DE IIS QUAE LIQUIDO SUPERNATANT.

LIBRI 3.

1650.

Avertiſſement.

Même après tant de ſiècles, le mathématicien, en pleine poſſeſſion des méthodes modernes, ne prendra connaissance de l'ouvrage d'Archimède ſur les corps flottants ſans éprouver un ſentiment d'admiration profonde, mêlé d'étonnement à cauſe des réſultats obtenus, lesquels au premier abord lui ont dû sembler dépasser les moyens de recherche et même tomber en dehors de la préoccupation des anciens. On comprend donc aisément que la lecture de cet ouvrage ait fait une vive impreſſion ſur le jeune Huygens et l'ait excité à l'émulation. Et cela d'autant plus parce que, par des études dans cette direction, il ſe plaçait tout de ſuite ſur un terrain particulièrement approprié à ſon génie, où il remporterait dans la ſuite tant de ſuccès et qui doit avoir excercé auſſitôt ſur lui une grande attraction, ſavoir la phyſique mathématique.

Ce ſont les réſultats de ces études qui ont été réunis par Huygens dans le Traité qu'il intitula: „*De iis quae liquido ſupernatant Libri* 3."

Les ſujets à examiner n'étaient pas difficiles à trouver. En premier lieu

Archimède s'était borné à la confidération des fegments fphériques et des conoïdes paraboliques; Huygens pouvait donc excercer fes forces fur d'autres figures géométriques fimples. De plus il avait reconnu, en traitant l'équilibre de la chaîne, qu'un feul principe, celui d'après lequel le centre de gravité fe place toujours auffi bas que poffible, pouvait fuffire à résoudre toutes les queftions fur l'équilibre des corps fous l'influence de la gravité comme force motrice [1]). Il était donc tout indiqué de rattacher les réfultats obtenus par Archimède à ce principe général.

C'est là en effet le but principal du *livre premier*. Dans les quatre premiers théorèmes Huygens déduit fucceffivement du principe en queftion la fituation horizontale du niveau des liquides, l'équilibre des corps flottants dont la denfité eft égale à celle du liquide, et enfin la loi célèbre d'Archimède appliquée au cas où la denfité du corps eft moindre que celle du liquide. De cette dernière déduction, plus compliquée que les autres, nous poffédons même trois variantes reproduites dans le texte (p. 96—99), dans la note 14 du „liber 1" (p. 99—101), et dans l'Appendice I de ce traité.

Viennent ensuite (p. 102—104) trois nouveaux théorèmes généraux qui fe démontrent par des raifonnements auffi fimples qu'ingénieux et dont les deux derniers, les „Theoremata 6 et 7," vont fervir de bafe aux recherches qui fuivent, celles fur la ftabilité de divers corps flottants homogènes dont l'axe de révolution eft dans la fituation verticale.

D'après ces théorèmes la ftabilité exige que la différence de niveau du centre de gravité du corps flottant d'avec le centre de gravité de fa partie immergée (Theor. 6), ou, ce qui pour les corps homogènes revient au même, d'avec celui de la partie qui furnage (Theor. 7), foit un *minimum*.

Pour éprouver cette ftabilité il fuffit donc de couper le corps flottant par un plan variable α (qui repréfente les pofitions diverfes du niveau du liquide) de manière que le volume des fegments découpés foit égal à celui de la partie immergée (ou furnageante); de déterminer les centres de gravité de ces fegments; de mener par ces centres de gravité un plan β parallèle au plan variable α correfpondant, et de vérifier fi pour toutes les pofitions voifines la diftance du

[1]) Consultez les trois derniers alinéa's de la note 2 et la note 4 de la pièce N°. VI, appartenant aux „Travaux divers de Jeunesse", pp. 38, 39 et 40 du Tome présent.

centre de gravité du corps entier au plan β soit plus grande que pour la position initiale. [2])

C'est là la méthode suivie par Huygens pour retrouver (p. 105—113) les théorèmes d'Archimède sur la stabilité de l'équilibre d'un segment sphérique ou parabolique flottant avec l'axe de révolution dans une situation verticale et pour

---

[2]) Il nous semble utile d'indiquer la connection entre cette méthode de Huygens et une des méthodes modernes les plus fertiles, celle due à Dupin, qui consiste à déterminer le lieu géométrique σ des centres de gravité des portions d'égal volume découpées par un plan variable, et à abaisser ensuite, du centre de gravité F du corps flottant, des normales FS sur ce lieu géométrique. Alors chacune de ces normales représentera une position d'équilibre du corps flottant pour laquelle cette normale prendra la direction verticale. Et cet équilibre, dans le cas où la surface σ, au point S, se trouve être concave par rapport au point F, sera stable ou instable, selon que la normale en question est ou n'est pas un vrai minimum parmi les droites voisines tirées du point F aux points de la surface σ.

Or, pour déduire cette dernière méthode de celle de Huygens, on remarquera en premier lieu que, d'après un théorème bien connu qu'on doit à Bouguer, le plan β de Huygens n'est autre que le plan tangent de la surface σ (comparez les deux derniers alinéa's de la note 6 du „Liber II", p. 123 du présent volume). Mais alors le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point F sur ce plan β est la podaire π de la surface σ par rapport au point F comme pôle, et puisque, d'après le „Theorema 6" de Huygens cette perpendiculaire doit prendre une valeur minimale pour chaque position d'équilibre du corps flottant, on voit déjà qu'il suffira pour trouver ces positions, d'appliquer à la surface π la construction même que nous venons d'indiquer pour la surface σ.

Dès lors, pour reconnaître l'identité des résultats des deux méthodes on n'aura plus qu' à montrer (ce qui n'est pas difficile) que les normales menées du pôle F à la podaire π coïncident nécessairement avec celles menées du même point à la surface primitive σ, et à démontrer enfin comment la règle de Dupin pour la stabilité découle des „Theoremata 6 et 7" de Huygens.

Soient donc R_1 et R_2 les rayons de courbure principaux de la surface σ au point S et soit $FS = c$; alors l'analyse nous apprend que les rayons principaux de la surface π prendront au même point les valeurs: $R'_1 = \frac{c^2}{2c - R_1}$; $R'_2 = \frac{c^2}{2c - R_2}$. Mais si ξ, η, ζ représentent les coordonnées d'un point dans le voisinage du point S, par rapport aux tangentes principales et à la normale, qui sont, au point S, communes aux surfaces σ et π, alors on trouvera facilement, par une première approximation, pour la distance ϱ du point F à un point de la surface π,

$$\varrho^2 = c^2 + \left(1 - \frac{c}{R'_1}\right)\xi^2 + \left(1 - \frac{c}{R'_2}\right)\eta^2, \text{ ou bien } \varrho^2 = c^2 + \left(\frac{R_1}{c} - 1\right)\xi^2 + \left(\frac{R_2}{c} - 1\right)\eta^2.$$

Les theorèmes de Huygens cités exigent donc qu'on ait $R_1 > c$ et $R_2 > c$; mais alors FS est un vrai minimum pour la surface σ aussi bien que pour la surface π. Et on voit de même qu'une valeur négative de R_1 ou de R_2 entraîne nécessairement l'instabilité; ce qui veut dire qu'il y aura instabilité non seulement toutes les fois que FS n'est pas un vrai minimum mais aussi lorsque la surface σ, dont la courbure est toujours positive, tournera, au point S, sa convexité vers le point F.

déterminer (p. 113—117) les conditions de ſtabilité d'un cône droit, flottant dans la même ſituation, ſoit avec le ſommet en bas (Theor. 14), ſoit avec le ſommet en haut (Theor. 15).

En abordant le *ſecond livre*, qui traite l'équilibre des parallélipipèdes rectangles flottants, on éprouvera, nous le croyons, une certaine déception. Huygens, au lieu de pourſuivre l'application de la méthode générale qu'il vient de développer dans le livre premier, retourne, par le „Theorema 1" (p. 122) du „Liber II" à celle d'Archimède, qui conſiſte dans la conſidération du couple formé par l'action de la gravité ſur le corps flottant, représentée par une force appliquée au centre de gravité de ce corps, et par l'action de la preſſion vers le haut du liquide, repréſentée par une force appliquée au centre de gravité de la partie ſubmergée.

Il ſemble poſſible que cette incongruité a été introduite par la réviſion, ſur laquelle nous reviendrons, ſubie par le „Liber I." Alors cette réviſion ne s'eſt pas étendue aux autres livres, peut-être parce que la méthode que Huygens venait d'introduire dans le „Liber I", ſe montrait, dans les problèmes compliqués dont il s'occupe dans les „Libri II et III," moins maniable, qu'il ne l'avait prévu, et c'eſt probablement pour une raiſon ſemblable qu'il a laiſſé de côté dans le „Liber I" les beaux théorèmes d'Archimède ſur l'équilibre des conoïdes paraboliques flottants avec l'axe dans une ſituation inclinée.

Toutefois, même alors il y a lieu de s'étonner que Huygens n'a pas au moins rattaché ce „Theorema 1" du „Liber II" aux „Theoremata 6 et 7" (p. 103—104) du „Liber I" et cela d'autant plus que la démonſtration qu'il en donne et qui ne repoſe pas ſur les „Hypotheſes" formulées en tête du livre premier, n'a pas pu lui ſatisfaire entièrement. [3])

Quoiqu'il en ſoit, le „Liber II" nous apporte des recherches très profondes. Huygens évidemment a tâché d'obtenir une ſolution, auſſi complète, qu'il lui était poſſible, du problème du parallélipipède rectangle flottant, limité ſeulement dans ſa généralité par la ſuppoſition que la longueur du parallélipipède ſoit ſuffiſante pour aſſurer l'horizontalité des arêtes dans le ſens de cette longueur. [4])

---

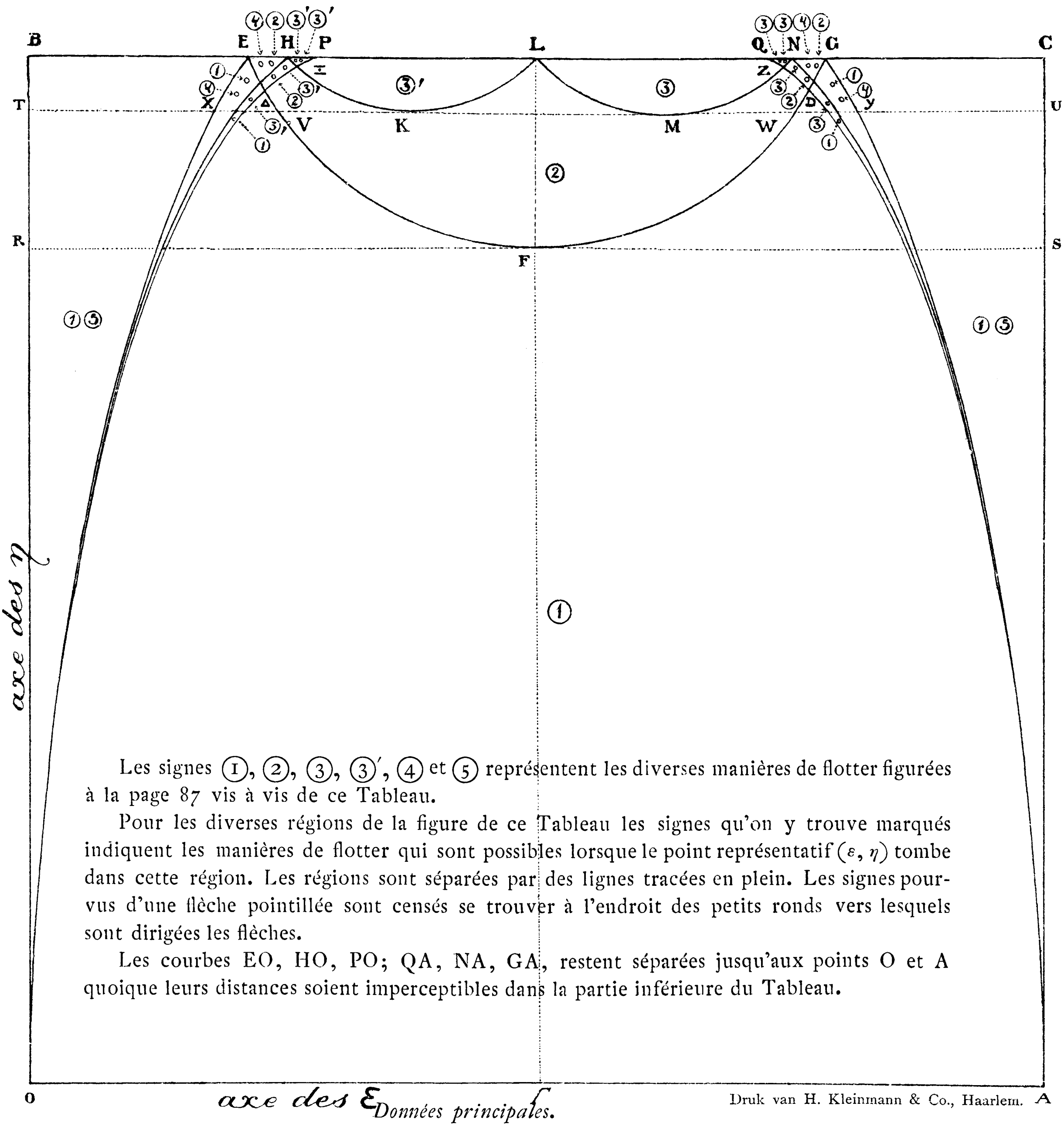
[3]) Comparez la note 6 du „Liber II," p. 122 du Tome présent.

[4]) Voir les premières pages du „Liber II."

Tableau représentant la solution complète du problème du parallélipipède rectangle flottant avec les arêtes longitudinales dans la situation horizontale.

ε rapport de la densité du parallélipipède à celle du liquide.

η rapport du côté le plus petit de la section verticale rectangulaire au plus grand côté de cette section.



Les signes (1), (2), (3), (3)′, (4) et (5) représentent les diverses manières de flotter figurées à la page 87 vis à vis de ce Tableau.

Pour les diverses régions de la figure de ce Tableau les signes qu'on y trouve marqués indiquent les manières de flotter qui sont possibles lorsque le point représentatif (ε, η) tombe dans cette région. Les régions sont séparées par des lignes tracées en plein. Les signes pourvus d'une flèche pointillée sont censés se trouver à l'endroit des petits ronds vers lesquels sont dirigées les flèches.

Les courbes EO, HO, PO; QA, NA, GA, restent séparées jusqu'aux points O et A quoique leurs distances soient imperceptibles dans la partie inférieure du Tableau.

Druk van H. Kleinmann & Co., Haarlem.

Données principales.

$BE = GC = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3} = 0{,}211..$; $BH = NC = 0{,}25$; $BP = QC = \frac{9}{32} = 0{,}28125$

$BT = CU = 1 - \sqrt{\frac{8}{9}} = 0{,}05719..$; $BR = CS = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}1835..$

Equations des courbes du Tableau.

HKL : $2\eta^2\varepsilon(3-4\varepsilon) = 1$; LMN : $2\eta^2(1-\varepsilon)(4\varepsilon-1) = 1$; EFG : $6\eta^2\varepsilon(1-\varepsilon) = 1$;

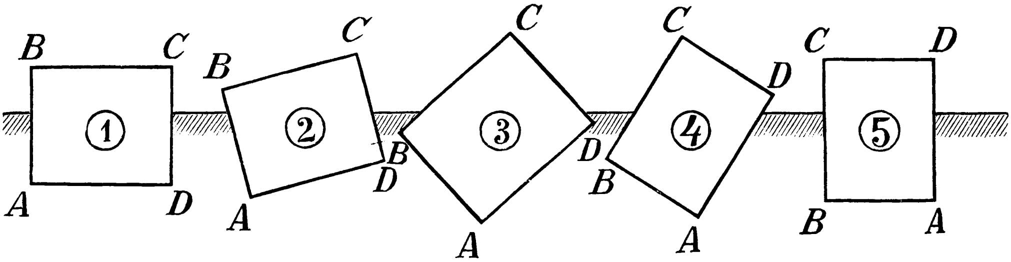
EO et GA : $6\varepsilon(1-\varepsilon) = \eta^2$; HO : $2\varepsilon(3-4\varepsilon) = \eta^2$; NA : $2(1-\varepsilon)(4\varepsilon-1) = \eta^2$;

PO : $\varepsilon^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{9}{2}}\left[(1+\eta)^{\frac{2}{3}} - (1-\eta)^{\frac{2}{3}}\right]\eta^{-\frac{1}{3}}$; QA : $(1-\varepsilon)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{9}{2}}\left[(1+\eta)^{\frac{2}{3}} - (1-\eta)^{\frac{2}{3}}\right]\eta^{-\frac{1}{3}}$.

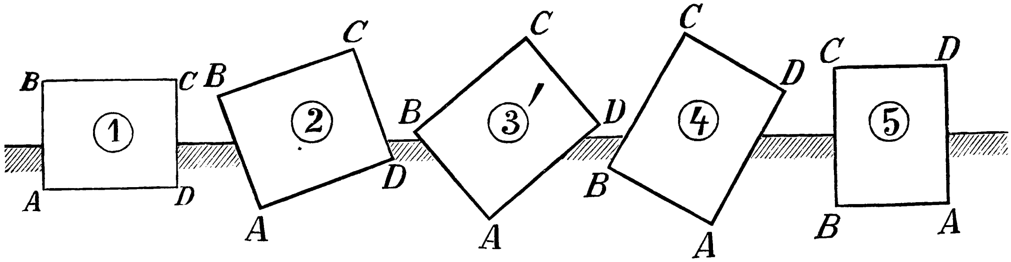
Pour faire juger plus facilement jusqu'à quel point ce but a été atteint par le jeune Huygens; nous avons conſtruit le tableau placé en regard de cette page, lequel contient, ſous la forme d'une repréſentation graphique, la ſolution du problème en queſtion. [5])

Pour expliquer ce tableau nous remarquerons en premier lieu que les ſignes ①, ②, ③ et ③′, ④ et ⑤ repréſentent dans leur ſuite naturelle les diverſes manières de flotter qui ſont poſſibles, en omettant toutefois les cas intermédiaires où l'un des ſommets de la ſection verticale du parallélipipède ſe trouve dans la ſurface du liquide.

$\varepsilon > \frac{1}{2}$



$\varepsilon < \frac{1}{2}$



Comme le montrent les figures que nous donnons ici, cette ſuite eſt un peu différente, mais ſeulement pour le troiſième cas, ſelon que l'on a $\varepsilon > \frac{1}{2}$, ou $\varepsilon < \frac{1}{2}$; ε repréſentant le rapport des denſités du parallélipipède et du liquide.

Soit, de plus, $\eta = \frac{b}{a}$ le rapport du côté le plus court b au côté le plus long a de la ſection verticale du parallélipipède, alors il eſt clair que les poſitions d'équilibre d'un parallélipipède flottant donné, de denſité donnée, ne dépendront que des

[5]) Nous en publierons ailleurs la diſcuſſion complète. Voir le Tome XII. (Série II) des Archives néerlandaiſes.

quantités ε et η. En confidérant ces quantités comme des coordonnées rectangulaires, on peut donc repréfenter chaque parallélipipède par un point fitué dans l'intérieur d'un carré OBCA dont les côtés font égaux à l'unité. Enfuite on peut divifer ce carré de telle manière que la nature des pofitions diverses d'équilibre qu'un parallélipipède flottant peut prendre, foit indiquée par les chiffres ①, ②, etc. qu'on trouve marqués dans l'intérieur ou à côté de la divifion[6]) où tombe le point représentatif.

C'eft ce que nous avons fait dans notre tableau; là où l'on trouve deux chiffres, deux pofitions diverfes font poffibles. Ces pofitions appartiennent alors d'ordinaire à des cas différents. C'eft feulement dans les divisions peu étendues HΞP et QZN, marquées à côté ③ ③ et ③′ ③′, que les deux pofitions poffibles appartiennent au même cas.

Pour chacun des „Theoremata" et „Conclufiones" de Huygens nous indiquerons dans les notes la portée à l'aide de ce tableau explicatif[7]). Il en réfultera que les lignes de démarcation EFG, EO, HO, NA, GA, HKL et LMN ont été parfaitement reconnues et définies par Huygens; mais qu'il n'en est pas de même pour les lignes PO et QA. Pour trouver ces lignes Huygens aurait dû difcuter les pofitions ③ et ③′ auffi complètement que les pofitions ② et ④. [8]) Il ne l'a pas fait et la raifon en doit être cherchée probablement dans la plus grande difficulté de l'entreprise. Ainfi la détermination des conditions d'équilibre, qui pour ces dernières pofitions s'accomplit aifément [9]), dépend pour les pofitions ③ et ③′ de la réfolution d'une équation biquadratique. [10])

[6]) Les lignes de démarcation des divisions ont été tracées en plein. Les lignes ponctuées ont un autre but et doivent être négligées ici.

[7]) Voir les notes 19, 23, 28, 33, 41, 42. 43, 51, 57, 67, 69, 70, 71, 74, 75, 79, 80, 82, 83, 84, 86, 87, 92, 93 et 94, p. 128 —157, du „Liber II". Disons, pour résumer, que les possibilités de la position ① sont discutées complètement par les „Theoremata 2 et 3" (pp. 128, 129); celles de la position ② par le „Theorema 5" et la „Conclusio 3" du „Theor. 6" (pp. 134, 139); celles de la position ④ par la „Conclusio 2" du „Theor. 8" (p. 153); celles de la position ⑤ par la „Conclusio 1" du „Theor. 8" (p. 152). Les possibilités des positions ③ et ③′ sont traitées respectivement dans les „Conclusiones 4 et 5" du „Theor. 6" (pp. 142, 145); mais la discussion est incomplète en ce qu'elle ne comprend pas les positions correspondantes aux divisions Z N A et Ξ H O du tableau. Enfin le „Theorema 7" (p. 145) traite le cas particulier où la section normale du parallélipipède est un carré et où par conséquent le point représentatif se trouve sur le côté BC du tableau.

[8]) Comparez les notes 92 et 93, pp. 156 et 157, du „Liber II".

[9]) Voir la note 34, p. 134, du „Liber II".

[10]) On peut s'en convaincre facilement en appliquant la méthode de Dupin décrite dans la note 2. Seulement, puisque les arêtes du parallélipipède dans le sens de la longueur sont censées

Le *troisième livre* traite l'équilibre du cylindre droit flottant. La solution que Huygens donne de ce problème est plus bornée que celle du problème analogue pour le parallélipipède. En effet, désignons les positions diverses du cylindre flottant par les mêmes signes ①, ②, ③, ④, ⑤, en supposant que l'axe du cylindre soit parallèle à la ligne AB des figures de la page 87, qui ont servi pour indiquer les positions diverses du parallélipipède; alors ce ne sont que les positions ① et ② qui ont été traitées par Huygens. Pour ces positions d'ailleurs sa solution est complète. [11])

Avant de pouvoir aborder le problème du cylindre flottant Huygens avait à déterminer le centre de gravité d'un tronc de cylindre droit. Cette besogne une fois accomplie au moyen des „Theoremata 1—4" (p. 159—162), les recherches pouvaient être menées par les mêmes voies que celles du „Liber II." Souvent même les théorèmes et les démonstrations ne présentent qu'une différence d'ordre numérique. Ainsi les „Lemmata 1—3" (p. 124—127) du „Liber II," qui constituent pour ainsi dire le fondement géométrique de ce qui va suivre, correspondent au „Lemma" et aux „Theoremata 5 et 6" (p. 163—166) du „Liber III." De même les „Theoremata 2, 3, 4, 5, 6" (p. 128—136) du „Liber II" correspondent respectivement aux „Theoremata 7, 8, 9, 10, 11" (p. 167—184) du „Liber III." Plus loin le parallélisme cesse d'être aussi complet, à cause d'une certaine différence dans la nature des résultats. [12])

---

demeurer dans leur position horizontale, les surfaces σ peuvent être remplacées par les courbes qui sont les lieux géométriques des centres de gravité de la partie submergée (ou de la partie surnageante) de la section verticale du parallélipipède; partie dont l'aire ne doit pas changer.

Or, pour les positions ② et ④ ce lieu est une parabole qui a pour axe l'un des diamètres de la section verticale rectangulaire. Pour trouver les positions d'équilibre on n'a donc qu'à mener les normales à cette parabole d'un point situé sur son axe; ce qui constitue un problème „plan". Pour les positions ③ et ③', tout au contraire, le lieu est une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes deux des côtés du rectangle et à laquelle il faut mener les normales partant d'un point situé arbitrairement par rapport aux axes de l'hyperbole. Comme on le sait, ce problème amène nécessairement une équation biquadratique, et, en effet, l'équation de la courbe QA du tableau (ou celle de la courbe PO) n'est autre chose que le discriminant de l'équation en question, égalé à zéro. Il est vrai que le cas particulier, où le rectangle devient un carré, y fait exception; mais cela ne semble pas avoir attiré l'attention du Huygens. Voir encore à propos de ce cas la note 79, p. 150, du „Liber II".

[11]) Voir, quant à la position ① les „Theoremata 7 et 8" (p. 167—168) et pour la position ②, le „Theorema 10" (p. 172) et les „Conclusiones 2" des „Theoremata 11 et 12" (pp. 174, 186), dont les résultats ont été résumés dans la note 70 du „Liber III". Une représentation graphique de la solution de Huygens au moyen des coordonnées ε (densité relative) et $\zeta = \frac{h}{d}$ (h hauteur, d diamètre du cylindre) accompagne la note 37, p. 176, du même „Liber".

[12]) Ainsi le point L du tableau de cet avertissement et P de celui de la note 37, p. 176, du „Liber III"

Notons enfin que vers la conclufion du „Liber III," p. 189, fe trouve difcutée la manière dont les réfultats obtenus dans les recherches fur les corps flottants, pourraient être vérifiés expérimentalement.

Le manufcrit du traité „de iis quae liquido fupernatant," tel que nous le possédons, eft écrit fur des feuilles de grand format, de quatre, ou quelquefois, de deux pages. Ces pages font numérotées régulièrement de 1—16 pour le „Liber I"; de 23—48 pour le „Liber II"; de 49—75 pour le „Liber III". Elles contiennent un grand nombre de figures; mais ces figures ont été tracées une feconde fois, fur de petits carrés de papier, [13]) avec plus de foin, mais fans modifications importantes; évidemment pour préparer la publication du traité.

Dans l'automne de 1650 le traité avec les figures fut envoyé à van Schooten afin de le soumettre à fon jugement. Il comptait alors quatre livres. [14]) Dans fes lettres du 27 septembre 1650 (N°. 85, p. 130 du T, I) et du 21 novembre 1650 (N°. 89, p. 135 du T. I) van Schooten le loua beaucoup et le renvoya avec la dernière lettre dans laquelle il préfenta quelques remarques de peu d'importance et auxquelles Huygens n'a pas donné fuite.

Enfuite les deux premiers livres furent revifés et condenfés dans un feul livre, le „Liber I" de notre texte [15]). Enfin tout était prêt pour la publication, qui

---

correspondent entre eux dans un certain sens puisqu'ils indiquent l'un et l'autre le cas où les points B et D des figures, p. 87, qui représentent les positions diverses du corps flottant, cylindre ou parallélipipède, se trouvent tous les deux à la fois dans la surface du liquide; mais tandis que le point L se trouve sur la limite supérieure du tableau de l'avertiffement, il en est autrement pour le point P. De même l'analogie étroite qui existe dans le cas du parallélipipède entres les cas (2) et (4), manque complètement dans le cas du cylindre. En conséquence le „Theorema 12", p. 185, du „Liber III", lequel se rapporte à la partie de la représentation graphique de la note 37, p. 176, qui se trouve au dessus de la ligne GPH, et le „Theorema 8", p. 152 du „Liber II", qui s'occupe surtout des positions (4) et (5) ne correspondent pas entre eux.

[13]) Sous cette forme elles ont pu servir à copier au graveur pour la présente publication. On trouve sur le revers de chacun de ces petits carrés de papier des indications de Huygens sur l'endroit du texte où la figure doit être placée.

[14]) On peut s'en convaincre en combinant la phrase „Perlegeram jam duos primos libros" de la lettre de van Schooten du 27 septembre 1650, avec cette autre: „neque dubia me spes tenet posteriores duos libros multo etiam magis placituros" de la réponse de Huygens (notre N°. 85[a], p. 561 du T I).

[15]) En effet, sur les revers des seize premières figures du „Liber II" présent le numéro indiquant le „Liber" auquel elles appartiennent, était primitivement un 3 qui a été parfois transformé par quelques traits de plume dans un 2 et d'autres fois biffé et remplacé par ce même chiffre 2. Ce qui prouve que le „Liber II" présent était primitivement le troisième livre et que les deux

toutefois n'eut pas lieu. Probablement elle fut remise d'abord pour faire précéder l'„Ἐξέτασις" [16]) qui avait plus d'actualité; puis les travaux sur la dioptrique ont beaucoup occupé Huygens. [17])

En attendant Huygens ne perdait point de vue entièrement le traité qu'il avait composé. Il en donne un résumé à Gregorius à St. Vincentio dans une lettre du 25 octobre 1651 (notre N°. 100, p. 151 et 152 du Tome I) [18]) mentionnant avec une certaine prédilection le „Theorema 7", p. 167 du „Liber III", c'est-à-dire, le premier des deux théorèmes sur la stabilité d'un cylindre flottant avec l'axe dans la situation verticale. De même il en écrit le 29 décembre 1652 à G. A. Kinner de Löwenthurm (voir le N° 146 à la page 212 du T. I), le 27 juillet 1657 à de Sluze (voir le N°. 397 à la page 41 du T. II) et enfin le 19 novembre 1667 (voir le N°. 1610 à la page 162 du T. VI) à Léopold de Medicis.

Le 25 janvier 1652 il se remit à l'œuvre et commença à s'occuper de nouveau des conditions d'équilibre d'un cône droit flottant traitées déjà d'une autre façon dans le „Theorema 14", p. 115, du „Liber I." Nous avons reproduit ces travaux inachevés dans l'Appendice II du présent traité.

---

premiers livres ont été remaniés pour constituer le „Liber I" que nous possédons. Et ainsi la lacune dans la numération des pages, que l'on remarque entre le „Liber I" et le „Liber II", s'expliquerait facilement par une sorte de condensation subie pendant cette opération.

De plus sur le revers de l'onzième figure du „Liber I" (p. 106), l'inscription „2 Lemma 1" fut changée en „1 Lemma 1", d'où il suit que primitivement le premier livre ne s'étendait pas plus loin que jusqu'à la fin du présent „Theorema 9".

Malheureusement il est impossible de savoir quelle était la nature des changements apportés. Seulement le fait, qu'au moins les figures 12—20 du présent „Liber I", et peut-être toutes les figures de ce livre à l'exception de la onzième, ont été dessinées de nouveau donne à présumer que l'altération était assez profonde. Si elle s'est étendue jusqu'aux théorèmes fondamentaux, elle expliquerait facilement l'incongruité dont nous venons de constater l'existence.

Ajoutons que la note 2 de la Lettre N°. 85 (p. 130 du T. I.) est erronée, là où il est dit que „les mots mentionnés ni d'autres particularités" marquées dans la Lettre N°. 89 de van Schooten (celle du 21 novembre 1650) ne se retrouvent pas dans le manuscrit que nous possédons. Tout au contraire les mots „*cum defectu*" que van Schooten voulait remplacer par „detracto" se retrouvent à tout moment dans les „Libri II et III" à commencer par la démonstration du „Lemma 3" du „Liber II", p. 127 du Tome présent. Et, de même, ce qui est dit des figures qui accompagnent les premiers théorèmes du „Liber I" correspond parfaitement à leur état actuel.

16) L'ouvrage cité dans la note 1 de la Lettre N°. 95 (p. 145 du T. I).

17) Voir la lettre à van Schooten du 29 octobre 1652, N°. 130 (p. 186 du T. I.). „Scis me hoc argumentum" [de solido corpore in humidum immerso] „antehàc pertractasse. Nunc autem in dioptricis totus sum".

18) Voir encore la réponse de Gregorius (N°. 101 à la page 153 du T. I.) et la réplique de Huygens (N°. 102, aux pages 154 et 155 du même Tome.)

Le 23 Mars de cette même année Huygens annota fur la page du titre: „Omnia mutanda" et de même en 1679. „Pleraque rejicienda fi non omnia. quia fpeculatio parum utilitatis habet, quamquam et Archimedes ipfe in his operam pofuit." Et encore, à la même ou à une autre occafion, fur la première page du „Liber I": „Haec de corporibus folidis in liquido fupernatantibus in primà adolefcentia fcripfi, cum nullum adhuc majoris momenti argumentum fefe obtuliffet, In his autem utilitas nulla, vel perquam exigua, Etfi Archimedes fecundo περὶ ὀχυμένων libro non abfimilia tractaverit. E primis Theorematis quaedam retineri poffent [19]) item de Cylindris. [20]) Reliqua vulcano tradenda."

Mais nous croyons que l'on nous faura gré de n'avoir pas donné fuite à cette dernière recommandation et qu'on ne foufcrira pas au jugement fi févère, porté par Huygens fur fon propre travail. A ce propos nous remarquerons feulement qu'au nom illuftre d'Archimède, mentionné par Huygens, on pourrait joindre aujourd'hui les noms de plufieurs autres favants qui, depuis, fe font occupés du même fujet et qui ont été devancés par Huygens fur des points importants dans le traité que nous publions; à commencer par Daniel Bernoulli [21]), Bouguer [22]) et Euler [23]) et à finir par M. Guyou qui a donné en 1879 [24]) une théorie nouvelle, appelée par M. Appell [25]) „la première théorie rigoureufe de la ftabilité des corps flottants"; théorie qui repofe fur le même principe que celle de Huygens. [26])

---

[19]) Sans doute surtout les „Theoremata 6 et 7" (p. 103—104) que nous avons mentionnés plus haut dans cet „Avertissement".

[20]) La déduction du centre de gravité d'un tronc de cylindre, c'est-à-dire les „Theoremata 1—4", p. 159—162, du „Liber III".

[21]) Voir les notes 54, p. 115, du „Liber I" et 22, p. 168, du „Liber III".

[22]) Voir la note 18, p. 128 du „Liber II".

[23]) Voir les notes 18 et 51, p. 140, du „Liber II".

[24]) Dans la „Revue maritime" de mars 1879. On trouve un compte rendu détaillé de la théorie de M. Guyou dans le T. 3 (p. 211—217 de l'édition de 1903) du „Traité de mécanique rationelle" de M. Appell.

[25]) Voir la page 189 de l'ouvrage cité de M. Appell.

[26]) C'est-à-dire le principe d'après lequel le centre de gravité de l'ensemble du corps flottant et du liquide se place aussi bas que possible. Tout comme Huygens l'a fait, M. Guyou commence par déduire de ce principe l'horizontalité de la surface libre du liquide et ensuite la loi d'Archimède. Et même le „Theorema 6" (p. 103) de Huygens, sur la valeur minima de la différence de niveau du centre de gravité du corps flottant d'avec celui de sa partie immergée, se retrouve chez M. Guyou.

DE IIS QUAE LIQUIDO SUPERNATANT.

LIBRI 3.

A°. 1650. [1])

[LIBER I.]

HYPOTHESES. [2])

I.

Si Corpus ſponte, ſeu gravitate ſuâ moveri incipiat, deorſum moveri; id eſt ut centrum gravitatis propius fiat plano horizonti parallelo.

II.

Si Corpora plura gravitati ſuâ moveri incipiant, ea deorſum moveri; id eſt, ut centrum gravitatis ex omnibus compoſitae propius fiat plano horizonti parallelo.

---

[1]) Sur la feuille qui contient le titre Huygens a ajouté plus tard: „Omnia mutanda 1652, mart. 23” et ensuite: „1679. Pleraque rejicienda si non omnia. quia speculatio parum utilitatis habet, quamquam et Archimedes ipse in his operam posuit”. Consultez à propos de ces annotations la dernière page de l'„Avertissement” qui précède cette pièce.

[2]) Ici encore, c'est-à-dire sur la première feuille du traité, Huygens a annoté en marge: „Haec de corporibus solidis in liquido supernatantibus in primà adolescentia scripsi, cum nullum adhuc majoris momenti argumentum sese obtulisset, In his autem utilitas nulla, vel perquam exigua, Etsi Archimedes secundo περὶ ὀχουμένων libro non absimilia tractaverit. E primis Theorematis quaedam retineri possent item de Cylindris. Reliqua vulcano tradenda”. Voir l'„Avertissement”, p. 92.

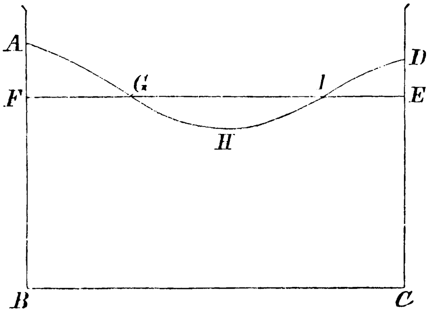
III. 3)

Si liquido corpus ſolidum immergatur, tantam liquidi molem ſupra propriam ſuperficiem aſcendere, quanta eſt moles corporis infra eandum ſuperficiem depreſſi.

Theorema I.

Liquidum quiescit cùm ſuperficies ejus plana eſt, et horizonti parallela. 4)

Fig. 1. 5)



Sit vas ABCD continens liquidum, cujus ſuperficies FE plana ſit et parallela horizonti; dico illud quieſcere.

Si enim non quiescit, moveatur itaque, ut ſuperficies ejus fiat AGHID.

Quia igitur ſpatia AGHIDCB, et FECB ſunt aequalia, dempto communi ſpatio FGHIECB, erit ſpatium GHI aequale duobus FAG et EDI. Porro quia ſpatium GHI totum eſt infra planum FE, ſequitur centrum gravita-

3) Sur une feuille contenant, à ce qu'il nous semble, l'avant-projet de la première partie du traité présent (jusqu' au theorème 3 inclus), on trouve, au lieu des trois hypothèses formulées du texte, les considérations suivantes: „Liquidi naturam esse ut quatenus se extendere a vase continente non prohibetur, descendat, ac proinde eam figuram sumat cujus centrum grav. sit quam humillimum.

„Corpore autem solido super liquidum innatante, ita utrumque se componere ut centrum gr. commune sit quam humillimum".

Ensuite on rencontre sur la même feuille une esquisse de la figure du „Theorema 1" du texte et une démonstration du „Theorema 3" que nous reproduirons dans la note 14.

4) Le théorème correspond à la „Propositio II" d'Archimède: „Omnis humidi consistentis, atque manentis superficies sphaerica est; cuius sphaerae centrum est idem, quod centrum terrae". que nous citons d'après l'ouvrage: „Archimedis de iis quae vehuntur in aqua libri duo. A'Federico Commandino Urbinate in pristinum nitorem restituti, et commentariis illustrati. Cum privilegio in annos X. Bononiae, Ex Officina Alexandri Benacii. MDLXV". 4°. Voir la page 1 verso. On le trouve sous une autre rédaction, p. 360 du T. II de l'édition de Heiberg, mentionnée dans la note 2 de la page 50 du Tome présent; mais nous préférons ici et ailleurs de citer d'après Commandin parce que Heiberg a suivi l'édition de Tartalea et qu'il est bien plus probable que Huygens se soit servi de celle de Commandin ou d'une de celles qui en dérivent.

Ajoutons que la démonstration qui va suivre, partant d'un autre principe, diffère complètement de celle d'Archimède. On en rencontrera une autre leçon dans l'Appendice I du traité présent.

Voir encore, sur une déduction moderne du même théorème, analogue à celle de Huygens, la note 26 de l'Avertissement.

5) La numération des figures est de nous.

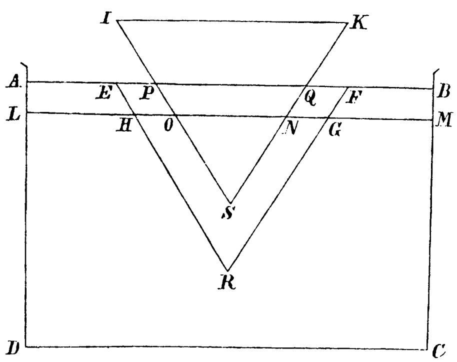
tis liquidi quod eo continebatur fuiſſe infra planum FE; ſimiliter quia ſpatia FAG, EDI, ſunt tota ſupra planum FE, ſequitur centrum grav. liquidi quod iis continetur eſſe ſupra idem planum. Igitur centrum gravitatis liquidi quod continebatur ſpatio GHI, altius factum eſt poſtquam idem liquidum aſcendit in ſpatia FAG, EDI; liquidi autem quod continetur ſpatio FGHIECB centrum grav. eodem manet loco. Ergo centrum gravitatis omnis liquidi altius eſt cum continetur ſpatio AGHIDCB, quam cum terminatur ſuperficie FE. Sed quia liquidum ſponte motum eſt, oportet ut centrum ſuae gravitatis eo motu deſcenderit [a][6]), igitur ſimul et aſcendit et deſcendit, quod eſt abſurdum.

THEOREMA 2.

Corpus ſolidum, quod liquido ſuae magnitudinis aequiponderat, demiſſum in liquidum, ita ut totum demerſum ſit, contingatque tantummodo liquidi ſuperficiem, ita ut poſitum eſt manebit. [7])

Sit vas ADCB continens liquidum, in quod demerſum ſit corpus ERF, aequiponderans liquido ſuae magnitudinis, ita ut totum demerſum ſit, contingatque tantummodo liquidi ſuperficiem AB ſecundum EF: dico ita poſitum quieſcere.

Fig. 2.



Si enim non quieſcit, aſcenderit primum uſque in ISK, ideoque liquidum deſcenderit ex ſpatiis AEHL, FBMG. ad replendum ſpatium HOSNGR, quod neceſſario prioribus duobus aequale eſt.

Quia igitur ſpatium LMCD utrâque corporis poſitione plenum eſt materia ejuſdem gravitatis, ſequitur etiam eodem loco habiturum centrum ſuae gravitatis; at reliqua gravitas quae priori poſitione continetur ſpatio ABML, minus altum habet centrum ſuae gravitatis quam poſitione ſecunda cum continetur ſpatio IONK, quia pars PONQ communis eſt, et partis IPQK centrum grav. ſupra planum AB, partium vero APOL, BQNM infra idem planum, Igitur centrum gravitatis univerſae tam liquidi quam corporis

[6]) La lettre *a* est un signe de renvoi ajouté par Huygens. En effet, on lit en marge: „*a* hypoth. 1”.

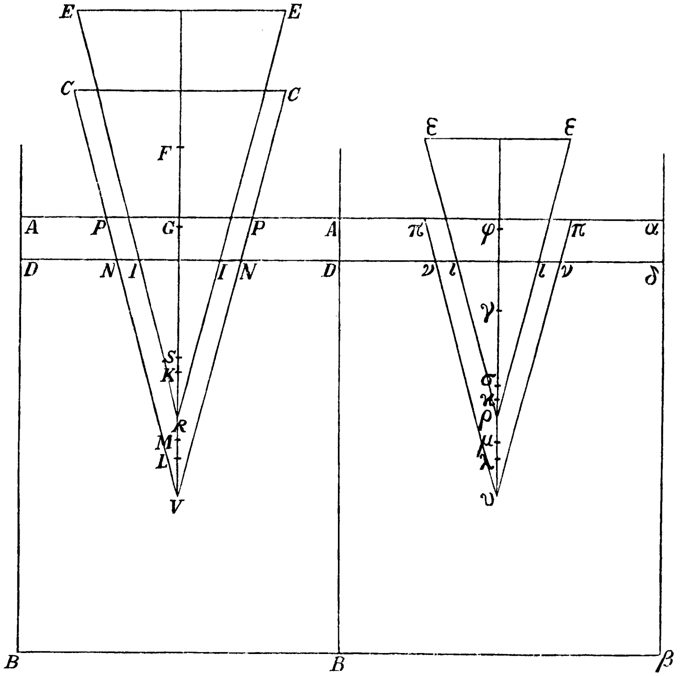
[7]) Theorème correspondant à la Prop. III (p. 2 verso) de l'édition de Commandin: „Solidarum magnitudinum, quae aequalem molem habentes aeque graves sunt, atque humidum; in humidum demissae demergentur ita, ut ex humidi superficie nihil extet: non tamen ad huc deorsum ferentur”. (Heiberg, T. II, p. 362). Démonstration essentiellement différente.

impoſiti poſteriori poſitione altius eſt quam priori, quod eſt contra hypoth. 2dam, quum ſtatuatur corpus ultro motum eſſe. Non aſcendet igitur corpus ERF; Sed neque deſcendet, nam ſi receſſerit a ſuperficie liquidi; continuò is locus quo exceſſit replebitur liquido, unde fiet ut ſemper totum ſpatium ABCD plenum ſit materia ejusdem gravitatis, ideoque habeat centrum gravitatis eodem loco. Abſurdum igitur quoque eſt corpus ERF amplius deſcendere, Ergo ut poſitum eſt manebit, quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 3.

Corpus ſolidum levius liquido ita ei ſupernatat, ut tanta moles liquidi, quanta eſt partis merſae, toti corpori aequiponderet. [8])

Fig. 3.



Sit vas ABBA continens liquidum, cui impoſitum ſit corpus CVC, ita ut liquidum tantae molis, quanta eſt partis merſae PVP, toti corpori aequiponderet; dico corpus CVC neque emerſurum magis, neque ulteriùs demerſum iri.

Si enim fieri poteſt emergat primum, et ponatur ſublatum usque in ERE. Sit G centrum gravitatis corporis CVC, et F ejusdem quum ſustulit ſeſe in ERE; ſit etiam M centrum grav. omnis liquidi primâ corporis poſitione, nimirum liquidi APVPABB; L vero poſitione ſecundâ, nimirum liquidi DIRIDBB; conſtat autem M fore ſupra L, nam

[8]) Théorème correspondant à la Prop. V, p. 4 recto de l'édition de Commandin: „Solidarum magnitudinum quaecunque levior humido fuerit, demissa in humidum usque eô demergetur, ut tanta moles humidi, quanta est partis demersae, eandem, quam tota magnitudo, gravitatem habeat." (Heiberg, T. II, p. 367). Démonstration différente.

