N° D'ORDRE
214.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

Par M. Ch. MÉRAY.
Ancien Élève de l'École Normale.

1re THÈSE. — Sur les Propriétés générales des racines d'équations synectiques.

2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 29 juillet 1858 devant la Commission d'Examen.

MM. DUHAMEL, *Président.*
DELAUNAY, } *Examinateurs.*
PUISEUX, }

PARIS,
MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Augustins, 55.

1858.

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

DOYEN........................ MILNE EDWARDS, Professeur. Zoologie, Anatomie, Physiologie.

PROFESSEURS HONORAIRES. BIOT.
PONCELET.

PROFESSEURS.

DUMAS	Chimie.
DESPRETZ	Physique.
DELAFOSSE	Minéralogie.
BALARD	Chimie.
LEFÉBURE DE FOURCY	Calcul différentiel et intégral.
CHASLES	Géométrie supérieure.
LE VERRIER	Astronomie.
DUHAMEL	Algèbre supérieure.
GEOFFROY-SAINT-HILAIRE	Anatomie, Physiologie comparée, Zoologie.
LAMÉ	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
DELAUNAY	Mécanique physique.
PAYER	Botanique.
C. BERNARD	Physiologie générale.
P. DESAINS	Physique.
LIOUVILLE	Mécanique
HÉBERT	Géologie.
PUISEUX	Astronomie et Mécan. céleste.

AGRÉGÉS.

BERTRAND	Sciences mathématiques.
J. VIEILLE	Sciences mathématiques.
MASSON	Sciences physiques.
PELIGOT	Sciences physiques.
DUCHARTRE	Sciences naturelles.

SECRÉTAIRE .... E. PREZ-REYNIER.

A

MONSIEUR BRIOT,

MON MAITRE.

ET

A MES CAMARADES DE PROMOTION

THÈSE D'ANALYSE MATHÉMATIQUE.

SUR LES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES RACINES D'ÉQUATIONS SYNECTIQUES.

Je me propose dans ce travail d'établir d'une manière simple quelques propositions fondamentales sur les racines des équations synectiques qui renferment, outre des paramètres variables, une ou plusieurs variables principales. Plusieurs de ces propositions sont dues à M. Cauchy; ce sont précisément celles que contiennent deux Mémoires de ce grand géomètre : l'un présenté à l'Académie de Turin, le 27 novembre 1831; l'autre publié en 1841, dans le tome II des *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*.

J'établis dans le premier paragraphe les théorèmes de M. Cauchy et les conséquences qu'on peut en tirer, ainsi qu'une proposition extraite d'une Note que j'ai présentée à l'Académie des Sciences en 1855, et qui détermine la nature de l'équation différentielle propre à définir une fonction synectique à une ou deux périodes. Le second paragraphe contient l'extension des mêmes considérations aux équations simultanées. Je citerai, parmi les résultats auxquels je suis ainsi parvenu, deux propositions importantes : la première consiste en ce qu'un semblable système d'équations offre nécessairement au moins un système de solutions communes; la seconde donne le moyen de trouver le nombre de ceux qui satisfont à certaines conditions, et comprend comme cas particuliers, non-seulement le théorème de Bezout, sur le degré de l'équation finale d'un système d'équations algébriques simultanées entre deux inconnues, mais encore un autre plus général, à l'aide duquel on obtient avec précision et dans tous les cas la valeur de ce même degré.

§ I.

Des équations synectiques qui renferment une seule variable principale et des paramètres variables.

1. Lemme. — La fonction $F(u)$ ayant une valeur finie pour $u = u_0$ en restant synectique pour toutes les valeurs de u qui donnent à la différence $u - u_0$ un module inférieur à une limite donnée, et la variable u, ainsi que la fonction $F(u)$, étant considérées comme des affixes de points mobiles, on peut trouver une quantité assez petite ρ, pour que le point u venant à décrire autour du point u_0, pris pour centre, un contour circulaire (c) d'un rayon quelconque r inférieur à ρ, et de telle sorte que l'argument p de $u - u_0$ croisse de 2π, l'argument P de la différence $F(u) - F(u_0)$ aille constamment en croissant de P à $P + \mu . 2\pi$; μ étant l'ordre de la première des dérivées $F'(u)$, $F''(u)$,..., $F^{(i)}(u)$, etc., qui ne s'évanouit pas pour $u = u_0$.

Démonstration. — D'après les hypothèses admises, on peut, à l'aide de la formule de Maclaurin, présenter la quantité $F(u) - F(u_0)$ sous la forme

$$A_\mu (u - u_0)^\mu + A_{\mu+1}(u - u_0)^{\mu+1} - \ldots$$

et par suite l'angle P sous la forme

$$\mu p + \arg.(A_\mu + \varepsilon),$$

où ε désigne une quantité dont le module s'évanouit en même temps que r, quel que soit P ; la variation ΔP qu'éprouvera l'angle P par suite d'une variation Δp attribuée à p, sera égale à

$$\mu . \Delta p + \Delta \arg.(A^\mu + \varepsilon)$$

et sera toujours de même signe que Δp, si ρ ou par suite ε est suffisamment petit; lorsque le point u décrit une fois le contour (c) dans un sens convenable, p varie de 2π et P varie nécessairement d'un nombre entier de fois 2π, puisque $F(u)$ est monodrome ; donc, dans cette hypothèse, ΔP qui est égale à $\mu\Delta p$, plus une quantité infiniment petite, se réduit rigoureusement à $\mu\Delta p$, c'est-à-dire à $\mu.2\pi$.

On conclut de cette proposition que le contour (C) décrit par $F(u)$, lorsque u décrit une fois le contour circulaire (c) de rayon r inférieur à la limite ρ, enveloppe μ fois le point $F(u_0)$, et que le même contour est coupé en μ points seulement par une demi-droite ayant pour origine le point $F(u_0)$.

Il est important de remarquer que si la limite ρ est suffisamment petite, toutes les dimensions du contour (C) varient dans le même sens que celui du contour (c); on pourra alors nommer *contours élémentaires* le contour (c) et ceux qui ont des rayons plus petits.

Si $F(u_0)$ est infinie et que $F(u)$ soit synectique dans le voisinage de u_0, on reconnaîtra, par des considérations analogues, que l'argument de $F(u)$ décroît constamment de P à $P-\mu.2\pi$, lorsque le module de $u-u_0$ restant constant et inférieur à une certaine limite suffisamment petite, son argument croît de 2π; μ désigne alors le nombre entier tel que la fonction

$$(u-u_0)^{\mu}F(u)$$

conserve une valeur finie différente de zéro, lorsque u tend vers u_0.

2. Théorème. — Si l'équation

$$\varphi(u, z_0) = 0,$$

étant satisfaite pour $u = u_0$, la fonction $\varphi(u, z)$ est synectique pour toutes les valeurs de u et de z qui font acquérir aux différences $u-u_0$, $z-z_0$, des modules inférieurs à des limites données, et si μ désigne l'ordre de la première des dérivées,

$$D_u\varphi(u, z_0), \quad D_u^2\varphi(u, z_0), \ldots, \quad D_u^i\varphi(u, z_0), \text{ etc.},$$

qui ne s'évanouit pas pour $u = u_0$, on pourra trouver une quantité λ différente de zéro, telle que, $z-z_0$ ayant un module inférieur à λ, l'équation

$$\varphi(u, z) = 0, \tag{1}$$

résolue par rapport à u, fournisse précisément μ racines très-voisines de u_0, et dont les différences avec la même quantité aient des modules qui varient dans le même sens et s'évanouissent en même temps que celui de $z-z_0$.

