N° D'ORDRE
206.

THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES,

PAR M. G. LESPIAULT,

Ancien Élève de l'École Normale, Agrégé des Sciences,
Professeur de Mathématiques au Lycée impérial de Toulouse.

1re THÈSE D'ASTRONOMIE. — Théorie géométrique de la libration réelle de la Lune.

2e THÈSE DE MÉCANIQUE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 6 juillet 1857 devant la Commission d'examen.

MM. LAMÉ, *Président.*

DELAUNAY, } *Examinateurs.*
PUISEUX, }

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Augustins, 55.

1857.

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

DOYEN .... MILNE EDWARDS, Professeur. Zoologie, Anatomie, Physiologie.

PROFESSEURS HONORAIRES. BIOT.
PONCELET.

PROFESSEURS ....

DUMAS..................	Chimie.
DESPRETZ...............	Physique.
DELAFOSSE..............	Minéralogie.
BALARD.................	Chimie.
LEFÉBURE DE FOURCY...	Calcul différentiel et intégral.
CHASLES................	Géométrie supérieure.
LE VERRIER.............	Astronomie physique.
DUHAMEL................	Algèbre supérieure.
N......................	Astronomie mathématique et Mécanique céleste.
GEOFFROY-SAINT-HILAIRE.	Anatomie, Physiologie comparée, Zoologie.
LAMÉ...................	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
DELAUNAY...............	Mécanique physique.
PAYER..................	Botanique.
C. BERNARD.............	Physiologie générale.
P. DESAINS.............	Physique.
N......................	Géologie.
N......................	Mécanique.

AGRÉGÉS ....

BERTRAND...............	Sciences mathématiques.
J. VIEILLE.............	Sciences mathématiques.
MASSON.................	Sciences physiques.
PELIGOT................	Sciences physiques.
DUCHARTRE..............	Sciences naturelles.

SECRÉTAIRE ... . E. PREZ-REYNIER.

A mon Père

et

A ma Mère

THÈSE D'ASTRONOMIE.

SUR LA THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DU MOUVEMENT DE LA LUNE AUTOUR DE SON CENTRE DE GRAVITÉ.

INTRODUCTION.

La facilité avec laquelle la belle théorie de M. Poinsot sur la rotation des corps lui a permis de résoudre le problème de la précession des équinoxes, et les leçons que M. Bertrand a faites sur ce double sujet au Collége de France, m'ont engagé à entreprendre l'application des mêmes méthodes à la détermination du mouvement de la Lune autour de son centre de gravité.

La solution complète de cette question a été donnée par Lagrange dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1780; mais le travail de ce grand géomètre ne fait peut-être pas ressortir d'une façon assez précise les raisons mécaniques et géométriques des phénomènes qui résultent de l'observation. Les méthodes nouvelles de M. Poinsot m'ont permis de reprendre ce problème sous un autre point de vue, et je suis ainsi parvenu d'une manière simple aux mêmes résultats que Lagrange. En outre, les procédés géométriques dont j'ai fait usage jettent un jour nouveau sur les conclusions analytiques du Mémoire de 1780, et permettent de suivre avec plus de clarté toutes les circonstances du mouvement.

I.

Mouvement de la Lune autour de son centre de gravité.

Les plus anciens observateurs ont reconnu que la Lune nous présente toujours la même face dans son mouvement autour de la Terre. Pour expliquer ce fait, il faut admettre dans notre satellite un moyen mouvement de rotation sur lui-même exactement égal à son mouvement moyen de révolution autour de la Terre, et supposer que l'axe de cette rotation est sensiblement perpendiculaire à l'écliptique.

Il y a une invraisemblance infinie à supposer que l'égalité rigoureuse des mouvements moyens de révolution et de rotation ait eu lieu à l'origine, en sorte qu'on peut regarder comme certain qu'il y a eu primitivement une petite différence entre ces mouvements, et qu'il existe une cause capable de les ramener à l'égalité. Cette cause, Newton le premier l'a trouvée dans l'attraction terrestre. Si la Lune était homogène et fluide, elle prendrait, pour être en équilibre sous l'effet de cette attraction, la forme d'un ellipsoïde à trois axes inégaux, dont le plus petit passerait par les pôles de rotation, tandis que le plus grand serait dirigé vers la Terre, et déterminerait avec l'axe moyen le plan de l'équateur lunaire. Dans cette hypothèse, rapportons le mouvement au centre de la Lune supposé immobile ; notre satellite tournera sur son petit axe, tandis que le plus grand sera sensiblement dirigé dans le même sens que le rayon vecteur qui suivrait la Terre dans sa révolution autour de la Lune. L'écart entre ces deux lignes, qui tendrait à augmenter par suite de la différence des moyens mouvements, tend au contraire à diminuer par l'effet de l'attraction terrestre qui ramène constamment vers nous le sommet du grand axe de la Lune. On voit alors à priori, et un calcul très-simple démontre que le grand axe doit osciller sans cesse de part et d'autre du rayon vecteur. C'est cette espèce de balancement que l'on désigne sous le nom de *libration physique ou réelle de la Lune.*

Indépendamment de cette libration réelle, Galilée, Riccioli et Hévélius ont reconnu dans notre satellite une libration apparente dont toutes les circonstances sont parfaitement expliquées par la théorie de Dominique Cassini perfectionnée par Tobie Mayer.

L'observation assidue des taches de la Lune fit reconnaître à ces astronomes que l'axe de l'équateur lunaire n'est point perpendiculaire à l'écliptique, comme on l'avait supposé jusqu'alors, et que ses positions successives ne sont pas exactement parallèles. Si, par le centre de la Lune, on conçoit trois plans, savoir le plan de son équateur, un plan parallèle à celui de l'écliptique, et enfin le plan de l'orbite lunaire, en faisant abstraction des inégalités périodiques, ces trois plans ont constamment une intersection commune ; le second, situé entre les deux autres, forme avec le premier un angle d'environ $1^\circ\,28'\,45''$, et avec le troisième un angle de $5^\circ\,8'\,48''$. Ainsi les intersections de l'équateur lunaire avec l'écliptique, ou ses nœuds, coïncident toujours avec les nœuds moyens de l'orbe lunaire, et, comme eux, ils ont un mouvement rétrograde dont la période est de $6793^j,39108$. Dans cet intervalle, les deux pôles de l'équateur et de l'orbe lunaire décrivent de petits cercles parallèles à l'écliptique en comprenant son pôle entre eux, de manière que ces trois pôles soient constamment, pour notre satellite, sur un grand cercle de la sphère céleste.

En résumé, le mouvement de la Lune autour de son centre de gravité présente les deux particularités suivantes :

1°. Égalité rigoureuse des moyens mouvements de rotation sur son axe et de révolution autour de la Terre;

2°. Coïncidence constante des lignes d'intersection de l'écliptique avec l'équateur et l'orbite lunaires.

Tels sont les théorèmes astronomiques dont j'ai cherché une explication simple, par la loi de la gravitation universelle, en faisant usage des principes dont M. Poinsot s'est servi pour résoudre, d'une façon si complète et si nouvelle, le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.

Pour y parvenir, je suppose que la Lune ait la forme d'un sphéroïde à trois axes inégaux dont le plus petit soit l'axe de rotation, et dont le plus grand soit sensiblement dirigé vers la Terre, ce qui a dû arriver, si notre satellite était primitivement fluide.

J'admets qu'il y ait eu, à l'origine, une différence peu considérable entre les moyens mouvements de rotation et de révolution de la Lune;

Enfin, que les intersections de l'écliptique avec l'orbite et l'équateur lunaires aient coincidé au moment que je choisis pour origine du temps.

Cela posé, j'établis d'abord que les deux moyens mouvements ont dû devenir rigoureusement égaux, et conserver indéfiniment cette égalité.

Passant ensuite au théorème de Cassini, je cherche quel doit être le rapport des moments d'inertie relatifs au plus petit et au plus grand axe du satellite, pour que l'action de la Terre sur le ménisque lunaire donne à l'intersection de l'équateur et de l'écliptique exactement le même mouvement rétrograde qu'indique l'observation pour la ligne des nœuds de l'orbite.

Je trouve pour la détermination de ce rapport la formule même que donne Laplace dans la *Mécanique céleste*, et je parviens à ce résultat par un calcul extrêmement simple.

Si la fraction $\frac{C-A}{A}$, que j'appellerai, pour abréger, l'*aplatissement mécanique du sphéroïde lunaire*, est celle que donne la formule en question, les deux droites dont nous nous occupons prennent des mouvements égaux dans le même sens, et leur coïncidence se maintient d'elle-même. En même temps, l'angle de l'équateur lunaire avec l'écliptique conserve une valeur moyenne constante, avec des variations insignifiantes d'une très-courte période.

En outre, soit qu'on admette un aplatissement différent, soit que, par toute autre raison, les deux lignes viennent à s'écarter l'une de l'autre, leur écart ne sera jamais que momentané; car notre méthode montre clairement que l'attraction terrestre les ramène l'une vers l'autre, en même temps qu'elle modifie l'angle de l'équateur avec l'écliptique, jusqu'à ce que cet angle soit arrivé à une grandeur pour laquelle les deux intersections reviennent à coïncidence, et prennent le même mouvement moyen: de telle sorte que le théorème de Cassini est, en quelque façon, indépendant de la valeur de l'aplatissement du sphéroïde lunaire; la seule chose qui dépende de cette valeur est l'angle moyen des axes de l'équateur et de l'écliptique. Comme d'ailleurs la formule dont nous avons parlé plus haut détermine l'aplatissement en fonction de cet angle, il en résulte qu'en prenant la grandeur angulaire donnée par l'observation, le nombre auquel on est conduit ne peut guère s'écarter de la réalité.