Voir encore, sur une demonstration moderne fondée sur le même principe, la note 26 de l'Avertissement.

utrâque positione commune quidem est liquidum DNVNDBB, at reliqua liquidi pars quae primò continebatur spatiis duobus APND, quae sunt supra planum DD, postea descendit ad replendum spatium NIRINV, quod est infra planum DD. divisa porro sit linea GM (quae interjacet centra grav. corporis, et omnis liquidi, primâ positione) in K, ita ut MK sit ad KG, sicut gravitas corporis ad gravitatem liquidi, eritque K centrum gravitatis universae primâ corporis positione. Item FL divisa sit in S, secundum proportionem eandem eritque S centrum grav. universae positione corporis secunda. Si igitur punctum S puncto K altius esse demonstratum fuerit, sequetur absurdum esse, corpus CVC sponte suâ motum fuisse, nam S deberet esse infra K[a] [9]) Illud autem sic demonstrabitur. Sit juxta positum vas alterum AB$\beta\alpha$, priori simile et aequale, eâdem positum altitudine; liquidi etiam contineat tantundem cujus superficies sit Aα, nempe dum ei immersum est corpus $\pi\upsilon\pi$, quod figuram et magnitudinem habeat partis mersae PVP, gravitatem vero quam liquidum suae molis, id est gravitatem totius corporis CVC; et centrum gravitatis γ. Jam idem corpus è liquido extrahatur usque in $\varepsilon\rho\varepsilon$, in quantum sublatum ponebatur corpus CVC, ita ut ρ sit eâ altitudine quâ R; sitque φ centrum grav. corporis positi in $\varepsilon\rho\varepsilon$. et manifestum est distantiam $\gamma\varphi$ aequalem esse GF. praeterea quoque manifestum est priori positione corporis $\pi\upsilon\pi$, centrum gravitatis omnis liquidi fuisse in μ altitudinis M, posteriori vero esse in λ altitudinis L. denique divisa sit $\mu\gamma$ in $\varkappa$, ita ut $\mu\varkappa$ sit ad $\varkappa\gamma$, sicut gravitas corporis $\pi\upsilon\pi$ ad gravitatem omnis liquidi, et $\lambda\varphi$ in σ secundum proportionem eandem, eritque $\varkappa$ centrum gravitatis universae posito corpore in $\pi\upsilon\pi$, et σ sublato eodem in $\varepsilon\rho\varepsilon$.

Quia igitur patet ex Theorematis praecedentis demonstratione, quod corpore $\pi\upsilon\pi$ sublato in $\varepsilon\rho\varepsilon$, centrum gravitatis universae altius sit quam fuerit antea, sequitur hic centrum grav. σ altius esse quam $\varkappa$; Est autem per constr. $\lambda\sigma$ ad $\sigma\varphi$ ut $\mu\varkappa$ ad $\varkappa\gamma$, igitur $\lambda\varkappa$ ad $\varkappa\varphi$ minorem habet rationem quam $\mu\varkappa$ ad $\varkappa\gamma$; igitur et dividendo $\lambda\mu$ ad $\gamma\varphi$ minorem habet rationem, quam $\mu\varkappa$ ad $\varkappa\gamma$, [10]) sive quam MK ad KG, hanc enim manifestum est esse eandem.

ergo quum $\lambda\mu$, LM, et $\gamma\varphi$, GF sint aequales, habebit LM ad GF rationem minorem quam MK ad KG, et componendo LK ad KF minorem quam MK ad KG [11]),

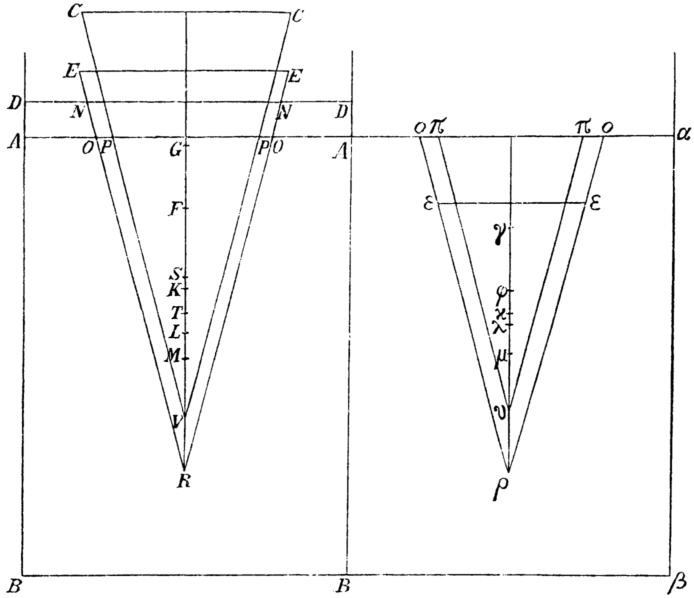
[9]) Huygens annota en marge „a hypoth. 2."

[10]) En effet l'inégalité $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ entraîne $\frac{a-c}{b-d} < \frac{c}{d}$, quand on a, comme ici, $c < a$, $d < b$. Quant à l'emploi du terme „dividendo", comparez p. e. l'ouvrage de Clavius „Euclidis Elementorum Libri XV", cité dans la note 6 de la Lettre N°. 325 (p. 477 du T. I), où l'on rencontre ce terme dans la „Prop. 29" du „Liber V" (p. 521 de l'édition de 1607). La proposition appliquée ici par Huygens se déduit facilement en combinant le „Scholium" de cette „Prop. 29" avec celui de la „Prop. 27" du même livre.

[11]) Puisque encore $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ entraîne $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Comparez la „Prop. 28", p. 520 de l'ouvrage mentionné dans la note précédente.

ſive quam LS ad SF; unde ſequitur punctum S eſſe ſupra K; quare abſurdum eſt dicere corpus CVC aſcendiſſe usque in ERE.

Fig. 4.



Jam corpus CVC, ſi fieri poteſt, amplius demergatur uſque in ERE, [12]) ideoque liquidum ex ſpatio OPVPOR ascenderit in ſpatia DNOA. Sit rurſus G centrum gravitatis corporis CVC; F verò ejusdem cum eſt in ERE. Sit etiam M centrum gravitatis omnis liquidi primâ poſitione corporis, nimirum liquidi APV PABB, T verò liquidi omnis DNRNDBB: diviſaque ſit GM (quae interjacet centra gravitatis corporis et liquidi,) in K, ita ut MK ſit ad KG, ſicut gravitas corporis ad gravitatem omnis liquidi, eritque K centrum gravitatis univerſae poſito corpore in CVC. Item TF diviſa ſit ſecundum proportionem eandem, in S, eritque S centrum gravitatis univerſae poſito corpore in ERE. Si itaque demonſtratum fuerit punctum S puncto K altius eſſe, ſequetur abſurdum eſſe, corpus CVC ſponte ſua motum fuiſſe, nam S deberet eſſe infra K^{b} [13]). Illud autem ſic demonſtrabitur.

Ponatur ut ſuprà alterum vas AB$\beta\alpha$, liquidi continens tantundem ac vas ABBA, cujus liquidi ſuperficies ſit Aα, dum ei immerſum eſt corpus $\pi\upsilon\pi$, quod figurâ quidem magnitudine et diſpoſitione idem ſit cum parte merſâ PVP, gravitate verò aequale liquido ſuae molis, ut nempe aequet gravitatem totius corporis CVC. dicti corporis $\pi\upsilon\pi$ centrum gravitatis ut ſuprà ſit γ, et μ liquidi A$\pi\upsilon\pi\alpha\beta$B. deinde idem corpus deprimatur uſque in $\varepsilon\rho\varepsilon$, in quantum deſcendit corpus CVC, ita ut ρ ſit eà altitudine quâ R; atque hâc ejus poſitione, ipſius quidem centrum gravitatis ſit φ, liquidi vero circumfluentis centrum grav. λ. Manifeſtum autem eſt, quia vas AB$\beta\alpha$ utrâque corporis poſitione plenum eſt materia ejuſdem gravitatis, cen-

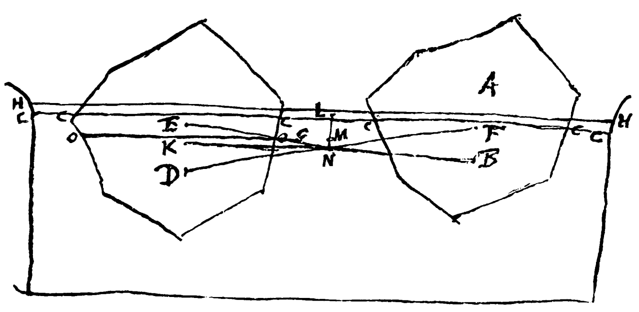
[12]) Voir la figure 4.

[13]) Huygens annota en marge „b hypoth. 2."

trum univerſae gravitatis utrâque poſitione idem eſſe; unde ſi κ fuerit centrum gravitatis univerſae, erit tam $\mu\kappa$ ad $\kappa\gamma$ quàm $\lambda\kappa$ ad $\kappa\varphi$ ſicut gravitas corporis ad gravitatem omnis liquidi. Jam porrò ſumatur ex M, ML aequalis ipſi $\mu\lambda$, eritque L infra T quod eſt centrum gravitatis liquidi DNRNDBB; nam quia liquidi contenti ſpatio AOROABB centrum grav. eſt ejusdem altitudinis atque centrum grav. liquidi ſimilis A$o\rho o\alpha\beta$B, reliqui verò liquidi contenti ſpatiis DNOA, centrum grav. altius quam reliqui liquidi contenti ſpatio $oo\varepsilon\varepsilon$, ſequitur centrum gravitatis omnis liquidi DNRNDBB quod eſt T, altiùs eſſe centro grav. omnis liquidi circumfuſi corpori $\varepsilon\rho\varepsilon$ quod eſt λ, ideoque T etiam ſupra L, nam L poſitum fuit ea altitudine quâ λ. Quum igitur ſit $\lambda\kappa$ ad $\kappa\varphi$, ſicut $\mu\kappa$ ad $\kappa\gamma$, erit etiam dividendo $\lambda\mu$ ad $\varphi\gamma$, ſicut $\mu\kappa$ ad $\kappa\gamma$, ſive ut MK ad KG, eadem enim eſt proportio. et quia $\lambda\mu$ ipſi LM, et $\varphi\gamma$ ipſi FG ſunt aequales, erit quoque LM ad FG, ut MK ad KG, et dividendo LK ad KF, ut MK ad KG, ſive ut TS ad SF; quare cum T ſit ſupra L, erit etiam S ſupra K. Igitur abſurdum quoque eſt dicere corpus CVC ulterius demerſum fuiſſe. Reſtat igitur ut neque magis emergere poſſit neque ulterius demergi, quod erat demonſtrandum. [14])

[14]) Voici une autre démonstration du même theorème, empruntée à la feuille détachée que nous avons mentionnée dans la note 3.

„Demonstratio propositionis archimedeae de innatantibus"



„Priori positu" [voir la figure de droite] „corpus AB, partem demersam habet B sub aquae superficie CC, et ponitur aquae moles aequalis parti B gravitatem habere corpori toti AB aequalem. Ostendendum est ita mansurum, ut nec magis nec minus demergatur. Si enim potest demergatur primo amplius, ut parti B quam abscindebat superficies aquae CC, jam infra aquam aequalis sit pars D infra superficiem OO sita, quo fiet ut aquae pars aequalis corporis portioni E, inter CC et OO interceptae, ascendat supra superficiem CC, puta ad HH.

Sit F centr. gr. totius AB corporis. B centr. gr. partis demersae sub CC D centr. gr. partis isti aequalis sub OO, sive aquae spatium D replente. Sit E centr. gr. spatii E inter CC et OO comprehensi. K vero centr. gr. corporis totius ut est in secundo positu.

Jungatur FD. Et dividatur bifariam in N. Erit in primà positione punctum N centr. gr. compositae ex corpore AB et aqua D sub OO contenta, quia cum haec aequalis sit aquae contentae spatio B sub CC posito, quae pondere

Theorema 4.

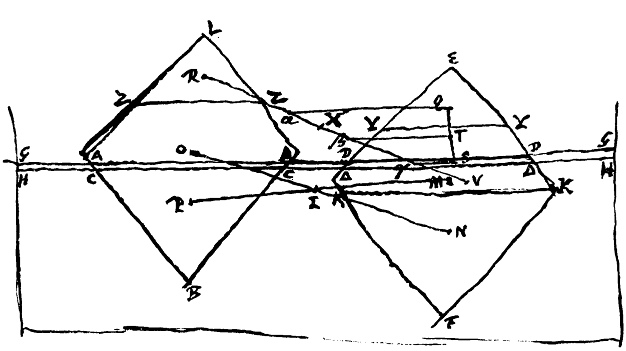
Corpus ſolidum ita liquido ſupernatat ut pars merſa ad totum eam habeat rationem, quam corpus ad liquidum in gravitate.

Sit Corpus AB liquido ſupernatans cujus ſuperficies CD; dico partem merſam

---

aequalis ponitur corpori AB, oportet centr. gr. N dividere bifariam rectam centra connectentem FD. Sed et spatium E inter CC, OO aqua plenum est primà positione. Ergo juncta NE erit in ea centr. gr. compositae ex corpore AB et ex aqua spatii DE, quod centrum ſit G.

Rursus in secunda positione quia distantia centrorum gr. K, D eadem est quae in primà positione erat centrorum F, B, apparet ducta K, B quae jungit centr. gr. totius corporis in secunda positione cum centro aquae occupantis jam spatium B sub CC, apparet inquam rectam KB transire per punctum N atque ibidem bifariam secari, adeo ut N quoque sit centr. gr. compositae ex toto corpore in secunda positione et aquae mole quae successit in spatium B sub CC. Quia autem aqua quae primà positione continebatur spatio E inter CC et OO, jam in secunda positione ascendit super CC in spatium CCHH necesse est ejùs aquae centr. gr. esse supra CC. sit in L et jungatur NL. Ergo in ea erit jam centr. gr. compositae ex corpore toto in secunda positione et ex aqua spatii B sub CC, et ex aqua supra CC elevata. quod centrum ſit M. Erit autem necessario LN ad NM ut EN ad NG. Sed punctum L est altius quam E cum hoc sit infra illud supra superficiem CC. Ergo et punctum M altius quam G. Est autem M et G centr. gr. corporum quae positum mutant haec in prima, illud in secunda positione, reliquà aqua pristinum spatium obtinente. Ergo et centrum gravitatis illud ultro altius ascendisset quod est absurdum.

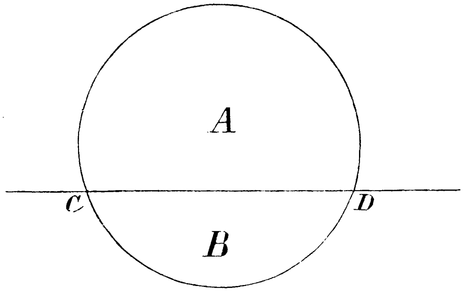


Dicatur jam corpus EF [voir la figure à côté] altius extra aquam emersurum, eoque posito intelligatur collocatum in LB. prima positione EF corpus, ABA aqua, itemque HHGG circumfusa.

Sit aqua ABA aequalis ponderis cum corporis parte YFY cujus centr. grav. M. et abscindatur KFK ∞ ABA. Ergo aqua spatii DDKK aequipond. parti corporis reliquae YEY vel ZLZ. quia aqua totius spatii DFD aequiponderans

B ad corpus AB eam habere rationem, quam idem corpus ad liquidum in gravitate, id eſt, quam habet gravitas corporis ad gravitatem liquidi ſuae molis. Liquidum namque tantae molis quanta eſt partis B aequiponderat corpori AB [a15]), atqui pondus liquidi magnitudinis B est ad pondus liquidi magnitudinis totius corporis, ſicut pars B ad totum corpus AB, ergo quod aequiponderat corpori AB, ſive gravitas corporis AB eſt ad gravitatem liquidi tantae molis quanta eſt corporis AB, ut magnitudo B ad magnitudinem totius corporis AB; quod erat ostendendum.

Fig. 5.



---

ponitur corpori toti EF. Sit P centr. gr. spatii ABA, N spatii KFK. O partis ZBZ aequalis YFY. Jam secunda positione erit LB corpus, et aqua quae erat in ABA complebit KFK. Et reliqua aqua circumfusa quae erat inter GG et HH replebit spatium ΔΔKK.

In prima pos.e centrum gr. compositae ex corpore YFY et aqua ABA erit punctum I quod bifariam secat PM. In secundo pos. erit idem I punctum centr. grav. compositae ex corpore ZBZ et aqua KFK, adeo ut quantum ad haec nihil mutaverit altitudo centri gr.

At in prima pos.e centr. gr. aquae circumfusae inter GG, HH (excepta tamen hic ea quae replet spatium AACC) centrum gr. est inter GG, HH, quod sit S. ductaque SQ ad centr. gr. partis YEY, erit inter SQ centr. gr. compositae ex dicta aqua circumfusa et partem corporis YEY, esto illud T. In secunda pos. vero dicta aqua circumfusa continetur spatio KΔΔK ideoque centr. grav. habet inter ΔΔ et KK, quod sit V, et ducatur VR ad centr. gr. partis ZLZ ipsi YEY aequalis. Eritque in recta VR centr. grav. compositae ex aqua spatii ΔΔKK et corporis ZLZ. quod centrum sit X. Ergo RX ad XV ut QT ad TS. estque ratio minoris ad majus, quia cum aqua spatii DDKK aequiponderet corpori ZLZ, erit hoc gravius aqua spatii ΔΔKK, unde RX brachium brevius quam XV. Est autem altitudo S super V minor quam DD supra KK cui aequalis altit. R supra Q. hinc jam ostenditur X altius quam T. nam ductis ab Q, T, et S horizontalibus quae occurrant rectae RV in α, β, γ. Quia RX minor quam XV, et Rα major quam Vγ. Erit utique minor ratio αX ad Xγ quam RX ad XV, hoc est quam $\alpha\beta$ et $\beta\gamma$ unde αX minor quam $\alpha\beta$. Et X proinde altior β".
Dans l'Appendice I du traité présent on rencontrera une troisième démonstration du même théorème.

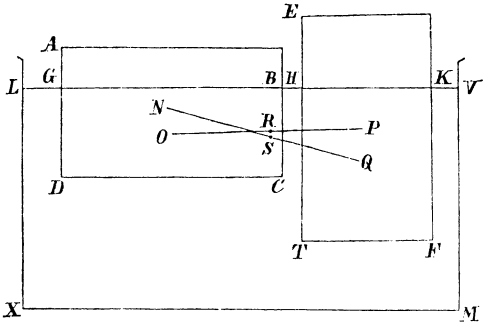
[15]) Huygens annota en marge: „*a* Theor. 3."

Theorema 5.

Si corpus ſolidum liquido ſupernatans inclinetur ultro et alium ſitum acquirat, tum punctum in medio poſitum lineae, quae conjungit centra gravitatis, corporis totius in poſteriori ſitu et partis merſae in priori, inferius eſt puncto quod item eſt medium lineae alterius, quae jungit centra gravitatis totius corporis in priori ſitu et partis merſae in poſteriori.

Sit vas LXMV, et ſuperficies liquidi eo contenti LV, ſupernatante ei corpore EF, quod ponatur ultro inclinari et ſitum acquirere diverſum, ita ut jam contineatur ſpatio AC. dico punctum S, in medio linea NQ, quae jungit centrum gravitatis corporis in poſteriori ſitu, cum centro partis merſae in priori, inferius eſſe puncto R, quod eſt in medio lineae OP, quae jungit centrum gravitatis corporis in priori ſitu cum centro gravitatis partis merſae ſitu poſteriori.

Fig. 6.



Intelligatur enim corpus EF nondum inclinatum eſſe, atque idea ſpatium DGBC adhuc liquido plenum, quod tamen ipſum concipiatur ut diſtinctum à reliquo liquido. Ergo quia liquidum quod continetur ſpatio DGBC aequiponderat corpori AC [a] [16]) ſive EF, erit utriuſque commune centrum gravitatis in R, medio lineae OP quae eorum centra gravitatis conjungit. Jam deinde intelligatur corpus in poſteriori ſitu in AC, et exceſſiſſe e priore loco: et quia pars merſa DGBC exactè aequalis eſt parti THKF, ideo quantum liquidi illâ continebatur, jam continetur ſpatio HKTF; quod liquidum, quia aequiponderat corpori AC erit utriuſque gravitatis centrum commune in S, medio lineae, quae eorum centra gravitatis conjungit. quum autem EF corpus ultro motum fuerit, debet centrum univerſae gravitatis, quae ex ipſo et ex omni liquido componitur poſteriori corporis ſitu inferius eſſe quam fuit dum corpus adhuc erat in EF. unde quum utroque ſitu centrum gravitatis reliqui liquidi XLGDCBHTFKVM maneat eodem loco, ſequitur centrum ejus gravitatis quae cum illo univerſam gravitatem conſtituit, poſteriori ſitu cum eſt in S, inferius eſſe debere quam priori corporis ſitu cum eſt in R. quod erat demonſtrandum.

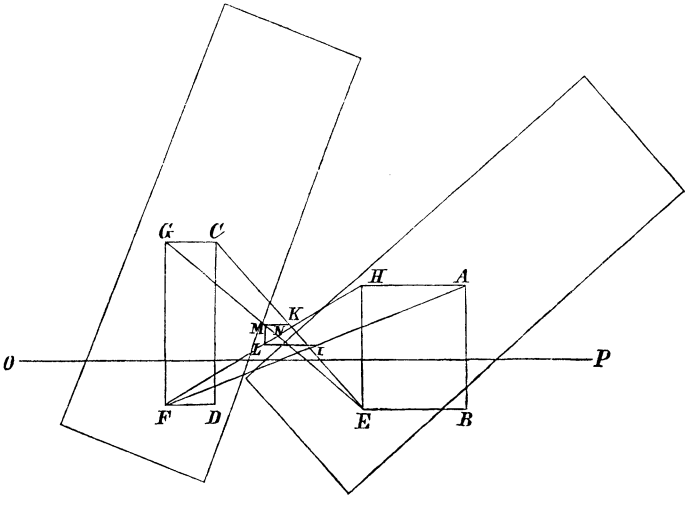
[16]) „*a* theor. 3. h. lib." [Huygens].

Theorema 6.

Si Corpus ſolidum liquido ſupernatans ultrò inclinetur et alium ſitum acquirat; altitudo centri gravitatis totius corporis ſupra centrum gravitatis partis merſae, minor erit poſitione corporis poſteriori quam priori.

Sint C et F centra gravitatis, illud totius alicujus corporis, hoc vero partis merſae corporis ejuſdem. Idem verò corpus ponatur ultro inclinatum, talemque ſitum acquiſijſſe, ut jam totius centrum gravitatis ſit A, partis verò merſae centrum gravitatis E. [dico altitudinem C ſuprà F majorem quàm eſt altitudo A ſupra E]. [16]) aganturque per puncta E et F lineae EB et FD parallelae ſuperficiei liquidi OP. dico perpendicularem AB, quae ex centro gravitatis A cadit in BE, minorem eſſe perpendiculari CD, quae cadit ex centro grav. C in FD.

Fig. 7.



abſolvuntur enim rectangula DG et BH, ſi opus eſt. (p[otes]t enim fieri ut perpd. CD inciderit in punctum F et AB ppd. inciderit in punctum E). junganturque AF, CE, HF et GE, quae duae ſeſe interſecant in N puncto, diviſiſque CE et AF bifariam in K et I ducantur IL et KM ſuperficiei liquidi parallelae, quibus manifeſtum eſt etiam HF et GE bifariam dividi. denique jungatur ML.

Quum igitur ſupra demonſtratum ſit [17]), punctum I quod bifariam ſecat AF inferius eſſe puncto K. quod ſecat CE bifariam, ſequitur et punctum L inferius eſſe puncto M: cumque GF et HE ſunt parallelae, erit linea ML, quae utramque GE et FH bifariam dividit, iisdem GF et HE parallela. caditque eadem ML neceſſario ab eâ parte interſectionis N, quae eſt verſus poſitionem corporis prio-

---

[16]) Au lieu de la phrase entre crochets ou trouve dans le texte un signe de renvoi correspondant à l'annotation en marge; „dico altitudinem &c. ut in Theor. sequ."; mais nous avons préféré de construire la phrase d'après l'indication contenue dans cette annotation.

[17]) Voir le „Theorema 5."

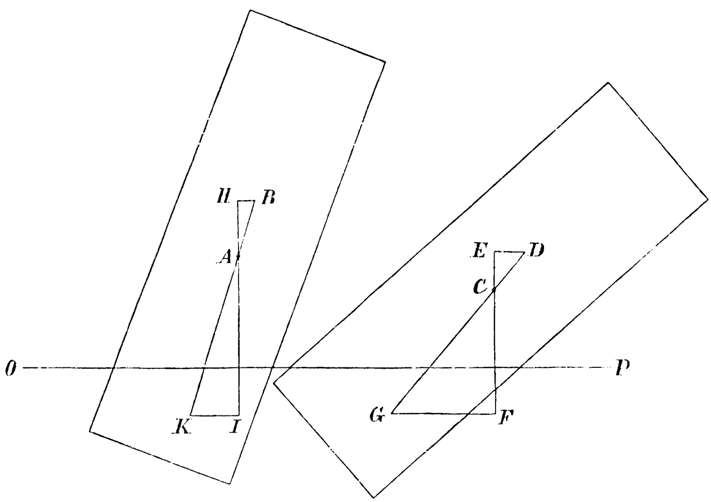
rem. quia itaque GM aequalis eſt ME, erit GN major quàm NE; quae quum ſint homologa latera ſimilium triangulorum GNF, ENH, erit et GF major quam HE. unde et CD major quam AB; quod erat demonſtrandum.

Theorema 7.

Si corpus ſolidum liquido ſupernatans ultrò inclinetur et alium ſitum acquirat, altitudo centri gravitatis partis enatantis ſupra centrum gravitatis totius corporis minor erit poſitione corporis posteriori quam priori.

Sint A et B centra gravitatis, illud totius alicujus corporis, hoc verò partis quae enatat. Idem verò corpus ponatur ultro inclinatum talemque ſitum aquiſijſſe, ut

Fig. 8.



jam totius centrum grav. ſit C, partis verò quae enatat centrum grav. D. dico altitudinem B ſuprà A majorem, quàm eſt altitudo D ſupra C. id eſt, ductis BH et DE parallelis ſuperficiei liquidi OP, in easque perpendicularibus AH, CE, majorem eſſe HA quam CE.

Productis enim BA et DC, fiat AK ad AB, nec non CG ad CD, ut partes enatantes ad partes merſas; et manifeſtum eſt K et G fore centra gravitatis partium merſarum. ſimiliter productis HA et EC fiant AI ad AH nec non CF ad CE, ut KA ad AB, ſive ut GC ad CD, eadem enim eſt proportio. jungantur KI et GF et manifeſtum eſt utramque parallelam fore ſuperficiei liquidi. Igitur propter triangula ſimilia KAI, BAH, eſt IA ad AH, ſicut KA ad AB; ſed KA eſt ad AB, ſicut GC ad CD, quia utroque corporis ſitu pars merſa ad enatantem habet eandem rationem; igitur IA eſt ad AH, ut GC ad CD; GC autem eſt ad CD, ut FC ad CE, propter ſimilia triangula GCF, DCE; igitur IA ad AH, ſicut FC ad CE, eſt autem IA major quam CF[a] [18]), ergo et AH major quàm CE. quod erat demonſtrandum.

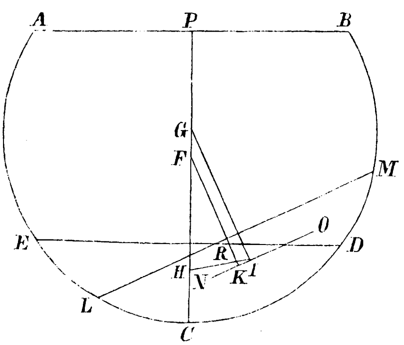
[18]) „*a* theor. 6." [Huygens].

THEOREMA 8. [19])

Sphaerae portio liquido ſupernatans demerſo vertice, quamcunque ad liquidum in gravitate proportionem habuerit, conſiſtet axe ad liquidi ſuperficiem perpendiculari. [20])

Sit portio ſphaerae ACB, liquido ſupernatans, cujus ſuperficies ED. ponendo videlicet portionem ad liquidum in gravitate eſſe, ut pars ECD eſt ad totam portionem, axis autem PC ſit ad perpendiculum ſuperficiei ED. dico portionem ita poſitam quieſcere. Si enim fieri poteſt moveatur, ita ut jam ſuperficies liquidi ſit LM, et pars merſa LCDM et portio ſecari intelligatur plano ACB per axem, recto ad ſuperficiem liquidi: Sitque G centrum ſphaerae; F centrum gravitatis portionis ACB; H verò partis prius merſae ECD. Item I partis LCDM. Sit porrò per I ducta NO parallela LM: et junctâ GI, quam manifeſtum eſt perpendicularem eſſe ad NO; in eandem NO perpendicularis cadat FK. jungantur rectâ lineâ centra gravitatis H et I, quam manifeſtum eſt alicubi ſecare debere FK, ut in R, quia centrum grav. F ſemper cadit inter G et H.

Fig. 9.



Quum igitur PC ſit perpendicularis ad ſuperficiem liquidi ED, ſequitur FH eſſe prius altitudinem centri gravitatis portionis ACB ſupra centrum grav. partis merſae ECD. Similiter FK eſt altitudo centri grav. portionis ACB ſupra centrum grav. partis merſae LCDM, nempe quum portio mota eſt. quia autem partes ECD, LCDM ſunt aequales, ſequitur centrum ſphaerae ab earum centris gravit. H et I aequaliter diſtare; quam ob rem GI aequalis eſt GH; unde et FR aequalis FH;

[19]) Avec le théorème qui suit, la série des théorèmes généraux, auxquels le théorème I du livre II se joindra plus tard, est interrompue. Et Huygens procède à appliquer les résultats obtenus, d'abord aux théorèmes plus spéciaux, découverts par Archimède, qui se rapportent aux segments sphériques et aux conoïdes paraboliques flottants, et dont il va donner des démonstrations nouvelles; ensuite à la détermination de la stabilité des positions d'équilibre d'autres corps flottants; c'est-à-dire des cônes de révolution flottant avec l'axe dans la situation verticale.

[20]) Theorème correspondant à la Prop. VIII p. 6 recto de l'édition de Commandin: „Si aliqua magnitudo solida leuior humido, quae figuram portionis sphaerae habeat, in humidum demittatur, ita ut basis portionis non tangat humidum: figura insidebit recta, ita ut axis portionis sit secundam perpendicularem. Et si ab aliquo inclinetur figura, ut basis portionis humidum contingat; non manebit inclinata si demittatur, sed recta restituetur". (Heiberg, T. II, p. 371).

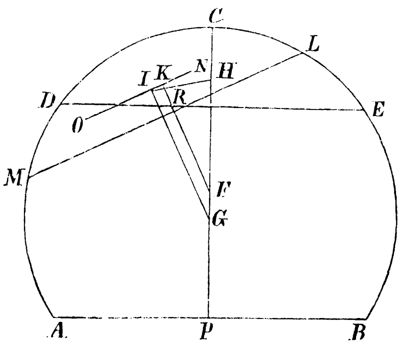
FK vero major eſt quàm FR; ergo et major quàm FH; quod eſt abſurdum, quum portio ultro mota dicatur [b 21]). Non movebitur igitur, quod erat ostendendum.

THEOREMA 9.

Sphaerae portio liquido ſupernatans demerſà baſe quamcùnque ad liquidum in gravitate proportionem habuerit, conſiſtet axe ad liquidi ſuperficiem perpendiculari. [22])

Repetatur eadem figura ſed invertatur, habeatque jam portio ad liquidum in gravitate proportionem, quam pars DABE ad totam. unde ſi axis CP ponatur ad perpendiculum ſuperficiei DE, erit pars merſa DABE, enatabit verò pars DCE quae theoremate praecedenti merſa erat, dico autem ſic poſitam quieſcere.

Fig. 10.



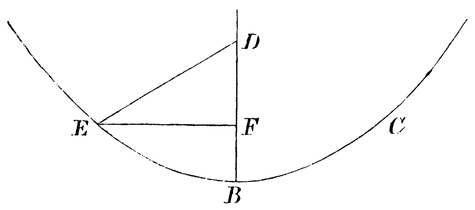
Si enim non quieſcit itaque moveatur ut jam ſuperficies liquidi ſit ML et reliqua conſtructa ſint ut ſupra. Igitur iterum altitudo KF major erit altitudine FH, quod eſt abſurdum [c 23]), quum portio ultro mota dicatur; quieſcetergo; quod erat demonſtr.

LEMMA I.

Sit parabole vel hijperbole EBC, in cujus axe DB, ſumpta ſit BD non major dimidio latere recto; ductaque ſit ex D alia linea DE quae ſectioni occurrat. dico DE majorem eſſe quam DB. [24])

Ducatur enim ordinatim applicata EF. Quia igitur rectangulum ſub BF et latere recto aequale vel minus eſt quadrato FE, DB vero non major dimidio latere recto, ſequitur duplum rectanguli DBF non majus eſſe quadrato FE: ergo addito utrinque quadrato DF, erit duplum rectanguli DBF una cum quadrato DF non majus quadrato DE. ſed duplum rectanguli DBF una cum quadrato

Fig. 11.



[21]) „*b*. theor. 6." [Huygens].

[22]) Théorème correspondant à la Prop. IX p. 8 recto de l'édition de Commandin: „Quòd si figura" [portionis sphaerae] „leuior in humidum demittatur, ita ut basis tota sit in humido;

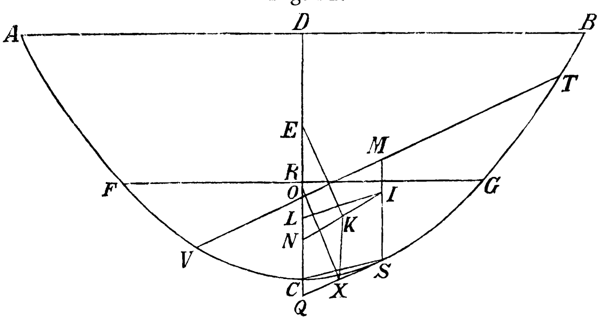
DF excedit quadratum DB, quadrato FB. Igitur quum duplum rectanguli DBF una cum quadrato DF non majus eſſe demonſtratum fuerit quadrato DE, erit quadratum DB minus quadrato DE; quare et DB minor quam DE; quod erat oſtendendum.

Theorema 10.

Recta portio Conoidis parabolici, ſi axem habuerit minorem quam ſubſeſquitertium[25]) *lateris recti* [a 26]), *et proportionem ad liquidum in gravitate quamcunque; liquido ſupernatans demerſo vertice, conſiſtet axe ad liquidi ſuperficiem perpendiculari.* [27])

Sit recta portio Conoidis parabolici ACB, cujus axis DC minor ſit $\frac{3}{4}$ lateris recti et liquido ſupernatans poſita ſit recta, ita ut axis DC ſit perpendicularis ad liquidi ſuperficiem quae ſit FG (ponendo videlicet portionem ad liquidum in gravitate habere eam proportionem quam pars FCG ad totam portionem,) dico eam ita poſitam neceſſario conſiſtere.

Fig. 12.



Si enim fieri poteſt inclinet ad partem aliquam ita ut jam liquidi ſuperficies ſit VT. Et intelligatur portio ſecari per axem plano ACB, recto ad liquidi ſuperficiem. dividatur autem axis DC in E ita ut pars EC reliquae ſit dupla, eritque E centr. gravitatis conoidis ACB, hoc enim a Comman-

„insidebit recta, ita ut axis ipsius secundum perpendicularem constituatur". (Heiberg, T. II, p. 372).

23) „*c.* theor. 7." [Huygens].

24) Inutile de faire remarquer que BD est inférieur ou égal au rayon de courbure du sommet B de la parabole ou hyperbole EBC.

25) C'est-à-dire „les trois quarts".

26) Huygens annota en marge: „*a.* latus rectum conoidis appello id quod est latus rectum paraboles quae fit si conoides secetur plano per axem vel axi parallelo, omnes enim sectiones hae exhibent eandem parabolen." [Comparez la pièce N°. IX, à la page 52 du Tome présent]. „Ea autem quae Archimedi appellatur adjecta axi, dimidium est lateris recti".

Ajoutons qu'on doit lire ici „quae usque ad axem", au lieu de „adjecta axi", puisque Archimède réserve cette dernière expression: „ποτεοῦσα τῷ ἄξονι" au cas de la conoïde hyperbolique, où elle indique le demi-diamètre de l'hyperbole méridien. (Comparez T. I, p. 278 et 279 de l'édition de Heiberg). La ligne que Huygens a en vue et qui se rencontre dans le cas de la conoïde parabolique est appelée par Archimède „τὰ μέχρι τοῦ ἄξονος" (Comp. Heiberg, T. I, p. 304) ce qui se traduit chez Commandin par „quae usque ad axem", expression dino demonſtratum eſt [28]). porro ſecetur VT bifariam in M, et ducatur MS parallela DC, eritque ea axis partis merſae VST, aequalis axi RC partis FCG [b 29]), quia partes ipſae ſunt aequales [c 30]). Item dividantur MS, RC in I et L, ſicut axis DC diviſus fuit in E, eruntque I et L centra gravitatis partium VST, FCG. Per I ducatur NI parallela VT, in eamque ex E cadat perpendicularis EK [31]).

eidem VT ducatur parallela SQ, quae ideo continget ſectionem ACB in puncto S [d 32]). Sit item KX parallela axi DC, et XO parallela KE: et jungantur IL et SC, quae ſimiliter inter ſe parallelae erunt, eo quod LC, IS ſunt aequales, utpote ſubſeſquialterae [33]) axium aequalium RC, MS. Eſt igitur triangulus OXQ triangulo EKN ſimilis et aequalis, ideoque latus OX aequale lateri EK, et latus OQ

---

qu'on retrouve dans le théorème de la note 27 et dans quelques autres théorèmes cités dans les notes suivantes.

Voir d'ailleurs le „Commentarius" de Commandin à la page 11 verso de l'ouvrage cité dans la note 4, où on lit: „Linea, quae usque ad axem apud Archimedem, est dimidia eius, juxta quam possunt, quae à sectione ducuntur; ut ex quarta propositione libri de conoidibus, & spheroidibus apparet. cur uero ita appellata sit, nos in commentariis in eam editis tradidimus". Consultez pour ces derniers commentaires la page 30 recto des „Commentarii" qu'on trouve dans l'ouvrage: „Archimedis Opera non nulla à Federico Commandino Urbinate nuper in Latinum conversa, et commentariis illustrata. Quorum nomina in sequenti pagina leguntur. Cum privilegio in annos X. Venetiis, apud Paulum Manutium, Aldi F. MDLVIII." 4°.

27) Théorème correspondant à la Prop. II Libr. II, p. 10 recto, de l'édition de Commandin, citée dans la note 4: „Recta portio conoidis rectanguli, quando axem habuerit minorem, quam sesquialterum" [$\frac{3}{2}$] „eius, quae usque ad axem" [voir la note 26] „quamcunque proportionem habens ad humidum in gravitate; demissa in humidum, ita ut basis ipsius humidum non contingat; & posita inclinata, non manebit inclinata; sed recta restituetur. Rectam dico consistere talem portionem, quando planum quod ipsam secuit, superficiei humidi fuerit aequidistans". (Heiberg, T. II, p. 376). On remarquera que la démonstration qui va suivre diffère de celle suppléée par Commandin.

28) Aux pages 41 verso—45 recto de l'ouvrage suivant: Federici Commandini Urbinatis Liber de Centro Gravitatis Solidorum. Cum privilegio in annos X. Bononiae, Ex Officina Alexandri Benacii. MDLXV". 4°.

29) „*b* pr. 25. Archim. de Conoid." [Huygens]. Il s'agit de la Prop. XXV, p. 41 recto de l'édition de Commandin, citée vers la fin de la note 26: „Si rectanguli conoidis duae portiones abscindantur; altera quidem plano super axem erecto, altera autem non erecto: et sint portionum axes aequales: ipsae quoque portiones aequales erunt" (c'est la Prop. XXIII de l'édition de Heiberg, p. 405 du T. I.).

30) „*c* Theor. 4, lib. 1." [Huygens]. Voir le „Theorema 4" p. 100 du Tome présent; theorème qui équivaut à la loi d'Archimède.

31) Dès lors il ne s'agira plus que de prouver qu'on a EK > EL,

32) „*d* per conv. prop. 5 lib. 2 Con." [Huygens]. Voici cette proposition, telle qu'on la trouve à la page 45 verso de l'édition des „Coniques" d'Apollonius, citée dans la pièce N°. 5, note 4 (p. 6 du T. I): „Si parabolae, uel hyperbolae diameter lineam quandam bifariam secet; quae ad terminum diametri contingit sectionem aequidistans est lineae bifariam sectae".

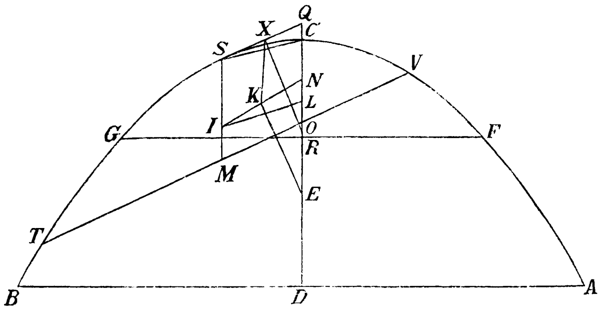
33) C'est-à-dire: deux troisièmes.

lateri EN; ſed et lineae CQ, LN aequales ſunt, propter triangula CSQ, LIN ſimilia et aequalia; ergo auferendo aequalia ab aequalibus, remanet OC aequalis EL. Quia autem DC minor eſt $\frac{3}{4}$ lateris recti, et EC est $\frac{2}{3}$ DC, erit EC minor quam $\frac{6}{12}$ ſive $\frac{1}{2}$ lateris recti; ergo EL ſive OC multo minor dimidio lateris recti: quare OX (etiamſi in circumferentia ſectionis terminari dicatur) major erit quam OC[e 34]). Igitur et EK major quam EL. Quia autem NI tranſit per I centr. gr. partis VST et parallela eſt ſuperficiei liquidi VT, ſequitur lineam EK quae in eam perpendicularis eſt, eſſe altitudinem centri grav. portionis totius, ſupra centrum gravitatis partis merſae VST. EL autem ſimiliter eſt altitudo centri gr. totius portionis ſupra centrum gr. partis merſae FCG: Igitur quia EK major EL, altitudo centri grav. totius portionis ſupra centr. grav. partis merſae major eſſet ſitu portionis ſecundo, motâ videlicet portione, quam fuerat ſitu primo, cum ſtaret recta, quod eſt contra Theor. 6 h. lib. Quum itaque abſurdum ſit portionem ad ullam partem inclinatam dicere, neceſſario recta conſiſtet; quod erat demonstr.

Theorema 11.

Recta portio Conoides parabolici, ſi axem habuerit minorem quam ſubſeſquitertium lateris recti, et ad liquidum in gravitate portionem quamcunque: liquido ſupernatans demerſâ baſe, conſiſtet axe ad liquidi ſuperficiem perpendiculari. 35)

Fig. 13.



Repetatur figura praecedens ſed inverſa, jamque pars merſa ſit BGFA, ſitque portio poſita ſitu recto, adeo ut axis CD perpendicularis ſit ad liquidi ſuperficiem GF. dico portionem BCA ita poſitam neceſſario conſiſtere.

Si enim fieri poteſt inclinetur, ita ut jam ſuperficies ſit TV. Igitur conſtructis reliquis ut ſuprà, demonſtrabitur eisdem verbis EK majorem eſſe quam EL. unde repugnat

34) „*e* Lemm. praec." [Huygens].

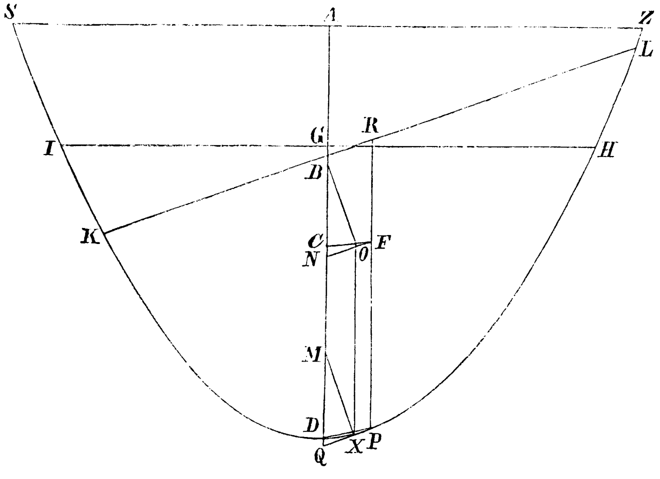
35) Théorème correspondant à la Prop. III, Libr. II, p. 12 verso, de l'édition de Commandin: „Recta portio conoidis rectanguli quando axem habuerit minorem, quam sesquialterum" [$\frac{3}{2}$] „eius quae usque ad axem, quamcunque proportionem habens ad humidum in grauitate; demissa in humidum, ita ut basis ipsius tota sit in humido; & posita inclinata, non manebit inclinata, sed ita restituetur, ut axis ipsius secundum perpendicularem fiat". (Heiberg, T. II, p. 378).

Theoremati 7. h. lib. ut portionem motam dicamus, quum prius LE fuerit altitudo centri grav. partis enatantis ſupra centr. gr. totius portionis, poſtea vero ea altitudo ſit KE. Conſiſtet igitur portio: quod erat dem.

Theorema 12.

Recta portio Conoidis parabolici axem habens majorem tribus quartis lateris recti, ſi in gravitate ad liquidum majorem habeat rationem eâ quam habet quadratum quod fit ab exceſſu axis ſupra tres quartas lateris recti, ad quadratum axis; ſupernatans liquido demerſo vertice conſiſtet axe ad liquidi ſuperficiem perpendiculari. [36])

Fig. 14.



Sit haec Conoidis portio SDZ, liquido ſupernatans, et poſita recta, ita ut liquidi ſuperficies ſit IH, ponendo videlicet portionem ad liquidum in gravitate eam habere rationem quam habet pars IDH ad totum, quae ratio major ſit eâ quam habet quadratum exceſſus axis AD ſupra tres quartas lateris recti, ad quadr. AD: dico portionem ita poſitam neceſſario conſiſtere.

Nam ſi fieri poteſt inclinet ad aliquam partem, ut jam liquidi ſuperficies ſit KL; et portio per axem ſecari intelligatur plano SDZ, recto ad liquidi ſuperficiem. dividatur autem KL bifariam in R unde ducatur RP parallela AD, eritque RP axis partis KPL, eademque aequalis axi GD partis IDH[a] [37]) quia partes ipſae IDH, KPL ſunt aequales[b] [38]). Et ſit B centrum grav. portionis totius SDZ; C centr. grav.

[36]) Théorème correspondant à la Prop. IIII Libr. II, p. 13 recto de l'édition de Commandin: „Recta portio conoidis rectanguli, quando fuerit humido leuior, & axem habuerit maiorem, quàm sesquialterum eius, quae usque ad axem: si in gravitate ad humidum aequalis molis non minorem proportionem habet ea, quàm quadratum, quod fit ab excessu, quo axis maior est, quàm sesquialter eius, quae usque ad axem, habet ad quadratum, quod ab axe; demissa in humidum, ita ut basis ipsius humidum non contingat; & posita inclinata, non manebit inclinata, sed recta restituetur". (Heiberg, T.II, p. 379).

[37]) „*a* pr. 25. Archim. de Conoid." [Huygens]. Voir la note 29.