Démonstration. — Ce théorème est évident dans le cas où l'équation (1) prend la forme

$$F(u) = z,$$

$F(u)$ ne dépendant pas de z; car u venant à décrire un contour élémentaire (c) autour de u_0, $F(u)$ décrira un contour (C) enveloppant μ fois le point $F(u_0)$ ou z_0, et par suite μ fois aussi un point z suffisamment rapproché de z_0: si maintenant le rayon du contour (c) diminue jusqu'à zéro, le contour (C) se resserre indéfiniment en franchissant μ fois le point z, ce qui montre bien que μ valeurs de u rendent $F(u)$ égale à z et que le nombre de ces racines ne peut différer de μ.

Lorsque l'équation (1) conserve sa généralité, la démonstration du théorème n'est pas plus difficile. Concevons, en effet, que u décrive autour du point u_0 un contour élémentaire (c), la fonction $\varphi(u, z)$, en vertu du lemme précédent, décrit un contour (C) qui enveloppe μ fois la valeur qu'elle prend pour $u = u_0$, c'est-à-dire l'origine des affixes, et ce contour sera déformé légèrement, mais jouira encore des propriétés qui lui ont été reconnues dans le n° **1**, si z_0 se trouve remplacée par une valeur suffisamment voisine z, cela résulte de ce que la fonction $\varphi(u, z)$ est supposée continue; lorsque le rayon de contour (c) décroît jusqu'à zéro, le nouveau contour (C′) décrit par $\varphi(u, z)$ se resserre indéfiniment sans cesser de contenir le point $\varphi(u_0, z)$, et franchit par conséquent μ fois l'origine des affixes, ce qui donne encore μ racines : il est clair que chacune de ces racines diffère aussi peu qu'on veut de u_0, car soit $u_0 + \delta$ l'une d'elles, la quantité

$$\varphi(u_0, z)$$

étant très-voisine de zéro si z diffère peu de z_0, et la quantité

$$\varphi(u_0 + \delta, z)$$

étant nulle et par conséquent différant très-peu de $\varphi(u_0, z)$, il faut que δ ait un module très-petit, et même d'autant moindre que celui de $z - z_0$ sera le plus petit.

L'équation (1) ayant μ racines infiniment voisines de u_0 lorsque z diffère peu de z_0, on pourra dire que pour $z = z_0$ elle acquiert μ racines égales à u_0, qui sera alors comptée pour μ racines simples.

3. THÉORÈME. — L'équation

$$(2) \qquad F(u) = 0$$

offre au moins une racine soit finie, soit infinie, si son premier membre ne cesse jamais d'être une fonction synectique de la variable u.

Démonstration. — Nommons u_0 une valeur de u pour laquelle $F(u)$ ait une valeur finie z_0; l'équation

$$F(u) - z = 0$$

offre au moins une racine égale à u_0 quand on fait $z = z_0$, et son premier membre vérifie les conditions sous lesquelles subsiste le théorème du numéro précédent; donc cette même équation en admet encore au moins une, lorsque z reçoit une valeur peu différente de z_0, et si elle cessait d'avoir des racines pour une valeur nulle de z, il existerait une courbe (L) séparant les valeurs de z qui donnent des racines à cette équation de celles qui ne lui en donnent pas, ce qui serait en contradiction avec le théorème précédent; car, en vertu de ce théorème, cette équation ayant au moins une racine en un point de la courbe (L), en a également une au moins pour une valeur de z peu différente et située d'un côté ou de l'autre de cette courbe; la courbe (L) n'existant pas, il faut en conclure que l'équation

$$F(u) - z = 0$$

admet des racines pour toutes les valeurs de z et en particulier pour $z = 0$.

Si en quelques points de la courbe (L) les racines de l'équation considérée devenaient infinies, on ferait le même raisonnement sur l'équation

$$F\left(\frac{1}{u}\right) - z = 0,$$

privée alors de racines infinies, ce qui montrerait encore que cette courbe ne peut exister.

On conclut de ce théorème qu'une équation algébrique et entière offre au moins une racine.

4. THÉORÈME. — Le nombre des racines de l'équation (2) du précédent numéro, renfermées dans l'intérieur d'un contour fermé (A), est égal au quotient que l'on obtient, en divisant par 2π la quantité I dont varie l'argument de F (u), lorsque u décrit une fois le contour, pourvu toutefois que cette fonction ne devienne pas infinie dans l'intérieur du contour (A) ou sur son périmètre, et que sur ce même périmètre ne se trouve aucune racine de l'équation proposée.

Démonstration. — Le contour (A) venant à se déformer d'une manière quelconque, sans cependant franchir aucune des racines de l'équation (2) qui peuvent y être contenues, le contour (K), décrit par F (u), se déforme également, mais sans franchir l'origine des affixes, et par suite la quantité I ne varie pas; nommons alors :

$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{n-1}, u_n$, les racines de l'équation (2) renfermées dans l'intérieur du contour (A),

$(c_1), (c_2), (c_3), \ldots, (c_{n-1}), (c_n)$, les contours élémentaires qui enveloppent ces racines,

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$, des points pris à volonté sur ces contours élémentaires,

(A_1) le contour fermé composé : du contour (c_1), de la droite α_1, α_2, du contour (c_2), de la droite α_2, α_3, du contour (c_3), etc...., du contour (c_{n-1}), de la droite $\alpha_{n-1}\alpha_n$, du contour (c_n), et des droites $\alpha_n\,\alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_3\alpha_2, \alpha_2\alpha_1$.

Le contour (A) pouvant être amené à coïncider avec le contour (A_1), sans qu'il soit besoin de lui faire franchir aucune racine, il nous suffira de calculer la valeur de I correspondant au contour (A_1) pour démontrer le théorème; or cela est très-facile, car les droites $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3$, etc., étant parcourues successivement dans deux sens opposés, il en résulte pour l'argument de F (u) des variations dont la somme algébrique est nulle, et l'angle I se composera seulement des variations que subit le même argument, lorsque u décrit successivement les contours élémentaires (c_1), (c_2),..., (c_n); il est évident, d'après le lemme du n° 1, que I est égale à autant de fois 2π qu'il y a d'unités dans la somme des degrés de multiplicité des racines $u_1, u, \ldots, u_n$.

On ne pourrait plus faire ce raisonnement, si le contour (A) contenait ce que l'on nomme *des infinis* de F (u), c'est-à-dire des racines de l'équation

$$\frac{1}{F(u)} = 0,$$

car le contour (K) cesserait d'être fermé, lorsque le contour (A), en se déformant, viendrait à franchir une racine de cette équation; mais il est aisé de reconnaître, par un raisonnement analogue, que ce théorème subsisterait encore, en ajoutant à I le produit de 2π par le nombre des racines de l'équation

$$\frac{1}{F(u)} = 0,$$

renfermées dans l'intérieur du contour (A).