II.

Développement des calculs.

Si l'on conçoit, par le centre de gravité de la Lune, trois axes rectangulaires qui se meuvent parallèlement à eux-mêmes, on sait que le mouvement du corps par rapport à ces axes sera le même que si leur point de rencontre était invariablement fixé, et que toutes les forces qui sollicitent les différents points dans le mouvement réel fussent appliquées de la même manière à ces mêmes points. Nous pouvons donc supposer le centre de la Lune immobile et le prendre pour origine : nous prendrons pour axes les trois axes principaux d'inertie relatifs à ce point.

Les seules forces qui puissent produire un effet sensible sur le mouvement de la Lune autour de son centre de gravité, sont évidemment les attractions de la Terre et du Soleil: il est clair en outre que nous pouvons, sans erreur appréciable, considérer les masses de ces astres comme réunies à leurs centres de gravité respectifs; car leurs dimensions sont faibles relativement à leurs distances à la Lune; d'ailleurs leur figure diffère peu de la figure sphérique, et l'on sait qu'une sphère composée de couches homogènes attire un point extérieur comme si elle était tout entière condensée à son centre. Nous sommes donc conduit à calculer les couples résultant de l'attraction d'un point très-éloigné autour des axes principaux du corps attiré relatifs au centre de gravité.

Soient:

OZ l'axe autour duquel s'exécute le mouvement de rotation de la Lune;

OX celui que nous supposons dirigé vers la Terre, et qui n'est autre que le grand axe du sphéroïde;

OY l'axe moyen qui, conjointement avec OX, détermine le plan de l'équateur lunaire;

x', y', z' les coordonnées d'une molécule de la Lune;

dm' la masse de cette molécule;

x, y, z les coordonnées d'un point très-éloigné, tel que la Terre;

r la distance de ce point au centre de gravité de la Lune;

r' la distance du même point à la molécule dm';

m le produit de la masse de ce point par la constante qui mesure l'attraction de l'unité de masse sur l'unité de masse, à l'unité de distance;

X, Y, Z les composantes de l'attraction de ce point sur la Lune;

L, M, N les couples composants de cette attraction, autour des axes OX, OY, OZ;

A, B, C les moments d'inertie relatifs à ces mêmes axes : nous supposons

$$C > B > A.$$

Nous aurons

$$X = m\int \frac{x - x'}{r'^3}\, dm',$$

$$Y = m\int \frac{y - y'}{r'^3}\, dm',$$

$$Z = m\int \frac{z - z'}{r'^3}\, dm',$$

les intégrales s'étendant à tous les points de la masse de la Lune.

Il s'ensuit

$$L = Zy - Yz = mz \int \frac{y'}{r'^3} dm' - my \int \frac{z'}{r'^3} dm',$$
$$M = Xz - Zx = mx \int \frac{z'}{r'^3} dm' - mz \int \frac{x'}{r'^3} dm',$$
$$N = Yx - Xy = my \int \frac{x'}{r'^3} dm' - mx \int \frac{y'}{r'^3} dm'.$$

Or

$$\frac{1}{r'^3} = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{-\frac{3}{2}}$$
$$= (r^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2xx' - 2yy' - 2zz')^{-\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{1}{r^3}\left(1 - 2\frac{xx' + yy' + zz'}{r^2} + \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{r^2}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

En développant la parenthèse par la formule du binôme et en négligeant les carrés des fractions $\frac{x'}{r}$, $\frac{y'}{r}$, $\frac{z'}{r}$, qui sont très-petites vis-à-vis des rapports $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$, il reste

$$\frac{1}{r'^3} = \frac{1}{r^3} + 3\frac{xx' + yy' + zz'}{r^5};$$

d'où

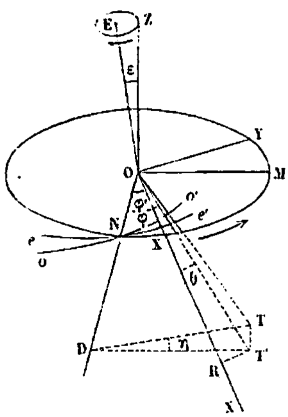
$$(1)\quad \begin{cases} L = \dfrac{3myz}{r^5}\displaystyle\int (y'^2 - z'^2)\, dm' = \dfrac{3m(C - B)}{r^5} yz, \\ M = \dfrac{3mzx}{r^5}\displaystyle\int (z'^2 - x'^2)\, dm' = \dfrac{3m(A - C)}{r^5} zx, \\ N = \dfrac{3mxy}{r^5}\displaystyle\int (x'^2 - y'^2)\, dm' = \dfrac{3m(B - A)}{r^5} xy. \end{cases}$$

Transformons les valeurs de ces trois couples en prenant des coordonnées plus commodes pour nos calculs.

Soit ON l'intersection de l'équateur lunaire avec l'écliptique ee'; soit oo' le plan de l'orbite que nous supposons passer actuellement par cette même ligne ON.

Soient encore

Fig. 1.



T la position de la Terre à l'instant considéré;

OT′ la projection du rayon vecteur OT sur le plan de l'équateur;

θ l'angle toujours très-petit que fait cette projection avec l'axe principal OX;

φ celui qu'elle fait avec ON;

φ' l'angle XON.

Abaissons T′D perpendiculaire sur ON, et joignons TD qui fait avec T′D l'angle η égal à l'angle de l'orbite lunaire et de l'équateur.

Nous regarderons, suivant l'usage des astronomes, le mouvement direct comme dirigé de droite à gauche, et nous compterons φ et φ' en marchant de ON vers OT′ et OX dans le sens direct; de même, θ se comptera de OX vers OT′, et on aura toujours

$$\varphi' = \varphi - \theta,$$

en regardant θ comme positif ou négatif, suivant que OT′ est à droite ou à gauche de OX.

On a

$$Z = TT' = OT \sin TOT'.$$

Évaluons TOT′.

Le triangle OTT′ donne

$$TT' = OT' \operatorname{tang} TOT',$$

et TT′D,

$$TT' = T'D \operatorname{tang} \eta = OT' \sin \varphi \operatorname{tang} \eta;$$

d'où

$$\operatorname{tang} TOT' = \sin \varphi \operatorname{tang} \eta,$$

formule qu'on pourrait trouver par la trigonométrie sphérique.

On en tire

$$\sin \mathrm{TOT}' = \frac{\tang \eta \sin \varphi}{\sqrt{1 + \tang^2 \eta \sin^2 \varphi}}, \quad \cos \mathrm{TOT}' = \frac{1}{\sqrt{1 + \tang^2 \eta \sin^2 \varphi}};$$

d'où

$$z = \frac{r \tang \eta \sin \varphi}{\sqrt{1 + \tang^2 \eta \sin^2 \varphi}}.$$

On trouve de même

$$x = \mathrm{OR} = \mathrm{OT}' \cos\theta = \mathrm{OT} \cos \mathrm{TOT}' \cos\theta = \frac{r \cos\theta}{\sqrt{1 + \tang^2 \eta \sin^2 \varphi}},$$

$$y = \mathrm{T'R} = \mathrm{OT}' \sin\theta = \mathrm{OT} \cos \mathrm{TOT}' \sin\theta = \frac{r \sin\theta}{\sqrt{1 + \tang^2 \eta \sin^2 \varphi}}.$$

Posons

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tang^2 \eta \sin^2 \varphi}},$$

α sera constamment compris entre 1 et $\frac{1}{\sqrt{1 + \tang^2 \eta}}$, c'est-à-dire entre 1 et $\cos\eta$, et, comme η est un très-petit angle (6 degrés environ), on pourra prendre $\alpha = 1$, en négligeant le carré de η, à l'exemple de Lagrange. Conservons provisoirement ce facteur α; nous aurons

$$z = \alpha r \tang \eta \sin \varphi,$$
$$x = \alpha r \cos\theta,$$
$$y = \alpha r \sin\theta.$$

Substituant ces valeurs des anciennes variables, dans les équations (1), les moments des couples deviennent

$$\mathrm{L} = \frac{3m}{r^3}(\mathrm{C} - \mathrm{B})\, \alpha^2 \tang \eta \sin\varphi \sin\theta,$$

$$\mathrm{M} = -\frac{3m}{r^3}(\mathrm{C} - \mathrm{A})\, \alpha^2 \tang \eta \sin\varphi \cos\theta,$$

$$\mathrm{N} = \frac{3m}{2r^3}(\mathrm{B} - \mathrm{A})\, \alpha^2 \sin 2\theta.$$

Nous regarderons r comme constant, ce qui revient à faire abstraction, dans l'évaluation des couples, de l'excentricité de l'orbite lunaire, et nous aurons alors, par les lois du mouvement des planètes,

$$\frac{m}{r^3} = \frac{4\pi^2}{T^2(1+h)},$$

T étant le temps de la révolution sidérale de la Lune autour de la Terre, et h le rapport $\frac{1}{88}$ de la masse du satellite à celle de la planète ; on peut négliger cette fraction et prendre

$$\frac{m}{r^3} = \frac{4\pi^2}{T^2};$$

alors

$$L = \frac{12\pi^2}{T^2}(C-B)\alpha^2 \operatorname{tang}\eta \sin\varphi \sin\theta,$$

$$M = -\frac{12\pi^2}{T^2}(C-A)\alpha^2 \operatorname{tang}\eta \sin\varphi \cos\theta,$$

$$N = \frac{6\pi^2}{T^2}(B-A)\alpha^2 \sin 2\theta.$$

Avant d'aller plus loin, nous pouvons conclure des valeurs de ces couples que l'action du Soleil est complétement négligeable dans le phénomène que nous étudions; car les couples analogues relatifs à cet astre seraient aux précédents dans un rapport de l'ordre

$$\frac{4\pi^2}{T'^2} : \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{T^2}{T'^2},$$

T′ désignant le temps de la révolution sidérale de la Terre autour du Soleil; ce rapport est $\frac{1}{179}$ environ.