[38]) „*b* pr. 4. h. lib." [Huygens]. Comparez la note 30.

partis IDH, et F partis KDL, perque hoc ducatur FN parallela KL, et in FN cadat perpendicularis BO. Porro ducatur PQ parallela LK vel ipſi FN, ac proinde contingens ſectionem in P. Item fiat OX parallela axi AD, et XM parallela OB; et denique jungantur PD et FC, quae ſimiliter inter ſe parallelae erunt, quoniam CD, FP ſunt aequales, utpote ſubſeſquialterae [38] axium aequalium GD, RP.

Sunt igitur trianguli BNO, MQX ſimiles et aequales, ideoque latus MX aequale lateri BO, et MQ aequale BN, verum et lineae DQ, CN ſunt aequales propter triangulos ſimiles et aequales CFN, DPQ; ergo auferendo aequalia ab aequalibus manent MD, BC aequales. Porro quia ſicut portio ad liquidum in gravitate ita eſt pars merſa IDH ad totam [c 39] portionem, et ita quadratum axis GD ad quadratum axis AD [d 40], ſequitur quadr. GD ad quadratum AD quoque majorem habere rationem quam quadratum exceſſus axis AD ſupra $\frac{3}{4}$ lateris recti habet ad quadr. AD: ergo quadratum GD majus quadrato exceſſus axis AD ſupra tres quartas lateris recti, ideoque GD major exceſſu axis AD ſuprà tres quartas lateris recti. ſed GD eſt exceſſus axis AD ſuprà AG, ergo AG minor eſt tribus quartis lateris recti. quum autem centra grav. axes portionum ſimiliter dividant, eſt AD ad BD ut GD ad CD, et permutando AD ad GD ut BD ad CD, et dividendo [41], et permutando AD ad BD ut AG ad BC: ſed AD eſt $\frac{3}{2}$ BD, ergo et AG eſt $\frac{3}{2}$ BC; ergo quum AG ſit minor oſtenſa $\frac{3}{4}$ lateris recti, erit BC minor $\frac{2}{4}$ ſive $\frac{1}{2}$ lateris recti. MD autem oſtenſa fuit aequalis BC, ergo et MD minor dimidio latere recto: quamobrem MX (etiamſi terminari dicatur ad ſectionis circumferentiam) major erit quam MD [e 42]. ideoque BO, quae ipſi MX aequalis eſt, major quam BC, quae aequalis eſt ipſi MD. Hoc autem abſurdum eſt; nam quoniam poſteriori portionis poſitione linea BO eſt altitudo centri grav. totius portionis ſupra centrum grav. partis merſae, eaque altitudo priori poſitione eſt BC, deberet BO minor eſſe quam BC [f 43]. Non poteſt itaque portio ad partem ullam inclinare, ſed recta conſiſtet; quod erat demonſtrandum.

39) „*c* pr. 4 h. lib." [Huygens].

40) „*d* Prop. 26. Archim. de Conoid." [Huygens]. Il s'agit de la Prop. XXVI, p. 41 verso de l'édition de Commandin: „Si rectanguli conoidis duae portiones abscindantur planis quomodocunque ductis: portiones eandem inter sese proportionem habebunt, quam ipsarum axium quadrata". (C'est la Prop. XXIV de l'édition de Heiberg, p. 411 du T. I).

41) Sur l'expression „dividendo", comparez la note 10.

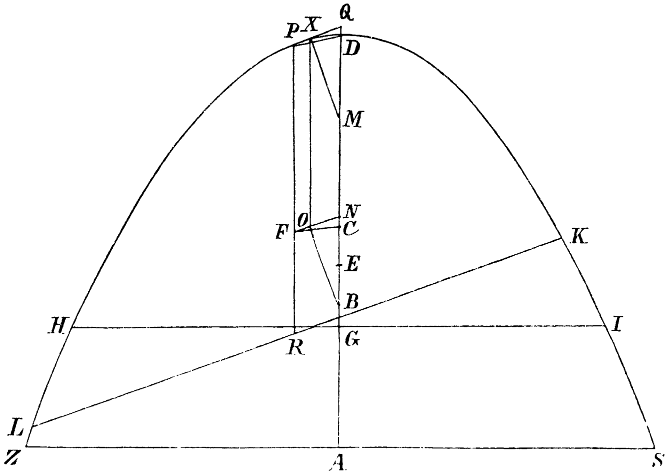
42) „*e* Lemm. 1 h. lib." [Huygens].

43) „*f* Theor. 6 h. lib." [Huygens].

Theorema 13.

Recta portio Conoidis parabolici axem habens majorem tribus quartis lateris recti, si in gravitate ad liquidum minorem habeat rationem eâ quam habet id quo quadratum axis majus est quadrato quod fit ab excessu axis supra tres quartas lateris recti, ad quadratum axis; liquido supernatans demersâ base, consistet axe ad liquidi superficiem perpendiculari. [44])

Fig. 15.



Sit haec portio SDZ, quae liquido supernatet demersâ base, et posita sit recta ita ut axis DA sit perpendicularis ad liquidi superficiem, quae sit IH, ponendo videlicet rationem partis IHZS ad totam portionem esse minorem eâ ratione de qua dictum: dico portionem ita positam consistere.

Si enim fieri potest inclinet, ut jam liquido superficies sit LK. Et construantur omnia ut in Theoremate praecedenti; praetereaque ponatur AE aequalis tribus quartis lateris recti.

Quoniam itaque AE aequalis est tribus quartis lateris recti, apparet proportionem quam portio habet ad liquidum in gravitate minorem esse eâ quam habet differentia quadratorum AD, ED ad quadratum AD. Est autem pars mersa IHZS ad totam portionem, sicut portio ad liquidum in gravitate [a 45]), ergo pars mersa IHZS ad portionem totam minorem habet rationem quam differentia quadratorum AD, ED ad quadratum AD. quia verò pars IDH est ad portionem

---

[44]) Théorème correspondant à la Prop. V Libr II, p. 15 recto, de l'édition de Commandin: „Recta portio conoidis rectanguli, quando leuior humido axem habuerit maiorem, quàm sesquialterum" $\left[\frac{3}{2}\right]$ „eius, quae usque ad axem; si ad humidum in gravitate non maiorem proportionem habeat, quàm excessus, quo quadratum quod fit ab axe maius est quadrato. quod ab excessu, quo axis maior est, quàm sesquialter eius, quae usque ad axem, ad quadratum, quod ab axe: demissa in humidum, ita ut basis ipsius tota sit in humido; & posita inclinata non manebit inclinata, sed restituetur ita, ut axis ipsius secundum perpendicularem fiat" (Heiberg, T.II, p. 383).

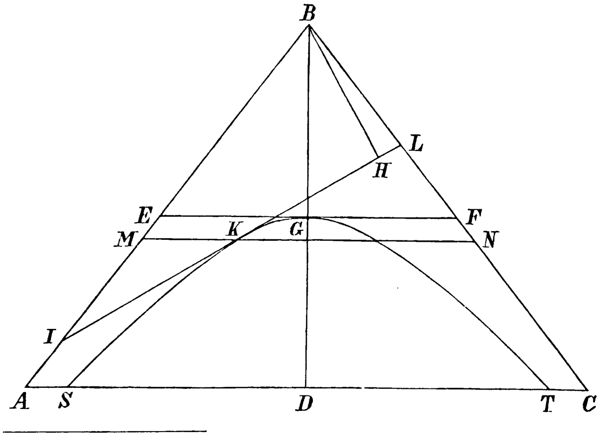
[45]) „*a* Theor. 4. h. lib." [Huygens].

SDZ ut quadratum GD ad quadr. AD [b] [46]), eſt etiam dividendo [41]) pars IHZS ad portionem SDZ ut differentia quadratorum AD, GD ad quadratum AD; ergo quum pars IHZS ad portionem SDZ minorem habeat rationem quam differentia quadratorum AD, ED ad quadratum AD, apparet hanc differentiam quadratorum AD, ED majorem eſſe differentiâ quadratorum AD, GD; ergo linea GD major quam ED, et AG minor AE, id eſt tribus quartis lateris recti; unde rurſus ut in demonſtratione Theorematis praec. oſtendi poteſt lineam BO majorem eſſe BC, quod eſt abſurdum. nam quum BO ſit hic altitudo centri gravitatis partis enatantis ſupra centrum grav. portionis totius ſitu portionis poſteriori, eaque altitudo priori ſitu fuerit BC, deberet BO minor eſſe quam BC [c] [47]). Non potuit itaque portio ultro inclinari, ideoque recta conſiſtit quod erat demonſtrandum.

Lemma 2. [48])

Eſto Conus plano ABC ſectus per axem BD. ſumptoque in axe puncto G, eo vertice descripta ſit hijperbole ad asymptotos BA, BC. Et intelligatur praeterea conus ſecari planis EF, et IL, rectis ad planum ABC, ita ut hujus quidem ſectionis maxima diameter IL contingat hijperbolen in puncto K, alterius autem diameter EF eandem contingat in vertice G. dico portiones coni abciſſas EBF, IBL aequales eſſe.

Fig. 16.



Ducatur per contactum K linea MKN parallela AC, ſitque BH ad IL perpendicularis.

Manifeſtum eſt ſectionem EF circulum eſſe, IL autem eſſe ellipſin; cujus maxima diameter IL quum hijperbolen contingat, bifariam ideo ſecatur ad contactum in K [a] [49]); dimidiumque minoris diametri ejuſdem ellipſeos (quod diverſum non eſt ab ordinatim applicata in ſectione circulari MN) poterit rectan-

[46]) „*b* pr. 26 Archim. de Conoid". [Huygens]. Comparez la note 40.

[47]) „*c* Theor. 7. h. lib." [Huygens].

[48]) Huygens, ayant achevé de retrouver à l'aide du principe formulé dans les théorèmes 6 et 7 les conditions, données par Archimède, de la stabilité de l'équilibre d'un segment de conoïde parabolique, flottant avec son axe dans la direction verticale, laisse de côté les beaux théorèmes d'Archimède qui se rapportent à la flottation des mêmes segments dans une position inclinée. Il procède à appliquer le même principe à d'autres corps flottants et commence à cet effet par préparer, au moyen du lemme qui va suivre, la solution du cas du cône de révolution.

[49]) „*a* prop. 3. lib. 2. Conic." Voir, à la page 44 verso des „Coniques", ouvrage cité p. 6 du

gulum MKN; hoc vero rectangulum aequale est quartae parti figurae[b] [50]), sive quadrato EG[c] [51]), igitur tota minor diameter ellipseos aequalis est lineae EF, ellipsis itaque IL est ad circulum EF, sicut diameter IL ad diametrum EF[d] [52]) : et quum abscissor coni IBL ad conum EBF habeat proportionem compositam ex proportione basium ellipticae ad circularem, et ex proportione altitudinum, componetur ideo dicta proportio abscissoris IBL ad conum EBF, ex proportione lineae IL ad EF et ex proportione altitudinis BH ad altitudinem BG. Verum et triangul. IBL ad triangulum EBF habet proportionem compositam ex dictis proportionibus, nimirum ex proportione basium IL ad EF, et altitudinum BH ad BG; ergo abscissor IBL est ad conum EBF, sicut triangulus IBL ad triangulum EBF. Ei autem trianguli sunt aequales (quoniam id quod continetur lateribus IB, BL, aequale est ei quod continetur lateribus EB, BF,[e] [53])) ergo et abscissor IBL aequalis est cono abscisso EBF, quod erat ostendendum.

T.I: „Si hyperbolen contingat recta linea, cum utraque asymptoton conveniet, & ad tactum bifariam secabitur: quadratum uero utriusque eius portionis aequale erit quartae parti figurae, quae ad diametrum per tactum ductam constituitur".

50) „*b* prop. 10. lib. 2. Conic." Voir à la page 46 verso des „Coniques" (éd. Comm.): „Si recta linea sectionem secans cum utraque asymptoton conveniat; rectangulum contentum rectis lineis, quae inter asymptotos & sectionem interiiciuntur, aequale est quartae parti figurae factae ad diametrum, quae aequidistantes ipsi ductae lineae bifariam dividit."

51) „*c* prop. 1. lib. 2. Conic." Voir à la page 43 verso: „Si hyperbolen recta linea ad verticem contingat: & ab ipso ex utraque parte diametri sumatur aequalis ei, quae potest quartam figurae partem: lineae, quae à sectionis centro ad sumptos terminos contingentis ducuntur, cum sectione non convenient".

52) *d* prop. 7. Archim. de Conoid." Il s'agit de la prop. VII, p. 31 verso de l'édition de Commandin, citée vers la fin de la note 26: „Spatia acutianguli coni sectione contenta eam inter se se proportionem habent, quam quae fiunt ex coni acutianguli sectionum diametris rectangula." (C'est la prop. VI de l'édition de Heiberg, p. 315 du T.I).

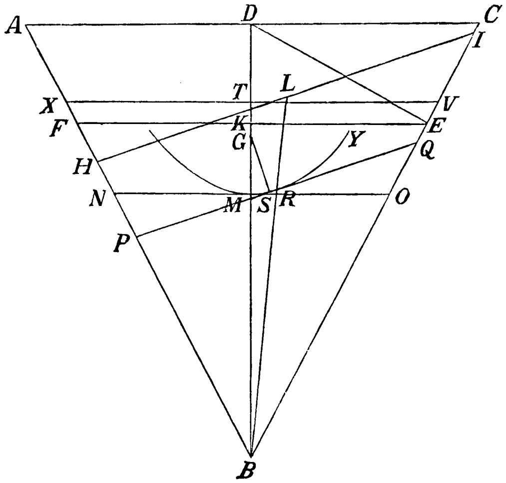
53) „*e* prop. 43. lib. 3. Conic." Voir à la page 94 verso des „Coniques" (ed. Comm.) „Si hyperbolen recta linea contingat, abscindet ex asymptotis ad sectionis centrum lineas continentes rectangulum aequale ei, quod continetur lineis ab altera contingente abscissis ad uerticem sectionis, qui est ad axem".

Theorema 14.

Conus iſoſceles ſi in gravitate ad liquidum non minorem habeat rationem quam duplicatam cubi axis ad cubum lateris; liquido ſupernatans demerſo vertice conſiſtit axe ad liquidi ſuperficiem perpendiculari. [54])

Eſto conus ABC, axem habens BD, et ductâ DE perpendiculari ad unum è lateribus BC, fiat planum EF baſi AC parallelum, eritque conus FEB ad conum ACB in duplicata proportione cubi axis BD ad cubum lateri BC; nam quia trianguli DEB, EKB ſunt rectanguli, habentque communem angulum ad B, erunt ſimiles, ideoque latera KB, BE, BD proportionalia; itaque KB ad BD eſt in duplicata proportione KB ad BE ſive DB ad BC, et cubus lineae KB ad cubum BD, ſive conus FBE ad conum ABC in duplicata proportione cubi axis DB ad cubum lateris BC.

Fig. 17.



Cono ABC igitur in liquidum demiſſo, poſitoque axe DB ad perpendiculum, demergatur conus XBV; et quoniam pars merſa eſt ad totum ſicut conus ad liquidum in gravitate, coni autem ad liquidum in gravitate non minor ponitur proportio quam duplicata cubi axis ad cubum lateris, id eſt non minor eâ quam habet conus FBE ad conum ABC, manifeſtum eſt conum demerſum XBV non minorem fore cono FBE. dico autem conum ABC ita poſitum conſiſtere. Nam ſi poteſt inclinet ad aliquam partem, ita ut liquidi ſuperficies jam ſit HI: et intelligatur conus ſecari per axem plano ABC recto ad liquidi ſuperficiem; ſitque G centrum grav. coni ABC; M centr. gr. coni XBV, et R abſciſſoris HBI, cujus axis ſit BRL. porro fiat planum NMO baſi AC parallelum, et planum PRQ parallelum plano HI; et cadat in diametrum PQ perpendicularis GS. [55])

Quum igitur puncta M et R quae ſunt centra grav. portionum XBV, HBI, axes TB, et LB ſimiliter dividant, erit conus XBV ad conum NBO, ſicut abſciſſor

[54]) La condition de la stabilité de l'équilibre d'un cône de révolution flottant, l'axe étant dans la situation verticale avec le sommet en bas, fut publiée pour la première fois, par Daniel Bernoulli, dans les Comment. Acad. Petrop. de l'année 1738, p. 163. Elle est identique avec celle de Huygens, d'après laquelle la stabilité de l'équilibre exige que la densité relative du cône, par rapport à celle du fluide, excède ou égale la valeur $BD^6 : BC^6$.

[55]) D'après le „Theorema 6" il suffira donc dès lors de prouver qu'on a $GS > GM$. Ajoutons qu'en janvier 1652 Huygens a essayé de substituer à la démonstration qui va suivre, une autre que l'on trouvera dans l'Appendice II du traité présent.

HBI ad abſciſſorem PBQ, et commutando; quare ſicut conus XBV ſectori HBI aequalis, ita et conus NBO aequalis absciſſori PBQ. Si igitur deſcribatur hijperbole MRY vertice M, et ad aſymptotos BA, BC, eam continget linea PQ [a] [56]) et quia PQ ad contactum bifariam dividi debet [b] [57]), ſicut dividitur à puncto R, manifeſtum eſt punctum R fore punctum contactus. Porro quum BM ſit ad BT ut BG ad BD (centra enim gravitatis M et G, axes BT et BD ſimiliter dividunt) eſt quoque commutando ſicut BT ad BD ita BM ad BG: BT autem ad BD non minorem habet rationem quam BK ad eandem BD, ſive quam quadratum BK ad quadratum BE, ergo et BM ad BG non minorem habet rationem quam quadratum BK ad quadratum BE, ſive quam quadratum BM ad quadratum BO: quare et dividendo [41]) BM ad MG non minorem quam quadratum BM ad quadratum MO. Eſt autem quadr. MO aequale quartae parti figurae [c] [58]), id eſt rectangulo ſub BM et ſub dimidio lateris recti hijperboles MRY; ſed ad hoc rectangulum quadratum BM propter communem altitudinem eam habet rationem quam linea BM ad dimidium lateris recti, ergo quadratum BM eſt ad quadratum MO ſicut linea BM ad dimidium lateris recti. Oſtenſum eſt autem lineam BM ad MG non minorem habere rationem quam quadratum BM ad quadr. MO; ergo linea BM ad MG non minorem habet rationem quam eadem BM ad dimidium lateris recti: Itaque MG non major dimidio latere recto. Unde linea GS quae ad tangentem PQ perpendicularis eſt (etiamſi ad hijperboles circumferentiam terminari dicatur) major eſt quam GM [d] [59]); quod eſt abſurdum; nam quoniam linea GS poſteriori coni poſitione eſt altitudo centri gravitatis totius coni ſuprà centrum gravitatis partis merſae HBI, eaque altitudo priori poſitione eſt GM, deberet GS minor eſſe quam GM [e] [60]). Non poteſt itaque conus inclinare ad ullam partem, quare rectus conſiſtet, quod erat demonſtrandum.

Theorema 15.

Conus iſoſceles ſi in gravitate ad liquidum non majorem proportionem habuerit eâ quam habet exceſſus cubi lateris ſupra cubum lineae, quae ſit ad axem ut axis ad coni latus, ad cubum lateris; liquido ſupernatans demerſâ baſe, conſiſtit axe ad ſuperficiem liquidi perpendiculari. [61])

Repetatur figura praecedens, et invertatur; et habeat conus ad liquidum in

[56]) „*a* lemm. praeced." [Huygens].

[57]) „*b* prop. 3. lib. 2. Conic." [Huygens]. Comparez la note 49.

[58]) On retrouve en marge le signe de renvoi „*c*"; mais la citation manque. Elle pouvait être identique avec celle de la note précédente; et c'est peut-être la raison qu'elle a été supprimée.

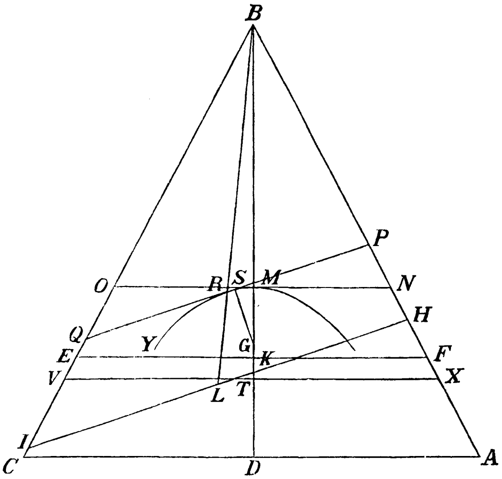
[59]) „*d* lemm. 1 h. lib." [Huygens]. Voir la page 106.

[60]) „*e* Theor. 6. h. lib." [Huygens].

[61]) La condition de stabilité exige donc que la densité relative δ du cône soit plus petite que, ou

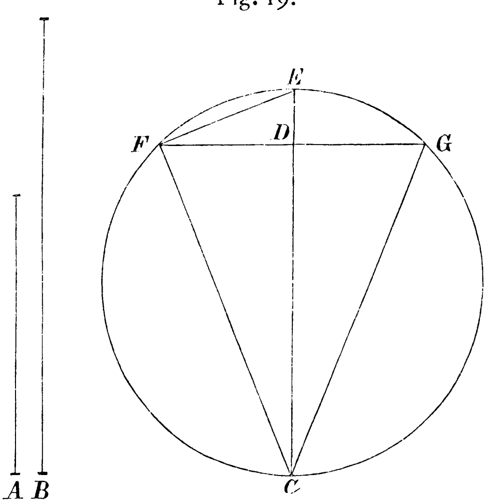
gravitate proportionem quam habet portio CVXA, non major CEFA, ad conum integrum ABC; quae proportio propterea non major erit eâ de qua dictum, nempe quam habet differentia cuborum AB, FB ad cubum AB: portio enim CVXA eſt ad conum ABC ut differentia cuborum AB, XB, ad cubum AB, quae minor eſt proportio quam differentiae cuborum AB, FB ad cubum AB. demiſſo itaque cono ABC in liquidum, axe ad liquidi ſuperficiem recto, portio demerſa erit CVXA, quia haec eſt ad conum ABC ſicut idem ad liquidum in gravitate. Oſtendendum eſt autem conum ita poſitum conſiſtere.

Fig. 18.



Si poteſt inclinet, ut jam ſuperficies liquidi ſit IH. Conſtat igitur ex demonſtratione Theorematis praec. lineam GS majorem eſſe quam GM. verum id hic quoque abſurdum eſt; nam quia GS poſteriori coni poſitione eſt altitudo centri gravitatis partis enatantis IBH ſuprà centrum gravitatis totius coni, eaque altitudo priori poſitione eſt GM, deberet GS major eſſe quam GM [a 62]). Abſurdum itaque eſt dicere conum inclinaſſe; ergo rectus conſiſtet, quod erat demonſtr.

Fig. 19.



Propos. 16. Problema I.

Datâ proportione cujuſvis materiae ſolidae quam ad liquidum habet in gravitate, conum ex eâ facere, qui in liquidum demiſſus vertice demerso rectus conſiſtat.

Data ſit proportio materiae ad liquidum in gravitate, quae eſt lineae A ad B.

Inveniantur inter A et B duae mediae proportionales, quae ſint CD, CE; et

égale à, $1 - \frac{BD^6}{BA^6}$. Comme on le voit facilement, il y a des cas $\left(\frac{BD^6}{BA^6} > \frac{1}{2};\ 1 - \frac{BD^6}{BA^6} < \delta < \frac{BD^6}{BA^6}\right)$, où l'équilibre du cône flottant ne peut être stable dans aucune des deux situations qui sont compatibles avec la direction verticale de l'axe; mais Huygens se contente d'avoir donné les conditions de la stabilité pour la position verticale et ne s'occupe pas de la flottation dans des positions inclinées.

62) „*a* Theor. 7. h. lib." [Huygens].

fiat circulus diametro CE, ductâque FDG quae dictam diametrum CE ſecet in D ad angulos rectos, jungantur CF, CG, dico conum FCG eſſe qui quaerebatur.

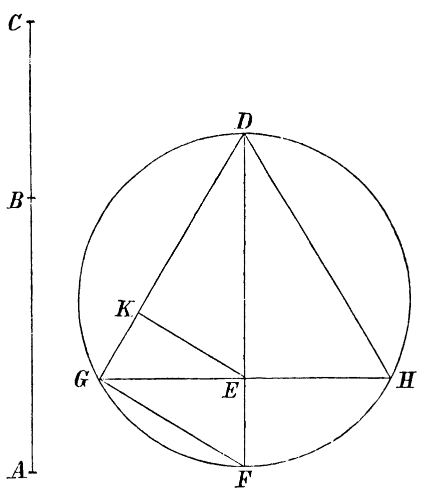
Jungatur enim FE. Sunt igitur CD, CF, CE, continuè proportionales, quare CD ad CE in duplicata proportione CD ad CF; eſt autem ut CD ad CE ſic A ad CD, igitur A ad CD quoque in duplicata proportione CD ad CF; unde et cubus A ad cubum CD in duplicata proportione cubi CD ad cubum CF. cubus autem A ad cubum CD eſt in triplicata proportione lineae A ad CD; quod idem eſt ac ſi dicamus cubum A eſſe ad cubum CD, ſicut eſt linea A ad B, (nam A eſt ad B in triplicata ratione A ad CD, quum B ſit quarta proportionalium in ratione eâdem;) Igitur A ad B, id eſt conus FCG ad liquidum in gravitate, eſt in duplicata proportione cubi axis CD ad cubum lateris CF. Quare ſi conus FCG demittatur in liquidum demerſo vertice, conſiſtet rectus [a] [63]), qualem invenire oportebat.

Manifeſtum autem eſt, omnes ex data materia conos, quorum angulus ad verticem aequalis vel major erit angulo FCG ſimiliter rectos conſiſtere debere.

Propositio 17. Problema 2.

Datâ proportione cujuſvis materiae ſolidae quam ad liquidum habet in gravitate, conum ex eâ facere qui in liquidum demiſſus demerſâ baſe, rectus conſiſtat.

Fig. 20.



Sit data proportio quae eſt lineae AB ad AC. Inveniantur inter earum differentiam quae eſt CB et ipſam AC duae mediae proportionales DE et DF. factoque circulo ad diametrum DF, ducatur HEG quae diametrum DF ſecet ad angulos rectos in E, et jungantur DH, DG. dico conum HDG eſſe quem invenire oportebat. Jungantur enim FG, et ſit EK ad latus DG perpendicularis.

Sunt igitur FG, EK parallelae, ideoque ut DE ad DF, ſive ut CB ad DE ita DK ad DG: cubus autem DK ad cubum DG eſt in triplicata ratione lineae DK ad DG, ergo etiam in triplicata ratione lineae CB ad DE. ratio autem triplicata CB ad DE, eſt ea quam CB habet ad CA, (quia CA eſt quarta proportionalis in ratione CB ad DE;) igitur cubus DK ad cubum DG eſt ut linea CB ad CA: et dividendo, differentia cuborum DK, DG ad cubum DG ſicut AB ad AC, id eſt

63) „*a* Theor. 14. h. lib." [Huygens].

ſicut conus HDG ad liquidum in gravitate. Conus itaque HDG ad liquidum in gravitate non majorem habet proportionem ſed eandem quam exceſſus cubi lateris ſuprà cubum lineae quae eſt ad axem ut axis ad coni latus, habet ad cubum lateris; ideoque in liquidum demiſſus demerſa baſe, conſiſtet axe ad liquidi ſuperficiem recto [a] [64]), ut oportebat.

Similiter vero recti conſiſtent omnes coni ex iſta materia, quorum angulus ad verticem aequalis vel major erit angulo HDG.

[64]) „*a* Theor. 15. h. lib." [Huygens].

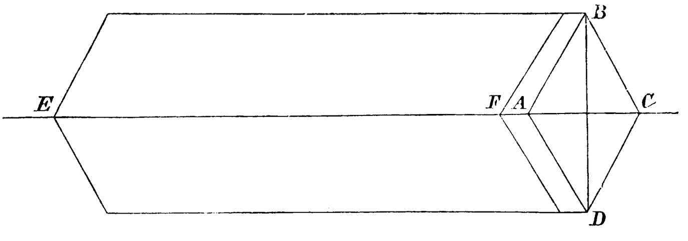
DE IIS QUAE SUPERNATANT LIQUIDO

LIBER 2. [1]

De Parallelepipedis.

Certum quidem eſt ſuperficiebus nullam tribui poſſe gravitatem, cumque nihilominus videamus Geometras [2]) earum gravitatis centra investigare, hoc illos eò facere intelligimus, quòd determinatis hiſce centris in quocunque plano, non referat in quantam altitudinem idem ducatur, [3]) Similis autem conſideratio locum habet in hujuſce libri Theorematis, et ſciendum, rectangula quae propo-

Fig. 1.



nuntur, baſes eſſe parallelepipedorum, quorum longitudo ad arbitrium fingi poſſit. Ita quod demonſtratum eſt de quadrato ABCD, ſubduplam habente pro-

[1]) Dans le livre qui suit, Huygens, après une courte introduction de portée plus générale, s'applique à donner une solution aussi complète que possible des problèmes qui se rattachent à l'équilibre d'un parallélipipède rectangle flottant dont les arêtes longitudinales restent parallèles au niveau du liquide. Il débute par discuter les conditions pour lesquelles cette supposition sera remplie.

[2]) Le manuscrit fait précéder au mot „Geometras" les mots biffés: „Archimedem et aliosque."

[3]) Le manuscrit ajoute encore les mots suivants, biffés depuis: quum semper hoc modo corpus efficiatur, cujus centrum gravitatis futurum sit in rectâ, quae jungit centra gravitatis oppositarum basium."

portionem ad liquidum in gravitate, illud liquido impofitum ad perpendiculum, ita fponte fuâ componi, ut media pars ADC demergatur; idem affirmari credatur de parallelepipedo cujuflibet longitudinis ut AE, quod quadratum bafin habeat et in gravitate ad liquidum fubduplam proportionem. Ubi notandum, quòd etiamfi exigua tantùm, refpectu bafis, fuerit altitudo feu longitudo parallelepipedi, ut FA, vel minor etiam, tamen illud confiftet lateribus FA et reliquis fuperficiei liquidi parallelis, modò ita impofitum fit; neque enim erit cur magis in hanc quàm in illam partem procumbat. Et hoc quidem Geometricè loquendo: Caeterum experienti aliud eveniet; namque hoc parallelepipedum altitudinis AF, proculdubio ad alterutram partem inclinabit, donec planum basis ABCD fuperficiei liquidi fiat parallelam: quamobrem qui fimili parallelepipedo experimentum capere volet fequentium Theorematum, ita illud continere debebit ut planum bafis ABCD femper perpendiculare maneat ad liquidi fuperficiem; [4]) verum qui molestiam hanc effugere volet, is longitudinem parallelepipedi duplam faciat maximae in base diametri, vel tantùm ut ad hanc ratione habeat quam quinque ad tria: Et certus fit hujufmodi parallelepipedi latera, fi fecundum longitudinem liquido impofitum fuerit, femper ejusdem fuperficie parallela fore. Nam non tantum de parallelepipedo verùm in univerfum de omni corpore cylindroïdeo, quod bafium oppofitarum ambitum habet in eafdem partes cavum, quo praeter parallelepipe-

[4]) Au lieu du passage qui va suivre, jusqu'aux mots: „Nam non tantum" on trouvait primitivement ce qui suit: „quod commodè fieri poterit duobis planis perpendicularibus, quae distent inter se spatio FA. Verùm nihil hisce opus erit si in multam longitudinem extendatur parallelepipedum ut AE, tum enim ultro jacebit, imo et erectum recidet. Sed bene hic interrogabor, quanta igitur longitudo futura sit parallelepipedi, si illud jacere velimus. et puto quidem non majori opùs esse, quàm cujus longitudinis quadratum ad quadratum maximi in base lateris rationem habeat quàm tria ad duo; idque propter Theorema 4tum [lisez: 2dum] ex quo manifestum est tum saltem non majorem requiri, quum ex figurâ basis et conveniente gravitate, parallelepipedum ita liquido supernatat, ut alterum laterum basis ad superficiem liquidi faciat angulos rectos. Verùm si quis metuet ut eadem longitudo sufficiat parallelepipedo, quod contrà sic liquido supernatet ut neutrum laterum basis ad superficiem liquidi perpendiculare sit, velut hoc quod modò propofitum fuit, is producat eandem longitudinem donec rationem habeat ad maximum in base diametrum quàm quinque ad tria, et certus fit hujufmodi paralellepipedi longitudinem feu latus, quomodocumque liquido impofitum fuerit, femper ejusdem superficiei parallelam manfura."

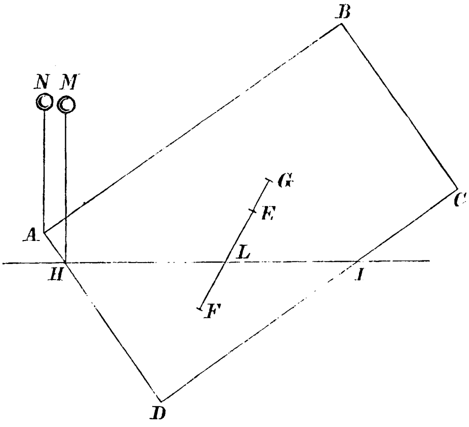
A propos de ces phrases biffées Huygens avait annoté au crayon: „malim haec omnino explorata habere, quàm hic dubiè aliquid afferre."

dum cylindrus quoque et prisma continentur, idem affirmare licet; ejusque certissima est demonstratio, quam tamen hìc afferre visum non fuit, tum quòd caeterorum Theorematum veritas ex eâ non pendeat, tum maximè quòd afferere nolim, non minorem longititudinem omnibus praedictis corporibus sufficere. [5]).

Theorema I.

Corpus solidum liquido supernatans, non quiescet, nisi cum linea, quae jungit centrum grav. totius corporis cum centro grav. partis mersae, vel enatantis, fuerit perpendicularis ad superficiem liquidi, et si non fuerit perpendicularis, corpus ad eam partem ultro inclinabit ad quam inclinat dicta linea.

Fig. 2.



Sit corpus ABCD supernatans liquido, cujus superficies HI. centrum grav. totius corporis sit E, partis verò mersae F, et enatantis G. linea autem EF vel EG (sunt enim in eâdem rectâ) non sit perpendicularis ad superficiem HI, sed inclinet ad partem C; dico corpus ABCD non quiescere sed inclinare ad eandem partem.

Si [6]) enim fieri potest quiescat, et deinde ita firmari intelligatur ut tantùm circumagi possit ad axem exhibitum puncto L, ubi linea GF intersecatur a liquidi superficie ita ut circa centrum L converti possit.

---

[5]) Nous regrettons toutefois de ne pas posséder cette démonstration et de ne pas avoir réussi à y suppléer.

[6]) La démonstration qui va suivre, et qui avait déjà subi plusieurs altérations, comme l'état du manuscrit le prouve, a fini par ne plus satisfaire à Huygens, puisqu'il l'a biffée après coup. Il est vrai que nous possédons du même „Theorema" une autre démonstration, écrite sur une feuille détachée et que nous avons reproduite dans l'Appendice III. Mais cette démonstration nous semble plutôt antérieure à celle du texte; et même, s'il en était autrement, on en devrait conclure qu'elle a semblé à Huygens encore moins satisfaisante puisque en traçant la figure 2, que nous donnons telle qu'elle était destinée à la publication définitive du traité, (voir la page 90 de l'Avertissement), il est évidemment revenu à la rédaction du texte.

En effet, il y a tout lieu de s'étonner que Huygens, pour autant que nous connaissons ses manuscrits, n'ait pas réussi, ce qu'il a tâché certainement, de rattacher le „theorema" en question aux „theoremata 6 et 7" du „liber 1" et par ce moyen aux hypothèses fondamentales, formulées au commencement du traité.

Avec nos méthodes de raisonnement modernes cela n'aurait pas été difficile. Pour y réussir on n'a qu'à se représenter le corps flottant dans une situation voisine choisie tellement

Si quidem igitur corpus ABCD antea quiefcebat, etiam nunc quiefcere debebit, (certum enim eft in corpore quiefcente quotlibet puncta firmari poffe, ut tamen illud non commoveatur;) atqui firmato puncto L quia pars merfa HDI levior eft liquido fuae molis, punctumque L circa quod vertitur non eft ad perpendiculum fupra centrum fuae gravitatis F ideo inquam pars HDI afcendet à parte H nifi impediatur a parte HABCI quae liquido exftat.

Verum pars HABCI quum fuftineatur in L, quod non eft ad perpendiculum centro fuae grav. fuppofitum, defcendere conabitur à parte C, non obftabit igitur motui partis merfae HDI fed eandem juvabit, totumque corpus ABCD afcendet à parte A et defcendet a parte C; Itaque firmato corpore circa axem L, opus eft duobus ponderibus M et N, (quae manifeftò erunt ad eandem partem axis L) ut ne inclinet ad partem C: unde liquet quod eodem inclinabit fublatis hifce ponderibus. Ergo etiam antequam firmaretur circa axem L, non quiefcebat, fed inclinabat verfus partem C. quod erat demonftrandum.

---

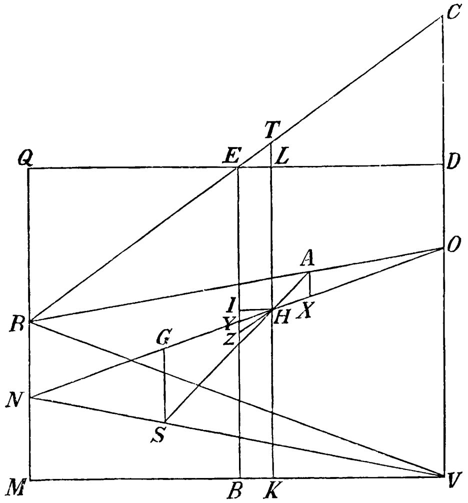
que le point I′ de la nouvelle ligne de niveau se trouve plus près de C que le point I, et H′ plus près de D que H. Alors, en prenant les moments par rapport au plan HI, on voit facilement que le nouveau centre de gravité F′ de la partie immergée DH′I′ ne se sera rapproché ni eloigné du plan HI que d'une quantité infiniment petite du second ordre. Donc, dans la situation de la figure, la différence de niveau de F′ et G sera quasi la même que celle de F et G; mais pour amener le corps flottant dans sa situation nouvelle on devra le faire tourner d'un angle égal à celui de H′I′ avec HI, et dans le même sens. Or, puisqu'il ne s'agit que de la position relative de F′ par rapport à G, on peut tourner autour de G et il est évident qu'alors la différence de niveau entre F′ et G s'amoindrira. Elle sera donc, dans la situation nouvelle, plus petite que celle entre F et G; et, d'après le „Theorema 6" du „liber 1", le corps sera donc libre de se mouvoir dans le sens indiqué.

Et ce même raisonnement nous apprend encore que le plan tangent de la surface, qui est le lieu dans le corps du centre de gravité F de la partie immergée, sera toujours parallèle à la surface de niveau HI. Pour le voir il suffit de remarquer que la droite FF′ (où F′ est pris dans sa situation primitive, c'est-à-dire, avant la rotation autour de G) sera toujours parallèle à la ligne HI, puisque les distances de F et de F′ à HI ne diffèrent que d'une quantité infiniment petite du second ordre.

Ajoutons que cette dernière propriété dont la découverte fut attribuée à Dupin par M. Paul Appell dans son „Traité de mécanique rationelle" (voir les pp. 192—195, T. 3, de l'édition de 1903, Paris, Gauthier-Villars), fut déjà formulée et démontrée en 1746 par Bouguer aux pages 259 et 270 de son „Traité du navire, de sa construction et de ses mouvemens. à Paris, quay des Augustins, chez Jombert."

Lemma I. [7]

Fig. 3.



Sit rectangulum QV, cujus axis EB, centrum Y; et ductâ per E, RC, quae jungat latus QM cum producto latere VD, sit trapezii RCVM centrum grav. H; unde ducatur HZ parall. RC lateri obliquo trapezii, et HI perpendicularis in axem EB. dico, ut tripla axis EB est ad DC, ita esse CE ad HZ, et ita quoque DC ad IZ. Item IZ, dividi bifariam à centro rectangi. Y.

Divisis enim CV et RM bifariam in O et N, ducantur RO et VN, quae erunt diametri triangulorum CRV, RVM. hae rursus dividantur in A et S, ita ut partes ad verticem reliquarum sint duplae, et ducantur AS et NO, quarum haec transibit per Y et H, centrà gravitatis rectanguli QV et trapezii RCVM [a] [8]). Item ducantur AX, SG parall. EB: eidemque parallela TK, quae transeat per H.

Quia itaque RO et VN sunt diametri triangulorum CRV, RVM, et RA dupla AO, ut et VS dupla SN. sequitur, A et S dictorum triangulorum esse centra grav. ergo SA transit per H, centr. grav. trapezii RCVM; atque ita in H dividitur, ut pars SH ad HA sit ut triang. CRV ad RVM, id est, ut basis CV ad basin RM, ergo etiam GH ad HX, ut CV ad RM; quare etiam ut CV et RM simul ad suam differentiam, id est, ut dupla EB ad duplam DC, sive ut EB ad DC, ita GH et HX simul ad suam differentiam quae est dupla HY, sive, sumpto utrinque dimidio, ita XY ad YH. Sed OY est tripla XY, ergo est tripla EB ad DC, ut OY ad HY, sive ut EC ad TE vel HZ; quod erat primum. Et quia triangula ECD, HZI sunt similia, est quoque ut EC ad HZ, sive ut tripla EB ad DC, ita CD ad IZ; quod erat alterum.

---

[7]) Avec les trois, „lemmata" qui suivent, Huygens va construire, pour ainsi dire, l'échafaudage géométrique dont il aura besoin dans ses recherches sur l'équilibre des parallélipipèdes flottants.

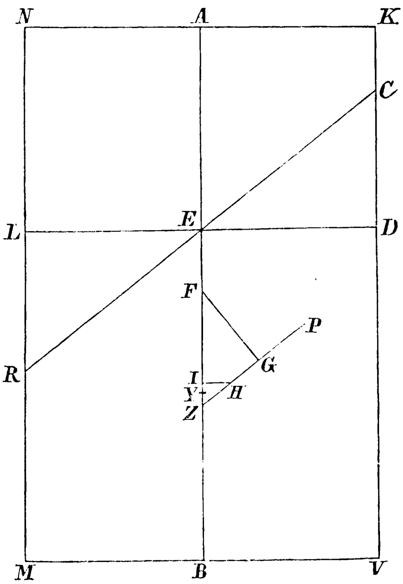
[8]) Huygens annota en marge: „a pr. 15. lib. 2. Arch. de aequipond"; mais il s'agit du „lib. 1" de l'ouvrage cité. Comparez la page 183 du Tome 2 de l'édition de Heiberg où la proposition en question est formulée comme il suit: „Cuiusuis trapezii duo latera inter se parallela habentis centrum grauitatis in ea linea positum est, quae media puncta parallelarum iungit, ita diuisa, ut pars eius terminum habens punctum medium minoris parallelarum ad reliquam partem eam habeat rationem, quam habet linea duplici maiori aequalis simul cum minore ad duplicem minorem simul cum majore parallelarum."

Porrò quum Y ſit centr. grav. rectanguli QV, eſt BY dimidia BE; ſed et KH dimidia eſt TK; ergo differentia duarum BY et HK, quae eſt YI, eſt dimidia differentiae TL duarum EB et TK. TL autem manifeſtò eſt aequalis IZ, ergo IY dimidia quoque ipſius IZ; quod erat tertium.

LEMMA 2. [9]).

Sit Rectangulum KM, à quo abſciſſum ſit rectangulum DM, et trapezium ejuſdem magnitudinis RCVM: agatur autem per H centrum grav. dicti trapezii linea ZHP parallela ejusdem lateri obliquo RC; et demittatur perpendicularis FG ex F centro rectanguli KM in lineam ZP. dico in lineà ZP, partem ZG, interceptam ab hâc perpendiculari et AB axe rectanguli KM, majorem, aequalem aut minorem fore, parte ZH, intercepta ab eodem axe AB et H centro grav. dicti trapezii; prout ſeſquialterum rectanguli AEB, detracto dimidio quadrato DC, majus, aequale, vel minus erit quartâ parte quadrati baſis MV vel NK id eſt quadrato AK. [10])

Fig. 4.



Sit primò ſeſquialterum rectang.i AEB detracto dimidio quadr. DC majus quadrato AK; dico GZ majorem fore ZH.

Sit enim Y centrum rectang. DM, et ex H cadat in axem perpendicularis HI.

Quum igitur tripla EB ſit ad CD, ut CD ad IZ [a] [11]); erit rectang. ſub triplâ EB et IZ aequale quadrato DC; et rectang. ſub triplâ EB et dimidiâ IZ, quae eſt YZ [b] [12]), aequale dimidio quadrato DC. porrò

---

[9]) Primitivement le lemme avait été compté comme un théorème; mais les mots „Theorema 2" furent biffés et remplacés par „Lemma 2." C'est le lemme principal auquel Huygens aura recours constamment dans la suite. Aussi on voit aisément que le point F représente le centre de gravité du parallélipipède flottant, H celui de la partie submergée dans une situation où RC est la ligne de niveau du liquide et que le sens dans lequel alors le parallélipipède tendra à se mouvoir dépend de la situation relative des points Z, H et G.

[10]) En notation moderne: $ZG \gtreqless ZH$ selon qu'on aît $\frac{3}{2} AE \times EB - \frac{1}{2} DC^2 \gtreqless AK^2$.

[11]) Huygens annota en marge „*a* lemm. praec."

[12]) „*b* lemm. praec." [Huygens].

quum AB fit dupla FB, et EB dupla YB; erit AE quoque dupla FY; ergo rectang. AEB duplum rectang. fub EB et FY; quare fesquialterum rectang.i AEB erit triplum rectang.i fub EB et FY, ideoque aequale rectang. fub triplâ EB et FY; fed et $\frac{1}{2}$ quadr. CD oftenfum fuit aequale effe rectang. fub tripla EB et YZ; ergo rectang. fub triplâ EB et totâ FZ aequale eft fefquialtero rectang. AEB una cum dimidio quadr. DC. quum autem ponatur fefquialterum rectang. AEB cum defectu dimidii quadr. DC majus quadr. AK vel ED, erit, addito utrinque quadr.o DC, fefquialterum rectang. AEB una cum dimidio quadr.o DC majus quadr.o EC; Ergo et rectang. fub tripla EB et FZ, majus erit quadr.o EC. Igitur tripla EB ad EC majorem habet rationem, quàm EC ad FZ; atqui ut tripla EB ad EC ita neceffario eft rectang. fub triplâ EB et DC at rectang. fub EC et DC; igitur et rectang. fub tripla EB et DC ad rectang. fub EC, DC, majorem habet rationem quam EC ad FZ. Atqui rectang. fub. EC et CD (quia tripla EB eft ad CD, ut EC ad HZ ^{c} [13])) aequale eft rectang. fub tripla EB et HZ: igitur quoque rectang. fub tripla EB et CD ad rectang. fub tripla EB et HZ, five bafis CD ad HZ bafin majorem habet rationem, quàm EC ad FZ; et permutando CD majorem ad EC quam HZ ad FZ. fed propter fimilia triangula ECD, FZG, ficut CD eft ad EC, ita eft GZ ad ZF; igitur GZ ad ZF majorem quoque rationem habet quàm HZ ad FZ; quare GZ major HZ; quod erat oftendendum.