Nommons, en effet,

u', u'',..., de semblables racines,

(c'), (c''),..., les contours élémentaires qui les enveloppent,

(A'_1) le contour fermé composé avec les contours élémentaires (c_1), (c_2),..., (c'), (c''),..., comme l'était tout à l'heure le contour (A_1) avec les contours (c_1), (c_2),...;

Le contour (A) pouvant être amené à coïncider avec le contour (A'_1) sans franchir aucun des points u_1, u_2,..., u', u'',..., à ces deux contours correspondront encore des valeurs égales de l'angle I; mais l'angle I calculé pour le contour (A'_1) se réduit à 2π multiplié par la somme des degrés de multiplicité des racines u_1, u_2,..., diminuée de celle des degrés de multiplicité des infinis u', u'',...; donc pour avoir le nombre des racines de l'équation (2) renfermées dans l'intérieur du contour (A), il faudra ajouter à $\frac{I}{2\pi}$ le nombre des infinis de $F(u)$ renfermés dans le même contour.

Cette proposition subsiste évidemment encore dans le cas où la fonction $F(u)$ n'étant plus synectique pour toutes les valeurs de u, le serait cependant pour celles de ces valeurs qui sont renfermées dans le contour (A).

Ce beau théorème, qui contient toutes les propositions connues sur les limites des racines des équations algébriques, et en particulier le théorème de M. Sturm, est dû, ainsi que le précédent, à M. Cauchy; il a été donné pour la première fois dans le Mémoire du 27 novembre 1831, qui renferme, en outre, divers procédés pour calculer dans certains cas particuliers la quantité I.

Pour donner une idée de son importance, proposons-nous de calculer le nombre des racines de l'équation entière

$$a + bu + \ldots + hu^m = 0.$$

2

Concevons pour cela que u décrive une fois un contour circulaire d'un très-grand rayon ayant pour centre l'origine; ce contour contient nécessairement toutes les racines de l'équation proposée, si son rayon est supérieur à une certaine limite; le premier membre de l'équation pouvant être présenté sous la forme

$$u^m \left[\frac{a}{u^m} + \frac{b}{u^{m-1}} + \ldots + h \right],$$

son argument P sera égal à

$$mp + \arg.(h + \varepsilon),$$

en désignant par p l'argument de u, et par ε une quantité dont le module s'évanouit avec celui de $\frac{1}{u}$: ΔP ou I sera égal à

$$m.2\pi + \Delta.\arg.(h + \varepsilon),$$

qui se réduit rigoureusement à $m.2\pi$, puisque le premier membre de l'équation proposée est une fonction monodrome. Donc $\frac{I}{2\pi}$ se réduisant à m, et le premier membre de l'équation proposée conservant une valeur finie pour toutes les valeurs finies de u, on en conclut qu'une équation entière offre autant de racines qu'il y a d'unités dans l'exposant de la plus haute puissance de l'inconne qui y entre.

5. Lorsqu'une fonction u de z est assujettie a être racine d'une équation donnée

$$\varphi(u, z) = 0, \tag{1}$$

elle est loin d'être complétement déterminée, car pour une valeur déterminée Z de z, cette équation donne en général plusieurs valeurs de u, parmi lesquelles il n'y a pas de raisons pour choisir l'une plutôt que l'autre; mais il est aisé de reconnaître que cette indétermination cesse dès que le premier membre de l'équation (1) étant une fonction toujours synectique des variables qu'il renferme, on admet que u varie d'une manière continue avec z, et que l'on connaît non-seulement la valeur u_0 à laquelle se réduit u pour $z = z_0$, mais encore la courbe (R) qui suit la variable z, pour passer de la valeur z_0 à la valeur Z; pourvu toutefois qu'en aucun point de la courbe (R) l'équation (1) n'offre de racines égales. Nommons en effet, δ la la limite différente de zéro que ne dépasse pas sur la courbe (R) le module de la différence entre deux racines quelconques de l'équation (1), résolue pour une même valeur de z, λ une quantité telle, que, z venant à varier sur la courbe (R) d'une quantité ayant un module inférieur à λ, chacune des racines de l'équation (1) croisse d'une quantité ayant un module inférieur à $\frac{1}{2}\delta$, et variant dans le même sens que le module de l'accroissement de z, et partageons enfin la courbe (R) en parties plus petites que λ, par des points de divisions $z_0, z_1, z_2, \ldots, Z$; la fonction u est complétement déterminée dans l'élément $z_0 z_1$ en vertu des hypothèses qui ont été faites, car dans l'étendue de cet élément l'équation (1) n'offre qu'une racine dont la différence avec u_0 ait un module inférieur à $\frac{1}{2}\delta$. Nommons u_1 la valeur de u ainsi calculée au point z_1, u est de la même manière complétement déterminée dans l'élément $z_1 z_2$, par la condition de se réduire à u_1 pour $z = z_1$, puis dans l'élément suivant, et ainsi de suite jusqu'en Z, où elle acquiert la valeur U. Pour s'assurer qu'un autre mode de subdivision de la courbe (R) en parties inférieures à λ, par d'autres points $z_0, z'_1, z'_2, z'_3, \ldots, Z$, conduit à la même valeur U au point Z, il suffit de faire correspondre les points de la première division avec ceux de la seconde, de manière que la distance qui sépare deux points correspondants mesurée sur la courbe (R) soit inférieure à λ, ce qui est évidemment possible, et de remarquer que le module de la différence entre les valeurs u_n, u'_n, obtenues pour la fonction u aux points correspondants z_n, z_n', en opérant comme on l'a indiqué, est certainement inférieur à δ; il en sera encore de même au point Z, et il faudra bien que les deux valeurs de U, qui correspondent aux deux modes de subdivision, coïncident, car en ce point l'équation (1) n'a pas de racines distinctes dont la différence ait un module inférieur à δ.

On voit donc clairement ce que l'on peut nommer valeur qu'acquiert la racine u, qui se réduit à u_0 pour $z = z_0$, lorsque z vient à décrire du point z_0 au point Z le courbe (R), lors même encore que l'équation (1) aurait des racines égales au point Z; car on terminerait la courbe (R) en un point Z_1, extrêmement voisin de Z, ce qui permettrait de trouver, comme précédemment, la valeur U_1 de u au point Z_1, et on choisirait, parmi les racines qu'offre l'équation (1) au point Z, celle qui diffère le moins de U_1.

Les raisonnements qu'on vient de faire ne montrent pas du tout que la valeur de la fonction u au point Z soit indépendante de la forme de la courbe (R) qui unit les deux points z_0, Z, et généralement cette indépendance n'existe pas; mais on peut aisément démontrer que U est indépendante de la forme de la courbe (R), lorsque cette courbe, en se déformant, reste toujours renfermée dans l'intérieur d'un contour fermé (A), ne contenant aucune valeur de z pour laquelle la fonction u, qui se réduit à u_0 pour $z = z_0$, devienne égale à une autre racine de l'équation (1). On fera voir en effet, comme précédemment, que le contour (A) étant partagé en éléments aréolaires terminés par des contours formés de périmètres inférieurs à λ, la fonction u est complétement déterminée dans l'intérieur de chacun de ces contours, quel que soit l'ordre dans lequel on passe de l'un à l'autre.

