potentiel, car la condition de l'existence du potentiel est, comme le montrent les formules (6) :

$$\mu_x = \mu_y = \mu_z = 0$$

ou simplement $\mu = 0$. Son existence n'a jamais été signalée, sans doute à cause des difficultés que présente l'étude expérimentale des forces électriques dans un champ variable et de l'ignorance qui en résulte sur la loi de ces forces.

3° *Composante* — $\frac{h^2}{8\pi} \frac{\partial k}{\partial n}$. Cette force, qui a pour composantes — $\frac{h^2}{8\pi} \frac{\partial k}{\partial x}$, ... a la direction de la normale à la surface :

$$k = \text{constante}$$

au point (x, y, z) , c'est-à-dire à la surface lieu des points où le pouvoir inducteur k du diélectrique a même valeur qu'en ce point. Elle est dirigée dans le sens où le pouvoir inducteur k va en décroissant. Enfin, elle est proportionnelle à la rapidité de variation du pouvoir inducteur dans cette direction et au carré de l'intensité h du champ. Elle n'existe évidemment que dans un milieu hétérogène, où $\frac{\partial k}{\partial n} \neq 0$.

On voit qu'aucune force électrique ne s'exercera sur un élément de volume si l'on a dans ce volume :

$$\begin{aligned} k &= \text{constante (homogénéité du corps)} \\ \delta &= 0 \text{ (pas de quantité d'électricité)} \\ \mu &= 0 \text{ (existence du potentiel).} \end{aligned}$$

Le mode de décomposition de la force F que nous venons d'adopter nous a paru commode au point de vue mnémotechnique ; mais, en groupant les termes de F_x autrement que nous l'avons fait, il est facile d'obtenir une autre décomposition donnant lieu à une interprétation analogue.

26. Sur l'explication des forces électriques dans la théorie des actions à distance. — Voici, à titre de curiosité, comment la théorie des actions à distance pourrait expliquer les forces que nous venons d'étudier :

1° Force $\bar{h}.q$ subie par un élément de volume $d\omega$ qui contient une quantité d'électricité $q = \delta.d\omega$. D'après l'identité (14) du paragraphe 19 :

$$\bar{h} q = \sum q \frac{\bar{m}}{r^2} + \sum q \frac{\overline{m_v \sin \theta}}{r^2}$$

cette force serait donc la résultante de deux composantes f_1 et f_2 :

$f_1 = \Sigma q \frac{\bar{m}}{r^2}$ due à des actions exercées par les diverses masses électriques m du champ sur la quantité d'électricité q , en ligne droite et en raison inverse du carré des distances (cette loi de force serait la loi de Coulomb) ;

$f_2 = \Sigma q m_v \frac{\overline{\sin \theta}}{r^2}$, due à des actions exercées par les diverses masses vectorielles électriques m_v du champ sur la quantité d'électricité q , suivant la direction de l'intensité du champ dû à ces masses vectorielles (§ 18) et en raison inverse du carré de la distance (loi identique à celle de l'action hypothétique d'un élément de courant sur un pôle d'aimant, due à Laplace).

2° Force $kh\mu \sin(h, \mu) d\omega$, subie par un volume $d\omega$ contenant une masse vectorielle électrique $\bar{\mu} d\omega$. En remplaçant \bar{h} par $\left(\sum \frac{\bar{m}}{r^2} + \sum \overline{m_v \frac{\sin \theta}{r^2}} \right)$ comme précédemment, on verrait que cette force se décompose de même en deux autres :

$\bar{f}_3 = k \Sigma m \frac{\overline{\mu \sin(\mu, r)}}{r^2} d\omega$, due à des actions exercées par les masses électriques m du champ sur la masse vectorielle $\bar{\mu} d\omega$ contenue dans le volume $d\omega$, suivant la loi de Laplace (action d'un pôle d'aimant sur un élément de courant) ;

$\bar{f}_4 = k \Sigma m_v \frac{\overline{\mu_v \cdot \varepsilon}}{r^2} d\omega$ (ε est une fonction compliquée d'angles) due à des actions exercées par les masses vectorielles \bar{m}_v du champ sur la masse vectorielle $\bar{\mu} d\omega$, ces actions obéissant exactement à la même loi que les actions hypothétiques de deux éléments de courant l'un sur l'autre, c'est-à-dire soit à la loi d'Ampère (électrodynamique), soit aux autres lois équivalentes en nombre infini. (V. § 107.)

3° Force — $\frac{h^3}{8\pi} \frac{\partial k}{\partial n}$ due à l'hétérogénéité du diélectrique et à l'existence du champ. Cette force, ayant une direction déterminée

à priori en tout point du diélectrique et indépendante de la direction de l'intensité h du champ, ne se prête pas à une interprétation analogue aux précédentes.

On expliquerait de même, par des actions à distance, la force électrique p qui s'exerce, en un point M , sur la surface S d'un corps A (fig. 10) ; on n'a qu'à écrire à cet effet les formules (4) du paragraphe 24 sous la forme :

$$p_x = \frac{k}{2} \left[X\sigma + \left(Y\tau_x - Z\tau_y \right) \right] \quad p_y = \dots \quad p_z = \dots$$

σ et τ désignant respectivement les densités superficielles de masse électrique et de masse vectorielle électrique définies au paragraphe 19.

27. Application : électromètre absolu de L. Kelvin. — Considérons un champ électrique uniforme, c'est-à-dire où l'intensité h est constante en grandeur et en direction ; et, dans ce champ, deux plans P_1 et P_2 perpendiculaires à la direction de

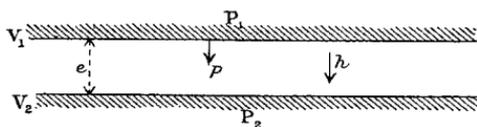


Fig. 11.

cette intensité (fig. 11). Ces plans sont des surfaces équipotentielles ; leur distance étant e , leur différence de potentiel sera, par définition :

$$V_1 - V_2 = he$$

Ce champ est celui qui s'établirait naturellement entre deux conducteurs plans P_1 et P_2 , théoriquement indéfinis, maintenus aux potentiels V_1 et V_2 (par communication avec une pile) ; car il remplit toutes les conditions exigées : 1° il admet un potentiel ; 2° les surfaces des conducteurs P_1 et P_2 sont équipotentielles ; 3° la distribution de l'intensité h satisfait à la relation :

$$4\pi\rho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

qui est une propriété du champ électrique dans l'air (§ 20).

La force électrique qui s'exerce sur l'unité de surface de l'un quelconque des plateaux P_1 et P_2 est une *tension* normale p égale à $\frac{kh^2}{8\pi}$ (§ 24) ; elle est une *attraction apparente* des deux conducteurs. Dans l'électromètre absolu de L. Kelvin, où le champ uniforme est sensiblement réalisé dans la partie centrale, un disque de faible surface S est découpé sur l'un des plateaux et rendu mobile (V. § 37, fig. 14) ; la force qui s'exerce sur lui est donc :

$$pS = \frac{kh^2}{8\pi} S = \frac{kS}{8\pi} \left(\frac{V_1 - V_2}{e} \right)^2$$

La connaissance de cette force, de la surface S , de l'épaisseur e , permet donc de calculer la différence de potentiel $(V_1 - V_2)$ lorsqu'on connaît la valeur de k , qui dépend du choix de l'unité électrique restée arbitraire jusqu'ici (V. *Unités*, § 29). — Tel est le principe de l'électromètre en question.

28. Déformations électriques des corps. — On connaît ce phénomène découvert par Govi et étudié notamment par M. Duter qui, au moyen d'une bouteille de Leyde en verre, dont les armatures étaient de l'eau, a constaté que le verre se dilate sous l'action de la charge électrique. Cette dilatation est proportionnelle, d'après ses mesures, à la quantité :

$$\frac{(V_1 - V_2)^2}{e} S = \left(\frac{V_1 - V_2}{e} \right)^2 Se$$

S désignant la surface de la bouteille, e l'épaisseur du verre, $(V_1 - V_2)$ la différence de potentiel des armatures. Le volume du verre étant égal à Se , la dilatation de l'unité de volume est proportionnelle à

$$\left(\frac{V_1 - V_2}{e} \right)^2.$$

Or l'épaisseur e étant très faible, on admet l'uniformité du champ électrique dans toute cette épaisseur, sur une faible étendue de surface : $\frac{V_1 - V_2}{e}$ n'est alors autre chose que l'intensité h du champ. La dilatation serait donc proportionnelle au carré h^2 de l'intensité

du champ, comme les forces électriques $\frac{kh^2}{8\pi}$ dont nous avons fait le calcul au paragraphe 24 et que nous retrouvons au paragraphe 27 dans l'étude du *condensateur* formé par deux plans parallèles P_1 et P_2 . Il y a ainsi proportionnalité des déformations aux forces.

Nous avons vu que sur tout élément de surface équipotentielle s'exerce une *tension* normale $\frac{kh^2}{8\pi}$; et, au contraire, sur tout élément de surface perpendiculaire à la surface équipotentielle s'exerce une *pression* normale égale à $\frac{kh^2}{8\pi}$ (§ 24). Il semble que le diélectrique compris entre les deux armatures du condensateur tend à les rapprocher, comme ferait une barre métallique fixée à deux murs parallèles lorsqu'elle se refroidit ; le diélectrique doit tendre à se raccourcir, comme la barre, dans la direction de l'intensité du champ. Par contre, dans toute direction perpendiculaire il tend à se dilater. L'effet combiné de cette dilatation et de ce raccourcissement est une dilatation finale. — C'est là un simple aperçu, et, en l'absence de données expérimentales précises sur la valeur absolue de la dilatation, nous ne tenterons point d'établir une théorie sur des hypothèses incertaines.

On sait encore que le verre, placé dans un champ électrique très intense, devient biréfringent (expérience de Kerr), propriété qu'il acquiert aussi par une compression dans un seul sens. Il paraîtrait naturel d'attribuer cet effet à une anisotropie du verre, créée par les tensions (parallèles à l'intensité du champ) et les pressions (perpendiculaires à cette direction) qui se développent en chaque point d'un champ électrique. Du reste, on a reconnu que la direction de l'axe optique du verre rendu ainsi anisotrope coïncide avec celle de l'intensité du champ. Certains liquides mêmes (sulfure de carbone, etc.) acquièrent cette anisotropie, qu'on ne peut leur communiquer d'une manière permanente par aucun procédé mécanique statique.

29. Unités électriques. — Les grandeurs électriques qui ont été définies jusqu'ici sont :

1° Le coefficient d'influence q d'une sphère électrisée, dont nous avons laissé l'unité arbitraire (§ 8) ; q est aussi la *quantité d'électricité* de la sphère (§ 22) ;

2° *L'intensité h du champ électrique*, définie par la formule (4) du paragraphe 8 :

$$f = hq \quad (9)$$

où f représente la force qui s'exerce sur une sphère ayant une quantité d'électricité q ;

3° Le *potentiel électrique* (§ 10) ; dans un champ uniforme d'intensité h , sur une longueur l d'une ligne de flux, le potentiel varie d'une valeur égale à :

$$v = hl \quad (10)$$

4° Le *pouvoir inducteur k d'un diélectrique* (§ 22) ; la force électrique f qui s'exerce sur un élément infiniment petit s de surface en un point où l'intensité du champ est h , a pour valeur :

$$f = \frac{kh^2}{8\pi} S \quad (11)$$

5° Les *densités* : δ de *quantité d'électricité*, ρ et σ de *masse électrique* (§ 26) ; etc.

Dans une transformation générale d'unités électriques, les unités de longueur (l), de temps (t), de masse (m), de force (f), de surface (s), de quantité d'électricité (q), d'intensité du champ (h), de potentiel (v), de pouvoir inducteur (k),... devront être multipliées respectivement par certains coefficients de transformation, que nous désignerons par les lettres correspondantes L, T, M, F ($= LMT^{-2}$), S ($= L^2$), Q, H, V, K,... Les formules (9), (10), (11), devant rester exactes, après cette transformation, on en déduit les relations :

$$F = HQ \quad (9')$$

$$V = HL \quad (10')$$

$$F = H^2KS \quad (11')$$

Ces trois relations entre les quatre coefficients Q, H, V, K permettent de choisir arbitrairement l'un d'eux, Q par exemple, et déterminent alors les trois autres H, V, K, en fonction de Q et de F, L, S.

Choisir Q arbitrairement (en même temps que L, T, M), cela revient à considérer comme arbitraire ou *fondamentale* l'unité de

quantité d'électricité (comme celles de longueur, temps et masse). Rien ne rattachant aux grandeurs mécaniques le coefficient g défini au paragraphe 8, cette nouvelle grandeur physique est aussi irréductible aux notions de longueur, temps et masse que celles-ci le sont entre elles ; c'est pourquoi nous faisons de son unité une nouvelle unité fondamentale. Les autres unités électriques seront des unités dérivées ; leur définition résultera d'une manière simple des formules (9) à (11).

Il est bien clair qu'au lieu de l'unité de quantité d'électricité on pourrait en choisir une autre, celle du coefficient spécifique k du diélectrique par exemple, comme nouvelle unité fondamentale. Les formules suivantes, qui se déduisent des équations (9') à (11') :

$$\left. \begin{aligned} H &= L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} K^{-\frac{1}{2}} \\ Q &= L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} K^{\frac{1}{2}} \\ V &= L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} K^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

permettront alors de calculer les coefficients de transformation H , Q , V , lorsqu'on aura fixé arbitrairement les coefficients de transformation L , M , T , K des unités de *longueur*, de *masse*, de *temps* et de *coefficient* k .

C'est même là le système d'unités fondamentales adopté ordinairement en électricité. C'est le plus commode, car il est plus simple de définir la valeur numérique arbitraire que l'on veut donner au coefficient k de l'air (le diélectrique le plus usuel et le plus parfait) que de fixer l'unité de quantité d'électricité. En électricité on adopte tantôt l'un, tantôt l'autre des trois systèmes suivants de valeurs numériques :

1° Système *électrostatique C. G. S.* caractérisé par les quatre unités fondamentales (L , M , T , K) :

$$\text{Centimètre — Gramme-masse — Seconde — } \left(k_{\text{air}} = 1 \right)$$

2° Système *électro-magnétique C. G. S.* caractérisé par :

$$\text{Centimètre — Gramme-masse — Seconde — } \left(k_{\text{air}} = \frac{1}{9} 10^{-20} \right)$$

3° Système *électro-magnétique pratique*, caractérisé par :

$$10^9 \text{ centimètres — } 10^{-11} \text{ gramme-masse — Seconde — } \left(k_{\text{air}} = \frac{1}{900} \right)$$

Le *système pratique* est presque seul employé dans l'industrie électrique. Les unités pratiques de quantité d'électricité et de potentiel électrique ont reçu les noms de *coulomb* et *volt*; on n'a donné aucun nom aux unités d'intensité du champ et de pouvoir inducteur. Les préfixes *méga*, *micro* et *milli* sont d'un emploi assez fréquent (mégavolt, millivolt).

Le nom de système *électrostatique* vient de ce que l'on prend pour unité le coefficient spécifique *électrique* k de l'air (ou son pouvoir inducteur). Celui de système *électro-magnétique* vient de ce que l'on prend pour unité au contraire le coefficient spécifique *magnétique* k' de l'air (ou son pouvoir inducteur magnétique). Ceci sera expliqué au paragraphe 99.

Les coefficients de transformation d'unités H, Q, V, K, s'appellent encore souvent les *dimensions* de l'intensité du champ, de la quantité d'électricité...; et les formules (12) sont des *formules de dimensions*.

On commet quelquefois, à la suite de Maxwell, une faute consistant à supprimer la quatrième unité fondamentale en électricité ou plutôt à supprimer la dimension K, c'est-à-dire que l'on remplace K par 1 dans les formules (12). Cette suppression a d'abord pour effet de restreindre les ressources que présentent dans les formules les considérations d'homogénéité. Mais son principal inconvénient est de tendre à fausser nos idées sur la nature des grandeurs électriques, en nous montrant comme *comparables* entre elles des grandeurs qui ne le sont aucunement; par exemple le rapport d'une quantité d'électricité à un potentiel deviendrait comparable à une longueur d'après les deux dernières formules (12) : $Q = VL$. Deux grandeurs qui ont mêmes dimensions sont en effet comparables entre elles, puisque le rapport de leurs valeurs numériques est indépendant du choix des unités (exemple : une force vive et un travail).

Exemples numériques : 1° passer du *système pratique* au *système électrostatique C. G. S.* Les coefficients de transformation sont :

$$L = 10^{-9}; \quad M = 10^{11}; \quad T = 1; \quad K = \frac{1}{900} \text{ (unités fondamentales).}$$

$$\left. \begin{array}{l} Q = \frac{1}{3} 10^{-9} \quad H = 3.40^{14} \\ V = 300 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Unités dérivées; calcul par les} \\ \text{formules (12)} \end{array}$$

Ainsi l'unité électrostatique C. G. S. de potentiel vaut 300 volts ; celle de quantité d'électricité vaut la fraction $\frac{1}{3} 10^{-9}$ du coulomb.

2° Considérons le champ sensiblement uniforme créé, dans l'air, entre deux plaques métalliques parallèles, distantes de 1 millimètre et reliées aux pôles d'une machine de 1.000 volts.

L'intensité du champ est égale à :

$$h = \frac{1000}{10^{-10}} = 10^{13} \text{ unités pratiques.}$$

Si sur l'une des plaques on a découpé une disque mobile de 20^{cmq} (cas d'un électromètre, par exemple), l'attraction sur ce disque est (§ 27) :

$$f = \frac{kh^2}{8\pi} S = \frac{1}{900} \cdot \frac{10^{26}}{8\pi} 20 \times 10^{-18} = 0,89 \times 10^5 \text{ u. pr.}$$

ou :

$$f = 908 \text{ milligrammes-poids.}$$

3° Dans les bons conducteurs on ne peut réaliser que des champs électriques d'intensité relativement très faible, à cause du dégagement de chaleur énergique qui s'y produit. Ainsi dans le cuivre on ne dépasse pas généralement la valeur $h = 10^6$ u pr. (qui correspond à un courant de 4 ampères par millimètre carré environ — règle industrielle). A cette valeur de l'intensité h du champ correspond dans l'air au contact du conducteur, une force électrique qui, par centimètre carré, est égale à :

$$\begin{aligned} f &= \frac{kh^2}{8\pi} S = \frac{1}{900} \cdot \frac{10^{12}}{8\pi} \cdot 10^{-18} = 44 \times 10^{-12} \text{ u. pr.} \\ &= 45 \times 10^{-14} \text{ milligr.-poids.} \end{aligned}$$

La faiblesse de ce chiffre montre pourquoi l'on n'observe jamais de forces *électriques* dues à un *courant*.

ÉNERGIE ÉLECTRIQUE

30. Calcul de l'énergie électrique d'un champ. — Soit C_1 un conducteur électrisé (fig. 12) entouré d'un diélectrique fluide *homogène*, où le champ électrique jouit de la propriété : $\delta = 0$ ou :

$$4\pi\rho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

C_2 est un conducteur creux enveloppant C_1 .

Dans le champ électrique intérieur au conducteur creux, la somme des masses électriques est nulle (§ 19) $\Sigma m = 0$. Donc si la masse électrique du conducteur C_1 est $+M_1$ celle de C_2 est $-M_1$; et la donnée de M_1 suffit pour déterminer l'état du champ électrique (v. § 20).

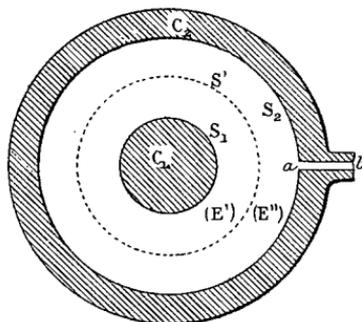


Fig. 12.

Ceci posé, imaginons que C_1 soit un corps creux très mince, formé d'une substance élastique (caoutchouc par exemple) et recouvert sur sa surface extérieure S_1 d'une légère couche d'eau adhérente ou d'un autre liquide conducteur. En exerçant sur la paroi intérieure de ce corps des pressions convenables, on pourra agrandir progressivement sa surface S_1 et lui faire épouser telle forme que l'on voudra. Supposons que S_1 se déplace ainsi de manière à épouser successivement les formes des surfaces équipotentielles du champ primitif, c'est-à-dire du champ tel qu'il était avant ce déplacement. Pour éviter la compression du diélectrique entre les conducteurs C_1 et C_2 , une ouverture très étroite ab pratiquée dans C_2 lui permet de s'écouler à l'extérieur.

Le déplacement ainsi réglé est tel que, lorsque la surface du conducteur C_1 ayant décrit le volume E' vient occuper la position S' , l'état actuel du champ électrique dans la région E'' comprise entre S' et S_2 est identique à son état primitif; c'est-à-dire que

l'état électrique du champ n'a pas été modifié dans la région E'' non encore balayée par la surface du conducteur C_1 . En effet, l'état de ce champ est complètement défini par les conditions : 1° que les surfaces S' et S_2 sont équipotentielles ; 2° que les masses électriques de C_1 et de C_2 sont égales à $+M$ et à $-M$ (§ 20). Ces conditions étant également vérifiées dans le champ primitif et dans le champ actuel, les deux champs sont bien identiques.

Désignons par W' et W'' respectivement les quantités d'énergie électrique contenues primitivement dans les régions E' et E'' du champ. L'énergie totale W du champ, égale au début à $W' + W''$, se trouve réduite à W'' quand la surface du conducteur C_1 arrive en S' , car le diélectrique écoulé à l'extérieur se trouve en dehors du champ et n'a plus d'énergie électrique, tandis que dans la région E'' l'état du champ et, par suite, son énergie W'' n'ont pas varié. Le système A formé par le diélectrique, qui remplissait primitivement la cavité comprise entre les deux conducteurs, a donc perdu une quantité d'énergie électrique égale à W' ; cette perte doit être équivalente (par définition de l'énergie électrique) au travail $d\mathcal{E}_e$ des forces électriques exercées par le système A sur le système des corps extérieurs pendant le déplacement du conducteur C_1 :

$$W' = \delta\mathcal{E}_e \quad (1)$$

Ces forces sont appliquées à la surface de A , qui comprend :

1° La paroi équipotentielle S_2 , sur laquelle s'exerce une tension normale à la surface (§ 24) et, par conséquent, normale à la direction du déplacement — le travail correspondant est nul ;

2° La surface mobile du conducteur C_1 , sur laquelle s'exerce également une tension normale $p = \frac{k i^2}{8\pi}$. Le déplacement dn d'un élément de surface dS , ayant même direction que cette tension, donne lieu à un travail ($p dS dn = p d\omega$) égal au produit de p par le volume $d\omega$ que balaie cet élément de surface. Il en résulte que le travail total $d\mathcal{E}$ correspondant au volume balayé E' est :

$$\delta\mathcal{E} = \int_{E'} p d\omega$$

D'après (1), c'est là l'expression de l'énergie électrique localisée

primitivement dans le volume E' . En remplaçant E' par le volume total U du champ primitif, on aura donc l'énergie totale W de ce champ :

$$W = \int_U p \, d\omega = \int_U \frac{kh^2}{8\pi} \, d\omega \quad (2)$$

Le diélectrique étant homogène, on remarquera qu'à égale intensité du champ l'énergie électrique est proportionnelle au pouvoir inducteur k . De là on pourrait déduire une nouvelle définition du pouvoir inducteur électrique plus simple que celle du paragraphe 22.

31. Énergie électrique par unité de volume. — Si w désigne l'énergie électrique par unité de volume au point (x, y, z) , l'énergie totale du champ est $\int_U w \, d\omega$; donc d'après (2) :

$$\int_U (w - p) \, d\omega = 0 \quad (3)$$

Cette égalité, vraie pour le volume total U du champ, l'est aussi pour une partie quelconque U' . En effet, si le champ vient à être modifié d'une manière quelconque dans la région U' (par la superposition d'un nouveau champ, par exemple), tout en restant invariable dans le reste du volume U , l'égalité (3) continue à être vérifiée. On en conclut que l'intégrale $\int_{U'} (w-p) \, d\omega$ conserve une valeur constante K malgré cette modification; et, comme K est évidemment nul dans le cas particulier où le champ n'existe pas ($h=0$), on a :

$$\int_{U'} (w - p) \, d\omega = 0$$

L'application de cette égalité à un volume infiniment petit $d\omega$ montre que l'on a :

$$w = p = \frac{kh^2}{8\pi} \quad (4)$$

Ainsi l'énergie électrique w par unité de volume au point (x, y, z) a une valeur $\frac{kh^2}{8\pi}$ identique à celle de la force p qui s'exerce au même point sur l'unité de surface orientée d'une manière quelconque (§ 24).

L'explication de ce fait remarquable ressort du mode de démonstration employé au paragraphe précédent. Lorsqu'un élément dS de la surface mobile du conducteur C_1 , soumis à l'action d'une tension électrique normale égale à $p dS$, se déplace d'une longueur dn suivant la normale, l'énergie dépensée par le système A, pour la production du travail $p dS dn = \frac{kh^2}{8\pi} d\omega$, est précisément l'énergie $w d\omega$ localisée dans le volume $d\omega$ balayé par l'élément de surface dS . L'énergie de la partie du champ non balayée par la surface conductrice S n'intervient pas dans la production du travail $\delta\mathcal{E}$; elle reste donc invariable, ce que nous avons établi à l'avance, en montrant que dans cette partie l'état électrique du champ ne varie pas.

32. Perturbations apportées dans un champ électrique par des déplacements de corps. — Voyons maintenant ce qui se passe

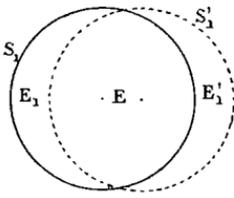


Fig. 13.

lorsqu'un conducteur C_1 , sans se déformer comme au paragraphe 30, subit un déplacement infiniment petit dans un champ électrique, sa surface passant de la position S_1 (en trait plein) à la position S_1' (en pointillé, fig. 13). Chaque élément dS de la surface mobile balaie un élément de volume $dS dn = d\omega$, dn désignant

son déplacement compté suivant la normale; et le travail correspondant effectué par le diélectrique ambiant est encore égal à $p dS dn = \frac{kh^2}{8\pi} d\omega$, au signe près. Ce travail est positif dans la région E_1' (où le conducteur obéit à la tension électrique et refoule le diélectrique) et égal à l'énergie $\frac{kh^2}{8\pi} d\omega$ qui se trouvait dans le volume balayé; il est négatif dans la région E_1 (où le diélectrique chasse le conducteur) et correspond à la création d'une égale quantité d'énergie $\frac{kh^2}{8\pi} d\omega$ dans le volume gagné par le diélectrique. L'énergie du reste du champ extérieur aux régions E , E_1 , E_1' n'étant pas entrée en jeu, est restée invariable, comme si le champ y restait invariable. En réalité, la nouvelle position S_1' de la surface du conducteur, n'étant point une surface équipotentielle du champ primitif, mais devenant forcément équipotentielle, il en résulte une perturbation électrique, qui se propage dans le reste du

champ et y produit une nouvelle distribution de l'intensité h et de l'énergie électrique.

Le déplacement d'un conducteur dans un champ électrique apporte donc une perturbation dans tout le reste du champ. Le seul cas qui fasse exception à cette règle est celui d'un conducteur dont la surface se déforme de manière à épouser successivement la forme des surfaces équipotentielles du champ primitif.

Lorsqu'on déplace un corps diélectrique D , la perturbation apportée dans le champ est plus complexe que celle produite par le déplacement d'un conducteur. Le travail correspondant au déplacement d'un élément dS de la surface de D n'est point égal, en général, à la variation d'énergie électrique dans le volume balayé par cet élément. Il y a donc, dans ce volume, production d'un *excès* (ou défaut) d'énergie électrique qui tend à se répartir dans le reste du champ. On peut dire encore que cet excès d'énergie correspond à un excès de l'intensité h ($w = \frac{kh^2}{8\pi}$), de telle sorte que la répartition de cette intensité ne satisfait plus aux conditions de l'existence d'un potentiel dans le voisinage de la surface mobile :

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0.$$

La perturbation ainsi créée ne prend fin, après la cessation du déplacement, que lorsque l'énergie finale ($W + \delta W$) est répartie dans le champ suivant une loi telle que celui-ci admet un potentiel (condition de stabilité).

Toutefois les perturbations produites pendant toute la durée du déplacement d'un corps conducteur ou diélectrique sont, pour ainsi dire, amorties *instantanément*, de telle sorte que l'on peut supposer, sans erreur sensible, que le champ admet à chaque instant un potentiel, quoique cela ne soit pas théoriquement rigoureux. L'expérience montre en effet que, quelle que soit la rapidité avec laquelle on déplace les corps, il ne s'écoule pas un temps appréciable entre le moment où cesse le déplacement et celui où le champ a atteint l'état stable correspondant à la nouvelle position des corps.

Cette rapidité d'amortissement des perturbations électriques tient à la grandeur de leur vitesse de propagation. Il résulte des expériences faites par Hertz et divers savants que cette vitesse est, au moins dans l'air, la même que celle de la lumière : 300.000 kilomètres par seconde. Si donc on déplace un corps avec la vitesse relativement considérable de 30 mètres par seconde ($30^m = 10^{-7} \times 300.000^m$), la perturbation produite par ce déplacement dans un champ électrique peut être comparée à la perturbation élastique produite dans l'air (où la vitesse de propagation est de 340 mètres par seconde environ) par un corps se déplaçant avec une vitesse de $0^{mm},034$ par seconde ($0^{mm},034 = 10^{-7} \times 340^m$) ; on peut admettre que l'état d'équilibre stable est atteint instantanément dès la cessation du déplacement.

Les surfaces des conducteurs, pendant leur déplacement, restent constamment équipotentielles (sensiblement), le champ ne pénètre pas à l'intérieur de ces conducteurs, et *il n'y a, par conséquent, pas dégagement de chaleur dans ceux-ci*. Il en résulte que, pour tout déplacement de conducteurs ou de diélectriques (aux vitesses ordinaires), le travail $\delta\mathcal{E}$ produit par les forces électriques (que l'on peut utiliser à l'extérieur du champ pour soulever un poids, etc.) peut être considéré, sans erreur appréciable, comme égal et de signe contraire à la variation δW de l'énergie électrique totale du champ.

$$\delta\mathcal{E} + \delta W = 0$$

33. Perturbations apportées dans un champ électrique par le contact de deux conducteurs. — Si dans un champ électrique, dont l'énergie est W , on vient à mettre en communication, par un fil métallique très fin, deux conducteurs C_1 et C_2 qui sont à des potentiels différents, on crée une perturbation électrique dont la durée est très courte en général et peut même être inappréciable. Dès que cette perturbation ou état variable a pris fin, les conducteurs C_1 et C_2 sont au même potentiel, et l'énergie électrique du champ a une nouvelle valeur W' . Par suite du contact, une partie ($W - W'$) de l'énergie primitive s'est donc trouvée en excès dans le champ et a dû disparaître, en même temps que l'énergie restante W' s'est distribuée suivant la loi correspondante au nouvel

état stable. L'énergie ($W - W'$), disparue sous la forme électrique, a été transformée en chaleur (en supposant qu'elle n'a point été utilisée à produire un travail ou une réaction chimique, etc.). Le champ a donc pénétré dans les conducteurs pendant l'état variable, puisque c'est dans ces corps seuls que l'énergie électrique se dissipe en chaleur. La perturbation due au contact de deux conducteurs a donc un caractère bien différent de celle que produit un simple déplacement de ces corps ou des diélectriques.

Nous étudierons plus tard l'état variable du champ. Pour le moment il nous suffira de remarquer que cet état variable doit se prolonger tant que l'excès ($W - W'$) d'énergie électrique n'est point entièrement transformé en chaleur. *L'amortissement des perturbations électriques est donc produit par le dégagement de chaleur qui a lieu dans les conducteurs; et cet amortissement est d'autant plus rapide que l'énergie se dissipe plus rapidement dans ceux-ci.* Si les conducteurs employés n'étaient en réalité que des isolants imparfaits dans lesquels l'énergie électrique se dissipe assez lentement, la durée de l'état variable serait très prolongée (cas de deux conducteurs mis en communication par une corde mouillée).

Au lieu de relier les conducteurs C_1 et C_2 par un fil fin, comme dans l'exemple précédent, supposons que l'on amène C_1 au contact de C_2 . Pendant ce déplacement de C_1 les forces électriques produisent un certain travail $\delta\mathcal{E}$, et l'énergie W du champ est diminuée d'autant. L'excès d'énergie électrique qui doit être dissipé en chaleur sera donc ($W - W' - \delta\mathcal{E}$) et non plus ($W - W'$). Il n'y aura même aucun dégagement de chaleur si W' est égal à $W - \delta\mathcal{E}$, ce qui est le cas si l'on amène, par exemple, au contact deux plateaux parallèles électrisés non reliés à une pile, car alors

$$\delta\mathcal{E} = W \text{ et } W' = 0$$

CHAPITRE V

DISTRIBUTION ÉLECTRIQUE DANS UN CHAMP STABLE

I. — DISTRIBUTION ÉLECTRIQUE DANS LES ISOLANTS

34. Définition de la quantité d'électricité. — La fonction δ , que nous avons rencontrée dans l'étude des forces électriques (formule 5 du § 25) et que nous avons appelée *densité de quantité d'électricité*, est définie en fonction du vecteur \overline{kh} exactement comme la *densité ρ de masse électrique* est définie en fonction du vecteur \overline{h} (formule 7 du § 17), ainsi que le montrent les formules :

$$\begin{aligned} 4 \pi \rho &= \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \\ 4 \pi \delta &= \frac{\partial k X}{\partial x} + \frac{\partial k Y}{\partial y} + \frac{\partial k Z}{\partial z} \end{aligned} \quad (1)$$

Nous définirons de même la *densité superficielle ε de quantité d'électricité* en fonction du vecteur \overline{kh} comme nous avons défini la *densité superficielle σ de masse électrique* en fonction de \overline{h} (formule 9 du § 17) :

$$\begin{aligned} 4 \pi \sigma &= l X + m Y + n Z \\ 4 \pi \varepsilon &= l (k X) + m (k Y) + n (k Z) \end{aligned} \quad (2)$$

En particulier à la surface d'un conducteur on a : $4 \pi \sigma = h$ (formule 17 du § 19); on aura donc : $4 \pi \varepsilon = kh$, de telle sorte que la quantité totale d'électricité d'un conducteur a pour expression :

$$q = \int_S \varepsilon dS = \int_S \frac{kh}{4 \pi} dS \quad (3)$$

Cette définition de q pour un conducteur quelconque est la généralisation de celle qui a été donnée au paragraphe 22 pour la quantité d'électricité d'une sphère.

On sait que la somme des masses électriques d'un champ est nulle : $\Sigma m = 0$ (§ 19). On démontrerait de même, en remplaçant h par kh , que la somme des quantités d'électricité du champ est nulle :

$$\Sigma q = 0.$$

35. Propriété : $\delta = 0$ des milieux homogènes. — Dans un milieu homogène, la formule de δ devient : $\delta = k \rho$. Ainsi la propriété $\rho = 0$ constatée expérimentalement pour le cas de l'air parfaitement isolant (§ 20) équivaut à : $\delta = 0$. Il est facile de se rendre compte pourquoi la propriété : $\delta = 0$ appartient à un diélectrique dans lequel on peut maintenir un champ parfaitement stable sans déperdition d'énergie électrique.

Considérons en effet un champ électrique établi dans un diélectrique fluide *homogène* très mobile. Le champ admettant un potentiel, la force électrique F qui s'exerce en un point quelconque sur l'unité de volume se réduit à $h\bar{\delta}$ (formule 8 du § 23). En raison de sa mobilité, le diélectrique obéit à cette force $h\bar{\delta}$ partout où δ n'est pas nul, et il s'y produit des déplacements plus ou moins rapides; tel est le phénomène bien connu du *vent électrique* dans l'air. A ces déplacements correspond un travail des forces électriques, qui se transforme en force vive et finalement en chaleur à cause des frottements. L'énergie électrique du champ doit diminuer d'une quantité égale à ce travail; elle tend donc à se dissiper graduellement tant que les forces $h\bar{\delta}$ existent, c'est-à-dire tant que δ n'est pas nul dans tout le champ. Il en résulte que si l'on réussit à créer dans le fluide un champ stable où l'énergie électrique se maintient indéfiniment, c'est qu'en tout point $\delta = 0$. L'expérience montre qu'il en est ainsi dans l'air sec *primitivement à l'état neutre* (pourvu que l'intensité du champ n'approche pas de la valeur limite qui correspond à la production de l'étincelle); c'est-à-dire que dans cet air parfaitement isolant la fonction δ , primitivement nulle, reste nulle lors de la création du champ.

La comparaison des pouvoirs inducteurs de deux milieux fluides, isolants ou conducteurs, dans lesquels un champ stable jouit de la propriété : $\delta = 0$, est théoriquement très simple. Supposons que l'on porte dans ces deux milieux deux conducteurs *de forme quelconque*, — par exemple les deux armatures d'un électromètre, — reliés respectivement aux deux pôles d'une pile. Les deux champs électriques ainsi créés successivement dans les deux milieux seront identiques, ainsi qu'il a été expliqué au paragraphe 22 pour le cas de deux sphères. Comme les forces électriques appliquées aux surfaces des conducteurs sont, à *égale intensité du champ*, proportionnelles au pouvoir inducteur du diélectrique (règle du § 24), le rapport des forces f et f' observées sur la partie mobile de l'électromètre dans les deux milieux sera égal au rapport des pouvoirs inducteurs k et k' de ceux-ci.

Cette méthode est inapplicable si $\delta \neq 0$ dans l'un des deux milieux; car les deux champs ne sont plus identiques, et le rapport de f à f' ne dépend plus seulement de k et de k' . La même complication rend inapplicables, ou peu rigoureuses, les autres méthodes de mesure des pouvoirs inducteurs.

La propriété : $\delta = 0$, commune aux meilleurs isolants et, comme on le verra ci-après (§ 38), aux conducteurs homogènes, semble être une propriété générale des corps parfaitement homogènes. Cette homogénéité comprend non seulement l'uniformité du pouvoir inducteur, mais encore celle de la conductibilité électrique, *qui est très rarement réalisée dans les mauvais isolants*. On verra au paragraphe 44 comment l'hétérogénéité d'un corps au point de vue de la conductibilité entraîne la condition : $\delta \neq 0$ dans un champ électrique, c'est-à-dire, en langage ordinaire, *créé de l'électricité* dans ce corps.

Nous ne connaissons donc actuellement que la propriété : $\delta = 0$ des isolants parfaits. La loi relative aux isolants imparfaits (ou médiocres conducteurs) ne pourra être établie qu'après l'étude du champ électrique dans les conducteurs (§ 52).

36. Problème de la distribution électrique. — Le problème de la distribution électrique dans un champ stable se pose en général de la manière suivante :

Calculer la fonction V de (x, y, z) qui représente le potentiel d'un champ électrique, connaissant :

1° La nature du diélectrique, définie en chaque point (x, y, z) par la donnée de son pouvoir inducteur k ;

2° La position de conducteurs C_1, C_2, \dots, C_n dont les quantités d'électricité q_1, q_2, \dots, q_n sont données ;

3° Celle de conducteurs C'_1, C'_2, \dots, C'_p dont les potentiels V'_1, V'_2, \dots, V'_p sont donnés ;

4° Celle de conducteurs $C''_1, C''_2, \dots, C''_r$ sur la surface desquels le potentiel varie suivant une loi donnée :

$$V_i'' = f_i(x, y, z)$$

(conducteurs dans l'intérieur desquels existe un champ électrique ou *courant*) ;

5° La fonction δ qui représente la densité électrique en tout point (x, y, z) du diélectrique.

Pour résoudre ce problème, on traduira d'abord en équations les données précédentes. La condition 5° deviendra l'équation (1) du paragraphe 34 que l'on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial V}{\partial z} \right) = -4\pi\delta \quad (4)$$

La condition 2° donnera, d'après la formule (3) :

$$\int_{S_i} k \left(l \frac{\partial V}{\partial x} + m \frac{\partial V}{\partial y} + n \frac{\partial V}{\partial z} \right) dS = -4\pi q_i \quad \left. \begin{array}{l} \\ V = \text{constante} \end{array} \right\} \text{(pour chaque conducteur } C_i)$$

La condition 3° s'écrira :

$$V = V'_i \dots \dots \dots \text{(pour chaque conducteur } C'_i)$$

La condition 4° donnera de même :

$$V = f_i(x, y, z) \dots \dots \dots \text{(sur la surface de } C''_i)$$

Ceci posé, on aura à intégrer l'équation (4) en tenant compte des équations suivantes, qui constituent les conditions relatives aux surfaces des conducteurs, c'est-à-dire aux surfaces limites du champ. (Nous supposerons, pour simplifier, qu'il s'agisse d'un

champ intérieur à un conducteur creux, ce conducteur ayant du reste des dimensions aussi grandes que l'on voudra.)

C'est là un problème inextricable en général ; on ne sait le résoudre que dans quelques cas particuliers, où l'on a : $\delta = 0$ en tout point du diélectrique, et où les conducteurs ont des formes appartenant à quelques types simples (exemples au § 37). Du reste, la fonction δ est inconnue en général, et le problème précédent est purement théorique. Nous *admettrons* que ce problème a au moins une solution, et nous allons démontrer qu'il n'en a qu'une.

Supposons en effet qu'il existe deux fonctions distinctes :

$$V = V' (x, y, z) \quad \text{et} \quad V = V'' (x, y, z)$$

qui satisfassent aux conditions du problème, et imaginons un champ (V''') qui admette pour potentiel la différence de ces deux fonctions :

$$V' - V'' = V''' (x, y, z)$$

Dans ce champ (V''') on voit que :

1° La densité électrique δ''' en tout point du diélectrique est égale à la différence des densités δ' et δ'' des champs (V') et V'' , lesquelles sont égales à δ d'après l'équation (4) — donc $\delta''' = \delta' - \delta'' = 0$;

2° La quantité d'électricité q_i''' de chacun des conducteurs C_i est nulle pour la même raison ($q_i''' = q_i' - q_i'' = 0$) ;

3° Le potentiel V_i''' en tout point de chacun des autres conducteurs est nul pour la même raison ($V_i''' = V_i' - V_i'' = 0$).

Il résulte de là que dans le champ (V''') on a :

$$\Sigma V q = 0 \tag{5}$$

$\Sigma V q$ désignant la somme des produits de chaque quantité q d'électricité existant dans le champ par le potentiel V au point où se trouve cette quantité q ; car dans le diélectrique, la densité électrique δ étant nulle, on a en chaque point : $q = 0$, et, d'autre part, sur chaque conducteur on a soit $q = 0$, soit $V = 0$. Or, le premier membre de cette égalité (5) représente l'énergie électrique W du champ (V''') ; car, en transformant la formule (2) du paragraphe 30 au moyen de l'identité (3) du paragraphe 17, on trouve :

$$\begin{aligned}
 W &= \int_u \frac{k h^2}{8\pi} d\omega = -\frac{1}{8\pi} \int_u \left(\frac{\partial V}{\partial x} kX + \frac{\partial V}{\partial y} kY + \frac{\partial V}{\partial z} kZ \right) d\omega \\
 &= \frac{1}{8\pi} \int_u V \left[\frac{\partial}{\partial x} (kX) + \frac{\partial}{\partial y} (kY) + \frac{\partial}{\partial z} (kZ) \right] d\omega + \frac{1}{8\pi} \int_S V (lX + mY + nZ) dS \\
 &= \frac{1}{2} \int_u V \delta d\omega + \frac{1}{2} \int_S V \varepsilon dS
 \end{aligned}$$

ou :

$$W = \frac{1}{2} \sum V q \quad (6)$$

L'égalité (5) exprime donc que l'énergie $\int_u \frac{kh^2}{8\pi} d\omega$ du champ (V''') est nulle, ce qui exige évidemment que l'intensité h de ce champ soit nulle dans chaque élément de volume $d\omega$ et, par suite, que le potentiel $V''' = V' - V''$ se réduise en réalité à une constante K . Cette constante K est même nulle, puisque $V''' = 0$ sur les conducteurs C_1, C_2, \dots . Les fonctions V' et V'' ne sont donc pas distinctes ; c'est-à-dire que le *problème de la distribution électrique n'admet qu'une solution*.

37. Condensateurs. — Nous allons étudier quelques cas particuliers, où nous supposerons que le diélectrique est homogène et jouit de la propriété : $\delta = 0$, et où les conducteurs sont au nombre de deux (C_1 et C_2). En vertu de l'identité : $\Sigma q = 0$ (§ 34), les quantités d'électricité Q_1 et Q_2 de ces deux conducteurs sont égales et de signes contraires :

$$Q_1 = -Q_2 = Q$$

Le système formé par les deux conducteurs ou *armatures* C_1 et C_2 constitue un *condensateur*, et Q s'appelle la *charge* électrique du condensateur. Le rapport de la charge électrique Q_1 à la différence des potentiels V_1 et V_2 des deux armatures est une constante C qui a reçu le nom de *capacité électrostatique* du condensateur.

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2}$$

L'énergie électrique du condensateur est, d'après l'identité (6) du paragraphe 36, égale à :

$$W = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2) = \frac{1}{2} Q (V_1 - V_2) = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2$$

L'unité de capacité, dans le système pratique d'unités (§ 29), a reçu le nom de *farad*; on évalue plus souvent les capacités en microfarads (10^{-6} farad). — La formule de dimensions de la capacité électrostatique est, d'après les relations (12) du paragraphe 29 :

$$C = Q V^{-1} = L K$$

Condensateur plan. — Nous avons étudié au paragraphe 27 le champ uniforme qui s'établit naturellement entre deux plateaux métalliques parallèles P_1 et P_2 reliés aux deux pôles d'une pile.

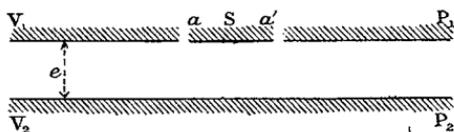


Fig. 14.

Si l'on découpe dans le plateau P_1 un disque central aa' (fig. 14), l'uniformité du champ sera légèrement trou-

blée au voisinage de la rainure pratiquée entre ce disque et la partie environnante ou *anneau de garde*. Dans l'électromètre de L. Kelvin, qui présente ce dispositif, on admet que cette perturbation est négligeable. La partie mobile de cet appareil est le disque central, qui subit une force (§ 27) égale à $\frac{kh^2}{8\pi} S$, S désignant sa surface et h l'intensité du champ. Comme on a : $h = \frac{V_1 - V_2}{e}$, la charge électrique du disque est (formule 3 du § 34) :

$$q = \frac{k h}{4\pi} S = \frac{k S}{4\pi e} (V_1 - V_2)$$

et la capacité du condensateur formé par ce disque (avec anneau de garde) et le plateau P_2 est égale à :

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{k S}{4\pi e} \quad (7)$$

On déduit de là que la capacité d'un *condensateur plan* est, par unité de surface, égale à $\frac{k}{4\pi e}$.

Condensateur sphérique. — Le champ électrique qui s'établit naturellement entre deux surfaces sphériques concentriques et conductrices, aux potentiels V_1 et V_2 (fig. 15) a pour potentiel en un point M :

$$V = \frac{A}{r}$$

r désignant la distance de M au centre O. L'intensité h du champ en M est :

$$h = - \frac{\partial V}{\partial r} = + \frac{A}{r^2}$$

Si donc R_1 et R_2 sont les rayons des deux sphères, on aura, en désignant par q_1 la charge de la sphère de rayon R_1 et par C la capacité du condensateur formé par les deux sphères :

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{k h_1}{4 \pi} \cdot 4 \pi R_1^2 = k A \\ V_1 - V_2 &= A \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\ C &= \frac{q_1}{V_1 - V_2} = k \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \end{aligned} \quad (8)$$

Telle est la capacité d'un *condensateur sphérique*. Si l'on suppose R_2 infini, on a ce que l'on appelle la *capacité* d'une sphère (R_1) isolée dans l'espace : $C = k R_1$.

Condensateurs cylindriques. — Dans le diélectrique compris entre deux surfaces cylindriques concentriques et conductrices (théoriquement indéfinies), de rayons R_1 et R_2 , le champ électrique qui s'établit naturellement ($\delta = 0$) est un champ *cylindrique*, où le potentiel et l'intensité h en un point M (fig. 16) ont pour valeurs :

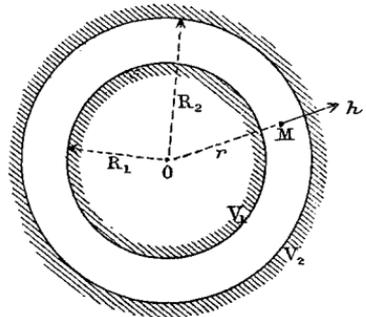


Fig. 15.

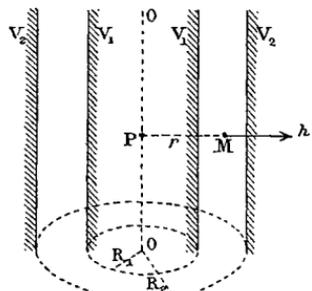


Fig. 16.

$$V = A \mathcal{L}^{\circ} \left(\frac{a}{r} \right) \quad h = - \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{A}{r}$$

r désignant la distance MP de M à l'axe OO des cylindres, \mathcal{L}° le symbole des logarithmes népériens.

La charge du cylindre de rayon R_1 , sur une longueur l , est :

$$q_1 = \frac{kh_1}{4\pi} 2 \pi R_1 l = \frac{1}{2} k A l$$

et la capacité du *condensateur cylindrique* formé par les deux surfaces conductrices est :

$$C = \frac{q_1}{V_1 - V_2} = \frac{1}{2} \frac{k l}{\mathcal{L}^{\circ} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)} \quad (9)$$

Condensateurs cylindriques excentriques. — Imaginons un champ *cylindrique*, où le potentiel V au point M a pour expression :

$$V = A \mathcal{L}^{\circ} \left(\frac{r'}{r''} \right) \quad (10)$$

r' et r'' désignant les distances respectives du point M à deux axes parallèles $O' O'$ et $O'' O''$; cette fonction V satisfait à la relation : $\delta = 0$. Les surfaces équipotentiellles sont des cylindres de révolution excentriques ayant leurs génératrices parallèles à $O' O'$, car elles ont pour équation $\frac{r'}{r''} = \text{constante}$. Donc inversement, si un condensateur est formé de deux conducteurs cylindriques de révolution excentriques, mais à axes parallèles, le champ qu'on y pourra développer sera représenté par la formule (10), $O' O'$ et $O'' O''$ désignant deux droites parallèles à ces axes et dont on saura calculer la position. On en déduit la capacité de ce condensateur sur une longueur l :

$$C = \frac{k l}{2 \mathcal{L}^{\circ} (\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})} \quad (11)$$

en posant :

$$\alpha = \frac{d^2 - (R_1^2 + R_2^2)}{2R_1 R_2}$$

R_1 et R_2 sont les rayons des deux conducteurs, d la distance de leurs axes.

La concordance entre les chiffres calculés par les formules (7), (8), (9), (11) et les chiffres déterminés expérimentalement pour les capacités de condensateurs plans, sphériques ou cylindriques paraît entièrement satisfaisante, le diélectrique étant l'air sec. Ainsi le condensateur plan a été employé dans un grand nombre d'expériences de précision. Pour la capacité des fils télégraphiques aériens, la formule (11) donne des chiffres inférieurs en général de 13 à 35 p. 100 aux chiffres mesurés lorsque l'isolement de l'air est défectueux ($\hat{c} \neq o$); mais dans des conditions exceptionnelles de bon isolement, la concordance des chiffres calculés et mesurés est très remarquable¹.

Remarque. — Dans un diélectrique homogène, la capacité d'un condensateur de forme quelconque est, comme on le voit, proportionnelle au pouvoir inducteur k . De là un procédé de mesure des pouvoirs inducteurs de diverses substances isolantes.

II. — DISTRIBUTION ÉLECTRIQUE DANS LES CONDUCTEURS

38. Lois de la distribution électrique dans un conducteur homogène. — Nous avons démontré au paragraphe 14 l'existence du potentiel électrique dans les conducteurs lorsque le champ est stable. D'autre part, l'exploration d'un champ électrique stable dans un conducteur homogène a mis en évidence les deux propriétés suivantes :

1° En tout point intérieur au conducteur, l'intensité h du champ satisfait à la relation :

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

2° En tout point de la surface de séparation du conducteur et du milieu isolant, l'intensité h est tangente à cette surface :

$$lX + mY + nZ = 0 \quad (13)$$

l, m, n désignent les cosinus directeurs de la normale à la surface.

¹ V. *Annales télégr.*, 1893, p. 315 (Massin).

Ces relations permettent de résoudre le problème de la distribution électrique dans les conducteurs. Considérons, par exemple, la partie U d'un conducteur C C comprise entre deux sections équipotentielles S_1 et S_2 , dont on connaît les potentiels V_1 et V_2 , et une surface latérale S S qui le sépare du diélectrique ambiant

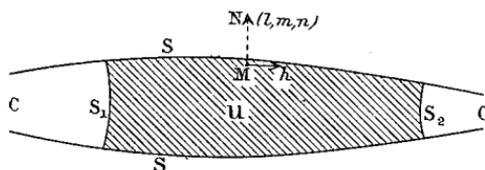


Fig. 17.

(fig. 17). Pour déterminer le potentiel V en tout point de U , on aura à intégrer l'équation (12) ou :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

en tenant compte des conditions relatives aux surfaces limites de U . Ces conditions sont :

$$V = V_1 \dots \dots \text{(sur la surface } S_1)$$

$$V = V_2 \dots \dots \text{(sur } \dots \dots S_2)$$

$$l \frac{\partial V}{\partial x} + m \frac{\partial V}{\partial y} + n \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \text{ (sur } \dots \dots SS)$$

Le problème ainsi posé est bien déterminé et admet une solution unique (démonstration au § 43).

La démonstration expérimentale des relations (12) et (13), qui sera donnée au paragraphe 41, consiste précisément à calculer à priori, à l'aide de ces formules, pour un dispositif donné d'expérience, la distribution électrique qui doit s'établir dans un conducteur, puis à vérifier par une exploration du champ (à l'aide de l'électromètre ou du galvanomètre) l'exactitude de la distribution ainsi calculée.

La relation (12) n'est qu'une généralisation de la propriété : $\delta = 0$ déjà constatée dans certains diélectriques homogènes (air, ...). Quant à la relation (13), elle constitue une propriété nouvelle, qui correspond à un fait expérimental bien connu. Ce fait est le suivant :

Lorsqu'on crée un courant permanent dans un circuit conducteur entouré d'un milieu parfaitement isolant, le régime de ce courant (c'est-à-dire l'état du champ électrique *dans le conducteur*) n'est nullement modifié par des déplacements de corps, même fortement électrisés, dans son voisinage ; c'est-à-dire que les variations que peut subir le champ électrique *dans le diélectrique ambiant* n'ont aucun effet à l'intérieur du circuit. — Or ce fait est une conséquence directe de la relation (13) ; car, dès l'instant que cette relation est vérifiée, l'état du champ électrique dans le conducteur U (fig. 17) est complètement déterminé quand on connaît deux sections équipotentielles S_1 et S_2 de ce conducteur et les potentiels correspondants V_1 et V_2 , et cela *quel que soit l'état électrique du champ dans le milieu isolant au voisinage du conducteur*. La réciproque du reste n'est pas vraie, car l'état du champ dans le milieu isolant dépend de l'état du champ dans le conducteur (v. § 45).

39. Résistance électrique. Intensité d'un courant. — Avant de passer à la vérification des relations (12) et (13), il convient d'étudier les lois expérimentales relatives à un courant permanent établi dans un circuit tel que celui de la figure 3.

Entre les pôles A et B de la pile il existe une différence de potentiel ($V_A - V_B$), que nous supposons positive ; le pôle A sera dit *positif* et le pôle B *négalif*. Si le circuit extérieur à la pile est formé entièrement de conducteurs métalliques, l'expérience montre que *le potentiel va en décroissant constamment le long de ce circuit dans le sens du parcours indiqué par les flèches*. En supposant que le conducteur A M N soit *linéaire*, c'est-à-dire ait des dimensions transversales très faibles relativement à sa longueur (fil fin), la variation de potentiel d'un point à un autre d'une même section droite est insensible, et l'on convient d'appeler potentiel au point M du fil le potentiel en un point quelconque de la section droite passant par M.

Supposons que dans un même circuit on intercale deux conducteurs linéaires MN et RQ (fig. 3). L'expérience montre que *le rapport des différences de potentiel ($V_M - V_N$) et ($V_R - V_Q$) ne dépend que de ces deux conducteurs* et reste invariable lorsqu'on change soit la pile, soit les autres conducteurs du circuit, soit la position

des fils MN et RQ eux-mêmes dans le circuit. L'influence de la nature et des dimensions des conducteurs MN et RQ sur les grandeurs des différences de potentiel ($V_M - V_N$) et ($V_R - V_Q$) peut donc être représentée par des coefficients spécifiques r_1 et r_2 propres respectivement à ces deux conducteurs. Ces deux coefficients seront définis précisément par la relation :

$$\frac{V_M - V_N}{V_R - V_Q} = K = \frac{r_1}{r_2}$$

Comme le rapport invariable K est seul fourni par l'expérience, le choix de l'un des coefficients, r_1 par exemple, restera provisoirement arbitraire (v. sa fixation au § 47); l'autre r_2 sera déterminé dès qu'on aura fixé la valeur de r_1 .

Plus généralement, si l'on divise par la pensée le circuit en n conducteurs $C_1 C_2 \dots C_n$ ajoutés bout à bout, ceux-ci auront des coefficients spécifiques $r_1 r_2 \dots r_n$ dont les rapports deux à deux pourront être déterminés expérimentalement comme il vient d'être dit, l'un d'eux r_1 étant choisi arbitrairement. D'après la définition même de ces coefficients, les chutes de potentiels $v_1 v_2 \dots v_n$ le long des conducteurs $C_1 C_2 \dots C_n$ satisferont aux relations :

$$\frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2} = \dots = \frac{v_n}{r_n} = i \quad (14)$$

Les coefficients $r_1 r_2 \dots r_n$ s'appellent les *résistances électriques des conducteurs* $C_1 C_2 \dots C_n$ (nom adopté dans la théorie des fluides électriques). Quant à la valeur commune i des rapports (14), on l'appelle *intensité du courant* dans le circuit conducteur. Comme, d'après le choix même des coefficients $r_1 r_2 \dots r_n$, le rapport $\frac{v}{r} = i$ a la même valeur dans chaque fraction du circuit, on exprime ceci en disant que *l'intensité du courant est la même tout le long du circuit*. La formule $i = \frac{v}{r}$ n'est autre chose que la *loi d'Ohm*, fondée par ce savant sur l'hypothèse que *le fluide électrique se propage suivant les mêmes lois que la chaleur*.

L'intensité i du courant étant affectée du même signe que les différences de potentiel $v_1 v_2 \dots v_n$, nous sommes conduits à la considérer comme positive dans le sens des potentiels décroissants par

exemple ; le sens du courant (fig. 3) est donc celui qui est indiqué par les flèches.

40. **Emploi du galvanomètre.** — Nous n'avons point suivi dans l'étude précédente l'ordre historique. Pouillet, qui a découvert expérimentalement les lois du courant électrique dans les conducteurs linéaires, s'est servi à cet effet, non d'un électromètre, mais d'un galvanomètre (boussole des sinus). Sa méthode présente, au point de vue de notre exposé, l'inconvénient de s'appuyer sur des considérations qui sont du domaine de l'électromagnétisme ; néanmoins il convient d'en dire quelques mots.

Dans la boussole de Pouillet, que nous supposons connue, l'action du courant sur l'aiguille aimantée se réduit à un couple ; lorsque ce couple est égal et de sens contraire au couple exercé par le champ magnétique terrestre sur la même aiguille, celle-ci est en équilibre. La connaissance de la loi du couple magnétique terrestre, auquel l'aimant dévié par le courant se trouve soumis, fait donc connaître le couple dû au courant même. Comme, *par définition*, l'intensité du courant est proportionnelle à ce couple, on peut étudier la loi de variation de cette intensité lorsqu'on change soit la pile, soit la composition du circuit, etc.

Pouillet a constaté que *l'intensité du courant ainsi définie est la même en tous les points du circuit*. En effet, lorsqu'il enroulait sur le cadre de la boussole n tours du fil intercalé dans le circuit, il observait une déviation angulaire constante de l'aiguille aimantée, que ces n tours fussent pris dans le voisinage de la pile ou dans une autre partie quelconque du circuit.

D'autre part si, dans un circuit conducteur relié à une pile, on mesure simultanément : 1° l'intensité I du courant au moyen d'un galvanomètre ; 2° la différence de potentiel ($V_M - V_N$) entre les extrémités d'un conducteur MN intercalé dans le circuit (fig. 3), à l'aide d'un électromètre, on constate, en faisant varier la pile et les conducteurs autres que MN , que *les deux quantités I et ($V_M - V_N$) varient en conservant un rapport constant R* :

$$\frac{V_M - V_N}{I} = R$$

Ce rapport R , qui est un coefficient spécifique du conducteur MN , est appelé sa résistance électrique.

On retrouve donc ainsi, par une voie très différente de celle du paragraphe 39, les notions d'intensité du courant et de résistance d'un conducteur. D'ailleurs l'intensité I du courant, définie au moyen du galvanomètre, ne diffère pas de l'intensité i définie au paragraphe 39. En effet on a à la fois, pour expression de la différence de potentiel entre les extrémités d'un conducteur MN (§ 39 et 40) :

$$V_M - V_N = ri = RI$$

d'où :

$$\frac{I}{i} = \frac{r}{R} = \alpha$$

Le rapport α des résistances r et R du conducteur MN ne peut dépendre que de ce conducteur ; d'autre part α , considéré comme rapport des intensités I et i du courant, est indépendant de la fraction MN du circuit que l'on considère. La constante α ne dépend donc d'aucune circonstance physique ; c'est un coefficient parasite, que l'on fera égal à 1 par un choix convenable de l'unité d'intensité I .

41. Etude expérimentale de la distribution électrique dans les conducteurs. — Les lois exprimées par les formules (12) et (13) ($\delta = 0$ et $h_n = 0$), qui permettent de calculer la distribution électrique dans un conducteur, ont fait l'objet de vérifications expérimentales, qui n'ont peut-être pas le degré de précision que l'on pourrait souhaiter, mais qui paraissent établir suffisamment l'exactitude de ces lois. Nous citerons entre autres des expériences faites par *M. Adams* sur des conducteurs liquides (acide sulfurique dilué, sulfate de cuivre, sulfate de zinc) et par *Kirchhoff* sur des plaques métalliques circulaires.

Expériences de M. Adams. — Le liquide conducteur était contenu dans une caisse rectangulaire en bois (dimensions 300 millimètres sur 200 et 200 millimètres), sur les bords de laquelle étaient collées des bandes de papier portant des divisions en millimètres (fig. 18). Deux fils de platine scellés dans des tubes de verre, et

dont un petit bout seulement faisait saillie à chaque extrémité, étaient reliés par leurs extrémités supérieures pp aux deux pôles d'une pile P , leurs bouts inférieurs plongeant dans le liquide en des points que l'on repérait à chaque expérience. Un champ électrique sensiblement stable (ou courant permanent) était ainsi créé dans le liquide, celui-ci jouant le rôle du conducteur U de la figure 17; sa surface extérieure SS est en contact avec le diélectrique (air ou bois), et ses surfaces équipotentielles S_1 et S_2 sont celles des deux bouts de platine. Quant aux petits tubes de verre verticaux, on admet qu'ils ne produisent pas une perturbation sensible dans le champ. On peut donc calculer, au moins approximativement, la forme des surfaces équipotentielles conformément aux indications du paragraphe 38.

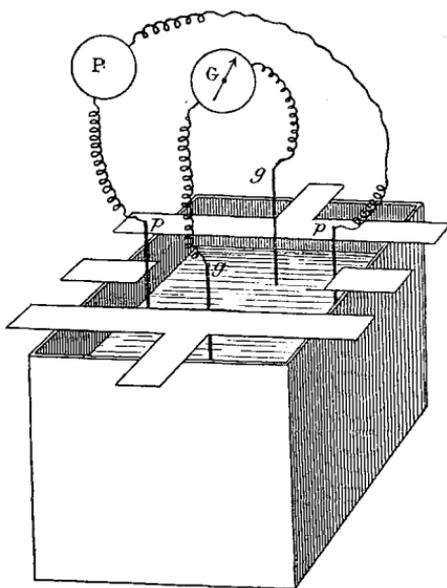


Fig. 18.

Pour déterminer expérimentalement la forme des mêmes surfaces, M. Adams explorait le champ à l'aide de deux autres fils de platine également scellés dans des tubes de verre (gg) et reliés aux deux bornes d'un galvanomètre G . Lorsque les bouts inférieurs de ces deux fils sont sur une même surface équipotentielle, le conducteur gGg extérieur qui les relie est équipotentiel; donc aucun champ électrique (ou courant) n'y est créé, et l'aiguille du galvanomètre n'est pas déviée. Il suffit donc, laissant fixe l'un des deux fils, d'amener l'autre successivement dans diverses positions bien repérées (à l'aide des règles en T), et telles que l'aiguille reste au zéro. On déterminait ainsi assez rapidement les diverses sections horizontales d'une même surface équipotentielle au moyen d'un certain nombre de points dont on mesurait les coordonnées rectangulaires.

Dans d'autres expériences de M. Adams, les fils de platine *pp* reliés à la pile étaient nus et en contact avec le liquide sur toute leur hauteur, de telle sorte que le champ créé était regardé comme *cylindrique* (approximativement), la surface de ces fils étant équipotentielle. D'après M. Adams, le résultat de ses diverses mesures serait entièrement conforme à la théorie, c'est-à-dire aux lois (12) et (13). — Le même auteur a fait sur des feuilles d'étain des expériences analogues à celles de Kirchhoff que nous allons résumer.

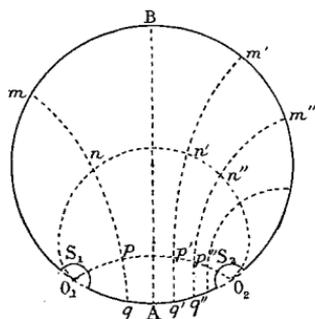


Fig. 19.

Expériences de Kirchhoff. — Imaginons un champ électrique cylindrique (§ 37), où le potentiel V en un point (x, y, z) soit représenté par la formule :

$$V = A L \left(\frac{r_1}{r_2} \right)$$

r_1 et r_2 désignant les distances du point (x, y, z) à deux axes parallèles projetés en O_1 et O_2 sur le plan de la figure 19, et L étant le symbole des logarithmes népériens. Les surfaces équipotentielles, représentées par des équations telles que $\frac{r_1}{r_2} = \text{constante}$, sont des cylindres ayant pour sections droites des cercles $mnpq - m'n'p'q' \dots$, et les trajectoires orthogonales de ces cercles, ou lignes de flux (§ 12) sont les cercles passant en O_1 et O_2 : $O_1q A q' O_2 - O_1 m B m' O_2 - O_1 n n' n'' O_2 \dots$ (théorème de géométrie bien connu).

Ceci posé, découpons dans ce champ un disque limité : 1° par deux plans perpendiculaires aux axes O_1 et O_2 ; 2° par un cylindre de révolution dont la section droite est le cercle $O_1 A O_2 B O_1$; 3° par deux cylindres de révolution S_1 et S_2 équipotentiels, dont les potentiels sont V_1 et V_2 . Si ce disque est supposé conducteur et entouré d'un milieu isolant, sauf sur les surfaces S_1 et S_2 , où l'on maintient les potentiels V_1 et V_2 , le champ créé dans ce conducteur sera identique à celui que nous venons de définir, puisque (en admettant les relations (12) et (13) du paragraphe 38), ce champ satisfait aux conditions :

$$1^{\circ} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \text{ (dans le conducteur);}$$

$$2^{\circ} h_n = l \frac{\partial V}{\partial x} + m \frac{\partial V}{\partial y} + n \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \text{ (sur les bases planes et la surface latérale cylindrique en contact avec le diélectrique);}$$

$$3^{\circ} V = V_1 \text{ (sur la petite surface cylindrique } S_1);$$

$$4^{\circ} V = V_2 \text{ (— — — } S_2).$$

Kirchhoff, pour réaliser le champ ainsi calculé à l'avance, employait des plaques métalliques minces ayant la forme de ce disque. Pour maintenir constants les potentiels V_1 et V_2 , il appliquait en deux points O_1 et O_2 du contour du disque des électrodes reliées aux pôles d'une pile (sans creuser les petites échancrures S_1 et S_2). En reliant les deux bornes d'un galvanomètre : l'une à un point fixe m du disque, l'autre à une série de points n, p, q, \dots , tels que l'aiguille du galvanomètre ne fût pas déviée, il déterminait la forme d'une ligne équipotentielle $mnpq$ à la surface de ce disque. Il a constaté ainsi que les lignes équipotentielles ont bien la forme prévue par la théorie.

En outre, afin de déterminer le potentiel de chacune de ces lignes, Kirchhoff intercalait sur la branche du galvanomètre une pile thermoélectrique dont il pouvait faire varier le nombre des éléments, de manière à établir entre les deux électrodes de cet instrument une différence de potentiel connue v . L'une des électrodes étant reliée à un point m , il cherchait à placer la seconde en un point m' tel que l'aiguille du galvanomètre ne fût pas déviée. La différence de potentiel entre les deux lignes $mnpq$ et $m'n'p'q'$ était alors connue et égale à v .

Quincke, Adams et d'autres expérimentateurs ont répété les expériences de Kirchhoff sur des plaques circulaires ou rectangulaires, et sur des feuilles d'étain. Les résultats de leurs expériences ont confirmé l'exactitude des relations (12) et (13) du paragraphe 38, que nous considérerons désormais comme des lois expérimentales.

42. Propriété des tubes de courant. — Imaginons dans un conducteur U (fig. 20) un tube, dont la surface latérale soit engendrée par des *lignes de flux* $ABCD$, $A'B'C'D'$ (§ 12) et, par suite, soit tangente en chaque point (x, y, z) à la direction de l'intensité h du

champ en ce point, ce qui s'exprime par la condition (13) du paragraphe 38 ;

$$lX + mY + nZ = 0 \quad (15)$$

Nous donnerons à ce tube le nom de *tube de courant*. (Ainsi le

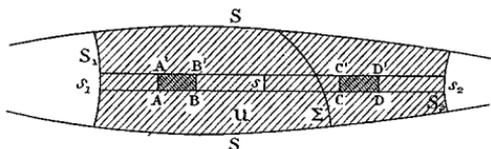


Fig. 20.

conducteur U, qui par sa surface latérale SS est en contact avec le diélectrique ambiant, est lui-même un tube de courant.)