Jam fi fefquialterum rectang. AEB, detracto dimidio quadr. DC, aequale fit quadr.o AK; dico tum quoque ZG aequalem fore HZ. Cujus demonftratio dependet à praecedenti. nam fi fefquialterum rectang. AEB detracto $\frac{1}{2}$ quadr. DC aequale fit quadr. ED, omnia quae modò majora erant hìc erunt aequalia, quare et tandem GZ aequalis HZ.

Similiter fi $\frac{3}{2}$ rectang. AEB detracto $\frac{1}{2}$ quadr. DC minus fuerit quadr.o AK, omnia quae in praecedentibus erant majora, minora erunt, et tandem GZ minor HZ ut oportebat. Quare conftat propofitum.

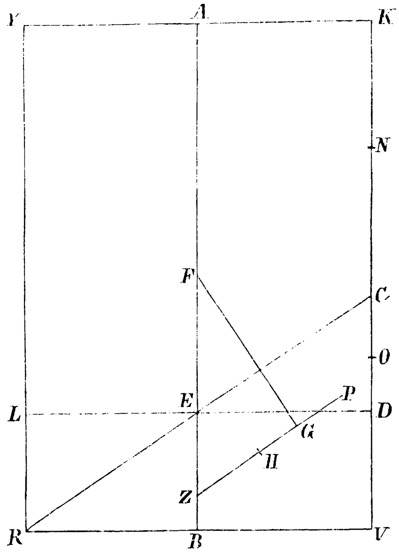
Manifeftum autem eft etiam tum conftare, quum punctum R incidit in angulum M, ita ut loco trapezii abfciffum fit triangulum, quamvis de hoc cafu fpeciatum fit Theorema fequens.

[13]) „*c* lemm. praec.” [Huygens].

Lemma 3. [14])

Sit rectangulum KR, à quo abſciſſum triangulum RCV eductâ lineâ RC ex uno angulorum. agatur autem per H centrum gravitatis dicti trianguli linea ZHP parallela RC. et cadat ex F centro rectang.i KR, FG perpendicularis in ZP. porrò ſit VD dimidia VC, et VN tres quartae VK. dico in lineâ ZP, partem ZG interceptam ab axe rectanguli, AB, et perpendiculari FG, majorem aequalem vel minorem fore parte ZH, intercepta ab eodem axe et centro grav. trianguli RCN; [15]) *prout rectang. VDN majus aequale vel minus erit octavâ parte quadrati baſis RV, vel YK.*

Fig. 5.



Sit primò rectang. VDN majus octavâ parte quadrati RV; dico ZG majorem fore ZH.

ducatur enim recta DL aequidiſtans baſi RV, quam manifeſtum eſt in eodem puncto E ſecare axem AB ubi idem ſectus eſt à linea RC et abſcindere rectang. DR aequale triang. RCN [15]) praeterea CD bifariam dividatur in O.

Quia igitur rectang. VDN majus eſt $\frac{1}{8}$ quadrati RV, erit duplum rectanguli VDN id eſt rectang.um ſub VC et DN majus $\frac{1}{4}$ quadr. RV, ſeu quadrato BV. rectang. verò ſub VC et DN aequale eſt exceſſui rectanguli ſub VC et VN ſupra rectang. ſub VC et VD, id eſt exceſſui $\frac{3}{4}$ rectang.i CVK ſupra $\frac{1}{2}$ quadr. VC. ergo et hic exceſſus major eſt quadrato BV. sed $\frac{3}{4}$ rectang. CVK aequale eſt rectangulo ſub KV et VO; id eſt rectangulis duobus, nempe rect.o ſub KD et VO, et rect.o ſub DV et VO; id eſt rectang.o ſub KD et VO una cum $\frac{3}{8}$ quadr. VC. Ergo et haec duo cum defectu $\frac{1}{2}$ ſive $\frac{4}{8}$ quadr. VC majora quadrato BV. Id eſt rectang.um

---

[14]) Primitivement il y avait „Theorema 3." Le „Lemma" contient une simplification du lemme précédent pour le cas où le point R coïncide avec le point M de la figure 4. En effet, les relations $\frac{3}{2}\,\mathrm{AE} \times \mathrm{EB} - \frac{1}{2}\,\mathrm{DC}^2 \gtreqless \mathrm{AK}^2$, peuvent s'écrire alors (voir la fig. 5, où $\mathrm{VN} = \frac{3}{4}\,\mathrm{KV}$):

$$\tfrac{3}{2}\,\mathrm{KD} \times \mathrm{DV} - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{DV}^2 \gtreqless \tfrac{1}{4}\,\mathrm{RV}^2, \text{ ou bien : } (\tfrac{3}{4}\mathrm{KD} - \tfrac{1}{4}\,\mathrm{DV})\,\mathrm{DV} \gtreqless \tfrac{1}{8}\,\mathrm{RV}^2, \text{ c'est-à-dire:}$$

$$(\tfrac{3}{4}\,\mathrm{KV} - \mathrm{DV})\,\mathrm{DV} \gtreqless \tfrac{1}{8}\,\mathrm{RV}^2;\ (\mathrm{NV} - \mathrm{DV})\,\mathrm{DV} \gtreqless \tfrac{1}{8}\,\mathrm{RV}^2 \text{ et finalement:}$$

$$\mathrm{ND} \times \mathrm{DV} \gtreqless \tfrac{1}{8}\,\mathrm{RV}^2.$$

[15]) Lisez RCV.

ſub KD et VO ſive ſeſquialterum rectanguli KDV cum defectu $\frac{1}{8}$ quadr. VC ſive cum defectu $\frac{1}{2}$ quadrati DC majus quadrato BV; quare et ZG major erit ZH [a] [16]), quod erat oſtendendum.

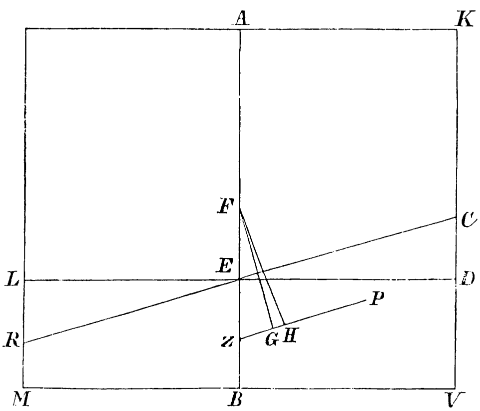
Jam ſi rectang. VDN aequale ſit octavae parti quadrati RV; dico ZG quoque aequalem fore ZH. Omnia enim quae modò majora fuere hìc erunt aequalia, quare et tandem ſeſquialterum rectang. KDV cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. DC aequale quadrato BV: ideoque ZG aequalis ZH [b] [17]), ut oportebat.

Eâdem ratione ſi rectang. VDN minus ſit octavâ parte quadrati RV, erit quoque ZG minor ZH. quare conſtat propoſitum.

THEOREMA 2. [18])

Rectangulum cujus quadratum baſis quadrati lateris non eſt minus quàm ſeſquialterum $\left[\frac{3}{2}\right]$, *quamcunque proportionem ad liquidum habeat in gravitate; liquido ſupernatans demerſâ baſe et poſitum inclinatum, ita ut neutra baſium contingat liquidi ſuperficiem, non manebit inclinatum, ſed rectum reſtituitur, id eſt ut axis ſit ad perpendiculum.* [19])

Fig. 6.



Sit Rectangulum KM, cujus quadratum baſis MV non minus ſit quàm ſeſquialterum quadrati lateris VK, habeat autem quamcunque ad liquidum in gravitate proportionem, eique ſupernatet demerſâ base et poſitum ſit inclinatum, adeo ut ſuperficies liquidi ſit RC; dico Rectangulum non ita conſiſtere ſed reſ-

[16]) „*a* lemm. 2." [Huygens].

[17]) „*b* lemm. 2." [Huygens].

[18]) Primitivement „Theorema 4" (comparez les notes 9 et 14). Ce theorème et le „theorema 3" qui suit, contiennent ensemble la solution complète du problème de la stabilité de l'équilibre d'un parallélipipède flottant dans la situation verticale. Cette solution est conforme à celle, publiée pour la première fois en 1746 par Bouguer dans l'ouvrage cité vers la fin de la note 6. Voir la page 265 du Chapitre IV, Livre II, Section II. Euler, de même, a donné une solution identique, p. 107 du Tome I de l'ouvrage: „Scientia navalis seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus. Auctore Leonhardo Eulero. Prof. Honorario academiae imper. scient. et directore acad. reg. scient. Borussicae. Petropoli. Typis Academiae Scientiarum CIƆ IƆCCXLIX.

[19]) Le théorème indique que la position (1), voir l'Avertissement à la p. 87 du Tome présent, sera stable toutes les fois qu'on aura $\eta \leqq \sqrt{\frac{2}{3}}$, c'est-à-dire, toutes les fois que le point représentatif (ε, η) tombera au Tableau de l'Avertissement dans l'intérieur du rectangle ORSA, ou sur la droite RS.

titui, ut axis AB ſit ad perpendiculum. Sit enim, diviſâ AB bifariam, in F centrum grav. rectanguli KM. et H centrum gravit. trapezii RCVM, per quod ducatur ZHP parallela RC, et in eam ex F cadat perpendicularis FG. denique per E ubi ſuperficies liquidi ſecat axem AB ducatur LED parallela MV.

Quia igitur quadratum VM non eſt minus quàm ſeſquialterum quadrati KV ſive AB, erit quoque quadratum AK non minus quàm ſesquialterum quadrati AF. quum autem quadratum AF non ſit minus rectangulo AEB [a] [20]) : erit quoque ſeſquialterum quadrati AF non minus ſesquialtero rectanguli AEB : quare et quadratum AK non minus quàm ſeſquialterum rectang. AEB. Ergo ſeſquialterum rectanguli AEB cum defectu dimidii quadrati DC minus erit quadrato AK. quare in lineâ ZP, pars ZG minor erit quam ZH [b] [21]). Ergo quum FG perpendicularis ſit in ZP et in ſuperficiem liquidi RC, ſequitur FH ad eandem non eſſe perpendicularem : ergo totum rectangulum ad eam partem inclinabit ad quam inclinat linea FH [c] [22]), aſcendetque à parte K et ab alterâ deſcendet, donec axis AB ad ſuperficiem liquidi perpendicularis ſit; quod erat demonſtr.

Theorema 3.

Rectanguli cujus quadratum baſis quadrati lateris ſit minus quam ſeſquialterum [$\frac{3}{2}$], *latere ita ſecto, ut rectangulum ſub ſegmentis aequale ſit ſextae parti quadrati baſis; ſi rectangulum ad liquidum in gravitate non minorem proportionem habeat quàm ſegmentum majus habet ad latus, vel non majorem quàm ſegmentum minus habet ad idem latus; ſupernatet autem liquido demerſâ baſe et ponatur inclinatum ut tamen neutra baſium liquidi ſuperficiem contingat, rectum reſtituetur.* [23]).

Sit rectangulum KM, cujus quadratum baſis MV quadrati lateris VK minus ſit

---

[20]) „*a* pr. 5 lib. 2. Eucl." [Huygens].

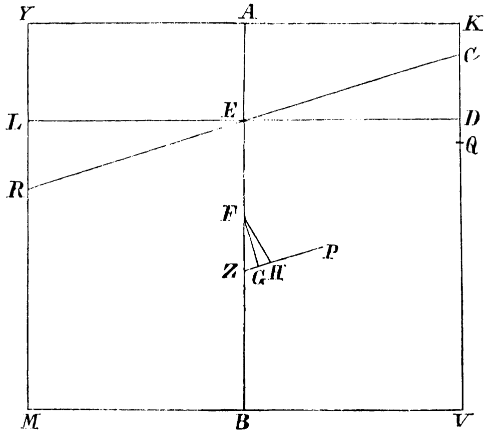
[21]) „*b* lemm. 2." [Huygens]. C'est-à-dire le „Lemma 2" du „Liber" présent. Primitivement on lisait „Theor. 2 h. lib." Consultez la note 9. Et il en est de même plusieurs fois dans la suite; mais nous ne mentionnerons plus les altérations qui ont eu pour cause le changement des „Theoremata 2 et 3" en „Lemmata" et qui prouvent que ce changement n'a été apporté qu'après l'achèvement du „liber II."

[22]) „*c* Theor. 1. h. lib." [Huygens].

[23]) Le théorème nous apprend que le parallélipipède flottant pourra conserver la position (1), indiquée p. 87 de l'Avertissement, pourvu que le point représentatif (ε, η) tombe dans l'espace BEFGCSFR du Tableau, et de même qu'il pourra conserver la position (5) toutes les fois que le point représentatif se trouvera dans l'une des divisions BEO ou GAC.

Pour le montrer supposons en premier lieu $MV = a$, $KV = b$, $a > b$. Soit alors $b\varepsilon$ l'un des segments du coté KV. Dans ce cas le théorème nous apprend que la stabilité exige que pour un rapport η donné de b à a la densité relative soit inférieure ou égale à la moindre, ou

Fig. 7.



quàm ſeſquialterum. ſectum autem ſit latus KV in Q, ita ut rectang. KQV aequaetur $\frac{1}{6}$ quadr. baſis MV vel YK. habeat verò rectang. KM ad liquidum in gravitate primò rationem non minorem eâ, quam QV habet ad KV: et liquido ſupernatans poſitum ſit inclinatum, ita ut liquidi ſuperficies ſit RC: dico rectum reſtitutum iri.

Sit enim rectang.i KM axis AB, et per E ubi is ſecat liquidi ſuperficiem RC ducatur LED parallela MV. porro ſit F centr. grav. rectanguli KM, et H trapezii merſi RCVM, per quod agatur ZHP parallela RC atque in eam ex F cadat perpendicularis FG. denique jungatur FH.

Quia igitur rectang. KM ad liquidùm in gravitate non minorem habet rationem quàm QV ad KV, habebit quoque trapezium demerſum RCVM ſive quod ei aequale eſt rectang. DM ad rectang. KM non minorem rationem quam QV ad KV[a][24]); quare DV non minor erit QV. Ideoque rectang. KDV ſeu AEB non majus rectangulo KQV. Ergo rectang. AEB non majus quoque quàm $\frac{1}{6}$ quadrati MV; et triplum rectang. AEB non majus quàm $\frac{1}{2}$ quadr. MV; et $\frac{3}{2}$ rectang. AEB non majus quàm $\frac{1}{4}$ quadr. MV ſive quàm quadratum AK. quamobrem $\frac{3}{2}$ rectang. AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. DC minus erit quadrato AK, atque ideo ZG minor ZH[b][25].) Ergo quum FG ſit perpendicularis ad ZP et ad ſuperficiem liquidi RC, ſequitur FH ad eandem non eſſe perpendicularem. Ergo totum rectangulum

---

bien supérieure ou égale à la plus grande racine de l'équation quadratique: $b\varepsilon\,(b - b\varepsilon) = \frac{1}{6}\,a^2$, qui se laisse écrire: $6\,\eta^2\,\varepsilon\,(1 - \varepsilon) = 1$. Or, c'est là précisement l'équation de la courbe EFG du Tableau.

Supposons maintenant $MV = b$, $KV = a$, a toujours $> b$. Alors le parallélipipède se trouve dans la position (5), mais si alors $a\varepsilon$ représente le segment en question, le théorème exige que la densité relative soit inférieure ou égale à la moindre, ou bien supérieure ou égale à la plus grande racine de l'équation quadratique $a\varepsilon(a - a\varepsilon) = \frac{1}{6}\,b^2$, qui s'écrit maintenant $6\,\varepsilon\,(1 - \varepsilon) = \eta^2$; ce qui coïncide avec l'équation de l'ellipse à laquelle appartiennent les lignes OE et GA du tableau.

Ajoutons que les conditions de stabilité formulées dans les „Theoremata 2 et 3" peuvent être exprimées par la seule relation:

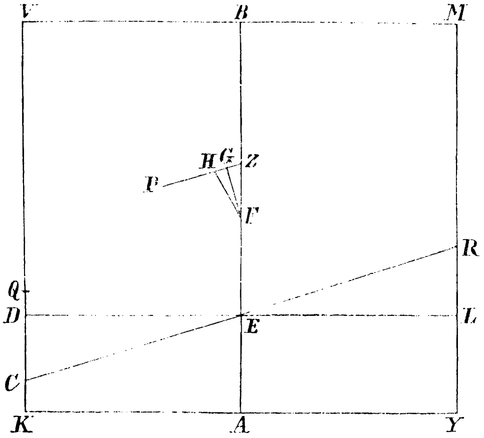
$$MV^2 \geq 6\,\varepsilon\,(1 - \varepsilon)\,KV^2.$$

[24]) „a Theor. 4. lib. 1." [Huygens].
[25]) „b lemm. 2." [Huygens].

KM ad eam partem inclinabit ad quam inclinat linea FH [c 26]), aſcendetque à parte K et ab altera deſcendet, donec axis AB, ad ſuperficiem liquidi fiat perpendicularis; quod erat primò demonſtr.

Habeat nunc rectang. KM ad liquid. in gravitate proportionem non majorem eâ, quam KQ habet ad KV, et liquido ſupernatans poſitum ſit inclinatum ita ut liquidi ſuperficies ſit CR: dico ſimiliter rectum reſtitutum iri.

Fig. 8.



Sit enim H centrum grav. trapezii enatantis RMVC, per quod agatur ZP parallela RC, caeteraeque conſtruantur ut in caſu praecedenti.

Quum itaque rectang. MK ad liquidum in gravitate non majorem habeat rationem, quam KQ ad KV, habebit quoque trapezium demerſum RCKY ſive quod ei aequale eſt rectang. DY ad rectang. MK non majorem rationem quam KQ ad KV. [a 24]) quare KD non major erit KQ et DV non minor QV. Unde ſicut in caſu praecedenti demonſtrari poteſt FH non eſſe perpendicularem ad ZP, ideoque nec ad ſuperficiem liquidi RC. FH autem hic jungit centrum gravitatis totius rectanguli cum centro grav. partis enatantis; ergo totum rectangulum inclinabit eò quò inclinat linea FH [b 27]); deſcendetque à parte V et ascendet à parte M, donec axis BA ad liquidi ſuperficiem fiat perpendicularis; quod erat demonſtrandum.

Hinc manifeſtum eſt parallelepipedum quodcunque, tam magnam vel tam parvam proportionem poſſe habere ad liquidum in gravitate, ut ſupernatans liquido demerſâ baſium minimâ, et poſitum inclinatum, ita tamen ut neutra minimarum baſium liquidi ſuperficiem contingat, rectum reſtituatur, et planum baſium ſuperficiei liquidi fiat parallelum.

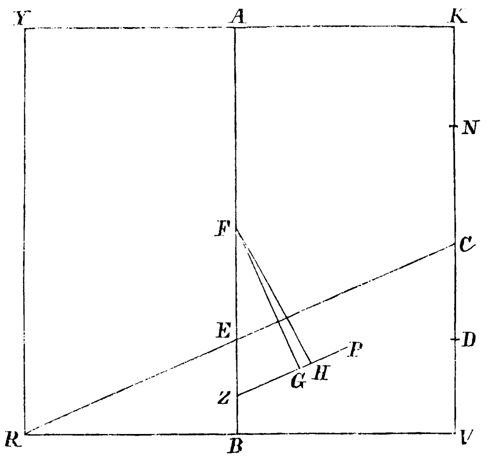
[26]) „*c* Theor. 1 h. lib." [Huygens].

[27]) „*b* Theor. 1 h. lib"· [Huygens].

THEOREMA 4.

Rectangulum, cujus quadratum basis ad quadratum lateris minorem quidem habeat rationem quàm tria ad duo, majorem veró quàm novem ad octo, quamcunque ad liquidum in gravitate proportionem habuerit, eidem supernatans demersâ base nunquam ita consistet, ut unus angulorum sit in ipsâ liquidi superficie. [28])

Fig. 9.



Sit rectangulum KR cujus quadratum basis RV ad quadratum lateris KV minorem quidem rationem habeat quam 3 ad 2, majorem vero quam 9 ad 8;

Habebit autem ad liquidum in gravitate rationem, quae vel minor erit subduplâ vel non minor: quare habeat primò minorem subduplâ, et liquido supernatans dermersâ base, ponatur ita, ut angulus R sit in liquidi superficie, quae sit RC, dico angulum R infra eandem demersum iri.

Sit enim AB axis rectanguli, et F ejusdem centr. grav. sicut et H centr. grav. demersi trianguli RCV per quod agatur ZHP parallela CR; atque in eam cadat perpendicularis FG, et jungatur FH. Porrò sit CV bifariam secta in D; et KV in N, ita ut NV sint $\frac{3}{4}$ KV.

---

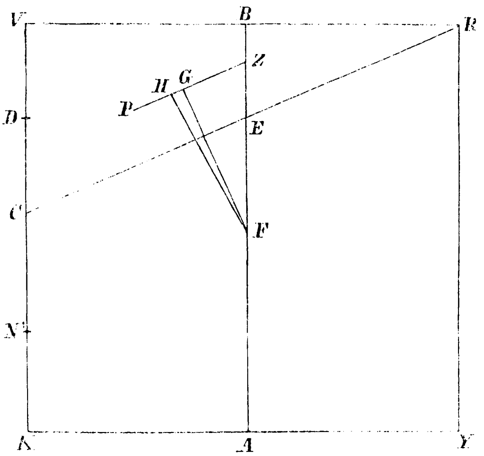
[28]) Le théorème démontre que, si dans le Tableau vis à vis de la p. 87 de l'Avertissement le point représentatif tombe à l'intérieur du rectangle TUSR, alors le parallélipipède ne pourra jamais flotter de telle manière que l'un des sommets de la section verticale soit dans le niveau du liquide et *qu'en même temps ce soit l'un des côtés les plus courts de cette section qui se trouve en partie au dessus et en partie au dessous du niveau du liquide.*

On observera que le théorème aussi bien que sa démonstration, qui l'un et l'autre supposent RV > KV, n'excluent nullement le cas où c'est le plus long côté qui est coupé par la ligne RC qui désigne le niveau du liquide. En effet, cette dernière situation pourra se réaliser, comme l'indique le Tableau, dans les limites données, toutes les fois que le point représentatif appartiendra à l'une des lignes HO ou NA et où par conséquent le parallélipipède pourra prendre la situation intermédiaire entre les cas (3)' et (4), ou (3) et (4).

Ajoutons que le théorème doit surtout servir à préparer le „Theorema 5" qui suit; à l'exemple d'ailleurs d'Archimède qui, dans les recherches sur la flottation du conoïde parabolique dont l'axe se trouve dans une situation inclinée, prépare de la même manière les Prop. VIII et IX du „Liber secundus" (pp. 22 verso et 26 recto de l'ouvrage cité dans la note 4 du „Liber 1" p. 94 du traité présent) par les Prop. VI et VII (pp. 16 verso et 21 verso du même ouvrage).

Rectang. VDN non poteſt majus eſſe quam $\frac{1}{4}$ quadrati VN[a 29]); quia verò VN est $\frac{3}{4}$ VK, erit quadratum VN $\frac{9}{16}$ quadrati KV, ideoque $\frac{1}{4}$ quadrati VN erit $\frac{9}{64}$ quadrati VK; ergo rectang. VDN non eſt majus quam $\frac{9}{64}$ quadrati VK. porrò quia quadr. RV ad quadr. VK majorem habet rationem quam 9 ad 8, erit octuplum quadrati RV majus noncuplo quadrati VK; et $\frac{8}{64}$ ſeu $\frac{1}{8}$ quadrati RV major quàm $\frac{9}{64}$ quadrati VK. Ergo $\frac{1}{8}$ quadrati RV major quoque rectangulo VDN. quare pars ZH major erit parte ZG[b 30]). et quum FG perpendicularis ſit in ZP, ac proinde in liquidi ſuperficiem RC, in eandem linea FH perpendicularis non erit. quapropter totum rectangulum in eam partem inclinabit in quam inclinat linea FH[c 31]); aſcendetque à parte K et ab alterâ parte deſcendet, ideoque angulus R mergetur infra liquidi ſuperficiem; quod erat demonſtr.

Fig. 10.



Jam habeat rectang. ad liquidum in gravitatem non minorem ſubduplâ rationem, et liquido ſupernatans demerſâ baſe ponatur ita ut angulus R ſit in liquidi ſuperficie, quae ſit RC; dico angulum R ſupra liquidi ſuperficiem ſublatum iri.

Sit enim H centr. grav. trianguli enatantis CVR, et reliqua conſtruantur ut in casu praecedenti, adeo ut CV rurſus bifariam ſecetur in D; et VK in N, ita ut VN ſit $\frac{3}{4}$ VK.

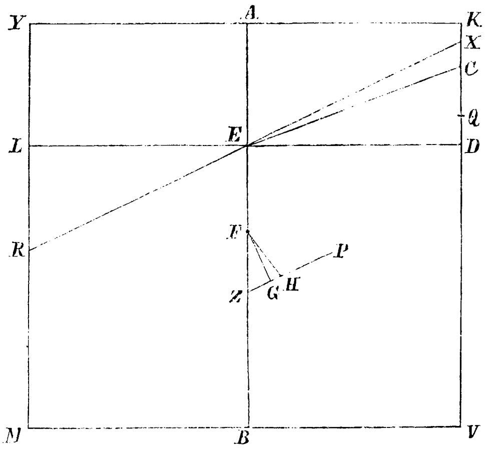
Demonſtrari itaque poteſt, ſicuti in casu praecedenti, FH non eſſe perpendicularem in ZP, neque in ſuperficiem liquidi CR: FH autem hic jungit centrum gravitatis totius rectanguli cum centro grav. partis enatantis CVR; Ergo totum rectangulum inclinabit in quam partem inclinat linea FH[d 32]); et deprimetur verſùs V, extolletur verò verſùs R ideoque angulus R ſupra liquidi ſuperficiem exſurget; quod erat demonſtrandum.

29) „*a* pr. 5. lib. 2. Eucl." [Huygens].
30) „*b* lemm. 3. h. lib." [Huygens].
31) „*c* Theor. 1. h. lib." [Huygens].
32) „*d* Theor. 1. h. lib." [Huygens].

Theorema 5.

Rectangulum cujus quadratum basis quadrati lateris minus est quàm sesquialterum [$\frac{3}{2}$], *majus verò quàm sesquioctavum* [$\frac{9}{8}$]; *si, diviso latere sicut in Theor. 3°, ad liquidum in gravitate minorem habeat rationem, quàm segmentorum majus, majorem verò quàm segmentorum minus habet ad idem latus: liquido supernatans demersâ base et positum inclinatum ut tamen neutra basium liquidi superficiem contingat, neque rectum restituetur neque inclinatum manebit, nisi quando axis cum superficie liquidi fecerit angulum aequalem certo angulo, de quo infra dicetur.* [33])

Fig. 11.



Esto rectang. KM, cujus quadratum basis MV ad quadratum lateris KV minorem rationem habeat quam 3 ad 2, majorem verò quàm 9 ad 8, et diviso latere KV in Q ita ut rectangulum KQV aequetur $\frac{1}{6}$ quadrati basis MV, habeat rectangulum ad liquidum in gravitate rationem quam DV ad KV, ita ut DV minor quidem sit QV, major verò QK. et ductâ DL parallelâ VM, veniat ex E, ubi DL ab axe AB secatur, linea EC, ita ut partis compraehensae CD quadratum sit duplum excessus sesquialteri rectanguli AEB supra quadratum AK. [34])

dico rectang. KM liquido supernatans et positum inclinatum, ita tamen ut neutra basium liquidi superficiem contingat, neque rectum restitui, neque consistere nisi cùm axis AB cum liquidi superficie faciet angulum aequalem angulo ECD. sive AEC.

---

[33]) Le théorème nous apprend que le parallélipipède flottant pourra prendre la situation indiquée dans l'„Avertissement" par le numéro ②, toutes les fois que le point représentatif tombera dans l'espace VFWV du Tableau; c'est-à-dire toutes les fois qu'entre les limites $\sqrt{\frac{2}{3}} < \eta < \sqrt{\frac{8}{9}}$, on aura $\eta^2 > \frac{1}{6\varepsilon(1-\varepsilon)}$.

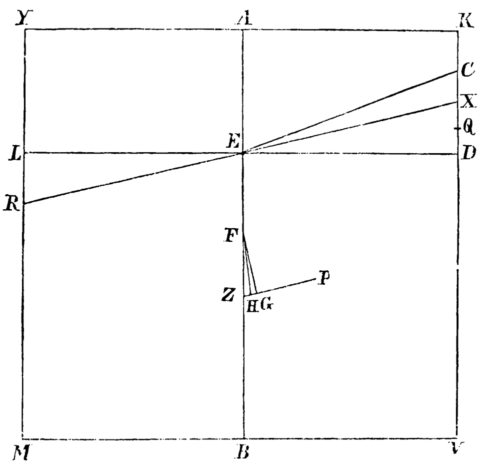
La forme sous laquelle le théorème a été rédigé, surtout l'introduction de l'„angulus, de quo infra dicetur," a été empruntée aux Prop. VIII et IX d'Archimède, dont il est question dans la note 28. De même les démonstrations se ressemblent par le principe.

[34]) C'est ici la définition de l'„angulus, de quo... dicetur." On en déduit facilement pour sa valeur : $\cot^2 AEC = 12\varepsilon(1-\varepsilon)\eta^2 - 2$, où $\eta = KV : MV$ et où ε représente, comme toujours, la densité du parallélipipède relative à celle du fluide.

Primò enim ita difponatur rectangulum ut liquidi fuperficies fit RX, quâcum axis AB faciat angulum minorem angulo AEC. Sit autem F centr. grav. rectang. KM et H trapezii RXVM, per quod ducatur ZP parall. RX; atque in hanc cadat perpendic. FG, denique jungatur FH.

Quia igitur rectang. KM eft ad liquidum in gravitate, ficut linea DV ad KV, five ut rectang. DM ad KM; erit neceffariò trapezium merfum RXVM aequale rectang.o DM [a 35]); quamobrem fuperficies liquidi RX et linea LD in eodem puncto E fecant axem AB. erit itaque ex hijpothefi angulus AEX minor angulo AEC: quare XD maior CD. quum autem quadr. CD per conftr. fit duplum exceffus fefquialteri rectanguli AEB fupra quadratum AK, erit $\frac{3}{2}$ rectang. AEB cum defectu dimidii quadrati CD aequale quadrato AK: et, quum XD fit major CD, $\frac{3}{2}$ rectanguli AEB cum defectu dimidii quadrati XD minus erit quadrato AK; ergo ZG minor ZH [b 36]), et quum FG fit perpendicularis ad ZP atque ideo ad liquidi fuperficiem RX, ad eandem fuperficiem non erit perpendicularis FH; Ergo totum rectang. inclinabit, in quam partem inclinat linea FH, [c 37]) idque fiet quam diu fuperficies liquidi non convenit cum lineâ EC.

Fig. 12.



Jam ita difponatur rectangulum ut liquidi fuperficies RX cum axe AB faciat angulum majorem angulo AEC. fit autem H centr. grav. trapezii merfi RXVM, per quod ducatur ut fupra ZP parall. RX, atque in eam cadat perpendicularis FG. et denique jungatur FH.

Sicuti fuprà ita hic quoque lineae LD et RX in eodem puncto E fecant axem AB: Ergo hìc ex hijpothefi angulus AEX major angulo AEC; quare XD minor CD. quum autem quadratum CD aequali fit duplo exceffui $\frac{3}{2}$ rectanguli AEB fupra quadratum AK [d 38]), erit $\frac{3}{2}$ rectanguli AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadrati CD aequale quadrato AK; et, quum XD fit minor CD, erit $\frac{3}{2}$ rectang. AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadrati XD, majus quadrato AK; ergo ZG major ZH [e 39]), et quum FG fit perpendicularis ad ZP

---

35) „*a* Theor. 4. lib. 1." [Huygens].

36) „*b* lemm. 2. h. lib." [Huygens].

37) C'est-à-dire de telle manière que le point K s'élèvera et que par conséquent la ligne de niveau EX s'approchera de EC. Huygens ajoute en marge „*c* Theor. 1. h. libr."

38) „*d* per constr." [Huygens].

39) „*e* lemm. 2. h. lib." [Huygens].

ideoque et ad liquidi ſuperficiem RX, in eandem ſuperficiem non erit perpendicularis FH; quare totum rectangulum inclinabit in quam partem inclinat linea FH *f* [50]), et deprimetur verſùs K; quod ſemper fiet donec linea EC jaceat in liquidi ſuperficie. Non conſiſtet igitur rectangulum niſi quum axis AB cùm liquidi ſuperficie faciet angulum angulo AEC aequalem; quod erat demonſtr.

Theorema 6.

Rectangulum cujus baſis major latere, quadratum verò baſis ad quadratum lateris minorem habet rationem quàm novem ad octo, liquido ſupernatans; Aliquando rectum conſistet; aliquando ita ut unus angulorum contingat liquidi ſuperficiem, idque quatuor caſibus; ſaepe ita inclinatum ut neutra baſium liquidi ſuperſiciem contingat. nonnunquam ut tres anguli demerſi ſint; nonnunquam denique ut demersus ſit tantum unus. ſecundum diverſam proportionem quam rectangulum ad liquidum habebit in grav. [41])

Concluſio 1.

Eorum quae dicta ſunt primum hìc demonſtrare ſuperfluum eſt, nam quod Theoremate 3° de omnibus quae inclinare poſſunt rectangulis oſtenſum fuit, ſine dubio etiam huìc convenit. [42])

2.

Sit itaque rectangulum KM [Fig. 13] cujus baſis MV major latere KV, quadratum verò MV ad quadratum KV minorem habeat rationem quàm novem ad octo; et latere KV diviſo in quatuor partes aequales punctis O, P, S, praetereàque in D et T ita ut rectangula KDS, KTS, ſingula ſint aequalia octavae parti quadrati baſis MV; habeat rectangulum ad liquidum in gravitate proportionem quàm DV vel DK vel TV vel TK ad latus

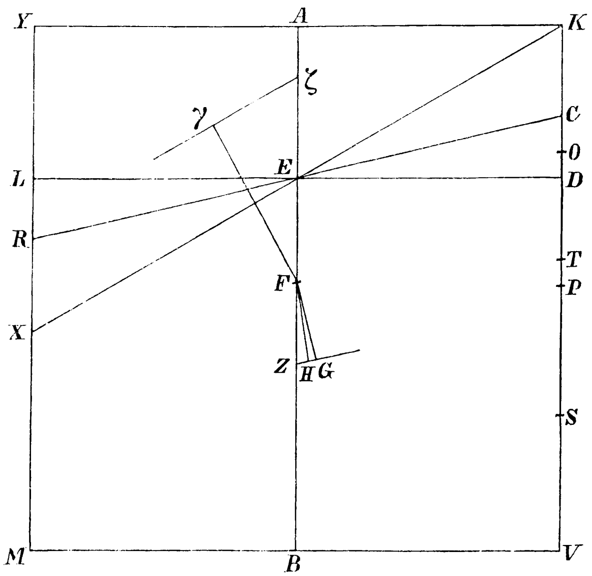
---

[40]) „*f* Theor. 1. h. lib." [Huygens].

[41]) Le théorème nous fait connaître que, si le point représentatif tombe dans l'intérieur du rectangle BCUT du Tableau de l'„Avertissement," c'est-à-dire quand on a $\eta > \sqrt{\frac{8}{9}}$, alors les positions (1), (2), (3) et (3)′, indiquées p. 87 de l'„Avertissement", et aussi leurs positions intermédiaires, peuvent se présenter selon que ce point se trouve dans l'une ou l'autre des divisions qui apartiennent au rectangle mentionné. Voir, pour plus de détails les „Conclusiones."

[42]) La „Conclusio" se rapporte aux divisions BEVT et GCUW du Tableau, où la position (1) peut se réaliser d'après le „Theorema 3." Comparez la note 23.

Fig. 13.



KV, et liquido ſupernatans, ponatur inclinatum, ita ut neutra baſium liquidi ſuperficiem contingat; dico eouſque ultro inclinatum iri, donec unus angulorum ſit in liquidi ſuperficie. [43])

Ut autem appareat omnes hosce casus differentes eſſe, et omnes poſſe habere locum, duo ſunt oſtendenda; primum, quòd punctum T non cadat infrà P ſive medium lateris KV; alterum, quòd puncta D et T non coincidant. Quorum illud ſic oſtenditur.

Quum rectangula KOS, KPS ſingula ſint aequalia $\frac{1}{8}$ quadrati KV, (utpote contenta ſub dimidiâ KV et ejusdem quartâ parte,) rectangula verò KDS, KPS ſingula per conſtr. aequalia $\frac{1}{8}$ quadrati MV, quadr. autem MV majus ſit quadr.º KV per hijpotheſin erunt rectangula ſingula KDS, KTS majora rectangulis KOS, KPS, ideoque puncta D et T propiora erunt medio linea KS, quàm puncta O et P, quare punctum T erit ſupra punctum P.

Alterum quoque facilè demonſtratur; nam ſi puncta D et T coincidunt, id erit

[43]) Dans cette „Conclusio" il s'agit évidemment des cas, où l'on a $b(1-\varepsilon)\left\{\frac{3}{4}b - b(1-\varepsilon)\right\} = \frac{1}{8}a^2$ (a = MV, b = KV, ε = DV : KV ou TV : KV), ou bien $b\varepsilon\left\{\frac{3}{4}b - b\varepsilon\right\} = \frac{1}{8}a^2$ (ε = DK : KV ou TK : KV), c'est-à-dire: $2(1-\varepsilon)(4\varepsilon-1)\eta^2 = 1$, ou $2\varepsilon(3-4\varepsilon)\eta^2 = 1$. Dans le premier cas le point représentatif se trouve sur la courbe LMN du Tableau, dans le second sur la courbe HKL et la „Conclusio" nous apprend qu'alors le parallélipipède pourra prendre l'une des positions intermédiaires entre les positions (2) et (3), ou (2) et (3) indiquées dans l'Avertissement, c'est-à-dire tel que l'un des sommets de la section verticale se trouve dans le niveau du liquide. Comme le tableau nous le montre, il y a, pour une valeur donnée de $\eta = \frac{b}{a} > \sqrt{\frac{8}{9}}$, quatre de ces positions, correspondant aux „quatuor casibus" dont il est question dans le „Theorema 6". Mais alors on doit supposer expressément que c'est le côté le plus court de la section verticale qui est coupé par le niveau du liquide. Si l'on admet que cela arrive aussi pour le côté le plus long, on trouve deux nouvelles positions pour lesquelles le point représentatif se trouvera sur l'une des courbes HO ou NA du tableau. Comparez la note 86.

Ajoutons la remarque que la *stabilité* des positions en question n'est pas démontrée complètement dans ce qui suit, puisque à cet effet on devrait connaître encore la manière dont le parallélipipède se comportera quand il est poussé vers la position (3) ou (3).

in mediò lineae KS, quia rectangula KDS, KTS sunt aequalia; itaque singula aequalia erunt $\frac{1}{4}$ quadrati KS: sed quia quadratum KV ad qu. MV majorem habet rationem quam 8 ad 9, erit noncuplum quadrati KV majus octuplo quadrati MV, et $\frac{9}{16}$ quadrati KV, id est, quadr. KS majus quàm $\frac{8}{16}$ sive $\frac{1}{2}$ quadrati MV, et $\frac{1}{4}$ quadrati KS majus quàm $\frac{1}{8}$ qu. MV : ergo etiam singula rectangula KDS, KTS majora quàm $\frac{1}{8}$ qu. MV; quod est absurdum, nam singula ex constr. aequalia sunt $\frac{1}{8}$ quadr. MV. Puncta igitur D et T non coincidunt.

Habeat itaque primò rectang. ad liquidem in gravitate proportionem quàm DV ad KV, et liquido supernatans ponatur inclinatum, ita ut liquidi superficies sit RC : dico eousque inclinatum iri ultro, donec angulus K sit in liquido superficie.

Sit enim DL parallela KY, et fiat triangulum KYX aequale rectangulo KL; Porrò sit in axe AB, F centr. rectanguli KM. item H centr. grav. trapezii mersi RCVM, et γ trianguli XYK, per quae ducantur ZHG parall. RC et $\gamma\zeta$ parall. XK. in easque cadant perpendiculares FG et in alteram Fγ. Jungatur denique FH.

Quia igitur rectang. ad liquidum in gravitate est sicut DV ad KV, sive ut rectang. DM ad KM; sequitur trapezium mersum RCVM rectangulo DM aequale esse [b 44]), quare lineae DL, RC et KX in eodem puncto E secant axem AB. Quia autem rectangulum sub YL et excessu $\frac{3}{4}$ YM supra YL id est rectang. KDS aequale est per constr. $\frac{1}{8}$ quadr. MV; sequitur in lineâ $\gamma\zeta$, (quae per centr. grav. trianguli XYK parallela ducta est ipsi XK), spatium $\gamma\zeta$ interceptum à perpendiculari Fγ et axe AB, aequale esse spatio intercepto à centro gr. trianguli XYK et eodem axe AB [c 45]). et quoniam haec spatia sunt aequalia, sequitur $\frac{3}{2}$ trianguli AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. LX aequari quadrato AK [d 46]). Igitur $\frac{3}{2}$ rectanguli AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ qu. DC (quia DC minor est DK) majus erit quadrato AK: quamobrem in lineâ ZG, quae per H centr. gr. trapezii RCVM ducta est parallela RC, majus erit spatium ZG spatio ZH [e 47]). Ergo quum FG sit perpendicularis ad lineam ZG et consequenter ad liquidi superficiem RC, in eandem non erit perpendicularis linea FH. quare totum rectang. inclinabit in quam partem inclinat eadem

44) „*b* Theor. 4. lib. 1." [Huygens]. Primitivement il y avait ici „*a*" dans le texte et le signe d'annotation „*b*" s'y trouvait dans une phrase biffée. Depuis l'„*a*" du texte fut changée en „*b*" et l'annotation „*a*" biffée en marge. Elle était d'ailleurs identique à l'annotation „*b*" que nous donnons.

45) „*c* lemm. 3 h. lib." [Huygens]. En effet les points K, D, S de la figure 13 correspondent aux points V, D, N de la figure 5 (p. 127 du Tome présent) dont il faut tourner le bas en haut. On a donc d'après le lemme cité dans cette dernière figure, au cas présent, ZH = ZG; donc HF, c'est-à-dire le Fγ de la présente figure, perpendiculaire à ZP, c'est-à-dire à $\gamma\zeta$; où γ représente le centre de gravité du triangle XYK.

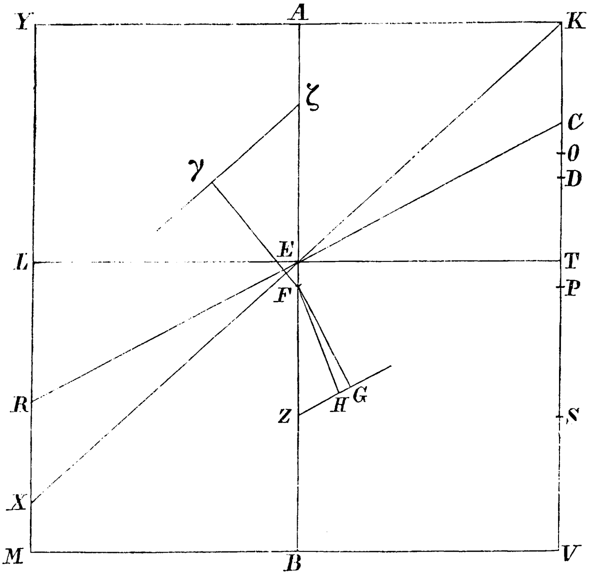
46) „*d* per conv. lemm. 2 h. lib." [Huygens].

47) „*e* lemm. 2. h. lib." [Huygens].

FH f[48]), et deprimetur verſùs K, extolletur verò versùs Y, donec ſuperficies liquidi ſit XK; et quia tunc linea Fγ, quae jungit centr. gr. rectanguli KM cum centro grav. trianguli enatantis XYK perpendicularis erit in $\gamma\zeta$ et conſequenter in ſuperficiem liquidi, ſicuti modò oſtenſum eſt, manifeſtum eſt rectang. ad neutram partem magis inclinatum iri; quod erat demonſtr.

Jam habeat rectang. ad liquidum in gravitate proportionem quam TV [Fig. 14] ad KV; et liquido ſupernatans ponatur inclinatum, ita ut ſuperficies liquidi ſit RC; dico eousque ultro inclinatum iri donec angulus K ſit in liquidi ſuperficie, eaque ſit XK.

Fig. 14.



ducatur enim TL linea loco DL, et reliqua conſtruantur ut in caſu praecedenti, Eritque eadem demonſtratio; nimirum quia hìc rectang. KTS aequale eſt $\frac{1}{8}$ quadr. MV g[49]), incidet perpendiculum Fγ in ipſum centrum grav. trianguli XYK h[50]), quare cum rectangulum erit ita inclinatum ut ſuperficies liquidi ſit XK, ad neutram partem magis inclinabit.

Item ſi rectang. ad liquidum in gravitate ſit ut DK vel TK ad KV, invertantur praecedentia ſchemata, (adeò ut Fγ tum fiat ea quae jungit centr. gr. rectanguli KM cum centro grav. partis mersae) et eaedem quae in duobus prioribus caſibus erunt demonſtrationes. Si igitur rectangulum ſit ad liquidum in gravitate ut DV vel TV vel DK vel TK ad KV, etc. quod erat demonſtrandum.

3.

Latere KV [Fig. 15] diviso ut ſupra bifariam in P, et PV bifariam in S; ut et punctis D et T, ita ut ſingula rectangula KDS, KTS, aequentur $\frac{1}{8}$ quadrati baſis MV vel YK; praetereaque in Q, ita ut rectang. KQV aequetur $\frac{1}{6}$ quadrati MV, sicut factum fuit

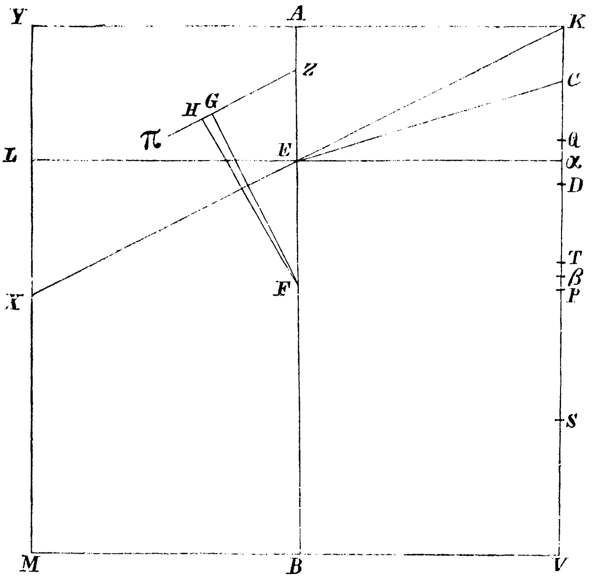
[48]) „f Theor. 1. h. lib." [Huygens].