Ces diverses considérations permettent d'énoncer le théorème suivant :

Si le premier membre de l'équation

$$\varphi(u, z) = 0$$

ne cesse jamais d'être une fonction synectique des variables qu'il renferme, les valeurs de u qu'on en peut tirer peuvent être considérées comme des fonctions continues et monogènes de z; elles sont même monodromes, lorsque z ne quitte pas l'intérieur d'un contour (A) *ne contenant aucune valeur de z qui les rende multiples.*

Ce théorème est très-important; il permet, en particulier, de reconnaître avec la plus grande précision dans quels cas on peut appliquer la formule de Lagrange, et plus généralement, développer en série convergente, ordonnée suivant les puissances croissantes de z, une racine continue de l'équation (1).

Le théorème précédent n'existe plus, dès que les conditions sous lesquelles il a été énoncé cessent d'être remplies. Il pourra arriver, par exemple, que des courbes terminées aux mêmes points fassent acquérir des valeurs différentes à une racine qui a une valeur donnée à la première extrémité, si entre ces deux courbes il existe des points auxquels cette racine devient égale à quelque autre, ou bien encore que z, venant à décrire un contour fermé qui renferme un ou plusieurs de ces points, u ne reprenne pas la même valeur. L'étude des circonstances dans lesquelles les racines d'une équation synectique renfermant un paramètre variable, cessent d'être monodromes, paraît avoir une importance extrême en analyse; elle a été commencée par M. Puiseux, qui a publié sur cette matière un fort beau Mémoire, dans le tome XV du *Journal* de M. Liouville. Les résultats obtenus par ce géomètre ont été appliqués de suite à l'analyse algébrique par M. Hermite, comme on peut le voir dans les derniers volumes des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, et l'ont conduit à des démonstrations très-simples de quelques théorèmes d'Abel et de Galois.

Lorsque, dans l'intérieur du contour (A), l'équation

$$\varphi(u, z) = 0$$

admet des racines infinies, il est nécessaire et suffisant, pour que le théorème précédent subsiste, que ces valeurs de z ne fassent pas acquérir de racines multiples à l'équation

$$\varphi\left(\frac{1}{u}, z\right) = 0.$$

Tous les théorèmes démontrés sur l'équation

$$\varphi(u, z) = 0$$

s'étendent encore au cas où cette équation contient, outre le paramètre z, plusieurs autres t, r, s, etc., si ces paramètres s'y trouvent dans les mêmes conditions que z.

6. Parmi les équations synectiques renfermant un paramètre variable les plus remarquables sont celles qui se présentent sous la forme

$$\text{(1)} \qquad F(u) - z = 0,$$

où $F(u)$ est une fonction de u seulement et synectique dans toute l'étendue du plan des affixes. Une semblabe équation ayant au moins une racine, quelle que soit la valeur attribuée à z, il faut en conclure que, u venant à varier de toutes les manières possibles, la fonction $F(u)$ passe aussi par toutes les valeurs possibles; et même, lorsque $F(u)$ est une fonction périodique, on peut affirmer qu'elle peut prendre une valeur quelconque pour une valeur de u choisie convenablement dans l'intérieur d'une période déterminée. Il y a plus : l'équation (1), étant résolue par rapport à u pour une valeur quelconque de z, offre dans l'intérieur de chaque période plusieurs racines qui varient avec z, mais dont le nombre est indépendant de cette variable ; car, lorsqu'une racine passe d'une période dans une autre, elle est évidemment remplacée par une autre racine, qui se trouvait primitivement dans une période voisine, et lorsqu'un certain nombre de ces racines cessent d'être distinctes, elles le deviennent de nouveau, et en même nombre, d'après le théorème du n° **2**, pour peu que z vienne à varier.

Il en résulte que pour chaque fonction périodique il existe un nombre entier, qu'on peut nommer l'*ordre* de cette fonction et qui indique combien de fois elle passe par la même valeur dans l'intérieur de chaque période. Ce nombre est celui des racines de l'équation

$$F(u) = 0,$$

ou encore de l'équation

$$\frac{1}{F(u)} = 0,$$

renfermées dans l'intérieur de chaque période. Les racines de la première équation étant ce que l'on nomme les *zéros* de $F(u)$, et celle de la seconde les *infinis* de la même fonction, on peut énoncer le théorème suivant :

Dans l'intérieur de chaque période, une fonction synectique et périodique offre des zéros et des infinis en même nombre, et ce nombre est égal à l'ordre de la fonction.

Les fonctions e^u, tang u, par exemple, sont du premier ordre, tandis que les fonctions $\sin u$, $\cos u$, $\lambda(u)$ sont du second ordre.

7. Ce théorème, joint aux précédents, permet, comme j'en ai fait la remarque dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, d'obtenir avec la plus grande facilité la forme de l'équation qui lie deux fonctions synectiques à mêmes périodes.

Nous allons en effet reconnaître que

$$F(u),\ \Phi(u),$$

représentant deux semblables fonctions, dont les ordres se réduisent aux nombres entiers

$$\mu,\ \nu,$$

il existe entre ces fonctions une équation algébrique et rationnelle où la première entre au degré ν et la seconde au degré μ.

Concevons pour cela qu'on résolve, par rapport à u, l'équation

$$F(u) = z,$$

on obtiendra une infinité de racines qui, d'après le théoreme précédent, peuvent toutes se déduire de μ d'entre elles convenablement choisies

$$(\alpha) \qquad u_1, u_2, \ldots, u_\mu,$$

par l'addition d'une somme de multiples entiers des périodes; toutes ces racines portées dans $\Phi(u)$, feront donc seulement acquérir à cette fonction les μ valeurs distinctes

$$(\beta) \qquad \Phi(u_1), \Phi(u_2), \ldots, \Phi(u_\mu),$$

puisque les fonctions proposées ont mêmes périodes. Lorsque z décrit un contour fermé quelconque pour revenir au même point, les quantités comprises dans la suite (α) ne reprennent généralement pas les mêmes valeurs, mais forment une seconde suite, dont les termes augmentés ou diminués de multiples convenablement choisis des périodes, reproduisent ceux de la première suite rangés dans un ordre différent; donc, toutes les fois que z reprend la même valeur, les quantités qui composent la suite (β) changent simplement de rang sans changer de valeur : il en résulte qu'une fonction symétrique et entière S de ces quantités, a une valeur unique et déterminée, pour chaque valeur de z, ou, en d'autres termes, que S est une fonction monodrome de $F(u)$. Ce n'est pas tout : parmi les valeurs qui doivent être attribuées aux termes de la suite (α) pour rendre infinie la fonction S, se trouve nécessairement au moins un infini de $\Phi(u)$, puisque la fonction synectique est supposée entière, et comme le nombre des infinis de $\Phi(u)$ distincts, c'est-à-dire ne différant pas de multiples entiers exacts des périodes, est égal à l'ordre ν, le nombre des systèmes de valeurs des termes de la suite (α), pour lesquels S devient infinie, est au plus égal à ν, c'est-à-dire que S considérée comme fonction de $F(u)$ admet au plus ν infinis, soit simples, soit multiples. En résumé la fonction S est fonction monodrome de $F(u)$; elle est évidemment, en vertu des numéros précédents, continue et monogène, et elle admet un nombre limité d'infinis, d'où il résulte, d'après un théorème démontré par M. Cauchy dans le tome I des *Exercices de mathématiques*, que cette même fonction est rationnelle.