Supposons ce tube limité par deux bases S_1 et S_2 . La condition (15), relative à sa surface latérale et la donnée des potentiels V_1 et V_2 sur ses bases S_1 et S_2 suffisent, comme on l'a vu au paragraphe 38, à définir l'état du champ électrique dans tout le volume de ce tube. On peut donc le considérer comme *un conducteur indépendant du conducteur U*, en ce sens que, si on l'isolait du conducteur U tout en maintenant ses bases S_1 et S_2 aux mêmes potentiels V_1 et V_2 , le champ électrique n'y serait pas modifié (même raisonnement que pour le disque isolé de Kirchhoff, § 41). Ce tube de courant, intercalé dans un circuit tel que celui de la figure 3, y jouirait des mêmes propriétés que les autres conducteurs linéaires. On en conclut que dans deux parties quelconques AB et CD du tube, hachées sur la figure 20, dont nous supposons la section très petite, l'intensité i du courant est la même ; et, si R_{AB} et R_{CD} sont les résistances électriques de ces deux parties, on aura (§ 39) :

$$V_A - V_B = R_{AB} i \quad V_C - V_D = R_{CD} i \quad (16)$$

D'autre part, en désignant par U' le volume et S' la surface de la partie du tube comprise entre la base s_1 et une section quelconque s , on a l'identité :

$$\int_{U'} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) d\pi + \int_{S'} (lX + mY + nZ) dS = 0$$

par application de la formule (3) du paragraphe 17. En tenant

compte de la relation (12) pour le volume U' , et de la relation (13) ou (15) pour la surface latérale du tube, cette équation se réduit à

$$\int_{S_1} (lX + mY + nZ) dS + \int_S (lX + mY + nZ) dS = 0$$

l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale (à s_1 ou à s) intérieure au volume U' ; $(lX + mY + nZ)$ représente donc la composante normale h_n de l'intensité h du champ sur chaque élément dS de surface, mais avec le signe + sur s_1 et le signe - sur s . Donc :

$$\int_{S_1} h_n dS = \int_S h_n dS \tag{17}$$

ce que l'on peut exprimer en disant que le flux $\int_S h_n dS$ du vecteur h est le même à travers toute section s du tube.

Dans le cas où le tube de courant a une section infiniment petite, cette formule donne :

$$h_1 s_1 = h\sigma$$

en désignant par σ l'aire de la section droite (équipotentielle) du tube en un point où l'intensité du champ est h .

Les différences de potentiel ($V_A - V_B$) et ($V_C - V_D$) auront donc encore pour expression :

$$\left. \begin{aligned} V_A - V_B &= \int_A^B h dn = h_1 s_1 \int_A^B \frac{dn}{\sigma} \\ V_C - V_D &= \dots\dots\dots = h_1 s_1 \int_C^D \frac{dn}{\sigma} \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

dn étant un élément infiniment petit de la ligne de flux ABCD. La comparaison de ces formules avec les formules (16) donne :

$$\frac{R_{AB}}{\int_A^B \frac{dn}{\sigma}} = \frac{R_{CD}}{\int_C^D \frac{dn}{\sigma}} = \rho = \frac{1}{c} \tag{19}$$

Ce rapport ρ étant le même pour deux parties quelconques AB et CD du tube, quelles que soient leurs dimensions, ne dépend évidemment que de la nature du conducteur U. On l'appelle résis-

tance spécifique de ce conducteur, et son inverse c est la *conductibilité électrique* de la substance.

Pour un élément AB du tube, de longueur infiniment petite dn , on aura :

$$R_{AB} = \rho \frac{dn}{\sigma}$$

ce qui montre que ρ est la résistance d'un tube ayant l'unité de longueur ($dn = 1$) et l'unité de section ($\sigma = 1$), En outre :

$$i = \frac{V_A - V_B}{R_{AB}} = \frac{h dn}{\left(\rho \frac{dn}{\sigma}\right)} = \frac{h\sigma}{\rho}$$

On déduit de là :

$$\frac{i}{\sigma} = \frac{h}{\rho} = ch$$

Le rapport de l'intensité i du courant dans le tube considéré à la section droite σ de ce tube en un point (x, y, z) s'appelle la *densité du courant* en ce point. Nous donnerons encore ce nom à un vecteur ayant pour grandeur $\frac{i}{\sigma}$ ($= ch$) et pour direction celle de l'intensité h du champ au point (x, y, z) . *La densité du courant en un point ne sera autre chose, comme on le voit, que le vecteur \bar{h} multiplié par la conductibilité c du conducteur.*

D'après les formules (18) et (19), l'intensité i du courant dans le tube considéré a pour valeur :

$$i = \frac{V_A - V_B}{R_{AB}} = \frac{h_1 s_1}{\rho} = c h_1 s_1$$

Si la section s_1 n'est pas infiniment petite, cette formule devra être remplacée par :

$$i = c \int_{S_1} h_n dS$$

Dans le cas où la section s_1 se confond avec S_1 , le tube du courant est le conducteur U lui-même, et i devient l'*intensité totale I du courant dans ce conducteur*. D'après l'égalité (17), on voit que cette intensité I est la même à travers une section s quelconque du conducteur qu'à travers la base S_1 .

Nous appellerons *résistance R du conducteur U, entre les*

sections équipotentielles S_1 et S_2 , le quotient de la chute de potentiel $V_1 - V_2$ par l'intensité I du courant :

$$V_1 - V_2 = R I$$

D'autre part, en généralisant la définition donnée au paragraphe 37, nous appellerons *capacité électrostatique* C du tube U le quotient de la quantité d'électricité Q , qui existe sur la base S_1 du tube, par la chute de potentiel $V_1 - V_2$:

$$Q = C (V_1 - V_2)$$

De ces deux définitions on déduit :

$$Q = C R I$$

et, comme on a :

$$I = \int_{S_1} c h_n dS \qquad Q = \int_{S_1} \frac{k h_n}{4\pi} dS$$

il en résulte la relation :

$$C R = \frac{k}{4\pi c} = \theta \qquad (20)$$

d'où l'on peut déduire la valeur de la résistance R quand on a calculé celle de la capacité C (v. § 37), à la condition que le corps U soit parfaitement homogène.

43. Lois de la distribution électrique dans un conducteur hétérogène. — Supposons que le conducteur U de la figure 20 soit composé de deux conducteurs homogènes successifs séparés par une surface Σ et ayant des conductibilités spécifiques c_1 etc₂. Divisons U en tubes de courant de section infiniment petite, que l'on peut considérer comme des conducteurs linéaires indépendants les uns des autres (pour les mêmes raisons qu'au paragraphe 42). On sait par l'expérience (§ 39) que dans un conducteur linéaire, homogène ou non, l'intensité i du courant est la même en tous les points. Donc l'expression $c h_n dS$ de cette intensité a la même valeur c, h_1, s_1 pour toute section droite ou oblique dS d'un tube ayant s_1 pour base équipotentielle. Si, en particulier, dS est un élément de la surface Σ de séparation des deux parties homogènes de U , on

aura entre les composantes normales des intensités \bar{h}_1 et \bar{h}_2 du champ, en un même point de dS , dans les deux conducteurs :

$$c_1 \left(h_1 \right)_n = c_2 \left(h_2 \right)_n. \quad (21)$$

Telle est la *loi de discontinuité* du vecteur \bar{h} à la surface de séparation de deux conducteurs.

La composante *tangentielle* de h n'est pas discontinue à la traversée de l'élément dS ; car, suivant une direction quelconque tangente à cet élément dS , la composante de h est égale à la dérivée $-\frac{\partial V}{\partial s}$ du potentiel V prise le long d'un chemin ds ayant la même direction, et a par conséquent même valeur de part et d'autre de dS .

Supposons maintenant que U soit un conducteur hétérogène, où la conductibilité c est une fonction quelconque de x, y, z . L'intensité $i = \int_S c h_n dS$ du courant étant la même à travers toute section s d'un même tube de courant (propriété expérimentale des conducteurs linéaires : $\frac{V_A - V_B}{R_{AB}} = i = \text{constante}$), il en résulte que l'intensité totale du courant qui *entre* dans une surface fermée S'' est égale à celle qui en *sort*, ce qui peut s'écrire :

$$\int_{S''} c h_n dS = \int_{S''} (lcX + mcY + ncZ) dS = 0$$

Mais en vertu d'une identité bien connue (formule 3 du § 17) :

$$\int_{S''} (lcX + mcY + ncZ) dS = - \int_{U''} \left[\frac{\partial}{\partial x} (cX) + \frac{\partial}{\partial y} (cY) + \frac{\partial}{\partial z} (cZ) \right] d\omega$$

U'' désignant le volume contenu à l'intérieur de S'' . Pour que cette intégrale soit nulle, quel que soit le volume U'' , il faut que l'on ait en tout point (x, y, z) du conducteur U :

$$\frac{\partial}{\partial x} (cX) + \frac{\partial}{\partial y} (cY) + \frac{\partial}{\partial z} (cZ) = 0 \quad (22)$$

Telle est la *loi de la distribution électrique dans un conducteur lorsque le champ est stable* ; elle comprend comme cas particulier la relation (12) relative aux conducteurs homogènes. Elle doit être

complétée par la relation (13) relative à la surface de séparation du conducteur et du milieu isolant :

$$lX + mY + nZ = 0 \quad (23)$$

Solution unique du problème de la distribution électrique. — Il n'y a qu'un état possible du champ dans un conducteur U (fig. 17), homogène ou hétérogène, limité : 1° par une surface SS où la relation (23) est vérifiée; 2° par deux sections équipotentielles S₁ et S₂ dont les potentiels V₁ et V₂ sont donnés, la relation (22) étant du reste vérifiée en tout point de U.

En effet, supposons qu'il y ait deux états possibles correspondant à des potentiels différents V' (x, y, z) et V'' (x, y, z). Considérons un champ qui admettrait pour potentiel la fonction :

$$V = V' - V'' = V'''$$

Dans ce champ le potentiel V serait nul sur les surfaces S₁ et S₂, comme étant la différence de deux potentiels égaux (à V₁ ou à V₂). D'autre part V''' satisfaisant comme V' et V'' à la relation (22), on aura dans le champ (V''') :

$$\int_U V \left[\frac{\partial}{\partial x} (cX) + \frac{\partial}{\partial y} (cY) + \frac{\partial}{\partial z} (cZ) \right] d\omega = 0$$

Mais, par application de la formule 3 du paragraphe 17, cette intégrale devient :

$$\begin{aligned} & - \int_U \left[\frac{\partial V}{\partial x} cX + \frac{\partial V}{\partial y} cY + \frac{\partial V}{\partial z} cZ \right] d\omega \\ & - \int_{S+S_1+S_2} V (lcX + mcY + ncZ) dS = 0 \end{aligned}$$

Les intégrales de surface sont nulles : 1° sur S₁ et sur S₂, parce que V y est nul; 2° sur S parce que la relation (23) y est satisfaite. Il reste donc, en remplaçant $-\frac{\partial V}{\partial x}$, $-\frac{\partial V}{\partial y}$, $-\frac{\partial V}{\partial z}$ par X, Y, Z, l'équation :

$$\int_U c (X^2 + Y^2 + Z^2) d\omega = 0$$

qui entraîne évidemment : X = Y = Z = 0 en tout point du champ (V'''). Dire que ce champ (V''') n'existe pas équivaut à dire

que les champs (V) et V") ne sont pas distincts comme on l'avait supposé.

44. **Electrisation d'un conducteur hétérogène sous l'action d'un courant permanent.** — En remplaçant dans la formule (22) c par sa valeur $\frac{k}{4\pi\theta}$ tirée de (20), on pourra écrire cette formule :

$$\frac{1}{\theta} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kX}{4\pi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{kY}{4\pi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{kZ}{4\pi} \right) \right] + \frac{kX}{4\pi} \frac{\partial \frac{1}{\theta}}{\partial x} + \frac{kY}{4\pi} \frac{\partial \frac{1}{\theta}}{\partial y} + \frac{kZ}{4\pi} \frac{\partial \frac{1}{\theta}}{\partial z} = 0$$

ou

$$\delta = c \left(X \frac{\partial \theta}{\partial x} + Y \frac{\partial \theta}{\partial y} + Z \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = ch \frac{\partial \theta}{\partial n} \cos \left(h, \frac{\partial \theta}{\partial n} \right) \quad (24)$$

δ désignant la densité de quantité d'électricité au point (x, y, z) $\frac{d\theta}{dn}$ un vecteur ayant pour composantes $\frac{d\theta}{dx}, \frac{d\theta}{dy}, \frac{d\theta}{dz}$, et $\left(h, \frac{d\theta}{dn} \right)$ désignant l'angle de ce vecteur et du vecteur h .

Cette formule montre que, par le fait de l'hétérogénéité du conducteur (variation du rapport $\theta = \frac{k}{4\pi c}$ d'un point à un autre), il y a création de quantités d'électricité dans ce corps; elle fait connaître la fonction δ dans un champ stable.

On calculerait aussi facilement la densité superficielle ε de quantité d'électricité créée à la surface Σ de séparation de deux conducteurs homogènes (fig. 20).

Ces conclusions s'étendent au cas des corps très médiocrement conducteurs. Du reste on peut, sans calcul, se rendre compte de la cause du développement de l'*électrisation résiduelle* dans un isolant, où la conductibilité est très variable d'un point à un autre. Le champ électrique que l'on y crée (expérience d'électrostatique) disparaît rapidement dans les parties les plus conductrices, dont la surface se trouve par là même *électrisée*; dans d'autres parties, l'énergie électrique se dissipant plus lentement, il en résulte pendant un temps plus ou moins long des variations continues de l'état du champ.

L'homogénéité d'un isolant au point de vue du pouvoir inducteur est relativement facile à obtenir; il n'en est pas de même de l'homogénéité au point de vue de la conductibilité. Ainsi on

admet toujours l'invariabilité du pouvoir inducteur de l'air, sans qu'il en résulte une erreur appréciable dans les expériences les plus précises ; et cependant on sait que la conductibilité du même diélectrique peut varier d'un point à un autre dans un rapport considérable, même sans cause apparente. Citons encore le cas d'un câble télégraphique, dont l'isolant est la *gutta-percha* ; sa capacité électrostatique (proportionnelle au pouvoir inducteur k de la gutta) ne varie en général qu'entre des limites très restreintes, tandis que d'une partie à l'autre du câble la résistance électrique de l'isolant peut varier dans des limites extrêmement étendues. Il est du reste bien difficile de maintenir à la couche superficielle d'un diélectrique une résistance spécifique approchant de celle des couches intérieures. Tous ces faits bien connus des électriciens expliquent les difficultés que présente, au point de vue de la précision, l'étude des propriétés électriques des isolants imparfaits.

Nous reviendrons au paragraphe 52 sur cette question, qui y sera traitée plus complètement.

45. Application. Champ électrique d'une ligne télégraphique. — Lorsqu'un courant permanent existe dans un circuit conducteur, le champ électrique s'étend dans le diélectrique environnant. Nous allons étudier ce champ dans un câble télégraphique (fig. 21) composé : 1° d'un conducteur cylindrique ou *fil* AA'BB', de rayon R_1 , où existe un courant d'intensité I ; 2° d'une couche isolante et concentrique, de rayon R_2 ; 3° d'une armature métallique FF'GG' appliquée sur l'isolant et reliée au sol (potentiel zéro). Soient : c la conductibilité du fil, k le pouvoir inducteur de l'isolant. Nous supposerons que cet isolant jouit de la propriété : $\delta = 0$ ou :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (25)$$

Champ dans le conducteur. — A l'intérieur du fil, le champ électrique est uniforme et a une intensité h définie par la formule :

$$I = ch \pi R_1^2$$

Les sections droites du fil sont équipotentielles, et le potentiel V a pour expression :

$$V = - hx \quad (26)$$

en un point situé à une distance x de la section droite DE du fil qui est au potentiel zéro.

Champ dans le diélectrique. — Si l'on définit la position d'un point M du diélectrique par sa distance $MP = r$ à l'axe X'X du fil et par sa distance $OP = x$ à la section droite DE, le potentiel V au point (x, r) sera une fonction de x et de r , qui doit s'annuler

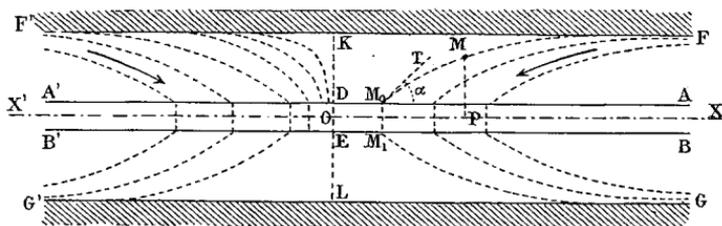


Fig. 21.

pour $r = R_2$ (surface du cylindre FF'GG') et se réduire à $V = -hx$ pour $r = R_1$ (surface du cylindre AA'BB'), quel que soit x ; en outre, V doit satisfaire à l'équation (25). La fonction :

$$V = - \frac{hx}{\mathcal{L}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \mathcal{L}\left(\frac{R_2}{r}\right) \quad (27)$$

satisfait à ces diverses conditions ($\mathcal{L} =$ logarithme népérien).

Cette solution, il est vrai, convient au cas d'un câble de longueur infinie, tandis que le câble est limité. Mais sa longueur est si grande relativement à son diamètre (n kilomètres comparés à quelques millimètres), que nous admettrons que les conditions relatives aux extrémités du câble ne modifieraient pas sensiblement cette solution.

Les surfaces équipotentielles sont de révolution autour de X'X, et leurs méridiennes (en pointillé sur la figure 21) ont pour équation :

$$x \mathcal{L}\left(\frac{R_2}{r}\right) = \text{constante.} \quad (28)$$

Elles se raccordent avec les sections équipotentielles correspondantes du conducteur (raccordement de l'arc MM₀ avec la droite

M_0M_1) sous un angle $\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ tel que $\operatorname{tg} \alpha$ est le coefficient angulaire de la tangente à la méridienne (M_0T) au point où $r = R_1$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{dr}{dx}\right)_{r=R_1} = \frac{R_1}{x} \mathcal{L} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

L'angle α est sensiblement nul sur presque toute la longueur du câble; on voit en effet que si $R_1 = \frac{1}{2}$ millimètre et $R_2 = 3$ mm. par exemple, dès que x est supérieur à 50 centimètres, α tombe au-dessous d'un dixième de degré. D'autre part, l'équation (28) montre que r tend vers R_2 quand x croît indéfiniment, c'est-à-dire que les méridiennes sont asymptotes aux droites FF' et GG' .

Ainsi, à une distance de la section DE (potentiel zéro) supérieure à 50 centimètres par exemple, les surfaces équipotentielles se confondent sensiblement, sur une certaine longueur, avec des cylindres concentriques, comme dans le cas où il n'y a pas de courant (§ 37). Mais lorsque x tend vers zéro, l'angle α tend vers $\frac{\pi}{2}$; et, à la limite, la surface équipotentielle zéro se compose de deux nappes rectangulaires, savoir la section droite $KDEL$ et la surface du cylindre $FF'GG'$.

Le fil intérieur et l'armature métallique forment un condensateur dont la capacité, calculée au paragraphe 37 dans le cas où il n'y a pas de courant, est égale, par unité de longueur, à :

$$C = \frac{k}{2 \mathcal{L} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \quad (29)$$

Que devient cette capacité lorsqu'il y a un courant dans le fil ?

Nous définirons encore la capacité par unité de longueur, en un point x du câble, comme le quotient de la charge électrique q du fil (par unité de longueur) par l'excès V de son potentiel sur celui (zéro) de l'armature :

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\epsilon}{V} 2\pi R_1$$

ϵ désignant la densité de quantité d'électricité à la surface du fil, et $2\pi R_1$ représentant la surface par unité de longueur.

Or on a (formule 2 du § 34) :

$$4\pi\varepsilon = kh_n$$

h_n désignant, en un point de la surface (du côté du diélectrique) la composante normale de l'intensité du champ :

$$h_n = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{-hx}{\mathcal{L} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)} \cdot \frac{1}{r}$$

En remplaçant r par R_1 et $-hx$ par le potentiel V du fil (formule 26), on aura donc :

$$\varepsilon = \frac{kV}{4\pi R_1 \mathcal{L} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}$$

d'où enfin :

$$C = \frac{k}{2 \mathcal{L} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}$$

formule identique à (29). La capacité du fil n'est donc pas modifiée par le courant.

Dans le cas d'une ligne électrique aérienne, composée de deux fils de rayons R_1 et R_2 situés à une distance d l'un de l'autre, les calculs différeraient à peine des précédents, et l'on verrait que la formule (11) de la capacité de la ligne (§ 37) n'est pas modifiée par l'existence du courant.

CHAPITRE VI

LOI DE JOULE. — LOI GÉNÉRALE DE LA DISTRIBUTION ÉLECTRIQUE

46. **Loi de Joule.** — Joule a déterminé expérimentalement la loi du dégagement de chaleur qui se produit dans un conducteur où existe un champ électrique. Il faisait varier, dans ses expériences, la longueur, le diamètre et la substance des fils conducteurs, ainsi que l'intensité du courant ; et il mesurait dans chaque cas : 1° la résistance totale R du conducteur soumis à l'essai ; 2° l'intensité I du courant (au moyen d'une boussole des tangentes) ; 3° la quantité de chaleur W dégagée pendant un temps connu t dans le conducteur (celui-ci étant plongé dans un calorimètre).

Il trouva ainsi que la quantité de chaleur W est simplement proportionnelle à la résistance R , au carré I^2 de l'intensité et au temps t :

$$W = ARI^2t \quad (1)$$

A désignant un coefficient dont la valeur *est indépendante de toute circonstance physique*, et ne dépend par conséquent que du choix des unités de temps, de chaleur, de résistance et d'intensité.

47. **Unités de résistance et d'intensité de courant.** — Si V désigne la chute de potentiel le long du conducteur R , on a : $V = RI$, et la formule (1) peut s'écrire :

$$W = A \frac{V^2}{R} t \quad (1')$$

Comme l'unité de résistance a été laissée provisoirement arbitraire (§ 39), et que d'autre part les unités de temps, de chaleur et de potentiel électrique (§ 29) ont été préalablement définies, nous

fixerons l'unité de résistance par la formule (4') en adoptant pour le coefficient parasite A la valeur 1.

La résistance d'un conducteur est ainsi égale à l'unité quand, la différence de potentiel V entre ses extrémités étant maintenue égale à l'unité, la quantité de chaleur dégagée dans ce conducteur pendant l'unité de temps est égale à l'unité. Cette définition a été utilisée dans l'une des méthodes de détermination de l'ohm (méthode calorimétrique de Joule, § 104).

L'unité de résistance étant définie par la formule :

$$W = \frac{V^2}{R} t$$

celle d'intensité de courant le sera par la formule :

$$V = RI$$

Les unités *pratiques* de résistance et d'intensité de courant ont reçu les noms respectifs d'*ohm* et d'*ampère*. Les dimensions d'une résistance et d'une intensité de courant seront représentées (V. § 29) par :

$$R = W^{-1}V^2T = L^{-1}TK^{-1}$$

$$I = VR^{-1} = L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2} K^{\frac{1}{2}}$$

Si l'on divise par la pensée un conducteur en tubes élémentaires de courant, ces tubes peuvent être considérés comme des conducteurs linéaires indépendants entre eux (§ 42), et la loi de Joule est applicable à chacun d'eux. Donc dans un tube élémentaire de section σ et de longueur infiniment petite dn , dont la résistance est : $r = \rho \frac{dn}{\sigma}$, et où existe une intensité de courant $i = \frac{h\sigma}{\rho}$, la quantité de chaleur dégagée par unité de temps est égale à $ri^2 = \frac{h^2}{\rho} \sigma dn$. On en déduit que *la chaleur dégagée dans l'unité de volume, par unité de temps, en un point où l'intensité du champ électrique est h , a pour expression :*

$$w_e = \frac{ri^2}{\sigma dn} = \frac{h^2}{\rho} = ch^2 \quad (2)$$

c désignant la conductibilité de la substance.

Application. — Calculons le dégagement de chaleur Q produit pendant une seconde dans un centimètre cube d'un conducteur où la chute de potentiel est de n volts par centimètre. Comme, en unités pratiques, l'intensité h du champ est égale à $\frac{n}{10^{-9}}$ et que le volume d'un centimètre cube est égal à 10^{-27} , on trouve :

$$\begin{aligned} Q &= 10^{-27} w_c = 10^{-9} cn^2 \text{ (u. pr.)} \\ &= \frac{1}{4,17} 10^{-9} cn^2 \text{ (petites calories).} \end{aligned}$$

Pour le fer ($c = 8 \cdot 10^{13}$), si $n = 1$ volt, on a : $Q = 20.000$ calories environ. Pour le cuivre, dont la conductibilité est 6 fois plus grande, on aura un dégagement de chaleur 6 fois plus grand pour une même intensité h de champ. Ces dégagements de chaleur sont inadmissibles dans les applications pratiques ; aussi est-on obligé de limiter l'intensité des courants que l'on emploie. Ainsi dans les conducteurs d'éclairage en cuivre on admet comme règle que la *densité* du courant ne doit pas dépasser 3 à 4 ampères par millimètre carré. Pour 4 ampères par mmq, on a :

$$n = \rho \frac{dn}{\sigma} i = \frac{10^{-13}}{6 \times 8} \times \frac{10^{-9}}{10^{-20}} \times 4 = \frac{1}{1200} \text{ volt (par cm.)}$$

$$h = \frac{n}{10^{-9}} = 0,83 \times 10^6.$$

$$Q = 10^{-27} w_c = \frac{1}{12} \text{ calorie (par cm. c. et par seconde).}$$

Comme chaque calorie élève à peu près de 1° centigrade la température d'un centimètre cube de cuivre, ou aurait donc une élévation de température de 1° en 12 secondes (en supposant nul le rayonnement calorifique du conducteur).

48. Conséquence de la loi de Joule. — Si l'on considère la quantité de chaleur dégagée, pendant un temps infiniment petit dt , dans un volume conducteur U où existe un champ électrique, cette quantité ne peut être qu'une fraction de l'énergie électrique contenue dans le même volume qui se dissipe par transformation en chaleur. Elle ne saurait, en effet, être empruntée à l'énergie de la région du champ extérieure à U ; car, pendant le temps dt ,

l'énergie envoyée de l'extérieur au volume U ne peut y pénétrer qu'à une profondeur infiniment petite $v dt$, v désignant sa vitesse de propagation qui est évidemment finie.

Du reste, l'énergie électrique W_e du champ par unité de volume (§ 31) ayant pour valeur $\frac{kh^2}{8\pi}$, la loi de Joule (formule 2) exprime bien que la quantité de chaleur W_c dégagée dans la même unité de volume par unité de temps est une fraction fixe de cette énergie W_e :

$$w_c = ch^2 = 2 \frac{4\pi c}{k} \frac{kh^2}{8\pi} = \frac{2}{\theta} w_e. \quad (3)$$

θ , étant défini par la relation $k = 4\pi c\theta$, est, comme k et c , un coefficient spécifique du conducteur; on voit qu'il est comparable à un temps (puisque $\theta = 2 \frac{w_e}{w_c}$).

Les corps dits conducteurs sont donc des corps tels que, lorsqu'un champ électrique y est créé, l'énergie électrique s'y dissipe, par transformation sur place en chaleur, avec une rapidité représentée par la fraction $\frac{2}{\theta}$, laquelle ne dépend que de la nature du corps (en réalité tous les corps sont plus ou moins conducteurs). Comme, en courant permanent, l'intensité h du champ en un point ne varie pas avec le temps et qu'il en est de même, par conséquent, de l'énergie électrique locale W_e , on en conclut que le champ reçoit incessamment d'une source extérieure (pile, etc.) de nouvelles quantités d'énergie qui viennent réparer les pertes d'énergie électrique W_c au fur et à mesure qu'elles se produisent.

Mais le champ électrique tend à se dissiper dans les conducteurs lorsque les pertes d'énergie électrique ne sont point réparées. Tel est le cas de la décharge spontanée d'un condensateur lorsque son diélectrique est légèrement conducteur. Si ce diélectrique est homogène, pendant le temps dt l'énergie électrique de chaque élément de volume est réduite, par dissipation calorifique, d'une fraction uniforme $\frac{2dt}{\theta}$. Comme cette énergie est proportionnelle au carré de l'intensité h du champ, h se trouve réduit partout d'une même fraction $\frac{dt}{\theta}$, ce qui ne modifie évidemment pas les surfaces équipotentiellles et ne détruit pas l'état d'équilibre électrostatique du champ. On a donc en un point quelconque :

$$\frac{dh}{h} = -\frac{dt}{\theta}$$

d'où l'on déduit par intégration :

$$h = h_0 e^{-\frac{t}{\theta}} \quad (4)$$

Ainsi le champ s'affaiblit suivant une loi exponentielle. Pendant cet affaiblissement l'état du champ est, à une époque quelconque t , un état stable en ce sens que, si le diélectrique redevenait subitement un isolant parfait, c'est-à-dire si la dissipation calorifique de l'énergie électrique cessait, le champ conserverait indéfiniment l'état auquel il serait parvenu à l'époque t .

La loi d'affaiblissement du champ ne serait plus la même, si θ variait d'un point à un autre du diélectrique ; car la variation relative de l'énergie électrique et, par suite, celle $\left(\frac{dh}{h}\right)$ de l'intensité h étant inégale aux divers points, l'état d'équilibre électrostatique serait constamment détruit. Un nouvel état stable tendrait constamment à se produire, les parties les moins affaiblies du champ devant à cet effet envoyer de l'énergie aux parties les plus affaiblies. Si, par exemple, une partie du diélectrique est parfaitement isolante, toute son énergie ira se consommer dans les parties conductrices.

49. Mesure du coefficient θ . — Dans le condensateur à diélectrique homogène considéré au paragraphe 48, la différence V des potentiels des armatures décroît suivant la même loi exponentielle que l'intensité h du champ (formule 4) :

$$V = V_0 e^{-\frac{t}{\theta}}$$

Si donc on détermine (à l'électromètre) les valeurs V_0 et V_1 de cette différence de potentiel à deux époques $t = 0$ et $t = T$, on en déduira la valeur :

$$\theta = T \mathcal{L} \left(\frac{V_0}{V_1} \right)$$

du temps θ . Cette méthode a été appliquée à certains diélectriques,

mais les mesures sont presque toujours faussées par l'hétérogénéité de la substance étudiée.

On peut encore déduire la valeur de θ de la formule : $k = 4 \pi c \theta$, quand on connaît le pouvoir inducteur k et la conductibilité c d'une substance. Mais d'une part la détermination de c est très incertaine dans les médiocres conducteurs, et dans les bons conducteurs c'est la mesure de k qui devient impossible. Aussi nous ne donnons les chiffres suivants qu'à titre d'indication approximative :

SUBSTANCES	k	c	θ CALCULÉ
Air	1/900 <i>unités pratiq.</i>	?	supérieur à 10 ⁷ secondes
Gutta-percha. . .	2,5/900 (Gordon)	10 ⁻⁶	200 secondes
Verre	3,5/900 (id.)	10 ⁻⁶ à 10 ⁻¹⁰	300 à 3.000.000
Mica	8/900 (Bouty)	10 ⁻⁵	70
Eau	80/900 (id. Gouy)	10 ⁺³	7 × 10 ⁻⁶
Cuivre.	?	0,62 × 10 ⁺¹⁵	?

Le chiffre de θ relatif à l'air est calculé d'après la durée d'un champ électrique dans l'air sec (expérience de L. Kelvin). Quant au cuivre, si μ désigne la valeur inconnue de son pouvoir inducteur spécifique rapporté à celui de l'air, son coefficient θ est égal à $1,4 \times 10^{-19} \mu$ et ne paraît point, par conséquent, être d'un ordre de grandeur mesurable. La petitesse de ce chiffre montre avec quelle rapidité inconcevable l'énergie électrique se dissipe en chaleur et est renouvelée dans un bon conducteur où l'on maintient un courant permanent.

50. Réactions développées dans un champ électrique variable ; échanges d'énergie. — Lorsque, par suite de perturbations quelconques, l'état d'un champ électrique est devenu instable, ce champ abandonné à lui-même tend vers un nouvel état stable par une série de variations dont la loi est bien déterminée. En particulier les variations qui se produisent pendant l'intervalle de temps dt , entre deux époques infiniment voisines t et $t + dt$, *dépendent uniquement de l'état du champ à l'époque t*. Les réactions déve-

loppées par cet état entraînent notamment des échanges d'énergie entre les diverses parties du champ.

La quantité d'énergie qui arrive, pendant le temps dt , de l'extérieur à l'intérieur d'un volume quelconque U par sa surface S , dépend de l'état du champ sur la surface S à l'époque t , mais nullement du mode d'utilisation ultérieure de cette énergie ni de la nature de la substance contenue dans le volume U . Soit $w_1 d\omega dt$ la quantité d'énergie électrique fournie ainsi à un volume infiniment petit $d\omega$ par les parties voisines du champ.

Dans ce volume $d\omega$, pendant le même temps dt , l'énergie électrique $w_e d\omega$ qui y est localisée tend à s'affaiblir, par dissipation en chaleur, d'une quantité (§ 47) égale à :

$$ch^2 d\omega dt = c \left(X^2 + Y^2 + Z^2 \right) d\omega dt$$

et néanmoins elle s'accroît finalement de la quantité :

$$\frac{\partial}{\partial t} (w_e d\omega) dt = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{k (X^2 + Y^2 + Z^2)}{8\pi} \right] d\omega dt$$

Cet accroissement final nécessite donc un apport extérieur d'énergie électrique égal à la somme des deux quantités précédentes, c'est-à-dire à :

$$\left\{ X \left(cX + \frac{k}{4\pi} \frac{\partial X}{\partial t} \right) + Y \left(cY + \frac{k}{4\pi} \frac{\partial Y}{\partial t} \right) + Z \left(cZ + \frac{k}{4\pi} \frac{\partial Z}{\partial t} \right) \right\} d\omega dt$$

Egalons cette somme à $w_1 d\omega dt$; on aura une relation, que l'on peut écrire :

$$w_1 = X i_x + Y i_y + Z i_z \quad (5)$$

en posant, pour abrégier :

$$i_x = cX + \frac{k}{4\pi} \frac{\partial X}{\partial t} \quad i_y = cY + \frac{k}{4\pi} \frac{\partial Y}{\partial t} \quad i_z = cZ + \frac{k}{4\pi} \frac{\partial Z}{\partial t} \quad (6)$$

La formule (5) montre que l'apport d'énergie électrique w_1 dans l'unité de volume, par unité de temps, en un point (x, y, z) , ne dépend que du vecteur (X, Y, Z) , et d'un nouveau vecteur (i_x, i_y, i_z) défini par les formules (6).

Le rôle de ce nouveau vecteur peut être présenté d'une autre

manière. A cet effet nous définirons d'abord, sous le nom d'*induction électrique*, au point (x, y, z) , un vecteur $\mathbf{r} \frac{k\bar{h}}{4\pi}$ ne différant de l'intensité h que par le facteur $\frac{k}{4\pi}$. Comme, du fait de la conductibilité (c'est-à-dire de la dissipation calorifique de l'énergie électrique) le vecteur h tend à décroître, pendant le temps dt , d'une fraction $\frac{dt}{\theta}$ (§ 48), il en est de même de l'induction électrique $\frac{k\bar{h}}{4\pi}$. Mais d'autre part, en vertu des réactions développées par l'état du champ au voisinage du point (x, y, z) , l'induction tend à subir un certain accroissement $\bar{i} dt$, qui constitue en quelque sorte un *apport d'induction* (correspondant à l'*apport d'énergie électrique* $w_1 dt$) ; de telle sorte que l'accroissement final de ce vecteur $\frac{k\bar{h}}{4\pi}$ sera :

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \left(\frac{k\bar{h}}{4\pi} \right) dt = \bar{i} dt - \frac{\bar{k}h}{4\pi} \cdot \frac{dt}{\theta}$$

En tenant compte de la relation : $k = 4\pi c\theta$, ceci peut s'écrire :

$$\bar{i} = c\bar{h} + \frac{k}{4\pi} \cdot \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} \quad (6')$$

On voit que l'*apport d'induction électrique* \bar{i} défini par cette équation géométrique (6') n'est autre chose que le vecteur $(i_x i_y i_z)$ défini par les équations (6).

Le vecteur \bar{i} jouera un rôle important dans l'étude des variations du champ électrique considéré comme champ du vecteur $\frac{k\bar{h}}{4\pi}$. On peut regarder ce champ à l'époque $(t + dt)$ comme la superposition :

1° Du champ $\left(\frac{k\bar{h}}{4\pi} \right)$ tel qu'il était à l'époque t ,

2° D'un champ $\left(\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{k\bar{h}}{4\pi} \cdot dt \right)$ créé dans l'intervalle de t à $t + dt$.

Ce champ supplémentaire $\left(\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{k\bar{h}}{4\pi} \cdot dt \right)$ lui-même est la superposition de deux autres :

1° Le champ du vecteur $\bar{i} dt$ (*apport d'induction* créé par les réactions mutuelles des diverses parties du champ,

2° Le champ du vecteur $-\bar{c}h dt$ (*perte d'induction* créée dans chaque élément de volume par la conductibilité, *phénomène local*).

La figure 22 montre la résultante \mathbf{Mc} $\left[= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{kh}{4\pi} \right) dt \right]$ des vecteurs \mathbf{Ma} ($= \bar{i} dt$) et \mathbf{Mb} ($= c\bar{h} dt$), ce dernier étant opposé au vecteur \mathbf{MH} ($= \frac{kh}{4\pi}$). En portant \mathbf{HH}' égal et parallèle à \mathbf{Mc} , on aura en \mathbf{MH}' ($= \frac{k\bar{h}}{4\pi} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{k\bar{h}}{4\pi} dt$) l'induction électrique à l'époque $t + dt$.

Dans un milieu *parfaitement isolant*, l'apport d'induction \bar{i} a simplement pour effet d'accroître l'induction $\frac{k\bar{h}}{4\pi}$ de $\bar{e}\bar{i} dt$, car la formule (6') se réduit ($c = 0$) alors à :

$$\bar{i} = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{k\bar{h}}{4\pi}$$

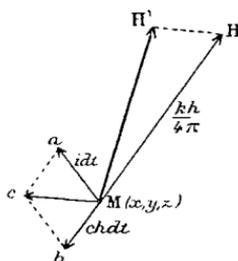


Fig. 22.

Dans les *médiocres conducteurs* l'effet est plus complexe et résulte de l'explication donnée ci-dessus.

Dans les *bons conducteurs* cet effet se simplifie. La formule (6') peut en effet s'écrire :

$$\bar{i} = c \left(\bar{h} + \theta \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} \right)$$

Or, en raison de la petitesse de θ , $\theta \frac{\partial \bar{h}}{\partial t}$ est sensiblement égal à l'accroissement de \bar{h} pendant un temps dt égal à θ . Pour les métaux par exemple, θ paraît être de l'ordre de grandeur de 10^{-16} à 10^{-18} seconde (§ 49); l'accroissement $\theta \frac{\partial \bar{h}}{\partial t}$ est donc absolument négligeable par rapport à \bar{h} . La formule précédente se réduit ainsi à :

$$\bar{i} = c\bar{h}$$

c'est-à-dire que l'apport d'induction \bar{i} se confond sensiblement avec la *densité du courant* $c\bar{h}$ (§ 42) et a presque entièrement pour effet de réparer la perte d'induction $\frac{kh}{4\pi} \frac{dt}{\theta}$ au fur et à mesure qu'elle se produit.

Cette simplification de la formule (6') serait inadmissible dans le cas suivant, que nous n'aurons du reste jamais à étudier. Supposons que h varie au point (x, y, z) suivant la loi périodique :

$$h = h_0 \sin \frac{t}{\theta}$$

la période étant égale à $2\pi\theta$, c'est-à-dire très inférieure à celle des vibrations lumineuses. Alors on a :

$$\theta \frac{\partial h}{\partial t} = h_0 \cos \frac{t}{\theta}$$

et les deux termes h et $\theta \frac{dh}{dt}$ deviennent du même ordre de grandeur. Même conclusion si la période est plus faible encore.

51. Propriété du vecteur \vec{i} ; loi générale de la distribution électrique. — Considérons en premier lieu le cas d'un champ stable établi dans un conducteur (courant permanent). X, Y, Z étant indépendants du temps, les formules (6) deviennent :

$$i_x = cX \quad i_y = cY \quad i_z = cZ$$

La loi de la distribution électrique exprimée par la formule (22) du paragraphe 43 :

$$\frac{\partial}{\partial x} (cX) + \frac{\partial}{\partial y} (cY) + \frac{\partial}{\partial z} (cZ) = 0$$

peut donc s'écrire :

$$\frac{\partial i_x}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y} + \frac{\partial i_z}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

Dans ce cas le champ du vecteur $\vec{i} dt$ (§ 50) est détruit par celui du vecteur $-c\vec{h} dt$, ces deux vecteurs représentant respectivement l'*apport* et la *perte* d'induction, lesquels se compensent exactement à chaque instant en un point quelconque. La propriété du champ du vecteur \vec{i} exprimée par la relation (7) est indépendante du degré de conductibilité et de l'hétérogénéité du conducteur; on peut la considérer comme s'étendant à tous les corps, puisque tous sont plus ou moins conducteurs. Elle n'est démontrée, il est vrai, que pour le cas d'un champ stable.

Considérons en second lieu le cas des isolants théoriquement parfaits jouissant de la propriété : $\delta = 0$, qui constitue la loi de la distribution électrique dans ces corps (§ 35). Comme leur conductibilité c est nulle, on déduit des formules (6) :

$$\frac{\partial i_x}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y} + \frac{\partial i_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{kX}{4\pi} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{kY}{4\pi} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{kZ}{4\pi} \right] = \frac{\partial \delta}{\partial t} \quad (8)$$

δ désignant la densité de quantité d'électricité (§ 34). Puisque δ est nul et reste nul dans les corps en question malgré les variations que l'on peut faire subir au champ, $\frac{\partial \delta}{\partial t}$ reste constamment nul, et la formule précédente montre que la propriété (7) du vecteur \vec{i} est encore vérifiée dans le cas d'un champ électrique variable.

Nous voyons, par ces deux exemples, que la *propriété (7) du vecteur \vec{i} résume les lois de la distribution électrique, si dissimulables en apparence, que nous avons établies séparément pour les isolants (§ 35) et pour les conducteurs (§ 43)*. Elle s'applique à tous les milieux homogènes ou hétérogènes, et au cas d'un champ quelconque stable ou variable.

La fin de ce chapitre sera consacrée à l'étude des conséquences de cette relation (7) et de leurs vérifications expérimentales; *c'est elle qui nous donne la clef de l'Électrostatique tout entière*.

52. Loi de variation de l'électrification d'un corps. — Dans le cas des *isolants parfaits* ($c = 0$), auxquels s'applique l'identité (8), la relation (7) peut s'écrire d'après (6) :

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = 0 \quad (9)$$

Elle exprime que, si l'on crée ou si l'on fait varier un champ électrique dans un milieu parfaitement isolant, homogène ou hétérogène, électrisé préalablement ou non (mais *immobile*), on n'y développe aucune électrisation (c'est-à-dire aucune quantité nouvelle d'électricité). C'est la loi générale de la distribution électrique dans les isolants. Elle concorde avec celle que l'on admet ordinairement d'après la théorie des fluides électriques, mais nous ne possédons à ce sujet que bien peu de données expérimentales.

Dans le cas général des *isolants imparfaits* (cas réservé jusqu'ici) et des *conducteurs*, les formules (6) donnant :

$$\frac{\partial i}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y} + \frac{\partial i_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} (cX) + \frac{\partial}{\partial y} (cY) + \frac{\partial}{\partial z} (cZ) + \frac{\partial \delta}{\partial t}$$

la relation (7) devient :

$$-\frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (cX) + \frac{\partial}{\partial y} (cY) + \frac{\partial}{\partial z} (cZ) \quad (10)$$

cette formule nous fait connaître $\frac{\partial \delta}{\partial t} dt$, c'est-à-dire l'électrisation créée pendant le temps dt , en chaque point d'un champ où la distribution de l'intensité (X, Y, Z) est connue à l'époque t .

Il convient de remarquer le cas particulier d'un milieu homogène (k et c constants); le premier membre de (10) devient alors :

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kX}{4\pi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{kY}{4\pi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{kZ}{4\pi} \right) \right] = k \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

et le second membre devient $-4 \pi c \rho$, en posant :

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 4\pi\rho$$

En tenant compte de la relation : $k = 4 \pi c \theta$, l'équation (10) se réduit ainsi à :

$$\theta \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho = 0$$

On en déduit par intégration :

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\theta}}$$

ρ_0 désignant la valeur initiale de ρ (pour $t = 0$), qui peut être une fonction quelconque de (x, y, z) . Au bout d'un temps t suffisamment grand ($t = 100 \theta$ par exemple), ρ est absolument négligeable et il en est de même de δ , qui est égal à $k\rho$. Donc dans un conducteur homogène il ne peut exister ou subsister aucune quantité d'électricité.

53. Invariabilité de la charge électrique d'un conducteur isolé.

— De l'équation (10) on déduit :

$$\int_U \frac{\partial \delta}{\partial t} d\omega = - \int_U \left[\frac{\partial}{\partial x} (cX) + \frac{\partial}{\partial y} (cY) + \frac{\partial}{\partial z} (cZ) \right] d\omega \quad (11)$$

le volume d'intégration U étant quelconque. Si U est limité par une surface S , le second membre de (11) peut encore s'écrire, par application de l'identité (3) du paragraphe 17 :

$$\int_S c (lX + mY + nZ) dS = \int_S ch_n dS$$

ch_n désignant la composante normale de la densité du courant entrant par l'élément de surface dS (§ 42).

D'autre part on a :

$$\int_U \frac{\partial \delta}{\partial t} d\omega = \frac{\partial}{\partial t} \int_U \delta d\omega = \frac{\partial Q}{\partial t}$$

Q désignant la quantité totale d'électricité contenue dans le volume U . Donc :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \int_S ch_n dS \quad (12)$$

Supposons que la surface S enveloppe un conducteur de forme quelconque, mais soit entièrement tracée dans le milieu isolant tout en se rapprochant du conducteur autant qu'on le veut. Le second membre de (12) étant nul ($c = 0$), $\frac{\partial Q}{\partial t}$ est nul. Par conséquent la charge électrique Q du conducteur considéré, qui est supposé parfaitement isolé, reste invariable, quelques variations que puisse subir sa répartition à la surface ou même dans l'intérieur de ce conducteur.

On déduit évidemment de là que si on relie entre eux deux conducteurs isolés, leur charge totale reste invariable.

Ces deux propositions, qui sont la base d'un grand nombre de méthodes de mesure électrique, sont vérifiées d'une manière rigoureuse par l'expérience.

On en déduit encore la *propriété bien connue du conducteur creux*. Supposons qu'à l'intérieur d'un conducteur creux C non électrisé préalablement, on introduise des corps électrisés C_1, C_2, \dots possédant des quantités d'électricité Q_1, Q_2, \dots . La somme des charges électriques des conducteurs C, C_1, C_2, \dots reste constante et égale, par conséquent, à $Q_1 + Q_2 + \dots$. Mais la somme des charges qui existent dans le champ intérieur au conducteur C est identiquement nulle ($\Sigma q = 0$, § 34). Il en résulte qu'une charge égale à $(Q_1 + Q_2 + \dots)$ existe à la surface extérieure du conducteur creux.

54. Charge d'un conducteur par un courant électrique. — Le second membre de l'équation (12) représente l'intensité totale I

du courant *entrant* à l'intérieur de la surface S. En multipliant les deux membres par dt et intégrant, on aura :

$$\Delta Q = \int_{t_0}^t I dt$$

ΔQ représentant l'accroissement de la quantité d'électricité Q à l'intérieur de S entre les époques t_0 et t . En raison de cette égalité, nous pouvons convenir de donner à $\int_{t_0}^t I dt$ le nom de *quantité d'électricité entrée à l'intérieur de S entre les époques t_0 et t* .

Appliquons ceci à la décharge d'un condensateur, dont les armatures P_1 et P_2 sont reliées par un circuit conducteur extérieur et ne forment plus ainsi qu'un seul conducteur. Si l'on divise ce conducteur *en deux régions* par une surface S qui coupe le circuit extérieur suivant une section s , on voit qu'à un instant t quelconque de la décharge la quantité d'électricité $-\frac{\partial Q}{\partial t}$, perdue par la région de l'armature P_1 (et gagnée par la région de l'armature P_2) pendant l'unité de temps, est égale à l'intensité totale I du courant *sortant* de la région P_1 par cette section s du circuit. Lors donc que le condensateur sera déchargé, c'est-à-dire que les charges initiales $+Q_0$ et $-Q_0$ des deux armatures auront disparu, chaque section s du circuit aura été *traversée* par une quantité Q_0 d'électricité.

On voit par ces exemples comment on arriverait à démontrer toutes les propriétés expérimentales que la théorie des fluides explique si simplement. Cette théorie se heurte du reste ici à certaines difficultés. Ainsi un conducteur homogène ne peut être considéré comme réellement *parcouru* par des quantités d'électricité, puisqu'il n'en contient même pas ($\delta = 0$, § 52) ; c'est là une objection faite depuis longtemps à la théorie des fluides électriques.

Une autre objection très grave est soulevée par la confusion absolue que cette théorie établit entre les *masses électriques* qui agissent à distance suivant la loi de Coulomb (ce sont celles que nous avons définies au § 19), et les *quantités d'électricité* (§ 22 et 34) *qui interviennent seules dans les lois expérimentales*, à l'exclusion des masses électriques, *mais qui ne jouissent nullement de la*

propriété des actions à distance suivant la loi de Coulomb. Cette objection ne paraît point avoir été faite jusqu'ici, même par Maxwell, qui distingue cependant l'*électricité apparente* (masses) de l'*électricité vraie* (quantité d'électricité), mais considère ces deux électricités comme susceptibles de s'ajouter ou de se retrancher (Traité de Maxwell, § 83 b).

55. **Électrisation résiduelle.** — En voici quelques exemples.

Électrisation résiduelle de l'air. — Considérons d'abord un conducteur électrisé C plongé dans l'air. Le pouvoir inducteur de ce diélectrique est sensiblement uniforme ($k = 1/900$ u. pr.) ; mais nous supposons que sa conductibilité c et, par suite, son coefficient θ soient très variables. Pour simplifier, admettons que l'air soit divisé en trois régions U_1 U_2 U_3 séparées par des surfaces équipotentielles (fig. 23), le coefficient θ ayant respectivement dans ces régions les valeurs $\theta_1 = 10^{\text{sec.}}$, $\theta_2 = 1000^{\text{sec.}}$, $\theta_3 = 100\,000^{\text{sec.}}$.

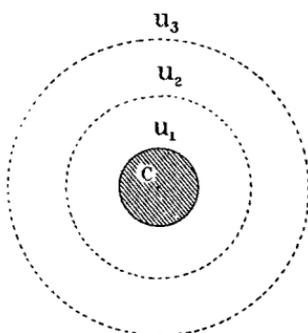


Fig. 23.

Au bout d'une minute ($t = 60$ secondes), l'intensité du champ dans la région U_1 sera réduite à la fraction $e^{-\frac{t}{\theta_1}}$ ($= e^{-6}$) de sa valeur initiale, c'est-à-dire sera à peu près annulée. La région U_1 joue donc le rôle de conducteur au bout d'une minute, ce que l'on exprimerait en disant que la charge du conducteur C s'est transportée à la surface de U_1 . Dans la région U_2 le champ est peu affaibli au bout d'une minute ($e^{-\frac{\theta_2}{t}} = e^{-0,06}$), mais il aura disparu sensiblement au bout de $1^{\text{h}}, 40^{\text{m.}}$ ($= 100$ minutes); et cette région jouera le rôle de conducteur, alors que le champ sera peu affaibli dans U_3 . Enfin au bout de huit jours, le champ tout entier sera dissipé.

Cas d'une bouteille de Leyde démontable. — Supposons que le diélectrique de cette bouteille ait un coefficient θ_1 égal à 1000 secondes, sauf sur une légère couche superficielle où θ_2 est réduit à 1 seconde (couche très légèrement conductrice). Au bout de 6 secondes après la charge de la bouteille ($e^{-\frac{t}{\theta_2}} = e^{-6}$), la couche mince

jouera le rôle de conducteur, c'est-à-dire que le champ y aura disparu. Si donc on enlève l'armature intérieure et l'armature extérieure, on ne trouvera point celles-ci électrisées; le champ tout entier restera dans le diélectrique à surface légèrement conductrice, où il ne sera affaibli que dans le rapport $e^{-\frac{t}{\theta_1}} = e^{-0.1}$ au bout de 1 m. 40^{sec.}. Si l'on replace les armatures, on pourra décharger le condensateur.

Décharges résiduelles d'un condensateur. — Soient P_1 et P_2 les armatures d'un condensateur plan (fig. 24), dont le diélectrique a un pouvoir inducteur uniforme k , mais qui est composé de deux couches D_1 et D_2 , d'égale épaisseur $\frac{d}{2}$, ayant des conductibilités différentes c_1 et c_2 . Tant que l'on maintient constante la différence des potentiels V_1 et V_2 des deux armatures au moyen d'une pile E , on a un léger courant permanent, dont la densité est la même :

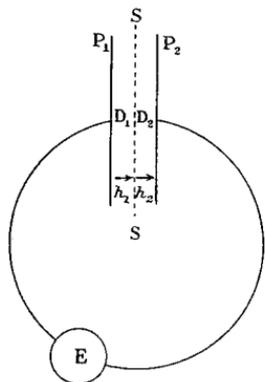


Fig. 24.

$$c_1 h_1 = c_2 h_2 \quad (13)$$

dans les régions D_1 et D_2 du diélectrique, les intensités h_1 et h_2 du champ électrique y étant par conséquent différentes.

La surface SS de séparation de D_1 et de D_2 a, sur ses deux faces, deux couches électriques dont les densités (§ 34) sont :

$$\varepsilon_2 = + \frac{kh_2}{4\pi} \text{ (sur la face } D_2) \quad \varepsilon_1 = - \frac{kh_1}{4\pi} \text{ (sur la face } D_1)$$

d'où :

$$h_2 - h_1 = \frac{4\pi}{k} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \frac{4\pi}{k} \varepsilon \quad (14)$$

D'autre part, par définition de la différence de potentiel :

$$V_1 - V_2 = h_1 \frac{d}{2} + h_2 \frac{d}{2} = \frac{d}{2} (h_1 + h_2) \quad (15)$$

Des relations (13), (14) et (15) on tire :

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \frac{V_1 - V_2}{d} - \frac{2\pi\varepsilon}{k} \\ h_2 &= \frac{V_1 - V_2}{d} + \frac{2\pi\varepsilon}{k} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\frac{2\pi\varepsilon}{k} = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} \frac{V_1 - V_2}{d} \quad (17)$$

Ceci posé, relient P_1 et P_2 par un galvanomètre (sans pile). Au bout d'un temps *négligeable* τ , la différence de potentiel des armatures devient nulle ($V'_1 - V'_2 = 0$), mais la densité électrique ε n'a pas varié sensiblement; la formule (10) du paragraphe 52 montre en effet que la densité électrique varie graduellement et même lentement quand la conductibilité c de la substance est très faible. Au bout du temps τ , les nouvelles intensités h'_1 et h'_2 du champ (formule 16) sont donc devenues :

$$h'_1 = - \frac{2\pi\varepsilon}{k} \quad h'_2 = + \frac{2\pi\varepsilon}{k}$$

de telle sorte que la *charge* électrique perdue par la surface S du plateau P_1 pendant le temps τ est égale à :

$$\frac{kh_1}{4\pi} S - \frac{kh'_1}{4\pi} S = \frac{kS}{4\pi d} (V_1 - V_2)$$

Cette décharge *instantanée* est indépendante des conductibilités c_1 et c_2 et fait connaître la vraie valeur de la capacité du condensateur :

$$C = \frac{kS}{4\pi d}$$

Si au bout du temps τ on coupe la communication entre les deux plateaux P_1 et P_2 , dans chacune des régions D_1 et D_2 l'intensité du champ décroîtra suivant la loi exponentielle (§ 48) :

$$h''_1 = h'_1 e^{-\frac{t}{\theta_1}} = - \frac{2\pi\varepsilon}{k} e^{-\frac{t}{\theta_1}} \quad (\text{région } D_1)$$

$$h''_2 = h'_2 e^{-\frac{t}{\theta_2}} = + \frac{2\pi\varepsilon}{k} e^{-\frac{t}{\theta_2}} \quad (\text{région } D_2)$$

Si donc on laisse les plateaux isolés pendant un temps t , la différence de potentiel entre eux deviendra :

$$V''_1 - V''_2 = h''_1 \frac{d}{2} + h''_2 \frac{d}{2} = \frac{\pi \varepsilon}{k} d \left(e^{-\frac{t}{\theta_2}} - e^{-\frac{t}{\theta_1}} \right)$$

et alors, en reliant P_1 et P_2 , on aura une décharge *résiduelle* de même sens que la première et qui (en tenant compte de la relation 17) sera à celle-ci dans le rapport :

$$\frac{V''_1 - V''_2}{V_1 - V_2} = \frac{1}{2} \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} \left(e^{-\frac{t}{\theta_2}} - e^{-\frac{t}{\theta_1}} \right)$$

Cette décharge résiduelle sera maximum (sa dérivée sera nulle) si le temps t est égal à :

$$t = \frac{\theta_1 \theta_2}{\theta_2 - \theta_1} \mathcal{L} \left(\frac{\theta_2}{\theta_1} \right)$$

On pourra encore obtenir une série plus ou moins longue de décharges résiduelles successives.

Dans le cas plus complexe où le diélectrique du condensateur se composerait de n couches $D_1 D_2 \dots D_n$ ayant des conductibilités différentes $c_1 c_2 \dots c_n$, l'expression de la décharge résiduelle serait une fonction linéaire d'exponentielles :

$$e^{-\frac{t}{\theta_1}} e^{-\frac{t}{\theta_2}} \dots e^{-\frac{t}{\theta_n}},$$

et l'on conçoit que $c_1 c_2 \dots c_n$ puissent être choisis de telle sorte que cette fonction se rapproche autant qu'on voudra d'une fonction quelconque de t donnée à priori. Inversement une loi quelconque de décharge résiduelle observée expérimentalement $f(t)$ est susceptible d'être expliquée par une disposition de couches diélectriques (inégalement conductrices) convenablement calculée.

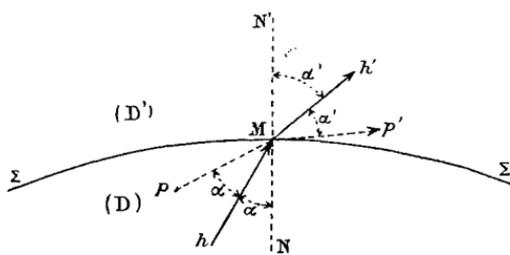


Fig. 25.

56. Réfraction des lignes de flux à la surface de séparation de deux corps isolants. — Soit Σ la surface de séparation de deux corps isolants D et D' non électrisés (fig. 25). Lorsqu'on crée un

champ électrique dans ces corps, aucune électrisation ne s'y développe (§ 52). On aura donc : $\delta = 0$ dans chacune des deux substances, mais cette condition ne s'applique pas à la surface Σ , où le pouvoir inducteur varie d'une manière discontinue (de k à k'). Il y a donc lieu d'écrire d'une autre manière que la densité électrique (superficielle) est nulle en un point quelconque M de Σ .

D'après la formule (2) du paragraphe 34, sur chacune des deux faces de la surface Σ existe, par définition, une densité électrique (ϵ et ϵ') :

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon &= k(lX + mY + nZ) = kh_n \text{ (sur la face D)} \\ 4\pi\epsilon' &= k'(l'X' + m'Y' + n'Z') = k'h'_{n'} \text{ (sur la face D')} \end{aligned}$$

h_n (ou $h'_{n'}$) désignant la projection sur la normale MN (ou MN') de l'intensité \bar{h} (ou \bar{h}') du champ au point M considéré comme appartenant au diélectrique D (ou D'). La densité totale de quantité d'électricité au point M est $\epsilon + \epsilon'$; on doit donc avoir :

$$kh_n + k'h'_{n'} = 0$$

ou, en désignant par h'_n la projection de h' sur MN ($h'_{n'} = -h'_n$) :

$$kh_n = k'h'_n \tag{18}$$

La composante normale de l'intensité h du champ varie donc d'une manière discontinue au passage de la surface Σ de séparation de deux diélectriques suivant la loi exprimée par la formule (18). La composante tangentielle \bar{h}_t au contraire reste continue (même raison qu'au paragraphe 43), ce que l'on écrira :

$$\bar{h}_t = \bar{h}'_t \tag{19}$$

On voit sur la figure 25 :

1° Que les vecteurs \bar{h} et \bar{h}' sont dans un même plan contenant les composantes tangentielle \bar{h}_t et normale h_n (ou $h'_{n'}$) ; — on exprime ceci en disant que le *plan de réfraction* (plan de la normale MN' et du vecteur réfracté \bar{h}') *coïncide avec le plan d'incidence* (plan de la normale MN et du vecteur incident \bar{h}) ;

2° Que des formules (18) et (19), écrites sous la forme .

$$kh \cos \alpha = k'h' \cos \alpha' \quad (18')$$

$$h \sin \alpha = h' \sin \alpha' \quad (19')$$

on déduit :

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{k'}{k} = \mu \quad (20)$$

relation entre l'angle d'incidence α et l'angle de réfraction α' .

On donne au rapport $\mu = \frac{k'}{k}$ le nom de pouvoir inducteur de la substance D' par rapport à la substance D, notamment quand D est de l'air. La formule (20) montre que celui des deux diélectriques où l'intensité (\bar{h} ou \bar{h}') du champ s'écarte le plus de la normale en M est celui dont le pouvoir inducteur (k ou k') est le plus grand.

Remarquons que la densité superficielle σ de masse électrique fictive au point M de la surface de discontinuité S (formule 16 du paragraphe 19) a pour expression :

$$\sigma = \frac{h_n + h'_n}{4\pi} = \frac{h_n - h'_n}{4\pi} = \frac{h'_n}{4\pi} \left(\frac{k'}{k} - 1 \right)$$

en tenant compte de la relation (18). En posant $\frac{k'}{k} = \mu$ et :

$$\alpha = \frac{\mu - 1}{4\pi}$$

on a donc :

$$\sigma = \alpha h'_n$$

Cette formule n'est autre que celle que l'on obtient dans la théorie du fluide électrique, complétée par l'hypothèse de l'électrisation induite, en supposant que dans le diélectrique D' la *force électrique h' induit*, sur la surface S, une *couche de masses électriques* dont la densité superficielle σ est proportionnelle à la composante normale h'_n de cette force et à un facteur α appelé *coefficient d'électrisation induite*. De l'existence de cette couche on déduit que le diélectrique D' possède un pouvoir inducteur μ .

(par rapport au diélectrique D) lié au coefficient κ par la formule :

$$\mu = 1 + 4\pi\kappa$$

identique à celle que nous avons donnée plus haut.

Force électrique à la surface de séparation de deux corps. — Les forces électriques $p = \frac{kh^2}{8\pi}$ et $p' = \frac{k'h'^2}{8\pi}$ que les milieux D et D' exercent sur l'unité d'aire de la surface Σ au point M (fig. 25) font respectivement avec les normales MN et MN' les angles 2α et $2\alpha'$ (règle du paragraphe 24). Leur résultante R a donc pour projections :

$$\begin{aligned} R_n &= p \cos 2\alpha - p' \cos 2\alpha' \text{ (sur la normale MN).} \\ R_t &= p \sin 2\alpha - p' \sin 2\alpha' \text{ (sur le plan tangent).} \end{aligned}$$

Dans le cas où Σ n'est pas électrisée, c'est-à-dire où les conditions (18') et (19') sont remplies, on a :

$$p \sin 2\alpha = \frac{kh^2 \sin \alpha \cos \alpha}{4\pi} = \frac{k'h'^2 \sin \alpha' \cos \alpha'}{4\pi} = p' \sin 2\alpha'$$

ou : $R_t = 0$. La force R à laquelle est soumise la surface de séparation Σ est donc normale à celle-ci, et sa valeur suivant MN est :

$$\begin{aligned} R = R_n &= \frac{kh^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{8\pi} - \frac{k'h'^2 (\cos^2 \alpha' - \sin^2 \alpha')}{8\pi} \\ &= \frac{k' - k}{8\pi} hh' \cos (\alpha - \alpha') \end{aligned}$$

en tenant compte des relations :

$$\begin{aligned} k^2 h^2 \cos^2 \alpha &= k'^2 h'^2 \cos^2 \alpha' = kk' hh' \cos \alpha \cos \alpha' \\ h^2 \sin^2 \alpha &= h'^2 \sin^2 \alpha' = hh' \sin \alpha \sin \alpha' \end{aligned}$$

Cette force est donc dirigée dans le sens où le pouvoir inducteur va en décroissant (comme au paragraphe 25); elle est proportionnelle à la différence $k' - k$ des pouvoirs inducteurs des milieux D et D', et au produit des vecteurs h et h' multiplié par le cosinus de leur angle $(\alpha - \alpha')$.

CHAPITRE VII

CHAMP DU COURANT ÉLECTRIQUE

57. Décharge d'un condensateur. — Lorsqu'on maintient un *courant* dans un conducteur, l'énergie électrique s'y dissipant rapidement en chaleur, on en conclut que ses pertes sont réparées par un apport d'énergie venant d'une source extérieure. On est donc conduit à rechercher :

1° Quelle est la nature de la source d'énergie ;

2° Par quelles voies cette énergie est transmise aux régions du champ électrique où elle va se transformer en chaleur.

Dans le cas où le courant est produit par la décharge d'un condensateur, la source d'énergie nous est connue. Quand il n'y a ni travail, ni réactions chimiques en jeu, etc., *la chaleur dégagée dans le circuit conducteur est l'équivalent de l'énergie électrique localisée primitivement dans le diélectrique du condensateur*, et dissipée graduellement dans ce circuit. Les lois expérimentales de ce phénomène, observées par Riess, ont confirmé la théorie (établie postérieurement) en ce qui concerne le calcul de l'énergie électrique des condensateurs. Une autre confirmation résulte de la loi de la décharge, que l'on peut établir comme il suit dans le cas de la décharge *lente* d'un condensateur.

Soit C la capacité de ce condensateur, R la résistance du circuit extérieur. En raison de la *lenteur* des variations du champ, on peut supposer qu'à chaque instant celui-ci est dans un état sensiblement stable et admet un potentiel, comme si le courant était permanent. Entre deux époques t et $t + dt$, la différence de potentiel V des armatures variant de dV , l'énergie électrique

$\frac{1}{2} CV^2$ du condensateur (§ 37) s'accroît de $d\left(\frac{1}{2} CV^2\right)$, en même temps que le gain de chaleur dans le circuit conducteur est, d'après la loi de Joule (§ 47), $\frac{V^2}{R} dt$. Comme l'énergie totale du système reste invariable, on a :

$$d\left(\frac{1}{2} CV^2\right) + \frac{V^2}{R} dt = 0$$

ou :

$$CR dV + V dt = 0$$

En intégrant cette équation, et appelant V_0 la valeur initiale de V :

$$V = V_0 e^{-\frac{t}{CR}}$$

Cette formule est vérifiée d'une manière satisfaisante par l'expérience quand CR est assez grand ($CR > 0^s,01$). Ce résultat est facile à interpréter ; car, si l'on convient d'appeler durée de la décharge le temps T au bout duquel la différence de potentiel V tombe au millième de sa valeur initiale V_0 , la formule précédente donne :

$$T = CR \mathcal{L}^0(1000) = 6,9 CR$$

La condition : $CR > 0^s,01$ équivaut donc à : $T > 0^{\text{sec}},069$; c'est-à-dire que la formule en question est satisfaisante si la décharge dure au moins $0^s,07$ (dans les conditions des expériences qui ont donné ce chiffre).

Ces calculs ne nous font du reste point connaître la loi de transmission de l'énergie à travers le champ. On voit seulement que l'énergie se transmet à travers un corps quelconque, isolant ou conducteur, puisqu'elle se transporte du diélectrique du condensateur au circuit conducteur.

Nous renverrons aux chapitres suivants l'étude plus délicate des autres sources (chimiques, thermiques, mécaniques) d'énergie électrique, et nous traiterons ici le second problème posé plus haut : Comment s'opère la transmission de l'énergie ?

58. **Champ du courant.** — Nous avons vu (§ 50) que l'expression générale de l'*apport d'énergie électrique*, par unité de temps, dans un volume infiniment petit $d\omega$ en un point quelconque (x, y, z) est :

$$w_1 d\omega = (Xi_x + Yi_y + Zi_z) d\omega$$

Les échanges d'énergie entre les diverses parties du champ dépendant ainsi des deux vecteurs (X, Y, Z) et (i_x, i_y, i_z) , on ne peut pas supposer que l'*état variable* d'un champ électrique est, comme l'état stable, entièrement défini par la seule donnée du vecteur (X, Y, Z) . Du reste, cette seule donnée est même insuffisante pour définir complètement l'*état stable* d'un champ quand celui-ci n'est entretenu que grâce à une dépense incessante d'énergie, c'est-à-dire dans le cas d'un courant permanent ; car le fait d'une transmission d'énergie entre la source (pile) et le conducteur, à travers les corps interposés dans le champ, montre qu'il y a dans celui-ci autre chose que l'*état électrostatique*, et cela même dans le milieu isolant qui entoure le conducteur.

Bornons-nous ici au cas du courant permanent. Cette autre chose qui coexiste avec le champ *électrostatique* (X, Y, Z) , nous l'appellerons le *champ du courant* ; son domaine est tout l'espace auquel s'étendent les réactions que provoque l'appel incessant d'énergie créé dans le circuit conducteur par la dissipation calorifique de l'énergie électrique. Mais, pour aborder le problème de la transmission de l'énergie, il convient de définir d'abord d'une manière plus précise ce champ du courant.

Nous verrons au chapitre suivant que ce champ peut être exploré par une méthode expérimentale ; mais il y a intérêt à montrer que nous possédons dès maintenant tous les éléments nécessaires pour le définir analytiquement. Une telle définition consistera à caractériser le champ du courant par un vecteur bien déterminé en chaque point. Ce vecteur ne saurait d'ailleurs être la densité \vec{i} du courant permanent considéré, car cette densité est nulle dans tout le milieu isolant, où s'étend cependant le champ du courant.