[49]) „g p. constr." [Huygens].

[50]) „h lemm. 3. h. lib." [Huygens].

Theor. 3°: ſumptòque puncto ubivis inter Q et D ut α, et alio infra T, non tamen ultra P, ut β: Si rectang. ad liquidum in gravitate proportionem habeat quam αV vel βV vel αK vel βK ad latus KV; et liquido ſupernatans ponatur inclinatum, ita ut neutra baſium contingat liquidi ſuperficiem, neque rectum reſtituetur, neque inclinatum manebit, niſi axis cum liquidi ſuperficie fecerit angulum aequalem angulo invento ut ſupra Theor. 5°. [51])

Fig. 15.



Habeat primò rectang. ad liquidum in gravitate rationem quam αV ad KV, ductâque αL parallela YK, veniat ex E, ubi eadem αL ſecat axem AB, linea EC, ita ut partis interceptae Cα quadratum ſit duplum exceſſus ſeſquialteri [$\frac{3}{2}$] rectanguli KαV ſupra quadratum AK.

dico ſi rectang. KM liquido imponatur inclinatum ita ut neutra baſium contingat liquidi ſuperficiem, ita ultro diſpoſitum iri ut axis AB cum liquidi ſuperficie faciat angulum aequalem angulo AEC vel ECα.

ducatur enim ex angulo K linea KX, quae tranſeat per E ubi axis ſecatur à

---

[51]) La „Conclusio 3" nous apprend que la position (2) pourra se présenter toutes les fois que le point représentatif se trouve dans les divisions EVKH, NMWG ou KLM du Tableau de l'Avertissement. Sur l'angle que l'axe du parallélipipède fera alors avec le plan horizontal, voir la note 34 (p. 134).

Ajoutons que la „Conclusio" peut être formulée encore d'une autre façon de telle manière qu'elle soit valable pour toutes les valeurs de ε. En effet, la position (2) pourra se présenter toutes les fois qu'on a: $\eta^2 > \frac{1}{6\,\varepsilon\,(1-\varepsilon)}$ et simultanément: $\eta^2 < \frac{1}{2\,(1-\varepsilon)\,(4\,\varepsilon - 1)}$, comme aussi $\eta^2 < \frac{1}{2\,\varepsilon\,(3 - 4\,\varepsilon)}$.

C'est sous cette dernière forme qu'on retrouve chez Euler, p. 41 „Coroll. 4" de l'ouvrage de 1749 cité dans la note 18 (p. 128), les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une des positions (2) puisse être une position d'équilibre; toutefois Euler n'y démontre pas, comme Huygens, la stabilité d'une telle position.

linea αL; sitque trianguli XYK centrum grav. H, per quod agatur linea πZ parallela XK, in eamque cadat ex F centro rectang.i KM, perpendicularis FG; denique jungatur FH.

Quoniam igitur rectang. KQV per constr. aequale est $\frac{1}{6}$ quadr. basis MV, rectangulum verò KM ad liquidum in gravitate proportionem habet quam αV ad KV, quae minor est eâ, quam QV, major verò eâ, quam QK habet ad latus KV; sequitur rectangulum KM non rectum restitutum iri.[a] [52]) Sed neque eousque inclinabitur ut basis YK contingat liquidi superficiem; nam si eousque jam inclinatum ponatur ut angulus K sit in liquidi superficie KX, continuò idem angulus supra liquidi superficiem extolletur. quod sic ostenditur; quia enim rectang. est ad liquidum in gravitate, sicut αV ad KV, sive ut rectang. αM ad KM, erit etiam trapezium demersum XKVM aequale rectangulo αM[b] [53]), quare liquidi superficies KX in eodem puncto E secabit axem AB, ubi sectus fuit à lineâ αL, eritque YL dimidia ipsius YX. Rectangulum autem sub YL et excessu $\frac{3}{4}$ YM supra YL, id est rectang. KαS minus est rectangulo KDS, (quia punctum D propiùs est medio lineae KS quàm punctum α,) ergo idem illud rectang. minus quoque octavâ parte quadrati MV.

Ergo in lineâ πZ pars GZ minor HZ[c] [54]): ergo quum FG sit perpendicularis ad πZ et consequenter ad liquidi superficiem, ad eandem superficiem non erit perpendicularis FH, quae jungit centr. gravitatis totius rectanguli cum centro grav. partis enatantis XYK: quare totum rectang. inclinabit quò inclinat linea FH[d] [55]), et angulus K supra liquidi superficiem ascendet.

Demonstratum igitur est, rectangulum KM, neque rectum restitutum iri, neque tamen ita consistere posse ut alterutra basium contingat superficiem liquidi. Quòd autem angulus, quem, rectangulo consistente, axis AB cum liquidi superficie faciet, neque major neque minor futurus sit angulo AEC vel ECα, demonstrari facile poterit, ita ut in Theoremate 5° hujus libri.

Habeat nunc rectangulum ad liquidum in gravitate proportionem quam βV ad KV, ductâque βL [Fig. 16] sicut in casu praecedenti ducta fuit αL, inveniatur etiam simili modo angulus ECβ.

dico si rectangulum KM liquido imponatur inclinatum ut tamen neutra basium liquidi superficiem contingat, ita ultro dispositum iri, ut axis AB cum liquidi superficie faciat angulum aequalem angulo AEC vel ECβ.

---

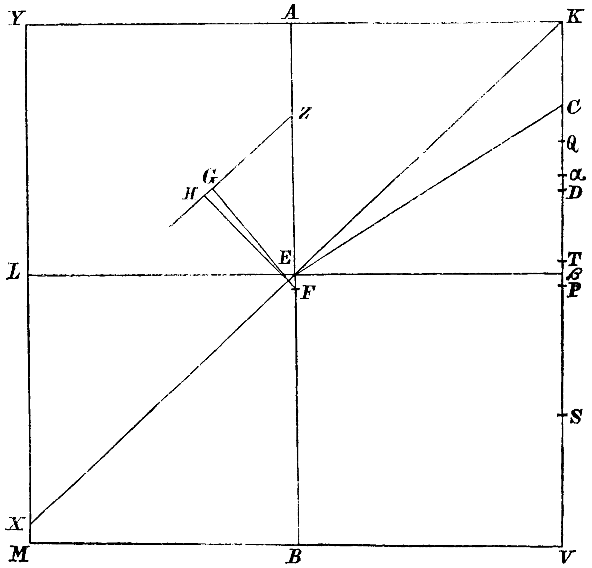
52) „*a* p conv. Theor. 3. h. lib." [Huygens].

53) „*b* per Theor. 4. lib. 1." [Huygens].

54) „*c* lemm. 3. h. lib." [Huygens]. En effet, les points K, α, S de la présente figure, correspondent aux points V, D, N de la figure 5 (p. 127), qu'on doit considérer comme tournée le bas en haut.

55) „*d* Theor. 1. h. lib." [Huygens].

Fig. 16.



Conftruantur enim reliqua ut in cafu praecedenti, et non abfimilis erit demonftratio.

Nam quia hìc rectang. ad liquidum in gravitate rationem habet quam βV ad KV, quae minor eft eâ quam QV, major verò eâ quam QK habet ad KV, non poterit rectangulum rectum reftitui. a [56])

Et rurfus quia hic rectang. KβS minus eft rectangulo KTS, id eft octavâ parte quadrati MV, non poterit rectangulum eousque inclinari, ut angulus K defcendat usque in liquidi fuperficiem KX, quia continuò idem angulus rurfus afcendat, nam FH non erit perpendicularis in liquidi fuperfic. KX.

Ergo rectang. neque rectum confiftit neque ita ut alterutra bafium ullo modo contingat liquidi fuperficiem. quòd verò angulus, quem, confiftente rectangulo KM, axis AB faciet cum liquidi fuperficie, aequalis futurus fit angulo AEC vel ECβ, iterum demonftrare licebit, ficut factum fuit Theoremate 5° hujus libri.

Quòd fi rectang. ad liquidum in grav. fit ut αK vel βK ad KV, inverfa tum intelligantur praecedentia duo fchemata, et eaedem quae in praecedentibus cafibus erunt demonftrationes, nifi quod tunc eae partes merfae erunt, quae priùs enatabant.

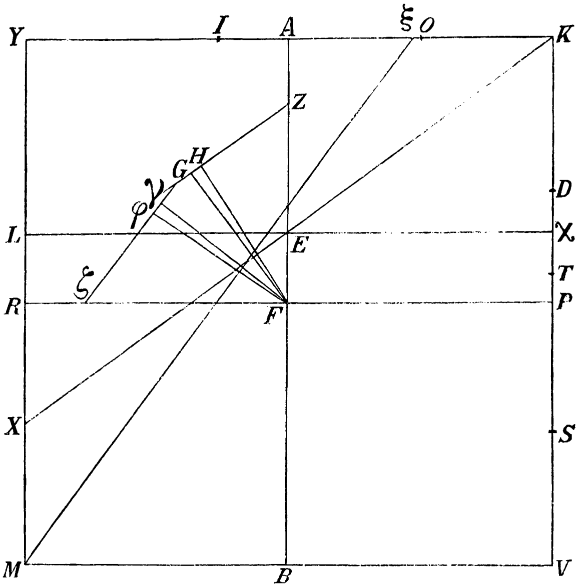
Si igitur rectangulum fit ad liquidum in gravitate, ut αV vel βV vel αK vel βK ad latus KV etc. quod erat demonftr.

4.

Latere KV [Fig. 17] ut fupra divifo punctis S, T et D, nempe ut KS fit $\frac{3}{4}$ KV, et fingula rectangula KDS, KTS aequalia octavae parti quadrati MV vel YK; rectangulum ad liquidum in gravitate rationem habet quam χV ad KV, quae minor fit eâ, quam

[56]) „a per conv. Theor. 3. h. lib." [Huygens].

Fig. 17.



DV, major verò eâ, quam DK habet ad KV; et liquido fupernatans, ponatur ita ut tres anguli merfi fint, K, V et M; dico omnes tres neceffariò merfos manere [57])

Siquidem enim angulus K emerfurus eft, quum fit pofitus infra liquidi fuperficiem, oportet ut prius fit in ipfâ liquidi fuperficie, eàque fit KX.

Sit itaque trianguli XYK centrum gravitatis H, per quod agatur GHZ parallela XK, in eamque ex F centro rectanguli KM, cadat perpendicularis FG, et denique è χ ducatur χL parallela YK. quia igitur rectang. KM eft ad liquidum in gravitate, ficut χV ad KV, five ut rectang. χM ad KM, erit etiam trapezium merfum XKVM aequale rectangulo χM [a] [58]), ideoque fuperficies liquidi KX in eodem puncto E fecabit axem AB, ubi fecatur à linea χL, et erit YL dimidia ipfius YX. Rectang. autem fub YL et exceffu $\frac{3}{4}$ YM fupra YL, id eft, rectang. KχS, majus eft rectangulo KDS vel KTS, (quia punctum χ propius eft medio lineae KS quàm punctum D vel T, [59]) ergo idem rectang. majus quoque octavâ parte quadrati MV. Ergo in lineâ GZ pars GZ major erit parte HZ [b] [60]); igitur quum FG fit perpendi-

---

[57]) La „Conclusio 4" nous fait connaître que le parallélipipède pourra prendre la position (3) toutes les fois que le point représentatif (ε, η) se trouve dans l'intérieur de la région LMN du Tableau de l'Avertissement. On remarquera que l'angle que l'axe fera avec le plan horizontal n'est pas indiqué. En réalité, comme nous l'avons montré dans la note 10 de l'Avertissement, la détermination de cet angle mènerait à la résolution d'une équation biquadratique.

D'ailleurs les conditions nécessaires et suffisantes, contenues dans la „Conclusio 4", pour que la position (3) soit possible peuvent être indiquées par les relations:

$$\varepsilon > \tfrac{1}{2},\ \eta^2 > \frac{1}{2(1-\varepsilon)(4\varepsilon-1)}.$$

[58]) „*a* per Theor. 4. lib. 1." [Huygens].

[59]) En effet, le point milieu de la ligne KS se trouve à égale distance de D et de T.

[60]) „*b* lemm. 3. h. lib." [Huygens].

cularis ad GZ, et confequenter ad liquidi fuperficiem XK, in eandem fuperficiem non erit perpendicularis FH, quae jungit centrum grav. totius rectanguli cum centro grav. partis enatantis XYK; quare totum rectangulum inclinabit in quam partem inclinat linea FH[c 61]), defcendetque angulus K infra liquidi fuperficiem. Ergo quidem angulus K non emerget.

Jam fi dicatur emerfurus angulus M, oportebit fimiliter ut fit priùs in ipfâ liquidi fuperficie, eàque fit Mξ.

Sit itaque φ centrum gravitatis trianguli MYξ, per quod agatur $\zeta\varphi\gamma$ parallela Mξ, in eàmque cadat perpendicularis Fγ. porrò jungatur Fφ, et per F ducatur RFP parallela YK; et denique fit OY $\frac{3}{4}$ YK, et IY dimidia ipfius Yξ.

Quia igitur rectang. KM, ut modò dictum fuit, eft ad liquidum in gravitate, ficut rectang. χM ad KM; erit etiam trapezium demerfum MξKV aequale rectangulo χM[d 62]), et confequenter trapezio XKVM: quare et triangulum MYξ aequale erit triangulo XYK. Ergo ut KY ad YM, ita erit ξY ad YX; et ita quoque IY ad YL five Kχ: fed ita praeterea etiam eft OY ad SK; et dividendo, [63]) ita quoque OI ad Sχ. Igitur quum KY major fit quam YM[e 64]), erit etiam IY major YL five Kχ, et OI major Sχ; ergo rectangulum YIO majus rectangulo KχS; hoc autem majus eft rectangulo KDS vel KTS, five octavâ parte quadrati MV; (quia videlicet punctum χ propius eft medio lineae KS quam puncta D et T,) haec autem octava pars major eft octavâ parte quadrati KV, quia MV major eft quam KV; Rectangulum itaque YIO multo majus eft octavâ parte quadrati KV vel YM.

quare in lineâ $\zeta\gamma$ erit pars $\zeta\gamma$ intercepta à perpendiculari Fγ et axe PR, major parte $\zeta\varphi$[f 65]) interceptâ ab eodem axe PR et centro grav. trianguli MYξ. Ergo Fφ non erit perpendicularis ad $\zeta\gamma$, ideoque nec ad liquidi fuperficiem Mξ; quare totum rectangulum inclinabit eò quò inclinat linea Fφ[g 66]), defcendetque angulus M infra liquidi fuperficiem. Igitur neque angulus M emergere poterit.

Quapropter neceffariò tres anguli K, V et M demerfi manebunt, quod erat demonftrandum.

---

[61]) „*c* Theor. 1. h. lib." [Huygens].

[62]) „*d* per Theor. 4. lib. 1." [Huygens].

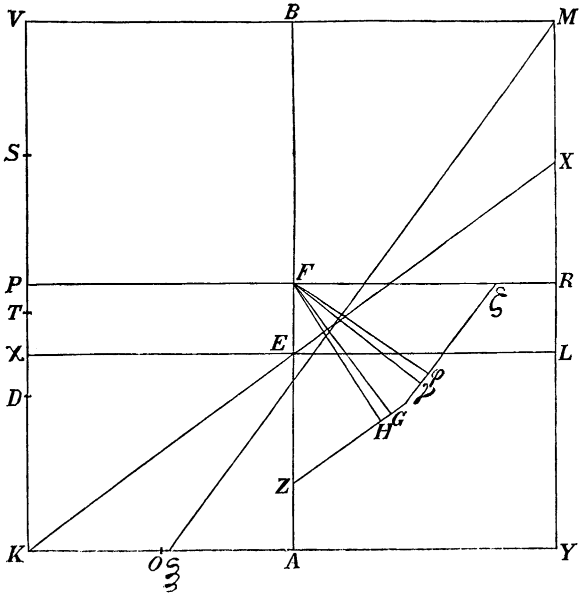
[63]) Consultez, sur cette expression, la note 10 du „liber 1", p. 97 du Tome présent.

[64]) „*e* per constr." [Huygens] Comparez le début du „Theorema 6".

[65]) „*f* lemm. 3. h. lib." [Huygens].

[66]) „*g* Theor. 1. h. lib." [Huygens].

Fig. 18.



5.

Invertatur figura praecedens, habeatque rectangulum KM ad liquidum in gravitate proportionem quam χK ad KV, quae major ſit eâ quàm DK, minor vero eâ, quam TK habet ad KV; liquido ſupernatans, ponatur ita ut tres anguli K, V et M enatent ſupra liquidi ſuperficiem: dico nullum eorum demergi poſſe. [67]

Hujus eadem quae praecedentis concluſionis eſt demonſtratio, niſi quòd triangula quae illìc enatabant hìc ſint demerſa.

THEOREMA [7]. [68]

Quadratum ſupernatans liquido, aliquando rectum conſiſtet; aliquando inclinatum ita ut neutrum oppoſitorum laterum liquidi ſuperficiem contingat; aliquando ut unus angulorum ſit in liquidi ſuperficie, idque duobus caſibus; nonnunquam etiam ut duo anguli ſint in liquidi ſuperficie, idque uno caſu; aliquando ita ut tres anguli ſint demerſi; aliquando denique ut tantum demergatur unus: pro diverſâ proportione quam quadratum ad liquidum habebit in gravitate. [69]

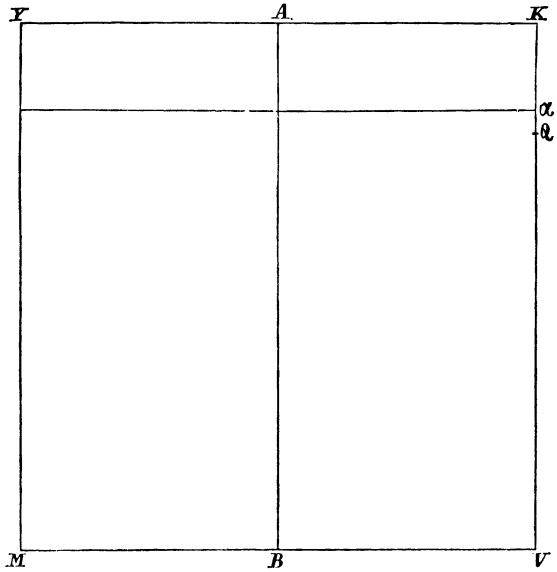
---

[67] La „Conclusio 5" se rapporte à la position (3) mentionnée dans l'„Avertissement". Elle apprend que cette position pourra se présenter toutes les fois que le point représentatif tombe à l'intérieur de la division HKL du Tableau, c'est-à-dire lorsqu'on a $\varepsilon < \frac{1}{2}$, $\eta^2 > \frac{1}{2\varepsilon(3-4\varepsilon)}$.

[68] Le manuscrit a „Theorema 6", mais nous avons remplaçé le 6 par le 7 pour éviter un double emploi.

[69] Le théorème nous montre que, si le point représentatif tombe sur la ligne BC du Tableau de l'Avertissement, comme cela a lieu nécessairement quand la section verticale est un carré, alors les positions (1), (5); (2), (4); (3) et (3)′, dont les quatre premières sont devenues identiques deux à deux, peuvent toutes se présenter selon que le point est situé dans l'une ou l'autre des divisions dans lequelles cette ligne est partagée par les points B, E, H, L, N, G, C. Voir, pour plus de détails, les „Conclusiones" et en particulier, pour une division essentielle qui n'a pas été aperçue par Huygens, la note 79.

Fig. 19.

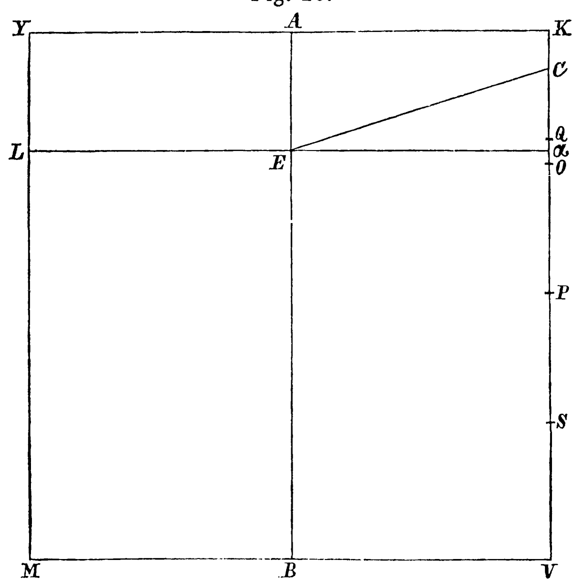


Concluſio 1.

Eſto quadratum KM, cujus axis AB : et latere KV diviſo in Q, ita ut rectangulum KQV aequetur ſextae parti quadrati KY vel MV; habeat ad liquidum in gravitate proportionem quam αV ad KV, quae major ſit eâ quam QV habet ad KV, vel habeat eam quam αK ad KV, quae minor ſit eâ quam QK habet ad KV: dico neceſſariò rectum conſistere. 70)

Hoc enim Theoremate 3° h. lib. demonſtratum fuit de omnibus quae inclinare poſſunt rectangulis, quare et quadrato convenit.

Fig. 20.



2.

Latere KV, praeterquam in Q, diviſo in quatuor aequalia punctis O, P et S; ſi habeat quadratum ad liquidum in gravitate proportionem majorem ſubſeſquitertiâ[$\frac{3}{4}$], id eſt, majorem quàm OV ad KV, minorem verò quam QV ad KV; vel minorem ſubquadrupla[$\frac{1}{4}$], id eſt, minorem quam OK ad KV, majorem vero quam QK ad KV, majorem vero quam QR ad KV; et liquido ſupernatans ponatur incli-

70) La „Conclusio" nous apprend que la position, dans laquelle les côtés du carré se trouvent respectivement dans les situations horizontales et verticales, sera stable toutes les fois que le point représentatif tombe sur l'une des lignes BE ou GC du Tableau, c'est-à-dire toutes les fois que la densité relative est plus petite que $\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3} = 0{,}211..$ ou plus grande que $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3} = 0{,}788..$

natum, ita ut neutrum oppofitorum laterum contingat liquidi fuperficiem; neque rectum restituetur neque inclinatum manebit, nifi cum axis AB cùm liquidi fuperficie faciet angulum aequalem angulo invento ut in Theor. 5°. [71])

Primò quia OV eft $\frac{3}{4}$ lateris KV et OK ejusdem $\frac{1}{4}$, erit rectang. KOV $\frac{3}{16}$ quadrati KV vel MV, ideoque majus quàm $\frac{1}{6}$ ejusdem quadrati, id eft, rectangulo KQV; unde patet punctum O propius effe medio lateris KV quàm punctum Q, ideoque quadratum KM ad liquidum in gravitate poffe habere rationem, quae major fit eâ quam OV, minor autem eâ quam QV habet ad KV, vel quae minor fit eâ quam OK, major autem eâ quam QK habet ad KV.

Sumpto itaque puncto α ubivis inter Q et O, habeat quadratum ad liquidum in gravitate primùm rationem quam αV ad KV; et ductâ αL parallela YK, veniat ex interfectione E linea EC, ita ut fpatii comprehenfi Cα quadratum fit duplum exceffus fefqualteri rectanguli AEB fupra quadratum AK. [72])

dico quadratum KM, liquido fupernatans et pofitum inclinatum, ita ut neutrum oppofitorum laterum YK vel MV contingat liquidi fuperficiem, neque rectum reftitutum iri, neque manfurum inclinatum, nifi cùm axis AB cum liquidi fuperficie faciet angulum aequalem angulo AEC vel ECα.

Primò enim quia quadratum ad liquidum in gravitate proportionem habet quam αV ad KV, quae minor eft eâ quam QV, major verò eâ quam QK habet ad KV, non poterit quidem rectum reftitui. [a 73])

deinde quia rectangulum KOS eft $\frac{1}{8}$ quadrati KV five MV, erit rectang. KαS minus quàm $\frac{1}{8}$ quadrati MV; unde ficuti in conclufione 3^a Theorematis praecedentis demonftrari poterit quadratum KM non eousque inclinari poffe ut bafis YK ullo modo contingat liquidi fuperficiem.

Ergo quadratum neque rectum reftituetur, neque ita confiftet ut alterutra bafium contingat liquidi fuperficiem; quòd autem angulus, quem, confiftente quadrato, axis AB faciet cum liquidi fuperficiem aequalis futurus fit angulo AEC vel ECα, demonstrari poteft ficuti in Theorem. 5° h. lib.

Quod fi quadratum fit ad liquidum in gravitate ut αK ad KV, inverfa intelligatur figura praecedens, et fimilis omnino erit demonftratio, nifi quod tum pars ea demerfa erit quae in cafu praecedenti enatabat.

---

[71]) La „Conclusio" exprime que le carré prendra la position (2), identique ici avec la position (4), toutes les fois que le point représentatif tombera sur l'une des lignes EH ou NG du Tableau de l'Avertissement, c'est-à-dire, toutes les fois que la densité sera comprise entre les limites $\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3} = 0{,}211..$ et $\frac{1}{4}$, ou bien entre les limites $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3} = 0{,}788..$ et $\frac{3}{4}$.

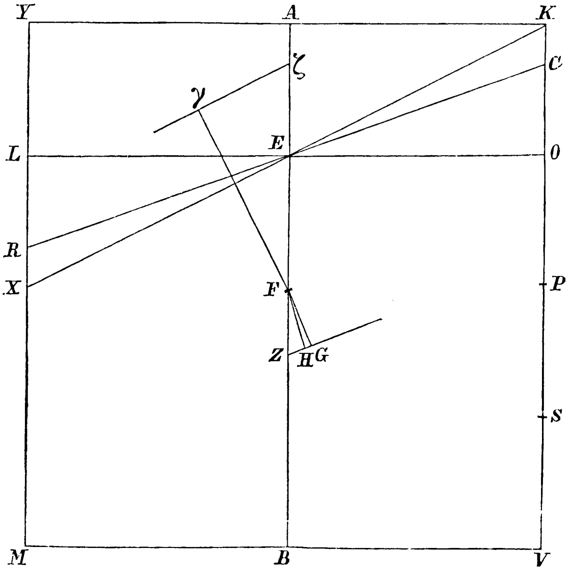
[72]) C'est la définition de l'angle AEC sous lequel le carré flottera. Elle nous donne: $\cot g^2 \text{AEC} = 12\varepsilon(1 - \varepsilon) - 2$. Comparez la note 34.

[73]) „a per conv. theor. 3. h. lib." [Huygens].

3.

Latere KV diviſo, ut ſupra, in quatuor aequalia punctis O, P et S; Si habeat quadratum ad liquidum in gravitate proportionem quam OV ad KV, id eſt, ſubſeſquitertiam [$\frac{3}{4}$]; vel quam OK ad KV, id eſt, ſubquadruplam [$\frac{1}{4}$], et liquido ſupernatans ponatur inclinatum ita ut neutra baſium oppoſitarum contingat liquidi ſuperficiem; eousque ultro inclinabitur, donec unus angulorum ſit in liquidi ſuperficie. [74])

Fig. 21.



Primùm habeat quadratum KM ad liquidum in gravitate proportionem ſubſesquitertiam, id eſt, quam OV ad KV. dico ſi liquido ſupernatet et ponatur inclinatum ita ut liquidi ſuperficies ſit RC, ultro eousque inclinaturum, donec angulus K ſit in liquidi ſuperficie, eaque ſit KX.

Conſtructio enim eadem ſit quae in concluſione 2ª. Theor. praecedentis et eadem quoque erit demonſtratio. Nimirum quia hic rectangulum ſub YL et exceſſu $\frac{3}{4}$ YM ſupra YL, id eſt, rectang. KOS, aequale eſt octavae parti quadrati KV ſive MV, incidet $F\gamma$, quae perpendicularis eſt ad $\gamma\zeta$, in ipſum centrum grav. trianguli XYK; quare quum ſuperficies liquidi erit KX, quadratum KM ad neutram partem magis inclinabit, ideoque tum conſiſtet, quod erat demonſtrandum.

Si verò quadratum ad liquidum in gravitate ſit ut OK ad KV, tum praecedens figura inverſa intelligatur, et eadem rurſus erit demonſtratio, quae fuit concluſionis 2ᵃᵉ. Theorematis praecedentis, niſi quod triangulum XYK quod modo enatabat, nunc demersum futurum ſit.

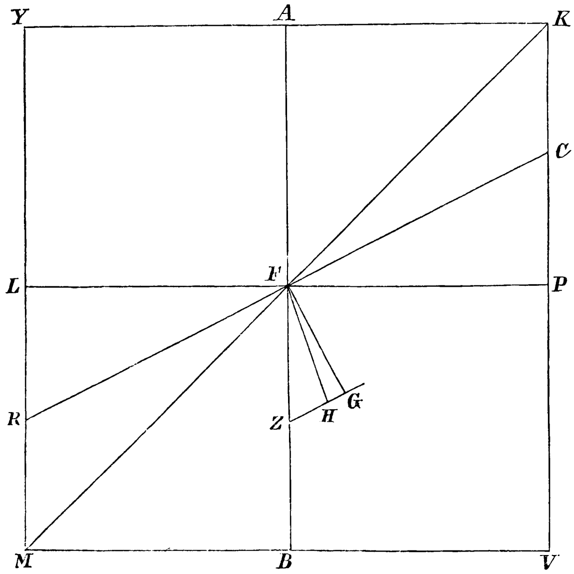
---

[74]) La „Conclusio" nous fait connaître sous quelles conditions le carré prendra une des positions intermédiaires entre les positions (3) ou (3)′ et les positions (2) et (4), dont les dernières sont identiques entre elles, c'-est-à-dire telle que l'un des sommets du carré se trouve dans le niveau du liquide. Le point représentatif se placera alors à l'un des points H ou N du Tableau de l'Avertissement.

4.

Si quadratum ad liquidum in gravitate habeat proportionem ſubduplam, et liquido supernatans, ponatur inclinatum, ita ut neutrum oppoſitorum laterum contingat liquidi ſuperficiem, eousque ultro inclinabitur donec duo anguli oppoſiti ſint in liquidi ſuperficie.[75])

Fig. 22.



Habeat quadratum KM ad liquidum in gravitate proportionem ſubduplam, id eſt, quam PV ad KV; et liquido ſupernatans ponatur inclinatum, ut liquidi ſuperficies ſit RC: dico eousque ultro inclinatum iri, donec anguli oppoſiti K et M ſint in liquidi ſuperficie, atque ea ſit KM.

ducatur enim PL parallela YK, et per H, centrum grav. trapezii RCVM, linea ZHG parallela RC, in eamque ex F centro quadrati cadat perpendicularis FG: denique jungatur FH.

Quia igitur trapezium RCVM aequale eſt dimidio quadrati KM [a 76]) id eſt rectangulo PM, ſequitur ſuperficiem liquidi RC tranſire per F centrum quadrati. Rectangulum autem AFB aequale eſt quadrato AF; ergo erit ſesquialterum rectanguli AFB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadrati AF ſeu KP aequale quadrato AF ſive AK. quare ſesquialterum rectanguli AFB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadrati CP, majus erit quadrato AK: ideoque in linea ZG erit ſpatium ZG majus ſpatium ZH [b 77]) Ergo quum FG ſit perpendicularis in ZG et conſequenter in liquidi ſuperficiem RC, in eandem

75) La „Conclusio" se rapporte au cas spécial où la densité relative du parallélipipède est égal à $\frac{1}{2}$. Elle démontre qu'alors la position dans laquelle deux sommets opposés du carré se trouvent au niveau du liquide, est une position stable. Inutile de dire que le point représentatif du Tableau de l'Avertissement se trouve alors en L.

76) „*a* Theor. 4. lib. 1." [Huygens].

77) „*b* lemm. 2 h. lib." [Huygens].

non erit perpendicularis FH, quae jungit centr. grav. totius quadrati cum centro grav. partis merſae RCVM. Quamobrem totum quadratum inclinabit in quam partem inclinat linea FH [c 78]), deſcendetque verſùs K, et aſcendet verſùs M, idque donec anguli K et M ſint in liquidi ſuperficie, atque ea ſit KM.

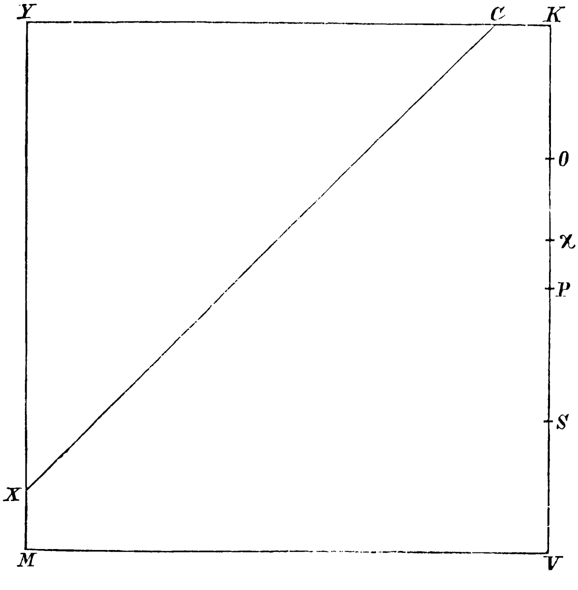
Et tum quidem manifeſtum eſt quadratum ampliùs inclinari non poſſe. nam ſi dicatur angulum K demerſum iri, M verò emerſum, ſimili omnino demonſtratione evincetur, quadratum inclinatum iri retrorſum, donec ijdem anguli K et M ſint denuo in liquidi ſuperficie.

Si igitur quadratum ſubduplam proportionem habeat ad liquidum in gravitate &c. quod erat demonſtr.

5.

Diviſo latere KV in quatuor aequalia punctis O, P et S, ſumptoque puncto χ ubivis inter O et P, habeat quadratum ad liquidum in gravitate proportionem quam χV ad KV, id eſt, majorem ſubduplâ, minorem autem ſubſeſquitertiâ[$\frac{3}{4}$]; et liquidi ſupernatans ponatur tribus angulis merſis K, V et M, ita ut ſuperficies liquidi ſit XC: dico nullum trium angulorum emergere poſſe ſupra liquidi ſuperficiem. 79)

Fig. 23.



Hoc demonſtrari poterit ſicut concluſio 4ª Theorematis praecedentis. nam ſicuti illìc ſingula rectangula KDS, KTS aequalia erunt octavae parti quadrati MV, ita hic rectangula KOS et KPS.

78) „c Theor. 1. h. lib." [Huygens].

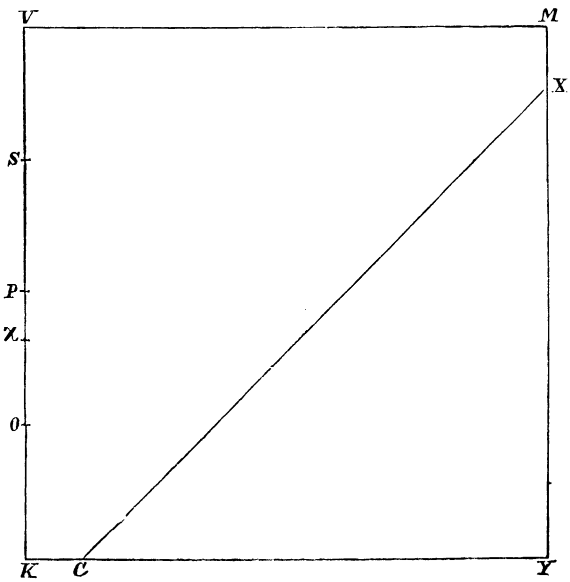
79) La „Conclusio" indique que le carré prendra la position (3) toutes les fois que le point représentatif est situé sur la ligne BC du Tableau de l'Avertissement entre les points L et N, c'est-à-dire toutes les fois que la densité relative du parallélipipède flottant tombe entre les limites $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$.

Or, quoique cette assertion soit correcte, il y avait lieu ici de distinguer encore entre les parties LQ et QN de la ligne LN. En effet, tant que le point représentatif tombe dans la

6.

Si quadratum ad liquidum in gravitate proportionem habeat majorem ſubquadruplâ, minorem verò ſubduplâ, et liquido ſupernatans ponatur ita ut unus tantùm angulus demerſus ſit, reliqui verò enatent ſupra liquidi ſuperficiem, nullus eorum demergi poterit. [80])

Fig. 24.



Invertatur figura praecedens, habeatque quadratum ad liquidum in gravitate proportionem quam χK ad KV; et liquido ſupernatans demerſo tantùm angulo Y, enatantibus verò K, V et M: dico nullum eorum demergi poſſe.

Hoc autem demonſtratur ſicuti concluſio 5ª Theorematis praecedentis.

---

partie LQ, le carré se placera de telle manière que ses diagonales sont respectivement dans la situation horizontale et verticale. Dans le cas contraire, où le point tombe entre Q et N, les diagonales prendront une situation inclinée.

Et cette distinction n'aurait pu échapper à Huygens, si l'idée lui était venue comme plus tard à Euler (voir les pages 110—113 du Tome I de l'ouvrage cité dans la note 18, p. 126), de rechercher entre quelles limites de la densité ε, la position avec les diagonales dans la situation horizontale et verticale était une position stable. Il aurait trouvé alors pour ces limites les valeurs $\frac{9}{32}$ et $\frac{23}{32}$ correspondant aux points P et Q du Tableau.

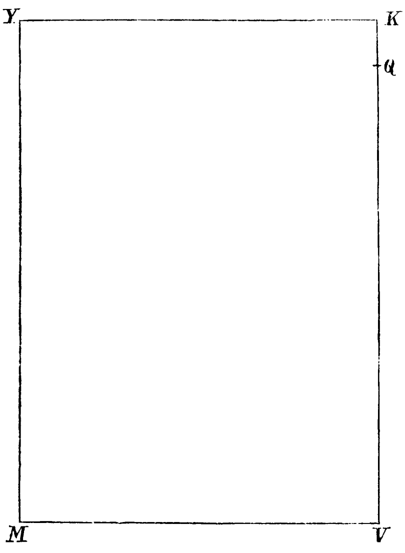
Ajoutons encore qu'une solution complète du cas du carré avec discussion de la stabilité pour toutes les positions d'équilibre a été donnée en 1849 par J. Badon Ghijben aux pages 17—24 de l'article: „Over de Stabiliteit des evenwigts, bij drijvende ligchamen", Tijdschrift voor de wis- en natuurkundige wetenschappen, uitgegeven door de eerste klasse van het Koninklijk-Nederlandsche Instituut. T. 3, 1850, Amsterdam.

[80]) La „Conclusio" se rapporte à la position (3)′ qui pourra se présenter toutes les fois que le point représentatif tombe sur la division HL de la ligne BC du Tableau. Ici il y a lieu de distinguer entre la partie PL, où le point représentatif indiquera une position du carré aux diagonales verticale et horizontale, et la partie PH à laquelle correspondent des positions dans lesquelles les diagonales sont inclinées.

THEOREMA [8]. [81]

Rectangulum cujus basis minor est latere, liquido supernatans demersâ base et positum inclinatum, ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem; aliquando rectum restituetur; aliquando inclinatum manebit, ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem. Interdum eousque inclinabitur donec angulorum unus sit in liquidi superficie; ut plurimùm denique ulteriùs adhuc inclinabitur: Pro diversâ proportione quam ad liquidum habebit in gravitate. [82]

Fig. 25.



Conclusio 1.

Esto rectang. KM cujus latus KV majus sit base MV; Et latere KV diviso in Q, ita ut rectang. KQV aequetur sextae parti quadrati MV vel YK, habeat rectang. ad liquidum in gravitate proportionem majorem quam QV habet ad KV, vel minorem quam QK habet ad KV. dico, si liquido supernatans, ponatur inclinatum, ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem, rectum restitutum iri. [83]

Hoc enim Theor.e 3° h. lib. demonstratum fuit de omnibus rectangulis quae inclinare possunt.

---

[81]) Le manuscrit a „Theorema 7." Le changement a été rendu nécessaire par celui indiqué dans la note 68.

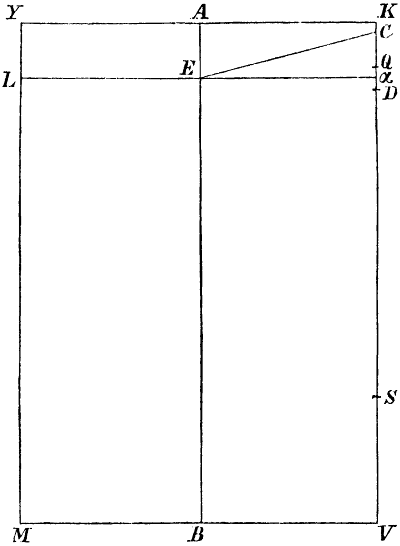
[82]) Le théorème se rapporte à toutes les formes possibles de la section verticale rectangulaire du parallélipipède flottant, à l'exception seulement de la forme carrée. Il y est question surtout des positions (4) et (5), indiquées dans l'Avertissement, lesquelles n'ont pas encore été traitées expressément. Voir, pour les détails, les „Conclusiones" qui suivent. A propos de la dernière „Conclusio" nous indiquerons le lieu précis où les lignes de démarcation OP et QA du Tableau, desquelles l'existence est ignorée dans les recherches de Huygens, se présentent logiquement, si l'on poursuit la marche de ses recherches; voir les notes 92 et 93.

[83]) La „Conclusio" nous apprend que la position (5) sera une position stable, tant que le point réprésentatif tombera dans l'une des divisions BEO ou CGA du Tableau de l'Avertissement. Comparez le dernier alinéa de la note 23.

2.

Latere KV, diviso ſicut ſupra in Q, et praeterea in S et D, ita ut KS quidem ſit $\frac{3}{4}$ KV, rectang verò KDS (ſumpto puncto D magis versùs K quàm verſùs S) aequale octavae parti quadrati baſis MV; ſi habeat rectangulum ad liquidum in gravitate proportionem majorem quàm DV ad KV, minorem verò quam QV ad KV; vel majorem quidem quam QK ad KV, minorem verò quàm DK ad KV, et liquido ſupernatans ponatur inclinatum, ita ut neutra baſium contingat liquidi ſuperficiem, neque rectum reſtituetur, neque inclinatum manebit, niſi cùm axis AB cum liquidi ſuperficie faciet angulnm aequalem angulo invento ut in Theor. 5° h. lib.[84])

Fig, 26.



Quòd autem hi caſus quandoque locum habere poſſint, ſic oſtenditur. Quum rectang. VQK ſit ad SQK, ut VQ ad SQ, et VQ ad SQ majorem habeat rationem quam VK ad SK, id eſt majorem quam 4 ad 3, etiam rectang. VQK ad SQK majorem habebit rationem quam 4 ad 3 ſive quàm $\frac{1}{6}$ ad $\frac{1}{8}$; ergo quum rectang. VQK ſit $\frac{1}{6}$ quadrati MV, erit rectang. SQK minus quàm $\frac{1}{8}$ ejusdem quadrati MV : Ergo minus quoque rectangulo SDK; unde ſequitur punctum D propiùs eſſe medio lineae KS quam punctum Q. Quamobrem poterit quidem rectang. ad liquidum in gravitate habere proportionem quae major ſit eâ, quam DV, minor veró eâ, quam QV habet ad KV; vel quae major quidem ſit eâ quam QK, minor autem eâ quam DK habet ad KV.

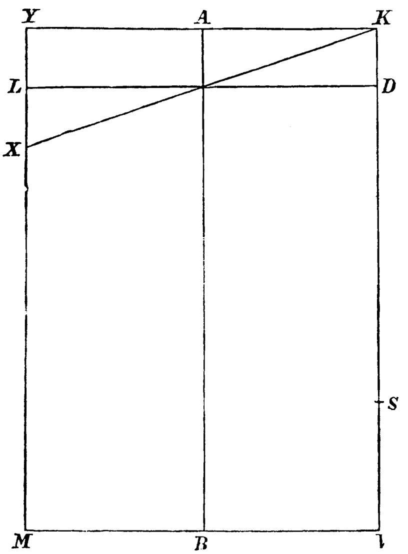
[84]) La „Conclusio" démontre que la position (4) pourra se présenter toutes les fois que le point représentatif (ε, η) se trouve à l'intérieur de l'une des divisions NGA ou EHO du Tableau de l'Avertissement. En effet, les équations $\eta^2 = 2(1-\varepsilon)(4\varepsilon - 1)$ et $\eta^2 = 2\varepsilon(3-4\varepsilon)$ des courbes NA et HO se déduisent de la même manière des données de la „Conclusio", lesquelles se rapportent au point D, que les équations des courbes LMN et HKL des données de la „Conclusio 2" du „Theorema 6"; voir la note 43, p. 138. On doit seulement observer que les lettres a et b ont changé de rôle, puisqu'on a maintenant $a = KV$, $b = MV$, de manière que, dans les équations de la note 43, on doit remplacer η par η^{-1}.

Sumpto itaque puncto α ubivis inter Q et D, habeat rectang. ad liquidum in gravitate primùm rationem quam αV habet ad KV; et ductâ αL parallelâ KY, veniat ex interſectione E linea EC, ita ut spatii comprehenſi αC quadratum ſit duplum exceſſus ſeſquialteri rectanguli AEB ſupra quadratum AK. [85])

dico rectang. KM liquido ſupernatans et poſitum inclinatum, ita ut baſis YK non contingat liquidi ſuperficiem, neque rectum reſtitutum iri, neque inclinatum manſurum, niſi cùm axis AB cum liquidi ſuperficie faciet angulum aequalem angulo AEC vel ECα.

Demonſtratur autem hoc eodem modo quo Concluſio 3a Theorem. 6i. Quòd ſi rectang. ad liquidum in gravitate habeat proportionem quam αK habet ad KV, tum inverſa intelligatur figura praecedens et rurſus ſimilis erit demonſtratio.

Fig. 27.



3.

Latere KV diviſo ſicut Concl. praecedenti in S et D, nempe ut KS ſit $\frac{3}{4}$ lateris KV, rectang. verò KDS aequale $\frac{1}{8}$ quadrati MV; habeat rectang. ad liquidum in gravitate proportionem quam DV habet ad KV, vel quam DK ad KV; et liquido ſupernatans ponatur inclinatum, ita ut neutra baſium contingat liquidi ſuperficiem. dico eousque inclinatum iri donec unus angulorum ſit in liquidi ſuperficie. [86])

Hoc autem eodem modo demonſtratur quo Concluſio 2a Theorem. 6i.