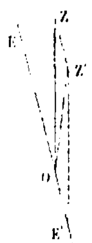
C'est donc dans la discussion des effets des trois couples L, M, N relatifs à l'action de la Terre qu'il faut chercher les causes du mouvement de la Lune autour de son centre de gravité.

III.

Pour entreprendre cette discussion, je commence par observer que l'axe principal OZ autour duquel paraît avoir lieu la rotation de la Lune ne se confond pas rigoureusement avec l'axe instantané de rotation; mais il est facile de voir que l'erreur commise en les confondant est négligeable, et qu'il est permis de les prendre l'un pour l'autre dans tout le cours du mouvement.

En effet, soit OZ l'axe principal; l'observation montre que la Lune accomplit une révolution autour de cet axe, dans le sens direct, en même temps que cet axe lui-même tourne, en sens contraire, autour de l'axe OE de l'écliptique, d'une quantité angulaire environ 249 fois plus petite, puisque sa révolution totale s'achève en 249 mois sidéraux à peu près. Or on sait que deux rotations infiniment petites se composent suivant la même loi que les forces. Nous aurons donc la position de l'axe instantané, à un moment donné, en prenant sur l'axe OZ une certaine longueur, sur le prolongement de OE une longueur OE' 249 fois plus petite, et en cherchant la diagonale OZ' du parallélogramme construit sur ces deux lignes. Si nous désignons par x l'angle compris entre OZ et OZ', et par ε l'angle de l'équateur lunaire avec l'écliptique, nous aurons

Fig. 2.



$$\frac{\sin x}{\sin(\varepsilon + x)} = \frac{1}{249},$$

ou sensiblement

$$\frac{x}{\varepsilon + x} = \frac{1}{249};$$

d'où

$$x = \frac{\varepsilon}{248} = \frac{1^\circ 28' 45''}{248},$$

ou enfin

$$x < 22''.$$

Ainsi, l'axe OZ ne s'écartant pas de plus de 22″ de l'axe instantané, on peut les prendre l'un pour l'autre, et l'on voit de plus que les vitesses angulaires peuvent être regardées comme égales, autour de ces deux axes.

IV.

Cela posé, cherchons quelle est, dans un temps infiniment petit, l'action des couples perturbateurs Ldt, Mdt, Ndt.

L'un quelconque de ces couples, s'il agissait seul, produirait une rotation infiniment petite autour de l'axe d'inertie correspondant, de sorte que les trois couples donnent respectivement, pendant le temps dt, autour des axes OX, OY, OZ, des rotations dont les expressions rapportées à l'unité de temps sont

$$\frac{L\,dt}{A}, \quad \frac{M\,dt}{B}, \quad \frac{N\,dt}{C}.$$

La dernière de ces trois rotations modifie la vitesse angulaire de la Lune sur son axe; les deux autres donnent une rotation résultante dans le plan de l'équateur, et celle-ci, composée avec la précédente, n'amène aucun changement dans la vitesse angulaire du satellite autour de son axe, puisque la diagonale du rectangle est égale au côté, à un infiniment petit près du second ordre. Mais on voit, dès maintenant, que cette dernière rotation tend à déplacer le plan des axes de l'équateur lunaire et de l'écliptique. On peut donc prévoir que le phénomène de la libration réelle en longitude est dû à l'action du couple N, et le mouvement conique de l'axe lunaire autour de celui de l'écliptique, à l'action combinée des deux autres.

V.

Explication de la libration réelle en longitude.

Étudions en détail l'action du couple N. Si nous désignons par υ la vitesse angulaire de la Lune autour de son axe, nous aurons l'équation

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{N}{C} = \frac{6\pi^2}{T^2}\,\frac{B-A}{C}\sin 2\theta,$$

en remplaçant α^2 par 1.

Posant, pour abréger,

$$\frac{6\pi^2}{T^2}\,\frac{B-A}{C} = P,$$

il vient

$$(2) \qquad \frac{d\upsilon}{dt} = P \sin 2\theta.$$

Supposons, ainsi que nous l'avons dit plus haut, qu'il y ait un petit écart initial entre les directions du rayon vecteur mené à la Terre, et du grand axe du sphéroïde lunaire; admettons aussi qu'il existe originairement une petite différence entre les moyens mouvements de la Lune autour de son axe, et de la Terre dans sa révolution autour de son satellite supposé fixe. Enfin, considérons d'abord le cas simple où la Terre décrirait, d'un mouvement uniforme, une orbite circulaire située dans le plan même de l'équateur lunaire.

Fig. 3.

Soient OX, OT les directions du grand axe et du rayon vecteur, au temps t, OX_1, OT_1 les directions des mêmes lignes au temps $t+dt$: soient k et v les vitesses angulaires respectives de la Terre dans son orbite, et de la Lune autour de son axe. On a

$$d\theta = X_1OT_1 - XOT = TOT_1 - XOX_1 = kdt - vdt;$$

d'où

$$\frac{d\theta}{dt} = k - v, \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{dv}{dt}.$$

En substituant dans l'équation (2), on trouve

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + P\sin 2\theta = 0,$$

équation dont on remarquera l'analogie avec celle qui détermine le mouvement du pendule.

L'angle θ étant toujours fort petit, on peut le prendre pour son sinus, ce qui réduit l'équation précédente à

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2P\theta = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$\theta = C\cos t\sqrt{2P} + C'\sin t\sqrt{2P}.$$

Déterminons les constantes par l'état initial. Soient θ_0 la valeur initiale de θ, k' la vitesse angulaire initiale de la Lune sur son axe. On obtient, en faisant

$t = 0$ dans l'équation précédente et sa première dérivée.

$$\theta_0 = C, \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 = C'\sqrt{2P} = k - k';$$

d'où

$$C' = \frac{k - k'}{\sqrt{2P}}.$$

On tire de là, pour la valeur de θ,

$$\theta = \theta_0 \cos t\sqrt{2P} + \frac{k - k'}{\sqrt{2P}} \sin t\sqrt{2P}.$$

Ainsi l'angle θ est périodique et la durée de sa période est donnée par l'équation

$$t\sqrt{2P} = 2\pi;$$

d'où

$$t = \pi\sqrt{\frac{2}{P}} = \pi\sqrt{\frac{T^2}{3\pi^2 \cdot \frac{B - A}{C}}} = \frac{T}{\sqrt{3\frac{B - A}{C}}},$$

T désignant un mois lunaire sidéral. Cette période dépend, comme on voit, de la quantité inconnue $\frac{B - A}{C}$; c'est-à-dire de la différence des moments d'inertie relatifs à l'axe moyen et au grand axe. Au reste, pour que ces conséquences soient rigoureuses, il faut que, pendant la durée de la période en question, l'angle θ varie assez peu pour qu'il soit permis de le regarder comme égal à son sinus, ce qui nous oblige à admettre, comme nous l'avons fait, une petite valeur pour la différence initiale des vitesses angulaires.

Moyennant cette restriction, puisque l'angle θ ne croît pas avec le temps, il est clair que les deux mouvements moyens sont ramenés par l'attraction terrestre à une rigoureuse égalité.

Si l'on voulait avoir le temps au bout duquel le grand axe et le rayon vecteur se rejoignent pour la première fois, il faudrait faire $\theta = 0$ dans l'équation qui donne la valeur de cet angle, et l'on aurait ainsi

$$\tang t\sqrt{2P} = \frac{\theta_0\sqrt{2P}}{k' - k},$$

d'où

$$t = \frac{1}{\sqrt{2P}} \operatorname{arc\,tang} \frac{\theta_0 \sqrt{2P}}{k' - k}.$$

Si l'on suppose $k' = k$, ce qui est le cas de l'égalité initiale des moyens mouvements,

$$t = \frac{1}{\sqrt{2P}} \operatorname{arc\,tang} \infty = \frac{\pi}{2\sqrt{2P}}.$$

Ce temps est le quart de la durée totale de l'oscillation.

Nous avons supposé, dans le calcul précédent, le mouvement de la Terre autour de la Lune circulaire et uniforme; nous allons voir que la substitution du mouvement vrai de la planète à ce mouvement hypothétique ne change rien aux résultats généraux que nous venons d'obtenir, et ne fait qu'introduire dans les oscillations relatives du grand axe des termes périodiques sans influence sur les mouvements moyens.