Le vecteur \vec{i} jouissant (§ 51) de la propriété :

$$\frac{\partial i_x}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y} + \frac{\partial i_z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

nous pouvons définir un nouveau vecteur $(X' Y' Z')$:

1° Par les trois équations :

$$\frac{\partial \bar{Y}'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial y} = 4\pi i_x \quad \frac{\partial Z'}{\partial x} - \frac{\partial X'}{\partial z} = 4\pi i_y \quad \frac{\partial X'}{\partial y} - \frac{\partial Y'}{\partial x} = 4\pi i_z \quad (2)$$

qui se réduisent à deux à cause de la relation (1); 2° par :

$$\frac{\partial X'}{\partial x} + \frac{\partial Y'}{\partial y} + \frac{\partial Z'}{\partial z} = 4\pi \rho \quad (3)$$

On voit, par les relations (2), que la donnée de ce vecteur (X' Y' Z') en un point quelconque (x, y, z) nous ferait connaître la distribution du vecteur i et, par suite, le champ du courant. Réciproquement la donnée du champ du courant fait-elle connaître la distribution du vecteur (X' Y' Z') ?

Pour répondre à cette question, nous remarquerons que, par application des formules (7), (8) et (11) du paragraphe 17, en y remplaçant (X Y Z) par (X' Y' Z'), et $\mu_x \mu_y \mu_z$ par $i_x i_y i_z$, on obtient les intégrales des équations (2) et (3) ci-dessus sous la forme :

$$X' = X'_1 + X'_2 \quad Y' = Y'_1 + Y'_2 \quad Z' = Z'_1 + Z'_2 \quad (4)$$

en posant, pour abrégér :

$$\left. \begin{aligned} X'_1 &= \int_U \left(i_z \frac{1}{r'} - i_y \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r'} \right) d\omega \\ Y'_1 &= \int_U \left(i_x \frac{1}{r'} - i_z \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r'} \right) d\omega \\ Z'_1 &= \int_U \left(i_y \frac{1}{r'} - i_x \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r'} \right) d\omega \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$X'_2 = \int_U \rho \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r'} d\omega \quad Y'_2 = \int_U \rho \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r'} d\omega \quad Z'_2 = \int_U \rho \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r'} d\omega \quad (6)$$

U désigne le volume entier du champ. Ces formules (4), (5), (6) montrent que le vecteur (X' Y' Z') est la résultante de deux autres :

1° Le vecteur (X'_1 Y'_1 Z'_1), qui ne dépend que de la distribution de la densité \bar{i} du courant ;

2° Le vecteur (X'_2 Y'_2 Z'_2) qui ne dépend que d'une fonction ρ indépendante du courant et qu'il est inutile de définir.

Nous pouvons donc, au point de vue analytique, caractériser le champ du courant en chaque point (x, y, z) de l'espace par le vecteur (X'_1, Y'_1, Z'_1) . Quant au vecteur (X'_2, Y'_2, Z'_2) , nous en pouvons faire abstraction ; car, dérivant d'un potentiel $\left(\frac{dY'_2}{dz} = \frac{dZ'_2}{dy}, \dots\right)$, il disparaît de l'expression :

$$\frac{\partial Y'}{\partial z} - \frac{\partial X'}{\partial y} = \frac{\partial (Y'_1 + Y'_2)}{\partial z} - \frac{\partial (Z'_1 + Z'_2)}{\partial y} = \frac{\partial Y'_1}{\partial z} - \frac{\partial Z'_1}{\partial y}$$

et n'intervient par conséquent pas dans les relations (2) entre la densité i du courant et le vecteur $X' Y' Z'$ (il joue un rôle étranger à la question, V. § 69).

Nous donnerons donc au vecteur (X'_1, Y'_1, Z'_1) défini par les formules (5) le nom de *vecteur du champ du courant* ; nous le désignerons dans la suite, pour simplifier, par la notation $(X' Y' Z')$.

59. **Problème de la transmission de l'énergie électrique.** — Nous avons déjà la notion d'un flux d'énergie dans la théorie de la chaleur ; c'est le *flux de chaleur* à travers une surface donnée, par exemple à travers un élément infiniment petit dS de surface. On connaît l'expression de ce flux de chaleur, proportionnel à l'aire dS et dépendant seulement de l'orientation de l'élément dS et de l'état du champ calorifique au point où il se trouve. Nous nous proposons de définir un flux analogue d'énergie électrique et de rechercher la loi de ce flux.

Soit U un volume quelconque limité par une surface S , et $\frac{dW}{dt} dt$ l'accroissement, entre les époques t et $t + dt$, de l'énergie W

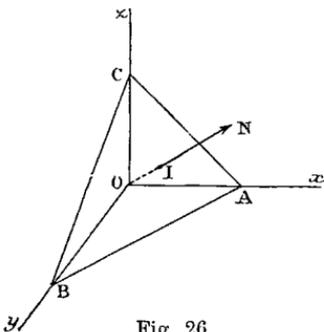


Fig. 26.

contenue dans ce volume. Cette énergie arrivant de l'extérieur à l'intérieur de U par sa surface S , nous aurons à exprimer que $\frac{W}{dt} dt$ est la somme des quantités d'énergie entrées pendant le temps dt par chacun des éléments dS de la surface.

Appliquons d'abord ceci au volume U d'un tétraèdre infiniment petit $OABC$, ayant ses arêtes OA, OB, OC parallèles aux axes de coordonnées. Soient : S l'aire du triangle ABC , et α, β, γ , les angles

de la normale OIN au plan de ce triangle avec les axes ; les aires des faces OBC, OCA, OAB sont égales à $S \cos \alpha$, $S \cos \beta$ et $S \cos \gamma$. Ceci posé, désignons par $w_x dt$ le flux d'énergie entrant dans le tétraèdre, pendant le temps dt , par l'unité de surface de la base OBC perpendiculaire à Ox ; par $w_y dt$, $w_z dt$ et $w_n dt$ les flux analogues relatifs aux faces OCA, OAB et ABC. Le flux total d'énergie entrant par les quatre faces du tétraèdre sera :

$$S \cos \alpha w_x dt + S \cos \beta w_y dt + S \cos \gamma w_z dt + S w_n dt$$

En l'égalant à $\frac{dW}{dt} dt$, on aura :

$$w_x \cos \alpha + w_y \cos \beta + w_z \cos \gamma + w_n = \frac{U}{S} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{W}{U} \right)$$

$\frac{W}{U}$ est une quantité finie, et $\frac{U}{S}$ est un infiniment petit égal au tiers de la hauteur OI du tétraèdre. On a donc en réalité :

$$w_x \cos \alpha + w_y \cos \beta + w_z \cos \gamma + w_n = 0$$

Cette relation montre que le flux d'énergie w_n entrant dans un volume U par un élément s ($= 1$) de sa surface orienté d'une manière quelconque peut être représenté par la projection $-(w_x \cos \alpha + w_y \cos \beta + w_z \cos \gamma)$ d'un certain vecteur $(w_x w_y w_z)$ sur la normale à l'élément s dirigée vers l'intérieur de U (opposée à la normale extérieure IN). Nous donnerons à ce vecteur $(w_x w_y w_z)$ le nom de *flux d'énergie* au point (x, y, z) où est l'élément s .

Si nous remplaçons $-\cos \alpha$, $-\cos \beta$, $-\cos \gamma$ par l, m, n , nous aurons, pour exprimer l'égalité des deux expressions de l'énergie entrant dans un volume U par sa surface S pendant l'unité de temps, l'équation :

$$\int_S w_n dS = \int_S (lw_x + mw_y + nw_z) dS = \frac{\partial W}{\partial t} \quad (7)$$

Le problème que nous avons à résoudre (recherche de la loi de transmission de l'énergie électrique) se ramène donc à la détermination de trois fonctions $w_x w_y w_z$ telles que l'équation (7) soit identiquement satisfaite, quelle que soit la surface S .

Mais il sera plus commode de donner à cette équation une forme différente. Soit $w_1 d\tau$ l'apport d'énergie électrique dans un volume

infinitement petit $d\tau$ pendant l'unité de temps ; on aura pour le volume U :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int_U w_1 d\tau$$

D'autre part, d'après l'identité (3) du paragraphe 17, on a :

$$\int_S (lw_x + m w_y + n w_z) dS = - \int_U \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) d\tau$$

Si l'on suppose le volume U infinitement petit ($= d\tau$), l'équation (7) nous donne donc :

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = - w_1$$

Comme l'expression de l'apport d'énergie électrique w_1 est $Xi_x + Yi_y + Zi_z$ (§ 50), il vient :

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = - (Xi_x + Yi_y + Zi_z) \quad (8)$$

Cette *première* condition, à laquelle doivent satisfaire les fonctions $w_x w_y w_z$, serait insuffisante pour les déterminer. Nous allons en ajouter d'autres.

D'abord la direction du vecteur \overline{w} doit être, en un point quelconque, normale à la direction de l'intensité (X, Y, Z) du champ électrique, c'est-à-dire que le flux \overline{w} doit *glisser* le long des surfaces équipotentielles. Considérons en effet le diélectrique interposé entre deux conducteurs électrisés (condensateur, par exemple). Supposons que ce diélectrique soit parfaitement homogène dans une couche quelconque comprise entre deux surfaces équipotentielles (ou, pour abrégé, couche équipotentielle) ; mais que sa conductibilité varie d'une couche équipotentielle à une autre. En reprenant le raisonnement du paragraphe 48, nous voyons que dans chaque couche équipotentielle homogène, l'intensité h du champ électrique s'affaiblit d'une fraction *uniforme* suivant la loi $e^{-\frac{t}{\theta}}$, θ variant d'une couche à une autre. Cette loi d'affaiblissement ne modifie nullement la forme des surfaces équipotentielles, de telle sorte qu'à chaque instant le champ est dans un état d'*équilibre électro-*

statique (état *stable* dans le sens indiqué au paragraphe 48). L'énergie électrique peut donc se dissiper dans une couche et se maintenir dans une couche voisine, sans qu'il y ait appel d'énergie de l'une à l'autre à travers leur surface de séparation, parce que cette surface est équipotentielle. — Si au contraire la surface de séparation de deux couches ayant des conductibilités différentes n'était pas équipotentielle, on voit, par le raisonnement du paragraphe 48, que l'état d'équilibre électrostatique serait détruit, et qu'il y aurait un transport incessant d'énergie de la couche la moins affaiblie à la plus affaiblie. — Remarquons encore que, dans le champ d'un courant permanent, l'énergie électrique ne pénètre aucunement à l'intérieur d'un conducteur *isolé*, dont la surface est équipotentielle, tandis qu'elle pénètre à l'intérieur du *circuit* conducteur, dont la surface n'est pas équipotentielle.

Nous sommes donc conduits à cette *deuxième* condition à laquelle doit satisfaire le vecteur $(w_x w_y w_z)$:

$$Xw_x + Yw_y + Zw_z = 0 \quad (9)$$

Enfin il existe, comme pour le flux de chaleur cité plus haut, une autre condition non susceptible d'être traduite en équation : c'est que le vecteur \bar{w} créé par les réactions du champ au point (x, y, z) à l'époque t ne doit dépendre que de l'état du champ en ce point à la même époque.

60. Première solution du problème (théorie des fluides électriques). — Remarquons en passant que l'équation (8) admet comme solution (à cause de la relation 1 du paragraphe 58) :

$$w_x = Vi_x \quad w_y = Vi_y \quad w_z = Vi_z$$

V désignant le potentiel électrique. Ce vecteur $\bar{w} = V\bar{i}$ n'existe que dans le circuit conducteur, la densité de courant i étant nulle dans le milieu isolant; il a même direction que l'intensité (X, Y, Z) du champ électrique (appelée *force* électrique dans la théorie des fluides) — et est proportionnel au potentiel V et à la densité du courant. [C'est là la solution qu'indiquerait la théorie des fluides, les masses électriques en mouvement le long des *lignes de force*

emportant leur énergie qui est réduite par les résistances. opposées à ce mouvement, ce qui donne lieu au dégagement de chaleur.]

Cette solution ne satisfait pas à la condition (9); elle n'a d'ailleurs pas un sens précis, car le potentiel V en un point considéré isolément est un nombre arbitraire positif ou négatif (§ 11).

61. Deuxième solution. — La solution la plus générale de l'équation (9) peut se mettre sous la forme symétrique :

$$4\pi w_x = Y_1 Z - Y Z_1 \quad 4\pi w_y = Z_1 X - Z X_1 \quad 4\pi w_z = X_1 Y - X Y_1$$

X_1, Y_1, Z_1 désignant des fonctions *quelconques* de x, y, z . Mais, d'après la troisième condition du problème, w_x, w_y, w_z ne devant dépendre que de l'état du champ au point x, y, z , il en sera de même de X_1, Y_1, Z_1 . De ces expressions de w_x, w_y, w_z on déduit, en tenant compte de ce que X, Y, Z dérivent d'un potentiel :

$$\begin{aligned} 4\pi \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) &= X_1 \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right) + Y_1 \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \right) + Z_1 \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) \\ &\quad - \left[X \left(\frac{\partial Y_1}{\partial z} - \frac{\partial Z_1}{\partial y} \right) + Y \left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial z} \right) + Z \left(\frac{\partial X_1}{\partial y} - \frac{\partial Y_1}{\partial x} \right) \right] \\ 4\pi \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) &= - \left[X \left(\frac{\partial Y_1}{\partial z} - \frac{\partial Z_1}{\partial y} \right) + Y \left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial z} \right) \right. \\ &\quad \left. + Z \left(\frac{\partial X_1}{\partial y} - \frac{\partial Y_1}{\partial x} \right) \right] \end{aligned}$$

Si l'on porte cette expression dans l'équation (8), celle-ci deviendra :

$$X \left(\frac{\partial Y_1}{\partial z} - \frac{\partial Z_1}{\partial y} - 4\pi i_x \right) + Y \left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial z} - 4\pi i_y \right) + Z \left(\frac{\partial X_1}{\partial y} - \frac{\partial Y_1}{\partial x} - 4\pi i_z \right) = 0$$

Telle est la condition à laquelle il reste à satisfaire identiquement au moyen de fonctions X_1, Y_1, Z_1 ne dépendant que de l'état du champ électrostatique (X, Y, Z) et du champ du courant (défini au paragraphe 58 par le vecteur X', Y', Z') au point (x, y, z) .

La solution qui se présente d'une manière évidente consiste à annuler séparément les coefficients de X, Y, Z dans cette équation.

tion ; les fonctions $X_1 Y_1 Z_1$ se confondent alors avec les fonctions $X' Y' Z'$ définies au paragraphe 58.

Si donc on admet que l'état du champ au point (x, y, z) est complètement défini par les deux vecteurs : \bar{h} (X, Y, Z) = intensité du champ électrique, et \bar{h}' ($X' Y' Z'$) = intensité du champ du courant, nous possédons une solution satisfaisante du problème de la transmission d'énergie électrique. La loi de transmission résulte de l'expression du flux d'énergie \bar{w} au point (x, y, z) :

$$4 \pi w_x = YZ - YZ' \quad 4 \pi w_y = Z'X - ZX' \quad 4 \pi w_z = X'Y - XY' \quad (10)$$

Ce flux est donc un vecteur ayant : 1° pour grandeur l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs \bar{h} et \bar{h}' , divisée par 4π ; 2° pour direction celle de la perpendiculaire au plan de ce parallélogramme (dans un sens bien connu).

La généralité de cette loi de transmission de l'énergie dans l'état variable du champ sera confirmée au paragraphe 122 (théorème de Poynting).

62. Application aux courants rectilignes. — Considérons un conducteur cylindrique homogène (indéfini) de rayon a , ayant pour axe l'axe Oz (fig. 27), et dans lequel existe un cou-

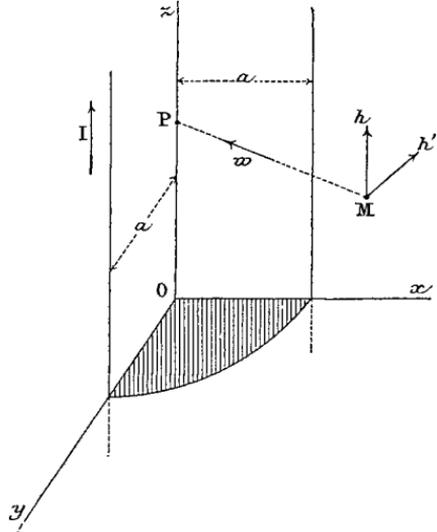


Fig. 27.

rant permanent d'intensité I dirigé dans le sens Oz . On vérifiera sans peine :

1° Que, pour tout point intérieur au conducteur, les formules (2) dans lesquelles on fera :

$$i_x = 0 \quad i_y = 0 \quad i_z = \frac{I}{\pi a^2}$$

sont satisfaites par la solution :

$$X' = \frac{2I}{a^2} \quad Y' = -\frac{2I}{a^2} x \quad Z' = 0 \quad (11)$$

2° Que pour tout point M extérieur, les formules (2) dans lesquelles on doit faire :

$$i_x = 0 \quad i_y = 0 \quad i_z =$$

sont satisfaites par la solution :

$$X' = \frac{2I}{r^2} y \quad Y' = -\frac{2I}{r^2} x \quad Z' = 0 \quad (12)$$

r désignant la distance MP du point M à l'axe Oz .

Du reste, pour un point quelconque de la surface du conducteur ($r = a$), les formules (11) et (12) donnent mêmes valeurs de (X' , Y' , Z'). Le vecteur X' , Y' , Z' défini par les formules (11) à l'intérieur, et par les formules (12) à l'extérieur du conducteur, est donc le *vecteur du champ du courant* I . On voit que ce vecteur h' en M est perpendiculaire au plan MOz , et dirigé de la droite vers la gauche pour un observateur debout suivant Oz .

Proposons-nous de déterminer en chaque point du champ le flux d'énergie provoqué par l'appel d'énergie électrique dans le conducteur.

1^{re} cas. — Supposons que le champ électrique soit uniforme à l'extérieur comme à l'intérieur du conducteur ; on aura :

$$X = 0 \quad Y = 0 \quad Z = h$$

En appliquant les formules (10), on constate que le flux d'énergie w en un point M est dirigé suivant le rayon MP et *converge* vers le conducteur ; il est nul sur Oz , proportionnel à r dans le conducteur, inversement proportionnel à r au dehors.

2^e cas. — *Câble télégraphique*, dont nous avons étudié le champ électrique au paragraphe 45. Le vecteur h' du champ du courant au point M étant, comme on vient de le voir, perpendiculaire au plan méridien MOz (fig. 27), le flux d'énergie w qui est perpendiculaire à \overline{h} et à $\overline{h'}$ est donc tangent à la courbe méridienne de la surface équipotentielle passant en M . D'après le tracé des courbes méridiennes équipotentielles (fig. 21), on voit que le flux w est sensiblement parallèle à l'axe du conducteur, sauf aux environs de la section droite équipotentielle $KDE L$, qui est au potentiel du sol. De

part et d'autre de cette section, on peut se représenter le flux d'énergie *glissant le long des surfaces équipotentielles* et arrivant au conducteur en sens opposés, comme l'indiquent les deux flèches. A travers la section droite annulaire du diélectrique située à une distance l de la section droite K D E L, le flux total d'énergie est proportionnel à l , c'est-à-dire à la longueur de la partie du conducteur à laquelle est destiné cet apport d'énergie. (Pour appliquer les formules 10 au calcul de w , il faut avoir soin de changer l'axe X' X de la figure 21 en axe O z pour faire concorder cette figure avec la figure 27.)

DÉFINITION DU CHAMP MAGNÉTIQUE

63. Champ magnétique. — Nous avons vu, au paragraphe 58, la nécessité de l'existence d'un *champ du courant* pour expliquer la transmission de l'énergie entre la source et le lieu de consommation. Or ce champ peut être étudié expérimentalement, grâce à un instrument d'épreuve qui permet de l'explorer entièrement dans un milieu fluide. Cet instrument est l'aimant que l'on emploie dans les galvanomètres et dont nous supposons bien connus la construction et le mode d'aimantation. Toutefois il convient d'étudier préalablement son rôle comme explorateur du champ.

L'action qu'un aimant A subit en présence, soit d'un autre aimant, soit d'un courant, paraît très complexe au premier abord. Mais on sait que cette action équivaut à celle qu'exercerait : 1° une certaine force F appliquée à un point O de l'aimant A choisi arbitrairement, par exemple au centre de gravité; 2° un couple défini par la direction et la grandeur de son moment (*propriété bien connue de tout corps solide*). Nous serons donc conduits à étudier d'abord le *couple seul* en fixant le point O de l'aimant, ensuite la *force de translation* F.

Nous appellerons *champ magnétique* tout l'espace dans lequel un aimant A, considéré comme aimant d'épreuve, subit une action attribuable soit à d'autres aimants, soit à des courants électriques, soit à la cause, de nature inconnue, qui produit le magnétisme terrestre. Il importe d'étudier en premier lieu le champ magnétique

terrestre, puisque son action intervient dans tous les phénomènes magnétiques que nous aurons ensuite à observer.

64. **Champ magnétique terrestre.** — L'action du magnétisme terrestre sur une aiguille aimantée est celle que subit cette aiguille lorsqu'elle est suffisamment éloignée de tout aimant ou courant et de tout corps susceptible de s'aimanter (fer, nickel, cobalt). Cette action varie d'un point à un autre à la surface du globe terrestre ; toutefois elle est assez uniforme sur une étendue relativement faible (quelques kilomètres carrés). Si on la décompose en une force F et un couple (§ 63), *on constate que la force F est nulle et, par suite, que cette action se réduit à un couple.*

En effet, si l'on dispose l'aiguille aimantée sur un disque de liège flottant à la surface d'un liquide, le flotteur de liège tourne sur lui-même et l'aiguille se fixe dans une orientation invariable, mais l'on n'observe aucun mouvement de translation ; *la force F n'a donc pas de composante horizontale.* On démontre encore ce fait en suspendant l'aiguille par un fil et constatant que ce fil reste vertical.

D'autre part, si l'on pèse une aiguille d'acier non aimantée, puis qu'on l'aimante et qu'on la pèse de nouveau, l'expérience montre que son poids n'a pas changé ; *la force F n'a donc pas de composante verticale.*

Si l'on suspend l'aiguille aimantée par son centre de gravité, de manière à éliminer l'action de la pesanteur, elle s'oriente dans une direction déterminée, qui correspond à un état d'équilibre stable, car lorsqu'on l'en écarte, elle oscille autour de cette position et finit par s'y fixer de nouveau. Quelle que soit d'ailleurs la forme de l'aimant employé (barreau rectangulaire ou aiguille en losange) et quel que soit le mode de suspension, il y a dans cet aimant une droite fixe qui, dans la position d'équilibre stable, reprend toujours la même direction. Cette droite est, autant que possible, un axe de symétrie ; ainsi, dans une aiguille en losange bien construite et bien aimantée, c'est la ligne des pointes. Nous appellerons cette ligne *axe magnétique* de l'aimant.

L'axe magnétique NS d'une aiguille aimantée, soustraite à l'action de la pesanteur et mobile en tous sens autour de son centre

de gravité, prend en chaque point du globe une direction et un sens bien déterminés. L'extrémité N qui pointe vers le sol dans la direction du nord s'appelle le pôle nord ou positif de l'aiguille; l'extrémité opposée S s'appelle le pôle sud ou négatif. Ceci du moins s'applique à peu près à tout l'hémisphère nord du globe terrestre.

Cette direction que prend l'axe magnétique en un point du globe est indépendante de l'aiguille aimantée employée. Elle est donc caractéristique de l'état du champ magnétique terrestre au lieu considéré. Nous l'appellerons *direction du champ* en ce point. Le plan vertical qui contient cette direction s'appelle le *méridien magnétique*; l'angle de ce plan avec le méridien géographique du lieu est la *déclinaison*. La déclinaison actuelle à Paris est d'environ 15° dans le sens de rotation du nord vers l'ouest.

Dans le méridien magnétique, l'axe NS de l'aiguille aimantée, suspendue par son centre de gravité, fait avec l'horizontale un angle que l'on appelle l'*inclinaison*. L'inclinaison à Paris est d'environ 65° .

65. Loi du couple magnétique terrestre. — Lorsque l'axe magnétique NS d'un aimant mobile autour du point O est écarté d'un angle θ de sa position d'équilibre *ns*, l'expérience montre :

1° Que le plan du couple exercé par le champ magnétique terrestre sur cet aimant (§ 64) est parallèle au plan *nON*, de telle sorte que le moment *M* du couple peut être représenté par un vecteur *OM* perpendiculaire à ce plan;

2° Que le moment *M* est proportionnel au sinus de la déviation angulaire θ ; soit : $M = C \sin \theta$, *C* désignant un coefficient variable d'un aimant à un autre.

Pour démontrer la première proposition, il suffit d'observer la position d'équilibre de l'aiguille d'une boussole de déclinaison ou d'inclinaison. Cette aiguille NS (fig. 28) est assujettie à tourner autour d'un axe de rotation $O\omega$ auquel elle est perpendiculaire. Si

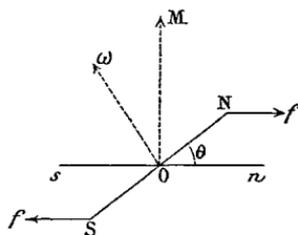


Fig. 28.

le couple qui agit sur elle est parallèle au plan nON , elle sera en équilibre lorsque ce plan contiendra l'axe $O\omega$: c'est-à-dire que sa

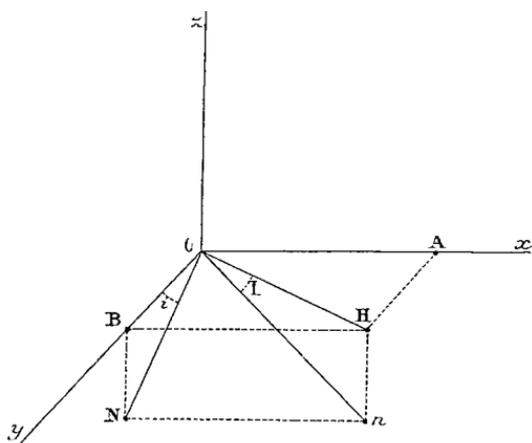


Fig. 29.

position d'équilibre ON sera la projection de la direction On du champ sur le plan perpendiculaire à l'axe de rotation.

Dans la boussole de déclinaison, l'axe de rotation étant vertical, la position d'équilibre de l'aiguille sera donc la projection horizontale de la direction du

champ magnétique terrestre. On sait en effet que l'aiguille se place dans le méridien magnétique.

Dans la boussole d'inclinaison, l'axe de rotation Ox (fig. 29) étant horizontal, la position d'équilibre de l'aiguille sera la projection ON de la direction On du champ sur le plan vertical yOz perpendiculaire à Ox . Soit δ l'angle du plan vertical de l'aiguille avec le méridien magnétique (plan $zOHn$), c'est-à-dire l'angle de leurs horizontales Oy et OH ; soient I l'inclinaison magnétique au lieu d'observation (angle nOH), et i l'inclinaison de l'aiguille dans sa position d'équilibre ON . On voit sur la figure que l'on a les égalités :

$$\operatorname{tg} i = \frac{BN}{oB} = \frac{Hn}{oH \cos \delta} = \frac{\operatorname{tg} I}{\cos \delta}$$

ou :

$$\cot i = \cot I \cos \delta$$

L'inclinaison I ayant été déterminée une fois pour toutes, si pour chaque angle δ du vertical de l'aiguille avec le méridien on mesure l'inclinaison correspondante i , l'expérience vérifie rigoureusement la formule précédente.

La première proposition étant ainsi établie, il reste à démontrer que le moment du couple magnétique M est proportionnel au

sinus de la déviation angulaire θ de l'aiguille : $M = C \sin \theta$. Remarquons d'abord que, en supposant cette loi exacte, si l'on imagine un couple de deux forces f parallèles à la direction sz du champ (fig. 28) et appliquées à l'aimant en deux points N et S de son axe magnétique, tels que la longueur NS soit égale à l , le plan de ce couple est n ON et son moment est égal à $fl \sin \theta$. On peut donc remplacer le couple $M = C \sin \theta$ qui agit sur l'aiguille par ce couple fictif de deux forces f , qui lui est équivalent, pourvu que l'on prenne : $f = \frac{C}{l}$.

Si l'aiguille est assujettie à tourner autour d'un axe vertical, les composantes verticales des forces f du couple n'auront aucune action sur elle, et tout se passera comme si f était réduite à sa composante horizontale $f \cos I$, I désignant l'inclinaison. Lorsque l'aiguille de la boussole de déclinaison fait avec le méridien magnétique un angle δ , elle est donc soumise à un couple dont le moment est égal à $M' = f \cos I \cdot l \sin \delta = C \cos I \sin \delta$ (couple des deux forces $f \cos I$), si la loi énoncée ci-dessus ($M = C \sin \theta$) est exacte. C'est cette conséquence que nous nous proposons de vérifier.

La vérification résulte d'abord des expériences de Coulomb. Un barreau aimanté était porté par un étrier, suspendu lui-même par le fil de la balance de torsion. Cet appareil était réglé préalablement de manière que l'axe magnétique du barreau fût dans le méridien magnétique sans que le fil de suspension fût tordu. Lorsqu'on tournait le fil à sa partie supérieure d'un angle α , le barreau n'était dévié que d'un angle δ . L'angle de torsion du fil était donc $(\alpha - \delta)$, et d'après une loi établie antérieurement par Coulomb, le couple de torsion, qui tendait à accroître la déviation du barreau, était proportionnel à cet angle $(\alpha - \delta)$. Ce couple $D (\alpha - \delta)$ étant équilibré par le couple magnétique terrestre M' , on avait :

$$M' = D (\alpha - \delta)$$

Coulomb a constaté que le rapport de $(\alpha - \delta)$ à $\sin \delta$ était invariable lorsqu'il donnait à α diverses valeurs. Il en résulte bien que le couple M' est lui-même proportionnel à $\sin \delta$: $M' = K \sin \delta$.

Coulomb, ayant déterminé la valeur absolue du coefficient D , en déduisait celle de K .

Mesure de $C \cos I$ par la méthode des oscillations. — Le coefficient K , qui n'est autre chose que $C \cos I$ d'après ce qui a été dit plus haut, peut du reste se déterminer comme il suit. L'axe magnétique du barreau étant dans le méridien lorsque le fil de suspension est sans torsion, supposons qu'on l'écarte d'un angle δ_0 de cette position d'équilibre, et qu'on l'abandonne à lui-même sans vitesse initiale. Le mouvement oscillatoire qu'il prend peut se calculer facilement, si l'on néglige les résistances passives (frottement de l'air) qui sont minimales. Soit en effet δ l'angle que fait, à l'époque t , son axe magnétique avec le méridien. Écrivons l'équation d'équilibre fictif entre les trois couples suivants, tous de même sens, auxquels il est soumis : 1° le couple de torsion, qui est proportionnel à la torsion δ du fil, soit $D \delta$; 2° le couple magnétique terrestre $K \sin \delta$; 3° le couple d'inertie $A \frac{d^2 \delta}{dt^2}$, A désignant le moment d'inertie du système oscillant (étrier et barreau) :

$$A \frac{d^2 \delta}{dt^2} + D \delta + K \sin \delta = 0$$

comme dans cette expérience on donne à l'écart δ_0 une valeur très faible, on peut remplacer $\sin \delta$ par δ , l'erreur commise sur $\sin \delta$ étant négligeable ($\frac{\delta - \sin \delta}{\delta} = \frac{\delta^2}{6} + \dots < \frac{1}{60.000}$ si δ_0 est inférieur à $\frac{1}{2}$ degré). On a ainsi l'équation :

$$A \frac{d^2 \delta}{dt^2} + (D + K) \delta = 0$$

dont l'intégrale est, en tenant compte des conditions initiales

$$\left(\delta = \delta_0 \text{ et } \frac{d\delta}{dt} = 0 \text{ pour } t = 0 \right)$$

$$\delta = \delta_0 \cos \left(\sqrt{\frac{D + K}{A}} t \right)$$

Le mouvement de l'aimant est donc isochrone ; sa période est $T = 2 \pi \sqrt{\frac{A}{D + K}}$. Si donc on mesure cette période T par l'obser-

vation d'un certain nombre d'oscillations, et que l'on ait calculé le moment d'inertie A d'après les dimensions et les densités du barreau et de l'étrier, on en déduira la valeur :

$$D + K = \frac{4\pi^2}{T^2} A$$

En répétant la même expérience avec l'étrier seul, on aura la valeur du coefficient D seul par une formule semblable. On en déduit finalement la valeur de K .

Le même procédé serait applicable avec une suspension bifilaire le couple de torsion étant alors proportionnel au sinus de la déviation δ , soit $D \sin \delta$ ou, avec une approximation suffisante, $D \delta$.

66. Champ magnétique quelconque ; intensité. — Pour explorer un champ magnétique quelconque, on peut en principe employer les mêmes instruments (boussoles de déclinaison et d'inclinaison, etc.) que pour l'étude du champ terrestre. On doit, bien entendu, employer un aimant d'épreuve dont les dimensions soient petites relativement à sa distance aux aimants ou courants situés dans le voisinage ; car, autrement, le champ n'étant pas uniforme, on étudierait, non pas *son état en un point* déterminé, mais son état moyen dans le volume occupé par l'aimant.

Si l'on décompose l'action subie par l'aimant d'épreuve en une force F et un couple (§ 63), on constate qu'en général la force F n'est pas nulle comme dans le cas du champ magnétique terrestre mais elle est très faible en raison des petites dimensions de l'aimant. Nous reviendrons plus loin sur l'étude de cette force (§ 97). Pour le moment, nous prendrons pour son point d'application un point fixe O de l'aimant, afin d'éliminer son effet et d'étudier *le couple seul*.

L'expérience montre que l'axe magnétique d'un aimant d'épreuve, mobile en tous sens autour de son centre de gravité, s'oriente en chaque point M d'un champ magnétique dans une direction déterminée, laquelle est indépendante de l'aimant employé, mais varie avec la position du point M . Nous appellerons cette direction la *direction du champ* au point M .

On démontre en outre expérimentalement, comme dans le cas

du champ magnétique terrestre, que si l'axe magnétique NS de l'aimant fait avec sa position d'équilibre *ns* (fig. 28) un angle θ , le couple magnétique qui s'exerce sur l'aimant a son plan parallèle aux directions NS et *ns* et a un moment $C \sin \theta$ proportionnel au sinus de l'angle θ .

Le coefficient C varie d'un point à un autre du champ et dépend aussi de l'aimant employé; mais on constate que le rapport des coefficients C et C' mesurés en un même point M avec deux aimants A et A' est indépendant de la position du point M . Ces deux aimants ont donc, sur la grandeur du couple exercé, des coefficients d'influence respectifs γ et γ' tels que :

$$\frac{C}{\gamma} = \frac{C'}{\gamma'}$$

On peut choisir arbitrairement le coefficient γ de l'aimant A par exemple (ceci n'est du reste que provisoire, V. § 69); le coefficient γ' de l'aimant A' sera alors déterminé par la formule précédente. De même on déterminerait les coefficients γ'' , γ''' , d'autres aimants A'' , A''' ,

Ceci posé, soient C_1 , C_2 , C_3 , les valeurs de C mesurées en des points M_1 , M_2 , M_3 , du champ au moyen de l'aimant A ; C'_1 , C'_2 , C'_3 , C''_1 , C''_2 , C''_3 , les valeurs de C mesurées aux mêmes points avec d'autres aimants A' , A'' , On a, en vertu de la définition même des coefficients d'influence respectifs de ces aimants :

$$\frac{C_1}{\gamma} = \frac{C'_1}{\gamma'} = \frac{C''_1}{\gamma''} = \dots = h_1$$

$$\frac{C_2}{\gamma} = \frac{C'_2}{\gamma'} = \frac{C''_2}{\gamma''} = \dots = h_2$$

Les rapports h_1 , h_2 , h_3 , qui sont, comme on le voit, indépendants de l'aimant d'épreuve employé A ou A' ... ne dépendent que de l'état du champ aux points M_1 , M_2 , M_3 , et caractérisent cet état.

Les formules précédentes montrent en résumé que le coefficient C du couple $C \sin \theta$, qui s'exerce sur un aimant A , en un point M , est le produit de deux facteurs :

$$C = h \gamma \quad (1)$$

le facteur γ représentant le coefficient d'influence de cet aimant (au point de vue de l'action *qu'il subit*), et le facteur h un élément caractéristique de l'état du champ au point M. Nous appellerons *intensité du champ magnétique* au point M un vecteur ayant pour grandeur h et pour direction la direction du champ en ce point. Quant au *sens* de ce vecteur, c'est le sens de la ligne qui va du pôle sud au pôle nord d'un aimant placé en M dans sa position d'équilibre.

Ainsi qu'on l'a vu au paragraphe 65, le couple $C \sin \theta$ est équivalent au couple des deux forces f appliquées en N et S (fig. 28) pourvu que l'on ait :

$$fl = C = h\gamma$$

ou :

$$\frac{f}{h} = \frac{\gamma}{l} = q \quad (2)$$

L'aimant, mobile autour du point o , est donc soumis à la même action que s'il s'exerçait aux deux points (ou pôles) N et S des forces f égales au produit de l'intensité h du champ par la quantité $q = \frac{\gamma}{l}$, ces forces étant parallèles à la direction du vecteur h , l'une dans un sens, l'autre en sens contraire. Dans la théorie de Coulomb q est une *quantité de magnétisme* existant au pôle N, — q au pôle S.

67. Propriétés magnétiques des corps. — *Lorsque dans un champ magnétique on déplace des corps quelconques* (bois, eau, cuivre, etc.), on constate au moyen d'un aimant d'épreuve que *l'intensité du champ n'est modifiée en aucun point*. Tous ces corps se comportent donc comme l'air et ont même coefficient d'influence au point de vue des actions magnétiques. On admet ce fait comme exact, même dans les expériences de haute précision (détermination de l'ohm, par exemple) sans qu'il en résulte des erreurs appréciables. On a réussi, il est vrai, dans des expériences assez délicates, à mettre en évidence des différences extrêmement faibles entre les coefficients d'influence (ou pouvoirs inducteurs magnétiques, § 98) des divers milieux ; mais nous pourrions sans inconvénient en faire abstraction.

Il convient toutefois de faire une exception très importante pour les corps peu nombreux qui *s'aimantent* dans un champ magnétique (fer, nickel, cobalt). Les propriétés de ces corps sont très complexes, et leur étude expérimentale n'a fourni jusqu'ici aucune loi générale *rigoureuse*. La théorie applicable aux autres corps est manifestement insuffisante en ce qui les concerne; aussi évite-t-on l'emploi ou le voisinage de ces métaux dans les expériences magnétiques de précision. Nous supposons donc qu'aucun de ces corps n'existe dans les champs magnétiques que nous aurons à étudier dans la suite.

Quant aux aimants dont il sera question, nous supposons qu'ils sont *permanents* (c'est-à-dire, suivant le langage ordinaire, qu'aucune nouvelle aimantation ne peut y être *induite*); ce qui veut dire que ces aimants $A_1 A_2 A_3 \dots$ existant *simultanément* produiraient un champ dont l'intensité \bar{h} en chaque point M serait égale à la résultante :

$$\bar{h} = \bar{h}_1 + \bar{h}_2 + \bar{h}_3 + \dots$$

$\bar{h}_1 \bar{h}_2 \dots$ désignant les intensités des champs qui seraient produits respectivement par ces aimants existant *isolément*. En pratique, ces aimants permanents (en acier) peuvent être réalisés d'une manière assez satisfaisante; mais à la rigueur \bar{h} diffère toujours, si peu que ce soit, de la résultante $\bar{h}_1 + \bar{h}_2 + \dots$ l'état de chaque aimant étant un peu modifié par le voisinage des autres.

D'après la définition précédente des aimants permanents, *un tel aimant se comporte comme l'air au point de vue du champ produit par les autres aimants ou par des courants*. Nous supposons donc désormais que tous les corps situés dans le champ, y compris les aimants, ont le même coefficient d'influence que l'air.

Les corps ne présentent aucune propriété magnétique analogue à la *conductibilité* électrique. Tandis que le champ électrique établi dans un conducteur tend à s'y dissiper plus ou moins rapidement quand l'énergie électrique n'y est point renouvelée, le champ magnétique s'y maintient indéfiniment.

Ces préliminaires posés, nous allons étudier le champ magnétique d'un courant.

CHAMP MAGNÉTIQUE D'UN COURANT

68. **Expérience de Biot et Savart.** — Biot et Savart ont mesuré l'action d'un courant sur un aimant découverte par Ørstedt (1820). Leur expérience, que nous allons décrire, peut être considérée comme l'exploration du champ d'un courant au moyen d'un aimant. Citons d'abord la règle formulée par Ampère au sujet de l'orientation que prendrait une aiguille aimantée, supposée soustraite à l'action de la pesanteur et du magnétisme terrestre, en présence d'un courant électrique existant dans un fil rectiligne :

« Si l'on imagine un observateur couché le long du fil et tourné vers l'aiguille, le courant lui entrant par les pieds et sortant par la tête, l'axe magnétique de cette aiguille se placera perpendiculairement au plan passant par son centre et par le fil, son pôle nord dirigé vers la gauche de l'observateur et son pôle sud vers la droite. »

Biot et Savart maintenaient un courant permanent I dans un fil vertical ff' en présence d'une aiguille aimantée horizontale ns , suspendue par un fil de cocon OO' (fig. 30). Le plan Off' passant par le fil et le centre O de l'aiguille était perpendiculaire au méridien magnétique ; de telle sorte que l'aiguille était orientée dans ce méridien à la fois par le magnétisme terrestre et par le courant (règle d'Ampère), et qu'elle y était en équilibre stable.

Soit H la composante horizontale de l'intensité du champ terrestre, h' l'intensité du champ magnétique du courant au point o (la notation h étant réservée pour l'intensité du champ électrique). Lorsque l'aiguille est écartée d'un angle δ du méridien, elle tend à y revenir sous l'action d'un couple égal à

$$C \sin \delta = \gamma (H + h') \sin \delta$$

γ désignant le coefficient d'influence de l'aiguille (§ 66).

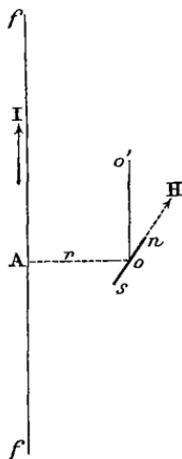


Fig. 30.

L'aiguille, abandonnée à elle-même sous l'action de ce couple, prend un mouvement oscillatoire représenté par l'équation (§ 65) :

$$A \frac{d^2\delta}{dt^2} + C\delta = 0$$

A désignant son moment d'inertie. La période T des oscillations est liée à C et à A par la formule :

$$C = \frac{4\pi^2 A}{T^2} = 4\pi^2 AN^2$$

Le coefficient C du couple magnétique est donc proportionnel au carré du nombre N des oscillations par unité de temps. Si ce nombre d'oscillations est N_0 sous l'action du magnétisme terrestre seul ($C = \gamma H$) et N sous l'action du magnétisme terrestre et du courant [$C = \gamma (H + h')$], on aura :

$$\frac{\gamma H}{N_0^2} = \frac{\gamma (H + h')}{N^2}$$

d'où :

$$h' = H \frac{N^2 - N_0^2}{N_0^2}$$

Biot et Savart mesuraient par ce procédé les nombres N_0 et N d'oscillations correspondant à une distance r de l'aiguille aimantée au fil ff . En faisant varier r , ils constatèrent que le rapport $\frac{N^2 - N_0^2}{N_0^2}$ et, par suite, l'intensité h du champ du courant sont inversement proportionnels à r . Comme d'autre part on a constaté que le couple magnétique exercé par le courant sur un aimant est proportionnel à l'intensité I du courant (§ 40), on peut poser :

$$h' = A \frac{I}{r} \quad (3)$$

Enfin l'expérience montre que *la constante A est indépendante de la nature du fil conducteur ff, que celui-ci soit en cuivre, en fer, etc.*

M. Joubin, répétant l'expérience de Biot et Savart avec un conducteur cylindrique liquide contenu dans un tube de verre, a exploré en outre le champ magnétique à l'intérieur de ce conducteur à l'aide d'un petit aimant d'épreuve. Il a constaté que l'inten-

sité h' , toujours perpendiculaire à la droite $OA = r$ (fig. 30), varie d'une manière continue quand on passe de l'extérieur à l'intérieur du conducteur, et qu'à l'intérieur elle est proportionnelle à la distance r et non plus à $\frac{1}{r}$; elle est donc égale à :

$$h' = \frac{\Lambda}{a^2} I r \tag{4}$$

a désignant le rayon du conducteur. — Ce résultat était admis depuis longtemps comme une conséquence de la loi de Biot et Savart.

69. Propriétés du champ d'un courant. — Pour représenter géométriquement le résultat de ces expériences, prenons trois axes de coordonnées rectangulaires (fig. 31), l'axe Oz coïncidant avec l'axe du conducteur cylindrique et étant dirigé dans le même sens que le courant I . Les composantes

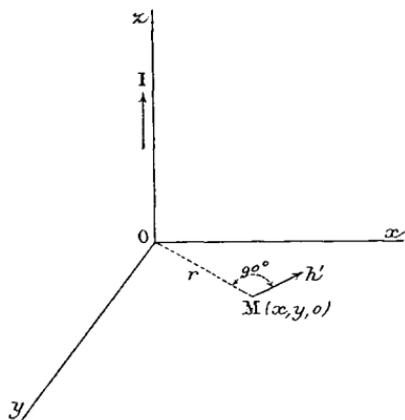


Fig. 31.

$X' Y' Z'$ de l'intensité h du champ en un point M (du plan $x O y$ par exemple) auront pour expressions :

1° A l'extérieur du conducteur (formule 3) ;

$$X' = \frac{\Lambda I}{r^2} y \quad Y' = -\frac{\Lambda I}{r^2} x \quad Z' = 0 \tag{5}$$

2° A l'intérieur (formule 4) :

$$X' = \Lambda I \frac{y}{a^2} \quad Y' = -\Lambda I \frac{x}{a^2} \quad Z' = 0 \tag{6}$$

Posons, pour abrégier :

$$4 \pi \rho' = \frac{\partial X'}{\partial x} + \frac{\partial Y'}{\partial y} + \frac{\partial Z'}{\partial z} \tag{7}$$

$$4 \pi \mu'_x = \frac{\partial Y'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial y} \quad 4 \pi \mu'_y = \frac{\partial Z'}{\partial x} - \frac{\partial X'}{\partial z} \quad 4 \pi \mu'_z = \frac{\partial X'}{\partial y} - \frac{\partial Y'}{\partial x} \tag{8}$$

et nous désignerons par μ' le vecteur dont les composantes sont

μ'_x, μ'_y, μ'_z . En portant dans les formules (7) et (8) les expressions (5) de X', Y', Z' , on trouve :

$$\rho' = 0 \quad \mu'_x = \mu'_y = \mu'_z = 0 \quad (9)$$

En portant dans (7) et (8) les expressions (6) de X', Y', Z' , on trouve, au contraire :

$$\rho' = 0 \quad \mu'_x = 0 \quad \mu'_y = 0 \quad \mu'_z = \frac{A I}{2\pi a^2} = \frac{A}{2} i \quad (10)$$

Ainsi la fonction ρ' est nulle à l'intérieur comme à l'extérieur du conducteur où existe le courant. Mais le vecteur F , qui se réduit ici à la composante μ' , est, au facteur $\frac{A}{2}$ près, identique en grandeur et en direction au vecteur i , que nous avons appelé *densité* du courant au point x, y, z (§ 42). Nous pouvons considérer les formules (9) comme un cas particulier des formules (10), puisque i est nul en dehors du conducteur.

Les vecteurs μ et i au point (x, y, z) ne dépendent que de l'état du champ en ce point. Il en est donc de même de leur rapport $\frac{A}{2}$. Or, d'après ce qui a été dit au paragraphe 68, le coefficient A ne dépend ni de l'intensité du courant, ni de la substance du conducteur ; *il est donc indépendant de toute circonstance physique*. Le rapport $\frac{A}{2}$ est donc un coefficient purement parasite (comme le rapport d'une quantité de chaleur au travail équivalent) et il y aurait intérêt, au point de vue de la simplification des formules, à le faire égal à l'unité.

Ceci est possible d'ailleurs, puisque la valeur de la grandeur magnétique μ' , dont les composantes sont définies par la formule (8), dépend du choix du coefficient γ resté provisoirement arbitraire au paragraphe 66. Faisons, à cet effet, $A = 2$ dans les formules (5) ; on en déduit :

$$h' = \frac{2 I}{r}$$

ce qui fait connaître la valeur numérique de l'intensité h' du champ magnétique du courant I à la distance r et permet, par suite, de

définir l'unité d'intensité de champ magnétique. D'autre part, dans la formule (1) du paragraphe 66.

$$C = h' \gamma$$

où C désigne un couple (dimensions $L^2 MT^{-2}$), nous pouvons fixer la valeur du coefficient d'influence γ de l'aimant, puisque nous savons évaluer maintenant C et h' . — Les dimensions de h' et de γ seront (V. § 47) :

$$\begin{aligned} H' &= I L^{-1} = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2} K^{\frac{1}{2}} \\ I^2 &= \left(L^2 MT^{-2} \right) H'^{-1} = L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} K^{-\frac{4}{2}} \end{aligned}$$

Les vecteurs μ et i seront dès lors identiques.

En remplaçant A par 2 dans les formules (5) et (6), on voit qu'elles sont identiques aux formules (12) et (11) du paragraphe 62, et que le vecteur (X' Y' Z') dont on vient de déterminer expérimentalement la répartition dans le champ (dit *magnétique*) du courant est identique au vecteur (X' Y' Z') du paragraphe 62. Du reste, un choix moins simple d'axes de coordonnées nous aurait donné (en faisant A = 2), au lieu des formules (10) :

$$\frac{\partial Y'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial y} = 4\pi i_x \quad \frac{\partial Z'}{\partial x} - \frac{\partial X'}{\partial z} = 4\pi i_y \quad \frac{\partial X'}{\partial y} - \frac{\partial Y'}{\partial x} = 4\pi s_x \quad (11)$$

$$\frac{\partial X'}{\partial x} + \frac{\partial Y'}{\partial y} + \frac{\partial Z'}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

i_x i_y i_z désignant les composantes de la densité i du courant. Ces formules, applicables aussi bien à l'extérieur qu'à l'intérieur du fil conducteur (d'après la remarque faite plus haut), sont précisément celles du paragraphe 58 définissant le *vecteur* (X' Y' Z') *du champ du courant*, dont la notion nous a été suggérée par l'étude de la transmission de l'énergie à travers le champ électrique. Les considérations développées au paragraphe 58 ne faisant nullement intervenir la nature des corps situés dans le champ, on voit pourquoi la constante $\left(\Lambda = 2 \frac{\mu'}{i} \right)$ de la formule de Biot et Savart est indépendante de la substance du conducteur et du milieu ambiant.

Le vecteur i , qui n'est égal à la densité du courant que dans le

cas particulier d'un courant permanent, est en général l'*apport d'induction électrique* (§ 50). Remarquons, du reste, qu'en différenciant les trois équations (11) respectivement par rapport à x , y et z , et les ajoutant, on trouve :

$$0 = \frac{\partial i_x}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y} + \frac{\partial i_z}{\partial z}$$

On sait que cette propriété du vecteur (i_x, i_y, i_z) appartient à l'apport d'induction (§ 51) *et non à la densité du courant* dans un champ électrique variable.

Les relations (11) entre l'intensité $(X' Y' Z')$ du champ magnétique du courant et le vecteur i peuvent encore s'écrire, en remplaçant i par son expression : $ch + \frac{k}{4\pi} \frac{dh}{dt}$ du paragraphe 50 :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Y'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial y} &= 4\pi cX + k \frac{\partial X}{\partial t} \\ \frac{\partial Z'}{\partial x} - \frac{\partial X'}{\partial z} &= 4\pi cY + k \frac{\partial Y}{\partial t} \\ \frac{\partial X'}{\partial y} - \frac{\partial Y'}{\partial x} &= 4\pi cZ + k \frac{\partial Z}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

X, Y, Z désignant les composantes de l'intensité h du champ électrique.

70. Galvanomètres. — Les formules (11) et (12) ci-dessus ont pour intégrales les formules (5) du paragraphe 58, qui peuvent s'écrire :

$$X' = \int_u \frac{(y - \beta) i_y - (z - \gamma) i_z}{r^3} d\omega \quad Y' = \dots \quad Z' = \dots \quad (14)$$

$X' Y' Z'$ étant les composantes de l'intensité h' du champ magnétique au point $M(x, y, z)$; $d\omega$ un élément quelconque du volume U du champ, pris au point $A(\alpha, \beta, \gamma)$, où le vecteur i a pour composantes (i_x, i_y, i_z) ; enfin r la distance AM (fig. 32).

Ces trois formules sont résumées par l'équation géométrique :

$$\vec{h}' = \sum \frac{m' \sin \theta}{r^2} = \int_u \frac{i d\omega \sin \theta}{r^2} \quad (15)$$

qui, dans le langage défini au paragraphe 17, s'énoncera comme il suit. En chaque point M (x, y, z) du champ magnétique d'un courant, l'intensité \vec{h} est égale à la résultante des intensités de champs fictifs créés par les masses vectorielles magnétiques m'_v , réparties dans le champ. La masse vectorielle m'_v , contenue dans un élément de volume $d\omega$ au point A (α, β, γ) est égale à $\vec{\mu}' d\omega$, c'est-à-dire à $i d\omega$; l'intensité \vec{h}'_1 du champ qu'elle est censée créer au point M est : 1° perpendiculaire au plan du vecteur m'_v (ou de i) et de la droite AM ; 2° proportionnelle à $m'_v = i d\omega$ et au sinus de l'angle θ (fig. 32) et inversement proportionnelle au carré de la distance r (loi d'action imaginée par Laplace).

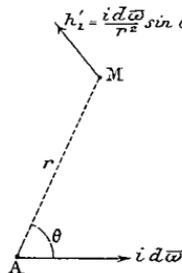


Fig. 32.

Appliquons les formules (14) au cas d'un circuit conducteur dont la section transversale ω est très faible, et où l'intensité totale du courant permanent à travers une section quelconque a une valeur constante $I = i\omega$. On prend comme élément $d\omega$ le volume ωds d'une longueur ds du conducteur ($d\omega = \omega ds$); soient $dx, d\beta, d\gamma$ les projections de l'arc ds sur les axes de coordonnées ($i d\omega = i \frac{d\gamma}{ds} \omega ds = I d\gamma$). On a alors :

$$X' = I \int_u \frac{(y - \beta) d\gamma - (z - \gamma) d\beta}{r^3} d\omega \quad Y' = \dots \quad Z' = \dots \quad (16)$$

En supposant un *petit* aimant d'épreuve, d'orientation donnée, placé au point (x, y, z), on pourra des formules (16) déduire l'intensité h' du champ magnétique en ce point et, par suite, le couple exercé par le courant sur cet aimant. Inversement la *mesure* de ce couple, qui est proportionnel à h' et, par suite, à I , permettra de calculer ou de comparer des intensités de courant. Tel est le principe des galvanomètres.

Boussole des tangentes. — Supposons que le circuit ait la forme d'un cercle de rayon R (une seule spire enroulée sur le cadre du galvanomètre, pour nous borner à un cas simple). Chaque élément ds de ce circuit donne au centre du cercle, d'après la formule (15) ou les formules (16), une intensité $h'_1 = \frac{I ds}{R^2}$ perpendicu-

laire au plan du cercle. La circonférence entière donne donc :

$$h' = \frac{I}{R^2} \int ds = \frac{2\pi I}{R} \quad (17)$$

Si le plan du cadre circulaire coïncide avec le méridien magnétique, l'intensité $\overline{h'}$ du champ dû au courant est perpendiculaire à ce méridien. La résultante de cette intensité $\overline{h'}$ et de l'intensité horizontale \overline{H} du magnétisme terrestre a donc une direction faisant avec le méridien un angle δ tel que :

$$\text{tg } \delta = \frac{h'}{H} = \frac{2\pi I}{HR}$$

C'est la direction que prend l'aimant placé au centre du cadre. La formule précédente permet donc de calculer la valeur de I quand on connaît celle de R et que l'on a déterminé préalablement l'intensité magnétique H .

Soient δ et δ' les déviations observées de l'aimant sous l'action de deux courants I et I' ; on voit que l'on a :

$$\frac{I'}{I} = \frac{\text{tg } \delta'}{\text{tg } \delta}$$

Cette formule dispense de la connaissance de H et de R si l'on n'a à déterminer que des rapports d'intensité de courant. Dans ce cas la forme circulaire du cadre n'est nullement indispensable pour l'application de la formule précédente. Quelle que soit sa forme, pourvu qu'il soit plan et orienté dans le méridien magnétique, la formule (17) sera remplacée par :

$$h' = GI$$

G désignant un coefficient calculable par les formules (16); et, par conséquent on aura :

$$\text{tg } \delta = \frac{h'}{H} = \frac{G}{H} \cdot I$$

Boussole des sinus. — Lorsque l'aimant du galvanomètre ci-dessus (ayant primitivement son axe magnétique dans le méridien et par suite dans le plan du cadre, est dévié par le courant, si l'on

fait tourner le cadre autour de son diamètre vertical jusqu'à ce que son plan contienne de nouveau l'axe dudit aimant, l'angle de rotation du cadre, mesuré sur un limbe, est égal à la déviation angulaire δ de l'aimant. Celui-ci étant alors en équilibre sous l'action : 1° du couple magnétique terrestre $\gamma H \sin \delta$ (§ 65), 2° du couple γGI dû au courant (invariable pour une même intensité I), on a :

$$\gamma H \sin \delta = \gamma GI$$

d'où :

$$I = \frac{H}{G} \sin \delta$$

C'est là le principe de la boussole des sinus de Pouillet, dont il a été question au paragraphe 40.

74. **Galvanomètre balistique.** — Proposons-nous de calculer la loi du mouvement de l'aiguille aimantée d'une boussole des tangentes sous l'action d'un courant d'intensité I variable d'un instant à l'autre. Pendant ce mouvement l'aiguille, déviée d'un angle δ de sa position initiale, est soumise au couple magnétique terrestre $\gamma H \sin \delta$ et au couple $\gamma GI \cos \delta$ exercé par le courant ; nous supposons négligeable toute autre force : résistances passives, etc. Si donc A désigne le moment d'inertie de l'aiguille par rapport à l'axe de rotation, l'équation de son mouvement sera :

$$A \frac{d^2 \delta}{dt^2} = \gamma GI \cos \delta - \gamma H \sin \delta \quad (18)$$

Supposons qu'un courant extrêmement court traverse le galvanomètre (décharge d'un condensateur par exemple), de telle sorte que l'aiguille subisse une impulsion, mais n'ait pas le temps de se déplacer sensiblement avant la fin de ce courant. Après cette *première* phase, l'aiguille se mettra en mouvement, atteindra une certaine déviation maximum δ_1 , puis reviendra en arrière et oscillera. Nous allons voir que *de l'observation de δ_1 on peut déduire la valeur de la quantité d'électricité $\int Idt$* , qui représente par exemple la décharge du condensateur.

Pendant la première phase, δ étant sensiblement nul, l'équation (18) se réduit à :

$$A \frac{d^2 \delta}{dt^2} = \gamma GI$$

d'où, en multipliant par dt et intégrant pendant la durée ε de cette phase :

$$A\omega_0 = \gamma G \int_0^\varepsilon Idt \quad (19)$$

ω_0 désignant la vitesse angulaire $\frac{d\delta}{dt}$ acquise par l'aiguille sous l'action de la décharge entière.

Pendant la deuxième phase, on a : $I = 0$ et l'intégration de (18), après multiplication par $d\delta$, donne :

$$\frac{1}{2} A \left[\left(\frac{d\delta}{dt} \right)^2 - \omega_0^2 \right] = \gamma H (\cos \delta - \cos 0) = -2\gamma H \sin^2 \frac{\delta}{2}$$

Au moment où l'aiguille atteint la déviation maximum δ_1 , la vitesse angulaire $\frac{d\delta}{dt}$ est nulle; donc :

$$\sin^2 \frac{\delta_1}{2} = \frac{A}{4\gamma H} \omega_0^2 = \frac{\gamma G^2}{4AH} \left[\int_0^\varepsilon Idt \right]^2$$

Si ensuite on observe la durée T de la période des oscillations de l'aiguille (§ 65) sous l'action seule du couple terrestre $\gamma H \sin \delta$, on sait que l'on a, en supposant très faible l'amplitude de ces oscillations : $\gamma H = 4 \pi^2 \frac{A}{T^2}$. La formule précédente peut donc s'écrire :

$$\int_0^\varepsilon Idt = \sqrt{\frac{4AH}{\gamma G^2}} \sin \frac{\delta_1}{2} = \frac{H}{G} \cdot \frac{T}{\pi} \sin \frac{\delta_1}{2} \quad (20)$$

Comme on sait calculer G et mesurer H en valeur absolue, on déduira de cette formule la valeur absolue de $\int_0^\varepsilon Idt$.

Remarque. — Comme la décharge du condensateur se produit dans un temps très court ε , l'état du champ électrique pendant ce temps ne peut évidemment être considéré comme stable, ni le courant comme permanent; de telle sorte que l'on devrait tenir compte du vecteur \vec{i} qui existe aussi bien dans le milieu isolant que dans le circuit conducteur. Mais la simplification du raisonnement que nous avons faite, en supposant que l'intensité \vec{h}' du champ magnétique est créée seulement par le courant qui existe dans le

conducteur, ne fausse nullement le résultat calculé. En effet, on voit que la vitesse angulaire ω_0 imprimée à l'aimant par la décharge (formule 19) dépend, non pas des valeurs de \bar{i} en chaque point du champ, mais des intégrales $\int_0^\varepsilon \bar{i} dt$ seulement. Or :

1° Dans le milieu isolant (§ 50) \bar{i} se réduit à $\frac{k}{4\pi} \frac{\partial \bar{h}}{\partial t}$ et, par conséquent, en tout point de ce milieu, on a :

$$\int_0^\varepsilon \bar{i} dt = \frac{k}{4\pi} [\bar{h}_\varepsilon - \bar{h}_0] = 0$$

puisque l'intensité \bar{h} du champ électrique est nulle au commencement et à la fin de l'intervalle de temps ε ;

2° Dans le conducteur, comme $\bar{i} = \bar{c}h + \frac{k}{4\pi} \frac{\partial \bar{h}}{\partial t}$, pour la même raison :

$$\int_0^\varepsilon \bar{i} dt = \int_0^\varepsilon \bar{c}h dt$$

c'est-à-dire que l'on ne commet aucune erreur en remplaçant \bar{i} par la densité du courant $\bar{c}h$.

72. Potentiel du champ d'un courant. — En dehors du conducteur où existe le courant (§ 69), les équations (9) étant satisfaites, le champ du courant admet un potentiel V' . Mais *ce potentiel n'est pas uniforme*. Ainsi, d'après les expressions (5) de X' , Y' , Z' , et la définition du potentiel (§ 10), on a :

$$V' = V'_0 + \int_M^{M_0} (X' dx + Y' dy + Z' dz) = V'_0 + AI \left[\text{arc tg } \frac{y}{x} - \text{arc tg } \frac{y_0}{x_0} \right]$$

V'_0 désignant le potentiel en un point arbitraire (x_0, y_0, z_0) , Comme l'arc tangente n'est déterminé qu'à un multiple de 2π près, et que $A = 2$, on peut écrire :

$$V' - V'_0 = 2I \left[\text{arc tg } \frac{y}{x} - \text{arc tg } \frac{y_0}{x_0} \right] + 4\pi I \cdot n$$

n désignant un nombre entier indéterminé. Si en particulier le chemin d'intégration de M à M_0 est une courbe fermée tournant

n fois autour de Oz dans le sens où arc $tg \frac{y}{x}$ va en croissant, on trouve : $V' - V'_0 = 4\pi In$; dans ce cas les points M et M_0 coïncident, et néanmoins V' diffère de V'_0 . — On remarquera que les surfaces équipotentielles ($\frac{y}{x} = \text{constante}$) sont les plans passant par l'axe Oz du conducteur, et que leurs trajectoires orthogonales sont les cercles ayant Oz pour axe, c'est-à-dire des courbes fermées, ce qui n'a pas lieu dans un champ à potentiel uniforme.

Pour généraliser ce résultat, appliquons au champ magnétique l'identité (3) démontrée au paragraphe 10 :

$$\int_C (X' dx + Y' dy + Z' dz) = \int_S \left[l \left(\frac{\partial Y'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial y} \right) + m \left(\frac{\partial Z'}{\partial x} - \frac{\partial X'}{\partial z} \right) + n \left(\frac{\partial X'}{\partial y} - \frac{\partial Y'}{\partial x} \right) \right] dS$$

qui devient, en tenant compte des relations (14) :

$$\int_C (X' dx + Y' dy + Z' dz) = 4\pi \int_S (li_x + mi_y + ni_z) dS = 4\pi I \quad (21)$$

I désignant le flux total du vecteur i à travers la surface S limitée au contour C (dans le sens positif). Dans le cas particulier d'un courant permanent, I est l'intensité totale du courant traversant la surface S , ou encore du courant embrassé par le contour C .

La formule (21) montre bien que le champ n'admet pas

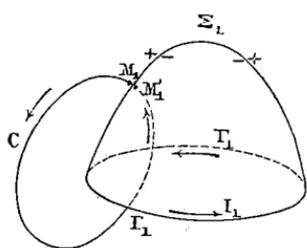


Fig. 33.

de potentiel dans la région où existe un courant et que le potentiel dans la région extérieure au courant n'est pas uniforme, puisque la condition pour que le potentiel soit uniforme est que l'intégrale du premier membre de (21) soit nulle (§ 10). Néanmoins on peut, grâce à l'artifice suivant, imaginer

que le champ tout entier possède un potentiel uniforme et discontinu, même dans l'état variable du champ.

Examinons d'abord le cas où l'on n'aurait qu'un courant I_1 dans

un circuit réduit à une ligne géométrique Γ_1 sans dimensions transversales (fig. 33). Imaginons une surface diaphragme (ou *feuille*) Σ_1 limitée à cette ligne Γ_1 et ayant une face positive et une face négative définies comme au paragraphe 10.

Pour un contour fermé C quelconque ne coupant pas le diaphragme Σ_1 et n'embrassant par conséquent pas le courant, la formule (21) où l'on doit faire : $I = 0$ donne :

$$\int_C (X' dx + Y' dy + Z' dz) = 0$$

Cette équation exprime que le champ du courant I_1 admet un potentiel *uniforme*, à la condition que le diaphragme Σ_1 soit *impénétrable aux circuits C d'intégration*.

Dans ce champ à diaphragme, la chute de potentiel $V'_{M_1} - V'_{M'_1}$; le long d'un chemin C, qui va d'un point M_1 de la face positive de Σ_1 au même point M'_1 de la face négative (fig. 33), est rigoureusement égale à l'intégrale $\int_C (X' dx + Y' dy + Z' dz)$ le long du chemin fermé C qui embrasse le courant I_1 . Donc, d'après (21) :

$$V'_{M_1} - V'_{M'_1} = 4\pi I_1 \tag{22}$$

Ainsi le diaphragme Σ_1 est une surface de discontinuité du potentiel, celui-ci s'accroissant brusquement de $4\pi I_1$ quand on passe d'un point de la face négative au même point de la face positive.

Dans la réalité les circuits conducteurs des courants ont des dimensions transversales. Divisons chacun d'eux en tubes élémentaires de courants I_1, I_2, I_3, \dots de section infiniment petite (§ 42) et imaginons des diaphragmes $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$ limités à ces tubes ou lignes géométriques $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots$. Grâce à ces diaphragmes, supposés *impénétrables aux circuits d'intégration*, le champ admettra un *potentiel uniforme*; mais ce potentiel s'accroîtra brusquement de $4\pi I_1, 4\pi I_2, \dots$ quand on passera de la face négative à la face positive de l'un de ces diaphragmes $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$.

Ce raisonnement suppose l'existence de courants permanents. Mais pour l'étendre au cas général d'un champ variable, on n'a

qu'à y remplacer le nom *densité de courant*, donné au vecteur i , par celui d'*apport d'induction électrique*.

NOTA. — Quelque compliquée que soit la forme d'une ligne Γ , il sera toujours facile de se représenter le diaphragme correspondant Σ ; on n'aura qu'à prendre pour Σ la surface d'un cône ayant pour sommet un point arbitraire A et pour base la ligne Γ .



CHAPITRE VIII

SOURCES CHIMIQUES ET THERMIQUES D'ÉNERGIE ÉLECTRIQUE

73. Siège des sources d'énergie. — Considérons un circuit conducteur, de résistance R , dans lequel une pile maintient un courant permanent d'intensité I . Soient : A le système formé par ce circuit et l'ensemble des corps situés dans le champ électrique ainsi créé, B le système des corps extérieurs. Si l'on suppose qu'il n'y a aucun échange d'énergie entre A et B , l'énergie totale du système A restera constante. Or cette énergie totale s'accroît de la quantité de chaleur RI^2 dégagée dans le circuit pendant l'unité de temps en vertu de la loi de Joule. Il faut donc qu'il y ait une perte d'énergie équivalente sous une autre forme dans le système A .

Cette perte d'énergie n'est point supportée par les corps qui environnent le circuit, puisque le champ y est stable et qu'il n'y a ni dégagement de chaleur, ni réactions chimiques, ni travail (par hypothèse). Elle porte donc sur le circuit conducteur, y compris la pile.

En premier lieu, dans les parties solides du circuit, indépendamment de la production de chaleur conforme à la loi de Joule, l'expérience ne montre d'autres variations d'énergie que des dégagements de chaleur, positifs ou négatifs, que nous étudierons ci-après sous le nom d'effets Peltier et Thomson.

En second lieu, dans les parties liquides les mêmes phénomènes calorifiques se produisent ; mais on y constate en outre des réactions chimiques : décomposition des électrolytes, dégagement de gaz, formation de précipités, etc.

Nous commencerons donc par étudier ces deux séries de phénomènes :

- 1° Effets thermo-électriques ;
- 2° Electrolyse.

EFFETS THERMO-ÉLECTRIQUES

74. **Effet Peltier.** — L'analyse des effets qui se produisent dans la pile thermo-électrique découverte par Seebeck résulte de la connaissance de deux faits : l'un découvert expérimentalement par Peltier, l'autre deviné par Lord Kelvin.

Peltier a montré qu'une soudure de deux métaux, dans un circuit où existe un courant, s'échauffe ou se refroidit suivant le sens de ce courant. Cet effet se superpose au dégagement de chaleur, toujours positif, qui a lieu dans tout le conducteur en vertu de la loi de Joule ; de telle sorte que son observation exige des précautions particulières, consistant à produire le courant I dans la soudure successivement dans un sens et en sens inverse, en mesurant les quantités de chaleur $(rI^2t + q)$ et $(rI^2t - q)$ dégagées dans les deux cas ($r =$ résistance de la soudure, $t =$ durée de l'observation).