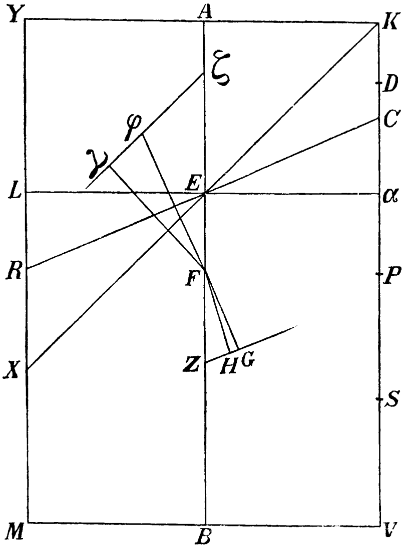
[85]) C'est la définition de l'angle AEC, qui n'est autre que l'angle que l'axe du parallélipipède flottant fera dans la position 4 avec le niveau du liquide. On trouvera pour sa valeur $\cot g^2 . AEC = 12\varepsilon(1-\varepsilon)\eta^{-2} - 2$, où $\eta = b : a =$ MV : KV. Comparez la note 34, p. 134.

[86]) Dans cette „Conclusio" il s'agit des cas, où le point représentatif tombera justement sur l'une des lignes de démarcation NA ou HO du Tableau de l'Avertissement. Elle nous apprend qu' alors le parallélipipède flottant prendra l'une des positions intermédiaires entre les positions 3 et 4 (pour NA), ou 3′ et 4 (pour HO), c'est-à-dire telle que l'un des sommets du rectangle se trouve dans le niveau du liquide. Consultez encore la dernière phrase de la note 43.

4.

Diviso rurſus latere KV in S et D; ita ut KS ſint $\frac{3}{4}$ KV, rectang. verò KDS aequale $\frac{1}{8}$ quadrati MV; Si habeat rectang. ad liquidum in gravitate proportionem minorem quidem eâ, quam DV, majorem verò eâ, quam DK habet ad KV, et liquido ſupernatans ponatur inclinatum, ita ut neutra baſium contingat liquidi ſuperficiem, ulteriùs adhuc inclinabitur, quàm ut unus angulorum ſit in liquidi ſuperficie. [87])

Fig. 28.



Dividatur latus KV bifariam in P, et quum manifeſtum ſit rectangulum ad liquidum in gravitate habiturum proportionem majorem vel non majorem ſubduplâ, habeat primò majorem ſubduplâ, nempe eam, quam αV habet ad KV, (ſumpto puncto α intra P et D,) et liquido ſupernatans, poſitum ſit inclinatum, ita ut liquidi ſuperficies ſit RC. dico ulteriùs inclinatum iri, quam ut angulus K ſit in liquidi ſuperficie. Sit enim αL parall. KY, et per interſectionem E ducatur ex angulo K linea KEX. Porrò ſit H centr. gravitatis trapezii RCVM, per quod agatur recta ZHG parall. RC, in eamque ex F, centro rectanguli KM, cadat perpendicularis FG, et jungatur FH. Item ſit φ centr. grav. trianguli XYK, et per ipſum agatur $\zeta\varphi\gamma$ parallela KX, in eamque cadat perpend. Fγ; et denique jungatur Fφ.

Quoniam igitur rectangulum KM eſt ad liquidum in gravitate ut αV ad KV, ſive ut rectang. αM ad KM, atque ita etiam trapezium merſum RCVM ad rectang. KM[a] [88]), ſequitur idem trapezium RCVM rectangulo αM aequale eſſe, ac proinde

[87]) La „Conclusio" démontre que, tant que le point représentatif tombera dans la division OHNAO du Tableau de l'Avertissement, le parallélipipède flottant ne pourra jamais rester dans la position (4), indiquée dans l'Avertissement. S'il est mis dans une telle position, l'axe AB, c'est-à-dire le grand axe de la section verticale, tendra à s'éloigner de plus en plus de la position verticale, tout au moins jusqu' à ce qu' une position (3) ou (3)′ soit atteinte. La „Conclusio", toutefois, ne nous apprend pas quelle sera la position d'équilibre à laquelle le parallélipipède finira par arriver, si l'on continue de le tourner dans ce même sens. Voir, à ce propos, les notes 92 et 93.

[88]) „a Theor. 4. lib. 1." [Huygens].

lineas RC et αL in eodem puncto E secare axem AB. Porrò quum KP sit $\frac{1}{2}$ KV, et PS $\frac{1}{4}$ KV: erit rectang. KPS aequale $\frac{1}{8}$ qu. KV; latus autem KV per constr. majus est base MV, ergo $\frac{1}{8}$ quadr. KV, sive rectang. KPS majus quoque quam $\frac{1}{8}$ quadr. MV, sive quàm rectang. KDS: Ergo punctum P propius est medio lineae KS quàm punctum D, et quum punctum α sit inter puncta P et D, erit hoc quoque propius medio lineae KS quam punctum D. Rectangulum igitur KαS, sive rectang. sub YL et sub excessu $\frac{3}{4}$ YM supra YL, majus est rectangulo KDS, sive octavâ parte quadrati MV: Ergo in lineâ $\gamma\zeta$ pars $\gamma\zeta$ major $\varphi\zeta$ [b 89]), unde sequitur sesquialterum rectanguli AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ qu. LX, majus esse quadr.o AY sive AK [c 90]); Ergo quum Cα sit minor quam LX sive αK, erit $\frac{3}{2}$ rectanguli AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. Cα, multo majus quadrato AK: quare in lineâ ZG erit pars ZG major parte ZH [e 91]). quum igitur FG sit perpend. ad ZG, et consequenter ad liquidi superf. RC, ad eandem superficiem perpendicularis non erit FH, quae jungit centr. grav. rectanguli KM cum centro grav. partis mersae RCVM, ideoque totum rectangulum inclinabit in quam partem inclinat linea FH, adeo ut descensurus sit angulus K; idque donec pervenerit usque in liquidi superficiem, eaque sit KX: sed tum quoque ulterius inclinabitur; nam quum jam ostensum fuerit in linea $\zeta\gamma$ partem $\gamma\zeta$ majorem esse parte $\varphi\zeta$, et Fγ sit perpendicularis ad $\zeta\gamma$, ideoque ad liquidi superficiem quae tum erit KX; in eandem superficiem non erit perpendicularis Fφ quae jungit centrum gravitatis rectanguli KM cum centro trianguli enatantis XYK; quamobrem totum rectangulum inclinabit in quam partem inclinat Fφ, et mergetur angulus K; quod erat demonstr. [92])

---

89) „*b* lemm. 3. h. lib." [Huygens].

90) „*c* per conv. lemm. 2. h. lib." [Huygens].

91) „*e*. lemm. 2. h. lib." [Huygens]. Une annotation „*d*" manque dans le texte comme en marge.

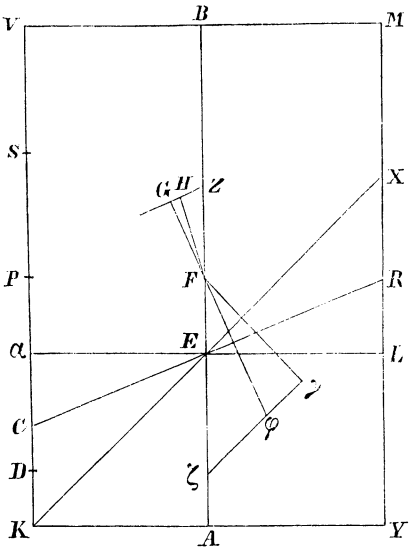
92) En effet, la démonstration est parfaite et nous fait connaître que le parallélipipède, parvenu à la position dans laquelle le sommet K de la section normale touche au niveau du liquide, tendra à continuer sa rotation. Il passera alors à la position (3); mais il est clair qu'ensuite plusieurs cas différents peuvent se présenter. En *premier lieu*, il se pourra qu'une (ou plus d'une) des positions (3) par lesquelles le parallélipipède passera en poursuivant sa rotation, soit une position d'équilibre stable dans laquelle il peut s'arrêter. C'est là ce qui en effet arrivera toutes les fois que le point représentatif (ε, η) tombe à l'intérieur de la division LMZANL du Tableau de l'Avertissement.

En *second lieu*, il se peut que le parallélipipède en parcourant les positions (3) ne rencontre aucune position d'équilibre stable. Alors il passera aux positions (2) et il est possible qu'il y trouve une position dans laquelle il pourra s'arrêter. Ce sera le cas tant que le point représentatif tombe à l'intérieur de la division LMZDFL.

En *troisième* et *dernier lieu*, il est possible que le parallélipipède ne rencontre aucune position d'équilibre stable avant d'avoir atteint la position (1). C'est ce qui arrive si le point représentatif se trouve à l'intérieur de la division ΓFDAΓ.

Pour connaître les conditions sous lesquelles ces divers cas se présenteront, on doit étudier

Fig. 29.



Quod ſi rectangulum ad liquidum in gravitate proportionem habeat minorem ſubdupla, tum inverſa intelligatur praecedens figura, et eadem quoque erit demonſtratio, niſi quod hìc partes eae merſae erunt quae iſtic enatabant, et contra; quodque hic oſtenditur angulum K emergere debere ſuprà liquidi ſuperficiem. [93])

Manifeſtum autem eſt, ſiquidem quadratum lateris KV ad quadratum baſis MV non majorem habeat rationem quam novem ad octo, tum Concluſiones duas ultimas Theorematis 6.i [94]) hic quoque poſſe habere locum, ſi accedat debita proportio rectanguli ad liquidum in gravitate.

---

les positions d'équilibre qui se trouvent parmi les positions (3). Or, la détermination de ces positions dépend de la résolution d'une équation du quatrième degré, c'est-à-dire, elle constitue ce qu'on appelait à l'époque de Huygens un problème solide. Pour cette raison ou pour une autre, Huygens n'a pas entamé ce problème et par suite aucun de ses résultats n'est en rapport avec la ligne de démarcation QA relative au problème mentionné. Voir encore le dernier alinéa de la page 88 de l'„Avertissement."

[93]) Ici des considérations analogues à celles de la note précédente, sont valables. On n'a qu'à changer (3) en (3)′ et à remplacer les différentes divisions du tableau par celles qui leur sont symétriques par rapport à l'axe de symmétrie du tableau. De même la ligne QA par PO.

[94]) Il s agit des „Conclusiones 4 et 5" expliquées dans les notes 57 et 67 et qui se rapportent aux positions (3) et (3)′ que le parallélipipède flottant pourra prendre toutes les fois que le point représentatif tombe à l'intérieur des divisions respectives LMN et HKL.

DE IIS QUAE LIQUIDO SUPERNATANT.

LIBER III.[1])

De Cylindris.

Quae de Cylindris natantibus propofiturus fum, explicari nequeunt nifi cognitis prius portionum cijlindri centris gravitatum, quae quum nemo adhuc, quod sciam, invenerit, neceffario hic praemittenda exiftimavi. Verùm ut quam minimum à propofita materia recederem, neglexi in hisce quidem longiorem fed et optimam demonftrandi methodum quae fit deductione ad abfurdum, eamque potius fecutus fum quâ primùm Cavalerius ufus fuit, [2]) plurimis poftea Geometris probatam, quam etiamfi non putem legitimae demonftrationis loco habendam, (revera enim tantùm oftendit quâ ratione quid demonftrari poffit), tamen hìc eam adhibere satius duxi, propter infignem ejus brevitatem.

Definitiones.

Cylindri appellatione intelligatur Cylindrus rectus.

Portiones Cylindri vocentur, quae fiunt cum Cylindrus fecatur plano, neutram bafium vel parallelam habente vel fecante.

Cuneus Cylindricus appelletur, Portio cujus bafes fe mutuo contingunt.

---

[1]) Le troisième livre traite l'équilibre du cylindre droit flottant. De plus on y trouve vers la fin des indications sur la manière dont les résultats obtenus dans les trois livres pourraient être vérifiés expérimentalement.

[2]) L'Appendice IV contient une détermination du centre de gravité d'un tronc de cylindre droit, indépendante de la méthode de Cavalieri. Voir sur cette dernière méthode la note 8 de la page 60 du volume présent.

Manifesta.

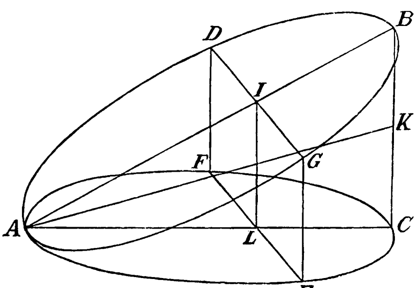
His conſtitutis, illa quidem tanquam demonſtratione non egentia pro veris habeantur; nempe quod in portione Cylindri, latera maximum et minimum ſint è diametro oppoſita; ſicut in Cuneo, angulus contactus baſium et latus ſive maxima altitudo. Item portionem, ſi plano ſecundum longitudinem utriusque lateris ſecetur, dividi in ſegmenta duò aequalia et ſimilia: Et Cuneum ſimiliter dividi ſi ſecetur plano per punctum contactus baſium et ſecundum latus oppoſitum. Denique quod ſi Cylindrus plano per oppoſitos angulos ſecetur, futuri ſint duo cunei ſimiles et aequales, ideoque ſinguli aequales dimidio cijlindri cujus ſunt partes. Ex quo colligitur Cuneos ex eodem cylindro inter ſe rationem habere quam eorundem altitudines ſive latera.

THEOREMA I.

Cunei Cylindrici centrum gravitatis eſt in linea quae pertingit a puncto contactus baſium ad medium latus oppoſitum.

Eſto Cuneus ABC, cujus baſes AECF, ADBG : ab harum contactu A ducatur AK quae latus oppoſitum BC bifariam dividat. dico centrum grav. Cunei ABC eſſe in linea AK.

Fig. 1.



Intelligatur enim Cuneus ſecari plano ABC per latus BC et contactum A, in quo plano manifeſtum eſt fore lineam AK. Item ubicunque ſectus ſit plano DGEF, recto ad baſin circularem AECF, et planum ABC ſecante ad angulos rectos ſecundum lineam IL, quae idcircò perpendicularis erit ad planum AECF [a] [3]).

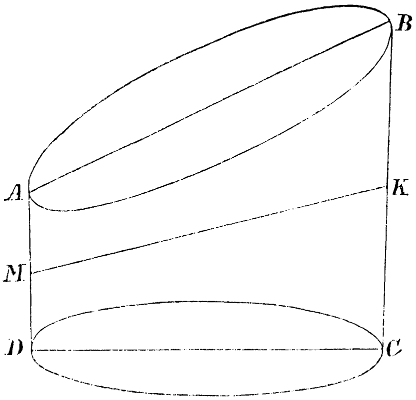
Eſt igitur ſectio DGEF rectangulum, cujus latera oppoſita FE, DG, bifariam dividuntur ab interſectione IL, ideoque ipſa IL à centro gravit. rectanguli DGEF quod eſt H bifariam dividitur [b] [4]) : ſed eadem quoque bifariam ſecatur à rectâ

[3]) Huygens ajoute en marge „*a* pr. 19. lib. 11. Elem.", où l'on lit (voir l'ouvrage cité dans la note 10, pag. 97): „Si duo plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit."

[4]) „*b* pr. 10. lib. 1. Arch. Aequipond." [Huygens]. Voici la „propositio" en question: „Cuiusuis parallelogrammi centrum grauitatis id punctum est, in quo diametri inter se concurrunt." Voir p. 165, T. II de l'édition de Heiberg, citée dans la note 2 de la page 50 du Tome présent. La lettre H, indiquant le point d'intersection des lignes AK et IL, manque dans la figure achevée (voir la page 90 de l'Avertissement), quoiqu' elle soit présente dans la figure du manuscrit.

AK, (nam quum LI ſit in plano triangulari ABC, et perpendicularis ad planum AECF, ideoque parallela lateri BC, ſequitur eam ita ut BC dividi à linea AK) ergo H centrum grav. rectanguli DGEF eſt in AK. Quum autem eodem modo demonſtrari poſſit omnium rectangulorum quae fiunt ſectionibus huic parallelis, centra gravitatis eſſe in eadem rectâ AK, concludimus inde totius Cunei ABC, qui quaſi ex innumeris talibus rectangulis conſtat, in linea AK eſſe centrum grav. quod erat oſtendendum.

Fig. 2.

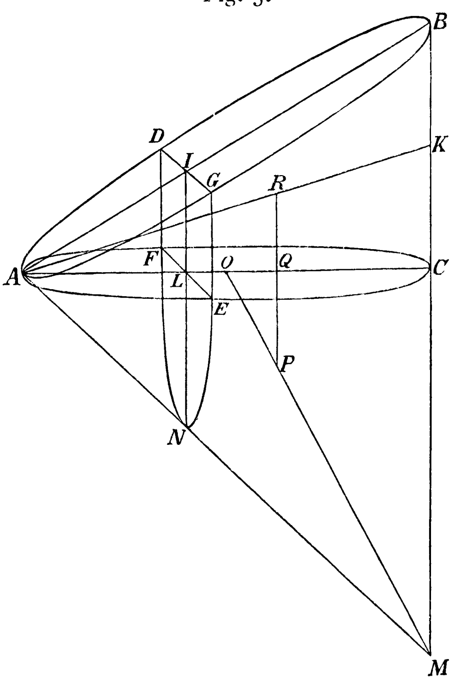


THEOREMA 2.

Portionis Cijlindri centrum gravitatis eſt in linea, quae pertingit à medio minoris lateris ad medium majoris.

Sit Cijlindri portio ABCD, cujus latera maximum et minimum bifariam dividat linea MK. dico centrum grav. portionis ABCD eſſe in eâdem MK. Similis autem hujus demonſtratio eſt quae Theorematis praecedentis.

Fig. 3.



THEOREMA 3.

Cunei Cylindrici centrum gravitatis, lineam à contactu baſium ad medium latus oppoſitum pertingentem ita dividit, ut pars verſus contactum ad reliquam ſit ut quinque ad tria.

Sit Cuneus ABC cujus baſes AB, AC ſe mutuò contingant in A puncto, atque hinc ducatur AK, latus oppoſitum BC bifariam dividens. Porro producto latere BC verſus M, donec CM ſit ſeſquialtera [$\frac{3}{2}$]CB, intelligatur conus AMC ſcalenus, cujus baſis circulus AECF, eadem quae cunei ABC. Et ſecentur Cuneus et conus primùm plano ABCM, per contactum A et latus BC tranſeunte, deinde ubicunque plano DGENF, recto utrinque ad communem baſin AECF, ut et ad planum ABCM;

eritque ſectio quidem cunei rectangulum DE, coni autem ſectio parabole ENF, quoniam lateri CM facta eſt parallela.

Sit coni AMC axis MO, cujus ſumantur tres quartae MP, et erit P centrum grav. in cono, hoc enim à Commandino demonſtratum eſt. [5]) ducatur denique PQR aequidiſtans ipſi BM.

Quum igitur CM ſit ſeſquialtera CB, erit quoque LN ſeſquialtera LI, ideoque parabole FNE aequalis rectangulo DE, ut patet ex quadratura paraboles. [6]) Haec autem aequalitas eodem modo oſtendi poteſt, ubicunque cuneus et conus ſecti fuerint eodem plano, quod parallelum ſit plano DGENF. Quare ſi AC conſideretur tanquam libra horizonti parallela, apparet infinitas numero parabolas, parabolae FNE aequidiſtantes, quae ex libra AC ſupenſae conum AMC quodammodo conficiunt, ex eodem puncto aequiponderare debere, quo aequiponderant infinita rectangula eidem librae ſuperimpoſita, quae ſimiliter componunt cuneum ABC.

Conus autem id eſt omnes, quas dixi, parabolae, aequiponderant ex puncto Q, (quia perpendiculum QP tranſit per coni gravitatis centrum) ergo et omnia rectangula, ſive cuneus ABC aequiponderat ex eodem Q puncto; unde ſequitur perpendiculum QR, tranſire per centrum gravitatis cunei ABC. Sed et linea AK tranſit per ejusdem cunei centrum gravitatis: Igitur iſtud centrum eſt in interſectione R. Quum vero MP ſit $\frac{3}{4}$ MO, eſt quoque CQ $\frac{3}{4}$ CO; CO autem dimidia eſt CA; ergo CQ tres octavae diametri AC. Et quia QR, CK ſunt parallelae, eſt KR ad KA ſicut CQ ad CA; igitur KR quoque tres octavae totius AK; Itaque qualium partium KR eſt trium, talium RA eſt quinque: Ergo cunei ABC centrum gravitatis R lineam AK ita dividit ut pars verſus contactum baſium ſit ad reliquam, ſicut quinque ad tria: quod erat demonstr.

Theorema 4.

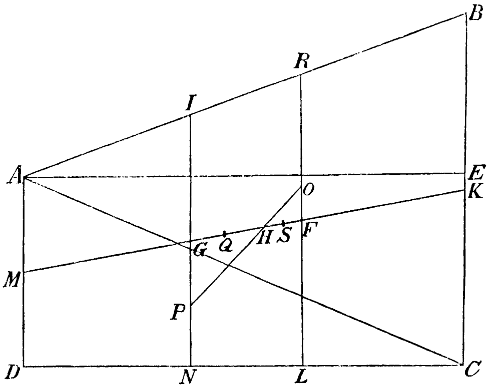
Portionis Cylindri centrum gravitatis, lineam, quae à medio majoris lateris ad medium minoris pertingit, ita dividit, ut pars, quae eſt verſùs minus latus, ad reliquam rationem habeat, quam quintuplum majoris lateris cum triplo minoris ad quintuplum minoris cum triplo majoris.

Sit Cylindri portio ABCD, cujus bases circ. diametro DC et Ellipſis diametro AB, lateribus autem BC et AD diviſis bifariam punctis K et M, jungantur ipſa

[5]) Dans l'ouvrage: „Federici Commandini Urbinatis Liber de Centro Gravitatis Solidorum. Cum privilegio in Annos X. Bononiae, Ex Officina Alexandri Benacii. MDLXV." 4°. On y trouve à la page 27 verso le „Theorema XVIII. Propositio XXII. Cuiuslibet pyramidis, & cuiuslibet coni uel coni portionis axis à centro gravitatis ita diuiditur, ut pars, quae terminatur ad uerticem reliquae partis, quae ad basim, sit tripla."

[6]) Voir p. e. les pages 56—58 du Tome présent.

Fig. 4.



rectâ KM. Oſtendendum eſt, centrum grav. portionis ABCD ita dividere lineam KM ut pars verſùs M ad eam quae verſùs K, rationem habeat quàm quintupla BC cum triplâ AD ad quintuplam AD cum triplâ BC.

Secta intelligatur portio primum plano ABCD ſecundum latus utrumque; deinde planis AE, AC, rectis ad planum ABCD, quorum AE baſi DC ſit parallelum, AC verò ab angulo A ad C pertingat. Porrò ſumantur KF, MG, ſingulae aequales $\frac{3}{8}$ MK; et ducantur RFL, IGN parallelae lateribus portionis.

Conſtat igitur portio ABCD ex tribus Cuneis ABE, ACE, ACD, et cunei quidem ABE centr. gr. eſt in lineâ RL[a] [7]) ſicut et cunei ACE, (quia videlicet CL eſt $\frac{3}{8}$ CD,) quare totius partis ABC centr. gr. erit in eâdem RL, inveniatur hoc et ſit punctum O. Similiter erit centr. gr. cunei ACD in recta IN, ſitque hoc P. Junctis igitur O et P, erit centrum grav. totius portionis ABCD in lineâ OP. Sed idem quoque eſt in lineâ MK[b] [8]), ergo erit interſectio H centrum grav. portionis ABCD. dividantur jam partes GH, HF, bifariam in Q et S. Eſt igitur PH ad HO ut pars ACB ad cuneum ACD, ſed pars ACD, id eſt duo cunei ABE, ACE, ſunt ad cuneum ACD ut duo latera BE et EC ad latus AD, ergo PH ad HO, ut tota BC ad AD: et ſic quoque GH ad HF; et tandem QH ad HS, ut BC ad AD. Ergo ſicut quintupla BC cum triplâ AD ad quintuplam AD cum triplâ BC, ita et quintupla QH cum triplâ HS ad quintuplam HS cum triplâ QH. Sed, quintupla QH cum triplâ HS eſt aequalis ipſi MH, et quintupla HS cum triplâ QH ipſi HK; nam quum MG et KF ſimul ſint $\frac{6}{8}$ ſive $\frac{3}{4}$ MK, erit GF $\frac{1}{4}$ MK, ideoque QH et HS quae ſimul faciunt $\frac{1}{2}$ GF, erunt $\frac{1}{8}$ MK; quare quintupla QH cum quintuplâ HS erunt $\frac{5}{8}$ MK, id eſt, aequales ipſi MF, unde detractâ FH, quae bis continet HS, relinquetur HM aequalis quintuplae QH cum triplâ HS. Et ſimiliter ſi ex MF, (quam diximus continere quintuplam QH cum quintuplâ HS) vel ex KG auferatur HG quae bis continet ipſam QH, relinquetur HK aequalis quintuplae HS cum triplâ QH. apparet igitur partem MH ad HK habere rationem, quam quintupla BC cum triplâ AD ad quintuplam AD cum triplâ BC; quod erat demonſtrandum.

---

7) „a Theor. 3. h. lib." [Huygens].

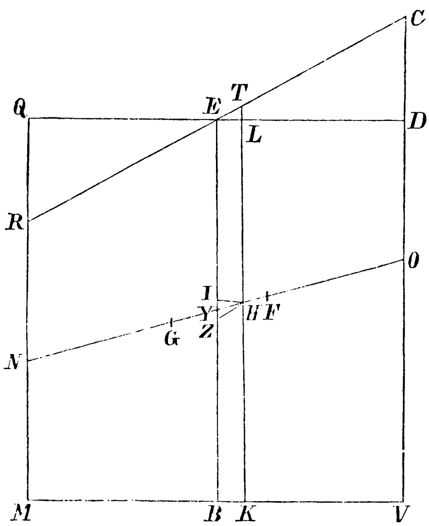
8) „b Theor. 2. h. lib." [Huygens].

Lemma [9]).

Sit Cylindri portio RCVM, eìque aequalis cijlindrus QDVM ſuper eâdem baſe MV; et conſtat quidem baſium diametros, (in eodem exiſtentes plano) QD et RC ſeſe invicem per medium ſecare in E. Sit igitur EB axis cylindri QV, ejusdemque centr. grav. Υ. Porrò ſit H centr. grav. portionis RCVM, atque inde cadat HI perpendicularis in axem EB, et HZ parallela RC. dico, ut EB quater ſumpta ad DC, ita eſſe EC ad HZ; et ita quoque DC ad IZ. Item IZ dividi bifariam ab Υ centro grav. cylindri QV.

diviſis enim lateribus RM et CV bifariam in punctis N et O, jungantur ea rectâ NO; et manifeſtum quidem eſt hanc tranſire tam per Y quàm per H centrum grav. portionis RCVM. Sint autem NG et OF ſingulae $\frac{3}{8}$ NO; et denique per H agatur TLHK parallela axi EB.

Fig. 5.



Quia igitur H eſt centr. grav. portionis RCVM, poteſt oſtendi, ſicut in Theoremate praecedenti, eſſe GH ad HF, ut CV ad RM. Ergo erit quoque ſicut CV et RM ſimul ad ſuam differentiam, id eſt, ſicut dupla EB ad duplam DC, vel EB ad DC, ita GH et HF ſimul ad ſuam differentiam quae eſt dupla YH, ſive ita FY ad HY. Ergo quum OY ſit quadrupla FY, erit etiam ut quadrupla EB ad DC, ita OY ad HY, et ita CE ad ET vel HZ; quod erat primum.

Et quia triangula ECD, HZI, ſunt ſimilia, eſt quoque ut CE ad HZ, id eſt, ut quadrupla EB ad DC, ita DC ad IZ; quod erat ſecundum.

Porrò quum Y ſit centr. grav. cylindri QV, eſt BY dimidia BE; ſed et KH dimidia eſt KT; ergo differentia duarum, BY, et KH, quae eſt YI, dimidia eſt differentiae duarum EB, et TK, quae eſt TL. TL autem aequalis eſt ZI, ergo IY dimidia quoque eſt ipſius ZI; quod erat tertium.

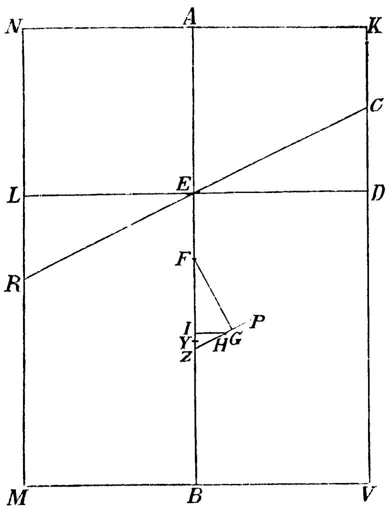
---

9) Comparez ce „Lemma" au „Lemma 1" du „Liber 2" (p. 124). Ces „Lemmata" dont le dernier nommé se rapporte aux parallélipipèdes et le premier aux cylindres ne diffèrent que numériquement. Il en est de même des „Theoremata 5 et 6", qui suivent, et qui correspondent aux „Lemmata 2 et 3" du „Liber 2".

THEOREMA 5. [10])

Sit Cylindrus KM, à quo absciſſus ſit plano DL baſi MV parallelo, cylindrus DM; et huic aequalis portio RCVM plano obliquo cujus maxima diameter RC, quam manifeſtum eſt tranſire debere per E centrum plani LD. Sit ergo AEB axis cylindri KM, ejusque centr. grav. F. Porrò ſit H centr. grav. portionis RCVM, per quod agatur ZHP parallela RC, in eamque cadat perpendicularis FG. dico in lineâ ZP, partem ZG interceptam ab axe AB et perpendiculari FG, majorem, aequalem vel minorem fore parte ZH, interceptâ ab eodem axe AB et H, centro grav. portionis RCVM; prout duplum rectangulum AEB cum defectu dimidii quadrati DC, majus aequale vel minus erit quartae parti quadrati à diametro baſis MV vel NK, id eſt quadrato AK.

Fig. 6.



Sit enim Y centr. grav. cylindri DM, et cadat HI perpendicularis in axem AB.

Primò autem ponatur duplum rectang. AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. DÇ, majus eſſe quadrato AK: dico ZG majorem eſſe quàm ZH.

Quum enim quadrupla EB ſit ad DC, ut DÇ ad IZ[a] [11]), erit rectangulum ſub quadruplâ EB et IZ aequale quadrato DC; et rectangulum ſub quadruplâ EB et $\frac{1}{2}$ IZ quae eſt YZ[b] [12]), aequale dimidio quadrato DC.

Porrò quum AB ſit dupla FB, et EB dupla YB, erit AE quoque dupla FY; ergo rectang. AEB duplum rectanguli ſub EB et FY; quare duplum rectang. AEB erit quadruplum rectang^i^. ſub EB et FY. Ergo duplum rectanguli AEB aequale eſt rectangulo ſub quadrupla EB et FY. sed et $\frac{1}{2}$ quadrati DC aequale oſtenſum fuit rectangulo sub quadruplâ EB et YZ; ergo rectang. sub quadruplâ EB et totâ FZ, aequale eſt duplo rectangulo AEB unà cum $\frac{1}{2}$ quadr. DC. Quum

---

[10]) Comparez le „Lemma 2" de la page 125. On a ici en notation moderne: $ZG \gtreqless ZH$ selon qu'on a $2\,AE \times EB - \frac{1}{2}\,DC^2 \gtreqless AK^2$.

[11]) „*a* lemm. praeced." [Huygens].

[12]) „*b* lemm. praeced." [Huygens].

autem ponatur duplum quadr. AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. DC, majus esse quadrato AK vel ED, erit, addito utrinque integro quadrato DC, duplam rectanguli AEB unà cum $\frac{1}{2}$ quadr. DC, majus quadrato EC: Ergo et rectang. sub quadruplâ EB et FZ, majus erit quadrato EC. Igitur quadrupla EB ad EC majorem habet rationem, quàm EC ad FZ; atqui ut quadrupla EB ad EC, ita rectang. sub quadruplâ EB et DC est ad rectang. sub EC et DC, propter communem altitudinem DC; ergo et rectang. sub quadruplâ EB et DC ad rectang. sub EC et DC majorem habet rationem quam EC ad FZ. sed rectang. sub EC et DC, (quia quadrupla EB est ad DC, ut EC ad HZ[c] [13])) aequale est rectangulo sub quadrupla EB et HZ; Igitur quoque rectangulum sub quadruplâ EB et DC ad rectang. sub quadruplâ EB et HZ, sive basis DC ad HZ majorem habet rationem quam EC ad FZ, et permutando DC ad EC majorem, quàm HZ ad FZ[d] [14]). Sed propter triangula similia EDC, ZFG est sicut DC ad EC, ita GZ ad FZ; igitur GZ ad FZ majorem quoque habet rationem, quam HZ ad FZ: quare GZ major quàm HZ; quod erat demonstrandum.

Iam si duplum rectang. AEB cum defectu dimidii quadrati DC aequale sit quadrato AK; dico tum quoque ZH, ZG aequales fore; cujus demonstratio dependet à praecedenti. nam si duplum rectang. AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. DC aequale sit quadrato AK vel ED, omnia quae modo major erant hìc erunt aequalia, quare et tandem GZ aequalis HZ.

Similiter si duplum rectang. AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. DC minus sit quadrato AK, omnia quae in praecedenti demonstratione erant majora, hìc erunt minora, et tandem GZ minor HZ, ut oportebat. Quare constat propositum.

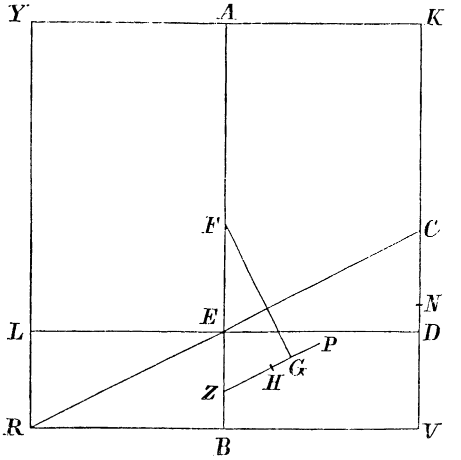
Manifestum autem est etiam tum constare, quum punctum R incidit in angulum M, ita ut loco portionis, abscindatur plano RC cuneus cylindricus, de quo casu est praeterea Theor. sequens.

[13]) „*c* lemma praeced." [Huygens].
[14]) „*d* prop. 27. lib. 5. Eucl." [Huygens].

THEOREMA 6. [15])

Sit Cylindrus KR à quo abscissus sit Cuneus RCV, plano cujus maxima diameter RC. agatur autem per H centrum grav. Cunei RCV, linea ZHP parallela RC: et in eam cadat ex F centro gravitatis cijlindri, perpendicularis FG. Denique VD sit dimidia ipsius VC, et VN $\frac{5}{8}$ VC.

Fig. 7.



Dico in lineâ ZP, partem ZG, interceptam ab axe cylindri, AB, et perpendiculari FG, majorem aequalem vel minorem fore parte ZH, interceptâ ab eodem axe AB et H centro grav. cunei RCV; prout rectang. sub KN et DV, majus, aequale vel minus erit octavâ parte quadrati à diametro basis R V vel YK.

Sit enim planum DL parallelum basi RV, eritque intersectio diametrorum RC et DL in axe AB in E, et cylindrus DR cuneo RCV aequalis, quia V Dest dimidia ipsius VC.

Primò autem ponatur rectangulum sub KN et DV majus esse octavâ parte quadrati RV; dico partem ZG majorem fore parte ZH.

Quum enim rectang. sub KN et VD majus sit quam $\frac{1}{8}$ quadr. RV, idem autem rectangulum aequale sit excessui, quo rectang. sub KV, VD, superat rectang. sub NV, VD seu $\frac{5}{4}$ quadrati VD; sequitur rectang. sub KV, VD cum defectu $\frac{5}{4}$ quadrati VD majus esse quam $\frac{1}{8}$ qu^{i}. RV. Sed rectang. sub KV, VD, aequale est rectangulo KDV unà cum quadrato VD; ergo rectang. sub KV, VD cum defectu $\frac{5}{4}$ quadrati VD aequale est rectangulo KDV cum defectu $\frac{1}{4}$ quadrati VD. Ergo quoque rectangulum KDV cum defectu $\frac{1}{4}$ qu. VD majus est quàm $\frac{1}{8}$ quadr. RV; et duplicando, erit duplum rectang. KDV sive AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. VD sive DC, majus quam $\frac{1}{4}$ quadr. RV vel YK, id est, majus quàm quadr. AK. Quare pars ZG major erit parte ZH[a] [16]); quod erat demonstrandum.

---

[15]) Comparez le „Lemma 3" de la page 127. Ici la condition s'exprime, en notation moderne $ZG \gtreqless ZH$ selon qu'on a $(KV - \frac{5}{4} DV)\, DV \gtreqless \frac{1}{2} AK^2$.

[16]) „*a* Theor. 5. h. lib." [Huygens].

Quòd si rectang. sub KN, DV, aequale sit octavae parti quadrati RV, dico tum quoque ZG aequalem fore ZH. Omnia enim quae modo majora fuerunt hìc erunt aequalia, quare et tandem duplum rectang. AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. DV, aequale quadrato AK. ideoque ZG aequalis ZH^b [17]), ut oportebat.

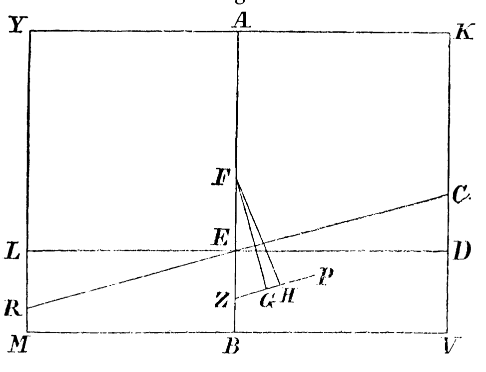
Eâdem ratione si rectang. sub KN, DV minus sit octavâ parte quadrati RV, erit quoque ZG minor quàm ZH. Quare constat propositum.

Theorema 7 [18]).

Cylindrus, cujus quadratum diametri basis non minus est quam duplum quadrati lateris, quamcunque proportionem ad liquidum habeat in gravitate, liquido supernatans demersâ basi rectus consistet; et si fuerit inclinatus, ita ut neutra tamen basium contingat liquidi superficiem, rectus restituetur.

Sit Cylindrus KM, cujus quadratum diametri basis MV, non minus sit quam duplum quadrati lateris KV. Habeat verò ad liquidum in gravitate rationem quamcunque, eique supernatet demersâ base MV, et positus sit inclinatus ita ut liquidi superficies sit RC; (ponendo nempe eam esse proportionem Cylindri ad liquidum in gravitate quae est portionis RCVM ad totum,) dico Cylindrum non manere inclinatum sed rectum restitui, id est ut bases ejus fiant liquidi superficiei parallelae.

Fig. 8.



Intelligatur enim Cylindrus secari plano YKVM, per axem AB et per RC maximam diametrum plani RC transeunte: ut et plano LD parallelo basi MV, et abscindente cylindrum DM aequalem portioni RCVM, unde intersectio diametrorum LD, RC erit in axe AB in E. Sit porrò F centrum grav. cylindri KM, et H portionis RCVM, per quod agatur ZHP parallela RC, et in eam cadat perpendicularis FG; denique jungatur FH.

Quia igitur quadr. MV vel YK non est minus quàm duplum quadrati KV, erit

[17]) „b Theor. 5. h. lib." [Huygens].

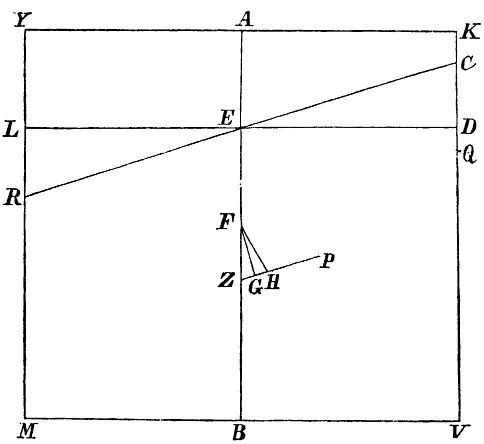
[18]) Ce théorème, avec celui qui suit, constituent la solution complète du problème de la stabilité de l'équilibre d'un cylindre droit qui flotte avec l'axe dans la situation verticale. Une telle solution, identique au fond avec celle de Huygens (voir la note 22), fut publiée dans les Comment. Acad. Petrop. de l'année 1738 (T. X, p. 162) par Daniel Bernoulli.

quadr. AK non minus quàm duplum quadrati AF; quum autem quadratum AF non ſit minus rectangulo AEB[a 19]), erit duplum quadrati AF non minus quam duplum rectangi. AEB; quare et quadr. AK non minus duplo rectangulo AEB. Ergo duplum rectangulum AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. DC minus erit quadrato AK; ideoque ZG minor ZH[b 20]). Ergo quum FG ſit perpendicularis in ZP et conſequenter in liquidi ſuperficiem RC, in eandem ſuperficiem non erit perpendicularis FH. FH autem jungit centra gravitatis totius cylindri et partis merſae RCVM, ergo totus Cylindrus inclinabit in quam partem inclinat linea FH[c 21]), aſcendetque verſùs K, deprimetur verò verſùs Y, donec baſes MV et YK erunt liquidi ſuperficiei parallelae; quod erat demonſtr.

Theorema 8.

Cujuscunque Cylindri, (cujus quadratum à diametro baſis minus eſt quàm duplum quadrati lateris,) latere ita ſecto, ut rectangulum ſub partibus aequale ſit octavae parti quadrati à diametro baſis; ſi cylindrus ad liquidum in gravitate non minorem proportionem habeat quam majus ſegmentorum ad ipſum latus cylindri, vel non majorem quam ſegmentorum minus habet ad idem latus; ſupernatet autem liquido demersâ baſe et ponatur inclinatus, ita ut neutra baſium contingat liquidi ſuperficiem, rectus reſtituetur [22]).

Fig. 9.



Sit Cylindrus KM, cujus quadratum à baſe MV vel YK minus ſit quam

[19]) „*a* pr. 5. lib. 2. Eucl." [Huygens].

[20]) „*b* Theor. 5. h. lib." [Huygens].

[21]) „*c* Theor. 1. lib. 2." [Huygens].

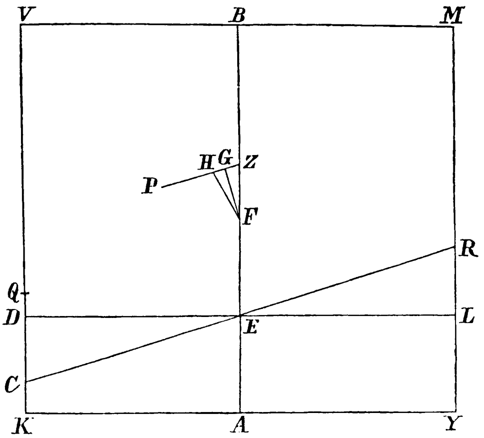
[22]) Soit h la hauteur du cylindre, d le diamètre de sa base, $\zeta = \frac{h}{d}$, ε la densité spécifique du cylindre relative à celle du liquide; alors le théorème nous apprend que, pour assurer la stabilité du cylindre, la valeur de ε doit être inférieure ou égale à la plus petite ou bien supérieure ou égale à la plus grande racine de l'équation $8\varepsilon(1-\varepsilon)\zeta^2 = 1$. Mais on peut exprimer les conditions de stabilité formulées dans ce théorème et dans celui qui le précède par la seule relation: $\zeta^2 \leqq \frac{1}{8\varepsilon(1-\varepsilon)}$, qui est, sous d'autres notations, celle trouvée par Daniel Bernoulli.

duplum quadrati lateris KV. Sectum autem fit latus KV in Q, ita ut rectangulum KQV aequetur octavae parti quadrati MV. Et habeat primò Cylindrus ad liquidum in gravitate proportionem non minorem eâ, quam QV habet ad KV; et liquido fupernatans pofitus fit inclinatus, ita ut liquidi fuperficies fit RC: dico rectum reftitutum iri.

Abfcindatur enim plano DL bafi MV parallelo cijlindrus DM aequalis portioni merfae RCVM, et manifeftum eft diametrorum DL et RC interfectionem fore in cylindri axe AB, in E. Porrò fit F centrum gr. cylindri KM, et H portionis RCVM, per quod agatur ZHP parallela RC, et in eam cadat perpendicularis FG. denique jungatur FH.

Quia igitur cylindrus ad liquidum in gravitate habet rationem majorem quam QV ad KV, habebit quoque portio demerfa RCVM five qui eidem aequalis eft cylindrus DM ad cylindrum KM non minorem rationem quam QV ad KV[a 23]); quare latus DV non minus eft quam QV. Ergo rectangulum KDV five AEB non majus rectangulo KQV. Ergo rectang. AEB non majus quoque octavâ parte quadrati MV, et duplum rectang. AEB non majus quartâ parte quadrati MV id eft, quadrato AK. Quamobrem duplum rectang. AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. DC minus erit quadrato AK, atque ideo ZG minor ZH[b 24]). Ergo quum FG fit perpendicularis ad ZP, atque ideo ad liquidi fuperficiem RC, ad eandem non erit perpendicularis FH; quare cylindrus inclinabit in quam partem inclinat FH, afcendetque verfùs K, deprimetur verò verfùs Y, donec bafes ejus fint liquidi fuperficiei parallelae; quod erat demonftr.

Fig. 10.



Habeat nunc [Fig. 10] Cylindrus ad liquidum in gravitate proportionem non majorem eâ, quam KQ habet ad KV, et liquido fupernatans demerfâ bafe pofitus, fit inclinatus, ita ut liquidi fuperficies fit CR; dico fimiliter rectum reftitutum iri.

Sit enim H centr. gravitatis portionis enatantis MVCR, per quod agatur ZHP parallela RC, caeteraque conftruantur ut in cafu praecedenti. Quum itaque Cylindrus MK ad liquidum in gravitate non majorem habeat rationem quam KQ ad KV, habebit quoque portio demerfa RCKY, five qui ei aequalis eft

23) „*a* Theor. 4. lib. 1." [Huygens].
24) „*b* Theor. 5. h. lib " [Huygens].

cylindrus DY, ad cylindrum KM non majorem rationem quam KQ ad KV[a 23]), quare latus DK non majus erit quam KQ, ideoque DV non minor quam QV. Unde eodem modo quam in caſu praecedenti hic quoque demonſtrari poteſt FH non eſſe perpendicularem in ZP, ideoque nec in ſuperficiem liquidi RC. FH autem hic jungit centra gravitatis, totius cylindri et portionis enatantis MVCR, ergo totus cylindrus inclinabit ad quam partem inclinat FH[b 25]), deſcendetque verſùs V aſcendet verò verſùs M, donec baſes ejus ſint liquidi ſuperficiei parallelae, quod erat demonſtr.