Nous avons toujours les deux équations

$$\frac{dv}{dt} = P \sin 2\theta$$

et

$$(3) \qquad d\theta = TOT_1 - XOX_1;$$

mais, dans cette dernière équation, TOT_1 n'a plus la même expression qu'il avait plus haut; il représente l'accroissement, pendant le temps dt, de l'angle β décrit par la projection équatoriale du rayon vecteur terrestre, dans son mouvement réel autour de la Lune supposée fixe. Si l'on néglige, comme nous l'avons fait, le carré de η, l'angle décrit par le rayon vecteur mené à la Terre sera égal à ses projections sur l'équateur lunaire et sur l'écliptique, d'où il suit que l'on peut prendre pour expression de β celle de la longitude vraie de la Lune vue de la Terre. On a ainsi, en comptant cet angle β à partir de l'équinoxe d'automne projeté sur l'équateur lunaire, et en désignant par k la vitesse angulaire moyenne de la Lune en longitude, l'équation

$$\beta = kt + G \sin\alpha + G' \sin\alpha' + G'' \sin\alpha'' + \ldots,$$

dans laquelle les termes qui suivent kt représentent les inégalités de β ordonnées par rapport au moyen mouvement; on sait que les coefficients G, G', etc., sont des quantités constantes fort petites, que les angles α, α', etc., sont de la forme $mt + n$, et que leurs dérivées $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\alpha'}{dt}$, etc., sont des quantités connues par la théorie de la Lune. On obtient, en différentiant l'équation précédente,

$$\frac{d\beta}{dt} = k + G\frac{d\alpha}{dt}\cos\alpha + G'\frac{d\alpha'}{dt}\cos\alpha' + \ldots.$$

Or l'équation (3) peut s'écrire

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\beta}{dt} - v = k - v + G\frac{d\alpha}{dt}\cos\alpha + G'\frac{d\alpha'}{dt}\cos\alpha' + \ldots.$$

On tire de là

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{d^2\theta}{dt^2} - G\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\sin\alpha - G'\left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)^2\sin\alpha' - \ldots.$$

Si nous substituons cette valeur dans l'équation (2), en y remplaçant $\sin\vartheta$ par θ, il vient

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2P\theta = -G\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\sin\alpha - G'\left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)^2\sin\alpha' - \ldots. \tag{4}$$

On sait, par la théorie des équations linéaires, que, pour avoir l'intégrale générale de cette équation, il faut ajouter une de ses intégrales particulières à l'intégrale générale de la même équation privée de second membre. Pour obtenir l'intégrale particulière cherchée, posons

$$\theta' = X\sin\alpha + X'\sin\alpha' + \ldots;$$

d'où

$$\frac{d^2\theta'}{dt^2} = -X\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\sin\alpha - X'\left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)^2\sin\alpha' - \ldots.$$

Substituons θ' pour θ dans l'équation (4),

$$\left[-X\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 2PX\right]\sin\alpha + \left[-X'\left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)^2 + 2PX'\right]\sin\alpha' + \ldots$$
$$= -G\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\sin\alpha - G'\left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)^2\sin\alpha' - \ldots.$$

On satisfait à cette équation, en posant

$$-\mathrm{X}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 2\mathrm{PX} = -\mathrm{G}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2,$$

$$-\mathrm{X}'\left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)^2 + 2\mathrm{PX}' = -\mathrm{G}'\left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)^2,$$

. . . .

d'où

$$\mathrm{X} = \frac{\mathrm{G}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2}{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - 2\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{G}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2}{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - \frac{12\pi^2}{\mathrm{T}^2}\cdot\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}} = \frac{\mathrm{G}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2}{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - 3k^2\,\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}},$$

$$\mathrm{X}' = \frac{\mathrm{G}'\left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)^2}{\left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)^2 - 3k^2\,\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}}\cdots;$$

donc

$$\theta' = \frac{\mathrm{G}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2}{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - 3k^2\,\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}}\sin\alpha + \frac{\mathrm{G}'\left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)^2}{\left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)^2 - 3k^2\,\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}}\sin\alpha' + \ldots.$$

Si l'on ajoute cette valeur à l'intégrale générale de l'équation privée de second membre, il vient enfin, pour l'expression générale de θ,

$$\begin{aligned}\theta = {} & \mathrm{C}\cos kt\sqrt{3\,\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}} + \mathrm{C}'\sin kt\sqrt{3\,\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}} \\ & + \frac{\mathrm{G}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\sin\alpha}{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - 3k^2\,\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}} + \frac{\mathrm{G}'\left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)^2\sin\alpha'}{\left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)^2 - 3k^2\,\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}} + \ldots\end{aligned}$$

Les constantes C et C′ dépendent de l'état initial, mais elles sont nécessairement très-petites, puisque les observations n'ont pu faire reconnaître aucune libration réelle.

Si l'on examine cette intégrale, on voit que tous les termes qui suivent les deux premiers du second membre ont la même période que les causes perturbatrices dont ils dépendent, c'est-à-dire à peu près mensuelle ou annuelle : les deux premiers termes, au contraire, ont pour période

$\dfrac{T}{\sqrt{3\dfrac{B-A}{C}}}$, et cette dernière est évidemment plus longue, puisque $\dfrac{B-A}{C}$ est une très-petite quantité.

Ainsi l'angle θ peut être regardé comme ayant une petite valeur périodique, avec des inégalités d'une période moindre, mais d'une amplitude plus considérable. Puisque cet angle ne croît pas avec le temps, on voit, comme nous l'avions annoncé, que, s'il y a eu dans le principe une petite différence entre les moyens mouvements, elle a dû finir par disparaître.

En outre, les inégalités séculaires du mouvement de la Lune autour de la Terre doivent se transmettre, pour ainsi dire, à son mouvement de rotation, et les raisonnements qui précèdent font voir que l'attraction terrestre ramène toujours les deux vitesses angulaires moyennes à une égalité parfaite, lorsqu'une cause quelconque tend à y introduire une petite différence.

Si l'on désigne, avec Lagrange, par r la différence entre le mouvement angulaire variable de la Lune autour de son axe, et son moyen mouvement en longitude, on a

$$r = \int v\,dt - kt.$$

D'ailleurs

$$\theta = \beta - \int v\,dt = kt + G\sin\alpha + G'\sin\alpha' + \ldots - \int v\,dt,$$

d'où

$$r + \theta = G\sin\alpha + G'\sin\alpha' + \ldots,$$

d'où

$$\begin{aligned} r = &-\left(C\cos kt\sqrt{3\frac{B-A}{C}} + C'\sin kt\sqrt{3\frac{B-A}{C}}\right) \\ &+ G\sin\alpha\left[1 - \frac{\left(\dfrac{d\alpha}{dt}\right)^2}{\left(\dfrac{d\alpha}{dt}\right)^2 - 3k^2\dfrac{B-A}{C}}\right] + \ldots \\ = &\; C_1\sin\left(kt\sqrt{3\frac{B-A}{C}} + F\right) \\ &- 3k^2\frac{B-A}{C}\cdot\frac{G\sin\alpha}{\left(\dfrac{d\alpha}{dt}\right)^2 - 3k^2\dfrac{B-A}{C}} - \ldots \end{aligned}$$

C'est l'équation que donne Lagrange pour la détermination de la libration réelle. Comme il mesure le temps par la longitude moyenne de la Lune, k est égal à 1 dans sa formule.

Lagrange a reconnu que, parmi les termes dont se compose l'expression de r, il n'y a de sensibles que ceux qui dépendent de l'équation du centre et de l'équation annuelle; de ce que l'observation n'a pu encore faire reconnaître l'effet de ces termes dans le mouvement de rotation de notre satellite, il a conclu des limites supérieures pour la fraction $\frac{B-A}{C}$; mais nous ne nous arrèterons pas à ce détail qui ne peut indiquer, même approximativement, la valeur réelle de cette fraction (*).

(*) Postérieurement au Mémoire de Lagrange, Nicollet a trouvé par la comparaison de 174 observations de la libration de la Lune en longitude, que l'inégalité de cette libration provenant de l'équation annuelle était égale à

$$4'49'',7 . \sin \alpha,$$

α désignant l'anomalie moyenne du Soleil. Or la théorie de la Lune donne pour expression de l'équation annuelle

$$669'',7 . \sin \alpha,$$

avec

$$\frac{d\alpha}{dt} = k . 0,0748,$$

d'où

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = k^2 . 0,005595.$$

On aura donc, dans l'expression de r, l'argument

$$\frac{3\frac{B-A}{C} . 669'',7 . \sin \alpha}{0,005595 - 3\frac{B-A}{C}} = 4'49'',7 . \sin \alpha = 289'',7 . \sin \alpha,$$

d'où

$$\frac{B-A}{C} = \frac{289,7 . 0,001865}{959,4} = 0,000564.$$

Mais les observations d'où l'on a déduit ce nombre ne sont pas assez sûres pour que la valeur de $\frac{B-A}{C}$ ait la même certitude que celle de $\frac{C-A}{C}$ donnée plus loin.

En adoptant cette valeur, la durée de la libration réelle serait

$$\frac{T}{\sqrt{3\frac{B-A}{C}}} = \frac{T}{\sqrt{0,001692}} = 24^{\text{mois lunaires}},31,$$

ou près de deux ans.

VI.

Explication du théorème de Cassini.

Je suppose, comme je l'ai dit plus haut, qu'à un instant donné qu'on peut prendre pour origine du temps, la coïncidence exacte soit établie entre les intersections de l'écliptique avec les plans de l'orbite et de l'équateur lunaires; je vais étudier l'effet, pendant un temps déterminé, des deux couples dont les plans sont respectivement perpendiculaires au grand axe et à l'axe moyen du satellite, couples qui ont pour moments

$$L = \frac{12\pi^2}{T^2}(C - B)\alpha^2 \operatorname{tang}\eta \sin\varphi \sin\theta,$$

$$M = -\frac{12\pi^2}{T^2}(C - A)\alpha^2 \operatorname{tang}\eta \sin\varphi \cos\theta.$$

Nous avons vu que ces deux couples étaient sans action sur la vitesse angulaire de la Lune autour de son axe, vitesse que nous pouvons d'ailleurs regarder comme constante, puisque les observations n'ont fait découvrir aucune trace de libration réelle.