M. Le Roux, en procédant ainsi, a reconnu que *la quantité de chaleur q due à l'effet Peltier est proportionnelle à I et au temps t , c'est-à-dire à la quantité d'électricité It . Soit : $q = \pi It$, π désignant un coefficient qui dépend seulement de la nature des deux métaux soudés M et N et de la température de la soudure, mais nullement de la surface de la soudure ni de l'intensité I du courant. Comme q change simplement de signe quand on change le sens du courant, nous représenterons par la formule $-\pi_{MN}^T Idt$ la quantité de chaleur dégagée pendant le temps dt sous l'action d'un courant I dirigé du métal M vers le métal N à travers la soudure, celle-ci étant à la température T. Il en résulte la relation :*

$$\pi_{MN}^T + \pi_{NM}^T = 0 \quad (1)$$

puisque les quantités de chaleur $\pi_{MN} Idt$ et $\pi_{NM} Idt$ sont égales et de signes contraires.

L'expérience montre que l'effet Peltier existe à la surface de séparation de deux liquides ou d'un solide. Il paraît exister aussi à la surface de séparation de l'air et des charbons dans l'arc voltaïque, où le charbon positif est plus chaud que le charbon négatif. En un mot il s'agit là d'une propriété qui doit sans doute appartenir, à des degrés divers, à la surface de séparation de deux corps quelconques.

Si, au lieu d'un circuit composé de plusieurs conducteurs homogènes soudés bout à bout, on considère un conducteur hétérogène, on est conduit à supposer que l'effet Peltier se produit d'une manière continue sur toute la longueur du circuit. Mais nous n'aborderons point l'étude de ce cas, sur lequel les données expérimentales font défaut.

Soit MNP un circuit formé de plusieurs conducteurs dont les soudures sont aux températures T_1, T_2, T_3 (fig. 34).

En adoptant comme positif le sens du parcours indiqué par les flèches, on voit que la quantité totale de chaleur, positive ou négative, dégagée aux soudures pendant le temps dt sous l'action d'un courant I , est :

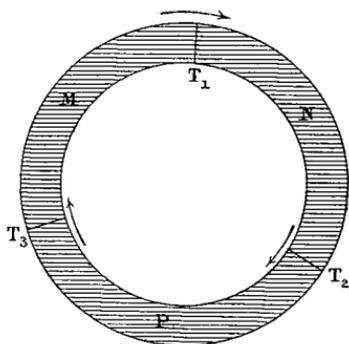


Fig. 34.

$$- \pi_{MN}^{T_1} I dt - \pi_{NP}^{T_2} I dt - \pi_{PM}^{T_3} I dt = - \Pi I dt \quad (2)$$

Pour maintenir constantes les températures T_1, T_2, T_3 on doit imaginer, suivant les cas, des sources de froid destinées à absorber les quantités de chaleur dégagées, ou des sources de chaleur destinées à compenser le refroidissement produit.

La quantité de chaleur dégagée par une soudure ne correspond pas à une perte équivalente de l'énergie de celle-ci, puisque l'état physique de la soudure reste invariable. *Ce dégagement de chaleur comme celui qui a lieu dans tout le conducteur en vertu de la loi de Joule, est produit aux dépens d'une source extérieure dont l'énergie est transmise jusqu'à la soudure par l'intermédiaire du champ électrique.* En un mot c'est la dissipation, sous forme calo-

rique, de l'énergie électrique locale, dont les pertes sont réparées au fur et à mesure par un apport de l'extérieur.

Il va sans dire que, si la soudure se refroidit, c'est au contraire une fraction de l'énergie calorifique locale qui se transforme en énergie électrique ; et l'énergie en excès ainsi produite est transmise par le champ électrique en d'autres points du conducteur, où elle se retransforme en chaleur.

75. Effet Thomson. — Dans un circuit unimétallique, même lorsque la température n'est pas uniforme, l'expérience montre qu'aucun courant ne se développe (loi de Magnus). Il semble en résulter qu'aucun phénomène électrique spécial ne doit avoir lieu dans ce conducteur lorsqu'on y produit un courant au moyen d'une pile.

On peut se demander néanmoins si l'hétérogénéité créée par la variation de température d'un point à un autre d'un conducteur unimétallique n'y développerait point un effet analogue à l'effet Peltier, qui résulte d'une hétérogénéité de substance. Lord Kelvin a été conduit par certaines idées théoriques à admettre cette hypothèse. Nous l'admettrons aussi, et nous représenterons la chaleur dégagée dans un circuit en vertu de cet effet spécial (effet Thomson) pendant le temps dt , sous l'action d'un courant I , par la formule — $\Theta I dt$.

Cette hypothèse ne peut être fautive ; car si l'effet Thomson n'existait pas, on n'aurait qu'à faire : $\Theta = 0$. Nous ne supposons rien d'ailleurs sur le coefficient Θ , qui a priori peut dépendre de l'intensité I du courant aussi bien que de la nature du circuit et de la loi de distribution des températures.

76. Force électromotrice d'une pile thermo-électrique. — D'après ce qui a été dit aux paragraphes 74 et 75, dans un circuit composé de conducteurs solides, l'accroissement total dW d'énergie pendant le temps dt , sous l'action d'un courant I , comprend : 1° un gain d'énergie calorifique égal à $RI^2 dt$ (effet Joule) ; 2° des gains positifs ou négatifs de chaleur égaux à — $\Pi I dt$ (effet Peltier) et à — $\Theta I dt$ (effet Thomson).

Ecrivons que la variation totale d'énergie dW est nulle :

$$dW = RI^2 dt - \Pi I dt - \Theta I dt = 0$$

d'où

$$RI = \Pi + \Theta = E \quad (3)$$

On donne au produit RI de la résistance totale R du circuit par l'intensité I du courant le nom de *force électromotrice* (créé dans la théorie des fluides électriques). La *force électromotrice* E d'un courant thermo-électrique est donc égale à la somme des coefficients Π et Θ , c'est-à-dire à la *somme des pertes d'énergie calorifique du circuit dues aux effets Peltier et Thomson, sous l'action de l'unité de courant, pendant l'unité de temps* ($I t = 1$).

77. Expressions des coefficients Θ et Π .

Étude du coefficient Θ . — L'expérience montre que la force électromotrice E d'une pile thermo-électrique ne dépend que de la nature des conducteurs employés et des températures des soudures. Elle ne dépend ni de l'intensité I du courant, ni des dimensions des conducteurs; comme cette propriété appartient aussi au coefficient Π (§ 74), la formule (3) montre qu'elle appartient également au coefficient Θ .

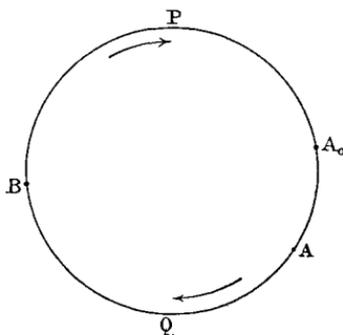


Fig. 35.

Considérons maintenant un circuit fermé *unimétallique*. Dans un tel circuit :

1° il n'y a pas d'effet Peltier : $\Pi = 0$; 2° il ne se produit pas de courant (loi de Magnus) : $E = 0$. On en conclut :

$$\Theta = E - \Pi = 0.$$

Supposons que dans ce circuit, par un procédé quelconque, on crée un courant I . Soit $-\Theta_A^B I dt$ l'effet Thomson produit dans la partie AQB du circuit qui va de A à B (sens de parcours positif indiqué par les flèches, fig. 35). La somme $-\Theta I dt$ des effets

Thomson — $\Theta_A^B Idt$ et — $\Theta_B^A Idt$ produits respectivement dans les deux parties AQB et BPA du circuit est nulle :

$$\Theta = \Theta_A^B + \Theta_B^A = 0$$

comme Θ_A^B et Θ_B^A ne dépendent respectivement que des parties AQB et BPA du circuit, lesquelles sont indépendantes entre elles et n'ont en commun que la nature du métal M et les températures T_A et T_B des extrémités A et B, $\Theta_A^B (= -\Theta_B^A)$ ne peut être qu'une fonction $f(T_A, T_B)$ dépendant de la nature du métal M.

On peut dès lors écrire, en désignant par A_0 un point du circuit choisi arbitrairement une fois pour toutes, et dont il est inutile de mettre en évidence la température :

$$\Theta = \Theta_A^B + \Theta_B^{A_0} + \Theta_{A_0}^A = 0$$

d'où

$$\Theta_A^B = \Theta_{A_0}^B - \Theta_{A_0}^A = f(T_B) - f(T_A)$$

Mais nous adopterons de préférence comme expression de Θ_A^B :

$$\Theta_A^B = \int_{T_A}^{T_B} \Pi_M dT \quad (4)$$

en désignant par Π_M la dérivée de $f(T)$, qui est une fonction de la température T et dépend de la nature du métal M.

Avec cette notation, le coefficient Θ du circuit représenté par la figure 34 sera égal à la somme :

$$\Theta = \int_{T_3}^{T_1} \Pi_M dT + \int_{T_1}^{T_2} \Pi_N dT + \int_{T_2}^{T_3} \Pi_P dT \quad (5)$$

Etude du coefficient Π . — Supposons les températures T_1 T_2 T_3 des soudures de ce circuit (fig. 34) égales entre elles ; d'après (5) le coefficient Θ est alors nul. La force électromotrice E du circuit (formule 3) se réduit donc à Π , c'est-à-dire, d'après (2) à :

$$E = \Pi = \pi_{MN}^{T_1} + \pi_{NP}^{T_1} + \pi_{PM}^{T_1}$$

Or l'expérience montre que dans ces conditions aucun courant n'est créé dans le circuit : $E = 0$. On en déduit :

$$\pi_{MN}^T = -\pi_{PM}^T - \pi_{PN}^T = \pi_{MP}^T - \pi_{PN}^T \quad (6)$$

Si donc on a mesuré, à une même température T_1 , les effets Peltier ($\pi_{MP}, \pi_{NP}, \dots$) relatifs aux soudures d'un métal-type P avec divers métaux MN, ..., on pourra, sans effectuer de nouvelles mesures, en déduire par la formule précédente l'effet Peltier (π_{MN}, \dots) relatif à la soudure de deux quelconques de ces métaux MN... à la même température T_1 .

Conséquences. — Désignons par $(E_{MN})_{T_2}^{T_1}$ la force électromotrice dans un circuit formé de deux métaux M et N, dont les soudures sont aux températures T_1 et T_2 , le sens positif adopté étant dirigé de M vers N par la soudure T_1 (flèches, fig. 36). On a :

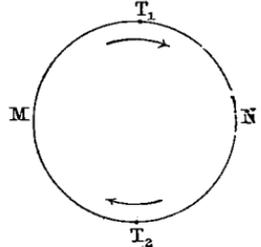


Fig. 36.

$$(E_{MN})_{T_2}^{T_1} = \Pi + \Theta = \pi_{MN}^{T_1} + \pi_{NM}^{T_2} + \int_{T_2}^{T_1} H_M dT + \int_{T_1}^{T_2} H_N dT$$

De même pour les couples thermo-électriques MP (métaux M et P) et NP (métaux N et P) :

$$(E_{MP})_{T_2}^{T_1} = \pi_{MP}^{T_1} + \pi_{PM}^{T_2} + \int_{T_2}^{T_1} H_M dT + \int_{T_1}^{T_2} H_P dT$$

$$(E_{NP})_{T_2}^{T_1} = \pi_{NP}^{T_1} + \pi_{PN}^{T_2} + \int_{T_2}^{T_1} H_N dT + \int_{T_1}^{T_2} H_P dT$$

On en déduit en tenant compte de la propriété (6) :

$$(E_{MN})_{T_2}^{T_1} = (E_{MP})_{T_2}^{T_1} - (E_{NP})_{T_2}^{T_1} \quad (7)$$

Cette formule, *vérifiée expérimentalement*, permet de calculer la force électromotrice d'un couple quelconque MN entre les températures T_1 et T_2 , dès que l'on a déterminé les forces électromotrices des couples MP, NP..., entre les mêmes températures; on choisit généralement le plomb comme métal type P.

Remarquons encore que la formule de $(E_{MN})_{T_2}^{T_1}$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} (E_{MN})_{T_2}^{T_1} &= \pi_{MN}^{T_1} + \int_0^{T_1} (H_M - H_N) dT - \pi_{MN}^{T_2} - \int_0^{T_2} (H_M - H_N) dT \\ &= F(T_1) - F(T_2) \end{aligned}$$

On déduit de là l'identité :

$$(E_{MN})_{T_2}^{T_1} = (E_{MN})_{T_0}^{T_1} - (E_{MN})_{T_0}^{T_2}$$

qui exprime que la force électromotrice d'un couple MN entre les températures T_0 et T_1 est égale à la somme des forces électromotrices : 1° entre T_0 et T_2 , 2° entre T_2 et T_1 (*vérifié expérimentalement*).

Enfin, si l'on appelle *pouvoir thermo-électrique* du couple MN à la température T_1 la dérivée :

$$\frac{d}{dT_1} (E_{MN})_{T_2}^{T_1} = F'(T_1)$$

ce *pouvoir* jouit de la même propriété (7) que la force électromotrice :

$$\frac{d}{dT_1} E_{MN} = \frac{d}{dT_1} E_{MP} - \frac{d}{dT_1} E_{NP} \quad (8)$$

78. Etude expérimentale des couples thermo-électriques. — Les expériences faites jusqu'ici ont permis de dresser des tables faisant connaître, entre des limites de température assez étendues, les pouvoirs thermo-électriques des couples formés par un métal-type (plomb) et par les autres métaux. Pour la plupart de ces couples, ces tables sont remplacées par une formule empirique de la forme :

$$\frac{dE_{MN}}{dT} = a (T_n - T) \quad (9)$$

a et T_n désignant deux constantes. On a trouvé en effet que cette formule linéaire est assez exacte dans les applications ordinaires.

Ainsi pour le couple ($M =$ cuivre, $N =$ fer), son pouvoir thermo-électrique, déduit par la formule (8) de ceux des couples cuivre-plomb et fer-plomb, est égal à :

$$\frac{dE_{MN}}{dT} = (15,98 - 0,0582 T) \text{ microvolts}$$

T étant évalué en degrés centigrades. On en déduit pour la force électromotrice de ce couple entre 0° et 100° :

$$\left(E_{MN}\right)_0^{100} = \int_0^{100} \frac{dE}{dT} dT = 1307 \text{ microvolts}$$

De la formule empirique (9) on déduit par intégration :

$$\left(E_{MN}\right)_{T_n}^T = -\frac{1}{2} a \left(T_n - T\right)^2 + \frac{1}{2} a \left(T_n - T_0\right)^2$$

La force électromotrice serait donc une fonction du second degré de la température T (entre certaines limites, bien entendu). C'est ce qui résulte notamment des expériences de Gauguin. Pour $T = T_n$ le pouvoir thermo-électrique s'annule, et la force électromotrice passe par un maximum (positif ou négatif); c'est pourquoi T_n est appelé la *température neutre* du couple. Si $T_0 < T_n$, quand T croît à partir de T_0 , la force électromotrice croît d'abord jusqu'à son maximum; puis T croissant au delà de T_n , elle décroît et devient nulle pour une température $T = T_1$ telle que :

$$\frac{T_0 + T_1}{2} = T_n$$

Au delà, pour $T > T_1$ la force électromotrice change de signe; T_1 est appelé la *température d'inversion* correspondant à la température T_0 de la soudure froide. Le phénomène de l'inversion avait été signalé par Cumming en 1823.

On a mesuré l'effet Peltier pour un certain nombre de couples métalliques. Pour le couple cuivre-fer, par exemple, à la température ordinaire, le coefficient π_{MN} est égal à $0^{\text{vol}},0028$ environ; les coefficients des autres couples sont du même ordre de grandeur, ce qui explique les difficultés éprouvées pour les mesurer avec précision. Au contact d'un liquide et d'un solide, l'effet Peltier est beaucoup plus intense; exemple $\pi_{MN} = 0^{\text{v}},212$ pour le couple cuivre-sulfate de cuivre (Bouty).

L'effet Thomson est minime, et l'on n'en a pas de détermination expérimentale précise. Néanmoins M. Le Roux a mis en évidence le dégagement et l'absorption de chaleur qui en résultent suivant le sens du courant. Il a trouvé que le coefficient H_M défini plus

haut est positif pour certains métaux, négatif pour d'autres, nul pour le plomb.

ÉLECTROLYSE

79. Loi de l'électrolyse. — Lorsqu'un courant existe dans un liquide qui n'est pas un corps simple, ce liquide se décompose. Si par exemple, deux fils de platine plongeant dans un voltamètre à eau acidulée sont reliés aux pôles d'une pile, une couche d'oxygène vient se former sur le fil par où le courant entre dans le voltamètre, tandis que le fil de sortie se recouvre d'hydrogène. Ces gaz se dégagent bientôt, leurs poids restant constamment dans la proportion de 8 à 1 nécessaire pour reconstituer l'eau qui a été décomposée. Aucune trace de décomposition n'apparaît dans la masse même du liquide ; le phénomène paraît localisé à la surface des fils de platine.

Faraday a donné à ce phénomène le nom d'*électrolyse*. Il appelle *électrolyte* le liquide décomposé, *électrodes* les fils d'entrée et de sortie du courant, le fil d'entrée étant l'électrode positive ou *anode* et le fil de sortie étant l'électrode négative ou *cathode*. Les produits ou éléments de la décomposition s'appellent les *ions* ; celui qui se porte à l'électrode positive est dit *électro-négatif*, celui qui se porte à l'électrode négative est dit *électro-positif*.

En soumettant à l'électrolyse divers composés liquides : oxydes, chlorures, sulfures, sulfates... ou des sels à l'état de fusion ignée, on a reconnu que les métalloïdes (O, Cl, S...) et les radicaux acides se portent à l'anode, les métaux et l'hydrogène à la cathode. Dans ces composés le métalloïde, ou le radical acide, est donc toujours l'élément électro-négatif. Dans un composé oxygéné du chlore, c'est l'oxygène qui est électronégatif et le chlore devient électro-positif.

Les lois de l'électrolyse, dues presque entièrement à Faraday (complétées par E. Becquerel), peuvent se résumer en une seule par l'énoncé suivant :

« Lorsqu'un courant d'intensité I existe dans un électrolyte, le poids P de l'élément électronégatif dégagé à l'anode en un temps t

quelconque est dans un rapport constant avec la quantité d'électricité It (ou $\int_0^t Idt$) :

$$P = \varepsilon \int_0^t Idt \quad (10)$$

Ce rapport ε , qui ne dépend que de la nature de l'élément dégagé s'appelle son équivalent électrochimique ; il est proportionnel à l'équivalent chimique de cet élément. »

Ainsi les équivalents chimiques de l'hydrogène, du cuivre et de l'argent étant respectivement 1,32 et 108, des dépôts de 1,32 et 108 grammes de ces corps correspondront à une même quantité d'électricité, dont la valeur est, d'après les expériences les plus précises (L. Rayleigh, Mascart...) :

$$\int Idt = 96\,660 \text{ coulombs}$$

Si deux sels différents d'un même métal, par exemple les chlorures cuivreux et cuivrique, sont placés dans un même circuit et décomposés par le même courant, les poids de l'élément électro-négatif (chlore) dégagés dans ces deux sels étant égaux, les poids de cuivre déposés sont dans le rapport de 1 à 2, comme l'indique la composition des sels.

En vertu de la loi ci-dessus, qui est d'une exactitude *rigoureuse*, on peut de la mesure du poids P de cuivre ou d'argent déposé dans un voltamètre (à sulfate de cuivre ou à nitrate d'argent) pendant un temps t quelconque, sous l'action d'un courant I constant ou variable, déduire par la formule (8) la valeur de la quantité d'électricité $\int_0^t Idt$. Des voltamètres de ce genre servent quelquefois de galvanomètres *absolus* pour tarer par comparaison des galvanomètres industriels.

80. Polarisation des électrodes. — L'électrolyse d'un conducteur liquide est ordinairement accompagnée de réactions secondaires, qui se produisent sur les électrodes d'entrée et de sortie du courant. En voici quelques exemples :

1° Dans un voltamètre à eau et à électrodes de platine, le platine absorbe au début l'oxygène qui se forme à l'anode, et l'hydro-

gène à la cathode ; mais il se sature assez rapidement, et les gaz finissent par se dégager au fur et à mesure de leur formation.

2° Souvent une électrode est attaquée par l'ion qui s'y forme. Si, par exemple, l'électrolyte est de la potasse et que la cathode soit du mercure, le potassium qui se forme sur cette électrode s'amalgame ; cette réaction peut se prolonger indéfiniment.

Le plus souvent, c'est l'anode (cuivre, zinc, fer...), qui est attaquable par le métalloïde ou le radical acide provenant de la décomposition de l'électrolyte (sulfate, azotate,...). Ainsi, dans la pile Daniell, l'acide sulfurique provenant de la décomposition du sulfate de zinc se dégage à la surface de l'anode (zinc) et la dissout en donnant une nouvelle quantité de sulfate.

3° Lorsque les ions formés ne peuvent subsister dans l'électrolyte sans le décomposer, il en résulte une réaction secondaire d'un nouveau genre. Ainsi, dans un voltamètre à sulfate de potasse et à électrodes de platine, le potassium formé à la cathode n'attaque point celle-ci, mais il décompose l'eau et s'oxyde, ce qui donne lieu à un dégagement d'*hydrogène* ; l'acide sulfurique SO^4 à l'anode décompose également l'eau, mettant en liberté l'*oxygène*.

En général l'électrolyse, accompagnée ou non de réactions secondaires, produit sur les électrodes des dépôts de natures différentes qui établissent entre elles une dissymétrie, à laquelle on a donné le nom de *polarisation* des électrodes. L'expérience (Ritter) montre que cette polarisation transforme un voltamètre primitivement inerte en une véritable pile dite *secondaire*, donnant dans un circuit extérieur métallique un courant de sens contraire à celui qui a produit l'électrolyse. La nouvelle électrolyse produite par ce courant inverse est naturellement de sens contraire à la précédente et tend à recombinaison les éléments séparés. Le voltamètre à eau, par exemple, après le passage d'un courant plus ou moins prolongé, devient une pile à gaz (O et H), dont le courant va de l'hydrogène à l'oxygène par l'intérieur de la pile ; ces deux gaz se recombinaison ainsi, l'oxygène de l'électrolyte se portant vers l'hydrogène de l'anode, et l'hydrogène vers l'oxygène de la cathode. La puissance des piles secondaires (ou accumulateurs) est d'autant plus grande que la quantité des dépôts formés sur les électrodes par le courant *primaire* est plus grande elle-même, puisque ces

dépôts doivent fournir théoriquement (loi de l'électrolyse) une quantité d'électricité $\int Idt$ proportionnelle à leur poids, dans le courant secondaire.

Que les dépôts en question soient formés par un courant primaire comme il vient d'être dit, ou qu'ils aient été préparés chimiquement, la pile secondaire jouit des mêmes propriétés (Ed. Becquerel). En réalité une telle pile ne se distingue en rien d'une pile ordinaire, dite primaire, si ce n'est par son mode de formation. La propriété d'engendrer un courant tient à la *dissymétrie* qui existe entre les deux électrodes à leur surface de contact avec l'électrolyte. Dans un voltamètre à sulfate de cuivre et à électrodes de cuivre, par exemple, cette dissymétrie n'existe pas, et le courant ne produit aucune polarisation ; car du cuivre se dissout à l'anode et du cuivre se dépose à la cathode, et l'état de l'électrolyte ne change pas. Aussi un tel voltamètre ne donne aucun courant secondaire.

81. *Électrolyse des solides.* — Les corps isolants, rendus temporairement conducteurs, paraissent susceptibles d'électrolyse, même à l'état solide. On sait toutefois peu de choses à cet égard ; nous citerons l'exemple suivant :

Si une lame de verre, recouverte de deux feuilles métalliques, est reliée par ces électrodes à une pile, celle-ci produit un courant dès que le verre est porté, par exemple, à la température de 100° , tandis qu'aucun courant n'existe à la température ordinaire. Supposons que le courant ayant été établi pendant quelque temps à 100° , on refroidisse le verre et qu'ensuite on supprime la pile. Les électrodes étant reliées par un galvanomètre, on n'observe aucun courant ; mais, en chauffant de nouveau le verre à 100° , on voit le galvanomètre dévier sous l'action d'un courant *secondaire* de sens inverse au courant *primaire*. La quantité d'électricité $\int Idt$ correspondant à ce courant secondaire est *considérable*, et le phénomène ne paraît pas pouvoir être expliqué par la capacité du condensateur à lame de verre que l'on a formé. C'est pourquoi on l'attribue à une électrolyse du verre par le courant primaire, laquelle pourrait donner lieu à un dépôt d'ions relativement considérable, quoique imperceptible. De même que dans un

voltamètre ordinaire, ces ions ne se recombinaient à travers la lame de verre que lorsqu'on laisserait le courant secondaire s'établir.

82. Force électromotrice d'une pile voltaïque. — Nous allons étudier maintenant les variations d'énergie produites par l'électrolyse et les réactions secondaires dans les diverses parties d'une pile, par suite des changements d'état des corps.

Une réaction chimique entre deux corps C et D est en général accompagnée de phénomènes calorifiques. Par exemple la combinaison de ces corps dégage une certaine quantité de chaleur Q ; c'est-à-dire que si l'expérience est disposée de telle sorte qu'il n'y ait aucun travail produit, ni aucune échange d'énergie sous une forme quelconque entre le système (C, D) et les corps extérieurs, la température finale T_1 de la combinaison (C D) dépasse la température initiale T_0 commune aux corps C et D d'une quantité $(T_1 - T_0)$ telle que $Q = \gamma (T_1 - T_0)$, γ désignant la chaleur spécifique moyenne du composé (C D) entre les températures T_0 et T_1 . Le système (C, D) gagne donc, par suite de la réaction chimique, une quantité d'énergie calorifique égale à Q ; mais comme son énergie totale, dans l'hypothèse où nous nous sommes placés, n'a pas varié, il a dû perdre la même quantité d'énergie Q sous une autre forme, que l'on appellera *énergie chimique*. Nous dirons donc que la réaction considérée entraîne une perte d'énergie chimique égale à Q.

Les chaleurs de combinaison (ou pertes d'énergie chimique) d'un grand nombre de composés ont fait l'objet de déterminations expérimentales précises ; de telle sorte que l'on possède des données numériques sur la plupart des combinaisons et décompositions qui se produisent dans les piles voltaïques.

Les réactions chimiques ne sont pas les seuls changements d'état des corps qui produisent des dégagements de chaleur ou des variations équivalentes d'énergie sous d'autres formes. On sait ce que l'on entend par chaleur de dissolution d'un corps dans un autre, chaleur de liquéfaction, de vaporisation, etc. Le mot chaleur devrait être remplacé par l'expression plus générale *variation d'énergie*, car au lieu de laisser l'énergie se transformer uniquement en chaleur dans chacun de ces phénomènes (dissolution,

liquéfaction,...) on peut imaginer son utilisation sous des formes plus variées : force vive, énergie électrique, etc.

Parmi les transformations d'énergie qui accompagnent les réactions chimiques, il en est une qui joue un rôle important dans les piles ; c'est celle qui correspond à la désagrégation d'un corps molécule par molécule (désagrégation du zinc dans la pile Daniell) ou au contraire à sa reconstitution (dépôt du cuivre par molécules sur l'électrode cuivre). Les variations d'énergie produites par ces deux phases de la réaction chimique dépendent, suivant une loi assez complexe, de la densité du courant sur les électrodes. En effet, suivant que le dépôt de cuivre, par exemple, sera plus ou moins lent, il sera plus ou moins adhérent à la cathode (phénomène bien connu). Or, une plus grande adhérence des molécules est due à un travail plus grand de ce que l'on appelle les forces moléculaires ; et, sans faire d'hypothèse sur ces forces, on voit là une cause susceptible de faire varier l'énergie du corps qui est en voie de formation par l'agrégation successive des molécules. Pour un même nombre de molécules déposées, la variation d'énergie est donc une fonction de l'adhérence.

Cette variation d'énergie dépend aussi de l'état physique de l'électrode sur laquelle a lieu le dépôt. Dans une pile Daniell en fonctionnement normal l'état des électrodes ne varie pas, de telle sorte que la variation d'énergie en question pendant un temps dt est proportionnelle au poids dq du dépôt ; soit Λdq cette variation, le coefficient Λ restant constant. Mais dans un volta-mètre il en est autrement, car la cathode, qui est au début un certain métal M , se recouvre peu à peu du produit N de la décomposition de l'électrolyte. Et l'on conçoit que la variation d'énergie produite par le dépôt d'un même poids dq d'ion n'est pas la même suivant que le dépôt a lieu sur le métal M ou sur une couche plus ou moins épaisse des ions N ; elle doit être fonction de l'épaisseur du dépôt N déjà formé, au moins tant que cette épaisseur ne dépasse pas une certaine limite ϵ (qui en réalité paraît être excessivement faible).

Indépendamment des électrodes de la pile, on doit voir un autre siège de variation d'énergie à la surface de séparation des liquides, où se passe une partie de la réaction chimique ; ainsi

dans la pile Daniell un équivalent de zinc s'y substitue à un équivalent de cuivre dans un équivalent de sulfate. Dans le reste des liquides il n'y a pas de variation d'énergie, leur état physique restant invariable malgré les transports incessants d'ions d'une électrode à l'autre.

Il y aurait lieu de considérer encore divers phénomènes secondaires, qui jouent un rôle important dans certaines piles : formation de précipités, dégagement de gaz (qui a lieu avec augmentation de volume des gaz et, par conséquent, travail extérieur), etc. Mais nous nous en tiendrons au cas simple où la réaction chimique se réduit sensiblement à ses phases principales comme dans la pile Daniell : déplacement du cuivre par le zinc dans le sulfate, avec désagrégation de l'électrode zinc et dépôt de cuivre sur la cathode.

Dans chacune de ces phases il y a sur les électrodes et à la surface de séparation des deux liquides une variation d'énergie correspondante, positive ou négative, c'est-à-dire accroissement ou perte de l'énergie dite chimique (ou moléculaire), suivant la nature de la réaction. L'ensemble de ces variations constitue une perte d'énergie qui, pendant un temps dt , est proportionnelle à la quantité d'ions en jeu, c'est-à-dire au poids dq d'électrolyte décomposé par le courant I ; soit $L dq$ cette perte, le coefficient L étant fonction de l'état actuel de la pile. Mais le poids dq étant dans un rapport invariable avec la quantité d'électricité $I dt$ (loi de l'électrolyse), *la perte d'énergie peut être représentée par la formule* $\Delta I dt$. Δ est un coefficient qui dépend de la nature et de l'état physique des liquides et des électrodes, et qui peut, d'après ce qui a été dit plus haut, dépendre aussi de la rapidité des dépôts, c'est-à-dire de la densité du courant sur la cathode.

On voit ainsi que, dans un circuit voltaïque, où existe un courant permanent, l'énergie totale W s'accroît, pendant le temps dt :

1° D'une quantité de chaleur $RI^2 dt$ dégagée, en vertu de la loi de Joule, dans toutes les parties du conducteur ;

2° D'une quantité de chaleur — $\Pi I dt$ (effet Peltier, § 74) dégagée aux soudures, sur les électrodes ($\pi = 0,212$, par exemple, au contact du cuivre et du sulfate de cuivre, § 78) et à la surface de séparation des liquides ;

3° D'une quantité de chaleur — $\Theta I dt$ (effet Thomson, § 75);

4° D'une quantité — $\Lambda I dt$, gain d'énergie chimique.

Comme cette énergie totale W reste invariable (§ 73), on a :

$$dW = R I^2 dt - \Pi I dt - \Theta I dt - \Lambda I dt = 0 \quad (11)$$

d'où :

$$E = R I = \Pi + \Theta + \Lambda \quad (11')$$

Telle est l'expression de la force électromotrice E d'une pile voltaïque qui, par définition, est le produit de la résistance R du circuit par l'intensité I du courant. Elle est égale à la somme des pertes d'énergie chimique (Λ) et calorifique ($\Pi + \Theta$) du circuit dues aux réactions chimiques et aux effets Peltier et Thomson, sous l'action de l'unité de courant pendant l'unité de temps ($I t = 1$).

En résumé, l'existence d'un champ électrique dans un conducteur donne lieu aux phénomènes suivants. L'énergie électrique s'y transforme en chaleur avec une rapidité qui dépend de la substance du conducteur (loi de Joule). Cette dissipation d'énergie qui tend à affaiblir inégalement le champ, détermine par là même un appel incessant d'énergie de l'extérieur. Dans le régime permanent, en divers points du circuit (électrode attaquée, soudure qui se refroidit, etc.), une quantité d'énergie chimique ou calorifique proportionnelle à $I t$ se transforme en énergie électrique et est transmise incessamment, par l'intermédiaire du champ électrique et suivant une loi bien définie, aux autres points du circuit, où elle se transforme de nouveau : soit en chaleur (dans le conducteur tout entier et aux soudures qui s'échauffent), soit en énergie chimique (électrode où a lieu la décomposition de l'électrolyte, qui absorbe de l'énergie).

83. Vérification expérimentale. — L'équation (11) qui, mise sous la forme (11'), nous a servi à calculer l'expression de la force électromotrice E d'une pile, a été obtenue par une application du principe de la conservation de l'énergie. Il est intéressant de constater que son exactitude a été vérifiée rigoureusement par les expériences de Favre et Silbermann. En effet, cette équation, écrite sous la forme :

$$\Lambda I dt = R I^2 dt - \Pi I dt - \Theta I dt$$

exprime que la chaleur totale dégagée dans le circuit (second membre) est égale à la perte d'énergie (chaleur de combinaison due aux réactions chimiques dans la pile.

Ainsi, dans la pile Daniell, au passage d'un coulomb ($I dt = 1$ unité pratique) correspond : 1° la dissolution d'un équivalent de zinc ($0^{\text{gr}},000340$) dans l'acide sulfurique, qui *dégage* $0^{\text{calorie}},568$; 2° le dépôt d'un équivalent de cuivre ($0^{\text{gr}},000331 = \frac{32}{96600}, §79$) provenant de la décomposition du sulfate de cuivre, qui *absorbe* $0^{\text{cal}},304$. La réaction chimique se réduisant sensiblement à cette substitution d'un équivalent de zinc à un équivalent de cuivre dans un équivalent de sulfate, la chaleur de réaction correspondante $\Delta I dt = \Lambda$ est donc, d'après les données de la thermochimie, égale à :

$$0^{\circ},568 - 0^{\circ},304 = 0^{\circ},264$$

ou bien en unités pratiques :

$$\Lambda = 4,17 \times 0,264 = 1^{\text{ohm}},10$$

Favre et Silbermann ont vérifié la concordance entre la chaleur dégagée dans l'ensemble du circuit et le chiffre prévu Λ . Ils ont de plus constaté que *si l'on impose au courant un certain travail dT la quantité de chaleur dégagée dans le circuit diminue d'autant pour un même poids d'électrolyte décomposé.*

CHAPITRE IX

FORCES ÉLECTROMOTRICES DES PILES

84. Discontinuité du potentiel électrique aux surfaces de séparation des corps. — Par définition (§ 40) la chute de potentiel entre deux points a et b est égale à :

$$V_a - V_b = \int_C h \, ds \cos (h, ds) \quad (1)$$

C désignant un chemin quelconque allant de a à b . Supposons que C soit un chemin tracé à l'intérieur d'un circuit conducteur fermé de résistance R , où existe un courant permanent d'intensité I . Si C fait le tour complet du circuit, les points a et b étant confondus, on a (§ 39) :

$$V_a - V_b = R_{ab} I = R I$$

R_{ab} désignant la résistance du circuit comprise entre les points a et b , c'est-à-dire la résistance totale R . Mais RI est égal, d'après la formule (11') du paragraphe 82, à la valeur $(\Lambda + \Pi + \Theta)$ de la force électromotrice du circuit. Donc :

$$\int_C h \, ds \cos (h, ds) = \Lambda + \Pi + \Theta = E \quad (2)$$

Puisque cette intégrale prise le long d'un contour fermé C n'est pas nulle, le potentiel électrique du champ n'est pas uniforme. Toutefois dans chacun des conducteurs homogènes dont se compose le circuit, le potentiel est uniforme, c'est-à-dire que l'intégral $\int_c h \, ds \cos (h, ds)$ prise le long d'une ligne fermée y est nulle

mais, dès que la ligne C passe à travers plusieurs substances différentes, il n'en est plus forcément ainsi.

En modifiant comme il suit la définition du potentiel, nous allons le rendre uniforme dans tout le champ.

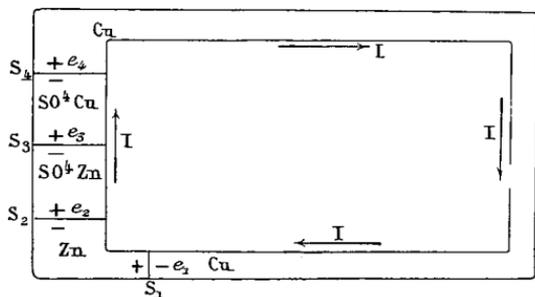


Fig. 37.

Nous supposons d'abord que la température soit constante tout le long du circuit, de telle sorte que Θ soit nul. Soient : $S_1 S_2 S_3 \dots$ les sections transversales du circuit qui sé-

parent les corps de natures différentes (au nombre de quatre dans la figure schématique 37 de la pile Daniell). La section S_2 , par exemple, en raison des réactions chimiques et de l'effet Peltier qui s'y produisent, fournit à la force électromotrice totale E un terme $\lambda + \pi = e_2$. De même les autres sections fournissent des termes $e_1 e_3 e_4 \dots$

Ceci posé, attribuons à chacune de ces surfaces $S_1 S_2 \dots$ une face négative (par où entre le courant I) et une face positive; et convenons de la considérer comme une surface de discontinuité, où le potentiel croît brusquement de e_1 (ou $e_2 e_3 \dots$) lorsqu'on passe d'un point de sa face négative au même point de sa face positive. Nous donnerons à cet accroissement brusque de potentiel le nom de *force électromotrice* de la surface S_1 (ou $S_2 S_3 \dots$).

La définition du potentiel se trouvant modifiée par cette discontinuité qu'on lui attribue à la surface de séparation de deux corps différents, la formule (1) doit être remplacée par :

$$V_a - V_b = \int_C h, ds \cos (h, ds) - \sum e \quad (3)$$

C désignant toujours un chemin allant de a à b , et $\sum e$ la somme des forces électromotrices des surfaces de discontinuité que traverse ce chemin. Si C fait le tour complet d'un circuit conducteur fermé, on a $\sum e = E$; et, d'après la formule (2), on voit ainsi que $V_a - V_b$

est nul quand a et b sont confondus, ce qui est bien la condition d'uniformité du potentiel.

Passons maintenant au *cas général où la température est variable le long du circuit*. Divisons la longueur totale de ce circuit en éléments très courts 1, 2, 3... n ; les coefficients $\theta_1 \theta_2 \dots \theta_n$ de l'effet Thomson dans ces divers éléments ont une somme égale à Θ . En attribuant à la section transversale moyenne de chacun de ces éléments une force électromotrice (ou discontinuité de potentiel), égale à θ_1 (ou $\theta_2 \theta_3 \dots \theta_n$), on généralisera le procédé ci-dessus, et la formule (3) de définition du potentiel subsistera.

Remarquons du reste que *la force électromotrice de chaque surface de séparation $S_1 S_2 \dots$ dans le circuit considéré ne dépend que de la nature des corps en contact et de leur état physique*; elle est absolument indépendante du degré de conductibilité des diverses parties du circuit, où peut être intercalé un isolant (par exemple le diélectrique d'un condensateur). Et comme des forces électromotrices de cette nature paraissent appartenir d'une manière générale à la surface de séparation de deux corps quelconques, bons ou médiocres conducteurs (§ 74), nous généraliserons l'uniformité du potentiel électrique dans tout le champ en attribuant à la surface de contact de deux substances quelconques la force électromotrice ou discontinuité qui lui convient. *Les formules (2) et (3) s'étendront donc à des circuits C tracés dans n'importe quelle partie du champ.*

Les forces électromotrices dont nous venons de parler sont généralement de l'ordre de grandeur de 1 volt. On peut donc les négliger dans l'étude d'un champ électrostatique où l'on a des différences de potentiel se chiffrant par centaines et milliers de volts.

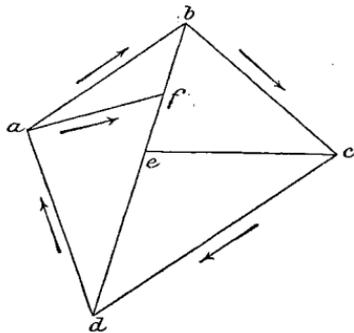


Fig. 38.

85. Application aux réseaux de conducteurs. — Considérons un réseau de N conducteurs linéaires (ou branches) $ab, bc, \dots ef$ reliés entre eux en n points (ou sommets) $a, b \dots f$, comme le montre la figure 38. Dans ce réseau formons un circuit fermé ($abcda$,

par exemple) à l'aide de branches ayant des résistances respectives R_1, R_2, \dots , contenant des forces électromotrices E_1, E_2, \dots , et où existent des courants d'intensités I_1, I_2, \dots . Appliquons à ce circuit fermé l'équation (2), en remarquant que les parties de l'intégrale $\int_c h ds \cos(h, ds)$ relatives aux diverses branches sont respectivement égales à $R_1 I_1, R_2 I_2, \dots$ (§ 39); on aura :

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 + \dots = E_1 + E_2 + \dots$$

ou, pour abrégier :

$$\Sigma (RI - E) = 0 \quad (4)$$

Une équation semblable pourra être écrite pour chacun des circuits fermés que le réseau permet de constituer; mais on voit facilement que l'on n'obtient en tout que $(N - n + 1)$ équations distinctes de cette forme.

D'autre part si, autour du point a de jonction de plusieurs branches ab, af, ad (fig. 38 et 39) on trace une surface SS qui coupe chacune de ces branches, la somme des intensités de courant (permanent) entrant à l'intérieur de S par ces diverses

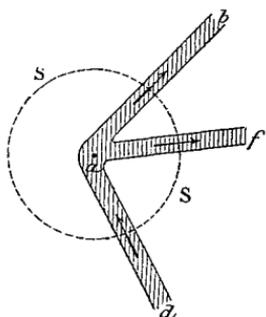


Fig. 39.

branches est nulle (§ 43), ce que l'on peut écrire :

$$\Sigma I = 0 \quad (5)$$

Une telle équation est applicable à chacun des n sommets a, b, \dots f du réseau; mais, en ajoutant membre à membre les n équations ainsi obtenues, on trouve : $0 = 0$. Les n équations se réduisent donc à $(n - 1)$.

Les $(N - n + 1)$ équations (4) et les $(n - 1)$ équations (5) forment en tout N équations, qui permettent de calculer les intensités du courant dans les N branches du réseau, quand on connaît les résistances et les forces électromotrices. Ce sont les équations bien connues dues à Kirchoff.

86. Sur l'état du champ électrique dans la couche de séparation de deux corps. — Lorsqu'un champ électrique existe dans un

milieu composé de corps de natures différentes, les lois de la distribution électrique nous font connaître l'état du champ dans tout l'espace ou les corps sont homogènes (chap. VI et VII). A la surface S de séparation de deux corps A et B, elles nous apprennent que l'intensité \bar{h} du champ varie d'une manière discontinue, cette discontinuité portant sur la composante de h normale à la surface, mais non sur la composante tangentielle. Ainsi, pour deux isolants A et B, les composantes normales (h_n et h'_n) de h sur les deux faces de S sont liées entre elles par la relation (18) du paragraphe 56 :

$$k h_n = k' h'_n$$

Dans le cas où A et B sont deux conducteurs, on a (§ 43) :

$$c h_n = c' h'_n$$

Enfin, si A est un isolant, B un conducteur, h_n est nul, h'_n pouvant être quelconque (§ 38).

Au lieu de supposer qu'il existe une surface S de discontinuité absolue entre deux corps A et B, il paraît plus rationnel d'imaginer qu'il existe entre eux une couche de séparation extrêmement mince, hétérogène, où l'intensité du champ électrique varie très rapidement, mais d'une manière continue, de \bar{h} à \bar{h}' . Ceci est conforme au principe de continuité que l'on admet dans toute la physique ; du reste, la couche de séparation a forcément un volume fini, puisqu'elle est le siège de phénomènes (effets capillaires, effet Peltier...) qui mettent en jeu des quantités importantes d'énergie. Mais, comme nous ne possédons aucun moyen d'explorer le champ électrique, *il nous est impossible d'y connaître la loi de variation de l'intensité h.*

Ce que l'expérience nous permet d'étudier dans la couche en question, c'est la réaction chimique et l'effet Peltier (et les forces capillaires, V. § 89). Nous compléterons par les observations suivantes ce que nous avons dit à ce sujet à la fin du paragraphe 82.

Considérons un conducteur où existe un courant *permanent* I, et dans ce conducteur une région U limitée par une surface fermée Σ . La quantité d'énergie électrique W_1 qui pénètre de l'extérieur à l'intérieur de Σ pendant l'unité de temps ne dépend que de

l'état actuel du champ sur cette surface, et d'autre part elle est égale à la quantité d'énergie électrique dissipée dans la région U du circuit conducteur. Cette quantité d'énergie W_1 , toujours la même pour un même état du champ sur une même surface Σ , sera utilisée de différentes manières suivant la nature du corps occupant la région U. En voici quelques exemples :

1^{er} cas : U est un conducteur homogène, de résistance r ; alors W_1 est entièrement dissipée en chaleur suivant la loi de Joule : $W_1 = rI^2$.

2^e cas : U se compose de deux conducteurs homogènes non électrolysables, reliés par une soudure S ; l'énergie électrique W_1 est encore dissipée en chaleur, mais en partie dans le volume U suivant la loi de Joule, en partie à la soudure S suivant la loi de l'effet Peltier : $W_1 = rI^2 - \pi I$.

3^e cas : Si au contraire l'un de ces deux conducteurs est électrolysable, il y a en outre une réaction chimique, et l'on a : $W_1 = rI^2 - \pi I - \lambda I$. La partie πI de l'énergie électrique transformée en chaleur se répandra ensuite, par conductibilité calorifique, aux environs de la surface de contact S ; *quant à la partie λI transformée en énergie chimique, elle restera localisée sur cette surface.*

4^e cas : Imaginons encore le cas où la partie U du conducteur serait interrompue par le diélectrique et formerait un condensateur (le courant I ne serait plus qu'approximativement *permanent*) ; alors on aurait : $W_1 = rI^2 + \frac{\partial W}{\partial t}$, la partie $\frac{\partial W}{\partial t}$ restant à l'état d'énergie électrique et constituant l'accroissement d'énergie du condensateur par unité de temps.

En resserrant la surface Σ de telle sorte qu'elle se réduise à la surface de la couche mince de séparation de deux corps A et B, le terme rI^2 disparaît dans les formules précédentes, et l'énergie électrique W_1 qui entre à l'intérieur de Σ y subit une ou plusieurs des transformations que nous venons de décrire, suivant la nature des corps en présence. *Quant au mode de transformation de l'énergie d'une forme en une autre, il nous échappe entièrement.*

Hypothèse de la couche double électrique. — Dans la théorie des fluides électriques, le potentiel $V = \Sigma \frac{m}{r}$ (§ 19) est forcément

uniforme et continu dans tout le champ. Pour concilier cette propriété avec la relation (2), on a imaginé qu'il existe à la surface de séparation de deux corps A et B une *différence de potentiel au contact* $V_A - V_B$, ayant même valeur ($\lambda + \pi$) que la *discontinuité* du potentiel définie au paragraphe 84, mais ayant un sens très différent de celle-ci. L'existence de cette différence de potentiel *démontrerait* qu'il y a dans l'épaisseur minimale ϵ de la couche de séparation des deux corps un champ électrique ayant pour intensité moyenne :

$$h = \frac{V_A - V_B}{\epsilon}$$

Cette intensité, en raison de la petitesse de ϵ ($\frac{1}{30\,000^{\text{e}}}$ de micron environ) serait incomparablement plus grande que celle qui provoque l'étincelle dans n'importe quelle substance. La couche de séparation de A et de B se comporterait ainsi comme un condensateur plan, dont la capacité $C = \frac{kS}{4\pi\epsilon}$ (§ 37) serait de l'ordre de grandeur de 300 000 microfarads par mètre carré (V. § 88), et dont les armatures posséderaient des charges de masses électriques égales à $\pm C (V_A - V_B)$. Cette hypothèse de la *couche double électrique* à la surface de contact de deux corps a été développée par Helmholtz, qui l'explique par l'attraction exercée par la matière sur l'électricité. Aucun fait expérimental ne la justifie.

87. Mesure des forces électromotrices de contact. — La donnée des coefficients π (effet Peltier) et λ (effet chimique) à la surface de contact de deux corps fait connaître la force électromotrice e ($= \lambda + \pi$), qui correspond à un état physique bien défini de cette surface. Pour déterminer ces coefficients, on a imaginé diverses méthodes.

Ainsi on a vu au paragraphe 74 comment le coefficient π peut être mesuré à la soudure de deux conducteurs, par le dégagement de chaleur qu'y produit un courant I. On peut encore mesurer l'effet Peltier au contact d'un solide et d'un liquide électrolyisable, malgré la réaction chimique qui s'y développe (§ 78). On a même des données sur l'effet Peltier au contact du charbon et de l'air dans l'arc voltaïque.

Quant à la force électromotrice λ due à une réaction chimique au contact de deux corps, on peut en principe la déduire de données thermo-chimiques ; mais il est à remarquer que λ varie avec l'état de la surface de contact. Nous verrons au paragraphe 88 comment on peut étudier la loi de ces variations.

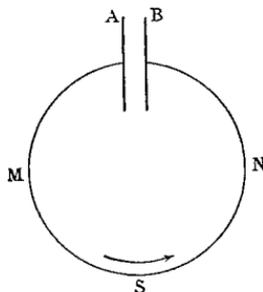


Fig. 40.

Méthode de mesure à l'électromètre. —

Supposons que, pour mesurer la force électromotrice de la soudure S de deux fils métalliques M et N — cuivre et zinc, par exemple (fig. 40), — on les relie aux deux plateaux A et B d'un électromètre

Thomson, dont le plateau A est formé du métal M et le plateau B du métal N. On constate que l'électromètre accuse une certaine différence de potentiel v ; quel est le sens de cette indication ?

Appliquons l'équation (2) du paragraphe 84 à une ligne C faisant le tour du circuit AMSNB et se fermant par le diélectrique. L'intégrale $\int h ds \cos(h, ds)$ est nulle dans le conducteur (où $h = 0$), et égale à v dans la partie de la ligne C qui va de B à A par le diélectrique. D'autre part, C traverse les surfaces de séparation : 1° des deux métaux en S ; 2° du métal N et de l'air en B ; 3° de l'air et du métal M en A ; nous désignerons par $M | N$, $N | A$, $A | M$ les forces électromotrices de contact sur ces surfaces. L'équation (2) devient ainsi :

$$v = M|N + N|A + A|M$$

La mesure de v ne saurait donc faire connaître la force électromotrice $M | N$ de contact des métaux M et N, puisqu'on a introduit deux autres inconnues $N | A$ et $A | M$. C'est ce que montrent bien les chiffres suivants : Si M et N sont du cuivre et du zinc, la mesure de l'effet Peltier donne : $M | N = -0^{\text{vol}},00043$ (Le Roux), tandis que la valeur de v serait de $0^{\text{v}},50$ à $0^{\text{v}},85$, suivant les expérimentateurs.

D'une manière générale, on voit que *l'électromètre mesure la somme des forces électromotrices e_1, e_2, e_3, \dots des surfaces de contact*

que rencontre une ligne C analogue à celle que nous venons de tracer dans le cas de la figure 40 (en supposant qu'il n'y ait pas de courant) : $v = e_1 + e_2 + \dots$. Si l'on peut faire varier l'une de ces forces électromotrices e_1 sans faire varier les autres e_2, e_3, \dots , la variation observée de v sera égale à celle de e_1 . On pourra donc déterminer la *loi de variation* d'une seule force électromotrice e_1 à l'aide de l'électromètre ; nous allons en donner un exemple.

88. Force électromotrice de polarisation. — La force électromotrice $e = M | L$ qui existe sur une électrode métallique M au contact d'un liquide L dépend de l'état physique de cette électrode et du dépôt d'ions déjà formé par l'électrolyse (§ 82). A circuit ouvert, l'électrode tend, par suite du phénomène de *dépolarisation spontanée*, vers un état limite caractérisé par un dépôt d'ions de densité déterminée et par une force électromotrice *normale* e_0 .

Cette force électromotrice e_0 est la même en tout point d'une même électrode ; car si en deux points M' et M'' elle avait des valeurs différentes e'_0 et e''_0 , la formule (2) :

$$\int_C h \, ds \cos (h, ds) = E = e'_0 - e''_0 \neq 0$$

appliquée à un circuit fermé C, tracé dans le voisinage de l'électrode et passant par les points M' et M'', montre que l'intensité h du champ ne serait point nulle dans le conducteur, même à circuit ouvert. Il y aurait donc un courant secondaire local, qui aurait pour effet de réduire bientôt à zéro la différence $e'_0 - e''_0$. Pour la même raison, la force électromotrice e reste égale à chaque instant aux divers points d'une électrode, même lorsqu'elle varie avec le temps sous l'action d'un courant, pourvu que ce courant ne soit pas trop intense et que la formation du dépôt d'ions ne soit pas trop rapide. Il en résulte que la *densité de ce dépôt*, dont la force électromotrice e est fonction, *est uniforme sur toute la surface de l'électrode*.

Loi de variation de e. — Ceci posé, considérons, pour fixer les idées, un voltamètre à eau et à électrodes de platine, que l'on a polarisé par un courant primaire jusqu'au moment où les gaz O

et H commencent à se dégager. La force électromotrice $e = M | L$ de l'électrode M polarisée par l'hydrogène a alors une valeur E_1 , qui ne varierait plus si l'on continuait à faire passer le courant primaire, puisque l'état de l'électrode resterait constant. Supposons alors que l'on envoie un courant de sens inverse au précédent. Le poids q_1 d'hydrogène sur l'électrode M diminuera peu à peu depuis sa valeur initiale jusqu'à zéro, et la force électromotrice e variera en conséquence de E_1 à une certaine valeur E_0 . Puis l'oxygène se déposant à son tour, e variera de E_0 jusqu'à une certaine valeur limite E_2 , qu'elle atteindra lorsque le

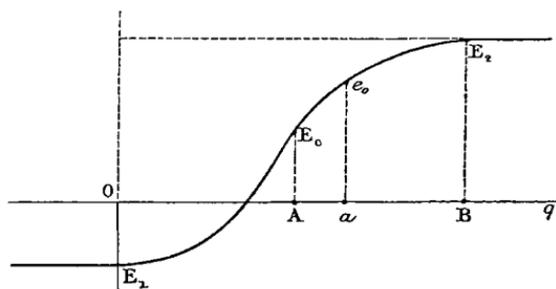


Fig. 41.

gaz commencera à se dégager, n'étant plus absorbé par le platine ; car à partir de ce moment l'état de l'électrode restera constant. Dans la première de ces deux phases, e est fonction du poids q_1 d'hydrogène existant sur l'électrode M : $e = \varphi(q_1)$; dans la seconde, e est fonction du poids q_2 d'oxygène : $e = \psi(q_2)$. Les fonctions φ et ψ peuvent dépendre en outre de la nature de l'électrode M.

Ces résultats peuvent être représentés par une courbe (fig. 41). Portons en abscisses le poids q d'ion existant sur l'électrode M : le poids q_2 d'oxygène étant porté à partir de A dans le sens Aq , et le poids q_1 d'hydrogène étant porté à partir de A dans le sens inverse AO . Les ordonnées correspondantes représentent la valeur de e (à une constante inconnue près). L'ordonnée e varie entre les limites E_1 et E_2 , suivant une loi inconnue a priori. Nous avons figuré la force électromotrice normale e_0 , en supposant qu'elle corresponde à un dépôt d'oxygène ($q_1 = Aa$).

On voit que, lorsque le voltamètre a son maximum de polarisa-

tion sous l'action d'un courant primaire, il y a à l'anode une force électromotrice $M | L$ égale à E_2 (opposée au courant) et à la cathode une force électromotrice $M | L$ égale à E_1 . En tenant compte de leurs sens, le voltamètre a une force électromotrice totale ($E_2 - E_1$) opposée au courant. Il faut donc, pour produire la décomposition de l'électrolyte d'une manière continue, une force électromotrice extérieure E supérieure à $E_2 - E_1$ (2 volts environ pour l'eau). Si $E < E_2 - E_1$, l'électrolyse de l'eau commencera, puis s'arrêtera avant le dégagement des gaz dès que la force électromotrice du voltamètre aura atteint la valeur E .

Capacité de polarisation voltaïque. — Sur une électrode M , dont la surface est S , la quantité q d'ions déposée à un instant donné est uniformément répartie, et la force électromotrice e dépend évidemment, non de la quantité totale q , mais de la densité superficielle $\delta = \frac{q}{S}$; soit $e = f(\delta)$. Un accroissement dq du dépôt, correspondant au passage d'une quantité Idt d'électricité ($dq = \varepsilon \cdot Idt$), donne lieu à un accroissement de de la force électromotrice, et l'on a :

$$de = f'(\delta) d\delta = f'(\delta) \frac{dq}{S} = \frac{\varepsilon f'(\delta)}{S} Idt$$

d'où :

$$\frac{Idt}{de} = \frac{S}{\varepsilon f'(\delta)} = CS$$

Le rapport CS de la quantité d'électricité Idt à l'accroissement de de la force électromotrice est comparable à une capacité électrostatique. On lui donne le nom de *capacité de polarisation voltaïque* de l'électrode considérée. Elle est proportionnelle à la surface S de cette électrode, et dépend de la densité δ du dépôt d'ions.

Si les deux électrodes M_1 et M_2 d'un voltamètre (à eau par exemple) ont des surfaces S_1 et S_2 , à une même quantité d'électricité Idt , qui les traverse simultanément, correspondent des variations de forces électromotrices égales (au signe près) à :

$$de_1 = \frac{Idt}{C_1 S_1} \text{ sur l'électrode } M_1$$

$$de_2 = \frac{Idt}{C_2 S_2} \text{ sur l'électrode } M_2$$

Les capacités C_1 et C_2 par unité de surface ne différant pas énormément l'une de l'autre, si S_2 est par exemple 10 000 fois plus grand que S_1 , on voit que de_2 sera négligeable devant de_1 ; et la variation de de la force électromotrice du voltamètre se réduira sensiblement à la variation de, de la force électromotrice de l'électrode M_1 , qui pourra, grâce à cet artifice, être mesurée au moyen d'un électromètre (§ 87).

En réalité, on ne mesure point les abscisses q de la figure 41. Ce que l'on détermine, ce sont les quantités d'électricité $\int Idt$ qui correspondent à ces quantités q de dépôt; puis on calcule ces dépôts par les formules :

$$q_1 = \varepsilon_1 \int Idt \quad (\text{pour l'hydrogène})$$

$$q_2 = \varepsilon_2 \int Idt \quad (\text{pour l'oxygène})$$

Cette proportionnalité de q à $\int Idt$ n'est du reste point rigoureuse, à cause de la *dépolarisation spontanée* qui se produit pendant la durée du passage de la quantité d'électricité $\int Idt$ et a pour effet de donner des valeurs calculées de q trop fortes pour les valeurs de e mesurées simultanément. L'erreur qui en résulte doit être corrigée¹. La courbe de la force électromotrice e en fonction de $\int Idt$ n'a pas de point anguleux, c'est-à-dire que la capacité C de polarisation voltaïque varie d'une manière continue avec Idt . Comme ε_2 est 8 fois plus grand que ε_1 , la courbe de la figure 41 aurait un point anguleux en E_0 ; on supprimerait cet angle en changeant l'échelle des abscisses d'une moitié de la courbe.

Le coefficient angulaire $C = \frac{1}{de} \frac{dt}{dt}$ reste sensiblement constant sur une partie assez étendue de la courbe. M. Blondlot l'a trouvé voisin de 300 000 microfarads par mètre carré pour le contact platine-eau acidulée, aux environs du point e_0 de la force électromotrice normale.

89. Forces électrocapillaires. — Si un tube vertical, ouvert à ses

¹ V. Bouty, *Annales de Ch. et de Ph.*, 1894; Blondlot, Thèse, etc.

deux extrémités et terminé à l'extrémité inférieure par une pointe très effilée ou capillaire, contient un liquide tel que du mercure, celui-ci descend sous l'action de son poids, mais seulement jusqu'à une certaine distance de la pointe et reste en équilibre. En augmentant la pression au-dessus du liquide, on fait descendre celui-ci plus avant dans la partie capillaire, et l'on arrive, au moyen d'une pression suffisante, à produire l'écoulement continu.

Lorsque le mercure est en équilibre dans le tube, il est terminé dans la pointe par une surface convexe (ménisque) dont la position varie quelquefois sans cause apparente. M. Lippmann a montré que la cause est toujours électrique et que, pour maintenir invariable la position du ménisque, il suffit de maintenir constante la force électromotrice de polarisation qui existe à la surface de séparation du mercure et du fluide (air ou liquide) qui baigne le ménisque. Prenons comme exemple l'électromètre capillaire de Lippmann¹; la colonne de mercure contenue dans le tube vertical est en contact, par le ménisque inférieur, avec de l'eau acidulée (1/6° d'acide sulfurique).

On démontre, dans la théorie de la capillarité², que la surface de séparation de deux corps (mercure et eau acidulée, par exemple) est soumise à une force, dite capillaire, qui, en un point quelconque, est normale à cette surface et a pour grandeur, par unité d'aire :

$$p = A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = KA$$

R_1 et R_2 désignent les rayons de courbure principaux de la surface au point considéré, et A une constante qui ne dépend que de l'état de la couche mince de séparation des deux corps et qui représente l'énergie capillaire par unité de surface. En supposant R_1 et R_2 de même signe, la force p est dirigée vers les centres de courbure, c'est-à-dire *dans le sens de la concavité*.

En reliant métalliquement le mercure et l'eau acidulée à deux points extérieurs entre lesquels est maintenue une différence de potentiel électrique e (assez faible), on aura un courant de

¹ Lippmann, Thèse, 1875.

² Violle, *Cours de Physique*. t. I; Rééal, etc.

minime durée, qui cessera dès que la force électromotrice de polarisation créée sur le ménisque de l'électromètre sera égale à e . En même temps le ménisque remontera, par exemple, d'une certaine hauteur dans le tube ; et, pour le ramener à sa position initiale (où nous supposons que la courbure K reprend une valeur uniforme), on devra accroître la pression de l'air au-dessus de la colonne du mercure. L'accroissement connu de pression ainsi produit est équilibré par un accroissement égal δp de la force capillaire qui tend à faire remonter la colonne ; on en conclut à une variation δA de la constante capillaire A ($\delta p = K\delta A$) :

$$\delta A = A \frac{\delta p}{p}$$

M. Lippmann, faisant varier (de 0 à 2 volts) la force électromotrice e de polarisation créée sur le ménisque (servant de cathode), a construit une courbe en portant e en abscisse et δp (ou δA) en ordonnée. Il a trouvé que A croît à partir de sa valeur initiale A_0 (pour $e = 0$) jusqu'à un maximum A_m (pour $e = e_m = 0^v 904$), puis décroît ensuite. Sur une certaine étendue la courbe se confond sensiblement avec une parabole à axe vertical, et A est par conséquent une fonction du second degré de e :

$$A = A_m - \frac{1}{2} C (e - e_m)^2 = A_m - \frac{1}{2} CV^2$$

Dans l'hypothèse de la couche double électrique (§ 86), le terme $1/2 CV^2$ est l'énergie électrique (par unité de surface) du champ compris entre le mercure et l'eau acidulée, et C la capacité du condensateur formé par la couche mince de séparation des deux corps. Du reste, le coefficient C , qui a pour valeur, d'après la formule précédente :

$$C = - \frac{\partial^2 A}{\partial e^2}$$

a été déterminé par M. Lippmann, qui l'a trouvé égal à 300 000 microf. par mètre carré environ (même grandeur que la capacité de polarisation au contact du platine et de l'eau acidulée, § 88). Quant à $V (= e - e_m)$, ce serait la *différence de potentiel vraie* de la couche double entre le mercure et l'eau acidulée,

tandis que e ne serait qu'une différence de potentiel apparente. Enfin la charge du condensateur serait CV et représenterait la quantité d'électricité $\int Idt$ définie au paragraphe 88.

On démontre d'ailleurs¹ que si entre deux corps conducteurs séparés par une couche diélectrique très mince et formant un condensateur de capacité C , on établit un champ électrique correspondant à une différence de potentiel V , ce condensateur est soumis, par unité de surface de la couche, à une force électrique qui est normale à celle-ci et égale au produit de sa courbure K par l'énergie électrique $1/2 CV^2$. Cette force est d'ailleurs dirigée *dans le sens de la convexité*. Dans l'hypothèse de la couche double électrique, une telle force devrait exister et se superposer à la force capillaire $K A_m$ qui est de sens opposé, pour donner comme résultante, conformément à l'expérience :

$$p = K \left(A_m - \frac{1}{2} CV^2 \right) = KA$$

Malgré la simplicité de cette explication des forces électrocapillaires, on n'en saurait conclure que l'énergie $1/2 CV^2$ existe réellement sous la forme électrique dans la couche de séparation des deux corps. D'abord le coefficient C ($= \frac{Idt}{de}$), défini comme capacité de polarisation voltaïque au paragraphe 88 n'est sensiblement constant qu'entre des limites très restreintes; dès que la force électromotrice e atteint son maximum, C devient infini et *n'a plus de sens*. En second lieu, lorsque dans un voltamètre une électrode possédant une force électromotrice e ($= \lambda + \pi$) est traversée, en sens inverse de cette force électromotrice, par une quantité d'électricité Idt , on sait (§ 82 et 86) qu'il y arrive de l'extérieur une quantité d'énergie $e Idt$; une partie πIdt de cette énergie se dégageant sous forme de chaleur est transmise par conductibilité à l'espace environnant, et l'autre partie λIdt , qui est de l'énergie chimique, reste seule localisée sur la surface *actuelle* de l'électrode. (Cette surface se déplace quand l'épaisseur du dépôt d'ions varie.) Pour expliquer l'existence du champ électrique (couche double) dont l'énergie $1/2 CV^2$ varie avec la

¹ Vaschy, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, § 52, 91, 92.

force électromotrice e , il faudrait supposer que l'apport extérieur d'énergie $\lambda I dt$, qui continue pendant toute la durée de l'électrolyse, a successivement deux effets différents : 1° au début de l'électrolyse, et tant que e varierait, il servirait à accroître l'énergie électrique de la couche double ; 2° dès que e aurait atteint son maximum, il servirait à accroître l'énergie chimique. Cette hypothèse ne paraît pas vraisemblable, et rien ne démontre l'existence de la couche double.

CALCUL THÉORIQUE DES FORCES ÉLECTROMOTRICES

90. Application des principes de la thermodynamique. — Les deux principes fondamentaux de la thermodynamique vont nous permettre d'établir une relation importante entre les diverses forces électromotrices qui existent dans le circuit d'une pile voltaïque ou thermo-électrique. Pour appliquer le deuxième principe, nous devons nous borner aux cas où les phénomènes sont *réversibles*. Ainsi nous n'examinerons point le cas des piles où se produisent soit une attaque locale (parasite) des électrodes, soit un précipité insoluble, soit une évaporation du liquide à l'air libre, soit un phénomène quelconque dont le sens ne change point en même temps que le sens du courant. Nous devons également éviter l'intervention de la chaleur $R I^2 dt$ dégagée dans le circuit en vertu de la loi de Joule, puisqu'elle ne change pas de signe quand le sens du courant est interverti.

Par contre, les pertes d'énergie chimique ΛIdt ou calorifique $(\Pi + \Theta) Idt$ changeant de signe avec le sens du courant et étant, par conséquent, des effets réversibles, nous pourrions étudier les forces électromotrices Λ, Π, Θ .

Pour produire à volonté des courants d'un certain sens ou d'un sens opposé dans un circuit conducteur contenant une force électromotrice totale E , nous supposons intercalé dans ce circuit un condensateur plan à plateaux mobiles. La charge de ce condensateur s'accroît ou diminue, suivant que l'on rapproche ou que l'on éloigne les plateaux l'un de l'autre. A un accroissement dq de cette charge, pendant un temps infiniment petit dt , correspond

dans le circuit un courant d'intensité $I = \frac{dq}{dt}$ (§ 54); et la somme des pertes d'énergie chimique ou calorifique qui en résulte aux diverses soudures ou électrodes du circuit est égale à $EI dt = E dq$. Ceci est vrai quel que soit le signe de l'accroissement dq .

Cette énergie $EI dt$ fournie par la pile est transmise au condensateur, où elle se transforme de deux manières : 1° elle accroît l'énergie électrique du condensateur ; 2° elle subvient au travail des forces électriques pendant le rapprochement des plateaux. La chaleur $RI^2 dt$ dégagée en vertu de la loi de Joule peut être une fraction aussi minime que l'on veut de cette énergie $EIdt$, puisqu'on dispose de $I = \frac{dq}{dt}$, que l'on peut rendre excessivement faible, ce qui permet de réaliser *pratiquement* la condition de réversibilité du phénomène.

91. Piles voltaïques réversibles. — Soit A un système à température uniforme T, formé par une pile et deux conducteurs (d'un même métal) qui lui servent de pôles ; soit B le système des corps extérieurs, y compris un condensateur plan, dont les armatures sont reliées aux pôles de la pile. Si l'on rapproche ces armatures de manière à accroître de dq la charge du condensateur, le système A subira une perte $(\Lambda + \Pi) dq = E dq$ d'énergie chimique et calorifique (§ 90).

Restituons d'autre part la quantité de chaleur Πdq aux soudures pour ramener leur température à sa valeur initiale T ; puis élevons de dT la température uniforme du système A. Si l'on désigne par c la chaleur spécifique de A, on doit en somme fournir à ce système la quantité totale de chaleur (venant du système B) :

$$dQ = \Pi dq + cdT \quad (6)$$

L'énergie totale U du même système A se sera finalement accrue de la quantité $(-E dq + \Pi dq + cdT)$ ou :

$$dU = -\Lambda dq + cdT \quad (7)$$

Si A ne subit aucune autre modification que celle qui est due aux variations de q et de T, l'énergie U peut être considérée comme étant fonction seulement des variables q et T, l'électrolyse

étant réversible. Ecrivons donc que le second membre de (7) est une différentielle totale exacte (application du premier principe de la thermodynamique) :

$$-\frac{\partial \Lambda}{\partial T} = \frac{\partial c}{\partial q}$$

D'après le second principe (principe de Carnot), $\frac{dQ}{T}$ doit être également une différentielle totale exacte, T désignant la température absolue :

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\Pi}{T} \right) = \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{c}{T} \right) = \frac{1}{T} \frac{\partial c}{\partial q}$$

De ces deux équations on tire :

$$-\frac{\partial \Lambda}{\partial T} = T \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\Pi}{T} \right) = \frac{\partial \Pi}{\partial T} - \frac{\Pi}{T}$$

ou :

$$\Pi = T \frac{\partial}{\partial T} (\Lambda + \Pi) = T \frac{dE}{dT} \quad (8)$$

On peut encore écrire :

$$\Lambda = E - \Pi = E - T \frac{dE}{dT} \quad (9)$$

Vérifications expérimentales de la formule 9. — Pour le couple (zinc-sulfate de zinc-sulfate d'argent-argent) à 18° centigrades ($T = 273 + 18 = 291$), l'expérience donne :

$$\Lambda = 1^{\text{r}},9 \text{ (thermochimie, Berthelot)}$$

$$E = 1^{\text{r}},51 \quad \text{et} \quad \frac{dE}{dT} = -0^{\text{r}},0012 \text{ (Potier)}$$

d'où :

$$E - T \frac{dE}{dT} = 1^{\text{r}},86 = \Lambda$$

Voir d'autres vérifications expérimentales aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CIX, p. 937 (Chroustchhoff et Sitnikoff).