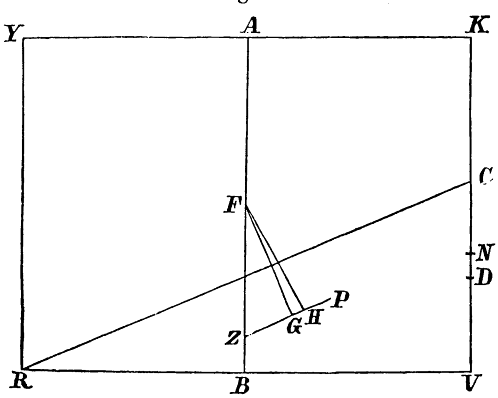
Ex hoc Theoremate manifeſtum eſt Cylindrum cujuſvis longitudinis tam magnam vel tam parvam proportionem poſſe habere ad liquidum in gravitate, ut ei ſupernatans demerſâ baſe et poſitus inclinatus, ita tamen ut neutra baſium contingat liquidi ſuperficiem, rectus reſtituatur, et baſes fiant liquidi ſuperficiei parallelae.

Theorema 9.

Cylindrus cujus quadratum à diametro baſis ad quadratum lateris minorem quidem rationem habet quàm duplam, majorem verò quàm octo ad quinque; quamcunque ad liquidum in gravitate habeat proportionem, eidem ſupernatans demerſâ baſe, nunquam ita conſiſtet ut alterutra baſium liquidi ſuperficiem in uno puncto contingat[26]).

Sit Cylindrus KR, çujus quadratum à diametro baſis RV vel YK ad quadratum lateris KV rationem habeat minorem quàm duplam, majorem verò quàm 8 ad 5. Habebit autem ad liquidum in gravitate proportionem, quae vel minor vel major erit ſubduplâ: Quare habeat primò minorem ſubduplâ, et liquido ſupernatans demerſâ baſe inclinetur, ita ut angulus R ſit in liquidi ſuperficie quae ſit RC; dico angulum R infra eandem ſuperficiem demerſum iri.

Fig. 11.



Sit enim AB axis Cylindri et F ejuſdem centrum gravitatis. Sicut et H centrum gravitatis cunei demerſi RCV, per quod agatur ZHP parallela RC; atque in eam cadat perpendicularis FG,

[25]) „*b* Theor. 1. lib. 2.” [Huygens].

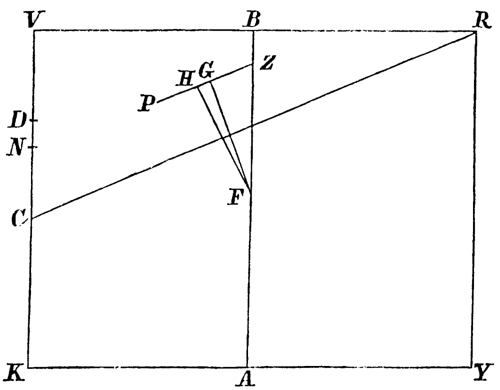
[26]) Comme dans le „Lib. 2” le „Theorema 4” servit à préparer le „Theorema 5”, celui-ci prépare le „Theorema 10”. Comparez le dernier alinéa de la note 28 du „Liber 2” (p. 132).

et jungatur FH. Porrò ut CV fecta in D et N, ita ut VD quidem fit dimidia CV, VN verò $\frac{5}{8}$ CV five $\frac{5}{4}$ DV.

Rectangulum KNV non poteft majus effe quàm $\frac{1}{4}$ quadrati KV[a 27]); rectangulum autem fub KN et DV facit $\frac{4}{5}$ rectanguli KNV, (quia NV eft $\frac{5}{4}$ DV,) ergo rectangulum fub KN et DV non eft majus quàm $\frac{4}{20}$ five $\frac{1}{5}$ quadrati KV. Porrò quia quadr. RV ad quadr. KV majorem habet rationem quàm 8 ad 5 erit $\frac{1}{8}$ quadrati RV major quam $\frac{1}{5}$ quadrati KV: Ergo etiam $\frac{1}{8}$ quadrati RV major rectangulo fub KN et DV, quare in lineâ ZP erit pars ZH major parte ZG[b 28]): Et quum FG fit perpendicularis ad ZP et ad liquidi fuperficiem RC, ad eandem fuperficiem non erit perpendicularis FH, quae jungit centra grav. totius cylindri et partis merfae RCV; quamobrem Cylindrus inclinabit in quam partem inclinat linea FH, et deprimetur verfùs Y, ideoque mergetur angulus R; quod erat demonftrandum.

Habeat jam Cylindrus ad liquidum in gravitate proportionem majorem fubduplâ, et liquido fupernatans demerfâ bafe inclinetur donec angulus R [Fig. 12] fit in liquidi fuperficie, quae fit CR: dico angulum R fupra liquidi fuperficiem fublatum iri.

Fig. 12.



Sit enim H centrum gravit. cunei enatantis CVR, et reliqua conftruantur ut fupra.

Demonftrari igitur poteft ficut in cafu praecedenti, FH non effe perpendicularem ad PZ neque ad liquidi fuperficiem CR. FH autem hic jungit centra gravitatis totius cylindri et partis enatantis CVR; ergo Cylindrus inclinabit quò inclinat linea FH, et deprimetur quidem verfùs V, extolletur verò verfùs R, ideoque angulus R fupra liquidi fuperficiem exfurget; quod erat demonftr.

---

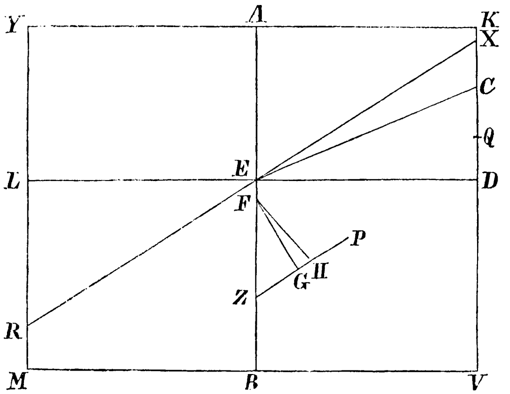
27) „*a* pr. 5. lib. 2. Eucl." [Huygens].
28) „*b* Theorem. 6. h. lib." [Huygens].

Theorema 10.

Cylindrus, cujus quadratum à diametro basis ad quadratum lateris minorem rationem habet quàm duplam, majorem verò quàm octo ad 5; si, diviso latere ut in Theor. 8°, ad liquidum in gravitate proportionem habeat minorem quàm segmentorum majus, majorem verò quam segmentorum minus habet ad idem latus: liquido supernatans demersâ base et positus inclinatus, ita ut neutra basium liquidi superficiem contingat, neque rectus restituetur, neque inclinatus consistet, nisi quando axis cum superficie liquidi faciet angulum aequalem angulo de quo dicetur. [29])

Sit Cylindrus KM, cujus quadratum à diametro basis MV ad quadratum lateris KV minorem rationem habeat quam duplam, sive quam 8 ad 4, majorem verò quàm 8 ad 5; et diviso latere KV in Q, ita ut rectangulum KQV aequetur octavae parti quadrati MV, habeat cylindrus ad liquidum in gravitate rationem quam DV ad KV, ita ut DV minor quidem sit segmento QV, major verò QK. ductâ autem DL parallelâ MV, veniat ex E ubi DL ab axe AB secatur, linea EC, ita ut quadratum partis comprehensae CD duplum sit exessus quo duplum rectanguli AEB superat quadratum AK. [30])

Fig. 13.



Dico cylindrum KM, si liquido supernatans ponatur inclinatus, ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem, neque rectum restitutum iri, neque mansurum inclinatum nisi cùm axis cum liquidi superficie faciet angulum aequalem angulo ECD vel AEC.

Primò enim inclinetur Cylindrus ut liquidi superficies sit RX, quâcum axis AB faciat angulum minorem angulo AEC. Sit autem F centr. gr. Cylindri, et H por-

---

[29]) Le théorème démontre que, entre les limites $\sqrt{\frac{1}{2}} < \zeta < \sqrt{\frac{5}{8}}$ ($\zeta = h : d$, h hauteur, d diamètre du cylindre) le cylindre flottant pourra prendre la position (2) de la page 87 de l'Avertissement, où l'axe du cylindre est supposé parallèle aux côtés AB, CD, toutes les fois qu'on aura $\zeta^2 > \frac{1}{8\varepsilon(1-\varepsilon)}$; c'est-à-dire, que la position (1) est une position instable.

[30]) C'est la définition de l'angle AEC que l'axe du cylindre flottant fera avec le niveau du liquide dans la position d'équilibre. On en déduit facilement: $\cot g^2 \mathrm{AEC} = 16\varepsilon(1-\varepsilon)\zeta^2 - 2$.

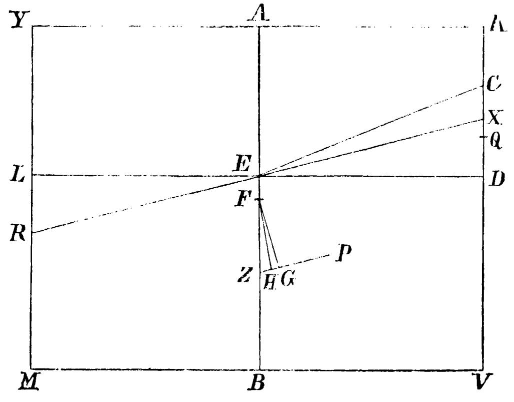
tionis RXVM, per quod ducatur ZHP parallela RX, atque in eam cadat perpendicularis FG, et denique jungatur FH.

Quia igitur Cylindrus eſt ad liquidum in gravitate ut DV ad KV, ſive ut cylindrus DL ad cylindrum KM, atque etiam ut pars merſa ad eundem cylindrum KM[a] [31]), erit portio merſa RXVM aequalis cylindro DM; quare diametri RX et LD in eodem puncto E ſecabunt axem AB. Erit itaque ex hypotheſi angulus AEX minor angulo AEC, et XD major CD. Quum autem quadratum DC per conſtr. ſit duplum exceſſus quo duplum rectanguli AEB ſuperat quadratum AK, erit duplum rectanguli AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. CD aequale quadrato AK; et quum XD ſit major CD, erit duplum rectanguli AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. XD, minus quadrato AK; ergo ZG minor quam ZH[b] [32]), et quum FG ſit perpendicularis in ZP, et in liquidi ſuperficiem RX, in eandem ſuperficiem non erit perpendicularis FH, quae jungit centra grav. cylindri totius et portionis merſae RXVM; quare Cylindrus inclinabit quò inclinat FH[c] [33]), idque fiet quàm diu ſuperficies liquidi non convenit cum lineâ EC.

Jam ita diſponatur Cylindrus ut liquidi ſuperficies RX [Fig. 14] cum axe AB faciat angulum majorem angulo ECD vel AEC. Sit autem conſtructio reliqua ut in caſu praecedenti.

Sicut ſupra ita hìc quoque diametri planorum, LD et RX in eodem puncto E ſecant axem AB; ergo hìc ex hijpotheſi angulus AEX major angulo AEC, et XD minor CD. Quum autem quadratum CD aequale ſit duplo exceſſui quo duplum rectang. AEB ſuperat quadratum AK[d] [34]), erit duplum rectanguli AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. DC aequale quadrato AK; et quum XD ſit minor quam CD, erit duplum rectang. AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. XD majus quadrato AK: Ergo ZG major quàm ZH[e] [35]); et quum FG ſit perpendicularis ad ZP et ad liquidi ſuperficiem RX, ad

Fig. 14.



[31]) „*a* Theor. 4. lib. 1." [Huygens].

[32]) „*b* Theor. 5. h. lib." [Huygens].

[33]) „*c* Theor. 1. lib. 2" [Huygens].

[34]) „*d* per constr." [Huygens].

[35]) „*e* Theor. 5. h. lib." [Huygens].

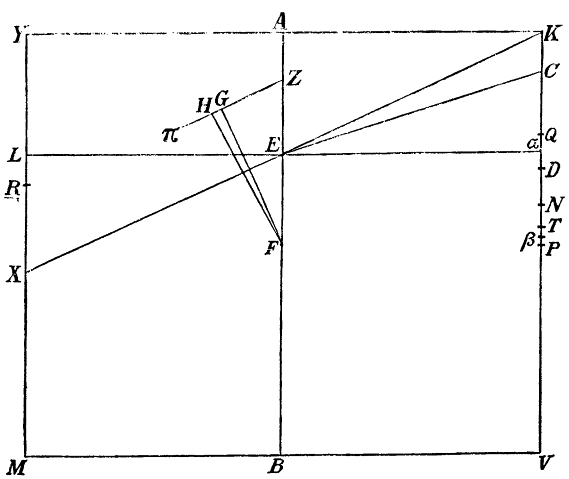
eandem ſuperficiem non erit perpendicularis FH, quae jungit centra grav. totius Cylindri et portionis merſae RXVM: quare Cylindrus inclinabit quò inclinat FH, et deprimetur à parte K, idque donec ſuperficies liquidi conveniat cum lineâ EC.

Non conſiſtet igitur Cylindrus niſi cùm axis AB cum liquidi ſuperficie faciet angulum aequalem angulo AEC vel ECD; quod erat demonſtr.

Theorema II.

Cylindrus, cujus quadratum à diametro baſis ad quadratum lateris rationem habet minorem quàm octo ad quinque, majorem verò quàm ſesquialteram, liquido ſupernatans demerſâ baſe, Aliquando rectus conſiſtet; Saepe inclinatus, ita ut neutra baſium liquidi ſuperficiem contingat; aliquando inclinabitur donec alterutra baſium liquidi ſuperficiem in uno puncto contingat, idque quatuor caſibus; aliquando denique ulteriùs adhuc inclinabitur; Secundùm diverſam proportionem quam ad liquidum habebit in gravitate. [36]

Fig. 15.



Concluſio 1.

Quòd propoſitus Cylindrus aliquando rectus conſiſtat, et quae tum debeat ejus eſſe proportio ad liquidum in gravitate, manifeſtum eſt ex Theoremate 8°. h. lib. Illud enim ad omnes Cylindros pertinet, qui inclinare poſſunt.

2.

Sit itaque Cylindrus KM cujus quadratum à baſis diametro MV ad quadratum lateris KV rationem habeat mino-

[36] Le théorème nous fait connaître que, quand on a $\sqrt{\frac{5}{8}} < \zeta < \sqrt{\frac{2}{3}}$, alors les positions (1) et (2) de la page 87 de l'Avertissement (AB parallèle à l'axe du cylindre) peuvent se présenter,

rem quam 8 ad 5, majorem verò quam 3 ad 2. Et latere KV divifo primùm bifariam in P, fecundò in Q, ita ut rectangulum KQV aequale fit $\frac{1}{8}$ quadrati MV, deinde in N, ita ut rectangulum KNV aequale fit $\frac{5}{32}$ quadrati MV, factifque KD $\frac{4}{5}$ KN, et KT $\frac{4}{5}$ NV; fumatur punctum ubivis inter Q et D ut α, et aliud infra T, non autem ultra P, ut β. Habeat autem Cylindrus ad liquidum in gravitate proportionem quam αV, vel βV, vel αK, vel βK, ad latus KV; et liquido fupernatans ponatur inclinatus, ita ut neutra bafium liquidi fuperficiem contingat: dico neque rectum reftitutum iri; neque inclinatum manfurum; nifi cùm axis cum fuperficie liquidi angulum faciet aequalem angulo inveniendo ut fupra Theor. 10°. [37]).

Ut autem appareat omnes hos cafus locum habere poffe, et effe differentes, duo funt oftendenda; primum, quòd punctum T cadat intra K et P: alterum, quòd puncta D et T non coincidant, quorum illud fic oftenditur.

Quia rectangulum KNV eft $\frac{5}{32}$ quadrati MV, quadratum verò MV majus quam $\frac{3}{2}$ quadrati KV ex conftr. et hijpothesi: erit rectang. KNV majus quam $\frac{15}{64}$ quadrati KV. Unde fequitur latus KV ita fectum effe in N, ut fegmentorum minus, KN, majus fit quàm $\frac{3}{8}$ KV, fegmentorum verò majus, NV, minus fit quam

---

mais qu' il se peut aussi que ni l'une ni l'autre de ses positions ne soit une position d'équilibre stable. Tout cela selon les différentes valeurs de la densité relative ε. Voir, pour les détails, les „Conclusiones."

[37]) La „Conclusio" nous apprend que, entre les limites pour la valeur de ζ indiquées dans la note précédente, la position (2) pourra se présenter toutes les fois que les trois conditions suivantes soient remplies: 1° que la valeur de ε se trouve comprise entre les racines de l'équation quadratique: $8\varepsilon(1-\varepsilon)\zeta^2 = 1$, 2° qu'elle soit inférieure à la plus petite ou supérieure à la plus grande des racines de l'équation $2(1-\varepsilon)(5\varepsilon-1)\zeta^2 = 1$ et de même 3° inférieure à la plus petite ou supérieure à la plus grande racine de l'équation: $2\varepsilon(4-5\varepsilon)\zeta^2 = 1$.

La première de ces équations se rapporte au point Q de la figure du texte. Pour montrer comment la seconde et la troisième dépendent des points D ou T de cette figure, posons $VD = \varepsilon h$, alors $KD = (1-\varepsilon)h$, $KN = \frac{5}{4}(1-\varepsilon)h$, $NV = \frac{1}{4}(5\varepsilon-1)h$; $KN \times NV = \frac{5}{16}(1-\varepsilon)(5\varepsilon-1)h^2 = \frac{5}{32}d^2$, donc $2(1-\varepsilon)(5\varepsilon-1)\zeta^2 = 1$, où, pour obtenir le point D, on doit prendre la plus grande des racines. Il s'ensuit donc que pour $\varepsilon = \frac{\alpha V}{KV}$ la valeur de ε sera plus grande encore que cette plus grande racine.

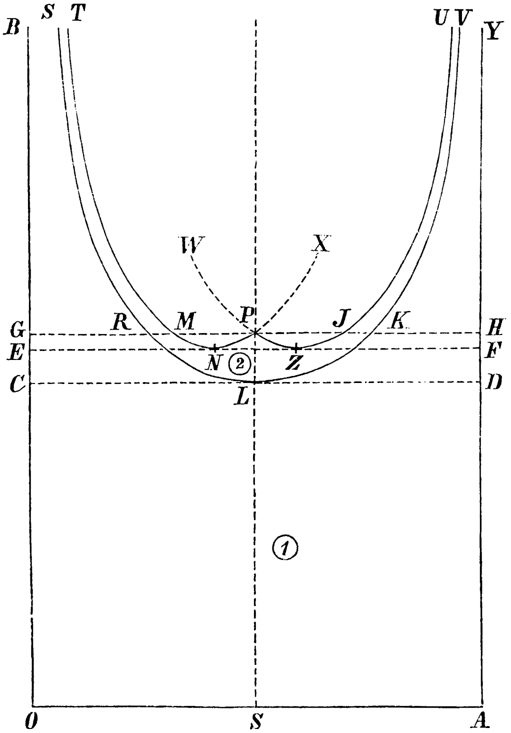
Posons ensuite $KD = \varepsilon h$, alors on arrivera à l'équation $2\varepsilon(4-5\varepsilon)\zeta^2 = 1$, dont la moindre racine servira pour la valeur de KD. Ainsi si l'on a $\varepsilon = \frac{\alpha K}{KV}$, la densité relative ε sera inférieure à cette plus petite racine.

Le point T amènera les mêmes équations. En posant en premier lieu $TV = \varepsilon h$, et ensuite

$\frac{5}{8}$ KV [38]). Ergo KT, quae eſt $\frac{4}{5}$ NV, minor eſt quam $\frac{4}{8}$ ſive $\frac{1}{2}$ KV. Apparet itaque punctum T cadere intra K et P.

Alterum ſic oſtenditur, nimirum quòd puncta D et T non coincidant. quia enim rectangulum KNV eſt $\frac{5}{32}$ quadrati MV, quadratum verò MV minus quam $\frac{8}{5}$ quadrati KV (utramque ex conſtr.): erit rectangulum KNV minus quam $\frac{8}{32}$ ſeu $\frac{1}{4}$ quadrati KV, unde ſequitur latus KV non bifariam dividi in N; ſegmentorum verò majus eſt NV, minus autem NK, ergo KD, quae eſt $\frac{4}{5}$ KN, minor eſt ipſâ KT, quae eſt $\frac{4}{5}$ NV. non igitur coincidunt puncta D et T.

Primùm itaque habeat Cylindrus ad liquidum in gravitate proportionem quam αV ad KV; et facto plano αL parallelo baſi YK, veniat ex centro ejus E linea EC,



TK $= \varepsilon h$, on trouvera TV égal à KV multiplié par la plus petite des racines de l'équation $2(1-\varepsilon)(5\varepsilon-1)\zeta^2 = 1$ et TK égal à KV multiplié par la plus grande racine de l'équation $2\varepsilon(4-5\varepsilon)\zeta^2 = 1$.

Ajoutons que la „Conclusio" pourrait s'exprimer encore comme il suit: que dans les limites indiquées de ζ la position (2) pourra être réalisée toutes les fois qu'on aura $\zeta^2 > \frac{1}{8\varepsilon(1-\varepsilon)}$ et simultanément $\zeta^2 < \frac{1}{2(1-\varepsilon)(5\varepsilon-1)}$ et de même $\zeta^2 < \frac{1}{2\varepsilon(4-5\varepsilon)}$.

Enfin, pour expliquer la raison d'être des limites $\sqrt{\frac{5}{8}}$ et $\sqrt{\frac{2}{3}}$, nous donnons une représentation graphique du plan (ε, ζ) où les trois courbes, dont les équations ont été mentionnées, se trouvent tracées.

Dans cette représentation on aura OE $=$ $= \sqrt{\frac{5}{8}}$; OG $= \sqrt{\frac{2}{3}}$; et la „Conclusio", ensemble avec le „Theorema ~~6~~," exprime que la position (2) est possible toutes les fois que le point (ε, ζ) tombe dans l'espace RLKJZPNMR.

[83]) Toujours à cause de „pr. 5. lib. 2. Eucl.", puisqu' on aurait dans le cas contraire KN $\times$ NV $\overline{\overline{<}}$ $\frac{15}{64}$ KV^2. Voici d'ailleurs cette „propositio" dont Huygens fait un usage si fréquent, telle qu'on la trouve dans l'édition de Clavius de 1607 (p. 176): „Si recta linea secetur in aequalia, & non aequalia: Rectangulus sub inaequalibus segmentis totius comprehensum, vna cum quadrato, quod ab intermedia sectionum, aequale est ei quod à dimidia describitur, quadrato." On en déduit aisément que le rectangle en question sera d'autant plus petit que les sections seront plus inégales, c'est-à-dire, que le point qui fait la division, se trouve plus éloigné du point milieu, et réciproquement. C'est sous cette forme que la proposition va être appliquée plusieurs fois par Huygens.

comprehendens partem Cα, cujus quadratum duplum ſit exceſſus, quo duplum rectang. AEB ſuperat quadr. AK. [30])

Ponatur autem cylindrus inclinatus, ita ut neutra baſium contingat liquidi ſuperficiem. Oſtendendum eſt neque rectum reſtitui, neque inclinatum manere, niſi cùm axis AB faciet cum liquidi ſuperficie angulum aequalem angulo ECα vel AEC.

Abſcindatur à Cylindro Cuneus KXY plano cujus maxima diameter KX tranſeat per E interſectionem duarum αL et AB. Porrò ſit H centrum gravitatis cunei KXY, per quod agatur ZHπ parallela KX, in eamque cadat ex F centro grav. cylindri, perpendicularis FG, et jungatur FH: denique ſit YR $\frac{5}{4}$ YL.

Quoniam igitur rectangulum KQV per conſtr. aequale eſt $\frac{1}{8}$ quadrati MV, Cylindrus autem KM ad liquidum in gravitate proportionem habet quam αV ad KV, quae minor eſt eâ quam QV, major verò eâ quam QK habet ad KV, ſequitur Cylindrum non rectum reſtitutum iri [a 39]). Sed neque eouſque inclinabitur ut baſis YK contingat liquidi ſuperficiem; nam ſi eouſque jam inclinatus ponatur et angulus K ſit in liquidi ſuperficie KX, continuò idem angulus ſupra liquidi ſuperficiem extolletur. quod ſic oſtenditur.

Quia enim cylindrus eſt ad liquidum in gravitate, ut αV ad KV, ſive ut cylindrus αM ad KM; erit etiam portio demerſa XKVM aequalis cylindro αM [b 40]), quare liquidi ſuperficies KX, (id eſt, diameter plani quod eſt ſecundum liquidi ſuperficiem) in eodem puncto E ſecabit axem AB, ubi ſectus fuit à plano αL, eritque YL dimidia ipſius YX. YL autem ſive Kα minor eſt quàm KD, (quia punctum α ſumptum eſt inter Q et D,): ergo quoque YR, quae eſt $\frac{5}{4}$ YL, minor erit quàm KN, quae eſt $\frac{5}{4}$ KD. Ergo rectangulum YRM minus eſt rectangulo KNV; hoc aùtem aequale eſt $\frac{5}{32}$ quadrati MV, ergo rectangulum YRM minus eſt quam $\frac{5}{32}$ quadrati MV; rectangulum autem ſub YL et RM eſt $\frac{4}{5}$ rectanguli YRM, (quia YL eſt $\frac{4}{5}$ YR,) ergo rectangulum ſub YL et RM minus eſt quàm $\frac{4}{32}$ ſive $\frac{1}{8}$ quadrati MV. Quare in lineâ Zπ erit pars ZG minor parte ZH [c 41]). Ergo quum FG ſit perpendicularis in liquidi ſuperficiem XK, in eandem non erit perpendicularis FH, quae jungit centra grav. cylindri et cunei enatantis XYK. Quamobrem cylindrus inclinabit quò inclinat linea FH [d 42]), aſcendetque verſùs K, isque angulus ſupra liquidi ſuperficiem extolletur.

Demonſtratum igitur eſt Cylindrum neque rectum reſtitutum iri, neque tamen eousque inclinari poſſe ut alterutra baſium contingat liquidi ſuperficiem. Quòd autem angulus, quem, conſiſtente Cylindro, axis AB faciet cum liquidi ſuperficie,

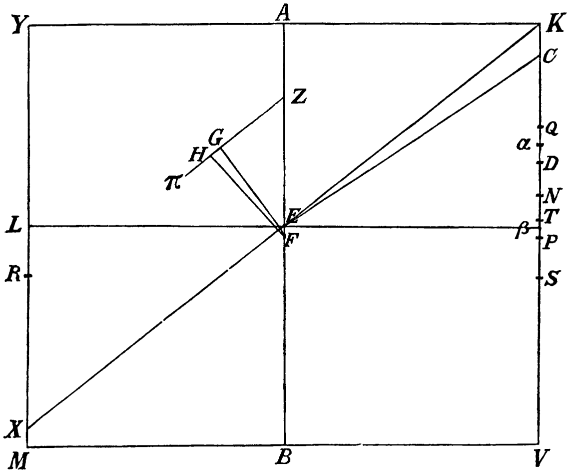
---

[39]) „*a* per conv. Theor. 8. h. lib." [Huygens].
[40]) „*b* Theor. 4. lib. 1." [Huygens].
[41]) „*c* Theor. 6. h. lib." [Huygens].
[42]) „*d* Theor. 1. lib. 2." [Huygens].

aequalis futurus ſit angulo ECα vel AEC, demonſtrari poterit ſicut in Theoremate 10° h. lib.

Habeat nunc [Fig. 16] Cylindrus ad liquidum in gravitate rationem quam βV habet ad KV, et, facto plano βEL parallelo MV, inveniatur angulus ECβ ut in caſu praecedenti. Dico, ſi Cijlindrus liquido ſupernatans ponatur inclinatus, ita ut neutra baſium contingat liquidi ſuperficiem, quòd neque rectus reſtituetur neque inclinatus manebit, niſi cùm axis AB faciet cum liquidi ſuperficie angulum aequalem angulo AEC vel ECβ.

Fig. 16.



Conſtruantur enim reliqua ut in caſu praecedenti; et praeterea ſit KS aequale ipſi VN et YR $\frac{5}{4}$ YL.

Quia igitur Cylindrus ad liquidum in gravitate habet rationem quam βV ad KV, quae minor eſt eâ quam QV, major autem eâ quam QK habet ad KV, non poterit quidem rectus reſtitui [a 43]).

Sed neque eousque poterit inclinari, ut baſium alterutra contingat liquidi ſuperficiem; nam ſi jam eousque ponatur inclinatus, ut angulus K ſit in liquidi ſuperficie KX, ſtatim idem angulus ſupra ſuperficiem liquidi extolletur. Primò enim facile ſicùt in caſu praecedenti oſtenditur YL eſſe dimidiam ipſius YX; ſed YL ſive Kβ major eſt quam KT, (quia punctum β ſumptum fuit inter T et P): ergo YR quae eſt $\frac{5}{4}$ YL major erit quam KS, vel NV quae ſingulae ſunt $\frac{5}{4}$ KT; quare rectangulum YRM minus erit rectangulo KSV vel KNV; hoc autem aequale eſt $\frac{5}{32}$ quadrati MV, ergo rectang. YRM minus eſt quam $\frac{5}{32}$ quadrati MV; Rectangulum autem ſub YL et RM eſt $\frac{4}{5}$ rectanguli YRM, (quia YL eſt $\frac{4}{5}$ YR) ergo rectang. ſub YL et RM minus eſt quam $\frac{4}{32}$ ſive $\frac{1}{8}$ quadrati MV. Ergo in lineâ Zπ, erit pars ZG minor parte ZH [b 44]), et quum FG ſit perpendicularis in Zπ et in liquidi ſuperficiem XK, in eandem non erit perpendicularis FH, quae jungit centra grav. cylindri et cunei enatantis XYK. quamobrem Cylindrus inclinabit quò inclinat linea FH [c 45]), et angulus K aſcendet ſupra

43) „a per conv. Theor. 8 . h. lib." [Huygens].

44) „b Theor. 6. h. lib." [Huygens].

45) „c Theor. 1. lib. 2." [Huygens].

liquidi fuperficiem. Quòd autem rùrfus angulus quem manente cylindro axis AB faciet cum liquidi fuperficie, aequalis futurus fit angulo ECβ vel AEC, demonftrari poterit ut in Theor. 7° [46]) hujus lib.

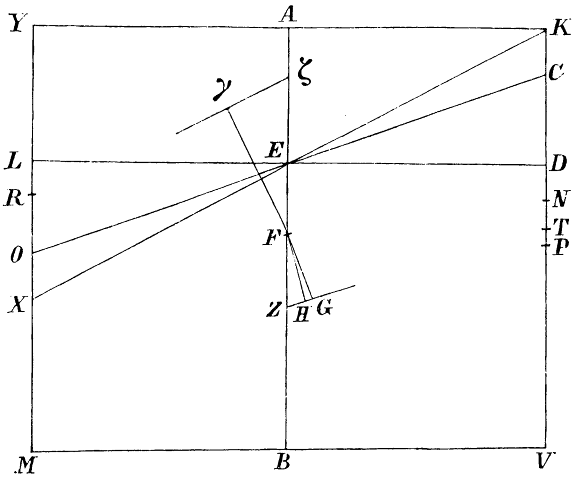
Quòd fi Cylindrus fit ad liquidum in gravitate ut αK vel βK ad KV, inverfa tum intelligantur duo praecedentia schemata, et eaedem quae in praecedentibus cafibus erunt demonftrationes, nifi quòd tunc eae partes merfae erunt quae prius enatabant.

Si igitur Cylindrus fit ad liquidum in gravitate ut αV vel βV vel αK vel βK ad latus KV, etc.; quod erat dem.

3.

divifo latere KV, ut fuprà, punctis P, N, D, T, nempe in P bifariam, et in N ita ut rectangulum KNV fit $\frac{5}{32}$ quadrati MV, et KD fit $\frac{4}{5}$ KN, KT verò $\frac{4}{5}$ VN; Si Cylindrus ad liquidum in gravitate proportionem habeat quam DV vel TV vel DK vel TK ad latus KV, et liquido fupernatans ponatur inclinatus ita ut neutra bafium liquidi fuperficiem contingat, eoufque inclinabitur donec alterutra bafium eandem fuperficiem contingat in uno puncto. [47])

Fig. 17.



Habeat enim primò ad liquidum in gravitate rationem quam DV ad KV, et

[46]) Lisez 10°.

[47]) La „Conclusio" indique, que le cylindre flottant se trouve en équilibre dans une position intermédiaire entre la position (2) et l'une des positions (3) on (3)' de l'„Avertissement" (c'est-à-dire dans une position telle que l'une des bases circulaires touche le niveau du liquide) toutes les fois qu'entre les limites $\sqrt{\frac{5}{8}} < \zeta < \sqrt{\frac{2}{3}}$, on aura $2(1-\varepsilon)(5\varepsilon-1)\zeta^2 = 1$ (pour $\varepsilon > \frac{1}{2}$), ou bien $2\varepsilon(4-5\varepsilon)\zeta^2 = 1$ (pour $\varepsilon < \frac{1}{2}$). Inutile de dire qu'alors le point (ε, ζ) se trouvera sur l'une des lignes PZJ ou PNM de la représentation graphique de la note 37, p. 176.

On remarquera d'ailleurs que la *stabilité* de la position en question n'est pas prouvée puisque, à cet effet, on doit savoir encore comment le cylindre se comportera, s'il est poussé de manière à atteindre une position (3) ou (3).

ponatur inclinatus, ita ut liquidi ſuperficies ſit OC. dico eouſque inclinatum iri donec baſis YK liquidi ſuperficiem contingat in puncto K.

Sit enim planum DL parallelum baſi KY, et planum KX abſcindat cuneum KYX aequalem cylindro KL: Porrò ſit F centrum gravitatis cijlindri; item H centr. gravitatis portionis OCVM, et γ cunei XYK, per quae ducantur ZHG parallela OC et $\zeta\gamma$ parallela XK, in easque cadant perpendiculares FG et Fγ: Jungatur etiam FH, et denique ſit YR aequalis KN.

Quia igitur rectangulum KNV ſive YRM ſunt $\frac{5}{32}$ quadrati MV, rectangulum autem ſub YL et RM eſt $\frac{4}{5}$ rectanguli YRM (quia RY eſt $\frac{5}{4}$ LY,): ſequitur rectangulum ſub YL et RM aequale eſſe $\frac{4}{32}$ ſive $\frac{1}{8}$ quadrati MV; quare erit in lineâ $\zeta\gamma$, pars $\zeta\gamma$, quae eſt inter axem AB et perpendicularem Fγ aequalis parti quae eſt inter eandem axem AB et centrum gravitatis cunei XYK *a* [48]); et quià hae partes ſunt aequales, erit duplum rectanguli AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. XL aequale quadrato AY *b* [49]) vel AK nimirum quartae parti quadrati YK. Ergo duplum rectanguli AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadrati CD (quia CD minor eſt quam KD vel XL) majus erit quadrato AK. Qùare in lineâ ZG erit pars ZG major parte ZH *c* [50]), et quum FG ſit perpendicularis in ZG; ideoque in liquidi ſuperficiem OC, in eandem ſuperficiem non erit perpendicularis FH, quae jungit centra gravitatis cylindri et partis merſae OCVM; quamobrem Cylindrus inclinabit quò inclinat linea FH *d* [51]), deſcendetque verſùs K, idque donec angulus K ſit in ipſâ liquidi ſuperficie: Cum autem eò pervenerit tum manifeſtum eſt enatare debere cuneum KYX; nam quum in hujus centrum gravitatis incidat Fγ, quae ſimul etiam perpendicularis eſt in liquidi ſuperficiem XK, (quod in principio hujus demonſtrationis oſtenſum fuit,) cylindrus tunc ad neutram partem magis inclinabit; quod erat demonſtr.

Habeat jam [Fig. 18] Cylindrus ad liquidum in gravitate rationem quam TV ad KV, et liquido ſupernatans ponatur inclinatus ita ut ſuperficies liquidi ſit OC; dico eousque inclinatum iri donec baſis YK contingat liquidi ſuperficiem in puncto K.

Sit enim planum TL parallelum baſi MV, et reliqua ad eum modum conſtruantur quo in caſu praecedenti conſtructa fuere, fiant verò KS, YR aequales ipſi NV, Eritque pene eadem demonſtratio, quae fuit modò.

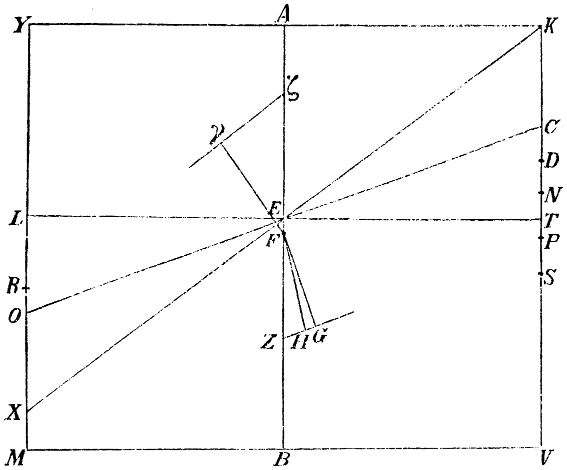
Nam quum rectangulum KNV ſive KSV ſive YRM ſit $\frac{5}{32}$ quadrati MV, rectangulum autem ſub YL et RM ſit $\frac{4}{5}$ rectanguli YRM, (nam ſicut KT eſt $\frac{4}{5}$ NV ſive KS, ita etiam YL eſt $\frac{4}{5}$ YR,) erit rectangulum ſub YL et RM aequale $\frac{4}{32}$ ſive $\frac{1}{8}$ quadrati MV; unde ſequitur perpendiculum Fγ incidere in ipſum centrum gravi-

---

[48]) „*a* Theor. 6. h. lib." [Huygens].
[49]) „*b* per conv. Theor. 5. h. lib." [Huygens].
[50]) „*c* Theor. 5. h. lib." [Huygens].
[51]) „*d* Theor. 1. lib 2." [Huygens].

tatis cunei KYX [a 52]). Hinc autem primò demonſtrari poteſt ut in caſu praecedenti, Cylindrum quidem non conſiſtere cùm liquidi ſuperficies eſt OC, ſed deſcendere verſùs K, donec angulus K ſit in ipſâ liquidi ſuperficie, atque ea ſit KX; ſecundò etiam hoc inde ſequitur, quòd cylindrus conſiſtat cùm liquidi ſuperficies eſt KX; quod erat demonſtrandum.

Fig. 18.



Denique ſi Cylindrus ſit ad liquidum in gravitate ut DK vel TK ad KV inverſa intelligantur duo praecedentia schemata (adeo ut Fγ tum fiat ea quae jungit centra gravitatis cylindri et partis demerſae) et eadem quae in praecedentibus caſibus erunt quoque demonſtrationes.

Si igitur Cylindrus ad liquidum in gravitate habeat rationem quam DV vel TV vel DK vel TK ad KV, &c. quod erat demonſtr.

4.

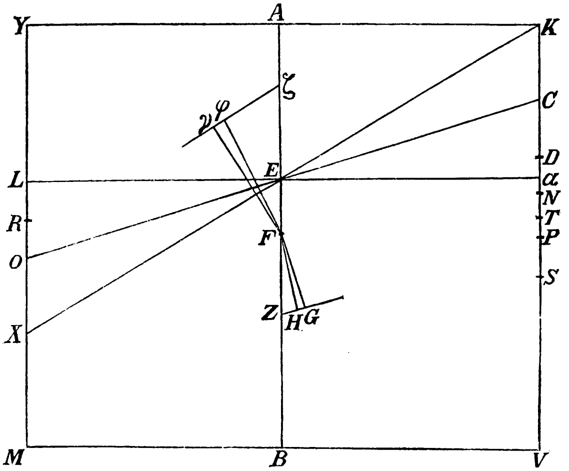
Secto rurſus latere KV [Fig. 19], ut ſupra, in punctis P, N, D, T, nempe in P bifariam, et in N ita ut rectangulum KNV aequetur $\frac{5}{32}$ quadrati MV, et KD ſit $\frac{4}{5}$ KN, KT autem $\frac{4}{5}$ NV, ſumptóque puncto α ubivis inter D et T; Si Cylindrus ad liquidum in gravitate proportionem habeat quam αV vel αK habet ad KV, et liquido ſupernatans, demerſâ baſe, ponatur inclinatus, ita ut neutra baſium contingat liquidi ſuperficiem; ulteriùs inclinabitur, quam ut alterutra baſium contingat eandem ſuperficiem in uno puncto. [53])

52) „a Theor. 6. h. lib." [Huygens].

53) La „Conclusio" nous apprend que dans le cas $\sqrt{\frac{5}{8}} < \zeta < \sqrt{\frac{2}{3}}$, toutes les fois que la densité spécifique ε se trouvera située entre les deux racines de l'une ou de l'autre des équations mentionnées dans la note 47 (ce qui veut dire que le point (ε, ζ) se trouve dans l'une des divisions PZJP ou PNMP du tableau de la note 37, p. 176, et qu'on aura donc $\zeta^2 > \frac{1}{2(5\varepsilon-1)(1-\varepsilon)}$ ou $\zeta^2 > \frac{1}{2\varepsilon(4-5\varepsilon)}$), alors le cylindre ne pourra prendre ni la position (1), ni la position (2). Elle laisse indécis dans lesquelles des positions (3), (4) ou (5) (voir la figure p. 87 de l'Avertissement, où le côté AB est supposé parallèle à l'axe du cylindre) l'équilibre se fera.

Habeat primò cylindrus ad liquidum in gravitate rationem quam αV ad KV, et ponatur inclinatus ita ut liquidi ſuperficies ſit OC; dico ulteriùs inclinatum iri quàm ut baſis YK liquidi ſuperficiem contingat in puncto K.

Fig. 19.



Fiat enim planum αEL parallelum baſi KY vel MV, et planum KEX abſcindat à cylindro cuneum KYX aequalem cylindro KL.

Porrò ſit H centrum grav. portionis OCVM, et ϕ centrum grav. cunei KYX, per quae agantur ZHG parallela OC, et $\zeta\phi\gamma$ parallela XK, in easque cadant ex F centro grav. cylindri, perpendiculares, FG ad ZG et Fγ ad $\zeta\gamma$: jungantur etiam FH et Fϕ; et denique fiat KS aequalis NV, et YR $\frac{5}{4}$ YL.

Quia igitur Cylindrus eſt ad liquidum in gravitate ut αV ad KV, ſive ut cylindrus αM ad cylindrum KM, atque ita etiam portio merſa OCVM ad cylindrum KM[a 54]), ſequitur portionem OCVM aequalem eſſe cylindro αM, ac proinde diametros αL, OC et KX in eodem puncto E ſecare axem AB. Porrò quum Kα, cui aequalis eſt YL, major ſumpta ſit quam KD, minor verò quam KT, erit YR ſive $\frac{5}{4}$ YL major quam KN ſive $\frac{5}{4}$ KD, minor autem quàm KS, quae (ſicuti VN) eſt $\frac{5}{4}$ KT; Ergo quum puncta N et S aequaliter diſtent à P, ſive medio lateris KV, punctum R minus diſtabit à medio lateris YM, quàm N vel S diſtant à P: quamobrem rectangulum YRM majus erit rectangulo KNV ſive $\frac{5}{32}$ quadrati MV, et rectangulum ſub YL et RM ſive $\frac{4}{5}$ rectanguli YRM, majus quam $\frac{4}{32}$ ſive $\frac{1}{8}$ quadrati MV: Ergo in lineâ $\zeta\gamma$ erit intercapedo $\zeta\gamma$ major $\zeta\phi$ [b 55]); unde conſtat duplum rectanguli BEA cum defectu $\frac{1}{2}$ quadrati XL majus eſſe quadrato AY[c 56]): ergo quum OL vel Cα minor ſit quàm XL vel Kα, erit duplum rectanguli AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadrati Cα multò majus quadrato AY vel AK, quare in lineâ ZG erit intercapedo ZG major ZH[d 57]). Ergo quum FG ſit perpendicularis ad ZG et ad liquidi ſuperficiem OC, ad eandem ſuperficiem non erit perpendicularis FH,

---

54) „*a* Theor. 4. lib. 1." [Huygens].

55) „*b* Theor. 6. h. lib." [Huygens].

56) „*c* per conv. Theor. 5. h. lib." [Huygens].

57) „*d* Theor. 5. h. lib." [Huygens].

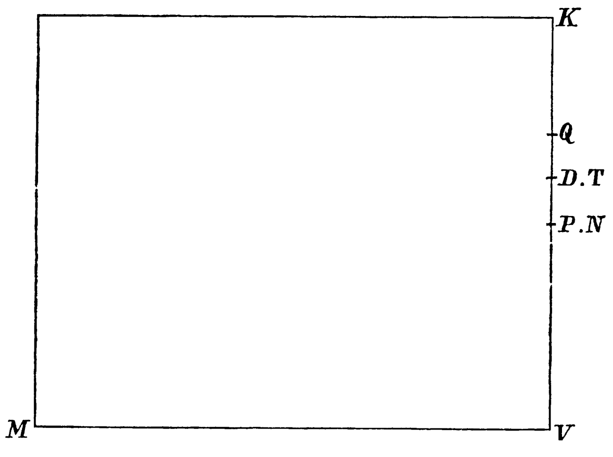
quae jungit centra gravitatis totius cylindri et portionis merſae OCVM; Ideoque Cylindrus inclinabit quò inclinat linea FH [e][58]), deſcendetque à parte K donec angulus K ſit in liquidi ſuperficie atque ea ſit KX. Sed neque tum conſiſtet; nam quum jam fuerit oſtenſum in lineâ $\zeta\gamma$, intercapedinem $\zeta\gamma$ majorem eſſe quam $\zeta\phi$, et Fγ ſit perpendicularis in $\zeta\gamma$ et in liquidi ſuperficiem, quae tum erit KX, in eandem ſuperficiem non erit perpendicularis Fϕ, quae jungit centra gravitatis totius cylindri et cunei enatantis KYX, ideoque Cylindrus inclinabit quò inclinat linea Fϕ [f][59]), mergeturque angulus K; quod erat demonſtrandum.

Quod ſi Cylindrus ad liquidum in gravitate rationem habeat quam αK ad KV, tum inverſa intelligatur praecedens figura, et demonſtratibur angulum K emerſurum eſſe ſupra liquidi ſuperficiem, neque differet demonstratio à praecedenti, niſi quod partes eae hìc merſae erunt quae prius enatabant.

Corollarium. 1.

Fuit hoc Theorema de Cylindro cujus quadratum à diametro baſis ad quadratum lateris minorem habet rationem quam octo ad quinque, majorem verò quam ſeſquialteram [$\frac{3}{2}$]; verùm ſi ejuſmodi ſit Cylindrus ut quadratum à diametro baſis ad quadratum lateris ſit ut octo ad quinque; tum diviſo latere KV ut ſupra in P, Q et N, incidet quidem punctum N in P, id eſt, in medium lateris KV, [60]) et ideo puncta D et T diverſa non erunt, latuſque KV ita divident ut pars verſùs V ſit ſeſquialtera reliquae verſùs K. Unde fiet ut Cylindrus ſemper inclinatus conſiſtat, ita ut neutra baſium contingat liquidi ſuperficiem, praeterquam ſi ad liquidum in gravitate rationem habeat quam DV vel DK ad KV, id eſt, quam tria vel duo ad quinque tum enim alterutra

Fig. 20.



[58]) „e Theor. 1. lib. 2." [Huygens].