Faisons maintenant

$$S_1 = -[\Phi(u_1) + \Phi(u_2) + \ldots + \Phi(u_\mu)],$$

$$S_2 = \Phi(u_1)\Phi(u_2) + \ldots + \Phi(u_{\mu-1})\Phi(u_\mu),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_\mu = (-1)^\mu \Phi(u_1)\Phi(u_2)\ldots\Phi(u_\mu),$$

$S_1, S_2, \ldots, S_\mu$ seront des fonctions rationnelles de $F(u)$, et $\Phi(u)$ sera racine de l'équation algébrique et rationnelle

$$\Phi^\mu + S_1\Phi^{\mu-1} + \ldots + S_\mu = 0$$

qui contient $F(u)$ au degré ν, comme on peut s'en convaincre en changeant dans le raisonnement qui vient d'être fait $F(u)$, μ, en $\Phi(u)$, ν. Il est bon de remarquer que cette équation n'est pas toujours irréductible, et peut quelquefois se décomposer en d'autres plus simples; mais généralement c'est ce qui n'arrive pas.

Exemple. Les fonctions simplement périodiques, $\operatorname{tang} u$, e^{2iu} ont même période π, aussi sont-elles liées par une équation de la forme

$$A \operatorname{tang} u . e^{2iu} + B \operatorname{tang} u + C e^{2iu} + D = 0$$

où A, B, C, D, sont des constantes.

Les fonctions simplement périodiques $\sin u$ et $\cos u$ sont du second ordre toutes deux et sont liées, comme on le sait, par l'équation

$$\sin^2 u + \cos^2 u = 1.$$

On peut faire des remarques analogues sur toutes les relations que l'on obtient en trigonométrie, entre les fonctions circulaires d'un même angle.

La proposition qui vient d'être établie, montre de suite qu'elle est la nature de l'équation différentielle qui a pour intégrale une fonction périodique $f(u)$ d'un ordre donné m. En effet, la dérivée $f'(u)$ est une fonction synectique qui a mêmes périodes que $f(u)$, et dont l'ordre est égal à

$$p + 1 + q + 1 + r + 1 \ldots t + 1 = n.$$

si $p, q, r, \ldots t$, sont les degrés de multiplicité des infinis de $f(u)$; donc l'équation qui lie les fonctions f, f', c'est-à-dire l'équation différentielle cherchée est de la forme

$$(2) \qquad \left(\frac{df}{du}\right)^m + A_1 \left(\frac{df}{du}\right)^{m-1} + A_2 \left(\frac{df}{du}\right)^{m-2} + \ldots + A_m = 0,$$

$A_1, A_2, \ldots, A_m$ étant des fonctions rationnelles de f, dans lesquelles cette variable entre au plus à la $n^{ième}$ puissance. On peut citer comme exemples les équations différentielles

$$\frac{d \tang u}{du} = 1 + u^2,$$

$$\left(\frac{d \sin u}{du}\right)^2 = 1 - u^2,$$

$$\left(\frac{d\lambda(u)}{du}\right)^2 = a + bu + cu^2 + du^4,$$

et onze équations différentielles données par MM. Briot et Bouquet dans les *Comptes rendus* de 1855, qui ont des intégrales synectiques et doublement périodiques. Ces mêmes géomètres ont fait connaître dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences, et publié dans le dernier cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*, les caractères auxquels on peut reconnaître dans quels cas l'équation (2) admet une intégrale monodrome. et ont même donné le moyen d'exprimer rationnellement la fonction intégrale, à l'aide des fonctions simples tang z, $\lambda(z)$, $\lambda'(z)$, lorsqu'elle est périodique. Ces belles recherches ont étendu considérablement le domaine du calcul intégral.

On voit suffisamment, par ces divers exemples, l'importance des résultats obtenus dans les cinq premiers numéros; les mêmes considérations s'appliqueraient encore avec succès à la résolution du problème de la division des fonctions périodiques; je vais montrer dans le paragraphe suivant comment ces principes, que l'on doit aux travaux de l'immortel auteur des *Exercices de Mathématiques*, peuvent être étendus aux équations simultanées.

3

§ II.

Des équations synectiques simultanées.

8. Théorème. — Soient entre n variables $u, v, w, \ldots,$ n équations simultanées

$$\begin{aligned} A &= 0, \\ B &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

dont les premiers membres, renfermant outre les inconnues $u, v, w, \ldots,$ des paramètres variables $z, t, \ldots,$ s'évanouissent quand on y fait à la fois

$$\begin{array}{ll} u = u_0, & z = z_0, \\ v = v_0, & t = t_0, \\ w = w_0, & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

et restent des fonctions synectiques de toutes les variables qu'ils renferment, tant que les différences $u - u_0$, $v - v_0, \ldots, z - z_0 \ldots,$ conservent des modules inférieurs à des limites données ; on pourra donner aux paramètres $z, t, \ldots$ des valeurs assez voisines de $z_0, t_0, \ldots,$ pour que les équations proposées offrent au moins un système de solutions communes; les modules des quantités $u - u_0, v - v_0, w - w_0, \ldots,$ seront d'ailleurs aussi petits qu'on le voudra, et décroîtront jusqu'à zéro lorsque les modules de $z - z_0, t - t_0 \ldots,$ seront suffisamment petits et décroîtront simultanément jusqu'à zéro.

Démonstration. — Ce théorème va être démontré dans le cas où il y a seulement deux équations entre deux inconnues

$$(1) \qquad \begin{cases} F(u, v, z) = 0, \\ K(u, v, z) = 0, \end{cases}$$

renfermant chacune le même paramètre z; la démonstration pourra être étendue très-facilement ensuite à tous les cas.

Si les équations (1) résolues par rapport à u n'offrent pas de racines égales à u_0 pour $v = v_0$, $z = z_0$, les valeurs de u tirées de ces équations, qui se réduisent à u_0 lorsque v et z reçoivent les valeurs v_0, z_0 et qui varient d'une manière continue avec ces variables, seront, en vertu des principes établis dans le premier paragraphe, des fonctions monodromes de v et de z, au moins pour des valeurs de ces variables peu différentes de v_0 et z_0; nommons $\varphi(v, z)$, $\chi(v, z)$ ces valeurs de u, l'équation

$$(2) \qquad \varphi(v, z) - \chi(v, z) = 0$$

se trouve dans les conditions sous lesquelles subsiste le théorème du n° **2**, puisqu'elle est vérifiée pour $v = v_0$, $z = z_0$, et que son premier membre est une fonction synectique de u et de z dans le voisinage des valeurs v_0, z_0 de ces variables; donc en lui appliquant ce théorème, on pourra dire que pour une valeur z' suffisamment voisine de z_0, elle fournit pour v au moins une valeur v' très-peu différente de v_0, et il est clair qu'en nommant u' la valeur commune des deux fonctions $\varphi(v', z')$, $\chi(v', z')$, les quantités u', v', constituent un couple de solutions communes aux équations (1) dans lesquelles on fait $z = z'$; il est évident que les modules des quantités $u' - u_0$, $v' - v_0$, sont infiniment petits en même temps que celui de $z' - z_0$, et qu'ils finissent par décroître sans cesse jusqu'à zéro, lorsque le module de $z' - z_0$ diminue lui-même indéfiniment.