α^2 a une valeur intermédiaire entre 1 et $\cos^2\eta$; on peut le regarder comme constant et très-voisin de 1. Posons, pour abréger,

$$\frac{12\pi^2}{T^2}\alpha^2 \operatorname{tang}\eta = n,$$

alors

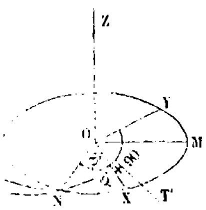
$$L = n(C - B)\sin\varphi \sin\theta,$$
$$M = -n(C - A)\sin\varphi \cos\theta.$$

Ces deux couples ayant leurs axes dans la direction de deux des axes principaux du sphéroïde lunaire, chacun d'eux, s'il agissait isolément pendant un temps infiniment petit, produirait une rotation infiniment petite autour de l'axe correspondant, et l'on sait que ces rotations auraient respectivement pour expressions rapportées à l'unité de temps,

$$dp = \frac{L\,dt}{A}, \quad dq = \frac{M\,dt}{B}.$$

Si on les composait avec la rotation finie ρ de la Lune autour de son axe OZ que l'on peut regarder, ainsi qu'il a été établi plus haut, comme l'axe instantané, on obtiendrait la nouvelle position de cet axe, au bout du

Fig. 4.



temps dt. Mais, pour suivre plus facilement le mouvement de OZ dans l'espace, commençons par décomposer les rotations dp et dq suivant l'intersection ON, et la droite OM menée dans le plan de l'équateur de façon à faire avec l'intersection un angle de 90 degrés compté, dans le sens direct, à partir de ON. Si l'on désigne par $d\omega$, $d\omega'$ les nouvelles rotations sur ON, OM, on aura

$$d\omega = dp\cos\varphi' + dq\cos(90^\circ + \varphi') = dp\cos\varphi' - dq\sin\varphi',$$
$$d\omega' = dp\sin\varphi' + dq\cos\varphi'.$$

Développons $d\omega$, en mettant $\varphi - \theta$ à la place de φ',

$$d\omega = ndt\left[\begin{array}{l}\quad\dfrac{C-B}{A}\sin\varphi\sin\theta\cos(\varphi-\theta)\\ +\dfrac{C-A}{B}\sin\varphi\cos\theta\sin(\varphi-\theta)\end{array}\right].$$

Remarquons que $\frac{C-A}{A}$ et $\frac{C-A}{B}$ ont pour différence $\frac{C-A}{A}\cdot\frac{B-A}{B}$, quantité moindre que le carré de la fraction très-petite $\frac{C-A}{A}$, et, par conséquent, négligeable à côté de cette dernière. Il est donc permis de remplacer $\frac{C-A}{B}$ par $\frac{C-A}{A}$, ce qui donne

$$d\omega = ndt\left[\frac{C-B}{A}\sin\varphi\sin\theta\cos(\varphi-\theta) + \frac{C-A}{A}\sin\varphi\cos\theta\sin(\varphi-\theta)\right]$$
$$= ndt\left[\begin{array}{l}\quad\dfrac{C-B}{A}(\sin\varphi\sin\theta\cos\varphi\cos\theta + \sin^2\varphi\sin^2\theta)\\ +\dfrac{C-A}{A}(\sin^2\varphi\cos^2\theta - \sin\varphi\sin\theta\cos\varphi\cos\theta)\end{array}\right].$$

θ est toujours un très-petit angle, puisque sa valeur maximum est égale à la plus grande valeur de l'équation du centre, c'est-à-dire 7 degrés environ. Nous pourrons donc, sans erreur sensible, négliger les termes qui renferment $\sin^2\theta$, et faire $\cos^2\theta = 1$. L'équation précédente devient, en y introduisant ces simplifications,

$$d\omega = ndt\left(\frac{C-B}{4A}\sin 2\varphi \sin 2\theta + \frac{C-A}{A}\sin^2\varphi - \frac{C-A}{4A}\sin 2\varphi \sin 2\theta\right)$$
$$= ndt\left(\frac{C-A}{A}\sin^2\varphi - \frac{B-A}{4A}\sin 2\varphi \sin 2\theta\right).$$

Remplaçons le produit de sinus par une différence de cosinus, et nous aurons

$$d\omega = ndt\left\{\frac{C-A}{A}\sin^2\varphi - \frac{B-A}{8A}\left[\cos 2(\varphi-\theta) - \cos 2(\varphi+\theta)\right]\right\}.$$

Transformons de même l'expression de $d\omega'$, en y remplaçant aussi $\frac{C-A}{B}$ par $\frac{C-A}{A}$, et φ' par $\varphi-\theta$,

$$d\omega' = ndt\left[\frac{C-B}{A}\sin\varphi \sin\theta \sin(\varphi-\theta) - \frac{C-A}{A}\sin\varphi\cos\theta\cos(\varphi-\theta)\right]$$
$$= ndt\left[\begin{array}{l}\frac{C-B}{A}(\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta - \sin\varphi\sin^2\theta\cos\varphi)\\ -\frac{C-A}{A}(\sin\varphi\cos^2\theta\cos\varphi + \sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta)\end{array}\right]$$

Négligeant, comme dans la valeur de $d\omega$, $\sin^2\theta$, et faisant $\cos^2\theta = 1$,

$$d\omega' = ndt\left(-\frac{C-A}{2A}\sin 2\varphi - \frac{B-A}{2A}\sin^2\varphi \sin 2\theta\right)$$
$$= ndt\left[-\frac{C-A}{2A}\sin 2\varphi - \frac{B-A}{4A}\sin 2\theta(1-\cos 2\varphi)\right].$$

Développant et remplaçant le produit de sinus et cosinus par une différence de sinus, on obtient

$$d\omega' = ndt\left\{-\frac{C-A}{2A}\sin 2\varphi - \frac{B-A}{4A}\sin 2\theta + \frac{B-A}{8A}\left[\sin 2(\varphi+\theta) - \sin 2(\varphi-\theta)\right]\right\}.$$

Ayant ainsi évalué les rotations instantanées produites par l'attraction terrestre autour de l'intersection de l'équateur lunaire avec l'écliptique, et de la perpendiculaire à cette intersection, cherchons quel déplacement ces rotations produisent sur l'axe OZ, pendant le temps dt.

D'après le théorème de la composition des petits mouvements, on obtiendra ce déplacement, en composant séparément les vitesses infiniment petites $d\omega$, $d\omega'$ avec la vitesse angulaire finie ρ dont la Lune est actuellement animée, et, pour cela, rappelons encore que l'on pourra regarder comme l'axe de rotation l'axe principal OZ.

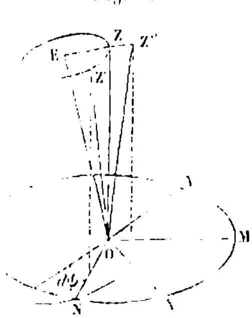
Je dis que, si la rotation $d\omega$ existait seule, elle déplacerait le plan qui passe par les axes de l'équateur et de l'écliptique, sans changer l'angle de ces axes. En effet, pour trouver la position que prend l'axe OZ, au bout du temps dt, par suite de la rotation $d\omega$, il faut prendre sur ON une longueur proportionnelle à $d\omega$, sur OZ une longueur proportionnelle à la vitesse angulaire ρ de la Lune sur son axe, et tracer la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux longueurs; cette diagonale OZ′ détermine la nouvelle position Z′OE du plan ZOE. On voit qu'elle est située dans le plan tangent au cône ZOE, suivant OZ; ainsi les deux angles EOZ, EOZ′ ne diffèrent que d'un infiniment petit du second ordre. On peut donc dire que la rotation $d\omega$ déplace le plan EOZ, sans changer l'angle de l'équateur et de l'écliptique. Par suite du déplacement du plan EOZ, l'intersection ON, qui lui est constamment perpendiculaire, s'est déplacée dans le plan de l'écliptique d'un angle $d\psi$, et la figure montre que son mouvement est rétrograde, lorsque la rotation $d\omega$ est positive, ce qui a toujours lieu, comme nous le verrons, en se tenant aux valeurs moyennes; cet angle $d\psi$ est facile à calculer : il est égal à l'angle ZEZ′. Or

$$\mathrm{ZEZ'} = \frac{\text{arc}\,\mathrm{ZZ'}}{\mathrm{ZE}} = \frac{d\omega}{\mathrm{OZ}\sin\mathrm{ZOE}} = \frac{d\omega}{\rho\sin\varepsilon};$$

on a donc

$$d\psi = \frac{d\omega}{\rho\sin\varepsilon}.$$

Fig. 5.



De même, en composant la rotation $d\omega'$ avec la rotation ρ, on obtient la nouvelle position OZ″ que prendrait l'axe OZ, au bout du temps dt, si la rotation $d\omega'$ agissait seule; cette seconde rotation ne change donc pas la position du plan ZOE, mais elle accroît l'angle ε de l'angle Z″OZ, dont la valeur, à un infiniment petit près du second ordre, est $\frac{\mathrm{Z''Z}}{\mathrm{OZ}}$, d'où

$$d\varepsilon = \frac{d\omega'}{\rho}.$$

Remarquons que $d\varepsilon$ est de même signe que $d\omega'$, c'est-à-dire que l'angle ε croît ou décroît, suivant que $d\omega'$ est positif ou négatif.

Si l'on substitue pour $d\omega$ et $d\omega'$ leurs valeurs trouvées plus haut, on obtient, en définitive, pour les équations différentielles du déplacement de l'axe OZ,

$$(5)\quad d\psi = \frac{ndt}{\rho \sin \varepsilon}\left\{\frac{C-A}{A}\sin^2\varphi - \frac{B-A}{8A}[\cos 2(\varphi - \theta) - \cos 2(\varphi + \theta)]\right\},$$

$$d\varepsilon = \frac{ndt}{\rho}\left\{-\frac{C-A}{A}\sin 2\varphi - \frac{B-A}{4A}\sin 2\theta + \frac{B-A}{8A}[\sin 2(\varphi+\theta) - \sin 2(\varphi - \theta)]\right\}.$$

Discutons d'abord la seconde équation.

L'angle φ est l'angle que fait avec l'intersection ON la projection, sur le plan de l'équateur lunaire, du rayon vecteur mené du centre de la Lune au centre de la Terre.