92. Piles thermo-électriques. — Soit *ab* (fig. 42) un conducteur linéaire, dont une section $T_1 T_2$ est formée d'un métal N, les sections *a* T_1 et T_2 *b* étant d'un autre métal M. Nous supposerons qu'au moyen

de sources convenables de chaleur (et de froid) on maintienne constantes les températures T_1 et T_2 des deux soudures, ainsi que la température T en chaque point du conducteur, malgré la

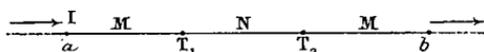


Fig. 42.

tendance qu'ont ces diverses températures à s'égaliser par suite de la conductibilité calorifique du conducteur ab . Soit A le système constitué par le conducteur ab et par ces sources de chaleur (on suppose : $T_a = T_b$).

Le conducteur ab constituant un couple thermo-électrique, reions à ses extrémités a et b les armatures d'un condensateur plan. Si l'on rapproche les armatures du condensateur, sa charge q s'accroît de $dq = E dC$, et la pile thermo-électrique fournit une quantité d'énergie égale à $E dq (= \Pi dq + \Theta dq)$. Pour réparer les pertes de chaleur supportées par les soudures T_1 ($\pi_{MN}^{T_1} dq$) et T_2 ($\pi_{NM}^{T_2} dq$) et par le reste du conducteur ab (Θdq), nous imaginerons de nouvelles sources de chaleur (ou de froid) convenablement disposées. Nous désignerons par B le système formé par le condensateur et par ces nouvelles sources.

Le système B fournit donc au système A les quantités de chaleur suivantes, positives ou négatives (§ 77) :

$$\pi_{MN}^{T_1} dq \text{ à la température } T_1 \text{ (première soudure),}$$

$$\pi_{NM}^{T_2} dq \text{ à la température } T_2 \text{ (deuxième soudure),}$$

$$\Theta dq = dq \int_{T_2}^{T_1} (\Pi_M - \Pi_N) dT$$

Cette dernière quantité est répartie le long du conducteur ab , à raison de $H_M dT$ sur une section (de métal M) le long de laquelle la température T s'accroît de dT .

La somme de ces quantités de chaleur fournies par le système B lui est restituée, dans le condensateur, sous forme de travail ou d'énergie électrique (transformable en travail) ; le système A n'a servi que d'intermédiaire. Ce phénomène est réversible, puisqu'un

déplacement égal et opposé de l'armature mobile du condensateur a pour effet de changer seulement le signe des quantités de chaleur, du travail et de la variation d'énergie électrique. On peut donc appliquer l'équation de Clausius (résultant du principe de Carnot) :

$$\int \frac{dQ}{T} = \frac{\pi_{MN}^{T_1}}{T_1} + \frac{\pi_{NM}^{T_2}}{T_2} + \int_{T_2}^{T_1} \frac{H_M - H_N}{T} dT = 0$$

En différentiant cette équation par rapport à T_1 , on a :

$$\frac{d}{dT_1} \left(\frac{\pi_{MN}^{T_1}}{T_1} \right) + \frac{H_M - H_N}{T_1} = 0 \quad (10)$$

ou :

$$\frac{\pi_{MN}^{T_1}}{T_1} = \frac{d}{dT} \left(\pi_{MN}^{T_1} \right) + H_M - H_N$$

Mais le second membre de cette formule représente le pouvoir thermo-électrique $\frac{dE}{dT_1}$ du couple (§ 77), puisque l'on a :

$$\left(E_{MN} \right)_{T_1}^{T_1} = \pi_{MN}^{T_1} + \pi_{NM}^{T_2} + \int_{T_2}^{T_1} (H_M - H_N) dT$$

Donc :

$$\pi_{MN}^T = T \frac{dE}{dT} \quad (11)$$

et d'après (10) :

$$H_M - H_N = -T \frac{d^2E}{dT^2} \quad (12)$$

D'après (11) et (12), la connaissance du pouvoir thermo-électrique du couple à toute température ferait connaître les coefficients π et $(H_M - H_N)$ des effets Peltier et Thomson.

Exemples : Couple fer-zinc, à 13° 8 ($T = 286^{\circ},8$), d'après les mesures de M. Bellati :

$$\pi_{MN} = 0^{\circ},00253 \quad T \frac{dE}{dT} = 0^{\circ},00235$$

Couple cuivre-sulfate de cuivre, à 12° 8 (Bouty) :

$$\pi_{MN} = 0^{\circ},242 \quad T \frac{dE}{dT} = 0^{\circ},218$$

La formule (11) se vérifie donc pour ces couples.

Cette même formule montre que l'effet Peltier a le même signe que le pouvoir thermo-électrique et doit, par conséquent, changer de signe à la température neutre (§ 78). Cette propriété a été vérifiée par une expérience qualitative de M. Le Roux dans le cas du couple cuivre-fer.

Si le métal N est du plomb, $H_N = 0$ (Le Roux), et (12) devient :

$$H_M = -T \frac{d^2E}{dT^2}$$

Exemple : Pour le couple fer-plomb, on a, en microvolts et degrés centigrades :

$$\frac{d^2E}{dT^2} = 0,0487. (\text{Tait})$$

Donc, à 50° centigrades : ($T = 323$), $H_M = -15,7$, et le coefficient Θ de l'effet Thomson dans le fer, entre 0 et 100° centigrades aurait pour valeur :

$$\int_{273}^{373} H_M dT = 0,00157$$

il serait du même ordre de grandeur que la force électromotrice du couple fer-plomb entre 0° et 100°.

CHAPITRE X

PROPRIÉTÉS DES AIMANTS

93. Equivalence des courants et des aimants. — L'exploration du champ magnétique du courant (§ 69) nous a fourni deux résultats importants :

1° La connaissance d'une cause créatrice du champ magnétique (champ défini au moyen de l'aimant d'épreuve); cette cause est l'existence, dans certains corps, d'un *appel d'énergie électrique* caractérisé par le vecteur i (densité du courant ou, plus généralement, apport d'induction électrique);

2° Les lois de la distribution magnétique dans les corps où n'existe pas cette cause créatrice du champ :

$$\frac{\partial X'}{\partial x} + \frac{\partial Y'}{\partial y} + \frac{\partial Z'}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial Y'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial y} = \frac{\partial Z'}{\partial x} - \frac{\partial X'}{\partial z} = \frac{\partial X'}{\partial y} - \frac{\partial Y'}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

Elles expriment que le développement d'un champ magnétique stable dans ces corps n'y crée ni masses magnétiques ($\rho' = 0$), ni masses vectorielles magnétiques ($\mu' = 0$). C'est là *une propriété magnétique de ces corps*, indépendante de la nature de la cause extérieure qui a donné naissance au champ. On doit toutefois faire une exception : 1° pour les corps que nous avons exclus de cette étude au paragraphe 67 : fer, nickel, cobalt ; 2° pour les aimants permanents, dans lesquels existe évidemment une autre cause créatrice de champ magnétique.

Comme nous ne connaissons pas d'aimant fluide, il n'est pas possible d'explorer le champ magnétique à l'intérieur d'un aimant.

Si donc nous faisons une hypothèse quelconque sur l'état de ce champ et sur la cause qui le produit (existence de masses magnétiques ou de masses vectorielles magnétiques dans le volume de l'aimant), *cette hypothèse ne saurait être confirmée ni infirmée par l'expérience*. Rien ne nous empêche d'imaginer, par exemple, que la distribution de l'intensité $(X' Y' Z')$ du champ à l'intérieur de l'aimant satisfait aux équations (2), c'est-à-dire que l'aimant n'a pas de masses vectorielles magnétiques ($\mu' = 0$) et ne contient, par conséquent, comme causes créatrices du champ, que des *masses magnétiques*; ceci est l'*hypothèse de Coulomb* sur la constitution des aimants. Une autre hypothèse, *celle d'Ampère*, revient au contraire à supposer qu'il n'y a que des masses vectorielles magnétiques; en outre, pour Ampère, ces masses vectorielles sont des éléments de courants particuliers ($\overline{\mu'} = \vec{i}$, § 69 et 70) circulant dans les molécules de l'aimant, hypothèse certainement inexacte et qu'il est inutile d'ajouter à la première.

L'équivalence des hypothèses de Coulomb et d'Ampère sur les aimants a été démontrée mathématiquement par Ampère lui-même. Le principe général de l'*équivalence des courants et des aimants*, auquel la théorie des actions à distance a prêté une certaine importance, résulte de la simple constatation suivante :

Si l'état d'un champ magnétique *est connu à l'extérieur d'une certaine région U* et inconnu à l'intérieur de U, on peut imaginer à volonté que U contient seulement des masses magnétiques ($\mu' = 0$) ou seulement des masses vectorielles magnétiques ($\rho' = 0$); dans le premier cas on appellera U *un aimant*, dans le second cas on l'appellera *un courant*. Il est clair que *les actions fictives que cet aimant et ce courant sont censés exercer à l'extérieur de U sont équivalentes*; l'équivalence, bien entendu, ne s'étend pas à l'intérieur de U, puisqu'une simple distribution de masses et une simple distribution de masses vectorielles y correspondent forcément à deux états différents du champ.

Pour étudier le champ magnétique extérieur à des aimants permanents (§ 67), nous pourrions donc attribuer à ceux-ci une distribution fixe de masses magnétiques seulement. Dans les autres corps, en supposant qu'il n'y ait pas de courants, il n'y aura ni masses, ni masses vectorielles magnétiques (propriété exprimée

par les relations 1 et 2). L'intensité h' du champ en un point quelconque sera donc égale, d'après ce qui a été dit au paragraphe 48, à :

$$\bar{h}' = \sum \frac{m'}{r^2}$$

la somme Σ s'étendant à toutes les masses m' distribuées dans les aimants. Cette formule rappelle la loi fondamentale due à Coulomb et qui a servi de base à la théorie du magnétisme.

94. Solénoïdes. — Les solénoïdes vont nous fournir un exemple remarquablement simple de l'équivalence d'un courant et d'un aimant.

Dans un champ magnétique quelconque, où la distribution du vecteur $(X' Y' Z')$ satisfait aux équations (1) et (2), isolons par la pensée un tube limité :

1° Par une surface latérale $\Sigma\Sigma$ tangente en chaque point à la direction de l'intensité h' du champ (fig. 43);

2° Par deux bases équipotentielles S_1 et S_2 .

Supposons que l'on puisse maintenir le champ magnétique tel qu'il est à l'intérieur de ce tube, et le supprimer à l'extérieur; nous désignerons par H le champ ainsi maintenu dans le tube.

Dans tout le volume du tube, en raison des relations (1) et (2), il n'y a pas de masses magnétiques ($\rho' = 0$) ni de masses vectorielles magnétiques ($\mu' = 0$). Mais sa surface contient des masses dont les densités superficielles σ' et τ' sont définies par les formules (9) et (10) du paragraphe 47 :

$$4\pi\sigma' = lX' + mY' + nZ' \quad (3)$$

$$4\pi\tau'_x = nY' - mZ' \quad 4\pi\tau'_y = lZ' - nX' \quad 4\pi\tau'_z = mZ' - lY' \quad (4)$$

l, m, n désignant les cosinus directeurs de la normale à la surface dirigée vers l'intérieur du tube. On voit que :

Sur les bases équipotentielles S_1 et S_2 on a :

$$\frac{X'}{l} = \frac{Y'}{m} = \frac{Z'}{n} = \pm h'$$

La densité τ' de masse vectorielle y est donc nulle, et :

$$\begin{aligned} 4\pi\sigma' &= +h \text{ sur la base } S_1 \\ 4\pi\sigma' &= -h \text{ sur la base } S_2 \end{aligned}$$

Sur la surface latérale $\Sigma\Sigma$, c'est la densité σ' de masse qui est nulle, et $4\pi\tau' = h'$. La densité $\vec{\tau}'$ étant perpendiculaire à la normale à la surface ainsi qu'à l'intensité \vec{h}' du champ, est donc tangente, en un point quelconque M , à la courbe d'intersection de la surface Σ et de la surface équipotentielle V'' passant en ce point (fig. 43). Nous remplaçons sur la figure le vecteur $\vec{\tau}'$ (densité de masse vectorielle magnétique) par le vecteur égal \vec{i} (densité de courant). On voit donc que la bande superficielle de $\Sigma\Sigma$ comprise entre les lignes équipotentielles V' et V'' (partie hachée) constitue un circuit fermé infiniment plat, où existe un courant dont la densité *superficielle* est $\vec{i} = \vec{\tau}'$, et dont l'intensité totale est par conséquent $\tau' ds = \frac{1}{4\pi} h' ds$, ds désignant la distance des deux lignes V' et V'' infiniment voisines. Mais $h' ds$ est égal à $V' - V''$. Donc l'intensité du courant dans la bande superficielle en question est égale au quotient de $(V' - V'')$ par 4π ; le sens de ce courant, indiqué par une flèche i au point M , résulte des formules (4). Pour la surface $\Sigma\Sigma$ tout entière, l'intensité I du courant qui en fait le tour est :

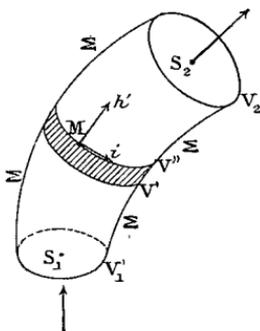


Fig. 43.

$$I = \frac{V_1 - V_2}{4\pi} \quad (5)$$

Les masses magnétiques réparties sur les bases S_1 et S_2 du tube, et dont la somme est nulle (§ 19), constituent un aimant A . Les masses vectorielles magnétiques réparties sur la surface latérale $\Sigma\Sigma$ constituent un courant I . Puisque à l'extérieur du tube l'intensité h' du champ est nulle, les actions extérieures fictives de l'aimant A et du courant I s'y neutralisent. Il en résulte qu'au point de vue de ces actions extérieures, *le courant I est équivalent à un aimant A'* ne différant de A que par le changement de signe de toutes les masses. Dans le cas particulier où le tube considéré a une longueur infiniment petite, le courant superficiel I se réduit à un *courant linéaire*; l'aimant équivalent A' devient un *feuillet magnétique*, composé de deux couches magnétiques S_1 (négative) et S_2 (positive) infiniment voisines, dont les densités σ' sont égales

et de signes contraires sur deux éléments en regard l'un de l'autre.

L'équivalence que nous venons de constater aurait un intérêt si l'on pouvait à volonté créer un aimant A' tel que celui que nous venons de définir ; mais nous ne possédons jusqu'ici aucun moyen de le faire. Quant à la réalisation du courant I , elle est au contraire facile. On n'a qu'à enrouler sur la surface latérale $\Sigma\Sigma$ du tube considéré un fil conducteur fin dont les spires, convenablement espacées, épousent sensiblement la forme des courbes équipotentielles magnétiques calculées $V_1 \dots V' V'' \dots V_2$. On forme ainsi une bobine appelée *solénoïde*.

Un cas particulièrement important est celui où le solénoïde est *fermé* sur lui-même, c'est-à-dire où ses bases S_1 et S_2 coïncident. Les masses de l'aimant équivalent A' n'existent pas dans ce cas, et le courant I , tout en produisant un champ intérieur au solénoïde, ne produit rigoureusement aucun champ à l'extérieur.

En pratique le solénoïde, au lieu de se réduire à une surface $\Sigma\Sigma$, a toujours une certaine épaisseur. Pour en faire la théorie, on n'a qu'à le diviser en couches d'épaisseur minime, chacune de ces couches étant un solénoïde auquel on peut appliquer la théorie précédente. Les exemples suivants feront comprendre le principe de la construction d'un solénoïde.

Bobine droite. — Dans un champ magnétique uniforme d'intensité h' , considérons un tube cylindrique de révolution, ayant un rayon R et une hauteur l , et dont les génératrices soient parallèles à la direction du champ. On réalisera un solénoïde en enroulant sur la surface latérale de ce tube un nombre n de spires d'un fil fin et en développant dans ce conducteur un courant d'intensité i ; la formule (5) donne alors : $n i = I = \frac{V_1 - V_2}{4\pi}$. L'aimant équivalent au point de vue du champ extérieur à cette bobine se composera de deux couches magnétiques uniformes réparties sur les bases planes S_1 et S_2 , et ayant pour densité

$$\sigma' = \frac{h'}{4\pi} = \frac{V_1 - V_2}{4\pi l} = \frac{n i}{l}$$

Bobine annulaire. — Dans le champ magnétique étudié par Biot et Savart, et qui est de révolution autour de l'axe OZ du conduc-

teur (fig. 31), découpons un tore ayant pour axe OZ et pour méridienne génératrice une circonférence de cercle K dont le centre est en O' (fig. 44). Enroulons sur ce tore un conducteur, et développons-y un courant d'intensité convenable. Le champ magnétique à l'intérieur de cette bobine solénoïde sera identique à ce qu'il était dans l'expérience de Biot et Savart, c'est-à-dire qu'en un point situé à une distance r de OZ l'intensité h' du champ sera perpendiculaire au plan méridien en ce point et égale à $\frac{2I}{r}$ (§ 68). En dehors de la bobine le champ sera nul, c'est-à-dire que l'on aura un solénoïde *parfait*.

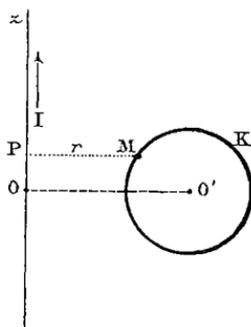


Fig. 44.

Si le conducteur enroulé sur le tore forme n spires et est parcouru par un courant i , l'intégrale

$$\int_C h' ds \cos(h, ds) = 2 \pi r h'$$

prise le long d'une circonférence de cercle C, de rayon r , ayant OZ pour axe et intérieure au tore, est égale à $4 \pi n i$ (formule 21 du paragraphe 72), puisque le contour C embrasse les n spires de courant i . Il en résulte :

$$h' = \frac{2ni}{r}$$

95. Etude du champ créé par un petit aimant. — Nous allons étudier le champ créé par un petit aimant, c'est-à-dire par un aimant A dont les dimensions sont petites par rapport à sa distance aux points où l'on explore le champ. Nous supposons cet aimant mobile autour du point O (fig. 45).

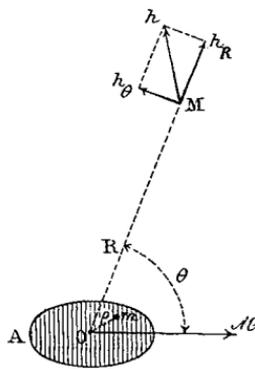


Fig. 45.

Le champ étant supposé créé par des masses magnétiques réparties dans A (§ 93), le potentiel magnétique V en un point M aura pour expression $\Sigma \frac{m}{r}$ (§ 19), m désignant une masse située au point m et r la distance des points m et M. Or, si l'on désigne par ρ la

distance $m O$, par R la distance MO et par α l'angle $m O M$, on a :

$$r^2 = R^2 - 2 R \rho \cos \alpha + \rho^2$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{R} \left[1 - 2 \frac{\rho \cos \alpha}{R} + \frac{\rho^2}{R^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{R} \left[1 + \frac{\rho \cos \alpha}{R} + \frac{3 \cos^2 \alpha - 1}{2} \frac{\rho^2}{R^2} + \dots \right] \end{aligned}$$

En négligeant dans ce développement en série les termes en $\frac{\rho^2}{R^2}$ et les suivants à cause de la petitesse de $\frac{\rho}{R}$, on aura donc :

$$V = \sum \frac{m}{r} = \sum \frac{m}{R} \left(1 + \frac{\rho \cos \alpha}{R} \right) = \frac{\Sigma m}{R} + \frac{\Sigma m \rho \cos \alpha}{R^2}$$

Si sur chaque droite telle que $O m$ on porte un vecteur égal au produit $m \rho$, la résultante de tous les vecteurs semblables relatifs aux diverses masses m sera un vecteur $O \mathcal{M}$ faisant avec OM un certain angle θ . En vertu d'un théorème bien connu, la projection $\mathcal{M} \cos \theta$ du vecteur \mathcal{M} sur OM est égale à la somme $\Sigma m \rho \cos \alpha$ des projections des vecteurs $m \rho$. Il en résulte l'expression :

$$V = \frac{\Sigma m}{R} + \frac{\mathcal{M} \cos \theta}{R^2} \quad (6)$$

Nous appellerons le vecteur \mathcal{M} *moment magnétique* de l'aimant A . On voit, par cette formule, que le champ magnétique d'un petit aimant ne dépend que de deux éléments : 1° la somme Σm de ses masses magnétiques fictives ; 2° son moment magnétique \mathcal{M} appliqué au point fixe O , — en négligeant, bien entendu, les termes du troisième ordre en $\frac{1}{R}$. Ce champ est donc de révolution autour de la droite $O \mathcal{M}$ et l'intensité h au point M est un vecteur situé, par raison de symétrie, dans le plan méridien $\mathcal{M} O M$. Calculons la composante h_R de ce vecteur suivant le rayon OM , et la composante h_θ , suivant la perpendiculaire à OM .

Soient dR et $R d\theta$ respectivement des éléments de chemin infiniment petits portés sur le prolongement de OM et sur la

perpendiculaire à OM dans le plan méridien. On aura, en vertu de la relation qui existe entre le potentiel V et l'intensité h :

$$h_R = -\frac{\partial V}{\partial R} = \frac{\Sigma m}{R^2} + \frac{2 \mathcal{M} \cos \theta}{R^3} \quad (7)$$

$$h_\theta = -\frac{\partial V}{R \partial \theta} = \frac{\mathcal{M} \sin \theta}{R^3} \quad (8)$$

Ceci posé, nous allons établir deux résultats importants. En premier lieu, l'expérience montre que, si l'on fait tourner l'aimant A autour de son axe magnétique, son action sur un aimant d'épreuve placé en un point quelconque ne varie pas.

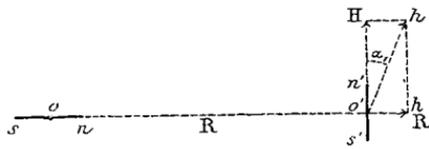


Fig. 46.

Le champ magnétique de A est donc de révolution autour de son axe magnétique ; et, comme il est de révolution autour de $O \mathcal{M}$, on en conclut que la direction du moment magnétique \mathcal{M} de l'aimant coïncide avec celle de l'axe magnétique.

En second lieu, la somme des masses magnétiques de l'aimant A est nulle : $\Sigma m = 0$. Cela résulte de l'expérience suivante due à Gauss.

Soit $n' s'$ l'axe magnétique d'un aimant d'épreuve en équilibre sous l'action du magnétisme terrestre seul (fig. 46). L'axe de rotation de cet aimant étant vertical, l'intensité du champ magnétique n'influe sur lui que par sa composante horizontale H , qui l'oriente dans le méridien magnétique $o' H$. Plaçons, en un point o de l'horizontale $o o'$ perpendiculaire au méridien, un aimant fixe $n s$ orienté suivant la direction $o o'$. Cet aimant produira un nouveau champ magnétique, dont l'intensité au point o' de son axe de révolution se réduira à la composante h_n , (formule 7, $\theta = 0$). La nouvelle intensité h du champ C' sera donc la résultante des vecteurs H et h_n , et sous son action l'aimant $n' s'$ sera dévié d'un angle α_1 tel que :

$$\text{tg } \alpha_1 = \frac{h_n}{H} = \frac{\Sigma m}{HR^2} + \frac{2 \mathcal{M}}{HR^3} \quad (9)$$

Dans une expérience de ce genre, Gauss a trouvé que la varia-

tion de l'angle α_1 avec la distance R était *très bien* représentée par la formule :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{0,086870}{R^3} - \frac{0,002185}{R^5} \text{ (unités C. G. S.)}$$

Pour des distances R supérieures à 1 mètre (= 100 C. G. S.) on peut négliger le terme en $\frac{1}{R^5}$, qui est inférieur à $\frac{1}{100.000}$ du terme en $\frac{1}{R^3}$. Du reste, quand R croît indéfiniment, le produit $R^3 \operatorname{tg} \alpha_1$ tend vers une valeur finie 0,086870 ; on en conclut que dans la formule (9) Σm est nul, et que la valeur de $\frac{2M}{H}$ est égale à 0,086870.

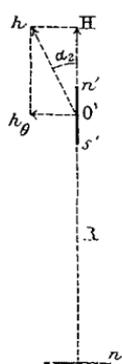


Fig. 47.

Gauss répétait cette expérience en plaçant l'aimant ns dans la même orientation, mais sur le prolongement de $n's'$ et à la même distance R du point O' (fig. 47). Alors θ étant égal à $\frac{\pi}{2}$, les formules (7) et (8) donnent, à cause de $\Sigma m = 0$:

$$h_R = 0 \quad h_0 = \frac{M}{R^3}$$

La nouvelle déviation α_2 de l'aimant d'épreuve doit être en sens inverse de la déviation α_1 , et l'on doit avoir :

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{h_0}{H} = \frac{M}{HR^3}$$

Gauss a trouvé en effet avec les mêmes aimants que dans le premier cas :

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{0,043435}{R^3} + \frac{0,002449}{R^5}$$

et la nouvelle valeur de $\frac{M}{H}$:

$$\frac{M}{H} = \limite \left(R^3 \operatorname{tg} \alpha_2 \right)_{R = \infty} = 0,043435$$

coïncide bien avec celle calculée plus haut : $2 \frac{M}{H} = 0,086870$.

Ajoutons qu'en appliquant les formules (7) et (8), ou plutôt ($\Sigma m = 0$) :

$$h_r = \frac{2M \cos \theta}{R^3} \quad h_0 = \frac{M \sin \theta}{R^3} \quad (10)$$

à d'autres positions relatives des deux aimants, on n'a jamais trouvé ces formules en défaut.

96. Proportionnalité du moment magnétique \mathcal{M} au coefficient d'influence γ d'un aimant. — Au point de vue des actions qu'il exerce (§ 95), un petit aimant A n'intervient que par un moment

magnétique \mathcal{M} dirigé suivant l'axe magnétique NS (fig. 48). Si l'on prend la longueur NS égale à l , l'ensemble de deux masses magnétiques $+m$ et $-m$

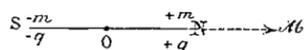


Fig. 48.

appliquées en N et S respectivement constituent un aimant fictif équivalent à l'aimant A, pourvu que le produit ml soit égal à \mathcal{M} , car les moments de ces deux aimants seront alors égaux en grandeur et en direction.

Au point de vue de l'action (couple) qu'il subit en un point où l'intensité du champ est h , l'aimant A est équivalent à un aimant fictif composé de deux

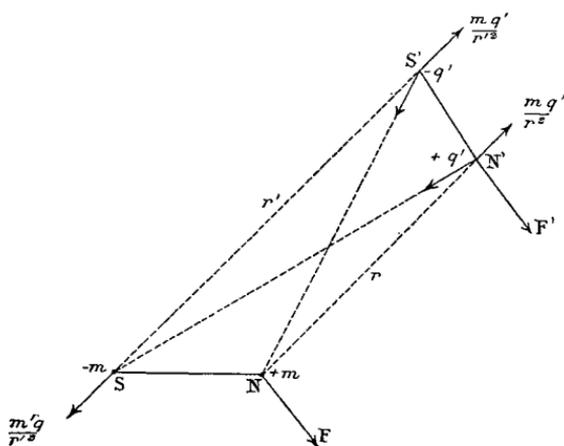


Fig. 49.

quantités de magnétisme $+q$ et $-q$, appliquées en N et S respectivement et soumises à des forces ($f = hq$) égales, parallèles à \bar{h} et de sens contraires (§ 66).

Si donc on veut calculer le couple magnétique exercé par un aimant NS sur un aimant N'S' mobile autour d'un de ses points (N' par exemple), en supposant les dimensions de ces aimants très petites par rapport à leur distance, on pourra remplacer : 1° l'aimant NS par deux masses magnétiques $+m$ et $-m$ appliquées en N et S, telles que le produit ml soit égal au moment \mathcal{M} de l'aimant; 2° l'aimant N'S' par deux quantités de magnétisme $+q'$ et $-q'$ appliquées en N' et S', telles que le produit $q'l$ soit égal au coefficient d'influence γ' de l'aimant (§ 66) :

$$\mathcal{M} = m l \quad \gamma' = q' l'$$

Nous aurons ainsi quatre forces appliquées deux à deux en N' et S' (telles que $\frac{mq'}{r^2}$), et dont le moment résultant par rapport au point fixe de l'aimant $N' S'$ sera égal au moment du couple à calculer (fig. 49).

L'action de l'aimant $N' S'$ (masses $+ m'$ et $- m'$) sur l'aimant NS (quantités de magnétisme $+ q$ et $- q$) se calculerait d'une manière analogue. On aurait quatre forces appliquées deux à deux en N et S (telles que $\frac{m'q}{r^2}$).

Indépendamment des couples ainsi calculés, les deux aimants sont soumis à des forces F et F' (§ 63) appliquées aux points fixes, que nous supposerons être N et N' . Nous n'avons pas eu à nous occuper jusqu'ici de ces forces dont l'effet est détruit par la fixité de leurs points d'application.

Ceci posé, si les deux aimants étaient liés entre eux de manière à former un système indéformable, en vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, ce système devrait rester en équilibre sous l'action des dix forces appliquées en $N, S, N' S'$. Nous allons déduire de là des conséquences importantes.

D'abord le moment résultant des dix forces par rapport à l'axe NN' doit être nul. Or huit de ces forces rencontrent NN' et ont un moment nul. Les seules forces qui ne rencontrent pas l'axe sont $\frac{mq'}{r^2}$ et $\frac{m'q}{r^2}$, appliquées en S' et S suivant la même droite $S' S$; pour que leur moment total soit nul, il faut qu'elles soient égales et opposées.

$$\frac{m q'}{r^2} = \frac{m' q}{r^2} \quad (11)$$

On tire de là :

$$\frac{m}{q} = \frac{m'}{q'} = \frac{1}{k}$$

Mais, comme \mathcal{M} , \mathcal{M}' , γ , γ' sont respectivement égaux à $m l$, $m' l'$, $q l$, $q' l'$, cette égalité peut s'écrire :

$$\frac{\mathcal{M}}{\gamma} = \frac{\mathcal{M}'}{\gamma'} = \frac{1}{k} \quad (12)$$

Elle montre que le rapport du moment magnétique \mathcal{M} au coef-

ficient γ est le même pour deux aimants quelconques. Ce rapport $\frac{1}{k}$ ne peut donc dépendre que de la nature du milieu (air, eau...) dans lequel on observe les actions magnétiques (V. § 98).

97. Action réciproque de deux petits aimants. — L'égalité (41) montre que huit des forces appliquées en N, S, N', S' sont deux à deux égales et opposées suivant les quatre droites NN' — NS' — SN' — SS', et laissent par conséquent le système des deux aimants en équilibre. Il en résulte que les deux dernières forces F et F' doivent elles-mêmes se faire équilibre, ce qui exige qu'elles soient égales et opposées suivant la droite NN'; nous allons démontrer qu'elles sont nulles : $F = 0$.

- Donnons à l'aimant N' S' quatre déplacements successifs : 1° Translation infiniment petite δr de N' S' en N'_1 S'_1 ;
 2° Rotation de N'_1 S'_1 en N'_1 S'_2 ;
 3° Translation — δr de N'_1 S'_2 en N' S'_3 ;
 4° Rotation de N' S'_3 en N' S'.

L'état relatif des deux aimants étant le même à la fin de ce mouvement qu'au commencement, l'énergie du système redevient la même, et par suite le travail total des forces en jeu est nul. Or les quatre forces telles que $\frac{mq'}{r^2}$ (fig. 49) appliquées en N' et S' étant inversement proportionnelles au carré des distances, leur travail total est nul, puisque leurs points d'application N' et S' décrivent des chemins fermés. Il en résulte que la cinquième force F' doit produire aussi un travail total nul.

Le travail de cette force est $F' \delta r$ dans la première phase du mouvement et $- F'_1 \delta r$ dans la troisième phase, F'_1 désignant la nouvelle valeur de F' lorsque l'axe magnétique N' S' a pris la nouvelle orientation N'_1 S'_2. Puisque la somme $(F' \delta r - F'_1 \delta r)$ est nulle, on en conclut : $F'_1 = F'$, c'est-à-dire que la force F' est en réalité indépendante de l'orientation de l'axe N' S'. Pour la même raison, la force F ($= - F'$) appliquée en N à l'aimant NS est

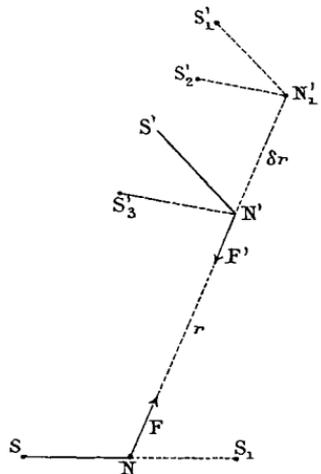


Fig. 50.

indépendante de l'orientation de NS. En particulier, si l'axe magnétique NS est amené en NS₁, c'est-à-dire est retourné bout pour bout, l'intensité du champ magnétique de l'aimant NS (supposé infiniment petit) change simplement de sens, ce qui change le sens de la force F'; et en même temps, d'après ce qui précède, n'a pas varié. Il en résulte bien : $F' = -F' = 0$.

Puisque les forces F' et F de la figure 49 sont nulles, l'action réciproque des deux petits aimants est équivalente à celle qui résulterait d'actions exercées par les pôles fictifs N, S sur les pôles fictifs N', S', suivant la loi de Coulomb. Par exemple, puisque $q = km$ (§ 96), la force fictive qu'exercent les pôles N et N' l'un sur l'autre est égale à $\frac{mq'}{r^2} = \frac{1}{k} \frac{qq'}{r^2} = k \frac{mm'}{r^2}$ (aux infiniment petits près d'ordre négligeable).

Si au lieu de deux petits aimants, on a deux aimants quelconques A et A', en les décomposant en petits aimants supposés permanents, on calculera leur action réciproque comme résultant des actions élémentaires de ces petits aimants.

98. Pouvoir inducteur magnétique. — Le rapport k de la formule (12), qui ne dépend que de la nature du milieu, représente le coefficient d'influence de ce milieu sur l'action réciproque de deux aimants dont les coefficients sont γ et γ' . Le coefficient γ d'un aimant A considéré comme *aimant d'épreuve* (§ 66) caractérise l'état de cet aimant et, en vertu de sa définition même, ne dépend pas de la nature du milieu ambiant, qui peut être quelconque. Mais si l'on considère l'intensité, en un point M, du champ créé par l'aimant A, cette intensité dépend naturellement à la fois de l'état de l'aimant (par le coefficient γ) et de la nature du milieu qui transmet l'action magnétique au point M (par le coefficient k). C'est pourquoi cette action extérieure dépend uniquement du coefficient plus complexe $\mathcal{M} = \frac{\gamma}{k}$, que nous avons appelé le moment magnétique de l'aimant A, mais qui en réalité dépend aussi du milieu ambiant. Nous donnerons, comme en électrostatique, au coefficient k le nom de *pouvoir inducteur* (magnétique) du milieu.

On pourrait achever la théorie du champ magnétique comme celle du champ électrique en considérant le coefficient k comme variable d'un corps à un autre; mais ceci serait sans intérêt, le

pouvoir inducteur magnétique (ou coefficient d'influence du milieu) étant *pratiquement* le même pour tous les corps, sauf pour le fer, le nickel et le cobalt. Pour ces derniers métaux, l'expérience montre que cette théorie n'a pas plus de valeur que des formules empiriques.

Voici quelques nombres représentant les pouvoirs inducteurs magnétiques μ de quelques substances rapportés à celui du vide (d'après divers auteurs) :

Bismuth	$\mu = 0,999\ 812$	Sulfate de cuivre : $\mu = 1,000\ 006\ 75$
Cuivre	0,999 984	Sulfate de fer 1,000 178
Eau	0,999 991	Protochlorure de
Verre	0,999 998	fer 1,000 550
Air	1,000 000 5	

Les substances dont le pouvoir inducteur est inférieur à celui du vide sont dites *diamagnétiques*; celles pour lesquelles μ est au contraire supérieur à 1 sont dites *paramagnétiques*. L'opposition que l'on a établie entre les propriétés de ces deux catégories de corps, et dont l'idée était suggérée par l'hypothèse des fluides magnétiques, n'a aucune raison d'être.

En étendant au fer, au nickel et au cobalt la théorie, qui n'est exacte que pour les autres corps, on a trouvé pour leurs pouvoirs inducteurs mesurés des chiffres extrêmement variables : de 1 à 6 000 et plus, par exemple, pour le fer, suivant sa qualité, suivant l'intensité du champ magnétique et les divers états antérieurs de la substance étudiée. Dans ces conditions variables la notion du pouvoir inducteur, tel que nous l'avons défini, n'existe plus.

99. Unités magnétiques. — Les principales grandeurs magnétiques définies jusqu'ici sont :

1° L'intensité h' d'un champ magnétique; ainsi l'intensité du champ d'un courant rectiligne I est, à la distance r (§ 69) :

$$h' = \frac{2I}{r} \quad (13)$$

2° Le coefficient γ d'influence d'un aimant; le produit $\gamma h'$ est un

couple mesurable, égal au produit d'une force f par une longueur l (§ 66) :

$$\gamma h' = fl \quad (14)$$

3° Le potentiel magnétique :

$$v' = \int h' ds \cos (h', ds) \quad (15)$$

4° La masse magnétique m' qui, à une distance r , crée un champ dont l'intensité est :

$$h' = \frac{m'}{r^2} \quad (16)$$

5° Le moment \mathcal{M} d'un aimant, égal au produit d'une masse m' (pôle) par la distance l des deux pôles :

$$\mathcal{M} = m'l \quad (17)$$

6° Le pouvoir inducteur magnétique k' d'un milieu, égal au quotient du coefficient γ d'un aimant par son moment magnétique \mathcal{M} (§ 98) :

$$\gamma = k' \mathcal{M} \quad (18)$$

En éliminant m' et \mathcal{M} entre (16), (17) et (18), on en déduit :

$$k' = \frac{\gamma}{l r^2 h'} \quad (19)$$

Les formules (13) à (19) permettent de définir les unités et les formules de dimensions des grandeurs h' , γ ... k' . On trouve ainsi pour les dimensions de h' , γ , v' , k' , dont les deux premières ont déjà été données au paragraphe 69 :

$$\left. \begin{aligned} H' &= L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-3} K^{\frac{1}{2}} \\ \Gamma &= L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} K^{-\frac{1}{2}} \\ V' &= L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-3} K^{\frac{1}{2}} \\ K' &= L^{-2} T^2 K^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Cette dernière formule ($KK' = L^{-2} T^2$) montre que le produit kk' des pouvoirs inducteurs électrique k et magnétique k' d'une

substance quelconque a les dimensions de l'inverse du carré d'une vitesse. Si donc on pose :

$$kk' = \frac{1}{a^2} \quad (21)$$

a désignera un nouveau *coefficient spécifique* de la substance en question, qui est comparable à une vitesse. La valeur numérique de cette vitesse a , ne dépendant que du choix des unités de longueur et de temps, peut donc être déterminée sans qu'il soit nécessaire de fixer un système d'unités électriques. La mesure du coefficient a d'une substance présente un intérêt considérable ; car la théorie indique (§ 130) que a est la vitesse de propagation des ébranlements électro-magnétiques dans cette substance. Nous indiquons au paragraphe 100 la mesure de a pour le cas de l'air, qui est le plus facile ; on a trouvé : $a = 300\,000$ kilomètres par seconde.

On a vu au paragraphe 29 que l'on appelle *électro-statiques* les systèmes d'unités dans lesquels on prend égal à 1 le pouvoir inducteur *électrique* k de l'air ; la formule (21) montre qu'alors le coefficient k' de l'air a une valeur numérique $\frac{1}{a^2}$ variable avec l'unité de vitesse. Si au contraire on prend pour unité de pouvoir inducteur *magnétique* k' celui de l'air, on aura les systèmes d'unités dits *électro-magnétiques*, dans lesquels le coefficient k de l'air a une valeur $\frac{1}{a^2}$ variable avec l'unité de vitesse. En résumé :

Dans les *systèmes électro-statiques* :

$$\begin{aligned} k_{\text{air}} = 1 \quad k'_{\text{air}} = \frac{1}{a^2} &= 1 : \left(3 \times 10^{10}\right)^2 \text{ C. G. S.} \\ &= 1 : \left(30\right)^2 \left(\text{unités : } 10^9 \text{ C. — } 10^{-11} \text{ Gr. — } 1 \text{ S.}\right) \end{aligned}$$

Dans les *systèmes électro-magnétiques* :

$$\begin{aligned} k'_{\text{air}} = 1 \quad k_{\text{air}} = \frac{1}{a^2} &= 1 : \left(3 \times 10^{10}\right)^2 \text{ C. G. S.} \\ &= 1 : \left(30\right)^2 \text{ unités pratiques.} \end{aligned}$$

Exemples numériques : 1° Composantes horizontale H et verticale Z de l'intensité du champ magnétique terrestre à Paris :

$$\begin{aligned} H &= 0,196 \times 10^{10} \text{ u. prat. (environ)} \\ Z &= 0,423 \times 10^{10} \quad \text{»} \\ F = \sqrt{H^2 + Z^2} &= 0,466 \times 10^{10} \quad \text{»} \end{aligned}$$

2° Distance r à laquelle un courant rectiligne d'un ampère crée une intensité de champ magnétique égale à la valeur H ci-dessus ($I = 1$) :

$$\frac{2I}{r} = \frac{2}{r} = 0,196 \times 10^{10} \text{ u. pr.}$$

d'où :

$$r = 1,02 \times 10^{-9} \text{ u. pr.} = 1 \text{ centim. (environ)}$$

3° *Mesure du moment magnétique \mathcal{M} d'un barreau aimanté* (de 20 centimètres de longueur et de 1 centimètre carré de section), et de la composante horizontale terrestre H , par la méthode de Gauss :

En premier lieu, le barreau est mis dans la position ns de la figure 46; la distance $R = OO'$ étant de 1 mètre; on trouve une déviation angulaire α_1 telle que : $\text{tg} \alpha_1 = 0,306$.

En second lieu, l'observation des oscillations du barreau dans le champ terrestre (§ 65) donne, pour le coefficient γH du couple ($\gamma H \sin \theta$) qui agit sur ce barreau (§ 66), la valeur : 588×10^{-6} unités pratiques. Comme en unités pratiques le coefficient k' de l'air est égal à 1, la formule $\gamma = k' \mathcal{M}$ (§ 96) se réduit à : $\gamma = \mathcal{M}$; donc : $\mathcal{M} H = 588 \times 10^{-6}$.

En appliquant la formule 9 du paragraphe 95 (avec $\Sigma m = 0$) :

$$\text{tg} \alpha_1 = \frac{2 \mathcal{M}}{H R^3} \quad (R = 10^{-7} \text{ u. pr.})$$

on trouve les deux relations :

$$\frac{\mathcal{M}}{H} = 0,153 \times 10^{-21} \quad \mathcal{M} H = 588 \times 10^{-6}$$

qui donnent :

$$\mathcal{M} = 3.10^{-13} \quad H = 0,196 \times 10^{10} \text{ u. pr.}$$

Le couple magnétique terrestre ($\gamma H \sin \theta$) équivaut à deux forces égales à $\frac{588 \times 10^{-6}}{20 \times 10^{-9}} = 29\,400$ unités pratiques = 294 dynes, appliquées aux extrémités du barreau (parallèlement à H , voir § 66).

100. **Détermination du coefficient α de l'air.** — Considérons un circuit parcouru par un courant, dont on mesure l'intensité I

(§ 70) en observant la déviation δ qu'il produit dans une boussole des tangentes g (fig. 51) :

$$I = \frac{H}{G} \operatorname{tg} \delta$$

Si R désigne la résistance du circuit comprise entre deux points A et B , la différence de potentiel entre ces points est RI , et un

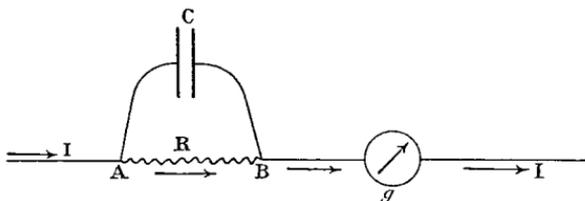


Fig. 51.

condensateur à air de capacité C intercalé entre eux prend une charge égale à :

$$q = CRI = CR \frac{H}{G} \operatorname{tg} \delta$$

Supposons qu'ensuite on décharge ce condensateur à travers le même galvanomètre g , et que la durée de la décharge soit extrêmement faible. L'application de la formule (20) du paragraphe 71 donnera :

$$q = \int I dt = \frac{HT}{\pi G} \sin \frac{\delta_1}{2}$$

en désignant par δ_1 la déviation maximum de l'aiguille sous l'action de la décharge. Egalons les deux valeurs de q ; il vient :

$$CR = \frac{T}{\pi} \sin \frac{\delta_1}{2} \cot \delta \quad (22)$$

Si le condensateur est plan et a un anneau de garde, on a (§ 37) :

$$C = \frac{kS}{4\pi e}$$

S désignant l'aire du disque central et e la distance des deux plateaux. La relation (22) devient alors :

$$R = \frac{4eT}{kS} \sin \frac{\delta_1}{2} \cot \delta$$

Les valeurs de e , S , T , δ_1 et δ ayant été mesurées, il ne reste comme inconnues dans cette formule que R et k .

1° *En faisant $k = 1$, c'est-à-dire en adoptant un système d'unités électrostatiques, la formule fera connaître la valeur de la résistance R en unités électrostatiques.*

2° *En supposant au contraire que l'on ait mesuré préalablement R en ohms (voir § 101), la formule fera connaître la valeur du coefficient k de l'air dans le système pratique.* Comme, par définition de ce système, $k' = 1$, on aura (§ 99) :

$$k = kk' = \frac{1}{a^2}$$

Cette expérience permet donc de déterminer la valeur du coefficient a de l'air :

$$a^2 = \frac{RS}{4eT} \frac{\operatorname{tg} \delta}{\sin \frac{\delta_1}{2}}$$

Par cette méthode, et par des méthodes différentes, on a trouvé des nombres très voisins de $a = 30$ unités pratiques = 300 000 kilomètres par seconde.

101. Détermination de l'ohm. — L'ohm est l'unité pratique de résistance électrique. Pour réaliser un étalon de résistance qui reste identique à lui-même à toute époque, on est convenu de représenter l'ohm par la résistance d'une colonne de mercure pur à 0° centigrade, ayant une section de 1 millimètre carré et une longueur x que l'on avait à déterminer expérimentalement d'après la définition même de l'unité de résistance. La longueur x adoptée comme la plus probable, à la suite d'expériences exécutées par un certain nombre de savants, est de 106^{cm},3 ; elle ne paraît pas différer de plus d'un demi-millième de la valeur définie théoriquement.

Voici le principe de la méthode employée par Joule pour mesurer en ohms la résistance R d'un conducteur donné. Il plongeait dans un calorimètre une certaine partie d'un circuit conducteur parcouru par un courant constant I ; et il évaluait, toutes corrections faites, la quantité de chaleur Q dégagée par le courant dans cet appareil pendant un temps connu t . En multipliant par l'équivalent

mécanique de la chaleur, déterminé préalablement par lui-même, la valeur numérique Q de cette quantité de chaleur exprimée en calories, il obtenait, en unités pratiques, la valeur W de l'énergie équivalente. Or, d'après la définition de l'unité de résistance (§ 47), on avait :

$$W = RI^2t$$

R désignant la résistance de la portion de fil plongée dans le calorimètre. Pour mesurer R en ohms, il suffisait donc d'évaluer l'intensité I du courant en ampères.

A cet effet le courant passait dans une boussole des tangentes et déviait l'aimant d'un angle δ . I était calculé par la formule :

$$I = \frac{H}{G} \operatorname{tg} \delta$$

la composante horizontale H du magnétisme terrestre ayant été mesurée préalablement en unités pratiques (voir § 99), et la constante G du cadre du galvanomètre ayant été calculée d'après le nombre et la position des spires (§ 70).

CHAPITRE XI

FORCES ET ÉNERGIE MAGNÉTIQUES

102. Expressions des forces magnétiques. — Le calcul des forces magnétiques, que nous nous proposons de faire ici, étant semblable à celui des forces électriques que nous avons fait aux paragraphes 23-23, nous pourrons l'abréger en nous dispensant de quelques redites.

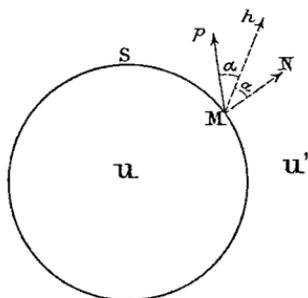


Fig. 52.

Si l'on divise un champ magnétique en deux régions U et U' séparées l'une de l'autre par une surface S (fig. 52), l'action réciproque de ces deux régions s'exerce par leur surface commune. En chaque point M de S , la région U' exerce sur U , par unité de surface, une certaine force magnétique p , et subit de la part de U une réaction égale et opposée. Si p_x, p_y, p_z sont les composantes du vecteur p sur trois axes de coordonnées rectangulaires, la résultante R des forces magnétiques exercées par U' sur U aura pour composantes :

$$R_x = \int_S p_x dS \quad R_y = \int_S p_y dS \quad R_z = \int_S p_z dS \quad (1)$$

R est égale et opposée à la résultante R' des forces magnétiques appliquées à la surface S de la région U' . Mais R' peut aussi être considérée comme la résultante des forces magnétiques appliquées au volume de la région U' , c'est-à-dire aux aimants et courants qui existent dans cette région. A ce dernier point de vue les composantes $R'_x (= -R_x), R'_y, R'_z$ seront plus faciles à calculer ; car pour

le calcul des actions qu'ils exercent ou qu'ils subissent à distance, les courants pourront être remplacés par des aimants, et les aimants par une certaine répartition de masses magnétiques fictives obéissant à la loi de Coulomb (§ 93). Chaque masse m' (ou quantité de magnétisme $q' = k' m'$) est soumise, en un point où l'intensité du champ est h , à une force égale à $h'q' = k'h' m'$. Par conséquent, en désignant par ρ' la densité de masse magnétique dans un élément de volume $d\omega$, la force magnétique qui s'exerce sur ce volume sera égale à $k' h' \rho' d\omega$, et sa composante suivant l'axe des x sera $k' X' \rho' d\omega$. Donc :

$$R'_x = -R_x = \int_{U'} k' X' \rho' d\omega = \frac{k'}{4\pi} \int_{U'} X' \left(\frac{\partial X'}{\partial x} + \frac{\partial Y'}{\partial y} + \frac{\partial Z'}{\partial z} \right) d\omega$$

En transformant cette intégrale exactement comme au paragraphe 23, on la mettra sous la forme :

$$R_x = \int_S \frac{k'}{8\pi} \left[2 X' \left(lX' + mY' + nZ' \right) - l \left(X'^2 + Y'^2 + Z'^2 \right) \right] dS \quad (2)$$

et l'on en déduira (§ 24) les expressions de p_x, p_y, p_z :

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \frac{k'}{8\pi} \left[2 X' \left(lX' + mY' + nZ' \right) - l \left(X'^2 + Y'^2 + Z'^2 \right) \right] \\ p_y &= \frac{k'}{8\pi} \left[2 Y' \left(lX' + mY' + nZ' \right) - m \left(X'^2 + Y'^2 + Z'^2 \right) \right] \\ p_z &= \frac{k'}{8\pi} \left[2 Z' \left(lX' + mY' + nZ' \right) - n \left(X'^2 + Y'^2 + Z'^2 \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

d'où la règle relative à la grandeur et à la direction de la force magnétique p par unité de surface en un point M de S :

La force magnétique p par unité de surface en M est représentée par le vecteur Mp symétrique, par rapport à la direction Mh de l'intensité du champ, d'un vecteur MN égal à $\frac{k'h^2}{8\pi}$ porté sur la normale extérieure au volume U .

On déduit encore de (2), comme au paragraphe 25, l'expression de la force magnétique F qui s'exerce sur l'unité de volume en un point quelconque du champ :

$$\left. \begin{aligned} F_x &= X'\delta' + k' \left(Y'\mu'_z - Z'\mu'_y \right) - \frac{h'^2}{8\pi} \frac{\partial k'}{\partial x} \\ F_y &= Y'\delta' + k' \left(Z'\mu'_x - X'\mu'_z \right) - \frac{h'^2}{8\pi} \frac{\partial k'}{\partial y} \\ F_z &= Z'\delta' + k' \left(X'\mu'_y - Y'\mu'_x \right) - \frac{h'^2}{8\pi} \frac{\partial k'}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

en posant :

$$4\pi\delta' = \frac{\partial}{\partial x} (k'X') + \frac{\partial}{\partial y} (k'Y') + \frac{\partial}{\partial z} (k'Z') \quad (5)$$

$$4\pi\mu'_x = \frac{\partial Y'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial y} \quad 4\pi\mu'_y = \frac{\partial Z'}{\partial x} - \frac{\partial X'}{\partial z} \quad 4\pi\mu'_z = \frac{\partial X'}{\partial y} - \frac{\partial Y'}{\partial x} \quad (6)$$

En pratique, le coefficient k' du milieu est une constante, et les derniers termes des formules (4) disparaissent. En outre, en dehors des aimants, δ' est nul, car on a (§ 93) :

$$\frac{\partial X'}{\partial x} + \frac{\partial Y'}{\partial y} + \frac{\partial Z'}{\partial z} = 0$$

103. Forces dites électro-magnétiques et électro-dynamiques. — Appliquons les formules (4) à l'espace extérieur aux aimants dans un champ quelconque créé par des aimants et des courants. Comme le vecteur $(\mu'_x \mu'_y \mu'_z)$ défini par les formules (6) n'est autre que le vecteur $(i'_x i'_y i'_z)$ du paragraphe 69, ces formules (4) s'écriront :

$$F_x = k' \left(Y'i_z - Z'i_y \right) \quad F_y = k' \left(Z'i_x - X'i_z \right) \quad F_z = k' \left(X'i_y - Y'i_x \right) \quad (7)$$

[Nous donnerons souvent au vecteur \vec{i} dans la suite le nom de *densité de courant* ; mais il est bien entendu que ce vecteur est l'*apport d'induction électrique* qui, dans l'état variable du champ, existe aussi bien dans les isolants que dans les conducteurs.]

La force F , nulle en dehors des régions où existe le courant i , s'exerce en chaque point de celles-ci. Elle est perpendiculaire à la fois à l'intensité h' du champ magnétique et à la densité i du courant ; et elle est proportionnelle à ces deux vecteurs et au sinus de leur angle θ :

$$F = k' h' i \sin \theta \quad (8)$$

Les composantes F_x , F_y , F_z de la force étant des fonctions

linéaires de X' , Y' , Z' , il en résulte évidemment le théorème suivant :

Dans un champ (h') résultant de la superposition de plusieurs champs magnétiques (h'_1 , h'_2 , h'_3 ,...), la force électro-magnétique F qui s'exerce sur un courant i est la résultante de celles qu'exerceraient ces divers champs (F_1 , F_2 ,...). Ces divers champs seront dus, par exemple, au magnétisme terrestre, à des aimants, au courant i lui-même.

Le champ dû au courant i lui-même peut varier d'une manière complexe dans l'étendue d'une même section droite d'un conducteur; mais en général le champ dû à une autre cause, notamment le champ magnétique terrestre, peut être considéré comme uniforme si cette section ω est très petite. Alors un élément du conducteur de longueur ds , ayant un volume $d\omega$ ($= \omega ds$), est soumis à une force égale à :

$$f = F d\omega = k' h' I ds \sin \theta \quad (9)$$

I désignant l'intensité totale $i\omega$ du courant, et h' l'intensité du champ partiel considéré. Cette force est perpendiculaire au plan des directions du courant I et du champ h' (plan directeur d'Ampère); elle est dirigée, d'après les formules (7), vers la gauche de l'observateur d'Ampère couché le long du courant (§ 68) et regardant dans la direction de l'intensité h' du champ.

104. Applications. — 1° *Action du champ terrestre sur un courant vertical.* — Soit I l'intensité du courant, supposé ascendant, H la composante horizontale de l'intensité h' du magnétisme terrestre, θ l'inclinaison magnétique. Le conducteur vertical est soumis, sur une longueur l , à une force :

$$f = k' h' I l \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = k' I H l$$

qui le pousse vers l'ouest, perpendiculairement au méridien magnétique. Soit, par exemple, en unités électro-magnétiques C. G. S. ($k' = 1$) :

$$H = 0,196 \quad I = 1 \text{ ampère} = 0,1 \text{ C. G. S.}$$

la f force sera de $0^{\text{dyn}},0196$ par centimètre, soit $0^{\text{mgr}},02$ environ.

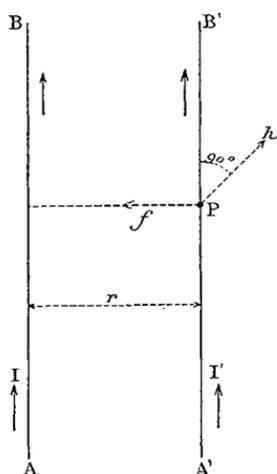


Fig. 53.

2° *Action réciproque de deux courants parallèles.* — Soient AB, A'B' deux fils rectilignes parallèles (dans le plan de la figure 53) parcourus par des courants I et I' ascendants. L'intensité h du champ magnétique créé par le courant I en un point P de A'B' est égale à $\frac{2I}{r}$ (expérience de Biot et Savart) et dirigée perpendiculairement au plan de la figure d'avant en arrière. La force f exercée par ce champ sur une longueur l du fil A'B' est donc égale, d'après la formule (9), à

$$f = k' k' I' l = \frac{2k' I' l}{r}$$

et elle est dirigée perpendiculairement au plan B'Ph, vers le courant AB. Le courant A'B' est donc *attiré* par le courant AB, qui est parallèle et de même sens. — Si, par exemple, les courants I et I' sont de 1 ampère, leur distance r étant de 1 centimètre, la force f est égale à $0^{\text{dyn}},02$ par centimètre de longueur l .

105. Travail des forces magnétiques. —

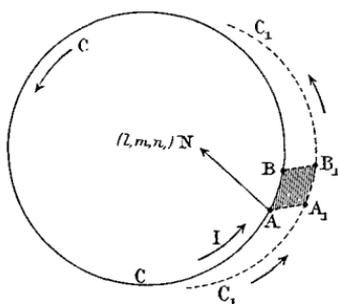


Fig. 54.

Proposons-nous de calculer le travail des forces magnétiques pendant un déplacement infiniment d'un petit système quelconque d'aimants et de courants.

Nous remarquerons d'abord que ces forces et, par suite, leur travail *dependent de l'état actuel du champ, mais nullement de ses variations pendant le temps dt du déplacement considéré.* On pourra donc, pour calculer

ce travail, supposer constant l'état du champ.

Déplacement des courants. — D'autre part, pour faciliter les calculs, nous diviserons le volume entier du champ en tubes élémentaires

de courant (§ 42) tels que C (fig. 54), ayant une section droite infiniment petite et parcourus par des courants d'intensités I_1, I_2, \dots . Un élément $AB = ds$ du tube C se transportera, pendant le temps dt , en $A_1 B_1$ avec une vitesse dont nous désignerons les composantes par u, v, w .

Le travail de la force $F d\omega$ qui s'exerce sur le volume $d\omega$ de l'élément AB pendant ce déplacement sera, d'après les formules (7) du paragraphe 103 :

$$\tau = \left(u F_x + v F_y + w F_z \right) d\omega dt = k \begin{vmatrix} u & v & w \\ X' & Y' & Z' \\ i_x & i_y & i_z \end{vmatrix} d\omega dt$$

Soient ω la section du tube C en A, I l'intensité du courant dans ce tube, et dx, dy, dz les projections de $AB = ds$ sur les axes. On a :

$$d\omega = \omega ds \quad I = i\omega \quad i_x d\omega = i \frac{dx}{ds} \times \omega ds = I dx$$

Donc :

$$\tau = k I \begin{vmatrix} u & v & w \\ X' & Y' & Z' \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} dt = k I \left[X' (w dy - v dz) + Y' (u dz - w dx) + Z' (v dx - u dy) \right] dt$$

Le déplacement AA_1 ayant pour projections $(u dt, v dt, w dt)$, on voit que le vecteur qui a pour composantes :

$$\left(-w dy \ v dz \right) dt \quad \left(u dz - w dx \right) dt \quad \left(v dx - u dy \right) dt$$

a : 1° pour grandeur celle de l'aire du parallélogramme ABA_1B_1 , décrit par l'élément AB ; 2° pour direction celle de la perpendiculaire au plan de ce parallélogramme ; 3° pour sens celui d'un vecteur AN tel que, par rapport à un observateur placé les pieds en A et la tête en N, le vecteur AB doit tourner de gauche à droite autour du point A pour décrire l'angle $BA A_1$ et venir s'appliquer sur AA_1 . Or, le tube C, venant en C_1 au bout du temps dt , décrit une surface infiniment petite qui peut être considérée comme l'accroissement de son feuillet (défini au § 72, fig. 33) pendant le temps dt . Le parallélogramme $ABA_1 B_1$ décrit par l'élément AB du tube C

est donc un élément dS du feuillet accru, et l'on voit que AN est la normale à la face positive de ce feuillet au point A . La valeur de τ peut donc s'écrire :

$$\tau = kI \left(lX' + mY' + nZ' \right) dS$$

l, m, n , désignant les cosinus directeurs de AN .

Donnons au vecteur $\frac{kI}{4\pi}$, ayant même direction que l'intensité \vec{h} du champ, le nom d'*induction magnétique*, et à la quantité :

$$\left(l \frac{kX'}{4\pi} + m \frac{kY'}{4\pi} + n \frac{kZ'}{4\pi} \right) dS = dQ'$$

le nom de *flux d'induction magnétique* à travers l'élément de surface dS du feuillet. On voit finalement que le travail τ est égal au produit de $4\pi I$ par le flux d'induction magnétique dQ' à travers la surface dS décrite par l'élément de tube AB considéré.

Le travail dû au déplacement du tube C tout entier est donc égal au produit de $4\pi I$ par la somme des flux d'induction magnétique à travers les surfaces que décrivent ses divers éléments ds , c'est-à-dire à $4\pi I \delta_1 Q'$, $\delta_1 Q'$ désignant le flux d'induction à travers la surface décrite par le tube C pendant le temps dt (flux d'induction coupé par le tube C).

Remarquons que le flux d'induction magnétique Q' à travers le feuillet du tube C s'accroît, pendant le temps dt : 1° de la partie $\delta_1 Q'$ que nous venons de définir et qui est due au déplacement de ce tube ; 2° d'une partie $\delta_2 Q'$ due aux réactions qui font varier l'état du champ, et qui le feraient varier même si le tube C était immobile. La variation totale de Q' est donc :

$$\delta Q' = \delta_1 Q' + \delta_2 Q' \quad (10)$$

Déplacement des aimants. — Le travail total qu'il s'agit de calculer se compose :

1° Du travail dû aux déplacements des divers tubes de courant I_1, I_2, \dots , et qui, d'après ce qui vient d'être dit, a pour expression : $\Sigma 4\pi I \delta_1 Q'$, la somme Σ s'étendant à tous ces tubes ;

2° Du travail dû au déplacement des aimants, qu'il nous reste à calculer.

Le travail des aimants peut se décomposer en deux parties : l'une égale au travail produit par le déplacement des aimants dans le champ magnétique créé par les aimants eux-mêmes, nous l'appellerons δT_m ; l'autre égale au travail produit par le déplacement des aimants dans le champ des courants.

Or, si un aimant se déplace en présence d'un tube de courant I, le travail produit est le même que si, l'aimant étant fixe, le courant I se déplaçait seul, le déplacement relatif restant le même. Nous savons donc que ce travail est égal au produit de $4 \pi I$ par l'accroissement du flux d'induction Q'_m créé par l'aimant à travers le feuillet du courant I ; nous devons d'ailleurs désigner cet accroissement de Q'_m par la notation $\delta_2 Q'_m$, puisqu'il est dû seulement à la variation de l'état du champ de l'aimant, le courant I *ne se déplaçant pas* en réalité. Il résulte de là que le travail dû au déplacement des aimants en présence des courants a pour expression $\Sigma 4\pi I \delta_2 Q'_m$, la somme Σ s'étendant à tous les tubes de courant I_1, I_2, \dots et Q'_m désignant le flux d'induction *dû aux aimants seuls* à travers le feuillet d'un tube I.

En résumé le travail total $\delta \mathcal{E}$ des forces magnétiques sera égal à :

$$\delta \mathcal{E} = \Sigma 4\pi I \delta_1 Q' + \delta \mathcal{E}_m + \Sigma 4\pi I \delta_2 Q'_m$$

Si l'on désigne par Q'_i le flux d'induction *dû aux courants seuls* à travers le feuillet d'un tube I, on a : $\delta_1 Q' = \delta_1 Q'_m + \delta_1 Q'_i$. Comme d'autre part, d'après (10), $\delta_1 Q'_m + \delta_2 Q'_m$ est égal à $\delta Q'_m$, on aura finalement pour l'expression cherchée :

$$\delta \mathcal{E} = \delta \mathcal{E}_m + \Sigma 4\pi I \delta Q'_m + \Sigma 4\pi I \delta_1 Q'_i \quad (11)$$

NOTA. — Le calcul de $\delta \mathcal{E}$ que nous venons de faire est rigoureux lorsque les circuits se déplacent *sans se déformer* ; c'est d'ailleurs là le cas le plus fréquent dans la pratique. Dans le cas où il y a déformation, le calcul doit être repris, et l'on doit remplacer le travail de la force $F d\omega$ (formules 4 du paragraphe 102), appliquée à un élément de volume $d\omega$, par le travail des forces *pds* (formules 3) appliquées à la surface de cet élément. Le terme de correction qui en résulte serait en général insignifiant.

ACTIONS FICTIVES A DISTANCE

106. Loi de Laplace. — On sait que l'action exercée sur un petit

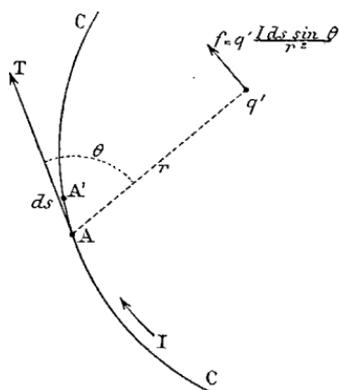


Fig. 55.

aimant par un champ magnétique d'intensité h' est équivalente à celle des deux forces $\vec{f} = \overline{h'} q'$ appliquées à ses pôles, $\pm q'$ désignant la quantité de magnétisme dont on suppose l'existence à chaque pôle. D'autre part, l'intensité $\overline{h'}$ du champ d'un courant est la résultante des intensités h'_1 (définies au § 70, fig. 32) de champs fictifs dus à chaque élément de courant $id\omega$.

Si donc on attribuait une existence réelle aux actions exercées à distance

par les éléments de courant, l'élément $AA' = ds$ d'un circuit CC parcouru par un courant I (fig. 55) produirait un champ magnétique, dont l'intensité h'_1 au point q' serait égale à $\frac{I ds \sin \theta}{r^2}$ (en remplaçant $id\omega = i\omega ds$ par $I ds$). Et si en ce point se trouve un pôle d'aimant, la force f que ce champ exercerait sur le pôle q' serait égale à :

$$f = q' \frac{I ds \sin \theta}{r^2}$$

et serait perpendiculaire au plan de la droite Aq' et de la tangente AT au circuit C . En outre cette force f serait dirigée vers la gauche de l'observateur d'Ampère placé les pieds en A et la tête en T , et regardant le pôle q' .

Cette loi d'action fictive de l'élément de courant $I ds$ sur le pôle d'aimant q' n'est autre chose que *la loi fondamentale de l'électromagnétisme due à Laplace*.

Attribuons de même au pôle q' une masse magnétique $m' = \frac{q'}{k'}$, qui crée un champ dont l'intensité au point A est égale à $\frac{m'}{r^2} = \frac{q'}{k' r^2}$ et est dirigée dans le sens du vecteur $q'A$. La force f

exercée par ce champ sur l'élément de courant $I ds$ est donnée par la formule (9) du paragraphe 103 :

$$f = k' \frac{q'}{k'r^2} I ds \sin \theta = q' \frac{I ds \sin \theta}{r^2}$$

Cette force est égale, parallèle et de sens contraire à la force f exercée par l'élément de courant $I ds$ sur le pôle d'aimant; mais les points d'application de ces forces étant l'un en q' , l'autre en A, elles ne sont point directement opposées. Le principe de l'égalité de l'action et de la réaction se trouverait donc en défaut, si l'on considérait comme réelles les deux actions élémentaires que nous venons de calculer.

107. Loi d'Ampère. — Proposons-nous de chercher de même une loi de l'action fictive d'un élément de courant ab ($I ds$), appartenant à un circuit C (fig. 56), sur un élément de courant $a' b'$ ($I' d's'$), que nous supposons placé sur l'axe Ox

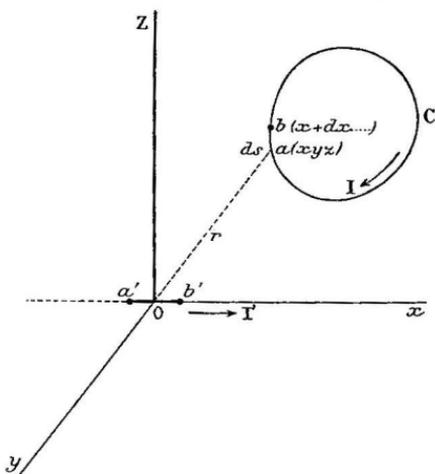


Fig. 56.