Lorsque pour $z = z_0$, $v = v_0$ les équations (1) admettent des racines égales à u_0, le raisonnement précédent est en défaut, parce que les fonctions φ, χ, cessant d'être monodromes, l'équation (2) n'est plus synectique, mais le théorème n'en subsiste pas moins, car en nomman

$$(\alpha) \qquad \varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \varphi_3, \ldots, \quad \varphi_\mu,$$

les valeurs différentes que peut acquérir la racine u de la première équation pour des valeurs de v et de z voisines de v_0 et z_0,

$$(\beta) \qquad \chi_1, \quad \chi_2, \quad \chi_3, \ldots \quad \chi_\nu,$$

les valeurs de u tirées de la seconde équation dans les mêmes conditions, on pourra appliquer le théorème du n° **2** à l'équation

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\varphi_1 - \chi_1)(\varphi_1 - \chi_2)\ldots(\varphi_1 - \chi_\nu)(\varphi_2 - \chi_1)\ldots(\varphi_2 - \chi_\nu)\ldots \\ \qquad (\varphi_\mu - \chi_1)\ldots(\varphi_\mu - \chi_\nu) = 0, \end{array} \right.$$

qui est synectique puisque son premier membre est une fonction symétrique des quantités renfermées dans les suites (α), (β), et par suite une fonction monodrome de v et de z, et dire que cette équation résolue par rapport à v offre au moins une racine, pour une valeur de z peu différente à z_0 ; il faudra donc nécessairement que l'une des quantités (α) soit égale à une des quantités (β), ce qui permettra encore d'établir le théorème que nous avons en vue.

La considération de l'équation (2) ou de l'équation (3) fera connaître, dans chaque cas particulier, le nombre des systèmes de solutions infiniment voisines de u_0 et de v_0, qu'offrent les équations proposées dans le voisinage de z_0 ; d'ailleurs on s'assurera par le raisonnement employé au n° 5 que le théorème dont l'énoncé termine ce numéro, subsiste encore sans modifications, pour les fonctions u, v de z, assujetties à vérifier les équations (1).

9. Théorème. — Tout système d'équations simultanées

$$A = 0,$$

$$B = 0,$$

$$\dots\dots,$$

co-existant entre un même nombre d'inconnues, offre au moins un système de solutions communes, pourvu que les premiers membres de ces équations ne cessent jamais d'être des fonctions synectiques des variables qu'ils renferment.

Démonstration. — Bornons-nous, comme précédemment, à considérer le cas de deux équations simultanées :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} F(u, v) &= 0,\\ K(u, v) &= 0;\end{aligned}\right.$$

il ne sera pas plus difficile d'établir le théorème dans toute sa généralité. Le premier membre de l'équation

$$F(u, v) - K(u, v) = 0$$

étant une fonction synectique, cette équation offre certainement un couple de solutions u_0, v_0; nommons alors z_0 la valeur commune des quantités

$$F(u_0, v_0), \quad K(u_0, v_0);$$

les équations simultanées

$$\begin{aligned} F(u, v) - z &= 0, \\ K(u, v) - z &= 0, \end{aligned}$$

ayant un couple de solutions pour $z = z_0$, en ont certainement encore un autre, en vertu du théorème précédent, lorsque z reçoit une valeur suffisamment voisine de z_0, et même une valeur quelconque, ainsi que peuvent le faire voir les raisonnements qui nous ont déjà servi au n° **5**; ces mêmes équations ont donc au moins un couple de solutions communes pour $z = 0$, comme l'exprime le théorème qu'il s'agit de démontrer.

10. Théorème. — Considérons encore les équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} F(u, v) &= 0, \\ K(u, v) &= 0, \end{aligned} \right.$$

du précédent numéro, et désignons par

$$(\alpha) \qquad \varphi(v), \quad {}_{\prime}\varphi(v), \quad {}_{\prime\prime}\varphi(v), \ldots,$$

les valeurs que prennent quelques-unes des racines de la première équation, ayant des valeurs initiales données, lorsque v décrit du point v_0 au point v une certaine courbe (V),

$$(\beta) \qquad \chi(v), \quad {}_{\prime}\chi(v), \quad {}_{\prime\prime}\chi(v), \ldots,$$

les valeurs qu'acquièrent dans les mêmes circonstances quelques-unes des racines de la seconde équation ayant aussi des valeurs initiales données, Π le produit

$$(\varphi - \chi)(\varphi - {}_{\prime}\chi) \cdots ({}_{\prime}\varphi - \chi)({}_{\prime}\varphi - {}_{\prime}\chi) \cdots$$

de toutes les différences que l'on obtient en retranchant successivement de chaque terme de la suite (α) tous ceux de la suite (β), et supposons que ces racines demeurent monodromes et finies, tant que la courbe (V) ne cesse pas d'être renfermée tout entière dans l'intérieur du contour (A); le nombre des valeurs de v pour lesquelles un terme de la suite (α) devient égal à un de ceux de la suite (β), est égal au quotient que l'on obtient en divisant par 2π la quantité I dont varie l'argument de Π, lorsque v décrit une fois le contour (A).

Démonstration. — D'après les hypothèses admises, Π est dans l'intérieur du contour (A) une fonction synectique et finie de la variable v; donc, en vertu du théorème démontré au n° 4, le nombre des racines de l'équation

$$\Pi = 0$$

renfermées dans l'intérieur de ce contour est égal à

$$\frac{I}{2\pi};$$

d'où il suit que l'égalité de deux termes, pris l'un dans la suite (α), l'autre dans la suite (β), entraînant cette équation et réciproquement, le théorème énoncé au commencement de ce numéro est démontré.

Ce théorème n'est plus vrai lorsque quelques-unes des fonctions (α) ou (β) cessent d'être monodromes dans l'intérieur du contour proposé; car dans ce cas la fonction Π cesse elle-même d'être monodrome; mais il subsiste encore, pourvu que la suite (α) ne contienne plus seulement les valeurs que prennent les racines données de la première équation, lorsque v va du point v_0 au point v en suivant la courbe (V), mais comprenne encore les valeurs que font acquérir à ces mêmes racines toutes les courbes renfermées dans le contour (A) et aboutissant aux points v_0, v, et qu'il en soit de même pour la suite (β); car Π étant une fonction symétrique des termes de la première suite ainsi que de la seconde, redevient monodrome par cette hypothèse.

Si quelques-unes des racines considérées deviennent infinies dans l'intérieur du contour (A), la quantité $\frac{I}{2\pi}$ ne représente plus le nombre des racines de l'équation

$$\Pi = 0$$

renfermées dans l'intérieur de ce contour, et pour obtenir ce même nombre, il faudra, conformément à ce qui a été dit au n° 4, ajouter à $\frac{I}{2\pi}$ le nombre des infinis de la fonction Π que contient le contour (A).

Il est bon de remarquer que le nombre que nous venons d'obtenir n'est pas celui de tous les couples de solutions des équations (1), qui correspondent à des valeurs de v renfermées dans l'intérieur du contour (A) : la quantité $\frac{I}{2\pi}$ ne peut jamais surpasser le nombre de ces solutions, mais peut évidemment lui être inférieur.