L'angle $\varphi - \theta$ ou φ' est l'angle que fait avec la même intersection le grand axe de l'équateur lunaire.

Enfin $\varphi + \theta$ est l'angle que ferait avec ON une droite mobile qui resterait constamment symétrique de la projection du rayon vecteur, par rapport au grand axe du satellite.

Ces trois angles sont ou sensiblement ou exactement proportionnels au temps, et leur période commune est celle de la rotation de la Lune sur son axe, c'est-à-dire de 27 jours $\frac{1}{3}$ environ ; par suite, les termes qui les contiennent ne peuvent donner par l'intégration que des termes périodiques, et même d'une période assez courte.

Quant au terme

$$-ndt\frac{B-A}{4A}\sin 2\theta,$$

qu'on peut écrire, si l'on veut,

$$-ndt\frac{B-A}{2A}\theta,$$

à cause de la petitesse de l'angle θ, on voit qu'il est très-petit par lui-même; si l'on se rappelle d'ailleurs que la valeur de θ a été développée en sinus et cosinus d'angles de la forme $mt + n$, on en conclura qu'il n'en résulte par l'intégration que des termes périodiques comme les précédents, quoique d'une période plus longue. Ces termes, comme ceux de θ, auront de très-petits coefficients.

Ainsi la variation de l'angle ε se composera de termes périodiques, et, parmi ces termes, ceux dont les coefficients sont les moins faibles auront une période moindre que 14 jours. Il est donc clair que cet angle conservera une valeur moyenne égale à sa valeur initiale, avec de très-petites nutations périodiques, aussi longtemps du moins que l'intersection de l'équateur avec l'écliptique ne s'écartera pas sensiblement de la ligne des nœuds de l'orbite lunaire.

Occupons-nous maintenant de l'équation (5) qui détermine le mouvement sur l'écliptique de son intersection avec l'équateur lunaire. On peut écrire cette équation de la manière suivante, en y remplaçant $\sin^2\varphi$ par $\frac{1-\cos 2\varphi}{2}$.

$$d\psi = \frac{ndt}{\rho \sin\varepsilon}\left\{\frac{C-A}{2A} - \frac{C-A}{2A}\cos 2\varphi - \frac{B-A}{8A}\left[\cos 2(\varphi-\theta) - \cos 2(\varphi+\theta)\right]\right\}$$

Les trois derniers termes contenus dans l'accolade sont périodiques, et leur période est moindre que 14 jours. Ils ne font donc qu'introduire dans l'intégrale ψ des termes de même période, et si l'on néglige les petites oscillations de l'intersection ON, pour ne s'occuper que de son mouvement moyen, l'équation se réduit à la suivante :

$$d\psi = \frac{ndt}{\rho \sin\varepsilon}\cdot\frac{C-A}{2A} = \frac{6\pi^2}{T^2}\cdot\alpha^2 \operatorname{tang}\eta\cdot\frac{1}{\rho\sin\varepsilon}\cdot\frac{C-A}{A}\,dt.$$

Nous avons vu précédemment qu'il était permis de regarder $\sin\varepsilon$ comme constant. Il vient alors, en intégrant l'équation précédente, et donnant à l'angle ψ la valeur ψ_0, à l'origine du temps,

$$(6)\qquad \psi - \psi_0 = \frac{6\pi^2}{T^2}\cdot\alpha^2 \operatorname{tang}\eta\cdot\frac{1}{\rho\sin\varepsilon}\cdot\frac{C-A}{A}\,t.$$

Cette équation fait voir que l'angle $\psi - \psi_0$ dépend du rapport du plus grand au plus petit moment d'inertie du sphéroïde lunaire; et réciproquement, de la valeur supposée connue de $\psi - \psi_0$, on pourrait tirer $\frac{C-A}{A}$. Cherchons à quel nombre devrait être égalée cette fraction, pour que le mouvement rétrograde de l'intersection de l'équation lunaire avec l'écliptique fût exactement le même que le mouvement connu de la ligne des nœuds de l'orbite lunaire. Pour cela, prenons pour unité de temps le temps de la rotation de la Lune autour de son axe; alors T, qui représente le temps de sa révolution sidérale autour de la Terre, prendra la valeur 1, et ρ, qui exprime le mouvement angulaire de la Lune sur son axe pendant l'unité de temps, sera égal à 2π. L'équation précédente deviendra donc, en désignant par $\psi_1 - \psi_0$ le mouvement rétrograde de l'intersection ON dans un mois lunaire, et remplaçant η par $\varepsilon + \varepsilon'$,

$$\psi_1 - \psi_0 = 6\pi^2 . \alpha^2 \operatorname{tang}(\varepsilon + \varepsilon') \cdot \frac{1}{2\pi \sin\varepsilon} \cdot \frac{C - A}{A}$$
$$= \frac{3\pi\alpha^2 \operatorname{tang}(\varepsilon + \varepsilon')}{\sin\varepsilon} \cdot \frac{C - A}{A}.$$

Or nous voulons savoir ce qu'il faut pour que $\psi_1 - \psi_0$ soit égal à la rétrogradation moyenne de la ligne des nœuds de l'orbite, pendant un mois lunaire. Si nous désignons par l le rapport de la vitesse angulaire moyenne du nœud à celle de la Lune sur son axe, nous aurons pour la rétrogradation du nœud, dans un mois, le produit $2\pi l$. Égalons ce produit à $\psi_1 - \psi_0$, il viendra

$$2\pi l = \frac{3\pi\alpha^2 \operatorname{tang}(\varepsilon + \varepsilon')}{\sin\varepsilon} \cdot \frac{C - A}{A};$$

d'où

(7)
$$\frac{C - A}{A} = \frac{2}{3} \frac{l \sin\varepsilon}{\alpha^2 \operatorname{tang}(\varepsilon + \varepsilon')}.$$

Si tel est, en réalité, l'aplatissement mécanique du sphéroïde lunaire, il suffira que la coïncidence des nœuds ait lieu dans le principe pour qu'elle se maintienne d'elle-même. En effet, d'une part l'angle ε conservera la même valeur moyenne, et d'autre part le mouvement angulaire de ON sera le même que celui de la ligne des nœuds de l'orbite lunaire. Ces deux lignes marcheront donc de conserve dans les premiers temps, et, comme le cas simple dans lequel nous nous sommes placé subsistera par cette égalité de vitesses angulaires, nos raisonnements s'appliqueront encore dans la suite des temps, et la coïncidence persistera indéfiniment.

Avant d'aller plus loin, je ferai observer que l'équation à laquelle nous venons d'arriver pour la détermination de $\frac{C - A}{A}$ est, au degré d'approximation de nos calculs, la même que celle dont Laplace déduit cette quantité. Ce grand géomètre trouve, en effet, par une méthode purement analytique (*Mécanique céleste*, II^e volume, livre V, page 421),

(8)
$$\frac{C - A}{A} = \frac{2}{3} \frac{g'}{m} \frac{\theta_1}{c' + \theta_1},$$

formule dans laquelle

$\frac{g'}{m}$ exprime le rapport que nous désignons par l,

Où θ_1 est notre ε

Et c' notre $\operatorname{tang}\varepsilon'$.

Les deux formules (7) et (8) peuvent être considérées comme identique puisque $\sin\varepsilon = \varepsilon$, à cause de la petitesse de l'angle, et que $\operatorname{tang}(\varepsilon + \varepsilon')$ e très-sensiblement égal à $\varepsilon + \operatorname{tang}\varepsilon'$. D'ailleurs notre facteur α^2, à très-pe près égal à 1, introduit dans le dénominateur de la formule (7) une certain latitude, et il serait facile de montrer que la formule (8) est comprise dan les limites que l'on obtiendrait pour l'autre, en donnant à α^2 ses valeurs ex trêmes. C'est pour cela que nous avons conservé jusqu'ici ce facteur, qu nous ferons désormais égal à 1.

Pour calculer numériquement la fraction $\frac{C-A}{A}$, remplaçons les diver facteurs du second membre par les valeurs que leur attribuent les observa tions les plus exactes :

$$\begin{aligned} l &= 0{,}004019, \\ \varepsilon &= 1^\circ\, 28'\, 45'', \\ \varepsilon' &= 5^\circ\ \ 8'\, 48'', \\ \varepsilon + \varepsilon' &= 6^\circ\, 37'\, 33''. \end{aligned}$$

Faisant

$$\alpha^2 = 1,$$

on a

$$\begin{aligned} \log\frac{C-A}{A} &= \log 2 + \log 0{,}004019 + \log\sin(1^\circ\, 28'\, 45'') \\ &\quad + C^t \log 3 + C^t \log\operatorname{tang}(6^\circ\, 37'\, 33'') - 20, \\ \log\frac{C-A}{A} &= \bar{4}{,}7748131, \\ \frac{C-A}{A} &= 0{,}000594. \end{aligned}$$

Remarquons que cette valeur est un peu moindre que celle que trouve Laplace (0,000599). Cela tient, d'une part, à la légère différence des formules (7) et (8), d'autre part, à ce que les nombres que l'auteur de la *Mécanique céleste* prend pour ε et ε' sont un peu différents de ceux que nous avons admis.

VII.