à l'origine des coordonnées. Les composantes (X' , Y' , Z') de l'intensité h' du champ créé par le courant C au point O sont données par les formules (16) du paragraphe 70, où les coordonnées x , y , z , du point O doivent être remplacées par zéro, et les coordonnées α , β , γ d'un point a du circuit C par les lettres x , y , z :

$$\left\{ \begin{array}{l} X' = I \int_C \frac{z dy - y dz}{r^3} \\ Y' = I \int_C \frac{x dz - z dx}{r^3} = I \int_C \frac{x^2}{r^3} d \left(\frac{z}{x} \right) \\ Z' = I \int_C \frac{y dx - x dy}{r^3} = I \int_C \frac{x^2}{r^3} d \left(\frac{y}{x} \right) \end{array} \right.$$

Sous l'action de ce champ, l'élément de courant $a' b'$ subit, par unité de volume, une force F donnée par les formules (7) du para-

graphe 103, où l'on fera : $i_x = i'$, $i_y = i_z = 0$. Si donc $d\omega (= \omega ds')$ est le volume de l'élément ab , en remplaçant $i'\omega$ par I' , on aura pour les composantes de la force f qui s'exerce sur cet élément :

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = k' I ds' Z' = -k' I I' ds' \int_C \frac{x^2}{r^3} d\left(\frac{y}{x}\right) \\ f_z = -k' I ds' Y' = -k' I I' ds' \int_C \frac{x^2}{r^3} d\left(\frac{z}{x}\right) \end{cases}$$

Si l'on considère cette force f comme la résultante de forces df exercées par les divers éléments $I ds$ du courant C sur l'élément $I' ds'$, on est donc conduit à poser :

$$\begin{cases} df_x = k' I I' ds' dU \\ df_y = k' I I' ds' \left[dV - \frac{x^2}{r^3} d\left(\frac{y}{x}\right) \right] \\ df_z = k' I I' ds' \left[dW - \frac{x^2}{r^3} d\left(\frac{z}{x}\right) \right] \end{cases}$$

dU , dV , dW désignant des différentielles totales de fonctions arbitraires de x , y , z ; car l'intégration de ces expressions de df_x , df_y , df_z le long du contour fermé C reproduit bien f_x , f_y , f_z . La loi cherchée de la force élémentaire df est donc indéterminée et susceptible d'une infinité de formes différentes.

Toutefois, si l'on veut, comme Ampère, que cette force df (action réciproque des éléments $I ds$ et $I' ds'$) satisfasse au principe de l'égalité de l'action et de la réaction, il faut qu'elle soit dirigée suivant la droite Oa qui joint les deux éléments, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\frac{df_x}{x} = \frac{df_y}{y} = \frac{df_z}{z} = \frac{df}{r}$$

ou, en remplaçant df_x , df_y , df_z par leurs expressions :

$$dV = \frac{y}{x} dU + \frac{x^2}{r^3} d\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$dW = \frac{z}{x} dU + \frac{x^2}{r^3} d\left(\frac{z}{x}\right)$$

On voit facilement, par ces formules, que pour que dV et dW

soient des différentielles totales exactes, dU doit être égal à $d\left(\frac{x^2}{r^3}\right)$; alors $dV = d\left(\frac{xy}{r^3}\right)$ et $dW = d\left(\frac{xz}{r^3}\right)$, et l'on a :

$$\begin{aligned} df &= \frac{r}{x} df_x = k I I' ds' \frac{r}{x} d\left(\frac{x^2}{r^3}\right) \\ &= \frac{k I I' ds'}{r^2} \left(2 dx - 3 \frac{x}{r} dr \right) \end{aligned}$$

En désignant par ε l'angle des éléments ds et ds' entre eux, par θ et θ' les angles qu'ils font respectivement avec le vecteur Oa , et tenant compte des relations :

$$\begin{aligned} dx &= ds \cos \varepsilon \\ dr &= ds \cos \theta \quad x = r \cos \theta \end{aligned}$$

cette formule prend la forme symétrique :

$$df = \frac{k I I' ds ds'}{r^2} \left(2 \cos \varepsilon - 3 \cos \theta \cos \theta' \right)$$

Elle exprime la *loi fondamentale de l'Électrodynamique due à Ampère*.

ÉNERGIE MAGNÉTIQUE

108. Expression de l'énergie magnétique. — Lorsque dans un champ magnétique on vient à déplacer des aimants, les forces magnétiques en jeu produisent un certain travail $\delta \mathcal{E}$. Si le déplacement est effectué de telle sorte qu'il n'y ait ni création de force vive, ni dégagement de chaleur, ni variation d'aucune autre espèce d'énergie connue jusqu'ici, — $\delta \mathcal{E}$ sera, d'après le principe de la conservation de l'énergie, l'équivalent d'un accroissement δW d'énergie du champ sous une nouvelle forme dite *magnétique*. La définition et le calcul de l'énergie magnétique W du champ résulteront de l'égalité :

$$\delta W = - \delta \mathcal{E} \tag{1}$$

Cette formule serait incorrecte si le champ contenait des courants, car ceux-ci donneraient inévitablement lieu à un dégage-

ment de chaleur. Nous supposons donc qu'il n'y a que des aimants, que l'on déplace du reste assez lentement pour que les phénomènes d'induction électromagnétique engendrés par ce déplacement soient négligeables. Ces aimants, étant permanents, ont même coefficient k' que l'air et les autres corps (§ 67 et 98), et l'on peut leur attribuer une distribution fixe de masses magnétiques (§ 93).

L'expression du travail $\delta \mathcal{E}$ dépend uniquement des déplacements imprimés aux corps et des forces magnétiques en jeu. Or les formules (3) ou (4) du paragraphe 102 représentant ces forces sont identiques à celles des paragraphes 24 et 25 qui représentent les forces électriques. Imaginons qu'en chaque point (x, y, z) l'intensité $(X' Y' Z')$ du champ magnétique considéré devienne une intensité de champ électrique, le coefficient k' devenant le pouvoir inducteur électrique, et les déplacements des corps restant les mêmes, $\delta \mathcal{E}$ deviendra la valeur du travail des forces électriques. Mais, le champ admettant un potentiel ($\mu'_x = \mu'_y = \mu'_z = 0$), on sait que ce travail $\delta \mathcal{E}$ changé de signe est égal à l'accroissement δW de l'énergie électrique du champ; comme l'énergie électrique a pour expression $\int_U \frac{k' h'^2}{8\pi} d\omega$, on a donc :

$$- \delta \mathcal{E} = \delta \int_U \frac{k' h'^2}{8\pi} d\omega$$

La démonstration de cette formule résultant de calculs indépendants des qualifications *électrique* ou *magnétique*, nous pouvons l'appliquer au calcul du travail $\delta \mathcal{E}$ des forces magnétiques, et la formule (1) donne alors :

$$\delta W = \delta \int_U \frac{k' h'^2}{8\pi} d\omega$$

Ainsi, quels que soient les déplacements des aimants, l'énergie magnétique W du champ subit la même variation que l'intégrale du second membre de cette relation; elle est, par suite, égale à cette intégrale, à une constante près :

$$W = \int_U \frac{k' h'^2}{8\pi} d\omega + W_0$$

Nous ne chercherons point à déterminer la constante W_0 qui dépend des valeurs inconnues de l'énergie magnétique propres aux divers aimants pris isolément. Du reste W_0 , ne devant jamais varier puisque nous supposons toujours les aimants permanents, ne jouera aucun rôle dans la suite, et nous pouvons en faire abstraction. L'énergie d'un champ magnétique sera donc représentée par la formule :

$$W = \int_U \frac{k'h^2}{8\pi} d\omega \quad (2)$$

109. Applications. — Les indications données au paragraphe 94 permettront de calculer, par la formule (2), l'énergie magnétique du champ créé dans un solénoïde, en forme de tore, par un courant i circulant dans ses n spires ; l'intégration n'offre pas de difficultés. Si l'on suppose que le cercle méridien du tore ait un rayon infiniment petit, l'intensité h' du champ est uniforme dans le volume U du tore, et la formule (2) donne :

$$W = \frac{k'h'^2}{8\pi} U$$

On voit, par ce cas particulier, que l'énergie magnétique w' dans l'unité de volume a pour expression :

$$w' = \frac{k'h'^2}{8\pi} \quad (3)$$

formule semblable à celle de l'énergie électrique dans l'unité de volume (§ 31).

Dans un grand nombre de questions d'électromagnétisme on doit tenir compte à la fois des effets électriques et des effets magnétiques, dont les intensités sont à peu près du même ordre de grandeur. Dans d'autres questions au contraire, on ne tient compte que des effets électriques (cas d'un champ électrostatique très lentement variable) ou des effets magnétiques (cas des phénomènes d'induction électromagnétique). Il est donc utile de reconnaître si, dans un problème donné, les forces électriques en jeu (ou l'énergie électrique) sont d'un ordre de grandeur négligeable par rapport aux forces magnétiques (ou à l'énergie magnétique).

On se rappellera, à cet effet, qu'en un point d'un champ électrique (ou magnétique) où l'intensité est h (ou h'), la formule $\frac{kh^2}{8\pi}$ (ou $\frac{k'h'^2}{8\pi}$) représente : soit la force électrique (ou magnétique) par unité de surface sur un élément de surface orienté d'une manière quelconque (§ 24 et 102), soit l'énergie électrique (ou magnétique) par unité de volume. Le rapport des valeurs de $\frac{kh^2}{8\pi}$ et de $\frac{k'h'^2}{8\pi}$ en un même point (x, y, z) montrera donc l'ordre de grandeur du rapport soit des forces électriques aux forces magnétiques, soit du travail des forces électriques au travail des forces magnétiques, soit de l'énergie électrique à l'énergie magnétique au point considéré.

Exemple : 1° D'abord pour avoir l'égalité :

$$\frac{kh^2}{8\pi} = \frac{k'h'^2}{8\pi}$$

il faut que le rapport de h à h' soit égal à $\sqrt{\frac{k'}{k}}$. Dans l'air, *en unités pratiques*, on a : $k' = 1$ et $k = \frac{1}{900}$; d'où : $h = 30 h'$. A la valeur $h = 3 \times 10^{13}$ (maximum de puissance du champ électrique : chute de potentiel de 3 000 volts par millimètre) correspond $h' = 10^{12}$ (soit 500 fois environ l'intensité horizontale du champ magnétique terrestre, ou $\frac{1}{400}$ de l'intensité des champs magnétiques les plus puissants que l'on sache créer). On voit que l'énergie d'un champ magnétique peut atteindre des valeurs beaucoup plus grandes ($400^2 = 160\ 000$ fois plus grandes) que celle d'un champ électrique.

2° Dans l'expérience de Biot et Savart (§ 68), l'intensité h' du champ magnétique à une distance r de l'axe du conducteur est $\frac{2I}{r}$. Si les surfaces équipotentielles du champ électrique sont des plans perpendiculaires à l'axe, l'intensité h de ce champ est uniforme ; et comme la densité ch du courant est aussi égale à $\frac{I}{\pi a^2}$, on a : $h = \frac{I}{c\pi a^2}$. Il en résulte, pour le rapport de l'énergie électrique à l'énergie magnétique en un point quelconque :

$$\frac{kh^2}{8\pi} : \frac{k'h'^2}{8\pi} = \frac{k}{k'} \left(\frac{h}{h'} \right)^2 = \frac{k}{k'} \left(\frac{r}{2\pi ca^2} \right)^2$$

A la surface du conducteur ($r = a$), ce rapport est égal à :

$$\frac{k}{k'} \left(\frac{1}{2\pi ac} \right)^2 = 3 \times 10^{-14} \text{ environ}$$

en prenant :

$$\begin{aligned} c &= 0,625 \times 10^{15} \text{ (cuivre)} \\ 2a &= 1 \text{ mm} = 10^{-10} \text{ u. pr.} \end{aligned}$$

c'est sa valeur minimum ; il serait égal à 1 à 3 kilomètres de distance de l'axe.

140. Énergie magnétique d'un système d'aimants et de courants.

— Soient : $h(X, Y, Z)$ l'intensité d'un champ magnétique stable ou variable au point (x, y, z) ; h' ($X'Y'Z'$) et h'' ($X''Y''Z''$) les composantes de cette intensité h dues respectivement aux courants seuls et aux aimants seuls ; de telle sorte que l'on a :

$$\begin{aligned} h^2 &= (X' + X'')^2 + (Y' + Y'')^2 + (Z' + Z'')^2 \\ &= h'^2 + h''^2 + 2(X'X'' + Y'Y'' + Z'Z'') \end{aligned}$$

L'énergie magnétique W du champ aura ainsi pour expression.

$$\begin{aligned} W &= \int_U \frac{k h^2}{8\pi} d\omega = \int_U \frac{k h'^2}{8\pi} d\omega + \int_U \frac{k h''^2}{8\pi} d\omega + \int_U \frac{k'}{4\pi} (X'X'' + Y'Y'' + Z'Z'') d\omega \\ &= W_i + W_m + W_{mi} \end{aligned}$$

Elle est donc la somme : 1° de l'énergie W_i du champ créé par les courants seuls ; 2° de l'énergie W_m du champ créé par les aimants seuls ; 3° d'un terme complémentaire W_{mi} . Nous allons montrer que W_{mi} est nul.

Désignons en effet par V'' le potentiel *uniforme et continu* du champ des aimants. Le coefficient k' étant constant, on aura :

$$\begin{aligned} W_{mi} &= \int_U \frac{k'}{4\pi} (X'X'' + Y'Y'' + Z'Z'') d\omega = -\frac{k'}{4\pi} \int_U \left(X' \frac{\partial V''}{\partial x} + Y' \frac{\partial V''}{\partial y} + Z' \frac{\partial V''}{\partial z} \right) d\omega \\ &= \frac{k'}{4\pi} \int_U V'' \left(\frac{\partial X'}{\partial x} + \frac{\partial Y'}{\partial y} + \frac{\partial Z'}{\partial z} \right) d\omega + \frac{k'}{4\pi} \int_S V'' (lX' + mY' + nZ') dS \quad (4) \end{aligned}$$

cette dernière expression (4) se déduisant de la précédente en vertu

de l'identité (3) du paragraphe 17. Or le vecteur $(X'Y'Z')$ du champ des courants satisfait en tout point à la relation :

$$\frac{\partial X'}{\partial x} + \frac{\partial Y'}{\partial y} + \frac{\partial Z'}{\partial z} = 0$$

La première intégrale de (4) est donc nulle. D'autre part la surface S est une surface enveloppant le champ ; en la prenant extérieure à celui-ci on aura : $X' = Y' = Z' = 0$ en tout point de S . La seconde intégrale de (4) est donc nulle aussi, et $W_{mi} = 0$. L'expression de W se réduit à :

$$W = W_i + W_m \quad (5)$$

Nouvelle forme de W_i . — En faisant subir à W_i une transformation semblable à celle de W_{mi} et désignant par V' le potentiel *uniforme et discontinu* du champ des courants (§ 72), on aura :

$$\begin{aligned} W_i &= \int_U \frac{Kh^2}{8\pi} d\omega = - \int_U \frac{k'}{8\pi} \left(X' \frac{\partial V'}{\partial x} + Y' \frac{\partial V'}{\partial y} + Z' \frac{\partial V'}{\partial z} \right) d\omega \\ &= \int_U \frac{k'}{8\pi} V' \left(\frac{\partial X'}{\partial x} + \frac{\partial Y'}{\partial y} + \frac{\partial Z'}{\partial z} \right) d\omega + \int_S \frac{k'}{8\pi} V' (lX' + mY' + nZ') dS \quad (6) \end{aligned}$$

On voit comme ci-dessus que la première intégrale de l'expression (6) est nulle. Dans la seconde, S désigne, comme on sait (§ 17), l'ensemble : 1° de la surface enveloppe du champ, sur laquelle on a $X' = Y' = Z' = 0$; 2° des surfaces de discontinuité du potentiel, c'est-à-dire des feuillets des divers tubes élémentaires de courant $I_1 I_2 \dots$ en lesquels on peut décomposer le volume U du champ (v. fig. 33 au § 72). Il nous reste donc à calculer la seconde intégrale (6) sur les deux faces du feuillet Σ de chaque tube de courant I (fig. 57).

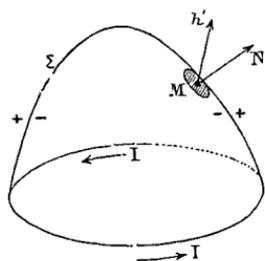


Fig. 57.

Prenons autour d'un point M du feuillet Σ , un élément de surface dS (en hachures, fig. 57). Soient : V'_1 et V'_2 les valeurs du potentiel V' sur les faces positive et négative respectivement au point M ; l, m, n les cosinus directeurs de la normale MN à la face

positive. Comme on a : $V'_1 - V'_2 = 4\pi I$, l'élément d'intégrale que nous avons à prendre sur les deux faces de dS sera :

$$dS \left[\frac{k'}{8\pi} V'_1 (lX' + mY' + nZ') + \frac{k'}{8\pi} V'_2 (-lX' - mY' - nZ') \right] = 2\pi I dQ'_1$$

dQ'_1 désignant le flux d'induction magnétique à travers la surface dS (défini au § 105), ce flux étant dû uniquement aux courants.

Si Q'_i désigne le flux total d'induction à travers le feuillet Σ du tube de courant I , l'intégrale 6 relative à ce feuillet sera donc $2\pi I Q'_i$. En faisant la somme des termes semblables pour tous les tubes de courants I_1, I_2, \dots on aura :

$$W_i = \sum 2\pi I Q'_i \quad (7)$$

111. Variation de l'énergie magnétique d'un champ. — Supposons que, dans un champ magnétique créé par des courants et des aimants, on déplace les corps d'une manière quelconque. Pendant un temps infiniment petit dt , les forces magnétiques en jeu produiront un travail $\delta\mathcal{E}$ et d'autre part l'énergie magnétique du champ variera de δW . L'équation (4) ne s'applique pas à ce cas, ainsi que nous l'avons expliqué au paragraphe 108 ; elle ne saurait donc faire connaître la valeur de δW quand on connaît celle de $\delta\mathcal{E}$, calculée au paragraphe 105. Nous allons donc calculer directement l'expression de la somme $\delta\mathcal{E} + \delta W$, qui n'est pas nulle.

De l'équation 5 on déduit :

$$\delta W = \delta W_m + \delta W_i \quad (8)$$

calculons δW_i de la même manière que nous l'avons fait pour W au paragraphe 110. Le coefficient k' , étant le même pour tous les corps, ne variera pas en un point (x, y, z) malgré les déplacements effectués ; mais X', Y', Z' , varieront en ce point de $\delta X', \delta Y', \delta Z'$ pendant le temps dt . Il en résultera une variation de l'énergie W égale à :

$$\delta W_i = \delta \int_U \frac{k'}{8\pi} (X'^2 + Y'^2 + Z'^2) d\omega = \int_U \frac{k'}{4\pi} (X'\delta X' + Y'\delta Y' + Z'\delta Z') d\omega$$

En désignant comme plus haut, par V' le potentiel du champ des courants, ceci peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \delta W_i &= - \int_U \frac{k'}{4\pi} \left(\frac{\partial V'}{\partial x} \delta X' + \frac{\partial V'}{\partial y} \delta Y' + \frac{\partial V'}{\partial z} \delta Z' \right) d\omega \\ &= \int_U \frac{k'}{4\pi} V' \left[\frac{\partial}{\partial x} (\delta X') + \frac{\partial}{\partial y} (\delta Y') + \frac{\partial}{\partial z} (\delta Z') \right] d\omega \\ &\quad + \int_S \frac{k'}{4\pi} V' \left[l \delta X' + m \delta Y' + n \delta Z' \right] dS \end{aligned} \quad (9)$$

Mais on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\delta X') + \frac{\partial}{\partial y} (\delta Y') + \frac{\partial}{\partial z} (\delta Z') &= \delta. \left[\frac{\partial X'}{\partial x} + \frac{\partial Y'}{\partial y} + \frac{\partial Z'}{\partial z} \right] = 0 \\ \frac{k'}{4\pi} \left[l \delta X' + m \delta Y' + n \delta Z' \right] &= \delta. \left[l \frac{kX'}{4\pi} + m \frac{kY'}{4\pi} + n \frac{kZ'}{4\pi} \right] \end{aligned}$$

La première des intégrales (9) est donc nulle, et δW_i se réduit à :

$$\delta W_i = \int_S V' \delta \left[l \frac{kX'}{4\pi} + m \frac{kY'}{4\pi} + n \frac{kZ'}{4\pi} \right] dS$$

Cette intégrale calculée comme au paragraphe 110 pour l'ensemble des feuillet Σ des tubes de courant I_1, I_2, \dots est égale à :

$$\Sigma (V'_1 - V'_2) \delta Q'_i = \Sigma 4\pi I \delta Q'_i$$

Il convient d'ailleurs de remarquer que pour cette intégration, on décompose le volume U du champ en éléments de volume, qui coïncident avec les tubes de courant existant à l'époque t , mais qui naturellement ne participent pas au mouvement de ces tubes dans l'intervalle de t à $t + dt$. Le sens de $\delta Q'_i$ dans la formule précédente est donc celui de l'accroissement du flux d'induction à travers le feuillet du tube I considéré comme fixe pendant le temps dt ; nous le désignerons donc par $\delta_2 Q'_i$ suivant la notation du paragraphe 105. Il en résulte :

$$\delta W_i = \Sigma 4\pi I \delta_2 Q'_i \quad (10)$$

De la formule (11) du paragraphe 105 et des formules (8) et (10) ci-dessus, on déduit :

$$\delta \mathcal{E} + \delta W = \delta \mathcal{E}_m + \Sigma 4\pi I \delta Q'_m + \Sigma 4\pi I \delta_1 Q'_i + \delta W_m + \Sigma 4\pi I \delta_2 Q'_i$$

La somme $(\delta \mathcal{E}_m + \delta W_m)$ est nulle, car elle se rapporte au champ des aimants seuls, pour lequel la formule (1) du paragraphe 108 est exacte. D'autre part, par définition, $(\delta_1 Q'_i + \delta_2 Q'_i)$ est égal à la variation totale $\delta Q'_i$ du flux d'induction dû aux courants à travers le tube de courant I mobile pendant le temps dt ; et $(\delta Q'_i + \delta Q'_m)$ est la variation totale $\delta Q'$ du flux d'induction dû à la fois aux aimants et aux courants. L'expression de $(\delta W + \delta \mathcal{E})$ devient ainsi :

$$\delta \mathcal{E} + \delta W = \Sigma 4\pi I \delta Q' \quad (11)$$

COEFFICIENTS D'INDUCTION

112. Définition des coefficients d'induction. — Considérons le champ magnétique créé par deux courants d'intensités I' et I'' (parcourant, par exemple, deux circuits conducteurs fermés C' et C''). L'intensité \bar{h} (XYZ) de ce champ en un point (x, y, z) quelconque est la résultante des intensités \bar{h}' ($X'Y'Z'$) et \bar{h}'' ($X''Y''Z''$) des champs créés respectivement par les deux courants I' et I'' . La valeur W de l'énergie magnétique totale du champ peut s'écrire comme au paragraphe 110 :

$$\begin{aligned} W &= \int_U \frac{k'h^2}{8\pi} d\omega = \int_U \frac{k'h'^2}{8\pi} d\omega + \int_U \frac{k'h''^2}{8\pi} d\omega + \int_U \frac{k'}{4\pi} (X'X' + Y'Y' + Z'Z') d\omega \\ &= W' + W'' + W''' \end{aligned}$$

Comme h' et h'' sont respectivement proportionnels à I' et à I'' , nous poserons :

$$W' = \frac{1}{2} L' I'^2 \quad W'' = \frac{1}{2} L'' I''^2 \quad W''' = M I' I''$$

Nous appellerons L' et L'' respectivement *coefficients d'auto-induction* des circuits C' et C'' , et M coefficient d'*induction mutuelle* des deux circuits (noms suggérés par l'hypothèse des *forces électromotrices induites*). Ces coefficients ont des valeurs variables avec la distribution du courant dans les circuits C' et C'' . Toutefois dans le cas de courants permanents ils sont bien déterminés, la distribution d'un courant permanent d'intensité totale I dans un circuit conducteur donné étant unique.

L'unité pratique de coefficient d'induction a reçu le nom de *henry*.

Les coefficients L' et M se calculeront par les deux formules :

$$L = 2 \frac{W'}{I^2} = \int_U \frac{k}{4\pi} \frac{h'^2}{I^2} d\omega$$

$$M = \frac{W''}{II''} = \int_U \frac{k}{4\pi} \frac{X'X'' + Y'Y'' + Z'Z''}{II''} d\omega \quad (12)$$

dont la première est un cas particulier de la seconde, cas où I'' se confond avec I' . Il suffit donc de savoir calculer le coefficient d'induction mutuelle M . Nous allons à cet effet indiquer divers procédés d'intégration.

113. Formule de Neumann. — L'intensité ($X'Y'Z'$) du champ dû au courant I' seul peut se calculer par les formules (14) du paragraphe 70. Seulement nous désignerons par la notation C' le volume U du circuit C' ; et nous remplacerons : (α, β, γ) par (x', y', z'), le volume $d\omega$ (pris au point α, β, γ) par $d\omega'$, et le vecteur ($i'_x i'_y i'_z$) par ($i'_x i'_y i'_z$). On a ainsi :

$$X' = \int_{C'} \frac{(y-y') i'_z - (z-z') i'_y}{r^3} d\omega' = \int_{C'} \left[-i'_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + i'_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right] d\omega' \quad (13)$$

Posons :

$$v'_x = \int_U \frac{i'_x}{r} d\omega' \quad v'_y = \int_U \frac{i'_y}{r} d\omega' \quad v'_z = \int_U \frac{i'_z}{r} d\omega' \quad (14)$$

Comme le vecteur ($i'_x i'_y i'_z$) au point ($x' y' z'$) ne dépend pas de (x, y, z), on écrira ainsi la formule (13) et deux autres semblables :

$$X' = \frac{\partial v'_y}{\partial z} - \frac{\partial v'_z}{\partial y} \quad Y' = \frac{\partial v'_z}{\partial x} - \frac{\partial v'_x}{\partial z} \quad Z' = \frac{\partial v'_x}{\partial y} - \frac{\partial v'_y}{\partial x} \quad (15)$$

Portons ces expressions dans la formule (12); on aura :

$$MII'' = \frac{k}{4\pi} \int_U \left[X'' \left(\frac{\partial v'_y}{\partial z} - \frac{\partial v'_z}{\partial y} \right) + Y'' \left(\frac{\partial v'_z}{\partial x} - \frac{\partial v'_x}{\partial z} \right) + Z'' \left(\frac{\partial v'_x}{\partial y} - \frac{\partial v'_y}{\partial x} \right) \right] d\omega$$

ou par application de la formule (3) du paragraphe 17 :

$$MIY'' = \frac{k'}{4\pi} \int_U \left[v'_x \left(\frac{\partial Y''}{\partial z} - \frac{\partial Z''}{\partial y} \right) + v'_y \left(\frac{\partial Z''}{\partial x} - \frac{\partial X''}{\partial z} \right) + v'_z \left(\frac{\partial X''}{\partial y} - \frac{\partial Y''}{\partial x} \right) \right] d\omega$$

$$+ \frac{k'}{4\pi} \int_S \left[X'' \left(mv'_z - nv'_y \right) + Y'' \left(nv'_x - lv'_z \right) + Z'' \left(lv'_y - mv'_x \right) \right] dS$$

cette dernière intégrale de surface est nulle parce que la surface S qui enveloppe le champ est supposée extérieure à celui-ci : $X'' = Y'' = Z'' = 0$ en chacun de ces points.

D'autre part, on a (formules 11, § 69) :

$$\frac{\partial Y''}{\partial z} - \frac{\partial Z''}{\partial y} = 4\pi i''_x \qquad \frac{\partial Z''}{\partial x} - \frac{\partial X''}{\partial z} = 4\pi i''_y \qquad \frac{\partial X''}{\partial y} - \frac{\partial Y''}{\partial x} = 4\pi i''_z$$

Par suite :

$$MIY'' = \frac{k'}{4\pi} \int_U 4\pi \left(v'_x i''_x + v'_y i''_y + v'_z i''_z \right) d\omega$$

Dans cette formule, nous pouvons remplacer : 1° le volume d'intégration U par C'' , puisque $i'' = 0$ en dehors du circuit C'' ; 2° $d\omega$ par $d\omega''$; 3° $v'_x v'_y v'_z$ par leurs expressions (14). Il vient :

$$MIY'' = k' \int_{C''} \left[i''_x \int_{C'} \frac{i'_x}{r} d\omega' + i''_y \int_{C'} \frac{i'_y}{r} d\omega' + i''_z \int_{C'} \frac{i'_z}{r} d\omega' \right] d\omega''$$

$$= k' \int_{C''} \int_{C'} \frac{i'_x i''_x + i'_y i''_y + i'_z i''_z}{r} d\omega' d\omega''$$

ou :

$$M = k' \int_{C''} \int_{C'} \frac{i' i'' \cos \varepsilon}{r} d\omega' d\omega'' \tag{16}$$

ε désignant l'angle des vecteurs i' et i'' .

Si les dimensions transversales des circuits C' et C'' sont très faibles par rapport à leur distance, on peut prendre pour éléments de volume $d\omega'$ et $d\omega''$ des éléments de circuit de longueurs ds' et ds'' ($d\omega' = \omega' ds'$, $d\omega'' = \omega'' ds''$) et remplacer $i' d\omega'$ par $I' ds'$ et $i'' d\omega''$ par $I'' ds''$:

$$M = k' \int_{C''} \int_{C'} \frac{ds' ds'' \cos \varepsilon}{r} \tag{17}$$

C'est la formule de Neumann.

114. Autre méthode de calcul. — Considérons encore les circuits C' et C'' parcourus par des courants I'_0 et I''_0 , et divisons-les en

tubes élémentaires de courant $I'_1 I'_2 \dots$ (pour C') et $I''_1 I''_2 \dots$ (pour C'').
La formule (12) :

$$W''' = MI'_0 I''_0 = \int_U \frac{k'}{4\pi} \left(X' X'' + Y' Y'' + Z' Z'' \right) d\omega$$

pourra s'écrire, comme la formule (4) du paragraphe 110 :

$$MI'_0 I''_0 = \frac{k'}{4\pi} \int_U V'' \left(\frac{\partial X'}{\partial x} + \frac{\partial Y'}{\partial y} + \frac{\partial Z'}{\partial z} \right) d\omega + \frac{k'}{4\pi} \int_S V'' \left(l X' + m Y' + n Z' \right) dS$$

La première intégrale du second membre de cette formule est nulle, à cause de $\Sigma \frac{dX'}{dx} = 0$. Quant à la seconde, l'intégration doit être faite sur les feuillettes des tubes de courant $I'_1 I'_2 \dots$ où le potentiel V'' varie brusquement de $4\pi I''_1$, $4\pi I''_2 \dots$ quand on passe de la face négative à la face positive. Pour chaque tube de courant I'' l'intégrale est donc $4\pi I'' Q''_i$, Q''_i désignant le flux d'induction magnétique dû aux courants $I'_1 I'_2 \dots$ à travers le feuillet du tube I'' . Pour l'ensemble des tubes I'' , on aura ainsi :

$$MI'_0 I''_0 = \Sigma 4\pi I'' Q''_i \quad (18)$$

Divisons les deux membres de cette équation par $I''_0 = \Sigma I''$:

$$M I_0 = \Sigma 4\pi \frac{I''}{I''_0} Q''_i \quad (19)$$

$\Sigma \frac{I''}{I''_0} Q''_i$ est la moyenne arithmétique des flux d'induction magnétique Q''_i dus au courant I'_0 à travers les feuillettes des courants $I''_1 I''_2 \dots$ (en prenant $I'_1 = I'_2 = \dots$) ; nous l'appellerons flux d'induction moyen dû au courant I'_0 à travers le circuit du courant I''_0 . En faisant $I'_0 = 1$, on voit que le coefficient d'induction mutuelle M des circuits C' et C'' est, au facteur 4π près, le flux moyen d'induction magnétique dû au courant $I'_0 = 1$ (ou $I''_0 = 1$) à travers le circuit du courant I''_0 (ou I'_0).

La formule (18) donne encore lieu à un autre énoncé, qui peut être d'une application plus commode. Puisque le vecteur $\frac{k'h'}{4\pi}$ appelé induction magnétique, jouit de la propriété :

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{k' X'}{4\pi} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{k' Y'}{4\pi} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{k' Z'}{4\pi} = \frac{k'}{4\pi} \left(\frac{\partial X'}{\partial x} + \frac{\partial Y'}{\partial y} + \frac{\partial Z'}{\partial z} \right) = 0$$

on peut diviser le volume U du champ en *tubes élémentaires d'induction*, dont la surface est tangente au vecteur $\frac{k'h'}{4\pi}$, et tels que le flux d'induction magnétique est le même à travers toute section d'un même tube (propriété démontrée au paragraphe 42 pour un vecteur \bar{h}). Soit TT un de ces tubes (fig. 58) dus au courant I'_0 , dont le flux d'induction infiniment petit soit égal à dQ_r ; on voit que le Q''_r de la formule (18) est la somme des flux d'induction dQ_r des tubes, tels que TT , qui traversent le diaphragme Σ du tube de courant I'' . Mais si le tube TT embrasse le tube I'' , cette propriété est réciproque; et le sens dans lequel le circuit I'' traverse le feuillet du tube TT

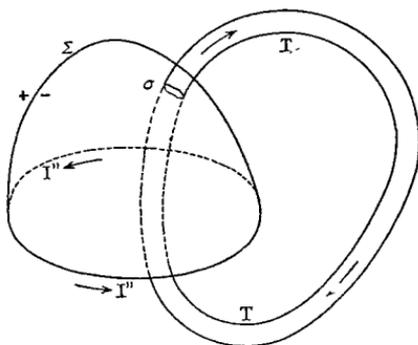


Fig. 58.

est le même que le sens, positif ou négatif, dans lequel le circuit TT traverse le feuillet Σ du courant I'' . Il en résulte que l'on pourra calculer $\Sigma I'' Q''_r$ en multipliant le flux d'induction dQ_r , d'un tube d'induction TT du champ du courant I'_0 par l'intensité $\Sigma I''$ de la partie du courant I''_0 qui est embrassée par ce tube, puis en faisant la somme de tous les produits semblables pour l'ensemble des tubes TT du champ, en tenant compte du sens d'embrassement.

Remarque. — On verra facilement que, dans un champ créé par des courants $I_1 I_2 \dots I_k \dots I_1 \dots I_n$ l'énergie magnétique totale W a pour expression :

$$W = \Sigma \frac{1}{2} L_k I_k^2 + \Sigma M_{kl} I_k I_l \quad (20)$$

L_k étant le coefficient d'auto-induction du circuit C_k où existe le courant I_k , et M_{kl} le coefficient d'induction mutuelle des circuits C_k et C_l .

Lorsqu'on déplace des corps et que l'état du champ varie, L_k , M_{kl} , $I_k \dots$ varient de quantités δL_k , δM_{kl} , $\delta I_k \dots$ infiniment petites pendant le temps dt . On en déduit, par la formule (20), l'expression suivante de la variation δW de l'énergie :

$$\delta W = \Sigma I_k \delta \left[M_{k1} I_1 + M_{k2} I_2 + \dots + L_k I_k + \dots + M_{kn} I_n \right] - \left[\frac{1}{2} \Sigma I_k^2 \delta L_k + \Sigma I_k I_l \delta M_{kl} \right] \quad (21)$$

Mais, par généralisation de la formule (19), la quantité :

$$M_{k1} I_1 + M_{k2} I_2 + \dots + L_k I_k + \dots + M_{kn} I_n = 4\pi \left(Q'_i \right)_k$$

est égale au produit de 4π par le flux d'induction moyen du champ magnétique à travers le circuit C_k . La somme :

$$\Sigma I_k \delta \left[M_{k1} I_1 + \dots + L_k I_k + \dots + M_{kn} I_n \right] = \Sigma 4\pi I_k \delta \left(Q'_i \right)_k$$

n'est donc autre chose que le second membre $\Sigma 4\pi I_k \delta Q'_i$ de la formule (11) ; elle est, par suite, égale à $(\delta \mathcal{E} + \delta W)$. En portant cette expression dans l'équation (21), on trouve :

$$\delta \mathcal{E} = \frac{1}{2} \Sigma I_k^2 \delta L_k + \Sigma I_k I_l \delta M_{kl} \quad (22)$$

Cette forme du travail δT des forces magnétiques aurait pu être déduite directement de la formule (11) du paragraphe 105 réduite à : $\delta \mathcal{E} = \Sigma 4\pi I_k \delta Q'_i$. Remarquons que le travail $\delta \mathcal{E}$ (22) est précisément égal à l'accroissement δW de l'énergie magnétique dans le cas où les courants I_1, I_2, \dots sont supposés *constants*, car de la formule (20) on déduit alors :

$$\delta W = \frac{1}{2} \Sigma I_k^2 \delta L_k + \Sigma I_k I_l \delta M_{kl}$$

145. Induction mutuelle de deux lignes électriques parallèles (en courant permanent). — Supposons que C' et C'' se composent chacun de deux fils parallèles (fig. 59) de longueur pratiquement indéfinie (lignes télégraphiques à double fil). Le champ magnétique créé par le courant I' est la superposition des champs créés par les deux fils de C' ; chacun de ces champs est cylindrique, c'est-à-dire a même intensité en tous les points d'une droite parallèle aux fils ;

c'est du reste le champ étudié dans l'expérience de Biot et Savart. L'intensité h' du champ extérieur créé par l'un des fils à une

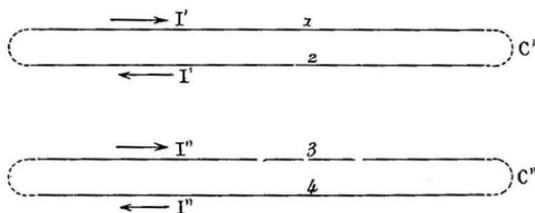


Fig. 59.

distance r de l'axe de ce fil, est égale à $\frac{2I'}{r}$ et est indépendante du diamètre du fil.

On peut donc, pour calculer le flux d'induction émis par le courant I' à travers C'' et en déduire le coefficient d'induction mutuelle M des deux circuits, supposer nul le diamètre des fils de C' . Pour la même raison on peut supposer les fils de C'' réduits à leurs axes.

Soient 1, 2, 3, 4 (fig. 60) les traces des axes des fils 1, 2, 3, 4 sur un plan perpendiculaire à ces fils. Les lignes de flux du courant I' du fil 1 sont des cercles ayant 1 pour centre en projection. Celles qui ont un rayon compris entre les distances r_{13} et r_{14} du fil 1 aux fils 3 et 4 sont évidemment les seules qui embrassent le courant I'' , c'est-à-dire coupent son feuillet. Nous avons donc à calculer le flux d'induction du tube de flux qui est compris entre les cylindres ayant le fil 1 pour axe et r_{13} et r_{14} pour rayons, en limitant ce tube par deux plans perpendiculaires à l'axe et situés à une distance l l'un de l'autre. La section droite de ce tube est un rectangle ayant l pour hauteur et la droite 3 A de longueur $r_{14} - r_{13}$, comme base.

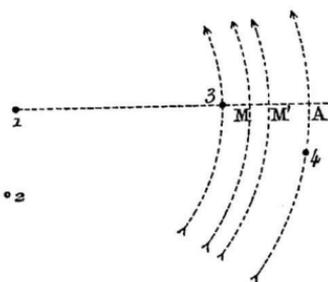


Fig. 60.

Le flux à travers le rectangle, de hauteur l , qui a pour base $MM' = dr$, est égal au produit de la surface ldr par l'intensité $\frac{2I'}{r}$ du

champ et par $\frac{k'}{4\pi}$. Donc le flux total dû au courant I' du fil 1 est :

$$\frac{k'}{4\pi} \int_{r_{13}}^{r_{14}} \frac{2 I'}{r} \cdot l dr = \frac{2 k' I' l}{4\pi} \mathcal{L} \left(\frac{r_{14}}{r_{13}} \right)$$

Le flux dû au courant $-I'$ du fil 2 est de même :

$$- \frac{k'}{4\pi} \int_{r_{23}}^{r_{24}} \frac{2 I'}{r} l dr = - \frac{2 k' I' l}{4\pi} \mathcal{L} \left(\frac{r_{24}}{r_{23}} \right)$$

Le flux d'induction dû au courant du circuit C' à travers C'' est donc finalement :

$$\frac{k' I' l}{2\pi} \mathcal{L} \left(\frac{r_{14}}{r_{13}} \cdot \frac{r_{23}}{r_{24}} \right).$$

En multipliant ce flux par I'' , on aura le second membre de la formule (18) divisé par 4π ; donc :

$$M = 2k' l \mathcal{L} \left(\frac{r_{14}}{r_{13}} \cdot \frac{r_{23}}{r_{24}} \right) \quad (23)$$

On en déduit la condition pour que les deux circuits aient un coefficient d'induction mutuelle égal à zéro :

$$r_{14} r_{23} = r_{13} \cdot r_{24}$$

116. Auto-induction d'une ligne électrique à double fil (en courant permanent). — Considérons le circuit C' de la figure 59, et

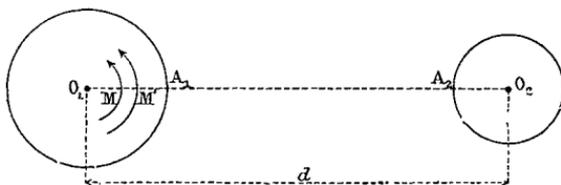


Fig. 61.

représentons les sections droites des fils 1 et 2, qui sont des cercles de rayons $O_1 A_1 = a_1$ et $O_2 A_2 = a_2$ (fig. 61). Calculons le coefficient de self-induction de ce circuit par la formule (18). Nous considére-

rons successivement à cet effet les champs magnétiques créés par le courant I du fil 1 et le courant $-I$ du fil 2 :

Dans le champ magnétique du courant du fil 1, l'intensité h' est égale à $\frac{2I}{r}$ en dehors de ce fil, et à $2I \frac{r}{a_1^2}$ à l'intérieur (§ 68). Le tube de flux compris entre les cylindres de rayons $O_1M = r$ et $O_1M' = r + dr$, et limité par deux plans perpendiculaires à l'axe et situés à une distance l l'un de l'autre, a pour flux d'induction le produit de l'aire ldr de la section droite rectangulaire par l'intensité $h' = 2I \frac{r}{a_1^2}$ (à l'intérieur du fil) et par $\frac{k'}{4\pi}$, soit $\frac{k'I l r dr}{2\pi a_1^2}$. Ce flux doit être multiplié par l'intensité du courant embrassé par ce tube, c'est-à-dire par le produit de la densité $\frac{I}{\pi a_1^2}$ du courant par l'aire πr^2 du cercle de rayon O_1M . On a ainsi un élément du second membre de la formule (18) :

$$\frac{k' I l r dr}{2\pi a_1^2} \times \frac{I}{\pi a_1^2} \cdot \pi r^2 = \frac{k' I^2 l r^3 dr}{2\pi a_1^4}$$

On doit faire la somme de tous les éléments semblables pour les tubes de flux intérieurs au conducteur 1, c'est-à-dire intégrer cet élément de $r = 0$ à $r = a_1$, ce qui donne comme premier terme de $\Sigma I'' Q''_i$ la quantité $\frac{k' I^2 l}{8\pi}$.

Un second terme s'obtiendra en faisant le même calcul pour les tubes de flux dus au courant $+I$, mais extérieurs au fil 1. Ceux-là embrassent tous le courant I du fil 1, et l'embrasseront encore si l'on imagine ce courant I concentré sur la droite passant par le point A_1 et parallèle au fil. Grâce à cet artifice, le second terme que nous avons à calculer est le même que si l'on avait à déterminer le flux moyen d'induction du champ du courant I (du fil 1) à travers un circuit fictif composé du fil 2 et de la droite projetée en A_1 . D'après ce que l'on a vu au paragraphe 115, on peut pour ce calcul supposer le fil 2 réduit à son axe O_2 . Alors le flux d'induction à travers le circuit fictif a pour valeur :

$$\int_{a_1}^d \frac{k h' \cdot l dr}{4\pi} = \int_{a_1}^d \frac{k I l dr}{2\pi r} = \frac{k I l}{2\pi} \mathcal{L} \left(\frac{d}{a_1} \right)$$

Ce flux d'induction est celui du tube de flux qui embrasse le courant I tout entier concentré sur la ligne A_1 ; on doit donc le mul-

multiplier par I , et l'on a le second terme $\frac{kI^2l}{2\pi} \mathcal{L} \left(\frac{d}{a_1} \right)$ de la somme $\Sigma I''Q''_1$.

Le champ du courant $+ I$ du fil 1 donne donc dans la somme à calculer $\Sigma I''Q''_1$, les deux termes :

$$\frac{kI^2l}{8\pi} \text{ et } \frac{k'I^2l}{2\pi} \mathcal{L} \left(\frac{d}{a_1} \right)$$

Le champ du courant $- I$ du fil 2 donnerait de même :

$$\frac{k'I^2l}{8\pi} \text{ et } \frac{k'I^2l}{2\pi} \mathcal{L} \left(\frac{d}{a_2} \right)$$

En multipliant par $\frac{4\pi}{I_0 I''_0} = \frac{4\pi}{I^2}$ la somme de ces quatre termes, on aura comme expression du coefficient L de self-induction :

$$L = kl \left[2 \mathcal{L} \left(\frac{d^2}{a_1 a_2} \right) + 1 \right] \quad (24)$$

Remarque. — Si le courant I , au lieu d'être uniforme, était concentré dans une couche mince à la surface des conducteurs, on voit que L se réduirait à la partie $2k'l \mathcal{L} \frac{d^2}{a_1 a_2}$.

Dans le cas important où les conducteurs 1 et 2 sont en fer ou en acier, nickel, etc., la théorie ne s'applique pas (V. § 98). En pratique, à défaut de mieux, on applique la théorie tout de même, en remplaçant k' dans les termes $\frac{k'I^2l}{8\pi}$ ci-dessus, qui proviennent du champ intérieur aux conducteurs, par les pouvoirs inducteurs k'_1 du fil 1 et k'_2 du fil 2. La formule (24) devient :

$$L = 2k'l \mathcal{L} \left(\frac{d^2}{a_1 a_2} \right) + \frac{l}{2} (k'_1 + k'_2) \quad (24')$$

La formule (24) a été vérifiée par l'expérience d'une manière remarquable¹. Quant à la formule (24'), elle ne peut guère servir qu'à mesurer le pouvoir inducteur du fer quand on a mesuré le coefficient L de self-induction et que l'on connaît les autres éléments de la formule. Le coefficient k'_1 varie beaucoup d'un échantillon à un autre du métal.

¹ *Annales télégraphiques*, 1893, p. 315. (Massin.)

CHAPITRE XII

LOIS DE L'ÉTAT VARIABLE D'UN CHAMP ÉLECTRO-MAGNÉTIQUE

117. Problème à résoudre. — Nous avons étudié jusqu'ici les conditions auxquelles satisfait la distribution soit de l'intensité h (XYZ) d'un champ électrique, soit de l'intensité h' (X' Y' Z') d'un champ magnétique, lorsque ces champs sont parvenus à un état stable. Lorsque ces conditions ne sont pas satisfaites dans un champ électro-magnétique, l'état de ce champ est instable ; mais il tend de lui-même, suivant une loi que nous nous proposons de déterminer, vers un état stable définitif. Nous aurons, à cet effet, à résoudre d'abord le problème suivant :

L'état d'un champ électro-magnétique à l'époque t_0 étant défini par la donnée des intensités \bar{h} et \bar{h}' en chaque point (x, y, z) , déterminer le nouvel état du champ à l'époque $t_0 + dt$ ou, ce qui revient au même, calculer $(\bar{h} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} dt)$ et $(\bar{h}' + \frac{\partial \bar{h}'}{\partial t} dt)$. On suppose connus les pouvoirs inducteurs électrique k et magnétique k' , ainsi que la conductibilité c du milieu en tout point de l'espace.

La solution consistera évidemment à trouver six relations faisant connaître les six inconnues $\frac{\partial X}{\partial t}$, $\frac{\partial Y}{\partial t}$, $\frac{\partial Z}{\partial t}$, $\frac{\partial X'}{\partial t}$, $\frac{\partial Y'}{\partial t}$, $\frac{\partial Z'}{\partial t}$. Pour en déduire l'état du champ à une époque quelconque t , on aura à intégrer ces six équations, en tenant compte de la donnée de cet état à l'époque t_0 .

Rappelons nos notations ordinaires :

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 4\pi\rho \quad (1)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 4\pi\mu_x \quad \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = 4\pi\mu_y \quad \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 4\pi\mu_z \quad (2)$$

$$\frac{\partial X'}{\partial x} + \frac{\partial Y'}{\partial y} + \frac{\partial Z'}{\partial z} = 4\pi\rho' \quad (3)$$

$$\frac{\partial Y'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial y} = 4\pi\mu'_x \quad \frac{\partial Z'}{\partial x} - \frac{\partial X'}{\partial z} = 4\pi\mu'_y \quad \frac{\partial X'}{\partial y} - \frac{\partial Y'}{\partial x} = 4\pi\mu'_z \quad (4)$$

Nous poserons encore :

$$i_x = cX + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{kX}{4\pi} \quad i_y = cY + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{kY}{4\pi} \quad i_z = cZ + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{kZ}{4\pi} \quad (5)$$

$$i'_x = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{k'X'}{4\pi} \quad i'_y = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{k'Y'}{4\pi} \quad i'_z = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{k'Z'}{4\pi} \quad (6)$$

Le vecteur \vec{i} ($i_x i_y i_z$) est l'apport d'induction électrique défini au paragraphe 50. Nous donnerons au vecteur analogue \vec{i}' ($i'_x i'_y i'_z$) le nom d'*apport d'induction magnétique*.

Étudions en premier lieu le cas où l'état du champ varie, *les corps situés dans ce champ restant au repos*. Le milieu étant au repos, on sait que les vecteurs \vec{i} et $\vec{\mu}'$ sont identiques (§ 69), ce que l'on peut écrire :

$$c\vec{h} + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\vec{kh}}{4\pi} = \vec{\mu}' \quad (7)$$

Les vecteurs \vec{h} et $\vec{\mu}'$ étant des données de l'état du champ à l'époque t_0 , cette équation géométrique (7) nous fait connaître $\frac{\partial \vec{h}}{\partial t}$, c'est-à-dire $\frac{\partial X}{\partial t}$, $\frac{\partial Y}{\partial t}$, $\frac{\partial Z}{\partial t}$. Elle résume donc trois des équations différentielles que nous nous proposons d'établir, et le problème se trouve à moitié résolu.

118. Loïs de l'état variable dans le cas d'un milieu au repos. — Ces lois résulteront de l'application du principe de la conservation de l'énergie. Dans l'intervalle de t_0 à $t_0 + dt$, les variations d'énergie qui interviennent forcément sont : l'accroissement δW_0 de l'énergie électrique W_e du champ, l'accroissement δW_m de l'énergie magnétique W_m et la quantité de chaleur δW_c dégagée dans les conducteurs en vertu de la loi de Joule. Nous supposons qu'il n'en intervient aucune autre (ni travail, ni réactions chi-

miques, etc.). L'énergie totale du champ restant constante dans ces conditions, on aura :

$$\delta W_e + \delta W_m + \delta W_c = 0 \quad (8)$$

Nous avons vu au paragraphe 50 que l'apport d'énergie électrique dans un élément de volume $d\omega$ pendant le temps dt a pour expression :

$$w_1 d\omega dt = \left(X i_x + Y i_y + Z i_z \right) d\omega dt = \Sigma X i_x d\omega dt$$

et est égal à la somme de l'accroissement d'énergie électrique du volume $d\omega$ et de la quantité de chaleur dégagée dans ce volume ; de telle sorte que :

$$\delta W_e + \delta W_c = dt \int_U \Sigma X i_x d\omega$$

U désignant le volume total U du champ. De même l'accroissement d'énergie magnétique du volume $d\omega$ a pour expression :

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{k(X'^2 + Y'^2 + Z'^2)}{8\pi} dt d\omega = \left(X' i'_x + Y' i'_y + Z' i'_z \right) d\omega dt = \Sigma X' i'_x d\omega dt$$

d'où :

$$\delta W_m = dt \int_U \Sigma X' i'_x d\omega$$

L'équation (8) peut donc s'écrire :

$$\int_U \Sigma X i_x d\omega + \int_U \Sigma X' i'_x d\omega = 0 \quad (9)$$

Remplaçons, dans la première de ces deux intégrales, $i_x i_y i_z$ par $\mu'_x \mu'_y \mu'_z$, et remarquons que l'on a identiquement :

$$\begin{aligned} X \mu'_x + Y \mu'_y + Z \mu'_z &= \frac{1}{4\pi} \left[X \left(\frac{\partial Y'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial y} \right) + Y \left(\frac{\partial Z'}{\partial x} - \frac{\partial X'}{\partial z} \right) + Z \left(\frac{\partial X'}{\partial y} - \frac{\partial Y'}{\partial x} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[X' \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right) + Y' \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \right) + Z' \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} (Y'Z - YZ') + \frac{\partial}{\partial y} (Z'X - ZX') + \frac{\partial}{\partial z} (X'Y - XY') \right] \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\int_U \Sigma X \mu'_x d\omega = \frac{1}{4\pi} \int_U \Sigma X' \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right) d\omega - \frac{1}{4\pi} \int_U \Sigma \frac{\partial}{\partial x} (Y'Z - YZ') d\omega \quad (10)$$

Or la seconde intégrale du second membre de cette formule est nulle ; car, en vertu de l'identité (3) du paragraphe 17, on a :

$$\int_U \left[\frac{\partial}{\partial x} (Y'Z - YZ') + \frac{\partial}{\partial y} (ZX - ZX') + \frac{\partial}{\partial z} (XY - XY') \right] d\omega + \int_S \left[l (Y'Z - YZ') + m (ZX - ZX') + n (XY - XY') \right] dS = 0$$

et cette dernière intégrale, prise sur une surface S qui enveloppe le champ et lui est extérieure ($X = Y = Z = \dots = 0$), est égale à zéro. L'identité (10) se réduit ainsi, en tenant compte des relations (2), à :

$$\int_U \Sigma X' \mu'_x d\omega = \int_U \Sigma X' \mu_x d\omega \quad (11)$$

L'équation (9) peut donc s'écrire finalement :

$$\int_U \Sigma X' \mu_x d\omega + \int_U \Sigma X' i'_x d\omega = \int_U \Sigma X' (\mu_x + i'_x) d\omega = 0 \quad (12)$$

Cette condition, qui doit être satisfaite quel que soit l'état du champ donné à l'époque t_0 , va nous fournir la loi cherchée. Imaginons en effet qu'au champ

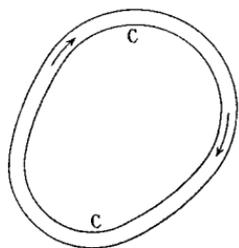


Fig. 62.

donné on superpose le champ d'un solénoïde (§ 94) ayant la forme d'un tube CC fermé sur lui-même (fig. 62). La relation (12) devra être encore vérifiée après cette modification ; mais X' doit y être remplacé par $(X' + X'_1)$, X'_1 , Y'_1 , Z'_1 désignant les composantes de l'intensité h'_1 du champ magnétique additionnel

du solénoïde. Quant à μ_x et à i'_x , ils ne sont point changés si le courant du solénoïde est supposé permanent ; car en courant permanent : 1° le champ électrique du solénoïde admet un potentiel, c'est-à-dire que son vecteur électrique $\bar{\mu}$ est nul ; 2° le champ magnétique est constant, c'est-à-dire que son vecteur \bar{i}' ($= \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{kh'_1}{4\pi}$) est nul. L'équation (12) deviendra alors :

$$\int_U \Sigma (X' + X'_1) (\mu_x + i'_x) d\omega = 0 \quad (12')$$

Les équations (12) et (12') étant satisfaites simultanément, on en déduit :

$$\int_U \Sigma X'_1 (\mu_x + i'_x) d\omega = 0$$

Le volume d'intégration U peut être remplacé par le volume du tube CC , puisqu'en dehors du solénoïde X'_1, Y'_1, Z'_1 sont nuls. En supposant du reste infiniment petite la section ω du tube, on peut prendre pour volume $d\omega$ celui d'un élément du tube de longueur ds ($d\omega = \omega ds$); et si dx, dy, dz sont les projections de ds sur les axes, on a :

$$X'_1 d\omega = h'_1 \frac{dx}{ds} \times \omega ds = h'_1 \omega dx$$

Le flux $h'_1 \omega$ du vecteur $(X'_1 Y'_1 Z'_1)$ étant le même à travers toute section du tube, soit $h'_1 \omega = q$, on aura :

$$\int_U \Sigma X'_1 (\mu_x + i'_x) d\omega = \int_U q \Sigma (\mu_x + i'_x) dx = 0$$

ou :

$$q \int_C \left[(\mu_x + i'_x) dx + (\mu_y + i'_y) dy + (\mu_z + i'_z) dz \right] = 0 \quad (13)$$

C désignant le chemin suivi par le solénoïde.

Le chemin C étant arbitraire, l'équation (13) exprime que le vecteur $(\bar{\mu} + \bar{i}')$ dérive d'un potentiel :

$$\frac{\partial (\mu_y + i'_y)}{\partial z} - \frac{\partial (\mu_z + i'_z)}{\partial y} = \dots = \dots = 0 \quad (14)$$

D'autre part, on a :

$$\frac{\partial (\mu_x + i'_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\mu_y + i'_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\mu_z + i'_z)}{\partial z} = 0 \quad (15)$$

car des relations (2) et (6) on déduit :

$$\frac{\partial \mu_x}{\partial x} + \frac{\partial \mu_y}{\partial y} + \frac{\partial \mu_z}{\partial z} = 0$$

et :

$$\frac{\partial i'_x}{\partial x} + \frac{\partial i'_y}{\partial y} + \frac{\partial i'_z}{\partial z} = \frac{k'}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial X'}{\partial x} + \frac{\partial Y'}{\partial y} + \frac{\partial Z'}{\partial z} \right) = 0$$

Les relations (14) et (15) montrent que le vecteur $(\bar{\mu} + \bar{i}')$ est nul (V. § 17) : $\bar{\mu} + \bar{i}' = 0$.

On voit ainsi que la solution du problème posé au paragraphe 117 se résume dans les deux équations :

$$\bar{i} = \bar{\mu}' \qquad \bar{i}' = -\bar{\mu} \qquad (16)$$

Ces équations traduites en coordonnées cartésiennes donnent :

$$\left. \begin{aligned} 4\pi cX + k \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial Y'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial y} \\ 4\pi cY + k \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial Z'}{\partial x} - \frac{\partial X'}{\partial z} \\ 4\pi cZ + k \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial X'}{\partial y} - \frac{\partial Y'}{\partial x} \end{aligned} \right\} \qquad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} -k' \frac{\partial X'}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \\ -k' \frac{\partial Y'}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \\ -k' \frac{\partial Z'}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \end{aligned} \right\} \qquad (18)$$

119. Interprétation des formules. — Les formules (16) expriment que :

L'apport d'induction électrique en un point (x, y, z) est égal à la densité de masse vectorielle magnétique en ce point ;

L'apport d'induction magnétique est égal à la densité de masse vectorielle électrique changée de sens.

Ce sont là les deux lois de l'état variable d'un champ électro-magnétique dans un milieu immobile. Elles comprennent du reste, comme cas particulier, les lois de l'état stable. Ainsi, *dans un champ stable*, i' étant nul, on voit que μ l'est aussi, c'est-à-dire qu'il existe un potentiel électrique ; en outre, le vecteur \bar{i} , étant égal à $\bar{\mu}'$, jouit par là même de la propriété :

$$\frac{\partial i_x}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y} + \frac{\partial i_z}{\partial z} = 0$$

d'où l'on déduit les lois de l'électrostatique et des courants permanents (§ 51).

L'existence du vecteur électrique $\bar{\mu}$ en un point, c'est-à-dire la

non-existence du potentiel électrique, a pour effet de faire varier en ce point le champ magnétique en produisant, pendant le temps dt , un accroissement de l'induction magnétique égal à $-\bar{\mu}dt$.

L'existence du vecteur magnétique $\bar{\mu}'$ tend à faire varier le champ électrique en donnant lieu, pendant le temps dt , à un accroissement de l'induction électrique égal à $+\bar{\mu}'dt$; mais en même temps, si le milieu est conducteur, l'induction subit de ce fait une perte égale à la densité ch du courant, et son accroissement final $\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{hh}{4\pi} dt$ est donné par la formule (7). L'effet de la conductibilité sur la variation du champ électrique est *purement local*, en ce sens qu'il ne dépend que de la valeur de h au point (x, y, z) considéré. L'effet du vecteur $\bar{\mu}'$ est dû au contraire à une réaction des parties voisines du champ; car $\bar{\mu}'$, indépendant du vecteur \bar{h} au point (x, y, z) , dépend de la distribution de ce vecteur dans le voisinage immédiat. Et si cette distribution est telle à l'époque t_0 que le champ magnétique admette un potentiel à l'intérieur d'une sphère ayant le point (x, y, z) pour centre et $a\theta$ pour rayon ($a =$ vitesse de propagation des perturbations électro-magnétiques) l'induction électrique en ce point ne subira aucune variation jusqu'à l'époque $t_0 + \theta$ (sauf par conductibilité).

Dans la théorie des actions à distance, l'identité (14) du paragraphe 49 :

$$\bar{h} = \sum \frac{\bar{m}}{r^2} + \sum \frac{m_v \sin \theta}{r^2}$$

exprime que les masses m et les masses vectorielles m_v agissent à toute distance et créent à chaque instant le champ. Or, nous avons vu jusqu'ici que les masses m (ou leurs densités ρ et ρ' , formules 1 et 3) ne jouent aucun rôle dans les lois physiques. Ici, au contraire, nous constatons un rôle important des masses vectorielles, ou plutôt de leurs densités $\bar{\mu}$ et $\bar{\mu}'$; seulement l'effet du vecteur $\bar{\mu}$ (ou $\bar{\mu}'$) qui existe en un point à une époque t s'exerce en ce point même, et consiste à y faire varier l'induction magnétique (ou électrique) de la quantité $-\bar{\mu}$ (ou $\bar{\mu}'$) dans l'unité de temps.

120. Autres formes des lois de l'état variable. — Considérons

un contour fermé C quelconque et une surface S limitée à ce contour. D'après les équations (18) on pourra écrire :

$$\int_S \left[l \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right) + m \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \right) + n \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) \right] dS \\ = -k \frac{\partial}{\partial t} \int_S (lX' + mY' + nZ') dS$$

ou encore, d'après l'identité (3) du paragraphe 10 :

$$\int_C (Xdx + Ydy + Zdz) = -k \frac{\partial}{\partial t} \int_S (lX' + mY' + nZ') dS \quad (19)$$

Cette relation, qui équivaut aux équations (18), est d'un emploi très commode dans un grand nombre de questions.

L'intégrale du premier membre de (19) a reçu dans l'ancienne théorie le nom de *force électromotrice* du circuit C ; nous la désignerons par la lettre E. Quant au second membre, on voit qu'il est égal à $-4\pi \frac{\partial Q'}{\partial t}$, Q' désignant le flux d'induction magnétique du champ à travers la surface S. On a donc :

$$E = -4\pi \frac{\partial Q'}{\partial t} \quad (20)$$

E étant une donnée de l'état du champ à l'époque t_0 , cette formule permet de calculer l'accroissement $\frac{\partial Q'}{\partial t} dt$ du flux d'induction à travers S dans l'intervalle de t_0 à $t_0 + dt$. On peut donc considérer l'existence de E comme la *cause* et $\frac{\partial Q'}{\partial t} dt$ comme l'*effet produit*.

Cette question est présentée ordinairement dans un sens tout opposé à celui que nous indiquons. Par exemple, dans la théorie des phénomènes d'induction électro-magnétique, on considère E comme une *force électromotrice* créée (ou *induite*) à chaque instant par les variations du champ magnétique ; ce qui revient à considérer la variation $\frac{\partial Q'}{\partial t} dt$ du flux d'induction entre les époques t_0 et $t_0 + dt$ comme la *cause*, et la force électromotrice E existante à l'époque t_0 comme l'*effet*. L'expression force électromotrice *induite* a donc un sens faux et doit être rejetée.

Dans la théorie des actions à distance, la force électromotrice induite est créée par les variations des courants qui existent dans

le champ. C'est là une fausse interprétation des formules suivantes. Rappelons les formules (14) et (15) du paragraphe 113 :

$$v'_x = \int_C \frac{i'_x}{r} d\omega' \quad v'_y = \int_C \frac{i'_y}{r} d\omega' \quad v'_z = \int_C \frac{i'_z}{r} d\omega' \quad (21)$$

$$X' = \frac{\partial v'_x}{\partial z} - \frac{\partial v'_z}{\partial y} \quad Y' = \frac{\partial v'_z}{\partial x} - \frac{\partial v'_x}{\partial z} \quad Z' = \frac{\partial v'_x}{\partial y} - \frac{\partial v'_y}{\partial x} \quad (22)$$

Si dans les formules (18) nous portons ces expressions de $X' Y' Z'$ et en même temps les expressions suivantes de $X Y Z$:

$$X = -k \frac{\partial v'_x}{\partial t} + \xi \quad Y = -k \frac{\partial v'_y}{\partial t} + \eta \quad Z = -k \frac{\partial v'_z}{\partial t} + \zeta \quad (23)$$

elles se réduisent à

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

Le vecteur (ξ, η, ζ) défini par les formules (23) dérive donc d'un potentiel V ; et ces formules (23) pourront s'écrire, en remplaçant $v'_x v'_y v'_z$ par leurs expressions (21) :

$$\left. \begin{aligned} X &= -k \int_C \frac{\partial i'_x}{\partial t} \frac{d\omega'}{r} - \frac{\partial V}{\partial x} \\ Y &= -k \int_C \frac{\partial i'_y}{\partial t} \frac{d\omega'}{r} - \frac{\partial V}{\partial y} \\ Z &= -k \int_C \frac{\partial i'_z}{\partial t} \frac{d\omega'}{r} - \frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Le champ électrique $(X Y Z)$ serait, d'après ces formules, dans la théorie des actions à distance, la superposition : 1° d'un champ admettant un potentiel V et, par conséquent, créé par des masses électriques ; 2° d'un champ induit par les variations de courant $\frac{\partial i'}{\partial t}$. L'intensité \overline{h}_1 de ce champ induit aurait pour expression :

$$h_1 = -k \int_C \frac{\partial i'}{\partial t} \cdot \frac{d\omega'}{r}$$

c'est-à-dire que la variation $\frac{\partial i'}{\partial t} dt$ de la densité de courant $\overline{i'}$ dans l'élément de volume $d\omega'$, pris au point $(x' y' z')$, pendant le temps dt , induirait au point (x, y, z) situé à une distance r une force électrique égale à $-k \frac{d\omega'}{r} \cdot \frac{\partial i'}{\partial t}$ et ayant même direction que le

vecteur $-\frac{\partial \vec{i}'}{\partial t}$. — Rappelons que ce vecteur \vec{i}' n'est la densité du courant que dans le cas d'un courant permanent; dans l'état variable du champ \vec{i}' est l'apport d'induction électrique, qui en est bien différent.

121. Lois de l'état variable dans un milieu en mouvement. — Considérons dans un champ électro-magnétique une partie A limitée par une surface S. Entre deux époques t et $t + dt$, A reçoit des parties voisines du champ, par sa surface S, une quantité d'énergie électro-magnétique $W_1 dt$ qui ne dépend que de l'état du champ sur cette surface à l'époque t . Le corps A étant mobile, la surface S se déforme, mais avec une vitesse excessivement faible par rapport à la vitesse de propagation des perturbations électro-magnétiques, de telle sorte que la quantité d'énergie $W_1 dt$ transmise de l'extérieur à l'intérieur de S n'en est pas sensiblement modifiée.

Si nous appliquons ceci à un corps A infiniment petit, ayant un volume $d\omega$, nous connaissons l'expression $(\Sigma X i_x d\omega dt)$ de l'apport d'énergie électrique pendant le temps dt lorsque le milieu est au repos (§ 118). En tenant compte des relations (5) et (17), cette expression devient :

$$\frac{1}{4\pi} \Sigma X \left(\frac{\partial Y'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial y} \right) d\omega dt \quad (25)$$

On aurait de même comme expression de l'apport d'énergie magnétique :

$$-\frac{1}{4\pi} \Sigma X' \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right) d\omega dt \quad (26)$$

L'apport total d'énergie $W_1 dt$ est donc égal à :

$$\begin{aligned} W_1 dt &= \frac{1}{4\pi} \Sigma \left[X \left(\frac{\partial Y'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial y} \right) - X' \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right) \right] d\omega dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \Sigma \frac{\partial}{\partial x} \left(YZ' - Y'Z \right) d\omega dt \end{aligned} \quad (27)$$

Sous cette dernière forme, W_1 ne dépend que de la loi de distribution des vecteurs (XYZ) et $(X' Y' Z')$, c'est-à-dire de l'état du champ à l'époque t . Puisque, pour un état donné du champ sur la

surface S, la quantité d'énergie W, dt n'est pas sensiblement modifiée par le mouvement de cette surface, nous pourrions appliquer les formules (25), (26) et (27) au cas d'un milieu mobile.

Écrivons donc, dans le cas d'un milieu en mouvement, que l'apport d'énergie électrique (25) dans un élément de volume *mobile* $d\omega$ est égal à la somme des accroissements d'énergie électrique et calorifique dans ce volume.

L'accroissement de chaleur est $ch^2 d\omega dt$ (loi de Joule) ; celui d'énergie électrique, en supposant que le volume $d\omega$ s'accroisse d'une fraction θ par unité de temps ($\frac{d}{dt} d\omega = \theta d\omega$), est égal à :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{kh^2}{8\pi} d\omega \right) dt = \frac{d}{dt} \left(\frac{kh^2}{8\pi} \right) d\omega dt + \frac{kh^2}{8\pi} \theta d\omega dt$$

On aura donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \Sigma X \left(\frac{\partial Y'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial y} \right) &= ch^2 + \frac{d}{dt} \frac{kh^2}{8\pi} + \frac{kh^2}{8\pi} \theta \\ &= \Sigma X \left(cX + \frac{k}{4\pi} \frac{dX}{dt} + \frac{kX}{8\pi} \theta \right) \end{aligned}$$

Ceci devant être une identité, on en déduit (en supposant $\theta = 0$, seul cas que nous étudierons) les trois conditions

$$4\pi cX + k \frac{dX}{dt} = \frac{\partial Y'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial y} \dots \dots \dots \quad (28)$$

qui sont, comme on le voit, identiques aux équations (17). Toutefois ici les notations $\frac{dX}{dt}$, $\frac{dY}{dt}$, $\frac{dZ}{dt}$ désignent les dérivées, non du vecteur (XYZ) en un point *fixe* (x, y, z), mais de ce vecteur lié à l'élément de volume *mobile* $d\omega$ qui occupe la position (x, y, z) à l'époque t et une nouvelle position ($x + udt, y + vdt, z + wdt$) à l'époque $t + dt$; de telle sorte que ce vecteur à l'époque $t + dt$ a pour projections :

$$X + \frac{dX}{dt} dt = X + \frac{\partial X}{\partial t} dt + \frac{\partial X}{\partial x} \cdot u \cdot dt + \frac{\partial X}{\partial y} \cdot v \cdot dt + \frac{\partial X}{\partial z} \cdot w \cdot dt \dots \dots$$

d'où :

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial X}{\partial t} + u \frac{\partial X}{\partial x} + v \frac{\partial X}{\partial y} + w \frac{\partial X}{\partial z}$$

On voit que les formules (17) ne sont qu'un cas particulier des

formules (28). On trouverait, par un raisonnement semblable appliqué à l'apport d'énergie magnétique (26), les relations :

$$-k' \frac{dX'}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \quad \dots \quad \dots \quad (29)$$

qui sont la généralisation des relations (18).