La quantité $\frac{I}{2\pi}$, augmentée du nombre des infinis de H, n'est plus propre à représenter le nombre des valeurs de v qui rendent des termes pris dans la suite (α) égaux à d'autres pris dans la suite (β), lorsque quelques-unes de ces valeurs rendent en même temps infinies une ou plusieurs des quantités contenues dans ces suites; car ces valeurs peuvent ne pas annuler H; mais dans ce cas une discussion très-simple suffira pour corriger convenablement la quantité $\frac{I}{2\pi}$.

11. La proposition qui vient d'être démontrée permet, comme on va le voir, d'obtenir avec la plus grande facilité le nombre ω des valeurs finies de v, pour lesquelles les équations algébriques et entières

$$(1) \qquad \begin{cases} F(u, v) = 0, \\ K(u, v) = 0, \end{cases}$$

résolues par rapport à u, offrent au moins une racine commune; concevons, en effet, que ces équations étant présentées sous la forme

$$(2) \qquad M_0 u^\mu + M_1 u^{\mu-1} + \ldots + M_\mu = 0,$$

$$(3) \qquad N_0 u^\nu + N_1 u^{\nu-1} + \ldots + N_\nu = 0,$$

où

$$M_0, \quad M_1, \ldots, \quad M_\mu,$$

$$N_0, \quad N_1, \ldots, \quad N_\nu,$$

sont des fonctions entières de v, premières entre elles, dont les degrés relativement à v se réduisent respectivement aux nombres entiers

$$m_0, \quad m_1, \ldots \quad m_\mu,$$

$$n_0, \quad n_1, \ldots \quad n_\nu,$$

et le contour (A) du numéro précédent, coïncidant avec un cercle suffisamment grand décrit autour de l'origine comme centre, on représente par

$$(\alpha) \qquad \varphi_1(v), \quad \varphi_2(v), \ldots \quad \varphi_\mu(v),$$

les valeurs qu'acquièrent au point v les μ racines de la première équation, lorsque la variable v décrit du point v_0 au point v une certaine courbe renfermée tout entière dans le contour (A),

$$(\beta) \qquad \chi_1(v), \quad \chi_2(v), \ldots, \chi_\nu(v),$$

les ν racines de la seconde équation prises dans les mêmes conditions,

$$\Pi,$$

le produit déjà considéré plus haut des différences

$$(\varphi_1 - \chi_1), \quad (\varphi_1 - \chi_2), \ldots, (\varphi_2 - \chi_1), \quad (\varphi_2 - \chi_2), \ldots, (\varphi_\mu - \chi_\nu),$$

$$I,$$

la variation qu'éprouve l'argument de Π lorsque v restant sur le contour (A), son argument croît de 2π,

$$\iota,$$

le nombre des infinis de Π; Π étant une fonction symétrique, tant des racines de la première équation que de celles de la seconde, est certainement une fonction synectique de v, et le nombre des racines de l'équation

$$\Pi = 0,$$

contenues dans le contour proposé, se confond avec le nombre cherché ω, si le rayon de ce contour est suffisamment grand et si aucune valeur de v vérifiant l'une ou l'autre des équations

$$M_0 = 0, \quad N_0 = 0,$$

ne rend une des fonctions (α) égale à une des fonctions (β), cas que nous écarterons pour le moment. On a donc, en vertu du théorème du n° **10**,

$$\omega = \iota + \frac{\mathrm{I}}{2\pi}.$$

Cherchons ι et I : de l'équation connue

$$(\varphi - \chi_1)(\varphi - \chi_2)\dots(\varphi - \chi_\nu) = \frac{\mathrm{K}(\varphi, \nu)}{\mathrm{N}_0}$$

on tire successivement

$$(\varphi_1 - \chi_1)(\varphi_1 - \chi_2)\dots(\varphi_1 - \chi_\nu) = \frac{\mathrm{K}(\varphi_1, \nu)}{\mathrm{N}_0},$$

. . . .

. . . .

$$(\varphi_\mu - \chi_1)(\varphi_\mu - \chi_2)\dots(\varphi_\mu - \chi_\nu) = \frac{\mathrm{K}(\varphi_\mu, \nu)}{\mathrm{N}_0},$$

et enfin

$$\Pi = \frac{\mathrm{K}(\varphi_1, \nu)\,\mathrm{K}(\varphi_2, \nu)\dots\mathrm{K}(\varphi_\mu, \nu)}{\mathrm{N}_0^\mu}.$$

Cette nouvelle forme donnée à Π montre sur-le-champ que cette fonction admet pour infinis les μn_0 racines de l'équation

$$\mathrm{N}_0^\mu = 0;$$

mais il y en a d'autres : ce sont les racines de l'équation

$$\mathrm{M}_0 = 0; \tag{4}$$

nous allons évaluer la somme des degrés de multiplicité de ces infinis. Nommons :

a_1 une racine de l'équation (4),

λ_1 le degré de multiplicité auquel elle entre dans cette équation,

M_{k_1}, la première des fonctions M_0, $\mathrm{M}_1, \dots \mathrm{M}_\mu$ qui ne s'évanouit pas pour $\nu = a_1$; l'hypothèse $\nu = a_1$ rend infinies k_1 racines de l'équation (2)

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{k_1},$$

et cette même équation mise sous la forme

$$\varphi^{\mu-k_1}\left(M_0\varphi^{k_1}+M_1\varphi \qquad +\ldots+M_{k_1}+\frac{M_{k_1+1}}{\varphi}+\ldots\right)=0,$$

fait voir que la somme

$$\frac{M_{k_1+1}}{\varphi}+\frac{M_{k_1+2}}{\varphi^2}+\ldots,$$

tendant vers zéro en même temps que $\frac{1}{\varphi}$, on peut en dire autant du polynôme

$$M_0\varphi^{k_1}+M_1\varphi^{k_1-1}+\ldots+M_{k_1},$$

d'où il résulte que les rapports qui existent entre les racines infinies de l'équation (2) rangées dans un ordre convenable, et les racines de l'équation qu'on obtient en égalant à zéro le polynôme précédent, tendent tous vers l'unité lorsque v tend vers a_1; comme le produit des racines de cette dernière équation, représenté par l'expression

$$(-1)^{k_1}\frac{M_{k_1}}{M_0},$$

est par rapport à $\frac{1}{v-a_1}$, une quantité infiniment grande de l'ordre λ_1, il en est de même pour le produit

$$\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_k,$$

et Π qui contient chacun des facteurs de ce produit au $\nu^{ième}$ degré est par rapport à $\frac{1}{v-a_1}$ un infiniment grand de l'ordre $\nu\lambda_1$; ainsi chaque racine de l'équation (4) est relativement à Π, un infini d'un ordre égal à ν fois son degré de multiplicité, et, par suite, toutes les racines de la même équation représentent autant d'infinis de la fonction Π_1 qu'il y a d'unités dans le produit de ν par la somme de leurs degrés de multiplicité, c'est-à-dire dans νm_0; comme il n'y a pas d'autres infinis que ceux dont le nombre vient d'être évalué, on a