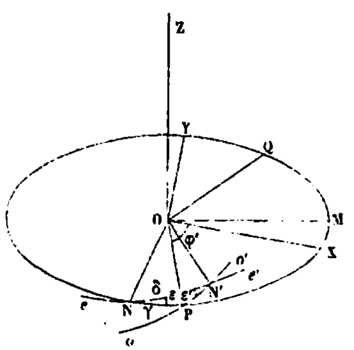
Dans ce qui précède, nous avons déterminé la grandeur qu'il fallait attribuer au rapport du plus grand au plus petit moment d'inertie du sphéroïde lunaire, pour que, la coïncidence ayant lieu, à un instant donné, entre les intersections de l'écliptique avec l'orbite et l'équateur du satellite, elle se maintînt d'elle-même pendant la suite des temps. Il reste à démontrer que cette coïncidence est nécessaire, et qu'elle subsisterait encore moyennant un changement de grandeur dans l'angle ε, soit qu'il existât une différence entre l'aplatissement réel et celui que le calcul nous a donné, soit qu'il vînt à se produire, par l'effet d'une cause quelconque, un écart entre les deux lignes dont nous étudions les mouvements.

Admettons, par exemple, que l'aplatissement soit différent de 000594, et voyons ce qui devra arriver. Examinons d'abord le cas où l'on aurait

$$\frac{C-A}{A} > 0{,}000594.$$

La valeur de $\psi - \psi_0$ donnée par l'équation (6) sera plus grande que celle qui correspond à l'ancienne valeur de $\frac{C-A}{A}$, c'est-à-dire que la rétrogradation de la ligne des équinoxes lunaires sera plus rapide que celle de la ligne des nœuds. La première de ces droites prendra donc l'avance sur la seconde, et, au bout d'un temps plus ou moins long, elles comprendront entre elles un certain angle mesuré sur l'écliptique par la différence de longitude de leurs extrémités.

Fig. 6.



Considérons le phénomène à cet instant.

Soit toujours NXM le plan de l'équateur lunaire, soit ON son intersection avec l'écliptique ONN', soit enfin ON' la ligne des nœuds qui, ayant rétrogradé moins rapidement que ON, fait avec elle un angle δ. Le plan de l'orbite passera par ON', en faisant avec le plan de l'écliptique un angle ε'; il rencontrera l'équateur lunaire suivant OP, et fera avec lui un angle η' un peu moindre que $\varepsilon + \varepsilon'$. Faisons $PN = \gamma$. Les deux lignes ON, ON' ayant un mouvement très-lent par rapport au mouvement angulaire de la Lune dans son orbite, nous pouvons considérer les angles δ, γ et η' comme sensiblement constants pendant une période de 28 jours. Cherchons quel sera, pendant cette période, l'effet de l'attraction terrestre sur le déplacement de l'axe lunaire.

Si l'on mène, dans le plan de l'équateur, OQ perpendiculaire sur OP, on pourra évaluer, comme dans le cas précédent, les rotations instantanées produites par les deux couples L et M autour de ces deux lignes. Rien ne sera changé à l'expression de ces rotations, excepté η en η', pourvu que l'on fasse partir les angles φ et φ' de la ligne OP. En effet, l'évaluation que nous avons faite de ces quantités est indépendante de la position de l'écliptique relativement aux deux autres plans. Continuons à désigner ces rotations par $d\omega$, $d\omega'$, et décomposons-les à leur tour chacune en deux autres ayant pour axes les lignes ON et OM. Si nous désignons par $d\omega_1$, $d\omega'_1$ les deux nouvelles rotations totales que nous obtiendrons ainsi, autour de ON et OM, nous aurons

$$d\omega_1 = d\omega\cos\gamma - d\omega'\sin\gamma,$$
$$d\omega'_1 = d\omega\sin\gamma + d\omega'\cos\gamma.$$

Nous avons vu que $d\omega'$ était composée de termes périodiques, et, par conséquent, si nous ne nous attachons qu'aux actions moyennes, nous pourrons négliger le dernier terme de chacune des équations précédentes, ce qui les réduira respectivement à

$$(9)\qquad \begin{cases} d\omega_1 = d\omega\cos\gamma, \\ d\omega'_1 = d\omega\sin\gamma. \end{cases}$$

Nous pouvons déjà tirer de ces équations des conséquences importantes, sans entrer encore dans leur discussion approfondie. En effet, la première nous montre que la rotation qui produit le mouvement rétrograde de ON diminue d'intensité dès que les deux lignes se séparent, et qu'elle finirait même par devenir nulle, si leur écart approchait de 90 degrés; d'où résulte, ainsi que Lagrange l'a remarqué, qu'il ne peut jamais atteindre cette limite. La seconde nous montre que l'angle ε croîtra tant que les lignes resteront séparées, et cet accroissement tendra de son côté à ralentir la rétrogradation de ON. On peut donc prévoir déjà que le théorème de Cassini aurait lieu, quel que fût l'aplatissement, pourvu qu'il fût assez petit pour qu'on eût le droit de négliger son carré, comme nous l'avons fait.

Mais ces conclusions deviendront plus précises et plus évidentes par l'intégration des équations (9). Commençons par la dernière

$$d\omega'_1 = d\omega \sin\gamma.$$

Nous avons déjà trouvé l'équation

$$d\varepsilon = \frac{d\omega'_1}{\rho}.$$

On en conclut, en ne tenant compte que de la valeur moyenne de $d\omega'_1$,

$$d\varepsilon = \frac{d\omega \sin\gamma}{\rho} = \frac{6\pi^2}{T^2\rho} \operatorname{tang}\eta' \sin\gamma \frac{C-A}{A} dt.$$

Intégrons, en désignant par $\bar{\varepsilon}$ la valeur de ε, au commencement de la période considérée,

$$\varepsilon - \bar{\varepsilon} = \frac{6\pi^2}{T^2\rho} \operatorname{tang}\eta' \sin\gamma \frac{C-A}{A} t.$$

Si l'on prend, comme ci-dessus, le mois lunaire sidéral pour unité de temps, on a

$$T = 1, \quad \rho = 2\pi,$$

et il vient

(10) $$\varepsilon - \bar{\varepsilon} = 3\pi \operatorname{tang}\eta' \sin\gamma \frac{C-A}{A} t.$$

Dans un mois lunaire, on aurait pour l'accroissement de l'angle

$$\varepsilon_1 - \bar{\varepsilon} = 3\pi \operatorname{tang}\eta' \sin\gamma \frac{C-A}{A}.$$

Cet accroissement sera très-lent, surtout lorsque l'angle γ sera petit. Dans ce dernier cas, $\varepsilon - \bar{\varepsilon}$ sera sensiblement proportionnel à cet angle.

Passons à l'équation

$$d\omega_1 = d\omega \cos\gamma$$

Nous avons trouvé

$$d\psi = \frac{d\omega_1}{\rho \sin\varepsilon}.$$

donc

$$d\psi = \frac{d\omega \cos\gamma}{\rho \sin\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{\sin\varepsilon} \cot\gamma.$$

Il en résulte, en intégrant et désignant par $\bar{\psi}$ la valeur de ψ, au commencement de la période que l'on considère,

$$\psi - \bar{\psi} = \cot\gamma \, \mathrm{l}. \frac{\tang\frac{1}{2}\varepsilon}{\tang\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}}.$$

Pour simplifier cette équation, posons

$$\mathrm{l}. \frac{\tang\frac{1}{2}\varepsilon}{\tang\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}} = x,$$

d'où

$$\frac{\tang\frac{1}{2}\varepsilon}{\tang\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}} = e^x.$$

L'angle ε croissant très-lentement, la fraction $\frac{\tang\frac{1}{2}\varepsilon}{\tang\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}}$ est très-voisine de l'unité, et son logarithme, ou x, est une quantité très-petite. On peut donc, en développant e^x en série et se bornant aux deux premiers termes, prendre

$$\frac{\tang\frac{1}{2}\varepsilon}{\tang\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}} = 1 + x,$$

d'où

$$x = \frac{\tang\frac{1}{2}\varepsilon - \tang\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}}{\tang\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon - \bar{\varepsilon})}{\sin\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}},$$

ou sensiblement

$$x = \frac{\varepsilon - \bar{\varepsilon}}{\sin \bar{\varepsilon}}.$$

On en déduira

$$(11) \qquad \psi - \bar{\psi} = \cot\gamma \frac{\varepsilon - \bar{\varepsilon}}{\sin \bar{\varepsilon}} = \frac{3\pi \operatorname{tang} \eta' \cos\gamma}{\sin \bar{\varepsilon}} \cdot \frac{C - A}{A} t.$$

Si l'on compare cette valeur à celle que l'on a trouvée plus haut, dans le cas de la coïncidence des nœuds,

$$\psi - \psi_0 = \frac{3\pi \operatorname{tang} \eta}{\sin \varepsilon_0} \frac{C - A}{A} t,$$

on en conclut

$$\psi - \bar{\psi} = \frac{\operatorname{tang} \eta'}{\operatorname{tang} \eta} \cos\gamma \frac{\sin \varepsilon_0}{\sin \bar{\varepsilon}} (\psi - \psi_0).$$

Le facteur $\frac{\operatorname{tang} \eta'}{\operatorname{tang} \eta}$ reste toujours très-voisin de l'unité. Le facteur $\frac{\sin \varepsilon_0}{\sin \bar{\varepsilon}}$ est plus petit que 1, et varie beaucoup plus rapidement que le précédent, avec $\bar{\varepsilon}$; enfin $\cos\gamma$ est aussi moindre que l'unité ; on a donc

$$\psi - \bar{\psi} < \psi - \psi_0,$$

ce que nous avions reconnu à l'inspection de l'équation différentielle.

En outre, le facteur $\frac{\sin \varepsilon_0}{\sin \bar{\varepsilon}}$ décroissant tant que la ligne des équinoxes précède, dans le mouvement rétrograde, la ligne des nœuds de l'orbite lunaire, on voit que $\psi - \bar{\psi}$ décroît, jusqu'à ce que la seconde ligne ait rejoint la première.