Les six équations (28) et (29) se résument dans les deux équations géométriques :

$$\bar{i} = \bar{\mu}' \quad \bar{i}' = -\bar{\mu} \quad (30)$$

les vecteurs \bar{i} et \bar{i}' étant définis par :

$$\bar{i} = c \bar{h} + \frac{d \bar{k}h}{dt 4\pi} \quad \bar{i}' = \frac{d \bar{k}'h'}{dt 4\pi} \quad (31)$$

Telles sont les lois de l'état variable d'un champ électro-magnétique lorsque le milieu est en mouvement. On peut les énoncer de la même manière qu'au paragraphe 119, sauf que \bar{i} et \bar{i}' désignent les apports d'induction électrique et magnétique dans un élément de volume mobile, et non plus fixe.

122. Loi de la transmission de l'énergie électro-magnétique. — L'apport total d'énergie électro-magnétique dans l'unité de volume, par unité de temps, a pour expression, d'après la formule (27) :

$$\frac{1}{4\pi} \sum \frac{\partial}{\partial x} (YZ' - ZY')$$

Dans un volume A limité par une surface S, l'apport d'énergie est donc :

$$\frac{1}{4\pi} \int_A \sum \frac{\partial}{\partial x} (YZ' - ZY') d\omega$$

ou bien, en vertu de l'identité (3) du paragraphe 17 :

$$-\frac{1}{4\pi} \int_S \sum l (YZ' - ZY') dS = \int_S (l w_x + m w_y + n w_z) dS$$

en posant :

$$4\pi w_x = YZ - YZ' \quad 4\pi w_y = ZX - ZX' \quad 4\pi w_z = XY - XY' \quad (32)$$

L'apport d'énergie électro-magnétique dans un volume quel-

conque A est donc le même que si, par chaque élément dS de sa surface S , il entrait une quantité d'énergie égale à $(w_x + mw_y + nw_z)$, c'est-à-dire à la projection du vecteur $(w_x w_y w_z)$ sur la normale intérieure à S . Ce vecteur n'est autre que celui que nous avons défini au paragraphe 59 sous le nom de *flux d'énergie* au point (x, y, z) . La propriété que nous lui avons reconnue s'étend donc au cas de l'état variable du champ. Cette propriété a été énoncée pour la première fois par M. Poynting.

Le vecteur \bar{w} joue un autre rôle. Dans un milieu homogène ($k = \text{constante}$) non électrisé ($\delta = 0$), les composantes $(F_x F_y F_z)$ de la force électrique et $(F'_x F'_y F'_z)$ de la force magnétique sur l'unité de volume (§ 23 et 102) se réduisent à :

$$\begin{aligned} F_x &= k \left(Y \mu_z - Z \mu_y \right) & F_y &= \dots & F_z &= \dots \\ F'_x &= k' \left(Y' \mu'_z - Z' \mu'_y \right) & F'_y &= \dots & F'_z &= \dots \end{aligned}$$

On a donc, en tenant compte des relations (28) et (29) :

$$\begin{aligned} F_x + F'_x &= k \left(Y \mu_z - Z \mu_y \right) + k' \left(Y' \mu'_z - Z' \mu'_y \right) \\ &= k \left(-Y \frac{k'}{4\pi} \frac{dZ'}{dt} + Z \frac{k'}{4\pi} \frac{dY'}{dt} \right) + k' \left[Y' \left(cZ + \frac{k}{4\pi} \frac{dZ}{dt} \right) - Z' \left(cY + \frac{k}{4\pi} \frac{dY}{dt} \right) \right] \\ &= \frac{kk'}{4\pi} \frac{d}{dt} \left(Y'Z - YZ' \right) + ck' \left(Y'Z - YZ' \right) \end{aligned}$$

ou bien, en posant $kk' = \frac{1}{a^2}$, et $\bar{F} + \bar{F}' = \bar{f}$:

$$f_x = \frac{1}{a^2} \frac{dw_x}{dt} + 4\pi ck' w_x \quad f_y \dots \quad f_z \dots$$

La résultante \bar{f} des forces électrique et magnétique a donc pour expression :

$$\bar{f} = \frac{1}{a^2} \frac{d\bar{w}}{dt} + 4\pi ck' \bar{w} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{d\bar{w}}{dt} + \frac{\bar{w}}{\theta} \right) \quad (33)$$

θ désignant le coefficient défini au paragraphe 48 par la formule :
 $k = 4 \pi c \theta$.

Dans les bons conducteurs, à cause de la faiblesse de θ , on a sensiblement :

$$\bar{f} = \frac{1}{a^2\theta} \bar{w} \quad (34)$$

Dans les isolants parfaits, on a au contraire :

$$\bar{f} = \frac{1}{a^2} \frac{d\bar{w}}{dt} \quad (35)$$

PHÉNOMÈNES D'INDUCTION ÉLECTRO-MAGNÉTIQUE

123. Courants induits. — Nous avons établi ci-dessus les lois de l'état variable d'un champ électro-magnétique. L'application rigoureuse des formules qui expriment ces lois présente en général des difficultés considérables de calcul dans les applications pratiques. Aussi a-t-on recours ordinairement à des lois approchées beaucoup plus simples. Si le degré d'approximation obtenu est le plus souvent impossible à fixer à priori, on s'en rapporte à l'expérience pour décider dans quels cas il est suffisant. C'est dans cet esprit que nous allons traiter quelques questions relatives aux phénomènes d'induction électro-magnétique.

Considérons un champ électro-magnétique créé par des courants et des aimants, et supposons que l'on vienne à déplacer ceux-ci. A ce déplacement correspond un certain travail $\delta\mathcal{E}$ des forces magnétiques. D'autre part, l'énergie magnétique du champ, qui a une valeur initiale W_0 , prend une valeur finale W_1 qui dépend de la nouvelle position des corps; elle éprouve donc une variation $\delta W = W_1 - W_0$. Si la somme $\delta\mathcal{E} + \delta W$ était nulle, le travail $\delta\mathcal{E}$ exécuté par le champ le serait entièrement aux dépens de son énergie magnétique. Mais il n'en est pas ainsi en général, ainsi qu'on l'a vu au paragraphe 111, où nous avons trouvé l'expression

$$\delta\mathcal{E} + \delta W = \Sigma 4\pi I \delta Q' \quad (1)$$

et la quantité $-(\delta\mathcal{E} + \delta W)$ constitue un excès d'énergie qui doit être utilisé sous une autre forme.

Nous supposerons d'abord que le travail des forces électriques

et la variation de l'énergie électrique du champ soient négligeables, et que l'on évite d'ailleurs toute réaction chimique ou autre variation d'énergie, sauf l'échauffement des conducteurs qui résulte nécessairement de l'existence des courants. L'excès d'énergie — $(\partial\mathcal{E} + \partial W)$ créé par un déplacement des corps ne peut alors être consommé qu'en chaleur dans les conducteurs, et ce n'est qu'après sa dissipation que l'énergie magnétique prendra la valeur W_1 qui correspond à un état final stable.

Ce dégagement de chaleur (positif ou négatif), venant s'ajouter à celui que fournit la pile, correspond à un accroissement d'intensité du courant. Le courant supplémentaire ainsi créé a reçu le nom de courant *induit*.

L'intervalle de temps compris entre l'origine des déplacements et l'époque à laquelle l'état stable est rétabli, constitue une période d'état variable, pendant laquelle des variations d'énergie se produisent dans toutes les parties du champ. Ainsi l'excès — $\partial\mathcal{E}$ d'énergie, *créé (par le travail) à la surface* des aimants ou des courants qui se déplacent, se propage de proche en proche sous forme d'énergie électro-magnétique. Les *ondes* électro-magnétiques ainsi formées dans le champ se réfléchissent aux surfaces de séparation des divers corps et se dissipent progressivement en traversant les conducteurs. Plus cette dissipation est rapide, moindre est la durée de l'amortissement de la perturbation créée par le déplacement des corps.

Des effets analogues peuvent être produits par la rupture ou la fermeture d'un circuit conducteur, puisqu'on détermine par là même une variation d'intensité du courant.

Pendant la période variable, le régime du courant dans les conducteurs est donc différent du régime permanent. On suppose néanmoins, dans les applications, qu'à chaque instant le régime permanent est sensiblement atteint ; car autrement les calculs seraient inextricables. Cette hypothèse paraît justifiée en ce qui concerne les variations du courant dues aux déplacements des corps, en raison de la faiblesse relative des vitesses qu'on imprime à ceux-ci par rapport à la vitesse de propagation des ondes électro-magnétiques. Les perturbations produites étant assez lentes, le courant tend à reprendre très rapidement le régime permanent, et

l'on peut admettre que chaque perturbation est éteinte instantanément. Mais lorsqu'on crée dans un circuit un courant alterné ayant une période du même ordre de grandeur que le temps mis par une onde électro-magnétique à aller d'un bout à l'autre de ce circuit, l'hypothèse en question n'est plus admissible. Les tubes de courant (§ 42), au lieu de rester entièrement à l'intérieur du circuit conducteur, peuvent sortir latéralement de celui-ci et se fermer par le diélectrique (la densité de courant i doit être alors remplacée par l'apport d'induction électrique, § 50).

Quoi qu'il en soit, nous supposons dans ce qui suit que *les tubes de courant se ferment sur eux-mêmes dans le conducteur*. Mais nous ne ferons aucune hypothèse sur la distribution de la densité du courant dans une même section droite d'un circuit, de telle sorte qu'en désignant par I l'intensité totale du courant et par $RI^2 dt$ la quantité de chaleur dégagée dans le circuit, on devra considérer R comme un coefficient variable avec la distribution du courant.

124. Loi de l'induction dans un circuit fermé. — Considérons un circuit C , de résistance R , parcouru par un courant d'intensité variable I , dans un champ où ce circuit et des aimants subissent des déplacements quelconques. Si $\delta\mathcal{E}$ représente le travail des forces magnétiques, δW l'accroissement de l'énergie magnétique du champ, et $RI^2 dt$ la quantité de chaleur dégagée dans le circuit pendant un même temps infiniment petit dt , aucune autre variation d'énergie n'étant en jeu, on doit avoir

$$\delta\mathcal{E} + \delta W + RI^2 dt = 0$$

ou, d'après la formule (1) réduite au cas d'un seul circuit :

$$4\pi I \delta Q' + RI^2 dt = 0$$

On déduit de là :

$$RI = -4\pi \frac{dQ'}{dt} \quad (2)$$

Cette formule exprime que *la force électromotrice* RI du circuit C est, à chaque instant, égale, au facteur -4π près, à la variation $\frac{dQ'}{dt}$ du flux d'induction magnétique moyen Q' à travers le feuil-

let du courant I pendant l'unité de temps. Nous retrouvons ainsi, dans le cas d'un circuit conducteur C , la formule (20) du paragraphe 120, qui a été démontrée rigoureusement pour une ligne géométrique sans dimensions transversales.

Le courant I est dit *induit*, et la force électromotrice RI est dite *induite*.

Lorsque le champ est créé par des courants I_1, I_2, \dots, I_n et par des aimants, la formule (2) appliquée au courant I_1 peut encore s'écrire :

$$R_1 I_1 = -4\pi \frac{dQ'_m}{dt} - \frac{d}{dt} \left[L_1 I_1 + M_{12} I_2 + M_{13} I_3 + \dots + M_{1n} I_n \right] \quad (3)$$

Q'_m désignant le flux d'induction magnétique moyen dû aux aimants seuls, L_1 le coefficient d'auto-induction du courant I_1 , et M_{12}, M_{13}, \dots les coefficients d'induction mutuelle du courant I_1 et des courants I_2, I_3, \dots

En raison de la généralité de la formule (20) démontrée au paragraphe 120, on peut l'appliquer à un circuit fermé quelconque C pris dans un réseau de conducteurs, tel que celui que nous avons étudié au paragraphe 85 dans le cas des courants permanents. L'équation de Kirchhoff :

$$\Sigma (RI - E) = 0$$

appliquée à ce circuit doit être remplacée, dans le cas d'un champ électro-magnétique variable, par :

$$\Sigma RI = \Sigma E - 4\pi \frac{dQ'}{dt}$$

Q' désignant le flux d'induction moyen à travers le circuit C en question.

125. Vérifications expérimentales de la théorie. — Supposons que pendant un temps θ on déplace des courants ou des aimants en présence d'un circuit fermé C , ou que l'on fasse varier l'intensité des courants (dits *inducteurs*), ou encore que l'on déplace le circuit C lui-même. On constate, au moyen d'un galvanomètre intercalé sur le circuit, que celui-ci est parcouru pendant le temps θ par un courant I ; et, si le temps θ est assez court, le gal-

vanomètre permet de mesurer la quantité d'électricité *induite* $\int_0^{\theta} I dt$.

La formule (2), multipliée par dt , et intégrée entre les époques o et θ , donne :

$$R \int_0^{\theta} I dt = 4\pi (Q'_0 - Q'_1) \quad (4)$$

Q'_0 et Q'_1 désignant le flux d'induction magnétique à travers le circuit C aux époques o et θ . Voici quelques constatations expérimentales vérifiant cette relation (4).

1° La mesure de $\int_0^{\theta} I dt$ donne la même valeur dans les mêmes conditions d'expérience, quelle que soit la position du galvanomètre dans le circuit; c'est-à-dire que *la même quantité totale d'électricité traverse toutes les sections du circuit*. C'est là une propriété démontrée au paragraphe 54 et déjà vérifiée pour la décharge d'un condensateur à travers un fil conducteur ;

2° *La quantité d'électricité induite mesurée ne dépend que du déplacement relatif du circuit C et des aimants (ou des autres courants)*, et nullement du déplacement absolu. Ceci est conforme à la formule (4); car la variation $(Q'_0 - Q'_1)$ du flux d'induction ne dépend que de ce déplacement relatif ;

3° *La quantité d'électricité mesurée ne dépend que des positions relatives initiale et finale du circuit C et du système des aimants ou courants inducteurs ainsi que des intensités initiales et finales de ces courants*, mais nullement du mode de déplacement ou de variation des courants dans l'intervalle de o à θ . C'est bien ce qui résulte de la formule (4) où ne figurent que les valeurs initiale et finale de Q' ;

4° *Le sens de la quantité d'électricité mesurée concorde avec l'indication de la formule (4)*. Supposons, par exemple que C soit un circuit circulaire, dont

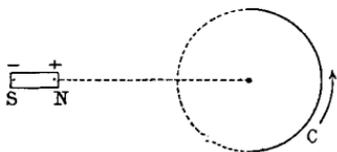


Fig. 63.

le sens positif, choisi arbitrairement, est indiqué par la flèche (fig. 63). Le flux d'induction Q'_0 de l'aimant NS placé sur l'axe du cercle, à travers le feuillet de C (dont la face négative est à droite), est négatif. Si l'on approche cet aimant de C, le flux d'induction final Q'_1 sera encore négatif et plus grand que Q'_0 en valeur abso-

lue ; donc : $Q'_0 - Q'_1 > 0$, et $\int_0^0 I dt$ doit être positif d'après la formule (4), c'est-à-dire que le courant induit doit être dirigé dans le sens de la flèche. C'est bien ce que l'on constate.

Remplaçons l'aimant NS par un deuxième cadre circulaire ayant même axe que C et parcouru par un courant i de sens contraire à celui de la flèche. La formule (4) et l'expérience montrent que le déplacement de ce cadre produira le même effet que celui de l'aimant ; c'est-à-dire que l'approche du courant i induit dans C un courant de sens inverse. Toutes choses égales d'ailleurs, on constate encore que $\int_0^0 I dt$ est proportionnel à l'intensité i du courant inducteur.

Ces expériences vérifient la loi de Lenz, d'après laquelle le courant induit s'oppose au mouvement de l'aimant ou du courant inducteur (on sait en effet que deux courants de sens inverse se repoussent, § 104) ;

5° *Toutes choses égales d'ailleurs, la quantité d'électricité mesurée est inversement proportionnelle à la résistance R du circuit C.* C'est bien ce que montre la formule (4).

126. Détermination de l'ohm (Weber). — Sans énumérer toutes les vérifications expérimentales des formules (2) et (4) qui résultent d'expériences précises, citons la suivante. La détermination de l'ohm par les méthodes dites d'induction a donné le même résultat que celui obtenu par d'autres méthodes essentiellement différentes (celle de Joule, par exemple, § 101).

Voici le principe d'une méthode d'induction due à Weber. Un cadre plan circulaire, analogue à celui d'une boussole des tangentes, est placé perpendiculairement au méridien magnétique et peut tourner autour d'un axe vertical. Si on le tourne brusquement de 180° , le flux d'induction dû au magnétisme terrestre à travers la surface S du cadre varie de $+\frac{kHS}{4\pi}$ à $-\frac{kHS}{4\pi}$, H désignant la composante horizontale de l'intensité du champ terrestre. Donc si un galvanomètre balistique est relié au cadre, il sera traversé par une quantité d'électricité égale, d'après la formule (4), à :

$$\int_0^0 I dt = \frac{4\pi}{R} (Q'_0 - Q'_1) = \frac{2kHS}{R}$$

La déviation maximum δ_1 de l'aimant du galvanomètre étant reliée à cette quantité par la formule (20) du paragraphe 71 :

$$\int_0^{\theta} I dt = \frac{\Pi}{G} \frac{T}{\pi} \sin \frac{\delta_1}{2}$$

il en résulte :

$$R = \frac{2k'\pi GS}{T} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\delta_1}{2}}$$

Pour calculer la résistance R du circuit en ohms, on doit donc déterminer la durée T de la période d'oscillation du galvanomètre, la constante géométrique G de son cadre et la surface totale S des spires enroulées sur le cadre mobile ; on fera d'ailleurs $k' = 1$.

127. Condensateur intercalé sur un circuit induit. — Supposons qu'un condensateur A soit intercalé sur un circuit conducteur soumis à des phénomènes d'induction. Nous devons remplacer la formule (2) du paragraphe 124 par la relation plus générale (19) ou (20) du paragraphe 120.

$$\int_C (X dx + Y dy + Z dz) = -4\pi \frac{dQ'}{dt}$$

Le premier membre de cette équation se compose de deux parties : l'une, égale à RI , représente l'intégrale prise le long du circuit conducteur ; l'autre, que nous désignerons par la lettre e , est l'intégrale le long du complément de chemin C à travers le diélectrique de A :

$$RI + e = -4\pi \frac{dQ'}{dt}$$

Le produit ce de e par la capacité c du condensateur est sa charge électrique $\int Idt$. Si $\frac{dQ'}{dt}$ est constant, le condensateur se chargera donc comme sous l'action d'une force électromotrice voltaïque constante ayant la valeur $E = -4\pi \frac{dQ'}{dt}$; mais le courant de charge I cessera dès que e atteindra la valeur de E , c'est-à-dire au bout d'un temps θ d'autant plus court que la capacité c est plus

faible (§ 57). A partir de ce temps θ , le champ électrique aura disparu dans le conducteur et ne subsistera que dans le diélectrique du condensateur, dont la charge ce restera constante.

On peut obtenir ce résultat par exemple en constituant le circuit conducteur au moyen de deux fils parallèles BB', GG' sur lesquels on pose une barre métallique DF (fig. 64). Si l'on déplace avec une vitesse uniforme cette barre parallèlement à elle-même le long des fils, la surface du feuillet

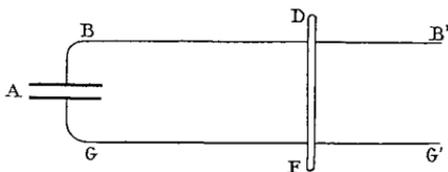


Fig. 64.

du circuit C (fermé par le condensateur A) s'accroît de quantités égales en des temps égaux ; il en est donc de même du flux d'induction magnétique dû au champ terrestre, c'est-à-dire que $\frac{dQ'}{dt}$ est constant. Puisque le champ électrique induit est entièrement dans le condensateur et n'existe pas dans la barre DF, l'expression de force électromotrice induite dans cette barre n'a pas de sens.

Divisons le champ magnétique terrestre en tubes élémentaires d'induction. On dira que $\frac{dQ'}{dt}$ est le flux d'induction magnétique coupé par le circuit C pendant l'unité de temps, c'est-à-dire le flux d'induction des tubes qui passent de l'extérieur à l'intérieur du circuit C. Mais ces tubes ne passent point à travers la barre mobile DF, dans laquelle il n'y a pas de champ électrique (§ 130). On peut se les représenter au contraire comme refoulés par DF, et entrant à l'intérieur du circuit par l'ouverture qui existe dans le diélectrique du condensateur, l'existence de la chute de potentiel électrique $e \left(= -4\pi \frac{dQ'}{dt} \right)$ le long de la partie du circuit C qui est dans le diélectrique provoquant en quelque sorte un appel $\left(-\frac{e}{4\pi} \right)$ de tubes d'induction à travers cette partie de C.

On produit encore, grâce aux dispositifs bien connus, une différence de potentiel constante aux bornes d'une machine d'induction dite à courant continu. Ajoutons en passant que les mesures électriques effectuées sur les machines industrielles confirment, dans les limites de leur précision, les lois de l'induction électro-magnétique, que l'on applique constamment, et le principe de la conservation de l'énergie.

128. Décharge oscillante d'un condensateur. — Nous allons étudier la loi de la décharge d'un condensateur à travers un conducteur possédant une résistance R et un coefficient d'auto-induction L , en tenant compte à la fois de l'énergie magnétique W_m (que nous avons négligée au paragraphe 57) et de l'énergie électrique W_e . Mais, pour simplifier les calculs, nous supposerons que l'on a, comme dans l'état stable du champ :

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

C désignant la capacité du conducteur et Q sa charge à l'époque t , I l'intensité du courant; enfin l'expression de la chaleur dégagée dans le circuit pendant le temps dt sera $RI^2 dt$. Le principe de la conservation de l'énergie donne donc :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \right) dt + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} LI^2 \right) dt + RI^2 dt = 0$$

Comme l'intensité I du courant est égale à $-\frac{dQ}{dt}$, on aura donc :

$$CL \frac{d^2 Q}{dt^2} + CR \frac{dQ}{dt} + Q = 0 \quad (5)$$

Les conditions initiales du problème sont d'ailleurs :

$$Q = Q_0 \quad I = -\frac{dQ}{dt} = 0 \quad \text{pour } t = 0$$

L'intégrale de l'équation (5) est de la forme :

$$Q = A'e^{\alpha't} + A''e^{\alpha''t}$$

α' et α'' étant racines de l'équation caractéristique :

$$CL\alpha^2 + CR\alpha + 1 = 0$$

soit :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha' \\ \alpha'' \end{array} \right\} = -\frac{R}{2L} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4L}{CR^2}} \right)$$

1^{er} cas. Si $\frac{4}{L}$ est inférieur à CR^2 , ces racines sont réelles; Q a une forme exponentielle à coefficients α' et α'' négatifs. On trouve

que le courant de décharge, nul au début, croît jusqu'à un certain maximum et décroît jusqu'à la décharge complète du condensateur. Nous n'insisterons pas sur ce cas.

2^{me} cas. Si $4L > CR^2$, les racines sont imaginaires :

$$\left. \begin{matrix} \alpha' \\ \alpha'' \end{matrix} \right\} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{CL}} \sqrt{1 - \frac{CR^2}{4L}} = -\beta \pm m\sqrt{-1}$$

En tenant compte des conditions initiales du problème, on trouve :

$$\left. \begin{matrix} Q = Q_0 e^{-\beta t} \left[\cos mt + \frac{\beta}{m} \sin mt \right] \\ I = \frac{Q_0}{CLm} e^{-\beta t} \sin mt \end{matrix} \right\} \quad (6)$$

Le régime du courant est donc oscillatoire ; on peut le considérer comme un courant périodique, dont l'intensité est amortie suivant la loi exponentielle $e^{-\beta t}$. La période T a pour valeur :

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{m} = 2\pi \sqrt{CL} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{CR^2}{4L}}} \\ &= 2\pi \sqrt{CL} \left(\text{si } \frac{CR^2}{4L} \text{ est négligeable} \right) \end{aligned}$$

Le coefficient d'amortissement de l'intensité pendant une période est $e^{-\beta T}$:

$$\beta T = 2\pi \sqrt{\frac{CR^2}{4L^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{CR^2}{4L^2}}}$$

Si, par exemple, l'amplitude du courant I ne tombe au $\frac{1}{4000}$ de sa valeur qu'au bout de 46 périodes, on en déduit : $\beta T = 0,4$; alors $\frac{CR^2}{4L} = \frac{1}{4000}$ est négligeable, et l'on a :

$$T = 2\pi \sqrt{CL} \text{ à } \frac{1}{8000} \text{ près.}$$

Les courbes Q_0Q et II de la figure 65 montrent les lois de variation de la charge Q du condensateur et du courant I. Aux époques $0, \frac{T}{2}, T, \frac{3T}{2}, \dots$ Q passe alternativement par ses maxima

positifs et négatifs décroissants, et I passe par zéro. Mais Q s'annule aux époques

$$\frac{T}{4} + 0, \frac{3T}{4} + 0, \frac{5T}{4} + 0, \dots$$

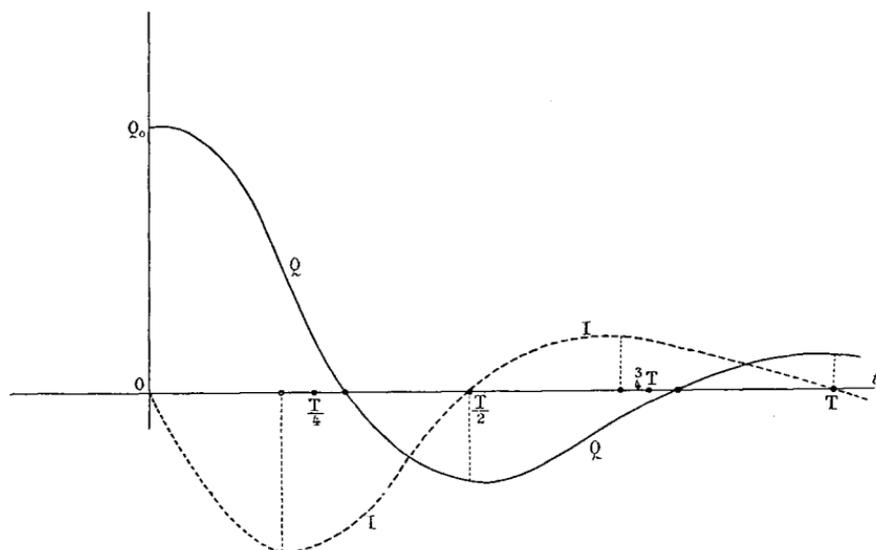


Fig. 65.

et I passe par ses maxima (— et +) aux époques

$$\frac{T}{4} - 0, \frac{3T}{4} - 0, \frac{5T}{4} - 0, \dots$$

θ étant défini par :

$$\operatorname{tg} m\theta = \frac{\beta}{m} = \frac{\beta T}{2\pi}$$

On peut se représenter comme il suit ces oscillations. En chaque point du champ il y a un flux d'énergie w qui est, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnel aux intensités \bar{h} et \bar{l}' des champs électrique et magnétique en ce point (V. § 61) ou, ce qui revient au même (puisqu'on suppose le régime permanent sensiblement atteint à chaque instant), proportionnel à Q et à I : $w = kQI$.

Ceci posé, le courant qui tend à s'établir au début de la décharge, infiniment petit d'abord, croît et fait, par là même, croître l'appel d'énergie. Ceci continue jusqu'à ce que, l'affaiblissement de l'énergie électrique du condensateur compensant

l'accroissement du champ magnétique, l'appel d'énergie (hQI) commence à décroître. Cet appel d'énergie continue néanmoins tant que QI ne change pas de signe, c'est-à-dire jusqu'à ce que la charge Q du condensateur s'annule ($W_e = 0$).

A ce moment-là deux cas peuvent se produire : ou bien les pertes calorifiques ont absorbé également toute l'énergie magnétique, et I est nul ; la décharge est alors terminée (cas où $4L > CR^2$). Ou bien le courant I n'est pas encore nul ; alors Q continue par là même à décroître et devient négatif ; l'appel d'énergie (KQI) se fait donc en sens contraire. L'énergie magnétique servant alors à la fois à réparer les pertes calorifiques et à accroître l'énergie du condensateur, finit par disparaître à l'époque $\frac{T}{2}$. L'énergie électrique W_e ne pouvant évidemment plus s'accroître, Q passe par son maximum négatif, I étant nul. On se retrouve donc dans les conditions initiales, sauf que Q a changé de signe et est réduit dans le rapport $e^{-\frac{1}{2} \delta T}$. Tout recommence comme à l'époque zéro, au signe près, et le même phénomène se renouvelle périodiquement.

Exactitude de la théorie précédente. — D'après cette explication, on voit l'énergie $\frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}$ sortir du condensateur et se transformer en énergie magnétique dans l'espace environnant le circuit, puis cette énergie magnétique revenir au condensateur sous forme d'énergie électrique, une certaine fraction de l'énergie ayant été toutefois dissipée en chaleur dans le conducteur pendant cette demi-période $\frac{T}{2}$. Si $\frac{T}{2}$ est simplement égal au temps ϵ nécessaire pour que les ondes électro-magnétiques fassent simplement cet aller et retour, il est clair que l'état du champ ne saurait être considéré comme permanent, même approximativement. Mais si T est égal à 100 ou 1000 fois ϵ , les échanges d'énergie en question se feront avec une assez grande lenteur, tenant à ce que l'appel d'énergie est relativement faible et, par conséquent, à ce que l'état du champ diffère peu d'un état stable, ce qui justifierait l'hypothèse faite plus haut.

Toutefois, comme un champ électrique alternatif à très courte période ne pénètre qu'à une minime profondeur α dans les bons conducteurs (V. § 135), le calcul de L devra être fait en conséquence,

ce qui n'offre pas de difficultés ; mais le calcul de R , à cause de l'ignorance où nous sommes au sujet de cette profondeur α , laisse une très grande incertitude. Dans le cas où l'amortissement des oscillations électriques est faible, on a vu que le calcul de la période ($T = 2\pi \sqrt{CL}$) ne dépend que de C et de L , que l'on sait déterminer. De là une vérification expérimentale si l'on sait *mesurer* la période T .

Exemple. Dans ses expériences sur la propagation des ondes électro-magnétiques dans l'air, le long d'une ligne à deux fils, M. Blondlot s'est servi d'un résonateur composé d'un fil en forme de rectangle coupé par un condensateur (fig. 66) ; les deux côtés du rectangle avaient 10 et 20 centimètres.

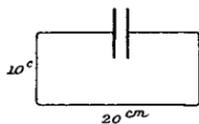


Fig. 66.

Sa résonance maximum ayant été constatée lorsque la longueur d'onde était de 12 mètres, la période *mesurée* des ondes *inductrices*, égale à

$$\frac{12}{300\,000\,000} = 4 \times 10^{-8} \text{ seconde,}$$

devait alors coïncider avec la période naturelle d'oscillation du condensateur. Or le *calcul* de cette période par la formule : $T = 2\pi \sqrt{CL}$ a fourni le même chiffre. Cette formule serait donc encore exacte dans les conditions d'expérience de M. Blondlot.

Il semble que l'on puisse conclure de là que, pendant les oscillations de la charge du condensateur, l'état stable du champ (correspondant aux valeurs actuelles de Q et de I) peut être considéré comme sensiblement atteint à chaque instant, pourvu que le circuit soit un simple contour (et non une bobine) et que les dimensions du champ (distance maximum des plateaux du condensateur aux points du champ pratiquement les plus éloignés = 20 à 25 centimètres sur la figure 66) ne dépassent pas le $\frac{1}{50^e}$ de la longueur d'onde (12 mètres ci-dessus).

La mesure du coefficient d'amortissement des oscillations pourrait nous donner une indication sur la valeur à attribuer au coefficient R (variable avec la période) ; mais on ne possède actuellement aucune méthode précise pour effectuer des mesures de ce genre.

CHAPITRE XIII

PROPAGATION DES ONDES ÉLECTRO-MAGNÉTIQUES

129. Equations du champ électro-magnétique dans un milieu au repos. — Ecrivons les relations (17) et (18) trouvées au paragraphe 118, en remplaçant $4\pi c$ par $\frac{k}{\theta}$:

$$k \left(\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{X}{\theta} \right) = \frac{\partial Y'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial y} \quad (1)$$

$$k \left(\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{Y}{\theta} \right) = \frac{\partial Z'}{\partial x} - \frac{\partial X'}{\partial z} \quad (1')$$

$$k \left(\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{Z}{\theta} \right) = \frac{\partial X'}{\partial y} - \frac{\partial Y'}{\partial x} \quad (1'')$$

$$-k' \frac{\partial X'}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \quad (2)$$

$$-k' \frac{\partial Y'}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \quad (2')$$

$$-k' \frac{\partial Z'}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \quad (2'')$$

Le problème de la propagation des ondes dans un milieu hétérogène étant extrêmement compliqué, nous ne considérerons qu'un milieu composé de parties homogènes. On aura donc à étudier : 1° la propagation dans chaque partie homogène ; 2° le phénomène spécial aux surfaces de séparation de deux corps homogènes (réflexion et réfraction). — Nous excluons toujours le cas du fer, du nickel et du cobalt (§ 67).

Rappelons d'abord que le vecteur magnétique $X' Y' Z'$ satisfait dans tout le champ, à la condition :

$$\frac{\partial X'}{\partial x} + \frac{\partial Y'}{\partial y} + \frac{\partial Z'}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

Quant au vecteur électrique XYZ , il satisfait également dans un conducteur homogène (§ 52) à la condition :

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

Dans un isolant la densité électrique δ peut n'être pas nulle, mais elle est constante ; nous pouvons par conséquent en faire abstraction dans l'étude de la propagation des ondes électro-magnétiques, et supposer la relation (4) partout vérifiée.

Ceci posé, différencions (1) par rapport à t , et remplaçons $y \frac{\partial Y'}{\partial t}$ et $\frac{\partial Z'}{\partial t}$ par leurs expressions (2') et (2''). Il vient :

$$\begin{aligned} kk' \left(\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \frac{1}{0} \frac{\partial X}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(k' \frac{\partial Y'}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k' \frac{\partial Z'}{\partial t} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

ou, à cause de (4) :

$$kk' \left(\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \frac{1}{0} \frac{\partial X}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} = \Delta X$$

cette équation, ne renfermant que l'inconnue X , pourra être intégrée séparément, si les conditions initiales s'y prêtent. Y, Z, X', Y', Z' satisfont à des équations de même forme. En posant :

$$kk' = \frac{1}{a^2}$$

on aura donc les six équations :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \frac{1}{0} \frac{\partial X}{\partial t} = a^2 \Delta X \quad \dots \dots \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 X'}{\partial t^2} = a^2 \Delta X' \quad \dots \dots \quad (6)$$

Nous remarquerons que, d'après la forme de ces équations, les dérivées secondes de $(X Y Z)$ et de $(X' Y' Z')$ peuvent avoir des discontinuités (comme les forces ou les accélérations en mécanique) ; mais elles doivent rester finies, et par conséquent les dérivées premières doivent varier d'une manière continue.

130. Etude du front d'une onde électro-magnétique. — Considérons un champ électro-magnétique créé par une cause quel-

conque et se propageant dans l'espace. Soit S_0 la surface qui limite le volume A occupé par ce champ à l'époque t_0 , c'est-à-dire *le front de l'onde* qui se propage vers l'espace B non encore occupé. Si S est la position du front de l'onde à une époque infiniment peu antérieure $t_0 - \varepsilon$, on peut admettre que, pendant le temps ε , un point M quelconque de cette surface mobile a marché suivant la normale MM_0 avec une vitesse uniforme $V = \frac{MM_0}{\varepsilon}$, que nous appellerons *vitesse de propagation de l'onde* au point M_0 (fig. 67).

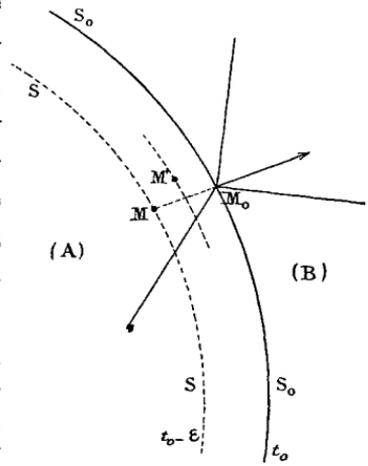


Fig. 67.

Les intensités électrique \bar{h} et magnétique \bar{h}' du champ en un point M' variant d'une manière continue ainsi que leurs dérivées premières (§ 129), doivent croître progressivement à partir de zéro dès que le front de l'onde atteint ce point M' ; mais les dérivées secondes y passent brusquement de zéro à des valeurs finies pour varier ensuite d'une manière continue. Nous poserons donc :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \xi & & \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \eta & & \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \zeta \\ \frac{\partial^2 X'}{\partial t^2} = \xi' & & \frac{\partial^2 Y'}{\partial t^2} = \eta' & & \frac{\partial^2 Z'}{\partial t^2} = \zeta' \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

et ces valeurs de ξ, \dots, ζ' pourront être considérées comme étant les mêmes pour les points infiniment voisins de M_0 , et comme restant constantes pendant un temps infiniment petit à partir de t_0 . Ainsi on aura, aux infiniment petits près d'ordre supérieur :

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} &= \int_{t_0}^t \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} dt = \xi (t - t_0) \text{ pour le point } M_0 \\ \frac{\partial X}{\partial t} &= \int_{t_0 - \varepsilon}^t \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} dt = \xi (t - t_0 + \varepsilon) \text{ pour un point } M \text{ de } S. \end{aligned}$$

En désignant par l, m, n les cosinus directeurs de la normale M_0N à la surface S_0 (dirigée dans le sens de la propagation), et

par x, y, z les coordonnées de M par rapport aux axes transportés en M_0 , on a :

$$\varepsilon = \frac{MM_0}{V} = - \frac{lx + my + nz}{V}$$

On aura donc, en intégrant les équations (7) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} &= \xi \left(t - t_0 - \frac{lx + my + nz}{V} \right) & X &= \frac{1}{2} \xi \left(t - t_0 - \frac{lx + my + nz}{V} \right)^2 \\ \dots &\dots & \dots &\dots \\ \frac{\partial Z'}{\partial t} &= \zeta' \left(t - t_0 - \frac{lx + my + nz}{V} \right) & Z' &= \frac{1}{2} \zeta' \left(t - t_0 - \frac{lx + my + nz}{V} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

On déduit de là les valeurs de $\frac{\partial X}{\partial t}$, X et de :

$$\frac{\partial Y'}{\partial z} = - \frac{n\tau_1'}{V} \left(t - t_0 - \frac{lx + my + nz}{V} \right); \quad \frac{\partial Z'}{\partial y} = - \frac{m\zeta'}{V} \left(t - t_0 - \frac{lx + my + nz}{V} \right)$$

En les portant dans l'équation (1), et divisant par $\left(t - t_0 - \frac{lx + \dots}{V} \right)$, on trouve :

$$k\xi \left[1 + \frac{1}{20} \left(t - t_0 - \frac{lx + my + nz}{V} \right) \right] = \frac{m\zeta' - n\tau_1'}{V}$$

Si l'on néglige l'infiniment petit $\left(t - t_0 - \frac{lx + \dots}{V} \right)$, cette formule et cinq autres semblables deviendront :

$$\left. \begin{aligned} kV\xi &= m\zeta' - n\tau_1' \\ kV\eta &= n\xi' - l\zeta' \\ kV\zeta &= l\tau_1' - m\xi' \end{aligned} \right\} \quad (9) \qquad \left. \begin{aligned} -k'V\xi' &= m\zeta - n\eta \\ -k'V\eta' &= n\xi - l\zeta \\ -k'V\zeta' &= l\tau_1 - m\xi \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Ces six relations vont nous faire connaître les propriétés du front de l'onde :

1° Les vecteurs (ξ, η, ζ) et (ξ', η', ζ') ou, ce qui revient au même, les vecteurs (X, Y, Z) et (X', Y', Z') qui leur sont proportionnels d'après les formules (8) sont perpendiculaires à la normale M_0N au front de l'onde d'après (9) et (10). Les intensités électrique \bar{h} et magnétique \bar{h}' sont donc tangentes au front de l'onde. (En optique, on dit que les vibrations sont transversales.)

2° D'après les formules (9), l'intensité h et l'intensité h' sont perpendiculaires entre elles sur le front de l'onde; et elles sont

orientées de telle sorte que, pour un observateur placé les pieds en M_0 et la tête en N , le vecteur $\overline{h'}$ doit décrire dans le plan tangent à S_0 un angle de 90° de gauche à droite pour venir s'appliquer sur le vecteur \overline{h} (fig. 68). On remarquera que le sens du vecteur \overline{w} , appelé flux d'énergie et défini (§ 61) par les formules :

$$4\pi w_x = Y'Z - YZ \quad 4\pi w_y = \dots \quad 4\pi w_z = \dots$$

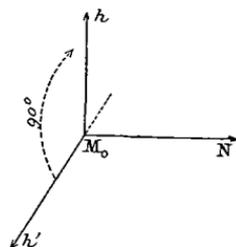


Fig. 63.

est le sens de la normale M_0N ; c'est-à-dire que le sens du flux d'énergie en M_0 coïncide avec celui de la propagation de l'onde, ce qui devait être.

3° Les formules (9) et (10) respectivement donnent :

$$Vkh = h' \quad (9') \quad Vh' = h \quad (10')$$

Si l'on multiplie (9') et (10') membre à membre, on trouve :

$$V^2 = \frac{1}{kk'} = a^2 \quad (11)$$

La vitesse V de propagation de l'onde est donc indépendante du point choisi M_0 , et égale au coefficient spécifique a du milieu où l'onde se propage.

4° En remplaçant V par sa valeur (11) dans (9'), on en déduit :

$$\frac{kh^2}{8\pi} = \frac{kh'^2}{8\pi}$$

Cette relation exprime qu'au front de l'onde l'énergie électrique et l'énergie magnétique (par unité de volume) sont toujours en égale quantité. Il en résulte, entre autres conséquences :

a) Que dans un corps quelconque, tant que l'intensité électrique \overline{h} y est nulle, il ne saurait, par là même, y avoir propagation d'une onde électro-magnétique (ceci vient à l'appui de l'explication donnée au paragraphe 127 au sujet de l'introduction des tubes d'induction magnétique à l'intérieur d'un circuit conducteur) ;

b) Que dans un conducteur le front de l'onde jouit de la propriété suivante. L'énergie électrique w_e tend à y diminuer, pendant le temps dt , d'une fraction $\frac{2dt}{0}$ (§ 48) par suite de sa dissipation

calorifique. L'énergie magnétique $w_m (= w_e)$, qui ne se dissipe pas en chaleur, doit donc réparer la moitié de cette perte, soit $\frac{dt}{0} w_e$, par transformation en énergie électrique, afin que l'égalité : $w_e = w_m$ soit constamment maintenue. L'affaiblissement d'énergie électrique du front de l'onde dû à la dissipation calorifique suit donc la loi exponentielle $e^{-\frac{t}{\theta}}$, au lieu de la loi plus rapide $e^{-\frac{2t}{\theta}}$ et l'onde électro-magnétique peut pénétrer à une profondeur double dans le conducteur sans s'affaiblir davantage, grâce au *réservoir* d'énergie magnétique :

Toutes ces propriétés, notamment *la constance de la vitesse a de propagation*, appartiennent au *front* de l'onde dans un corps quelconque, isolant ou conducteur. Il est essentiel de ne pas confondre cette vitesse réelle a avec une *vitesse apparente de propagation* dont la notion intervient dans l'étude du régime périodique (V. § 135).

134. *Intégrales des équations du champ électro-magnétique.* — Nous allons indiquer deux formes très intéressantes d'intégrales des équations du paragraphe 129, qui, sans nous fournir la solution pratique d'un problème sur la propagation des ondes, nous suggéreront diverses manières d'envisager cette propagation.

1° *Intégrale de Poisson.* — Poisson a donné la forme suivante d'intégrale des équations (5) et (6), qui s'applique au cas d'un milieu homogène ($a = \text{constante}$) isolant ($\theta = \infty$) :

$$X = X_m + 2t \frac{\partial X_m}{\partial t}$$

Le premier membre représente la valeur de la fonction X au point (x, y, z) à l'époque T . Si de ce point comme centre, avec un rayon arbitraire $R = at$, on décrit une sphère, X_m représente la valeur moyenne que possédait X aux divers points de cette sphère à l'époque $T - t = T - \frac{R}{a}$.

Comme des formules semblables s'appliquent à Y, Z, X', Y', Z' , il en résulte que *la connaissance des vecteurs \bar{h} et \bar{h}' en un point (x, y, z) à l'époque T , ne dépend que de la donnée des valeurs moyennes que possédaient ces deux vecteurs, à une époque arbi-*

traire $\Gamma - t$, aux divers points de l'espace qui sont à une distance $R = at$ du point (x, y, z) .

Cette intégrale met bien en évidence la vitesse uniforme a de propagation des ondes électro-magnétiques. Pour sa démonstration, nous renverrons à la note de M. Potier dans le *Traité d'Électricité et de Magnétisme* de Maxwell (§ 784).

2° M. Poincaré a intégré autrement les équations (1), (1')... (2'') en supposant que la *densité du courant électrique* est une fonction donnée de x, y, z, t . Voici sa méthode :

Les expressions de X, Y, Z, X', Y', Z' que nous avons employées au paragraphe 120, savoir :

$$X' = \frac{\partial v'_y}{\partial z} - \frac{\partial v'_z}{\partial y} \quad Y' = \frac{\partial v'_z}{\partial x} - \frac{\partial v'_x}{\partial z} \quad Z' = \frac{\partial v'_x}{\partial y} - \frac{\partial v'_y}{\partial x} \quad (12)$$

$$X = -k' \frac{\partial v'_x}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} \quad Y = -k' \frac{\partial v'_y}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial y} \quad Z = -k' \frac{\partial v'_z}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial z} \quad (13)$$

satisfont identiquement aux équations (2), (2'), (2'') quelles que soient les fonctions v'_x, v'_y, v'_z, V . Assujettissons ces fonctions à satisfaire en outre aux équations (1), (1'), (1'') ; la première de celles-ci devient :

$$\begin{aligned} -k k' \frac{\partial^2 v'_x}{\partial t^2} - k \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} + \frac{k}{\theta} X = & - \left(\frac{\partial^2 v'_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial z^2} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} + \frac{\partial v'_z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Le terme $\frac{k}{\theta} X = 4\pi cX$ est une fonction $4\pi u$ connue par hypothèse, puisque l'on donne la densité (u, v, w) du courant.

Choisissons la fonction V de telle sorte que l'on ait :

$$-k \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial v'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} + \frac{\partial v'_z}{\partial z} \quad (14)$$

L'équation précédente se simplifiera et pourra s'écrire :

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v'_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v'_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial z^2} + 4\pi u = \Delta v'_x + 4\pi u \quad (15)$$

Par une permutation circulaire des lettres (x, y, z) , (u, v, w) , on déduirait de là deux autres équations en v'_y et v'_z .

Si le premier membre de (15) était nul, on aurait : $\Delta v'_x = -4\pi u$, c'est-à-dire que v'_x serait le potentiel d'un champ dans lequel la densité de masse serait u . Son expression serait :

$$v'_x = \int_U \frac{u(\alpha, \beta, \gamma, t)}{r} d\omega$$

$u(\alpha, \beta, \gamma, t)$ désignant la valeur de u , à l'époque actuelle t , dans l'élément de volume $d\omega$ pris au point (α, β, γ) situé à une distance r du point (x, y, z) ; U est le volume du champ. M. Poincaré démontre ¹ que l'intégrale de l'équation (15) complète est :

$$v'_x = \int_U \frac{u\left(\alpha, \beta, \gamma, t - \frac{r}{a}\right)}{r} d\omega \quad (16)$$

Ayant calculé $v'_x v'_y v'_z$ par trois formules semblables, puis V par l'intégration de (14), on en déduira les expressions de (XYZ) et de $(X'Y'Z')$ par des équations (12) et (13), et le problème sera résolu.

L'intégrale (16) de M. Poincaré nous présente l'état du champ électro-magnétique comme résultant de perturbations créées par les courants. Chaque élément de courant (u, v, w) existant dans un volume $d\omega$ donne naissance, à chaque instant, à un vecteur \overline{dv}' , qui lui est parallèle et proportionnel, et qui se propage dans tous les sens avec une vitesse uniforme a tout en décroissant en raison inverse de la distance r au point de départ (α, β, γ) : $dv'_x = \frac{u}{r} d\omega$, $dv'_y = \dots$. En un point (x, y, z) , à l'époque t , le vecteur \overline{v}' est la résultante de tous les vecteurs \overline{dv}' qui y sont de passage à ce moment.

Cette solution convient évidemment au cas où la vitesse a est uniforme dans tout le champ, c'est-à-dire où le volume entier du champ est conducteur et homogène. Si le champ contient à la fois de l'air (ou un autre diélectrique) et des conducteurs où sont les courants, en raison de la différence très grande qui existe entre les vitesses de propagation a dans ces divers corps, les

¹ V. *Oscillations électriques*, § 40.

phénomènes de réflexion des ondes sur les surfaces de séparation sont très compliqués et changent le caractère de la propagation.

ONDES PLANES ET ONDES CYLINDRIQUES

132. *Étude des ondes planes.* — Nous dirons qu'un champ électro-magnétique est composé d'*ondes planes*, si les vecteurs $(X\ Y\ Z)$ et $(X'\ Y'\ Z')$ sont partout parallèles à un même plan P. En prenant l'axe des x perpendiculaire à ce plan P, cette condition s'écrira :

$$X = 0 \quad X' = 0 \quad (17)$$

Si les ondes restent planes et parallèles au plan P, $\frac{\partial X}{\partial t}$ et $\frac{\partial X'}{\partial t}$ sont nuls, et les équations (1) et (2) montrent que l'on a :

$$\frac{\partial Y'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0 \quad (18)$$

c'est-à-dire que dans chaque plan d'onde séparément le champ admet des potentiels électrique et magnétique.

Si les conditions (17) et (18) de l'existence d'ondes planes sont satisfaites à une époque t_0 , les ondes resteront indéfiniment planes et parallèles au même plan, le milieu étant supposé homogène et indéfini. On déduit, en effet, des équations (2') et 2''), la suivante :

$$k \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial Y'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial y} \right) = \Delta X \quad (19)$$

en tenant compte de (4). Or les deux équations (1) et (19), qui ne contiennent que les fonctions X et $\left(\frac{\partial Y'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial y} \right)$, montrent : la première que X ne peut s'accroître tant que $\frac{\partial Y'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial y}$ est nul, la seconde que $\frac{\partial Y'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial y}$ ne peut s'accroître tant que X reste nul dans tout le champ. Comme les valeurs initiales de X et de $\frac{\partial Y'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial y}$ sont nulles pour $t = t_0$, elles resteront donc nulles. Il en serait évidemment de même de X' et de $\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right)$; la proposition est donc démontrée.

En tenant compte des conditions (17) et (18), les équations (1)

et (2) disparaissent, et les équations (1'), (1''), (2'), (2'') se réduisent à :

$$k \left(\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{Y}{\theta} \right) = \frac{\partial Z'}{\partial x} \quad + \quad k' \frac{\partial Z'}{\partial t} = + \frac{\partial Y}{\partial x} \quad (20)$$

$$k \left(\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{Z}{\theta} \right) = - \frac{\partial Y'}{\partial x} \quad - \quad k' \frac{\partial Y'}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} \quad (21)$$

c'est-à-dire à deux groupes (20) et (21) ne contenant l'un que Y et Z', l'autre que Z et Y'. Il nous suffira donc d'étudier le groupe (20), par exemple ; l'étude du groupe (21) serait identique.

Nous allons, au moyen des équations (20), étudier les ondes planes successivement dans un milieu isolant et dans un conducteur.

133. Cas d'un milieu isolant. — Dans un isolant ($\theta = \infty$) les équations (20) se réduisent à :

$$k \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial Z'}{\partial x} \quad k' \frac{\partial Z'}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x} \quad (20')$$

Mais il nous sera plus commode de remplacer les vecteurs \vec{h} et \vec{h}' par les vecteurs $\vec{h} \sqrt{k}$ et $\vec{h}' \sqrt{k'}$, dont les carrés représentent, au facteur 8π près, l'énergie électrique et l'énergie magnétique par unité de volume. Les composantes des ces nouveaux vecteurs seront

$$\left. \begin{array}{lll} \xi = X \sqrt{k} & \eta = Y \sqrt{k} & \zeta = Z \sqrt{k} \\ \xi' = X' \sqrt{k'} & \eta' = Y' \sqrt{k'} & \zeta' = Z' \sqrt{k'} \end{array} \right\} \quad (22)$$

Avec cette notation, les formules (20') deviennent :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = a \frac{\partial \zeta'}{\partial x} \quad \frac{\partial \zeta'}{\partial t} = a \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (23)$$

Ajoutons et retranchons membre à membre ces deux équations :

$$\frac{\partial (\eta + \zeta')}{\partial t} = a \frac{\partial (\eta + \zeta')}{\partial x} \quad (24)$$

$$\frac{\partial (\eta - \zeta')}{\partial t} = - a \frac{\partial (\eta - \zeta')}{\partial x} \quad (25)$$

On connaît la forme des intégrales de (24) et (25) :

$$\begin{aligned} \eta + \zeta' &= f(x + at, y, z) \\ \eta - \zeta' &= \varphi(x - at, y, z) \end{aligned}$$

f et φ désignant deux fonctions arbitraires des variables $(x + at)$ et $(x - at)$ respectivement, et pouvant contenir y et z d'une manière quelconque. On déduit de là :

$$\eta = \frac{1}{2} (f + \varphi) \qquad \zeta' = \frac{1}{2} (f - \varphi)$$

Ces formules expriment que l'onde plane que nous étudions, et qui a pour vecteur η et ζ' (ou Y et Z'), est la superposition de deux ondes planes (η_1, ζ'_1) et (η_2, ζ'_2) :

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{2} f(x + at, y, z) & \zeta'_1 &= \frac{1}{2} f(x + at, y, z) \\ \eta_2 &= \frac{1}{2} \varphi(x - at, y, z) & \zeta'_2 &= -\frac{1}{2} \varphi(x - at, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

dont la première se propage sans déformation dans le sens négatif de l'axe des x avec une vitesse uniforme a , la seconde se propageant dans le sens positif du même axe avec la même vitesse.

Dans chacune de ces deux ondes de sens inverses les vecteurs η et ζ' ont même valeur et, par conséquent, les énergies électrique et magnétique par unité de volume sont égales. C'est la généralisation d'une propriété constatée au paragraphe 130 pour le front de l'onde.

Etant donnée l'onde plane complexe (η, ζ') à l'époque t , sa décomposition en deux ondes planes (η_1, ζ'_1) et (η_2, ζ'_2) se propageant en sens inverse est très simple et résulte des formules (26), que l'on écrira :

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{2} (\eta + \zeta') & \zeta'_1 &= \frac{1}{2} (\eta + \zeta') \\ \eta_2 &= \frac{1}{2} (\eta - \zeta') & \zeta'_2 &= -\frac{1}{2} (\eta - \zeta') \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Le sens de propagation de chacune de ces deux ondes est indiqué par la règle du paragraphe 130 (fig. 68), d'après l'orientation relative des deux vecteurs η_1 et ζ'_1 , (ou η_2 et ζ'_2).

Considérons maintenant le cas général d'une onde plane régie par les équations (20) et (21). On traitera, comme nous venons de le faire, la partie (Y, Z') de cette onde plane qui est régie par les équations (20), et l'on fera de même pour l'autre partie (Z, Y') . On verra sans peine que l'onde résultante, dont les vecteurs sont

\bar{h} et \bar{h}' , ou plutôt $\bar{H} = \bar{h} \sqrt{k}$ et $H' = \bar{h}' \sqrt{k'}$, peut se décomposer, par la règle suivante, en deux ondes planes se propageant dans des sens opposés, avec la même vitesse a , et sans déformation.

MH et MH' représentant les deux vecteurs \bar{H} et \bar{H}' en un point M quelconque du champ (HMH' = plan de la figure 69), menons Mh' égal et perpendiculaire à MH', puis Mh égal et perpendiculaire à MH, de telle sorte que le triangle MHh' vienne coïncider avec le triangle MhH' par une rotation de 90° autour de M. I et J étant les milieux des côtés égaux Hh' et hH', on a les égalités géométriques :

$$\bar{H} = \bar{MI} + \bar{IJ} \quad \bar{H}' = \bar{MJ} + \bar{JI}'$$

Ceci posé, l'onde plane donnée peut se décomposer en deux autres A et B, dont les deux vecteurs (analogues à \bar{H} et H') au point M sont respectivement :

MI et MJ pour l'onde A
IH et JI' pour l'onde B

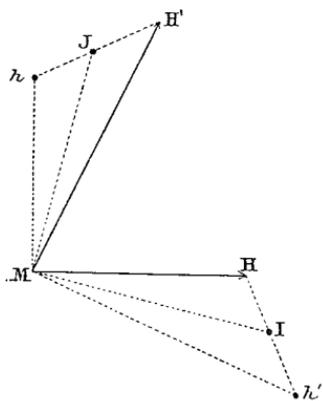


Fig. 69.

Comme MI et MJ sont égaux et perpendiculaires entre eux, ils représentent bien les vecteurs électrique et magnétique d'une onde plane A qui se propage, d'après leur orientation, d'arrière en avant de la figure. De même les vecteurs égaux et perpendiculaires IH et JH', ayant une orientation relative différente, appartiennent à une onde B qui se propage en sens inverse

Chacune de ces ondes de sens inverses se transporte en bloc, l'état du champ dans un même plan d'onde restant stable.

Telle est la loi de propagation des ondes planes dans un milieu homogène isolant.

134. Cas d'un milieu conducteur. — Dans ce cas, les équations (23), que nous avons obtenues en négligeant le terme en $\frac{Y}{\theta}$ dans les équations (20), doivent être remplacées par :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\eta}{\theta} = a \frac{\partial \xi'}{\partial x} \quad \frac{\partial \xi'}{\partial t} = a \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (28)$$

La loi établie au paragraphe 133 pour un milieu isolant sera modifiée comme il suit.

L'onde plane (η, ζ) peut encore se décomposer en deux autres (η_1, ζ_1) et (η_2, ζ_2) se propageant avec la vitesse a dans des sens opposés, mais *avec déformation*; de telle sorte que cette décomposition, faite à l'époque t , n'est valable que pour un temps infiniment petit dt et doit être recommencée au temps $t + dt$, au lieu de rester la même dans la suite comme au paragraphe 133. L'énergie électrique (w_e) ayant en effet une fraction $\frac{2dt}{\theta}$ de sa valeur dissipée en chaleur pendant le temps dt , le vecteur électrique η_1 ($= \sqrt{8\pi} w_e$) subit une perte correspondante égale à $\eta_1 \frac{dt}{\theta}$; de même pour l'autre composante η_2 . Les équations (27) doivent donc s'écrire, pour représenter l'état du champ à l'époque $(t + dt)$:

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{2} (\eta + \zeta') \left(1 - \frac{dt}{\theta}\right) & \zeta'_1 &= \frac{1}{2} (\eta + \zeta') \\ \eta_2 &= \frac{1}{2} (\eta - \zeta') \left(1 - \frac{dt}{\theta}\right) & \zeta'_2 &= -\frac{1}{2} (\eta - \zeta') \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

On peut du reste vérifier que ce raisonnement n'est que la traduction des équations (28). Il conduit en effet à cette conséquence que la valeur $\eta(x, y, z, t + dt)$ du vecteur η au point (x, y, z) à l'époque $t + dt$ est la somme : 1° du vecteur $\eta_1(x + adt, y, z, t)$ qui est parti au temps t du point $(x + adt, y, z)$, allant en sens inverse de l'axe des x ; 2° du vecteur $\eta_2(x - adt, y, z, t)$ parti du point $(x - adt, y, z)$ dans le sens de l'axe des x :

$$\eta(x, y, z, t + dt) = \eta_1(x + adt, y, z, t) + \eta_2(x - adt, y, z, t)$$

En développant par la formule de Taylor, et tenant compte de (29), ceci s'écrira :

$$\begin{aligned} \eta + \frac{\partial \eta}{\partial t} dt &= \eta_1 + adt \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \eta_2 - adt \frac{\partial \eta_2}{\partial x} \\ &= (\eta_1 + \eta_2) + adt \frac{\partial (\eta_1 - \eta_2)}{\partial x} \\ &= \eta \left(1 - \frac{dt}{\theta}\right) + adt \frac{\partial \zeta'}{\partial x} \left(1 - \frac{dt}{\theta}\right) \end{aligned}$$

ou :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\eta}{\theta} + a \cdot \frac{\partial \zeta'}{\partial x}$$

Ce n'est autre chose que la première des équations (28). On verrait de même que l'équation :

$$\zeta' (x, y, z, t + dt) = \zeta'_1 (x + adt, y, z, t) + \zeta'_2 (x - adt, y, z, t)$$

se ramène à la deuxième équation (28).

Considérons l'une des deux ondes planes composantes, qui se propage dans le sens des x positifs, par exemple, tout en s'altérant. A chaque instant ses deux vecteurs électrique $\frac{1}{2}(\eta - \zeta')$ et magnétique $\frac{1}{2}(\eta + \zeta')$ sont égaux, et son énergie électrique est par conséquent égale à son énergie magnétique. On voit ici, comme au paragraphe 130, que la moitié de la perte calorifique de l'énergie électrique est réparée au fur et à mesure par une transformation d'énergie magnétique en énergie électrique

Profondeur de pénétration du front de l'onde. — Supposons que, le plan des yz séparant un diélectrique d'un conducteur indéfini, des ondes planes parallèles à ce plan arrivent du diélectrique sur le conducteur et pénétrant en partie dans celui-ci. Soit w_0 la valeur commune des énergies électrique et magnétique du front de l'onde (par unité de volume) au moment précis ($t = 0$) où celui-ci vient d'entrer dans le conducteur ($x = 0$). Au bout d'un temps t , le front de l'onde s'est avancé d'une longueur $x = at$, et son énergie initiale $2 w_0$ est devenue (§ 130) :

$$w = 2 w_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = 2 w_0 e^{-\frac{x}{a\tau}}$$

Nous conviendrons de dire que cette énergie est éteinte lorsque le coefficient d'affaiblissement $e^{-\frac{x}{a\tau}}$ atteindra la valeur e^{-8} ($= \frac{1}{300}$ environ) ; et nous appellerons *profondeur de pénétration* du front de l'onde dans le conducteur la longueur correspondante

$$\varepsilon_0 = 8 a \tau = \frac{2}{\pi c} \sqrt{\frac{k}{k'}} \quad (30)$$

Pour le cuivre, en unités pratiques ($k' = 1$), on a :

$$c = 0,62 \times 10^{18} \quad k = \frac{1}{900} \mu$$

d'où :

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3} 10^{-6} \sqrt{\mu} \text{ millimètres}$$

μ désignant le rapport du pouvoir inducteur électrique du métal à celui de l'air. (Si $\mu = 1$, $\epsilon_0 = \frac{1}{3} 10^{-6}$ mm. ; si $\mu = 10^4$, $\epsilon_0 = \frac{1}{30}$ micron.)

135. Ondes planes périodiques dans un conducteur. — Le cas des ondes périodiques est très important au point de vue de l'étude des oscillations *hertziennes*. Lorsque des ondes périodiques arrivent de l'air sur un conducteur, le régime de ces ondes dans le conducteur cesse d'être périodique pendant quelque temps ; puis il finit par le redevenir. Le calcul du régime variable intermédiaire serait très compliqué ; nous ne nous occuperons que du régime périodique permanent atteint finalement, en supposant l'onde plane et parallèle à la surface d'entrée dans un conducteur indéfini.

Des équations (28) de l'onde on déduit :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{1}{\theta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (31)$$

Nous avons à essayer une solution de la forme :

$$\eta = u \sin mt + v \cos mt \quad (32)$$

$T = \frac{2\pi}{m}$ désignant la période de l'onde, u et v deux fonctions de x qui doivent satisfaire identiquement à (31) par la substitution de cette expression de η . La substitution donne :

$$-m^2 (u \sin mt + v \cos mt) + \frac{m}{\theta} (u \cos mt - v \sin mt) = a^2 (u'' \sin mt + v'' \cos mt)$$

u'' et v'' désignant les dérivées secondes de u et de v . En annulant les coefficients de $\sin mt$ et de $\cos mt$ séparément, on trouve :

$$a^2 u'' + m^2 u + \frac{m}{\theta} v = 0$$

$$a^2 v'' + m^2 v - \frac{m}{\theta} u = 0$$

Si l'on pose :

$$u + i v = w$$

($i = \sqrt{-1}$), on aura donc :

$$a^2 w'' + \left(m^2 - i \frac{m}{\theta} \right) w = 0$$

Cette équation différentielle linéaire et à coefficients constants a pour intégrale :

$$w = M e^{-\frac{x}{a} \sqrt{-m^2 + i \frac{m}{\theta}}} + M' e^{+\frac{x}{a} \sqrt{-m^2 + i \frac{m}{\theta}}}$$

M et M' désignant des constantes arbitraires. Comme :

$$\sqrt{-m^2 + i \frac{m}{\theta}} = \sqrt{\frac{m}{2\theta}} \left[\sqrt{-m\theta + \sqrt{1 + m^2 \theta^2}} + i \sqrt{m\theta + \sqrt{1 + m^2 \theta^2}} \right] \\ = \beta + i \gamma$$

on aura :

$$w = Me^{-\frac{6x}{a}} \left[\cos \frac{\gamma x}{a} - i \sin \frac{\gamma x}{a} \right] + Me^{\frac{6x}{a}} \left(\cos \frac{\gamma x}{a} + i \sin \frac{\gamma x}{a} \right)$$

Mais le terme en $e^{\frac{6x}{a}}$, qui croît indéfiniment avec x , ne convient pas, puisque au contraire l'onde doit s'affaiblir quand x augmente; on fera donc $M' = 0$. En décomposant alors w en $(u + i v)$, on trouve :

$$u = Me^{-\frac{6x}{a}} \cos \frac{\gamma x}{a} \quad v = -Me^{-\frac{6x}{a}} \sin \frac{\gamma x}{a}$$

d'où d'après (32) :

$$\eta = Me^{-\frac{6x}{a}} \sin \left(mt - \frac{\gamma x}{a} \right) = \eta_0 e^{-\frac{6x}{a}} \sin \left(mt - \frac{\gamma x}{a} \right) \quad (33)$$

η_0 désignant l'amplitude de η sur le plan : $x = 0$.

En portant dans la deuxième équation (28) cette expression de η , on trouvera facilement :

$$\zeta' = \frac{\eta_0}{m} e^{-\frac{6x}{a}} \left[\beta \cos \left(mt - \frac{\gamma x}{a} \right) - \gamma \sin \left(mt - \frac{\gamma x}{a} \right) \right] \quad (34)$$

Les formules (33) et (34) nous donnent la solution du problème; nous allons en déduire quelques conséquences. Posons à cet effet :

$$N = \sqrt{\frac{m\theta + \sqrt{1 + m^2 \theta^2}}{2m\theta}} \quad (35)$$

d'où :

$$\beta = \frac{1}{2\theta N} \text{ et } \gamma = m N$$

Vitesse apparente de propagation. — On peut interpréter les formules (33) et (34) en disant que l'onde se propage dans le sens positif de l'axe des x avec une vitesse uniforme $\frac{am}{\gamma}$, en s'affaiblissant suivant la loi $e^{-\frac{6x}{a}}$. A cette *vitesse apparente* :

$$a_1 = \frac{am}{\gamma} = \frac{a}{N}$$

qui est N fois plus faible que la vitesse réelle de propagation a , correspond une longueur d'onde égale à : $aT = \frac{aT}{N}$.

Profondeur de pénétration de l'onde dans le conducteur. — Nous définirons cette profondeur de pénétration ε de l'onde périodique, comme celle ε_0 du front de l'onde (§ 134), par la condition que l'affaiblissement de l'énergie w à cette profondeur soit égale à e^{-8} . Cet affaiblissement, étant le même que celui du carré de η , est $e^{-\frac{2\eta\varepsilon}{a}}$; donc :

$$\varepsilon = 8 \frac{a}{2\beta} = 8 a \theta N = N \varepsilon_0 \quad (36)$$

L'onde périodique pénètre N fois plus profondément que le front de l'onde.

Rapport des énergies électrique et magnétique en un point. — Ce rapport est égal, comme nous savons, au rapport de η^2 à ζ'^2 . Or les formules (33) et (34) montrent que les amplitudes maxima de η et de ζ' en un point x sont :

$$\gamma_0 e^{-\frac{6x}{a}} \text{ et } \frac{\gamma_0}{m} \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} e^{-\frac{6x}{a}}$$

Donc la valeur moyenne du rapport de w_e à w_m pendant une période est :

$$\frac{w_e}{w_m} = \gamma_0^2 : \frac{\gamma_0^2}{m^2} (\beta^2 + \gamma^2) = \frac{m \theta}{\sqrt{1 + m^2 \theta^2}}$$

d'où, en désignant par w l'énergie totale ($w_e + w_m$) :

$$\frac{w}{2w_e} = N^2 \quad (37)$$

Ainsi l'énergie totale w , au lieu d'être égale à $2w_e$, comme pour une onde qui se propage dans un milieu isolant, doit être N^2 fois plus grande. Il y a donc un emmagasinement plus considérable d'énergie magnétique, qui permet à l'onde de pénétrer N fois plus profondément.

Energie consommée dans le conducteur. — Le flux d'énergie w_1

qui pénètre dans le conducteur ($x = 0$) par unité de surface, pendant l'unité de temps, a pour valeur (§ 122) :

$$w_1 = w_x = \frac{1}{4\pi} (Y'Z - YZ') = -\frac{1}{4\pi} YZ'$$

Remplaçons $Y \sqrt{k}$ et $Z' \sqrt{k'}$ par τ_1 et ζ' et calculons la valeur moyenne de w_1 pendant une période T :

$$\begin{aligned} (w_1)_{\text{moy.}} &= \frac{1}{T} \int_0^T -\frac{a}{4\pi} \tau_1 \zeta' dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T -\frac{a}{4\pi} \cdot \frac{\tau_{10}^2}{m} \sin mt (\beta \cos mt - \gamma \sin mt) dt \\ &= \frac{a}{8\pi} \frac{\gamma}{m} \tau_{10}^2 = \frac{a}{N} w_0 = a_1 w_0 \end{aligned} \quad (38)$$

Ainsi l'énergie moyenne fournie au conducteur par unité de temps est le produit de l'énergie moyenne (pendant une période T) w_0 qui

existe dans l'unité de volume à la surface du conducteur, par la vitesse apparente de propagation a_1 .