$$\iota=\mu n_0+\nu m_0.$$

Passons à la recherche de I ; l'égalité

$$\Pi = \frac{K(\varphi_1, \nu)\ldots K(\varphi_\mu \nu)}{N_0^\mu},$$

entraîne l'égalité,

$$\arg.\Pi = \arg.\left[K(\varphi_1, \nu)\ldots K(\varphi_\mu, \nu)\right] - \arg.N_0^\mu,$$

d'où

$$I = \Delta \arg.\Pi = \Delta \arg.\left[K(\varphi_1, \nu)\ldots K(\varphi_\mu, \nu)\right] - \Delta \arg.N_0^\mu;$$

on voit de suite à quoi se réduit le second terme de cette différence; car N_0^μ étant une fonction entière de ν du degré μn_0, son argument varie de $\mu n_0.2\pi$, lorsque le module de ν restant constant et très-grand, l'argument p de cette variable croît de 2π, c'est ce qu'on a vu au n° 4 ; on a donc d'abord

$$\Delta \arg.N_0^\mu = \mu\, n_0.2\pi.$$

Pour calculer le premier terme de la différence qui représente I, nous observerons que chaque racine φ_i de l'équation (2), pouvant, comme on le sait, être mise sous la forme

$$(5) \qquad \varphi_i = \nu^{s_i}(g_i + e_i)$$

où g_i est une constante, e_i une variable dont le module tend vers zéro en même temps que celui de $\frac{1}{\nu}$, et s_i une quantité commensurable, positive, nulle ou négative, $K(\varphi_i, \nu)$ peut être présentée sous la même forme

$$K(\varphi_i, \nu) = \nu^{\varsigma_i}(\gamma_i + \varepsilon_i),$$

ς_i étant le plus haut exposant de ν dans le polynôme obtenu en remplaçant dans $K(\varphi_i, \nu)$, φ_i par sa valeur tirée de l'équation (5), et que par suite on peut écrire

$$K(\varphi_1, \nu)\, K(\varphi_2, \nu)\ldots K(\varphi_\mu, \nu) = \nu^\varsigma(\gamma + \varepsilon),$$

équation dans laquelle ς et γ sont données par les formules

$$\varsigma = \varsigma_1 + \varsigma_2 + \ldots + \varsigma_\mu,$$

$$\gamma = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\ldots\gamma_\mu,$$

on a donc

$$\arg. \mathrm{K}[(\varphi_1, \nu) \ldots \mathrm{K}(\varphi_\mu, \nu)] = \varsigma p + \text{ une quantité qui s'évanouit avec } \frac{1}{\nu},$$

d'où

$$1 = (\varsigma - \mu n_0) 2\pi,$$

et en dernière analyse

$$(6) \qquad \omega = \nu m_0 + \varsigma.$$

Lorsque quelques racines de l'une ou de l'autre des équations

$$\mathrm{M}_0 = 0, \quad \mathrm{N}_0 = 0,$$

annulent une des différences dont Π est le produit, le théorème du n° **10** ainsi que la méthode précédente sont en défaut, mais la plus légère attention suffit pour reconnaître que l'équation (6) subsiste cependant encore.

On sait comment peuvent être calculés les divers nombres

$$s_1, s_2, \ldots, s_\mu;$$

il est bon, cependant, de montrer comment un procédé très-ingénieux employé par M. Puiseux dans le Mémoire cité, peut servir pour cette recherche.

ν venant à croître indéfiniment, et φ_i étant remplacée dans l'équation (2) par sa valeur tirée de l'équation (6), on peut former, dans cette équation, le groupe G_i dont les termes sont par rapport à ν du degré le plus élevé; représentons par

$$\mathrm{A}_0 \varphi_i^{p_0} \nu^{q_0} + \mathrm{A}_1 \varphi_i^{p_1} \nu^{q_1} + \mathrm{A}_2 \varphi_i^{p_2} \nu^{q_2} + \ldots$$

le groupe G_i, et par

$$\mathrm{A} \varphi_i^p \nu^q,$$

un terme quelconque de la même équation n'appartenant pas au groupe G_i : on aura

$$p_0 s_i + q_0 = p_1 s_i + q_1 = p_2 s_i + q_2 = \ldots,$$

$$p_0 s_i + q_0 > p s_i + q,$$

d'où on tire

$$\frac{q_1 - q_0}{p_1 - p_0} = \frac{q_2 - q_0}{p_2 - p_0} = \ldots = - s_i$$

$$q - q_0 < - s_i (p - p_0).$$

Il résulte de ces relations, que si on construit relativement à un système d'axes coordonnés rectangulaires, les points P, P′, P″,…, qui ont pour abscisses et ordonnées les exposants de φ_i et de v dans les différents termes de l'équation (2) :

1°. Les points correspondants aux termes qui composent le groupe G_i sont sur une même ligne droite Γ_i, dont le coefficient angulaire est égal à $- s_i$, et dont l'ordonnée à l'origine représente l'ordre de ce groupe ;

2°. Par aucun des points P, P′, P″,…, on ne pourra mener de droite parallèle à Γ_i et présentant une ordonnée à l'origine plus grande que celle de cette droite ;

3°. La droite Γ_i ne peut être parallèle à l'axe des ordonnées.

Ces divers caractères font connaître sur-le-champ la droite Γ_i et par suite la quantité s_i ; remplaçant dans l'équation

$$G_i = 0,$$

φ_i par $g_i v^{s_i}$ et simplifiant cette équation autant que possible, en divisant tous ses termes par les puissances de v et de g_i qui leur sont facteurs communs, on obtient une équation entière en φ_i, dont les racines sont les valeurs de φ_i correspondant à celles des quantités (α) qui ont s_i pour ordre ; le degré de cette équation est évidemment le nombre des quantités (α) qui sont de l'ordre s_i par rapport à v.

Une autre droite telle que Γ_i fera connaître une autre valeur de s_i et le nombre des quantités (α) qui lui correspondent, et ainsi de suite.

Application. Considérons les équations algébriques et entières :

$$u_\mu + M_1 u^{\mu-1} + M_2 u^{\mu-2} + \ldots + M_\mu = 0,$$

$$u^\nu + N_1 u^{\nu-1} + N_2 u^{\nu-2} + \ldots + N_\nu = 0,$$

où

$$M_1, \quad M_2, \ldots, \quad M_\mu,$$

$$N_1, \quad N_2, \ldots, \quad N_\nu,$$

sont des fonctions entières de v, de degrés marqués par leurs indices, et supposons ces équations complètes, on trouvera

$$\iota = 0,$$

$$\varsigma_1 = \varsigma_2 = \varsigma_3 = \ldots = \varsigma_\mu = \nu,$$

$$\omega = \varsigma = \mu\nu;$$

ce qui revient à dire avec Bezout, que le degré de l'équation finale en v, qui provient de l'élimination de u entre ces équations, se réduit au produit des nombres qui représentent leurs degrés.

Vu et approuvé,
Le 12 juin 1858,
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer,
Le 12 juin 1858,
LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
CAYX.

THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

1°. Propriétés générales du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

2°. Mouvement de la chaleur dans une sphère dont la température varie avec le temps et la distance au centre.

Vu et approuvé,
Le 12 juin 1858,
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer,
Le 12 juin 1858,
LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
CAYX.

Paris. — Imprimerie de Mallet-Bachelier, rue du Jardinet, 12.