Si l'on divise membre à membre les équations (10) et (11), on obtient la relation

$$\varepsilon - \bar{\varepsilon} = \operatorname{tang}\gamma \sin \bar{\varepsilon} (\psi - \bar{\psi}),$$

ou sensiblement, quand γ est petit,

$$\varepsilon - \bar{\varepsilon} = \gamma \bar{\varepsilon} (\psi - \bar{\psi});$$

5

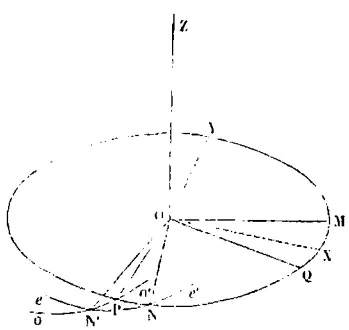
d'où il résulte que l'angle ε varie avec beaucoup plus de lenteur que l'angle ψ.

VIII.

Avant de tirer de ces équations toutes les conclusions auxquelles elles peuvent conduire, voyons comment elles se modifieraient, si la fraction $\frac{C-A}{A}$, au lieu d'être plus grande que 0,000594, était plus petite. Alors, l'effet de l'attraction terrestre sur le ménisque lunaire étant moindre qu'il ne le faudrait pour que l'intersection ON suivît d'elle-même la ligne des nœuds, celle-ci prendra l'avance dans le mouvement rétrograde, et les deux lignes s'écarteront, tant que leur écart même n'aura pas modifié sensiblement les conditions de l'action terrestre. Supposons, comme tout à l'heure, qu'il ait atteint une valeur déterminée en longitude, et désignons cette valeur par δ'.

Soient NX l'équateur, ee' l'écliptique, ON l'intersection de ces deux plans, ON' la ligne des nœuds de l'orbite lunaire oo', OP l'intersection de cette orbite avec l'équateur. Faisons PN $= \gamma'$.

Fig. 7.



Si $d\omega$, $d\omega'$ expriment encore les rotations autour de OP et OQ, celles qui ont pour axes ON et OM seront données par les équations

$$d\omega_{,} = d\omega\cos\gamma' + d\omega'\sin\gamma',$$
$$d\omega'_{1} = -d\omega\sin\gamma' + d\omega'\cos\gamma',$$

et, en réduisant ces rotations à leurs parties moyennes,

$$d\omega_{,} = d\omega\cos\gamma',$$
$$d\omega'_{1} = -d\omega\sin\gamma',$$

relations qu'on aurait pu déduire des équations (9), en y changeant γ en $-\gamma'$.

Il résulte de ce changement de signe que l'angle ε diminue au lieu d'augmenter, ce qui nous fait prévoir que le mouvement rétrograde de ON va s'accélérer. Nous pouvons nous servir des résultats trouvés dans le cas précédent, en changeant partout γ en $-\gamma'$; il vient ainsi

$$\bar{\varepsilon} - \varepsilon = 3\pi \operatorname{tang}\eta' \sin\gamma' \frac{C - A}{A} t,$$

$$\psi - \bar{\psi} = \frac{3\pi \operatorname{tang}\eta' \cos\gamma'}{\sin\bar{\varepsilon}} \cdot \frac{C - A}{A} t,$$

et

$$\psi - \bar{\psi} = \frac{\operatorname{tang}\eta'}{\operatorname{tang}\eta} \cos\gamma' \frac{\sin\varepsilon_0}{\sin\bar{\varepsilon}} (\psi - \psi_0).$$

La première de ces trois équations détermine la valeur de la diminution de ε dans un temps donné.

Pour interpréter la dernière, remarquons que le facteur $\frac{\sin\varepsilon_0}{\sin\bar{\varepsilon}}$ est plus grand que 1, et croît avec la diminution de l'angle ε, c'est-à-dire à mesure que l'écart entre nos deux lignes augmente. De leur côté, les facteurs $\frac{\operatorname{tang}\eta'}{\operatorname{tang}\eta}$, $\cos\gamma'$, quoique plus petits que l'unité, en restent très-voisins, tant que l'angle γ' n'est pas considérable. Par suite, le mouvement rétrograde de l'intersection ON qui peut commencer par se ralentir lorsqu'elle reste en arrière de la ligne des nœuds, s'accélère bientôt, et l'écart finit par diminuer et disparaître.

Observons ici toutefois que si la quantité $\frac{C - A}{A}$ était beaucoup plus petite que 0,000594, les conséquences précédentes ne seraient plus rigoureuses, parce que l'angle γ' pourrait croître assez vite pour atteindre 180 degrés, avant que l'angle ε dont la variation contient $\frac{C - A}{A}$ eût diminué d'une manière sensible. Alors, le signe de $\bar{\varepsilon} - \varepsilon$ changerait, et l'angle de l'équateur avec l'écliptique recommencerait à croître.

Il est facile actuellement de saisir le phénomène dans son ensemble. Soit ε_1 la valeur de l'angle ε, à un instant où les intersections coïncident, et supposons, pour fixer les idées, que l'on ait

$$\frac{C - A}{A} > \frac{2}{3} \frac{l \sin\varepsilon_1}{\operatorname{tang}(\varepsilon_1 + \varepsilon')}.$$

Alors l'intersection ON de l'équateur lunaire avec l'écliptique rétrograde plus vite que la ligne des nœuds, et ε commence à croître jusqu'à la valeur ε_2 pour laquelle les deux lignes prennent le même mouvement angulaire; mais l'accroissement ne s'arrête pas à cette limite : il continue tant que l'intersection reste à droite de la ligne des nœuds, pour un spectateur placé suivant OZ. Le mouvement de ON devient alors plus lent que celui de ON' qui la rejoint et la dépasse. C'est à l'instant de la coïncidence que ε atteint sa valeur maximum ε_3; il commence ensuite à diminuer, repasse par la valeur ε_2, décroît encore jusqu'à son minimum correspondant à une nouvelle coïncidence des intersections, et ainsi de suite.

En d'autres termes, si l'on se borne à considérer le mouvement relatif des intersections, on peut regarder la droite ON comme oscillant autour de la ligne des nœuds ON', pendant que l'angle de l'équateur et de l'écliptique oscille autour de sa grandeur moyenne. Les maxima et minima de cet angle correspondent aux coïncidences des intersections.

IX.

Conclusions.

Il ne nous reste plus qu'à résumer les conclusions auxquelles nous a conduit notre méthode :

1°. Si l'on suppose, à l'origine du temps, le rapport $\frac{C-A}{A}$ égal à 0,000594, l'angle ε de l'équateur avec l'écliptique égal à $1^\circ 28' 45''$, et l'intersection de ces deux plans coïncidant avec la ligne des nœuds de l'orbite lunaire, les deux intersections ont pris le même mouvement moyen, et continué à coïncider avec de petites variations, à courte période, de l'angle ε.

2°. Si la fraction $\frac{C-A}{A}$ est plus grande ou plus petite que 0,000594, sans être pourtant extrêmement petite, et que l'on veuille admettre les mêmes conditions initiales pour la grandeur de l'angle ε et la coïncidence des intersections, cette coïncidence a dû cesser immédiatement, en même temps que l'angle ε a dû croître ou décroître avec le temps. Cet angle a fini par atteindre une grandeur limite, à partir de laquelle la coïncidence s'est rétablie et a dû se maintenir, dans la suite des temps, avec des oscillations plus ou moins grandes.

3°. Quels que soient la valeur de $\frac{C-A}{A}$, la grandeur initiale de l'angle ε

et l'écart initial des intersections, pourvu que ces quantités n'aient pas une très-grande différence avec celles que nous admettons dans le § I, la coïncidence des intersections a dû s'établir comme conséquence forcée de l'égalité des moyens mouvements de révolution et de rotation de la Lune; la valeur limite à laquelle s'est arrêté l'angle ε dépend de celle de $\frac{C-A}{A}$.

4°. Les observations ont appris que l'angle ε a pour valeur moyenne $1°28'45''$, avec des variations insensibles, et que le nœud descendant de l'équateur lunaire ne s'écarte jamais beaucoup du nœud ascendant de l'orbite; il en résulte qu'il faut admettre pour la valeur très-approchée de $\frac{C-A}{A}$ la fraction 0,000594 correspondant à la valeur $\varepsilon = 1°28'45''$.

5°. Les conséquences que nous venons d'énoncer ne dépendent que du rapport du plus grand au plus petit moment d'inertie, quelles que soient, du reste, la figure et la constitution physique de la Lune.

6°. Si, par suite d'un soulèvement de montagnes à la surface de notre satellite, le rapport $\frac{C-A}{A}$ venait à subir un changement qui ne fût pas très-considérable, le théorème de Cassini subsisterait, mais l'angle de l'équateur lunaire avec l'écliptique augmenterait ou diminuerait, presque en raison inverse de $\frac{C-A}{A}$.

7°. Les mouvements des satellites de Jupiter sont analogues à ceux de la Lune. Comme elle, ils tournent sur leur axe, dans le même temps qu'autour de la planète; en outre, du moins pour les trois derniers, la ligne des nœuds de l'orbite est douée d'un mouvement rétrograde sur l'orbite de Jupiter. Il est donc permis de prévoir que, si les instruments d'optique acquièrent une perfection suffisante, on pourra constater que le plan de leur équateur, celui de l'orbite de la planète et celui de l'orbite du satellite ont constamment une intersection commune.

Vu et approuvé,
Le 27 mai 1857,
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer,
Le 27 mai 1857,
LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
CAYX.

THÈSE DE MÉCANIQUE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

1°. *Principe des forces vives et son application au mouvement d'une machine.*

2°. *Gravitation universelle déduite des lois de Képler.*

Vu et approuvé,
Le 27 mai 1857.
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer,
Le 27 mai 1857,
LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
CAYX.

Paris. — Imprimerie de MALLET-BACHELIER, rue du Jardinet, 12