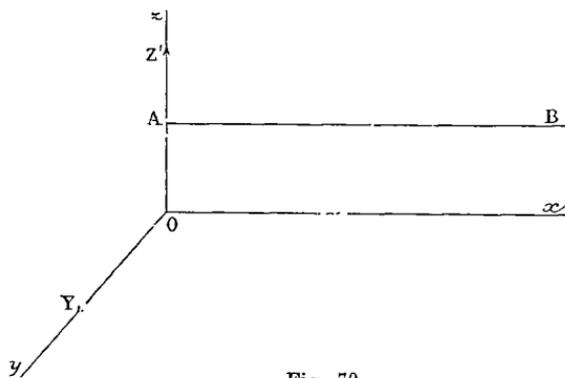


Fig. 70.

rectangulaire indéfinie x OAB (fig. 70), dont la hauteur OA est égale à 1 (intensité du courant dans le conducteur par unité de largeur de sa surface d'entrée). Appliquons au contour C de cette bande l'équation (21) du paragraphe 72 :

$$\int_C (X' dx + Y' dy + Z' dz) = 4\pi I$$

Cette intégrale se réduit à $Z' \times 1$ (élément OA); donc :

$$-I = \frac{1}{4\pi} Z' = \frac{1}{4\pi \sqrt{k'}} \zeta' = \frac{r_{10}}{m} \left(\beta \cos mt - \gamma \sin mt \right) \frac{1}{4\pi \sqrt{k'}}$$

$$I^2_{\text{moy.}} = \frac{1}{2} \frac{r_{10}^2}{m^2} \left(\beta^2 + \gamma^2 \right) \frac{1}{16\pi^2 k'}$$

Comme l'énergie (w_1) fournie au conducteur est équivalente à la chaleur dégagée, en posant :

$$\left(w_1 \right)_{\text{moy.}} = R I^2_{\text{moy.}}$$

nous appellerons R *résistance apparente* du conducteur par unité de surface (la profondeur étant infinie) :

$$R = \frac{w_1 \text{ moy.}}{I^2_{\text{moy.}}} = 4\pi k' a \frac{N}{2N^2 - 1}$$

Si ϵ' est l'épaisseur du conducteur qui, en courant continu, aurait la même résistance R , on aura ($c =$ conductibilité) :

$$\epsilon' = \frac{1}{cR} = \frac{2N^2 - 1}{4\pi k' caN} = \frac{\epsilon}{4} \left(1 - \frac{1}{2N^2} \right) \quad (39)$$

Applications (unités pratiques). — Dans le cas du cuivre, nous avons trouvé (§ 49 et 135) :

$$\theta = 1,4 \times 10^{-19} \mu; \quad \epsilon_0 = \frac{1}{3} \cdot 10^{-8} \sqrt{\mu} \text{ millimètres}$$

On aura donc :

$$m\theta = \frac{2\pi}{T} \cdot \theta = 8,8 \times 10^{-19} \frac{\mu}{T}$$

A défaut de données sur le pouvoir inducteur électrique μ du cuivre, nous ferons l'hypothèse : $\mu < 1000$. Alors, on voit que si la période T est supérieure à 10^{-13} , $m\theta$ est inférieur à 0,01 et sera pratiquement négligeable devant l'unité. On aura ainsi approximativement :

$$N = \sqrt{\frac{m\theta + \sqrt{1 + m^2 \theta^2}}{2m\theta}} = \sqrt{\frac{1}{2m\theta}}$$

$$a_1 = \frac{a}{N} = \sqrt{\frac{2m\theta}{kk'}} = \sqrt{\frac{1}{k'cT}} = \frac{4 \times 10^{-8}}{\sqrt{T}} \text{ u. pr.}$$

$$\epsilon_0 < \frac{1}{100} \text{ micron}$$

$$\varepsilon = 8\alpha_1 0N = 8\alpha_1 0N^2 = \frac{2a_1 T}{\pi} = \frac{8}{\pi} \times 10^{-8} \sqrt{T}$$

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{4} = \frac{2}{\pi} 10^{-8} \sqrt{T}$$

On voit, en passant, que la profondeur de pénétration $\left(\varepsilon = \frac{2}{\pi} a_1 T\right)$ de l'onde n'est qu'une fraction $\frac{2}{\pi}$ de la longueur d'onde apparente $a_1 T$ dès que $m\theta$ est négligeable devant l'unité. Dans l'expérience de M. Blondlot citée au paragraphe 128, où l'on a : $T = 4 \times 10^{-8}$ seconde on trouve :

$$a_1 = 2 \times 10^{-4} \text{ u. pr.} = 2 \text{ kilomètres par seconde}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-11} \text{ u. pr.} = 50 \text{ microns}$$

$$\varepsilon' = 12 \text{ microns environ}$$

En raison de la faiblesse de cette épaisseur on peut appliquer à un conducteur cylindrique les résultats ci-dessus démontrés pour un conducteur à surface plane. Pour un fil de 1 millimètre de diamètre, ε étant de 12 microns, la résistance *apparente* du fil par mètre de longueur pour la période 4×10^{-8} est :

$$R_1 = \frac{1}{c} \times \frac{10^{-7}}{12 \cdot 10^{-13} \times \pi \cdot 10^{-10}} = 0^{\text{m}}, 41$$

Ces résultats, indépendants de la valeur inconnue de μ sont applicables aux oscillations hertziennes (où $T > 10^{10}$).

136. Ondes cylindriques périodiques dans un conducteur. — Supposons que dans un fil conducteur cylindrique, arrivent de l'extérieur des ondes cylindriques concentriques ; c'est-à-dire que, l'axe du conducteur étant pris pour axe Oz , l'intensité électrique h du champ soit partout parallèle à Oz , et l'intensité magnétique h' en un point (x, y, z) soit perpendiculaire au plan passant par ce point et par l'axe. Si l'on prend de nouvelles coordonnées (r, φ, z) définies par :

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad z = z$$

d'où :

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \varphi = \text{arc tg } \frac{y}{x}$$

les composantes de h et de h' seront :

$$\left. \begin{array}{l} X = 0 \quad Y = 0 \quad Z = h \\ X' = h' \sin \varphi \quad Y' = -h' \cos \varphi \quad Z' = 0 \end{array} \right\} \quad (40)$$

h et h' sont indépendants de l'angle φ et de z , et ne dépendent que de r . Substituons ces expressions dans les équations du paragraphe 129.

Les équations (1), (1'), (2'') disparaissent. Quant aux équations (1''), (2̄), (2'), si l'on tient compte des formules de transformation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \cos \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \dots \dots \dots = \sin \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

elles deviennent

$$\left. \begin{aligned} k \left(\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{Z}{\theta} \right) &= \frac{\partial X'}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial X'}{\partial \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi}{r} - \frac{\partial Y'}{\partial r} \cos \varphi + \frac{\partial Y'}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{r} \\ - k \frac{\partial X'}{\partial t} &= - \frac{\partial Z}{\partial y} = - \frac{\partial Z}{\partial r} \sin \varphi \\ - k \frac{\partial Y'}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial r} \cos \varphi \end{aligned} \right\} (41)$$

En tenant compte de (40), ces deux dernières équations se réduisent à :

$$k \frac{\partial h'}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial r} = \frac{\partial h}{\partial r} \tag{42}$$

D'autre part, si l'on différentie la première des équations (41) par rapport à t , en tenant compte des deux dernières, on a :

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + \frac{1}{\theta} \frac{\partial Z}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Z}{\partial r} \tag{43}$$

Intégration de (42) et de (43). — Nous supposons que l'onde soit périodique, et que Z soit de la forme :

$$Z = u \sin mt + v \cos mt$$

u et v étant des fonctions de r ; nous supposons en outre que $m\theta$ soit négligeable devant l'unité (v. § 135) et, par conséquent, que $\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}$ soit négligeable devant $\frac{1}{\theta} \frac{\partial Z}{\partial t}$. L'équation (43) se réduira alors à :

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Z}{\partial r} - \frac{\alpha}{m} \frac{\partial Z}{\partial t} = 0$$

en posant :

$$\alpha = \frac{m}{a^2 \theta}$$

Par la substitution de l'expression ci-dessus de Z , elle devient :

$$\left(u'' + \frac{u'}{r}\right) \sin mt + \left(v'' + \frac{v'}{r}\right) \cos mt - \alpha \left(u \cos mt - v \sin mt\right) = 0$$

u' , v' , u'' , v'' désignant les dérivées par rapport à r . On doit donc avoir séparément :

$$\begin{aligned} u'' + \frac{u'}{r} + \alpha v &= 0 \\ v'' + \frac{v'}{r} - \alpha u &= 0 \end{aligned}$$

d'où, en posant :

$$\begin{aligned} u + iv &= w \left(i = \sqrt{-1} \right) : \\ w'' + \frac{w'}{r} - \alpha iw &= 0 \end{aligned} \quad (44)$$

C'est une équation de Bessel, dont nous pouvons développer l'intégrale en série suivant une formule paire par rapport à r (w ne changeant pas quand on change r en $-r$) :

$$w = w_0 + w_1 r^2 + w_2 r^4 + \dots + w_n r^{2n} + \dots$$

Portons cette expression dans (44), et annulons le terme général en r^{2n} ; on trouve :

$$w_n = \frac{\alpha i}{(2n)^2} w_{n-1} = \dots = \frac{(\alpha i)^n}{(2 \cdot 4 \dots 2n)^2} w_0$$

donc :

$$w = w_0 \sum_0^{\infty} \frac{(\alpha i r^2)^n}{2^{2n} \cdot n!^2}$$

et :

$$\begin{aligned} u &= w_0 \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!^2} \left(\frac{\alpha r^2}{4}\right)^{2n} = w_0 f(s) \\ v &= w_0 \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!^2} \left(\frac{\alpha r^2}{4}\right)^{2n+1} = w_0 g(s) \end{aligned}$$

en posant :

$$s = \frac{\alpha r^2}{4} = \frac{mr^2}{4a^2 \theta}$$

Ainsi Z sera de la forme :

$$Z = w_0 \left[f. \sin mt + g \cos mt \right] \quad (45)$$

f et g désignant deux fonctions connues de s . En intégrant (42) par rapport à t , on aura donc :

$$h' = \frac{w_0}{k'm} \left[-f'_r \cos mt + g'_r \sin mt \right] \quad (46)$$

f'_r et g'_r désignant les dérivées de f et de g par rapport à r .

Si I désigne l'intensité totale du courant qui traverse le conducteur à l'époque t , l'intégrale $\int_C h' ds$, prise le long de la circonférence C (de rayon ρ) de la section droite du fil, est égale à $4\pi I$:

$$\int_C h' ds = h'_\varphi \cdot 2\pi \rho = 4\pi I$$

$$I = \frac{\rho}{2} h'_\varphi = \frac{w_0 \rho}{2k'm} \left[-f'_\varphi \cos mt + g'_\varphi \sin mt \right] \quad (47)$$

Cette formule permet de calculer la constante w_0 quand l'amplitude I_0 du courant total I est donnée :

$$w_0 = \frac{2k'm I_0}{\rho \sqrt{f'^2_\varphi + g'^2_\varphi}}$$

Quantité de chaleur dégagée. — Comme \bar{h} est perpendiculaire à \bar{h} , le flux d'énergie entrant par l'unité de surface du conducteur sera (§ 122) : $\frac{1}{4\pi} h_\varphi h'_\varphi = h_\varphi \frac{I}{2\pi\rho}$. La surface du fil par unité de longueur étant $2\pi\rho$, le flux entrant par cette surface est :

$$h_\varphi \frac{I}{2\pi\rho} \times 2\pi\rho = h_\varphi I = Z_\varphi I$$

La moyenne de ce flux (pendant une période), c'est-à-dire la quantité Q de chaleur dégagée dans l'unité de longueur du fil par unité de temps est, d'après (45) et (47) :

$$Q = \frac{1}{T} \int_0^T Z_\varphi I dt = \frac{k'm}{\rho} I_0^2 \left[\frac{f g'_r - g f'_r}{f'^2_{r^2} + g'^2_{r^2}} \right]_{r=\varphi}$$

D'autre part Q a aussi pour expression $\frac{1}{2} RI_0^2$, R désignant la résistance *apparente* du conducteur par unité de longueur ; il en résulte :

$$R = \frac{2Q}{I_0^2} = \frac{2k'm}{\rho} \left[\frac{f g'_r - g f'_r}{f'^2_{r^2} + g'^2_{r^2}} \right]_{r=\varphi}$$

En remarquant que l'on a :

$$f'_r = f'_s \frac{ds}{dr} = \frac{mr}{2a^2\theta} f'_s \quad g'_r = \frac{mr}{2a^2\theta} g'_s$$

la valeur de R s'écrira :

$$R = \frac{4k'a^2\theta}{\rho^2} \left[\frac{fg'_s - gf'_s}{f'^2_s + g'^2_s} \right]_{r=\varrho} = R_0 F(s)_{r=\varrho} \quad (48)$$

R_0 ($= \frac{4k'a^2\theta}{\rho^2} = \frac{1}{c \cdot \pi \rho^2}$) désignant la résistance vraie du conducteur par unité de longueur en courant continu.

Comme la fonction $F(s)$ ne dépend que de la variable s , on en a construit une table numérique, qui permet de déterminer sans peine la résistance apparente R d'un conducteur pour un courant périodique simple de période donnée, résultat important dans les questions de courants alternatifs.

Les séries :

$$f(s) = 1 - \frac{s^2}{2!^2} + \frac{s^4}{4!^2} - \frac{s^6}{6!^2} + \dots$$

$$g(s) = s - \frac{s^3}{3!^2} + \frac{s^5}{5!^2} - \dots$$

$$F(s) = 1 + \frac{s^2}{12} - \frac{s^4}{180} - \dots$$

sont rapidement convergentes pour de faibles valeurs de s . Pour $r = \rho$, s a la valeur :

$$s_\varrho = \frac{m\rho^2}{4a^2\theta} = k'm\pi\rho^2c$$

Dans le cas d'un fil de cuivre de n millimètres de diamètre :

$$s_\varrho = \frac{2\pi}{T} \pi \left(\frac{1}{2} 10^{-10} n \right)^2 \times 0,62 \times 10^{15} = 31 \times 10^{-6} \frac{n^2}{T}$$

$$1^\circ n = 4, T = \frac{1}{500} \text{ (fil téléphonique) : } s_\varrho = \frac{1}{4} ; \frac{R}{R_0} = F(s) = 1 + \frac{1}{192} ;$$

la résistance apparente R dépasse à peine la résistance vraie R_0 .

$$2^\circ n = 40, T = \frac{1}{50} \text{ (fil d'éclairage) : } s_\varrho = 2,5 ; \frac{R}{R_0} = 1 + \frac{2,5^2}{12} - \frac{2,5^4}{180} - \dots = 1,3 \text{ environ.}$$

L'accroissement de résistance est déjà très sensible.

A l'intérieur du conducteur, la loi de variation de la densité i du courant avec la distance r à l'axe est donnée par la formule (45),

car i est proportionnel à Z . Si 1 est l'amplitude de cette densité sur l'axe ($r = 0$), l'amplitude à la distance r sera égale à :

$$\frac{w_0 \sqrt{f(r)^2 + g(r)^2}}{w_0 \sqrt{f(0)^2 + g(0)^2}} = \sqrt{f(r)^2 + g(r)^2} = 1 + \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{96} + \dots$$

car sur l'axe $f(0) = 1$ et $g(0) = 0$. On voit que la densité du courant croît de l'axe à la périphérie ($s = \frac{mr^2}{4a^2\theta}$).

Pour le cas où $s_p = 2,5$ (cité plus haut), le rapport des densités à la périphérie et sur l'axe est :

$$1 + \frac{2,5^2}{2} + \frac{2,5^4}{96} + \dots > 4,5$$

Avec des périodes de l'ordre de grandeur de 10^{-8} le courant ne pénètre qu'à une faible profondeur dans le conducteur, s_p ayant une valeur considérable. Ce cas a été étudié au paragraphe 135.

RÉFLEXION ET RÉFRACTION DES ONDES

137. Réflexion et réfraction des ondes électro-magnétiques. — Nous allons étudier la réflexion et la réfraction d'une onde plane P

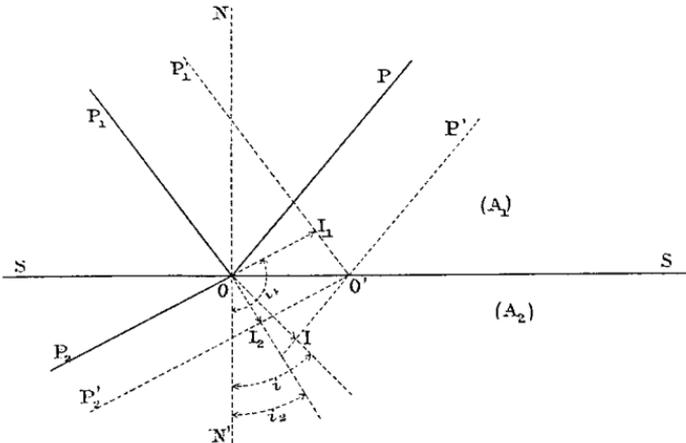


Fig. 71.

sur la surface plane SS de séparation de deux diélectriques A_1 et A_2 (le plan de la figure 71 est perpendiculaire à ces deux plans qui

se projettent suivant OP et SS). Nous supposons qu'il existe une onde plane réfléchie P_1 et une onde plane réfractée P_2 . Soient OI , OI_1 , OI_2 des vecteurs portés dans les sens de propagation respectifs des ondes P , P_1 , P_2 , et auxquels nous donnons des longueurs :

$$OI = a_1 \quad OI_1 = a_1 \quad OI_2 = a_2$$

égales aux vitesses de propagation dans les milieux A_1 et A_2 . Au bout de l'unité de temps, P , P_1 , P_2 seront venues en P' , P'_1 , P'_2 , passant respectivement par II_1I_2 ; et si l'on désigne par i , i_1 , i_2 les angles que font OI , OI_1 , OI_2 avec la normale ON' au plan réfringent SS , on aura évidemment :

$$OO' = \frac{OI}{\sin i} = \frac{OI_1}{\sin i_1} = \frac{OI_2}{\sin i_2}$$

En remplaçant OI , OI_1 , OI_2 par leurs valeurs, on déduit de là :

$$1^\circ \quad \sin i_1 = \sin i; \text{ d'où } : i_1 = \pi - i, \text{ et } : \cos i_1 = -\cos i$$

$$2^\circ \quad \frac{\sin i}{\sin i_2} = \frac{a_1}{a_2} = n$$

Ces formules expriment des lois identiques aux lois fondamentales de la réflexion et de la réfraction en optique : 1° égalité des angles d'incidence i et de réflexion $\pi - i_1$; 2° constance du rapport n du sinus de l'angle d'incidence i au sinus de l'angle de réfraction i_2 ; ce rapport est égal au rapport des vitesses de propagation a_1 et a_2 des ondes dans les milieux A_1 et A_2 .

Calcul des intensités des ondes réfléchies et réfractées. — Les intensités électrique h et magnétique h' de l'onde incidente P sont entre elles dans un rapport constant ($h \sqrt{k_1} = h' \sqrt{k'}$, § 433) :

$$h' = h \sqrt{\frac{k_1}{k'}} = \frac{h}{a_1 k'}$$

k_1 désignant le pouvoir inducteur électrique du milieu A_1 , et k' le pouvoir inducteur magnétique égal pour toutes les substances étudiées.

Prenons (fig. 71) ON pour axe des z et OS pour axe des x . Le plan de l'onde qui a pour trace OP sur le plan xOz (fig. 72) contient alors Oy . Comme on peut toujours décomposer les vecteurs

h et h' , qui sont dans le plan de l'onde, suivant OP et Oy , nous examinerons successivement les deux cas suivants :

1° L'intensité électrique \bar{h} est dans le plan d'incidence, dirigée dans le sens OP (à un instant t). D'après le sens OI de la propa-

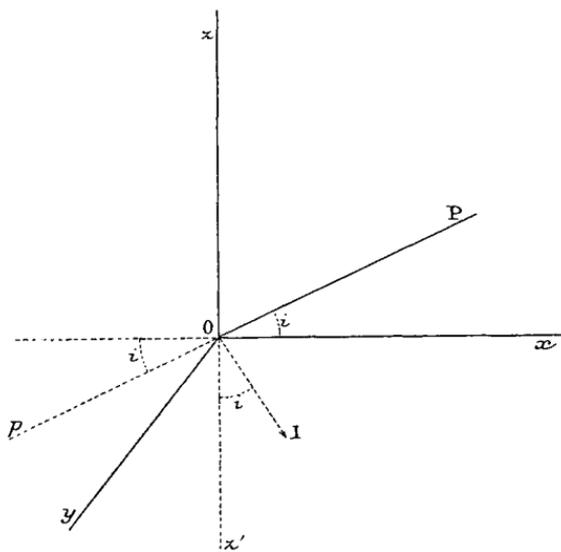


Fig. 72.

gation, l'intensité magnétique h' est alors dirigée dans le sens Oy (§ 133). Les composantes des deux vecteurs sont :

$$\left\{ \begin{array}{lll} X = h \cos i & Y = 0 & Z = h \sin i \\ X' = 0 & Y' = h' = \frac{h}{a_1 k'} & Z' = 0 \end{array} \right.$$

Nous aurons des formules identiques pour les ondes réfléchie et réfractée, sauf que h h' i a_1 y sont remplacés par les quantités correspondantes h_1 h'_1 i_1 a_1 et h_2 h'_2 i_2 a_2 .

Les intensités électriques résultantes du champ au point O sont : $\bar{h} + \bar{h}_1$ dans le milieu A_1 et \bar{h}_2 dans le milieu A_2 . De même les intensités magnétiques sont $\bar{h}' + \bar{h}'_1$ et \bar{h}'_2 . Ecrivons que la composante de $\bar{h} + \bar{h}_1$ suivant Ox est égale à la composante de \bar{h}_2 (formule 19 du paragraphe 56) :

$$h \cos i - h_1 \cos i_1 = h_2 \cos i_2$$

De même, suivant Oy , $h' + h'_1$ est égal à h'_2 , ce qui s'écrit :

$$\frac{h}{a_1 k'} + \frac{h_1}{a_1 k'} = \frac{h_2}{a_2 k'}$$

Nous aurions encore une troisième relation en projetant les intensités électriques suivant Oz et appliquant la formule (48) du paragraphe 36; mais cette relation rentrerait dans les précédentes.

Divisons membre à membre ces deux équations :

$$\frac{h - h_1}{h + h_1} a_1 \cos i = a_2 \cos i_2$$

En remplaçant a_1 et a_2 par les quantités proportionnelles $\sin i$ et $\sin i_2$, on aura donc :

$$\frac{h_1}{h} = \frac{a_1 \cos i - a_2 \cos i_2}{a_1 \cos i + a_2 \cos i_2} = \frac{\sin i \cos i - \sin i_2 \cos i_2}{\sin i \cos i + \sin i_2 \cos i_2}$$

Et comme $h_2 = \frac{a_2}{a_1} (h + h_1)$, on aura finalement :

$$\begin{aligned} \frac{h_1}{h} &= \frac{\operatorname{tg}(i - i_2)}{\operatorname{tg}(i + i_2)} \\ \frac{h_2}{h} &= \frac{2 \sin i_2 \cos i}{\sin(i + i_2) \cos(i - i_2)} \end{aligned}$$

Ces formules sont identiques à celles que Fresnel a données pour les amplitudes de vibrations lumineuses réfléchies et réfractées quand le plan de polarisation est perpendiculaire au plan d'incidence. Nous pouvons donc appeler *plan de polarisation de l'onde électro-magnétique* étudiée le plan passant par le rayon OI et par la direction Oy de l'intensité magnétique h' ; l'intensité électrique \bar{h} est perpendiculaire à ce plan.

L'onde réfléchie disparaît ($h_1 = 0$), comme on le sait, pour la valeur de i qui rend égale à 90° la somme ($i + i_2$) des angles d'incidence et de réfraction; cette valeur de i définie par :

$$\operatorname{tg} i = n$$

peut être appelée *incidence principale*.

2° L'intensité électrique h est perpendiculaire au plan d'incidence (coïncidence du plan de polarisation avec le plan d'incidence).

Si Oy est le sens du vecteur \bar{h} , le vecteur \bar{h}' sera dirigé suivant le prolongement Op de OP (règle du paragraphe 133), et l'on aura :

$$\begin{cases} X = 0 & Y = h & Z = 0 \\ X' = -\frac{h}{a_1 k'} \cos i & Y' = 0 & Z' = -\frac{h}{a_1 k'} \sin i \end{cases}$$

En égalant les composantes de $\bar{h}' + \bar{h}'_1$ et de \bar{h}'_2 suivant Ox , on aura :

$$-\frac{h}{a_1 k'} \cos i + \frac{h_1}{a_1 k'} \cos i = -\frac{h_2}{a_2 k'} \cos i_2$$

Egalons d'autre part les vecteurs $\bar{h} + \bar{h}_1$ et \bar{h}_2 dirigés suivant Oy :

$$h + h_1 = h_2$$

En divisant membre à membre ces deux équations, on aura :

$$\frac{h - h_1}{h + h_1} \frac{\cos i}{a_1} = \frac{\cos i_2}{a_2}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{h_1}{h} &= -\frac{\sin(i - i_2)}{\sin(i + i_2)} \\ \frac{h_2}{h} &= \frac{2 \cos i \sin i_2}{\sin(i + i_2)} \end{aligned}$$

formules identiques à celle de Fresnel.

Il est à remarquer que la loi de variation de h en fonction du temps peut être quelconque dans le raisonnement ci-dessus, et n'est pas forcément périodique. Les formules obtenues ne seraient du reste rigoureuses que pour des milieux parfaitement isolants. Si ces milieux ont une conductibilité sensible, on doit en tenir compte (v. § 138).

Cas de la réflexion totale. — Si l'indice de réfraction $n = \frac{a_1}{a_2}$ est inférieur à 1, l'angle i peut être supérieur à la valeur i_0 telle que $\sin i_0 = n$; alors la condition :

$$\sin i_2 = \frac{\sin i}{n}$$

définit un angle de réfraction imaginaire, et les solutions précédentes tombent en défaut. C'est le cas de la réflexion totale bien

connu en optique; la solution analytique serait la même ici. Il n'y a pas d'onde réfractée. L'intensité de l'onde réfléchie (périodique) est égale à celle de l'onde incidente; mais il y a entre elles une différence de phase au point O.

138. Réflexion d'une onde périodique sur un conducteur. — 1° Cas où le plan d'incidence coïncide avec le plan de polarisation. — Supposons que le plan de l'onde incidente soit POy (fig. 72) et que son intensité électrique h_1 soit dirigée suivant Oy; soit V sa vitesse de propagation. L'intensité magnétique $h'_1 = \frac{h_1}{\sqrt{k'}}$ est dirigée suivant Op, et l'on a :

$$\left\{ \begin{array}{lll} X'_1 = -\frac{h_1}{\sqrt{k'}} \cos i & Y'_1 = 0 & Z'_1 = -\frac{h_1}{\sqrt{k'}} \sin i \\ X_1 = 0 & Y_1 = h_1 & Z_1 = 0 \end{array} \right.$$

h_1 ayant pour expression dans une position quelconque de l'onde :

$$h_1 = M_1 \sin m \left(t - \frac{x \sin i - z \cos i}{V} \right) + N_1 \cos m \left(t - \frac{x \sin i - z \cos i}{V} \right)$$

On aura une onde réfléchie périodique définie par :

$$\left\{ \begin{array}{lll} h_2 = M_2 \sin m \left(t - \frac{x \sin i + z \cos i}{V} \right) + N_2 \cos m \left(t - \frac{x \sin i + z \cos i}{V} \right) \\ X_2 = 0 & Y_2 = h_2 & Z_2 = 0 \\ X'_2 = +\frac{h_2}{\sqrt{k'}} \cos i & Y'_2 = 0 & Z'_2 = -\frac{h_2}{\sqrt{k'}} \sin i \end{array} \right.$$

Quant à l'onde réfractée, également périodique, elle est assujettie à se propager, suivant la ligne de séparation Ox, avec la même vitesse $\frac{V}{\sin i} = \frac{1}{p}$ que les ondes incidente et réfléchie. On peut donc écrire pour cette onde dans le milieu conducteur :

$$X = 0 \quad Y = h \quad Z = 0$$

avec :

$$h = u \sin m \left(t - px \right) + v \cos m \left(t - px \right) \quad (49)$$

u et v désignant deux fonctions de z . L'intensité magnétique h' est évidemment dans le plan d'incidence ($Y' = 0$), X' et Z' étant des fonctions de la même forme que h . Pour résoudre le problème

de la réflexion, nous avons besoin tout d'abord de déterminer la forme de ces fonctions Y , X' , Z' , en écrivant qu'elles satisfont aux équations du paragraphe 129; voici le calcul :

Y , X' , Z' étant indépendantes de y , les équations (1), (1''), (2') disparaissent. Les trois autres (1'), (2), (2'') deviennent :

$$\left. \begin{aligned} k \left(\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{Y}{\theta} \right) &= \frac{\partial Z'}{\partial x} - \frac{\partial X'}{\partial z} \\ - k \frac{\partial X'}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} \\ - k \frac{\partial Z'}{\partial t} &= - \frac{\partial Y}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

D'après l'expression (49) de h , on voit que $\frac{\partial Y}{\partial x}$ est égal à $\frac{\partial Y}{\partial t}$ multiplié par $-p$. La troisième équation (50) équivaut donc à :

$$- k \frac{\partial Z'}{\partial t} = p \frac{\partial Y}{\partial t}$$

d'où l'on tire :

$$Z' = - \frac{p}{k} Y \quad (51)$$

et :

$$\frac{\partial Z'}{\partial x} = - \frac{p}{k} \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{p^2}{k} \frac{\partial Y}{\partial t}$$

Portons cette expression de $\frac{\partial Z'}{\partial x}$ dans la première équation (50) :

$$\left(k - \frac{p^2}{k} \right) \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{k}{\theta} Y = - \frac{\partial X'}{\partial z}$$

Supposons $m\theta$ négligeable devant l'unité (*cas des bons conducteurs* et d'une période $T > 10^{-13}$, v. § 135). Alors le premier terme de cette équation, qui a pour amplitude $\left(k - \frac{p^2}{k} \right) mY_0$, est négligeable devant le second, qui a pour amplitude $\frac{k}{\theta} Y_0$; on voit en effet que le rapport :

$$\left(k - \frac{p^2}{k} \right) mY_0 : \frac{k}{\theta} Y_0 = m\theta \left(1 - a^2 p^2 \right) = m\theta \left(1 - \frac{V^2}{a^2} \sin^2 i \right)$$

est plus petit que $m\theta$. On écrira donc simplement :

$$\frac{k}{\theta} Y = - \frac{\partial X'}{\partial z}$$

De cette relation, combinée avec la deuxième équation (50) on déduit :

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2 \theta} \frac{\partial Y}{\partial t} = 0$$

Substituons à Y ($= h$) dans cette équation l'expression (49) de h ; on aura :

$$\left(u'' + \frac{m}{a^2 \theta} v\right) \sin m(t - px) + \left(v'' - \frac{m}{a^2 \theta} u\right) \cos m(t - px) = 0$$

En annulant séparément les coefficients du sinus et du cosinus, et posant : $u + i v = w$ ($i = \sqrt{-1}$), on trouve :

$$w'' - i \frac{m}{a^2 \theta} w = 0$$

Comme $i \frac{m}{a^2 \theta}$ est le carré de :

$$\sqrt{\frac{m}{2a^2 \theta}} (1 + i) = \frac{m}{a_1} (1 + i)$$

cette équation admet pour intégrale :

$$w = A e^{+\frac{m}{a_1} (1+i) z} + B e^{-\frac{m}{a_1} (1+i) z}$$

Le terme en $e^{-\frac{mz}{a_1}}$ croissant indéfiniment avec z négatif, nous devons faire $B = 0$; et la décomposition de w donne finalement :

$$u = A e^{+\frac{mz}{a_1}} \cos \frac{mz}{a_1} \quad v = + A e^{+\frac{mz}{a_1}} \sin \frac{mz}{a_1}$$

d'où :

$$Y = h = Y_0 e^{+\frac{mz}{a_1}} \sin m \left(t - px + \frac{z}{a_1} \right) \quad (52)$$

A ($= Y_0$) désignant l'amplitude de Y pour $z = 0$.

Nous pouvons maintenant tirer l'expression de X' de la deuxième équation (50) et Z' de (51). Ainsi :

$$X' = \frac{1}{a_1 k} Y_0 e^{+\frac{mz}{a_1}} \left[-\sin m \left(t - px + \frac{z}{a_1} \right) + \cos m \left(t - px + \frac{z}{a_1} \right) \right] \quad (53)$$

Les fonctions Y X' Z' étant ainsi déterminées, nous allons écrire les conditions relatives à la surface ($z = 0$) commune aux trois ondes incidente, réfléchie et réfractée :

$$X'_1 + X'_2 = X' \quad Y_1 + Y_2 = Y \quad Z'_1 + Z'_2 = Z' \quad (\text{pour } z = 0)$$

La troisième de ces conditions rentre dans les deux premières. En remplaçant dans celles-ci X'_1 X'_2 X' ... par leurs expressions données plus haut, et annulant séparément les coefficients de $\sin m$ ($t - px$) et de $\cos m$ ($t - px$), on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{-M_1 + M_2}{\sqrt{k'}} \cos i = -\frac{1}{a_1 k'} Y_0 \\ \frac{-N_1 + N_2}{\sqrt{k'}} \cos i = +\frac{1}{a_1 k'} Y_0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} M_1 + M_2 = Y_0 \\ N_1 + N_2 = 0 \end{array} \right.$$

d'où :

$$M_2 = -M_1 \frac{V - a_1 \cos i}{V + a_1 \cos i} \quad N_2 = -N_1 \text{ (onde réfléchie).}$$

$$M_1 = \frac{V + a_1 \cos i}{2a_1 \cos i} Y_0 \quad N_1 = \frac{-V}{2a_1 \cos i} Y_0 \text{ (onde incidente).}$$

et :

$$M_1^2 + N_1^2 = \frac{(V + a_1 \cos i)^2 + V^2}{4a_1^2 \cos^2 i} Y_0^2$$

Cette formule donne le rapport de l'amplitude Y_0 de l'onde réfractée à l'amplitude $\sqrt{M_1^2 + N_1^2}$ de l'onde incidente. Si a_1 est très faible par rapport à V , ce qui arrive quand $m\theta$ est très faible, on aura sensiblement :

$$M_1 = -N_1 = \frac{V}{2a_1 \cos i} Y_0$$

Le rapport des amplitudes de Z' (formule 54) et de X' (53) est égal à :

$$\frac{p}{k'} Y_0 : \frac{1}{a_1 k'} Y_0 \sqrt{2} = \frac{pa_1}{\sqrt{2}} = \frac{a_1}{V \sqrt{2}} \sin i$$

Il est donc très faible, et l'intensité magnétique h' est sensiblement parallèle à Ox , c'est-à-dire à la surface du conducteur.

Plus rigoureusement, l'extrémité du vecteur h' dans le conducteur décrit une ellipse très aplatie.

Les formules (52) et (53) de Y ($= h$) et X' ($= h'$ sensiblement)

ne diffèrent des formules analogues (33) et (34) que par les changements de t en $(t - px)$, et de x en $-z$ ($\beta = \gamma = mN$). Il n'y a donc pas lieu d'en faire une nouvelle étude. Nous remarquerons seulement :

Que l'onde réfractée a même vitesse de propagation $\left(\frac{1}{p} = \frac{v}{\sin i}\right)$ que l'onde incidente parallèlement à la surface réfringente ($z = 0$) : $Y = f(t - px)$;

Que, à part ce caractère, l'onde réfractée provenant d'une onde incidente oblique se distribue de la même manière dans le conducteur que celle qui correspond à une incidence normale.

2° *Plan de polarisation perpendiculaire au plan d'incidence.* — On a alors pour les ondes incidente et réfléchie :

$$\begin{cases} X_1 = h_1 \cos i & Y_1 = 0 & Z_1 = h_1 \sin i \\ X'_1 = 0 & Y'_1 = h'_1 = \frac{h_1}{\sqrt{k'}} & Z'_1 = 0 \\ X_2 = -h_2 \cos i & Y_2 = 0 & Z_2 = h_2 \sin i \\ X'_2 = 0 & Y'_2 = h'_2 = \frac{h_2}{\sqrt{k'}} & Z'_2 = 0 \end{cases}$$

h_1 et h_2 ayant mêmes expressions périodiques que plus haut. Quant à l'onde réfractée, on aura :

$$X' = 0 \quad Y' = h' \quad Z' = 0$$

avec :

$$h' = u \sin m (t - px) + v \cos m (t - px)$$

et l'intensité h sera dans le plan d'incidence : $Y = 0$.

Les équations (1'), (2), (2'') deviennent alors des identités. En supprimant les termes en $\frac{\partial X}{\partial t}$ et $\frac{\partial Z}{\partial t}$, que nous savons être négligeables devant $\frac{X}{\theta}$ et $\frac{Z}{\theta}$, les équations (1), (1''), (2') deviennent :

$$k \frac{X}{\theta} = \frac{\partial Y'}{\partial z} \quad k \frac{Z}{\theta} = -\frac{\partial Y'}{\partial x} \quad (54)$$

$$-k' \frac{\partial Y'}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \quad (55)$$

Portons dans (55) les expressions (54) de X et de Z :

$$-k' \frac{\partial Y'}{\partial t} = -\frac{\theta}{k} \frac{\partial^2 Y'}{\partial x^2} - \frac{\theta}{k} \frac{\partial^2 Y'}{\partial z^2}$$

Il est facile de vérifier que le terme en $\frac{d^2 Y'}{dx^2}$ est négligeable devant le terme en $\frac{dY'}{dt}$ (même procédé que plus haut) ; d'où :

$$\frac{\partial^2 Y'}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial Y'}{\partial t} = 0$$

Par des calculs déjà faits plus haut, nous trouverons donc :

$$Y' = h' = Y'_0 e^{\frac{mz}{a_1}} \sin m \left(t - px + \frac{z}{a_1} \right)$$

et, d'après (54) :

$$X = \frac{0}{k} \frac{m}{a_1} Y'_0 e^{\frac{mz}{a_1}} \left[\sin m \left(t - px + \frac{z}{a_1} \right) + \cos m \left(t - px + \frac{z}{a_1} \right) \right]$$

Mais, en remplaçant t par $\left(t - \frac{T}{8} \right)$, ($T = \frac{2\pi}{m}$ = période), cette expression prend la forme :

$$X = X_0 e^{\frac{mz}{a_1}} \sin m \left(t - px + \frac{z}{a_1} \right) \tag{56}$$

et l'on voit facilement que Y' devient en même temps :

$$Y' = \frac{1}{a_1 k} X_0 e^{\frac{mz}{a_1}} \left[\sin m \left(t - px + \frac{z}{a_1} \right) - \cos m \left(t - px + \frac{z}{a_1} \right) \right] \tag{57}$$

Quant à la composante Z du vecteur h , les formules (54) montrent (comme plus haut) que le rapport de son amplitude à celle de X est la quantité $\frac{a_1}{V\sqrt{2}} \sin i$, que nous supposons négligeable. *L'intensité électrique h de l'onde réfractée est donc sensiblement parallèle à la surface du conducteur ($z = 0$).*

En écrivant les conditions à la surface ($z = 0$) :

$$X_1 + X_2 = X \qquad Y'_1 + Y'_2 = Y'$$

on trouvera donc :

$$\begin{cases} \cos i \left(M_1 - M_2 \right) = X_0 \\ N_1 - N_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{M_1 + M_2}{V k'} = \frac{1}{a_1 k'} X_0 \\ \frac{N_1 + N_2}{V k'} = - \frac{1}{a_1 k'} X_0 \end{cases}$$

d'où :

$$M_2 = M_1 \frac{V \cos i - a_1}{V \cos i + a_1}; \qquad N_2 = - N_1 \text{ (onde réfléchie).}$$

$$M_1 \cos i = \frac{V \cos i + a_1}{2a_1} X_0; \quad N_1 \cos i = - \frac{V \cos i}{2a_1} X_0 \text{ (onde incidente).}$$

$$M_1^2 + N_1^2 = \frac{(V \cos i + a_1)^2 + V^2 \cos^2 i}{4a_1^2 \cos^2 i} X_0^2.$$

Cette dernière formule donne le rapport de l'amplitude X_0 de l'onde réfractée à l'amplitude $\sqrt{M_1^2 + N_1^2}$ de l'onde incidente.

On voit que les relations qui lient X_0 à $M_1 \cos i$ et à $N_1 \cos i$ sont les mêmes que celles qui lient Y_0 à M_1 et à N_1 dans le cas précédent, sauf que le rapport $\frac{V}{a_1 \cos i}$ est remplacé ici par $\frac{V \cos i}{a_1}$.

Énergie transmise au conducteur. — Dans les deux cas que l'on vient d'étudier, l'énergie incidente moyenne par unité de surface du conducteur pendant l'unité de temps a pour expression le produit W_1 de $\frac{k_1(M_1^2 + N_1^2)}{8\pi}$ (énergie moyenne de l'unité de volume) par la vitesse V et par $\cos i$. D'autre part l'énergie $(w_1)_{\text{moy.}}$ transmise au conducteur est donnée par la formule (38) du paragraphe 135, qui s'applique évidemment ici :

$$(w_1)_{\text{moy.}} = \frac{a\gamma}{m} \frac{\tau_0^2}{8\pi} = \frac{a\gamma}{m} \frac{kh_0^2}{8\pi}$$

h_0 désignant l'amplitude de l'intensité électrique à la surface du conducteur. La fraction d'énergie incidente transmise au conducteur et dissipée en chaleur est donc :

$$\alpha = \frac{(w_1)_{\text{moy.}}}{W_1} = \frac{a\gamma}{m} \frac{kh_0^2}{8\pi} : \frac{k_1(M_1^2 + N_1^2)V \cos i}{8\pi}$$

$$= \frac{V}{a_1 \cos i} \frac{h_0^2}{M_1^2 + N_1^2}$$

en remarquant que : $\frac{kk'}{k_1k'}$ est égal à $\frac{V^2}{a^2}$.

1^{er} cas étudié ($h_0 = Y_0$); on a :

$$\alpha = \frac{4 Va_1 \cos i}{(V + a_1 \cos i)^2 + V^2}$$

ou sensiblement $\alpha = 2 \frac{a_1}{V} \cos i$, si $\frac{a_1}{V}$ est très petit.

2^e cas ($h_0 = X_0$ sensiblement) :

$$\alpha = \frac{4 Va_1 \cos i}{(V \cos i + a_1)^2 + V^2 \cos^2 i}$$

Exemple : cas du cuivre, période $T = 4 \times 10^{-8}$. On a trouvé (§ 135) : $a_1 = 2$ kilomètres par seconde. Comme $V = 300\,000$ kilo-

mètres par seconde dans l'air, la fraction α d'énergie réfractée est très faible. Ainsi dans le premier cas :

$$\alpha = \frac{1}{75.000} \cos i \frac{h_0}{\sqrt{M_1^2 + N_1^2}} = \frac{1}{100.000} \cos i$$

Dans le deuxième cas, on aura :

$$\alpha = \frac{1}{75.000} \frac{1}{\cos i} \frac{h_0}{\sqrt{M_1^2 + N_1^2}} = \frac{1}{100.000} \frac{1}{\cos i}$$

à moins que i ne soit très voisin de 90° . Pour $i = 90^\circ$, dans les deux cas, ces rapports sont nuls.

PROPAGATION DU COURANT

139. Propagation d'une onde le long d'une ligne électrique. — L'étude mathématique de la propagation d'une onde le long d'une ligne électrique est fort compliquée, et nous ne connaissons pas de solution rigoureuse de ce problème; mais on en a des solutions approchées qui dans certains cas sont satisfaisantes.

Nous considérerons une ligne formée de deux fils conducteurs parallèles. Le cas d'un seul fil paraît plus simple au premier abord. En réalité il est bien plus complexe, car ce serait une erreur de négliger l'influence des corps voisins, notamment du sol; tandis qu'une ligne à deux fils est sensiblement soustraite à cette influence lorsque la distance réciproque des fils est une fraction (le dixième par exemple) de leur distance au sol. Cela tient à ce que l'on peut considérer, sans erreur sensible, les champs électrique et magnétique du courant comme limités par un cylindre d'assez faible rayon enveloppant les deux fils, le calcul de l'énergie électro-magnétique extérieure à ce cylindre donnant un chiffre négligeable. Rappelons d'abord quelques propriétés de ces champs.

Cas d'un courant permanent. — Soient O_1 et O_2 les traces de deux fils parallèles, de rayons R_1 et R_2 , sur un plan perpendiculaire (fig. 73); $+q$ et $-q$ leurs charges électriques par unité de longueur, $+I$ et $-I$ les intensités des cou-

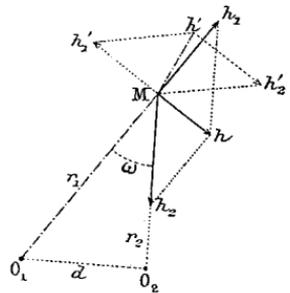


Fig. 73.

rants qui les parcourent d'arrière en avant de la figure. En un point M situé à des distances r_1 et r_2 des axes de ces fils, l'intensité électrique \bar{h} est la résultante de deux intensités \bar{h}_1 et \bar{h}_2 dirigées suivant $O_1 M$ et $M O_2$ (§ 37) :

$$h_1 = \frac{2q}{kr_1} \quad h_2 = \frac{2q}{kr_2}$$

L'intensité magnétique \bar{h}' est la résultante de deux intensités h'_1 et h'_2 perpendiculaires à MO_1 et à MO_2 (§ 68) :

$$h'_1 = \frac{2I}{r_1} \quad h'_2 = \frac{2I}{r_2}$$

On voit que les vecteurs \bar{h}_1 , \bar{h}_2 , \bar{h}' , forment une figure semblable à celle des vecteurs h_1 , h_2 , h , l'angle de deux vecteurs correspondants étant de 90° :

$$\frac{h'_1}{h_1} = \frac{h'_2}{h_2} = \frac{h'}{h} = \frac{k I}{q} \quad (58)$$

D'autre part, le potentiel électrique V a pour formule (§ 37 et 45) :

$$V = \frac{2q}{k} \mathcal{L} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \quad (59)$$

et le potentiel magnétique V' est égal (§ 72) au produit de $2 I$ par la différence ω des angles que font les deux directions $O_1 M$ et $O_2 M$ avec une troisième direction fixe quelconque : $V' = 2 I \omega$.

Ceci est vrai dans un plan quelconque P perpendiculaire aux deux fils. Mais, si l'on fait varier la distance x du plan P au plan dans lequel la différence de potentiel électrique (et, par suite, la charge q) des deux fils est nulle, on voit : 1° que le potentiel électrique V varie proportionnellement à x (§ 45) ; 2° que le potentiel magnétique V' est indépendant de x .

Propagation d'une onde plane. — Ceci posé, choisissons comme direction d'axe des x celle des fils ; les distances r_1 et r_2 à ces fils seront fonctions de y et de z seuls. Posons :

$$V = f \left(t - \frac{x}{a} \right) \mathcal{L} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \quad (60)$$

et imaginons, dans le milieu diélectrique qui entoure les fils O_1 et O_2 , un champ électro-magnétique variable défini par les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = 0 \\ Y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ Z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} X' = 0 \\ Y' = \frac{1}{ak} Z \\ Z' = -\frac{1}{ak} Y \end{array} \right. \quad Z = -\frac{1}{ak'} \frac{\partial V}{\partial z} \quad Y = +\frac{1}{ak'} \frac{\partial V}{\partial y} \quad (61)$$

Dans tout plan ($x = x_0$) perpendiculaire aux fils, ce champ admet : 1° un potentiel électrique V , ce qui résulte des expressions de Y et de Z ; 2° un potentiel magnétique, à cause de l'identité :

$$\frac{\partial Y'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial y} = -\frac{1}{ak'} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] = 0$$

Les vecteurs \vec{h} et \vec{h}' aux divers points (x_0, y, z) sont situés dans ce plan et distribués de la même manière que dans le cas du courant permanent étudié ci-dessus (fig. 73) ; ils sont perpendiculaires l'un sur l'autre, et leur rapport $\left(\frac{h'}{h} = ak \right)$ est constant, d'après les expressions de Y' et de Z' .

Le champ défini par les formules (61) a donc le caractère d'une onde électro-magnétique plane (§ 132-133), qui se propage avec une vitesse uniforme a le long des fils O_1 et O_2 , dans le sens positif de l'axe des x , ce qui justifie le choix de l'expression (60) du potentiel V .

Comme, au contact des fils, l'intensité électrique h de cette onde plane est normale à leur surface, l'énergie électrique ne peut pénétrer dans ces conducteurs et s'y dissiper en chaleur (§ 122). L'onde paraîtrait donc pouvoir se propager *sans déformation*, puisque les équations générales du paragraphe 129 sont satisfaites et que le champ glisserait le long des fils sans leur céder la moindre fraction d'énergie. Il n'en est rien, car il existe une autre condition, à laquelle l'onde plane ci-dessus ne satisfait pas, et que nous allons étudier.

140. Courant dans les fils conducteurs. — Dans un champ électrique variable quelconque, entre deux époques t et $t + dt$ infini-

ment voisines, l'apport d'induction électrique en chaque point (x, y, z) a pour effet d'accroître le vecteur $\frac{kh}{4\pi}$ de la quantité

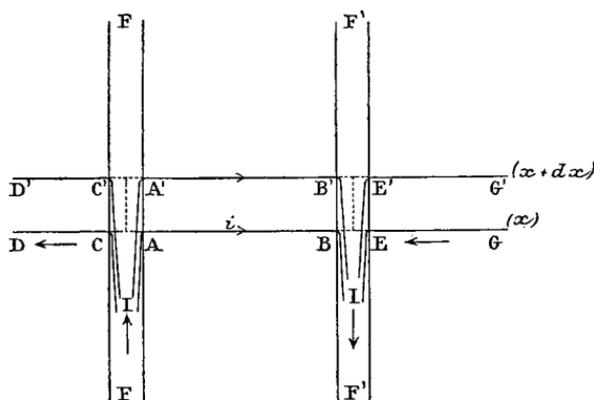


Fig. 74.

$\bar{i} dt$ (§ 50). On peut exprimer ceci en disant que le champ du vecteur $\frac{kh}{4\pi}$ existant à l'époque t s'accroît, pendant le temps dt , du champ infiniment petit du vecteur $\bar{i} dt$. Mais le vecteur \bar{i} jouissant de la propriété :

$$\frac{\partial i_x}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y} + \frac{\partial i_z}{\partial z} = 0$$

on sait que le champ du vecteur \bar{i} peut se décomposer en tubes de flux analogues aux tubes de courant permanent (§ 42) et dans chacun desquels le flux du vecteur \bar{i} à travers une section transversale quelconque est la même. Ces tubes ne peuvent s'arrêter court, et sont fermés sur eux-mêmes ou se prolongent indéfiniment avec leur flux constant.

Appliquons ceci au champ défini par les équations (60) et (61). L'induction électrique $\frac{kh}{4\pi}$ en tout point de la surface des fils FF' (dont les axes sont dans le plan de la figure 74) y est normale à cette surface; il en est de même de sa variation $\bar{i} dt$ pendant le temps dt . Les tubes de flux du champ du vecteur $\bar{i} dt$ arrivant normalement sur cette surface, et ne pouvant s'y arrêter court, pénètrent forcément dans le conducteur. La figure 74 montre les tubes créés dans la

partie du champ comprise entre les plans DG et D'G' (d'abscisses x et $x + dx$) avec leurs prolongements à l'intérieur des fils conducteurs. Ce fait doit évidemment modifier plus ou moins la forme de l'onde qui se propage, puisque nous n'en avons pas tenu compte; et le vecteur $\frac{hh}{4\pi}$, par exemple, au lieu d'être rigoureusement normal à la surface des fils, sera plus ou moins dévié.

Soient I et $\left(I + \frac{\partial I}{\partial x} dx\right)$ les flux du vecteur i à travers les sections CA et C'A' du fil F, par les plans x et $x + dx$. La charge électrique du fil F étant q par unité de longueur, sera $q dx$ sur la longueur AA' = dx ; cette charge est aussi le flux du vecteur $\frac{hh}{4\pi}$ à travers la surface latérale de la partie AA' du fil (par définition).

Donc le flux du vecteur $\vec{i} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{hh}{4\pi}\right)$ à travers cette même surface est égal à $\frac{\partial}{\partial t} (q dx)$. Ecrivons que le flux I du vecteur i entrant par la section CA du fil est égal à la somme des flux $\left(I + \frac{\partial I}{\partial x} dx\right)$ et $\frac{\partial}{\partial t} (q dx)$ sortant par la section C'A' et la surface latérale du fil :

$$I = I + \frac{\partial I}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial t} (q dx)$$

d'où :

$$-\frac{\partial I}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial t} \quad (62)$$

On a ainsi une relation rigoureuse entre ce flux I, qui est sensiblement identique à l'intensité du courant à travers la section CA (ou BE) du fil F (ou F'), et le flux d'induction électrique q de l'onde considérée sur la surface des fils par unité de longueur. Cette onde ne peut donc en réalité se propager le long des fils sans y créer un courant électrique.

On voit combien l'existence du courant I complique cette question de la propagation de l'onde plane, qui était si simple. Nous allons en chercher des solutions approchées dans deux cas : propagation du front de l'onde et régime périodique permanent.

Front de l'onde. — D'après ce que nous avons vu aux paragraphes 134 et 138, la profondeur de pénétration de l'onde dans

les fils métalliques doit être extrêmement minime, surtout au début de la propagation, et la fraction d'énergie absorbée par les conducteurs est très faible. L'affaiblissement de l'onde qui en résulte porte d'abord sur la partie de celle-ci la plus voisine des fils, où l'énergie du champ est le plus fortement concentrée, car on y a sensiblement : $h = \frac{2q}{kr}$ et $h' = \frac{2I}{r}$. Cet affaiblissement s'étend avec une extrême rapidité au reste de l'onde *dans un même plan d'onde, car l'onde est pratiquement limitée*, comme nous l'avons dit, à une faible distance des fils. La partie de l'onde comprise entre deux plans perpendiculaires aux fils ayant été affaiblie d'une manière uniforme, les potentiels électrique et magnétique y subsistent, et l'onde reste plane sensiblement. Ce raisonnement est surtout applicable au front de l'onde, qui évidemment ne participe point à l'effet des pertes calorifiques d'énergie produites en arrière d'elle. Bref, nous supposons que vers le front de l'onde, les ondes restent sensiblement planes et représentées par les formules (60) et (61), leur énergie décroissant toutefois suivant une loi exponentielle peu rapide.

Dans cette hypothèse, appliquons l'équation (20) du paragraphe 120 :

$$\int_C X dx + Y dy + Z dz = -4\pi \frac{dQ'}{dt} \quad (63)$$

à un circuit C rectangulaire ayant ses côtés sur les axes des fils et sur les droites DG et D'G' (fig. 74). L'onde ne pénétrant point jusqu'aux axes des fils, la partie de l'intégrale relative à ces axes est nulle. La partie relative au côté A'B' ($x + dx$) est égale à l'excès $\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right)$ du potentiel électrique du fil F sur celui de F' ; la partie relative à BA (x) est $-v$. Le premier membre de (63) est donc égal à $\frac{\partial v}{\partial x} dx$. Quant au second membre, Q' étant le flux d'induction magnétique à travers la surface du rectangle C a pour valeur $\frac{LI dx}{4\pi}$; le coefficient d'auto-induction L de la ligne par unité de longueur a la valeur $2k' \mathcal{L}^{\circ} \left(\frac{d^2}{a_1 a_2}\right)$ calculée au paragraphe 116. Donc (63) donne :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -L \frac{\partial I}{\partial t}$$

Remarquons d'ailleurs que le rapport de la charge électrique q à la différence v de potentiel des deux fils est égal à la capacité c de la ligne par unité de longueur $\left(\frac{1}{c} = \frac{2}{k} \mathcal{L} \left(\frac{d^2}{a_1 a_2} \right) \text{ V. § 45} \right)$: $q = cv$. La relation précédente peut donc s'écrire :

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -cL \frac{\partial I}{\partial t} = -kk' \frac{\partial I}{\partial t} \quad (64)$$

De (62) et (64) on déduit :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = \frac{1}{kk'} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \quad (65)$$

équation qui exprime que le courant I en tête de l'onde se propage avec une vitesse uniforme a . En réalité ce courant doit s'affaiblir comme l'onde plane qui l'accompagne, d'après les explications données ci-dessus.

Régime périodique permanent. — Passons au cas d'un courant périodique. Nous supposons que sa période T soit telle que la longueur d'onde correspondante dans l'air soit au moins égale à 100 fois la distance d des deux fils. Ainsi pour $d = 20$ centimètres, $T > \frac{100d}{a} = 6 \cdot 10^{-8}$ seconde environ. Dans ces conditions, d'après ce qui a été dit au paragraphe 128, on peut considérer l'état du champ dans un plan perpendiculaire aux fils, comme variant assez lentement pour que le régime permanent qui correspond à l'intensité I du courant et à la charge q des fils soit sensiblement atteint à chaque instant. On sait donc calculer la distribution du courant dans les diverses couches concentriques de chaque fil (§ 136) ; et par suite on connaît la valeur de l'intensité électrique h sur l'axe des fils, les deux fils étant supposés identiques.

Le premier membre de l'équation (63), appliquée au même circuit C que plus haut, comprend alors deux termes égaux à $+hdx$ sur les axes des fils ; sur les côtés $A'B'$ et BA , l'intégrale est indépendante de la composante X qui existe dans le champ d'un courant permanent (V. § 45) et a encore pour valeurs :

$$\int_{A'B'} Y dy + Z dz = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

$$\int_{BA} Y dy + Z dz = -v$$

On a donc :

$$\left(2h + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx = -4\pi \frac{dQ'}{\partial t}$$

Mais on peut poser :

$$h = RI \quad 4\pi Q' = LI$$

les coefficients R et L étant des fonctions connues de la période T (v. § 436) qui se réduisent à la résistance d'un fil et à l'auto-induction de la ligne par unité de longueur quand la période est assez longue. Il en résulte :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial q}{\partial x} = 2RI + L \frac{\partial I}{\partial t} \quad (66)$$

De (62) et (66) on déduit :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + \frac{2R}{L} \frac{\partial I}{\partial t} = \frac{1}{cL} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \quad (67)$$

On sait intégrer cette équation en série¹. Mais ici une solution périodique nous suffit. Pour l'avoir nous n'avons qu'à nous reporter à la solution (33) de l'équation (34) analogue à (67), et à écrire :

$$I = I_0 e^{-\frac{\beta'x}{a'}} \sin m \left(t - \frac{\gamma'x}{ma'} \right) \quad (68)$$

en posant :

$$a' = \frac{1}{\sqrt{cL}}$$

$$\beta' = \sqrt{\frac{m}{2L}} \sqrt{-mL + \sqrt{4R^2 + m^2L^2}} \quad \gamma' = \sqrt{\frac{m}{2L}} \sqrt{mL + \sqrt{4R^2 + m^2L^2}}$$

Ici a' n'est pas égal à la vitesse a de propagation des ondes électro-magnétiques dans l'air ; mais il en diffère peu si la période T est très courte, car alors on retombe sur le cas du front de l'onde, où le champ ne pénètre pas sensiblement dans le conducteur.

Le courant périodique a une *vitesse apparente de propagation* $\frac{ma'}{\gamma'}$ et s'affaiblit suivant la loi exponentielle $e^{-\frac{\beta'x}{a'}}$. La formule (68)

¹ V. Poincaré, *Oscillations électriques* ; Vaschy, *Traité d'Électricité et de magnétisme*, § 207 (tracé des courbes du courant).

se rapporte à une ligne illimitée. Pour une ligne limitée, on aura la solution plus complexe :

$$I = Ae^{-\frac{\beta'x}{a'}} \sin m \left(t - \frac{\gamma'x}{ma'} - t_0 \right) + Be^{\frac{\beta'x}{a'}} \sin m \left(t + \frac{\gamma'x}{ma'} - t_1 \right)$$

A, B, t_0 , t_1 se déterminent par les conditions initiales du problème¹.

¹ Voir dans les *Oscillations électriques* de M. Poincaré, les nombreux et intéressants problèmes relatifs à la propagation des ondes électro-magnétiques.

TABLE DES MATIÈRES

	Pages.
INTRODUCTION	V

SYSTÈMES ABSOLUS D'UNITÉS

§ 1. Unités géométriques	1
2. Unités de temps, de vitesse et d'accélération.	3
3. Unités de masse, de force, de travail, etc.	3
4. Systèmes absolus d'unités.	4
5. Changements d'unités. Formules de dimensions.	5
6. Divers systèmes d'unités fondamentales.	7
7. Systèmes usuels d'unités absolues	7
8. Grandeurs comparables entre elles.	9
9. Unités calorifiques	10
10. Homogénéité des formules.	11
11. Application des considérations d'homogénéité.	14

EXPOSÉ DES PHÉNOMÈNES ÉLECTRIQUES ET MAGNÉTIQUES

CHAPITRE PREMIER

PROPRIÉTÉS ÉLECTRIQUES DES CORPS

1. Etude sommaire des actions électriques.	17
2. Ecrans électriques	17
3. Champ électrique.	18
4. Conductibilité électrique.	20
5. Pouvoir inducteur électrique.	22
6. Sur le courant électrique	23

CHAPITRE II

ÉTUDE DU CHAMP ÉLECTRIQUE

§ 7. Exploration du champ	26
8. Intensité du champ électrique.	27
9. Généralité de la notion d'intensité du champ électrique.	29
10. Existence d'un potentiel électrique dans un champ stable.	30
11. Sur le sens du potentiel électrique.	33
12. Surfaces équipotentielles ; lignes de flux.	34
13. Rôle des conducteurs en électrostatique	35
14. Existence du potentiel électrique dans les conducteurs	37

CHAPITRE III

MASSES ÉLECTRIQUES

15. Rôle des masses électriques.	41
16. Théorème sur les actions en raison inverse du carré des distances.	41
17. Démonstration du théorème précédent.	43
18. Cas particuliers remarquables.	48
19. Application à l'Électrostatique.	50
20. Lois expérimentales de l'Électrostatique	53

CHAPITRE IV

FORCES ET ÉNERGIE ÉLECTRIQUES

21. Influence de la nature du milieu diélectrique sur les forces électriques	56
22. Pouvoir inducteur électrique	58

FORCES ÉLECTRIQUES

23. Calcul général des forces électriques	60
24. Force électrique sur l'unité de surface	63
25. Force électrique sur l'unité de volume.	65
26. Sur l'explication des forces électriques dans la théorie des actions à distance.	68
27. Application. Électromètre absolu de Lord Kelvin	70
28. Déformations électriques des corps.	71
29. Unités électriques.	72

ÉNERGIE ÉLECTRIQUE

30. Calcul de l'énergie électrique d'un champ.	77
31. Énergie électrique par unité de volume.	79
32. Perturbations apportées dans un champ électrique par des déplacements de corps	80
33. Perturbations apportées dans un champ électrique par le contact de deux conducteurs.	82

CHAPITRE V

DISTRIBUTION ÉLECTRIQUE DANS UN CHAMP STABLE

DISTRIBUTION ÉLECTRIQUE DANS LES ISOLANTS

§ 34. Définition de la quantité d'électricité.	84
35. Propriété $\delta = 0$ des milieux homogènes	85
36. Problème de la distribution électrique	86
37. Condensateurs	89

DISTRIBUTION ÉLECTRIQUE DANS LES CONDUCTEURS

38. Lois de la distribution électrique dans un conducteur homogène. .	93
39. Résistance électrique. Intensité d'un courant	95
40. Emploi du galvanomètre	97
41. Etude expérimentale de la distribution électrique dans les conducteurs	98
42. Propriétés des tubes de courant	101
43. Lois de la distribution électrique dans un conducteur hétérogène. .	105
44. Electrification d'un conducteur hétérogène sous l'action d'un courant permanent.	108
45. Application. Champ électrique d'une ligne télégraphique.	109

CHAPITRE VI

LOI DE JOULE. — LOI GÉNÉRALE DE LA DISTRIBUTION ÉLECTRIQUE

46. Loi de Joule.	113
47. Unités de résistance et d'intensité de courant.	113
48. Conséquence de la loi de Joule	115
49. Mesure du coefficient θ	117
50. Réactions développées dans un champ électrique variable; échanges d'énergie	118
51. Propriété du vecteur \vec{i} : <i>loi générale de la distribution électrique</i> .	122
52. Loi de variation de l'électrification d'un corps	123
53. Invariabilité de la charge électrique d'un conducteur isolé. . . .	124
54. Charge d'un conducteur par un courant électrique.	125
55. Electrification résiduelle	127
56. Réfraction des lignes de flux à la surface de séparation de deux corps isolants	130

CHAPITRE VII

CHAMP DU COURANT ÉLECTRIQUE

57. Décharge d'un condensateur.	134
58. Champ du courant	136
59. Problème de la transmission de l'énergie électrique	138
60. Première solution du problème (théorie des fluides électriques) .	141

§ 61. Deuxième solution	142
62. Application aux courants rectilignes	143

DÉFINITION DU CHAMP MAGNÉTIQUE

63. Champ magnétique.	145
64. Champ magnétique terrestre	146
65. Loi du couple magnétique terrestre	147
66. Champ magnétique quelconque; intensité	151
67. Propriétés magnétiques des corps	153

CHAMP MAGNÉTIQUE D'UN COURANT

68. Expérience de Biot et Savart	155
69. Propriétés du champ d'un courant.	157
70. Galvanomètres	160
71. Galvanomètre balistique	163
72. Potentiel du champ d'un courant	165

CHAPITRE VIII

SOURCES CHIMIQUES ET THERMIQUES D'ÉNERGIE ÉLECTRIQUE

73. Siège des sources d'énergie	169
---	-----

EFFETS THERMO-ÉLECTRIQUES

74. Effet Peltier.	170
75. Effet Thomson.	172
76. Force électromotrice d'une pile thermo-électrique.	172
77. Expressions des coefficients Θ et Π	173
78. Etude expérimentale des couples thermo-électriques.	176

ÉLECTROLYSE

79. Loi de l'électrolyse	178
80. Polarisation des électrodes	179
81. Electrolyse des solides	181
82. Force électromotrice d'une pile voltaïque.	182
83. Vérification expérimentale.	185

CHAPITRE IX

FORCES ÉLECTROMOTRICES DES PILES

84. Discontinuité du potentiel électrique aux surfaces de séparation des corps	187
85. Application aux réseaux de conducteurs	189
86. Sur l'état du champ électrique dans la couche de séparation de deux corps.	190
87. Mesure des forces électromotrices de contact	193

§ 88. Force électromotrice de polarisation	195
89. Forces électro-capillaires	198

CALCUL THÉORIQUE DES FORCES ÉLECTROMOTRICES

90. Applications des principes de la thermodynamique	202
91. Piles voltaïques réversibles	203
92. Piles thermo-électriques.	204

CHAPITRE X

PROPRIÉTÉS DES AIMANTS

93. Equivalence des courants et des aimants	208
94. Solénoïdes	210
95. Etude du champ créé par un petit aimant.	213
96. Proportionalité du moment magnétique au coefficient d'influence d'un aimant.	217
97. Action réciproque de deux petits aimants	219
98. Pouvoir inducteur magnétique	220
99. Unités magnétiques.	221
100. Détermination du coefficient a de l'air	224
101. Détermination de l'ohm (Joule)	226

CHAPITRE XI

FORCES ET ÉNERGIE MAGNÉTIQUES

102. Expressions des forces magnétiques.	228
103. Forces dites électro-magnétiques et électro-dynamiques	230
104. Applications.	231
105. Travail des forces magnétiques	232

ACTIONS FICTIVES A DISTANCE

106. Loi de Laplace.	236
107. Loi d'Ampère	237

ÉNERGIE MAGNÉTIQUE

108. Expression de l'énergie magnétique	239
109. Applications.	241
110. Énergie magnétique d'un système d'aimants et de courants	243
111. Variation de l'énergie magnétique d'un champ	245

COEFFICIENTS D'INDUCTION

112. Définition des coefficients d'induction	247
113. Formule de Neumann	248
114. Autre méthode de calcul	249
115. Induction mutuelle de deux lignes électriques parallèles (en cou- rant permanent)	252

§ 116. Auto-induction d'une ligne électrique à double fil (en courant permanent)	254
--	-----

CHAPITRE XII

LOIS DE L'ÉTAT VARIABLE D'UN CHAMP ÉLECTRO-MAGNÉTIQUE

117. Problème à résoudre	257
118. Lois de l'état variable dans le cas d'un milieu au repos.	258
119. Interprétation des formules.	262
120. Autres formes des lois de l'état variable.	263
121. Lois de l'état variable dans un milieu en mouvement.	266
122. Lois de la transmission de l'énergie électro-magnétique	268

PHÉNOMÈNES D'INDUCTION ÉLECTRO-MAGNÉTIQUE

123. Courants induits	270
124. Loi de l'induction dans un circuit fermé.	272
125. Vérifications expérimentales de la théorie	273
126. Détermination de l'ohm (Weber)	275
127. Condensateur intercalé sur un circuit induit.	276
128. Décharge oscillante d'un condensateur.	278

CHAPITRE XIII

PROPAGATION DES ONDES ÉLECTRO-MAGNÉTIQUES

129. Equations du champ électro-magnétique dans un milieu au repos.	283
130. Etude du front d'une onde électro-magnétique	284
131. Intégrales des équations du champ électro-magnétique.	288

ONDES PLANES ET ONDES CYLINDRIQUES

132. Etude des ondes planes.	291
133. Cas d'un milieu isolant	292
134. Cas d'un milieu conducteur.	294
135. Ondes planes périodiques dans un conducteur.	297
136. Ondes cylindriques périodiques dans un conducteur.	302

RÉFLEXION ET RÉFRACTION DES ONDES

137. Réflexion et réfraction des ondes électro-magnétiques (<i>isolants</i>).	307
138. Réflexion d'une onde périodique sur un conducteur.	312

PROPAGATION DU COURANT

139. Propagation d'une onde le long d'une ligne électrique	319
140. Courant dans les fils conducteurs.	322