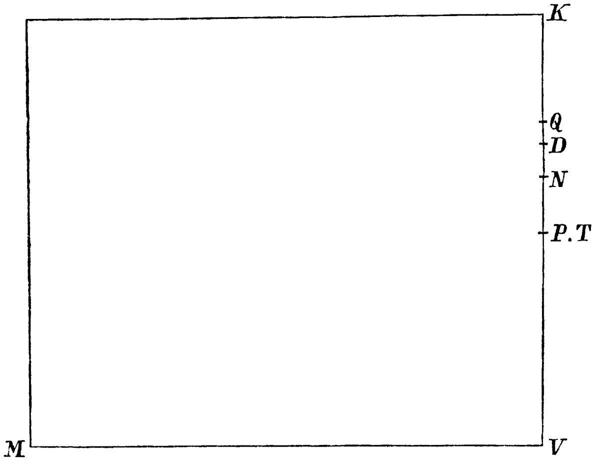
[59]) „f Theor. 1. lib. 2." [Huygens].

[60]) On a alors KN $\times$ NV $= \frac{5}{32}$ MV$^2 = \frac{5}{32} \times \frac{8}{5}KV^2 = \frac{1}{4}$ KV^2; mais de même KP $\times$ PV $= \frac{1}{4}$KV^2; donc, d'après „pr. 5. lib. 2. Eucl.", les points P et N doivent coïncider. Voir la note 38, p. 176.

baſium continget liquidi ſuperficiem in uno punſto: Vel ſi habeat rationem majorem quam QV vel minorem quam QK ad KV, tum enim rectus conſiſtet. [61])

Quòd ſi Cylindrus talis ſit [Fig. 21] ut quadratum diametro baſis, quadrati lateris ſit ſequialterum[62]); tum diviſo latere KV ut ſuprà in P, Q et N, erit KQ $\frac{1}{4}$KV[63]); NK $\frac{3}{8}$KV[64]); et ideo DK $\frac{3}{10}$ KV[65]), punctum verò T incidet in P, id eſt, medium lateris KV[66]). Unde fiet ut Cylindrus primò, rectus quidem conſiſtat, ſi ad liquidum in gravitate rationem habuerit majorem quam QV, vel minorem quam QK ad KV id eſt majorem quam ſubſequitertiam, vel minorem quam ſubquadr. [$\frac{1}{4}$] Secundo, inclinatus ita ut neutra baſium contingat liquidi ſuperficiem, ſi rationem habuerit ad liquidum in gravitate minorem quàm QV, majorem verò quam DV ad KV; vel ſi minorem quam DK, majorem verò quàm QK ad KV. Tertiò, inclinatus ita ut altera baſium liquidi ſuperficiem contingat uno in puncto, ſi fuerit ad liquidum in gravitate ut DV vel DK ad KV, id eſt, ut 7 vel 3 ad 10.

Fig. 21.



Quartò autem ſi ad liquidum in gravitate rationem habeat minorem quàm DV, majorem verò quam DK ad KV, tum ulteriùs inclinabitur quàm ut altera baſium liquidi ſuperficiem in uno puncto contingat; Praeterquam, ſi eam habeat rationem quam PV ad KV, id eſt ſubduplam, tum enim ita conſiſtet ut utraque baſis liquidi ſuperficiem contingat in uno puncto. [67])

---

[61]) Cette première partie du „Corollarium" s'explique facilement à l'aide de la représentation graphique de la note 37, p. 176. Il s'agit du cas où le point (ε, ζ) se trouve sur la droite EF.

[62]) Le point (ε, ζ) se trouve alors sur la droite GH du tableau de la note 37, ce qui expliquera aisément tout ce qui va suivre.

[63]) On a (voir la „Conclusio 2") $KQ \times QV = \frac{1}{8} MV^2 = \frac{3}{16} KV^2$, relation qui est réalisée par $KQ = \frac{1}{4} KV$, $QV = \frac{3}{4} KV$.

[64]) On a ici $KN \times NV = \frac{5}{32} MV^2 = \frac{15}{64} KV^2$; relation satisfaite par $KN = \frac{3}{8} KV$; $NV = \frac{5}{8} KV$.

[65]) Puisqu'on a par définition $KD = \frac{4}{5} KN$. („Conclusio 2").

[66]) Puisqu'on a $KT = \frac{4}{5} NV$, donc $= \frac{1}{2} KV$.

[67]) C'est le cas où le point représentatif (ε, ζ) tombe en P. Alors les deux bases circulaires du cylindre touchent l'une et l'autre la surface du liquide.

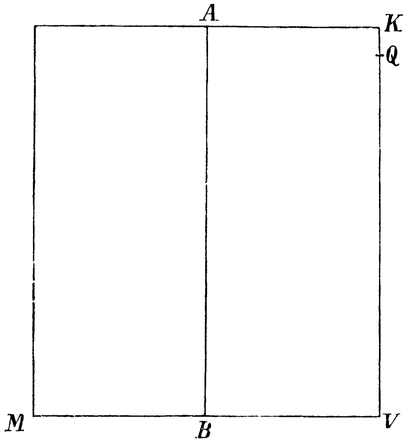
THEOREMA 12.

Cylindrus cujus quadratum à diametro baſis, minus eſt quam ſeſquialterum [$\frac{3}{2}$] *quadrati lateris, liquido ſupernatans demerſâ baſe, Aliquando rectus conſiſtet, Aliquando inclinatus ita ut neutra baſium contingat liquidi ſuperficiem; Aliquando eousque inclinabitur, ut altera baſium liquidi ſuperficiem contingat in uno puncto idque duobus caſibus; Ut plurimum denique ulterius adhuc inclinabit: Pro diverſâ proportione quam ad liquidum habebit in gravitate.* [68])

Concluſio 1.

Sit Cylindrus KM, cujus quadratum à diametro baſis MV, minus ſit quàm ſeſquialterum quadrati lateris KV. Axis autem ſit AB; Et diviſo latere KV in Q, ita ut rectangulum KQV aequetur octavae parti quadrati MV, habeat Cylindrus ad liquidum in gravitate proportionem majorem quam QV habet ad KV, vel minorem quam QK ad KV; dico, ſi liquido ſupernatans ponatur inclinatus, ita ut neutra baſium contingat liquidi ſuperficiem, rectum reſtitutum iri, ita ut axis AB ſit ad liquidi ſuperficiem perpendicularis.

Fig. 22.



Hoc enim Theoremate 8° h. lib. demonſtratum eſt de omnibus Cylindris qui inclinari poſſunt quare et huic convenit.

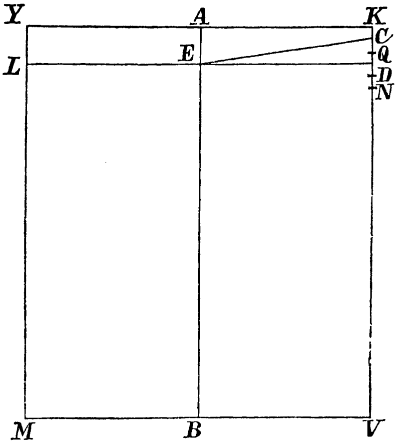
[68]) Le théorème nous apprend que pour $\zeta > \sqrt{\frac{2}{3}}$ les positions (1) et (2) p. 87 de l'Avertissement (AB parallèle à l'axe du cylindre) peuvent se réaliser entre certaines limites de la valeur de la densité ε. Pour d'autres valeurs de ε il arrive que ni l'une ni l'autre de ses positions ne soit une position d'équilibre stable.

Sous ces respects le cas $\zeta > \sqrt{\frac{2}{3}}$ ne diffère pas du cas $\sqrt{\frac{5}{8}} < \zeta < \sqrt{\frac{2}{3}}$; mais il n'en est pas de même pour certains détails qu'on trouvera dans les „Conclusiones." Voir les notes 70, 71 et 72.

2.

Latere KV diviſo ut ſuprà in Q, et praeterea punctis N et D, ita ut rectangulum quidem KNV aequetur $\frac{5}{32}$ quadrati MV, KD autem ſit $\frac{4}{5}$ ſegmenti minoris NK; ſi habeat Cylindrus ad liquidum in gravitate proportionem majorem quam DV, minorem verò quam QV habet ad KV; vel majorem quidem quam QK, minorem verò quam DK habet ad KV, et liquido ſupernatans ponatur inclinatus, ita ut neutra baſium contingat liquidi ſuperficiem; dico neque rectum reſtitutum iri, neque manſurum inclinatum, niſi cùm axis AB faciet cum liquidi ſuperficie angulum aequalem angulo ECα[69]), ſeu AEC, invento ut in Theoremate 10° hujus libri.[70]).

Fig. 23.



demonſtrari hoc poteſt eodem modo quo Concluſio 2^a Theorem. 11^i h. lib. verum ut appareat caſus hos quandoque locum habere poſſe, oſtendendum eſt, punctum D magis diſtare à K quam punctum Q. Quoniam itaque rectangu-

[69]) La lettre α manque dans la figure achevée (voir la page 90 de l'Avertissement). Elle se trouve dans la figure du manuscrit au point d'intersection de LE et KV.

[70]) La „Conclusio" nous fait connaître que la position (2) de la page 87 de l'Avertissement pourra se réaliser, dans le cas $\zeta > \sqrt{\frac{2}{3}}$, de deux manières: 1° toutes les fois que la densité est inférieure à la plus grande racine de l'équation $8\varepsilon(1-\varepsilon)\zeta^2 = 1$, mais supérieure à la plus grande racine de l'équation $2(5\varepsilon - 1)(1-\varepsilon)\zeta^2 = 1$; 2° si la densité est supérieure à la plus petite racine de l'équation $8\varepsilon(1-\varepsilon)\zeta^2 = 1$, mais inférieure à la plus petite de l'équation $2\varepsilon(4-5\varepsilon)\zeta^2$.

Formulée de cette façon elle diffère de la „Conclusio 2" du „Theorema 11"; mais la différence n'est pas essentielle, puisqu'on aurait pu exprimer les conditions de la réalisation de la position (2) pour toutes les valeurs possibles de ε, comme il suit: qu'on doit avoir $\zeta^2 > \frac{1}{8\varepsilon(1-\varepsilon)}$ et simultanément $\zeta^2 < \frac{1}{2(1-\varepsilon)(5\varepsilon-1)}$ et $< \frac{1}{2\varepsilon(4-5\varepsilon)}$.

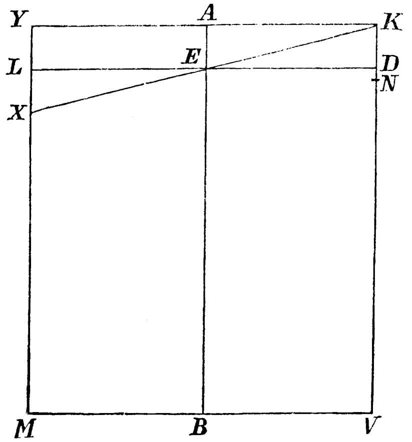
Appliquée à la représentation graphique de la note 37, p. 176, la „Conclusio" nous apprend que la position (2) sera réalisable si le point (ε, ζ) se trouve dans les divisions UJKV ou SRMT; d'où il suit, en résumant tous les „Theoremata" et „Conclusiones" qui se rapportent à cette position (2), qu'elle se présentera toutes les fois que le point en question tombe à l'intérieur de la division SRLKVUJZPNMT.

lum KNV continet $\frac{5}{32}$ quadrati MV, et KD eſt $\frac{4}{5}$ KN, continebit rectangulum ſub KD et NV $\frac{4}{32}$ ſeu $\frac{1}{8}$ quadrati MV; rectangulo autem ſub KD et NV, majus eſt rectangulum KDV, ergo idem hoc majus quoque quàm $\frac{1}{8}$ quadrati MV, ſive rectangulo KQV; quare neceſſariò KD major quam KQ. Poteſt itaque Cylindrus ad liquidum in gravitate habere rationem majorem quàm DV, minorem verò quam QV habet ad KV: poteſt et conſequenter habere majorem quam KQ, minorem verò quam KD habet ad KV; quae erant oſtendenda.

3.

Latere KV diviso ut in Concluſione praecedenti punctis N et D, nempe ut rectangulum KNV contineat $\frac{5}{32}$ quadrati à diametro baſis MV, KD, autem ſit $\frac{4}{5}$ KN ſegmenti minoris; Si habeat Cylindrus ad liquidum in gravitate rationem quam DV habet ad KV, vel quam DK ad KV, et liquido supernatans ponatur inclinatus ita ut neutra baſium contingat liquidi ſuperficiem; dico eousque inclinatum iri ultrò, ut alterutra baſium liquidi ſuperficiem contingat in uno puncto. [71])

Fig. 24.

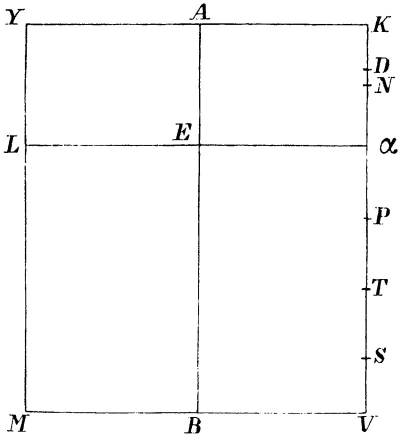


Hoc autem demonſtrari poſteſt eodem modo, quo Concl. 3ª Theorematis praecedentis 11i.

[71]) La „Conclusio" nous indique que, dans le cas $\zeta > \sqrt{\frac{2}{3}}$, le cylindre sera en équilibre dans une position intermédiaire entre les positions (2) et (3) ou (3)′ toutes les fois que la densité ε égale la plus grande racine de l'équation $2(5\varepsilon - 1)(1 - \varepsilon)\zeta^2 = 1$, ou la plus petite de l'équation $2\varepsilon(4 - 5\varepsilon)\zeta^2 = 0$; c'est-à-dire quand le point (ε, ζ) se trouve sur l'une des courbes JU ou MT de la représentation graphique de la note 37, p. 176.

Elle ne diffère donc de la „Corclusio 3" du „Theorema 11" p. 179, qui se rapporte au cas $\sqrt{\frac{5}{8}} < \zeta < \sqrt{\frac{3}{2}}$, que par ce qu'elle exclut les cas où ε égale la plus petite racine de la première ou la plus grande de la seconde de ces équations.

Fig. 25.



4.

Diviſo rurſus latere KV punctis N et D, nimirum ut rectangulum KNV contineat $\frac{5}{32}$ quadrati MV, KD autem ſit $\frac{4}{5}$ KN ſegmenti minoris. Si Cylindrus ad liquidum in gravitate rationem habeat minorem quam DV, majorem verò quam DK ad KV, et liquido ſupernatans ponatur inclinatus, ita ut neutra baſium contingat liquidi ſuperficiem, ulteriùs inclinabitur, quàm ut altera baſium contingat liquidi ſuperficiem in uno puncto. [72])

Dividatur enim praeterea latus KV bifariam in P, et quum manifeſtum ſit, Cylindrum ad liquidum in gravitate habiturum proportionem majorem ſubduplâ [$\frac{1}{2}$] vel non majorem, habeat primò majorem ſubduplâ, nempe quam αV habet ad KV (ſumpto punčto α intra D et P).

Dico ulteriùs inclinatum iri Cylindrum quàm ut baſis YK contingat liquidi ſuperficiem in uno puncto. fiat enim KT aequalis $\frac{4}{5}$ NV ſegmenti majoris, et KS aequalis ipſi NV. Quia igitur Cylindrus eſt ejusmodi, ut quadratum à diametro baſis MV ad quadratum lateris KV minorem habeat rationem quàm ſeſquialterum, id eſt, quam 3 ad 2, erit rečtangulum KNV ſive $\frac{5}{32}$ quadrati MV, minus quam $\frac{15}{64}$ quadrati KV; quamobrem KN minor erit quam $\frac{3}{8}$ KV, et NV ſive KS major quam $\frac{5}{8}$ KV [73]); et KT (quae est $\frac{4}{5}$ NV ſive KS) major quam $\frac{4}{8}$ ſive $\frac{1}{2}$ KV. Itaque punčtum α ſumptum inter D et P, cadet etiam inter D et T; Unde ſicut in Conclus. 4ª. Theor. 11ⁱ demonſtrari poterit, Cylindrum ulteriùs inclinatum iri quàm ut baſis YK in uno punčto contingat liquidi ſuperficiem; quod erat demonſtrandum.

Secundò, ſi Cylindrus ad liquidum in gravitate proportionem habeat non majo-

---

[72]) La „Conclusio" démontre que toutes les fois que, dans le cas $\zeta > \sqrt{\frac{2}{3}}$, la densité ε se trouvera située entre la plus petite racine de l'équation $2\varepsilon\,(4-5\varepsilon)\,\zeta^2 = 1$ et la plus grande de l'équation $2\,(5\varepsilon-1)\,(1-\varepsilon)\,\zeta^2 = 1$, qu'alors les positions (1) et (2) seront irréalisables.

En la combinant avec la „Conclusio 4" du „Theorema 11" on en peut déduire que ces positions seront irréalisables toutes les fois qu'on aura $\zeta^2 > \frac{1}{2(5\varepsilon-1)(1-\varepsilon)}$ ou $> \frac{1}{2\varepsilon(4-5\varepsilon)}$, c'est-à-dire, que le point (ε, ζ) tombera à l'intérieur de la division TMNPZJU de la représentation graphique de la note 37, p. 176.

[73]) Toujours à cause de „pr. 5. lib. 2. Eucl." Comparez la note 38, p. 176.

rem ſubduplâ, ea vel ſubduplâ erit vel minor ſubduplâ; et ſiquidem ſubduplâ, tum eadem adhuc quae in caſu praecedenti erit demonſtratio, nam ipſum punctum P cadit inter D et T.

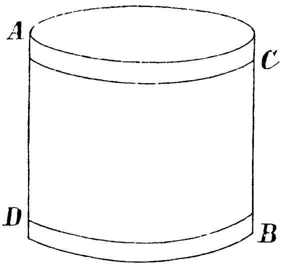
Si verò minor ſubduplâ, invertenda est praecedens figura et eadem rurſus erit demonſtratio, niſi quòd jam pars ea demerſa erit, quae priùs enatabat, et contra.

EXPERIMENTA.

Quoniam Parallelepipeda ſive trabes, et Cylindracea corpora ubique obvia ſunt, vel ſaltem facilia paratu, non dubito quin futuri ſint qui facto periculo de veritate horum Theorematum cognoſcere cupient; eos autem monitos velim ne temere credant ſuis experimentis, ut priùs perſpectum habeant ſolida, quibus ad ea utuntur, eſſe e materiâ quae per omnia gravitatis ſit aequalis. Et lignum quidem, quod tantae perfectionis ſit, reperiri poſſe, vix crediderim; metalla autem non niſi argento vivo ſupernatant, alioquin exiſtimo, haec magis accommoda fore.

Sed vitandis hiſce difficultatibus, fabricentur corpora intus cava, et tenui tantum conſtantia ſuperficie. deinde diſponantur introrſus pondera, hâc lege, ut omnium ſimul centrum grav. idem ſit, quod centrum corporis vacui, ſi foret ſolidum; atque ita pro lubitu gravia et levia habebuntur, additis vel demptis ejuſmodi ponderibus.

Fig. 26.



Exemplò ſit Cylindrus AB, tenui conſtans ſuperficie, in quo diſponantur ad oppoſitas baſes pondera paria, velut cylindri aequales è plumbo vel aliâ ponderoſâ materiâ, AC, BD, et plures ſi res exiget; dummodo obſervetur ut pares ſint, qui ab oppoſitis baſibus aeque diſtant; et erit eadem hujus liquido ſupernatantis poſitio, quae cijlindri ſimilis figurae et ponderis, qui totus ſolidus eſſet et è materiâ ſibi ipſi in gravitate per omnia ſimili.

FINIS.

APPENDICE I[1]

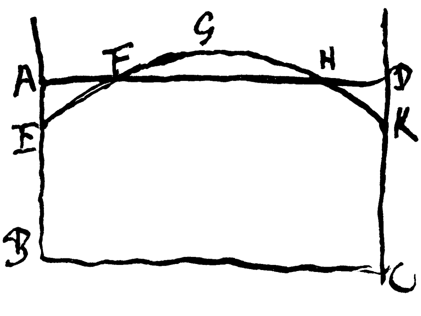
A L'OUVRAGE: DE IIS QUAE LIQUIDO SUPERNATANT.

[1650].

Si corpus unum vel plura moveri incipiant, ea deorſum moveri, id eſt ut centrum gravitatis propius fiat plano horizonti parallelo.

Si quotcunque corpora ſponte ſeu gravitate ſuâ moveri incipiant, centrum gr. ex ijs omnibus compoſita propius fieri plano horizonti parallelo.

[Fig. 1.]



Igitur quantum liquidi prius continebatur ſpatiis EAF, KDH quae ſunt infra planum AD, tantum nunc ſupra idem planum continetur ſpatio FGH; tunc vero cum adhuc componebatur ſpatiis EAF, KDH, centrum gravitatis habebat infra planum AD, at nunc dum occupat ſpatium FGH habet c. gr. ſupra planum AD, itaque nunc altius habet, at reliqui liquidi, quo plenum eſt ſpatium EFHKCB, centr. gr. eodem manet loco, Ergo omnis liquidi centr. gr. altius eſt quum continetur ſpatio EFGHKCB quam cum terminatur ſuperficie plana AD; Sed quia liquidum ſponte motum ponitur, debet centr. ſuae grav. eo motu deſcendiſſe, igitur ſimul deſcendit et aſcendit quod eſt abſurdum.

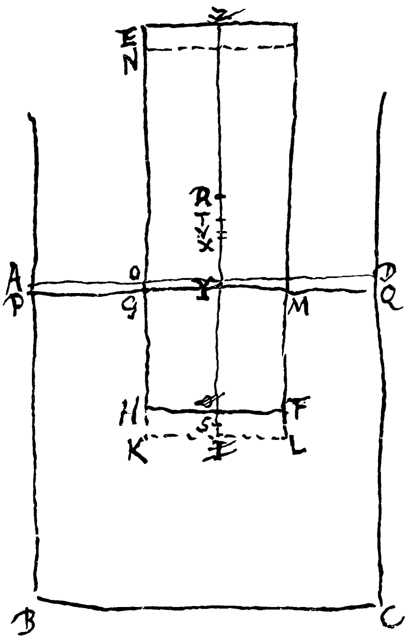
---

[1]) L'Appendice contient une autre rédaction du début du „Liber 1," jusqu' à la fin de la démonstration du „Theorema 4".

Corpus ſolidum levius liquido ita ei ſupernatat, ut pars merſa ad totum eam habeat rationem quam corpus habet ad liquidum in gravitate.

Eſto vas ABCD continens liquidum, cui impoſitum ſit corpus EF formam habens cylindri vel parallelipipedi, (nam quod de his oſtendetur, etiam reliquis corporibus convenit) eâ ratione, ut pars demerſa GHFM ſit ad totum ſicut corpus EF ad liquidum, in gravitate, id eſt ſicut gravitas corporis EF, ad gravitatem liquidi ſuae magnitudinis. Diço corpus EF neque ulterius demerſum iri neque altius emersurum.

[Fig. 2.]



Nam ſi fieri poteſt demergatur primò ulterius, ita ut jam occupet spatium NL, et pars liquidi quae continebatur ſpatio HL aſcendet in ſpatia AG, MD.

Quia igitur corpus EF ultro mouetur, oportet centrum gravitatis univerſae (quae componitur ex omni liquido et ex corpori ipſi impoſito) hâc poſteriori corporis poſitione inferius eſſe quam priori *a* [2]).

Verum utràque corporis poſitione contingit ſpatium PGKLMQCB [3]) eſſe plenum liquido cujus proinde centrum gr. manet eodem loco. Ergo debet centrum gravitatis reliquae altius eſſe corporis poſitione priori quandò ea gravitas conſtat ex corpore EF et parte liquidi HL, quam posteriori poſitione quum conſtat ex corpore NL et parte liquidi quae aſcendit in ſpm. AQ. Sit R c. gr. corporis EF, T vero c. gr. ejuſdem corporis quum occupat ſpatium NL; ſit item S c. gr. liquidi HL, et Y liquidi ejusdem quum aſcendit in spatium AQ. et diviſa intelligatur RS in punčto X ut ſit reciproce SX ad XR, ſicut gravitas corporis EF ad gravitatem liquidi HL, eandemque rationem habeat YV ad VT: Erit hâc ratione X c. gr. compoſitae ex corpore EF et liquidi parte HL; V vero c. gr. compoſitae ex corpore NL et parte liquidi AQ. Itaque ſecundum ea quae diximus deberet centrum X centro V altius eſſe, quod eſt abſurdum namque contrà oſtenditur altius eſſe V ipſo X.

---

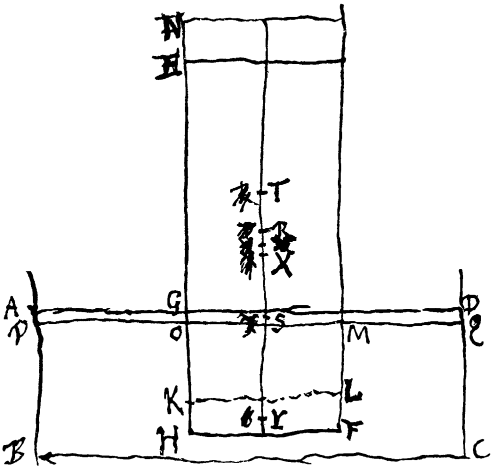
[2]) Huygens annota en marge „*a* Hyp. 1".

[3]) A propos de ce qui suit Huygens annota en marge: „1654 Vide an non melius aqua tantum ad latera corporis intelligatur, non undique circumfusa. Saltem si parti OM circumfunditur, etiam ipsi GF circumfundi necesse est?"

Proportionem liq[uid]i ad corpus ſupernatans in gr[avitat]e, id eſt gr[avit]atis liquidi m[a]gn[itudin]is EF ad gr.em corporis EF ſimilis poſita eſt ei quam habet EH ad GH, quam autem habet EH ad GH eam quoque habet gr[avit]as liq[uid]i m[a]gn[itudini]is EF ad gr. l[i]q[ui]di m[a]gn[itudin]is GF, ergo gravitas liq.i magn.is EF ad gr.em corporis EF eandem habet rationem quam ad gr. liq.i mgn.is GF; quare conſtat gr. liq.i mgn.is GF aequalem eſſe gr.i corporis EF.

Sicut autem gravitas liquidi magn.is GF ad grav. liquidi HL ita eſt latus GH ad HK, igitur ut GH ad HK ita grav. corporis EF ad gravitatem liquidi HL, atque ita proinde SX ad XR, et YV ad VT. quum verò diſtantia centrorum R, T, ſit aequalis corporis deſcenſui OI [4]), SY vero major quam HG dimidiâ HK et dimidiâ OG, major quoque erit ratio SY ad TR quam GH ad HK, vel quam YV ad VT, has enim easdem eſſe modo oſtenſum fuit. quare eſt componendo major ratio SV ad VR quam GH ad HK, ut autem GH ad HK ita diximus eſſe SX ad XR, ergo major eſt ratio SV ad VR quam SX ad XR, unde patet punctum V puncto X altius eſſe quod erat oſtendum. Non poteſt itaque corpus EF ulterius demergi: At jam ſi fieri poteſt altiùs emergat ut occupet ſpatium NL [Fig. 3], et liquidum ex ſpatio AQ deſcendat ad replendum ſpatium KF. Rurſus igitur debet centr. gr. univerſae moto corpore deſcendiſſe. Verum ſpatium POHFMQCB utrâque corporis poſitione plenum eſt liquido, cujus propterea centrum gr. manet eodem loco, Igitur centrum gravitatis reliquae, priori corporis poſitione cum conſtat ipſa ex corpore EF et parte liquidi AQ, debet altior eſſe quam poſteriori cum conſtat ex corpore NL et parte liquidi KF. dividatur ſpatium RS, quo diſtat centr. gr. corporis EF à centr. gr. liquidi AQ, in puncto X, ut ſit SX ad XR ſicut gravitas corporis EF ad gr. liquidi AQ, eâdemque ratione punctum V dividat ſpatium TY quo diſtant centra gr. corporis NL et liquidi KF.

[Fig. 3.]



Centrum igitur compoſitae gravitatis de quâ quaeritur priori corporis poſitione eſt X poſteriori V; deberetque rurſus X quam V altius eſſe, Quod eſt abſurdum;

[4]) Lisez HK ou FL, les lettres O et I étant biffées dans la figure.

nam contrarium ita oſtendemus. Gravitas liqu. magn.^{is} GF (ſicut ſupra hoc eodem Theor. demonſtratum fuit) aequat grav.^{m} corporis EF, ut autem gr^{as}. liq. magn.^{is} GF ad gr.^{m} liq.^{i} KF ita eſt latus GH ad KH, ergo ut GH ad KH ita quoque eſt gr.^{as} corp.^{is} EF ad gr.^{m} lqdi KF, atque ita proinde SX ad XR, et YV ad VT; Quum autem diſtantia centrorum RT neceſſario aequalis ſit corporis aſcenſui HK, at SY minor quam GH, (dimidiâ nimirum KH et dimidia GO) minor quoque erit ratio SY ad RT quam GH ad KH vel quam SX ad XR; quare et componendo minor ratio YX ad XT quam GH ad KH, ſed ut GH ad KH ita etiam eſt YV ad VT. Ergo minor eſt ratio YX ad XT quam YV ad VT, unde apparet punctum V puncto X altius eſſe, contrà quam oportebat. Nec poterit igitur corpus EF altius emergere, ſed nec alterius demergi poſſe oſtenſum fuit, Supereſt itaque ut liquido ſupernatet demerſa parte GF quod erat demonſtrandum.

APPENDICE II [1]

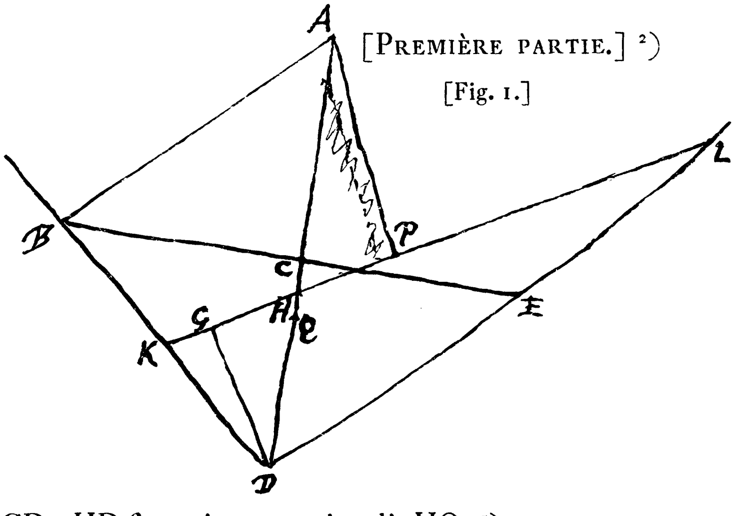
A L'OUVRAGE: DE IIS QUAE LIQUIDO SUPERNATANT.

25 JANVIER 1652.

25 Jan. 1652.

[PREMIÈRE PARTIE.] [2]

[Fig. 1.]



Angulum BDL in aequalia ſecat DA, ABD angulus rectus. triangulum KDL aequale triangulo BDE.[3] *AP perpend. in KL. Oſtendendum eſt AP majorem eſſe quam AC.* [4]

Sit DG perpend, in KL. et duabus CD, HD ſit tertia proportionalis HQ. [5]

---

[1]) Dans les deux premières parties de cet Appendice, que nous avons divisé en trois parties, Huygens s'occupe des conditions de stabilité de l'équilibre du cône de révolution homogène flottant dans une position verticale; le sommet en bas. Pour s'en convaincre on n'a qu' à comparer les figures et le texte avec ceux du „Theorema 14" (p. 115) du „Lib. 1". En effet, le point A des deux figures de la pièce présente représente le centre de gravité du cône. Il est donc identique avec le point G de la figure 17 (p. 115); de même les lignes BE et KL, DB et DE, AC et AP correspondent aux lignes NO et PQ, BN et BO, GM et GS de la même figure 17. En conséquence le triangle KDL doit toujours égaler le triangle isoscèle BDE.

La troisième partie de cet Appendice traite l'équibre du cône de révolution dans une situation inclinée.

[2]) Dans cette première partie Huygens' s'efforce à démontrer la stabilité de l'équilibre sous les

Quoniam vero aequalia ſunt $\triangle$u[m] iſosceles BDE, KDL $\triangle$°, angulusque utrique communis ad D. ex eo conſequuntur haec; nimirum quod $\square$ contentum duabus KD, DL aequale contento à BD, DE ſeu qu°. BD. et quod KD, DL utraque ſimul major utrâque BD, DE. triangula verò HDL, HDK ſimul aequantur triangulis CDE; CDB. comprehenditurque uniuscujusque lateribus angulus idem nempe dimidius anguli BDL. quare conſtat contentum ſub HD et tota KDL [6]) aequari contento ſub CD et tota BDE. ſicut igitur tota KDL ad BDE ita CD ad HD, ergo CD quoque major HD.

Erit autem et CD q. ad q. HD ut q. ex KDL tanquam una ad q. totius BDE, ſive ut quarta pars qu.i ex KDL ad q. BD hoc eſt $\square$ KDL. [7])

Sicut autem $\square$ KDL[8]) ad $\frac{1}{4}$ q. ex KDL[6]) ita $\square$ KHL ad $\frac{1}{4}$ q. KL, quia KL dividitur ſimiliter in H ut KDL in L [9]): Ergo q. HD ad q. CD ut $\square$ KHL ad $\frac{1}{4}$ q. KL. Verum qu. CD eſt ad q. DG ut $\frac{1}{4}$ q. KL ad qu. BC, (namque CD eſt ad DG ut KL ad BC [10]) quia aequalium $\triangle$orum BDE, KDL reciprocantur baſes et altitudines.) Ex aequo igitur erit q. HD ad q. DG ut $\square$ KHL ad qu. BC.

---

conditions formuleés au „Theorema 14", cité dans la note précédente, par la méthode qu'il a suivie partout dans le premier livre du traité présent, c'est-à-dire en partant des „Theoremata 6 et 7" (p. 103—104) du „Liber 1". Il doit donc démontrer qu'on a, sous ces conditions, AP > AC.

Or, il est clair que dans la figure 17 (p. 115) la ligne GN, qui correspond à la ligne AB des figures de l'Appendice présent, serait parallèle à la ligne DX, d'où il suit facilement que l'angle GNB, (l'angle ABD des figures présentes) sera, sous les conditions du „Theorema 14" plus petit que l'angle DFB = DEB; c'est-à-dire plus petit qu'un angle droit; supposition qu'on retrouvera plusieurs fois dans cette pièce.

Toutefois Huygens a débuté, en composant cette première partie, par supposer dans la Fig. 1 de cet Appendice ABD = 90°; soit parce que ce cas limite de la stabilité l'intéressait particulièrement; soit parce qu'il croyait pouvoir arriver facilement à la démonstration du cas général, celle du cas particulier une fois trouvée. Ainsi, après avoir achevé cette dernière démonstration, il a commencé par y apporter les changements nécessaires pour l'accommoder au cas plus général; mais alors, comme nous l'indiquerons dans la note 16, il a fait fausse route.

Dans ces circonstances il nous semblait préférable de donner la pièce telle qu'elle avait été conçue primitivement, mettant entre crochets les mots biffés après coup et indiquant dans les notes les changements apportés par Huygens pour la rendre applicable à la supposition plus générale ABD $\leqq$ 90°.

3) Voir la démonstration du „Lemma 2", p. 113—114, vers la fin.

4) En tête de la pièce on lit encore: „τὸ *Erat autem* in hac deme. non omittendum."

5) Lisez DQ.

6) C'est-à-dire KD + DL.

7) Huygens ajouta plus tard: „invertenda est ea ratio. [$\square$ KDL] ad $\frac{1}{4}$ q. KDL potius. et sic deinceps."

8) C'est-à-dire le rectangle qui a KD et DL pour côtés.

9) Lisez D.

10) Lisez BE.

Aequale eſt autem $\square$ KHL ei quo $\square$ KDL, cui aequale q. BD, excedit qu. DH. Ergo eſt qu. HD ad q. DG, ſicut id quo q. BD excedit qu. DH ad q. BC. Est autem quo. BD [aeq.] [11]) $\square$ CDA quia ang. ABD [rectus] [12]); quo. autem HD aeq. $\square$ CDQ, quia ut CD ad HD ita fecimus eſſe HD ad QD; at $\square$ CDA excedit $\square$ CDQ $\square^o$ ſub CD, QA, ergo erit quoque exceſſus q. BD ſupra qu. DH [aeq.] [13]) $\square^o$ ſub CD, QA. itaque qu. HD ad q. DG [ut] [14]) $\square$ CD, QA ad q. BC hoc eſt $\square$ DCA. [15]) Sicut autem $\square$ CD, QA ad $\square$ DCA ita eſt QA ad CA, ergo q. HD ad q. DG, ſive q. HA ad q. AP [ut] [16]) QA ad CA. Eſt verò CD major quam HD; ſuntque in continua prop.e CD, HD, QD; ergo erit CH exceſſus major quam HQ. CA vero minor eſt quam HA; minor igitur ratio QH ad HA quam CH ad CA. et componendo minor ratio QA ad HA quam HA ad CA; ratio igitur QA ad CA minor quam duplic. ejus quam habet HA ad CA; hoc eſt minor rationem qui. HA ad CA. [17]) ſed ratio QA ad CA [eadem] [18]) oſtenſa eſt quam qui. HA ad q. AP. minor igitur ratio q. HA ad q. AP quam ejuſdem q. HA ad q. AC. Quare q. AP majus eſt qu. AC, et AP major AC: q. er. d. [19])

---

[11]) Huygens remplaça „aeq." par „non majus". Voir la note 2. Mais lisez: „non minus."

[12]) Huygens remplaça le mot „rectus" par la phrase „non major recto, nam si rectus est aeq. est qu. BD $\square^o$ CDA."

[13]) Remplacé dans la seconde rédaction par „non minor", ce qui est vrai dans la supposition $ABD \leqq 90^\circ$,

[14]) Remplacé par „non majorem habebit rationem quam".

[15]) Huygens intercala ici: „oportuit ostendere $\square$ DCA non maj. q. BC;" mais nous verrons que ce changement ne suffit pas pour sauver la démonstratlon appliquée à la supposition $ABD \leqq 90^\circ$.

[16]) Remplacé par „non major quam". Mais cette conclusion n'est pas justifiée. Pour le montrer il suffit de remarquer, que si ε et ε' représentent des quantités ou positives, ou nulles, il a été démontré: $HD^2 : DG^2 = CD \times QA + \varepsilon : CD \times CA + \varepsilon'$, mais évidemment on n'a pas le droit d'en conclure $HD^2 : DG^2 \leqq QA : CA$. Dès ce moment la démonstration doit donc être considérée comme manquée pour ce qui concerne le cas plus général; mais elle reste rigoureuse pour le cas $ABD = 90^\circ$,

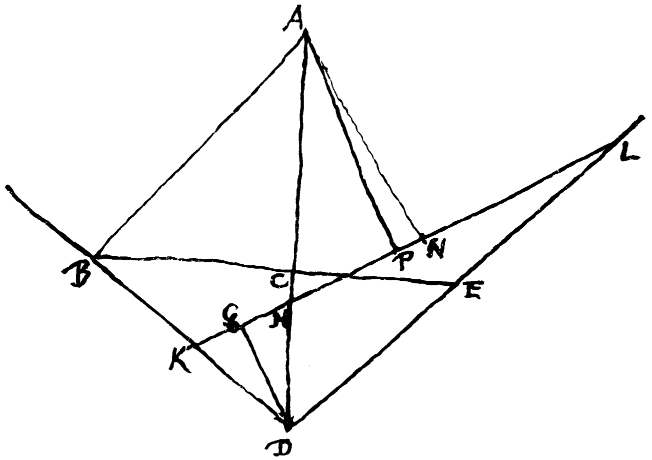
[17]) On a en effet: $\frac{QA}{CA} = \frac{QA}{HA} \times \frac{HA}{CA}$; mais comme on l'a vu $\frac{QA}{HA} < \frac{HA}{CA}$, donc aussi: $\frac{QA}{CA} < \frac{HA^2}{CA^2}$.

[18]) Remplacé par: „non minor". Comparez la note 16; il s'agit de la même relation prise en sens inverse.

[19]) Sur une feuille détachée on retrouve en partie l'analyse qui, évidemment, a servi de point de départ pour la partie qu'on vient de lire. Elle porte l'inscription „ad modum meum" (comparez la note 29). On y lit ensuite „GD ∞ y" (voir la fig. 1 du texte). De plus Huygens a représenté CD par b, $BD^2 = KD \times DL$ par ab, HD par c. On a alors $BC^2 = ab - bb$ et au moyen de la proportion $GD^2 : CD^2 = 4BC^2 : KL^2$ Huygens trouve facilement $\square KL = \frac{4ab^3 - 4b^4}{yy}$. De même, par la relation: $HD(KD + DL) = 2BD \times DC$, mentionnée à la page 196 du texte, on trouve $\square (KD + DL) = \frac{4ab^3}{cc}$. Ensuite la proportion $\square$ (KD +

[SECONDE PARTIE.] [20])

[Fig. 2.]



Pofitis iisdem quam prius [21]) *KL praeterea divifa per medium in N.* [22]) *Oftendendum quod HN major quam HP.*

1. [23]) Quadr. HD eft ad ▭ DHA ut DH ad HA, eâdem ratione ut DH ad HA ita quoque ▭ DHA ad qu. HA, ergo qu. DH ad ▭ DHA ut ▭ DHA ad qu. HA. quia autem angulus ABD non major recto, eft q. BD non minus ▭ CDA ideoque majus ▭° HDA, [24]) ac proinde major exceffus q.i BD seu ▭i KDL fupra q. HD hoc eft majus ▭ KHL exceffu ▭ HDA fupra qu. HD, id eft, major [25])

$+$ DL): ▭ KDL $=$ □ KL : ▭ KHL (où ▭ KHL $=$ ▭ KDL $-$ $DH^2 = ab - cc$) qu'on retrouve également dans le texte, conduit immédiatement à la relation $\frac{4ab^3}{cc} : ab =$ $= \frac{4ab^3 - 4b^4}{yy} : (ab - cc)$, d'où Huygens déduit $cc : (ab - cc) = 4bb : \frac{4ab^3 - 4b^4}{yy}$; puis il ajoute : „sed est etiam yy [GD^2] ad $ab - bb$ [BC^2] ut $4bb$ [$4CD^2$] ad $\frac{4ab^3 - 4b^4}{yy}$ [KL^2] ergo cc [DH^2] ad $ab - cc$ [▭ KHL] ut yy [DG^2] ad $ab - bb$ [BC^2] : proportion qu'on retrouve, sous un autre arrangement, dans le texte même à la dernière ligne de la page 196.

[20]) Dans cette seconde partie Huygens démontre la stabilité de l'équilibre sous les conditions du „Theorema 14" (p. 115) par la méthode d'Archimède; c'est-à-dire par la considération du couple qu'on obtient en appliquant au centre de gravité A du cône une force dirigée vers le bas et au centre de gravité N de la partie immergée une force égale dirigée vers le haut. Or, comme AP est la direction de la gravité dans la position inclinée du cône, il suffira de prouver qu'on ait HN $>$ HP, puisqu' alors le couple en question tendra à ramener l'axe DA du cône vers la situation verticale.

[21]) Voir la première partie; mais il s'agit ici de la supposition la plus générale, c'est-à-dire, ABD $\leqq 90°$. Comparez la note 2.

[22]) Par cette construction le point N coïncide avec le point R de la Fig. 17 (p. 115), c'est-à-dire, avec le centre de gravité de la partie immergée du cône.

[23]) La numération est de Huygens et nous avons arrangé la pièce qui suit en accord avec elle.

[24]) Puisque HD $<$ CD comme il a été démontré dans la première partie de cet Appendice.

[25]) Lisez „majus", puisqu'il s'agit de démontrer „▭ KHL majus ▭° DHA." En effet, le „majus" qui précède dans le texte remplace un „major", qui s'y trouvait primitivement; mais ce même changement a été oublié ici.

▭° DHA. Sicut autem qu. DH ad ▭ DHA ita erit hoc ipſum ad qu. HA. Ergo minor ratio eſt qu.i DH ad ▭ KHL quam hujus ad qu. HA. Sicut autem ▭ KHL ad q. AH ita erat excess. q.i CD ſupra q. HD ad q. HP [26]); ergo minor quoque ratio qu.i DH ad ▭ KHL quam exceſſus q.i CD ſuper q. HD ad q. HP. Erat autem ut q. HD ad ▭ KHL ita exceſſus q.i CD ſupra q. HD ad q. HN. [27]) Itaque minor ratio exceſſ. q. CD ſupra q. HD ad qu. HN quam ejuſdem exceſſus ad q. HP; Quare qu. HN erit majus q°. HP, et HN major HP. quod erat demonſtrandum.

2. Oſtenſum verò eſt in ſuperiori demne [28]) quod q. HD ad q. DG ut ▭ KHL ad q. BC; ideoque et per convers. rationis erit qu. HD ad qu. HG ſive qu. AH ad qu. HP, ut ▭ KHL ad exceſſum ▭ KHL ſupra q. BC, hoc eſt ad exceſſum qu.i CD ſupra q. HD, nam ▭ KHL una cum q. HD aequatur ▭ KDL, eidem huic ſive quo BD aequantur duo q.a BC et CD, ideoque quanto ▭ KHL majus qu.o BC, tanto minus eſt q. HD q.o CD. Erit autem et permutando et conver.o ▭ KHLad qu. AH ut exceſſus qu.i CD ſupra q. HD ad q. HP.

3. Oſtenſum eſt ſuprà, quod qu. HD ad qu. CD ut ▭ KHL ad $\frac{1}{4}$ q. KL hoc eſt ad q. ex KN. [29]) Invertendo igitur et per convers. rationis erit qu. CD ad exceſſum ejuſdem qu. CD ſupra q. HD ut qu. KN ad qu. HN, hoc enim aequatur exceſſus quadrati KN ſupra ▭ KHL. et permutando, qu. CD ad qu. KN ut exceſſus q.i CD ſupra q. HD ad q. HN. diximus autem eſſe q. HD ad q. CD ut ▭ KHL ad q. KN, ideoque erit permutando q. CD ad q. KN ut q. HD ad ▭ KHL. Verum ut q. CD ad q. KN ita erat exceſſus qu.i CD ſupra qu. HD ad q. HN; Ergo quoque ut q. HD ad ▭ KHL ita erit excess. qu.i CD ſupra q. HD ad q. HN. [30])

---

[26]) Voir, pour la démonstration, l'alinéa qui a été numéroté 2 par Huygens. Sur la feuille du manuscrit elle précédait celui numéroté 1.

[27]) Voir, pour la démonstration, l'alinéa numéroté 3.

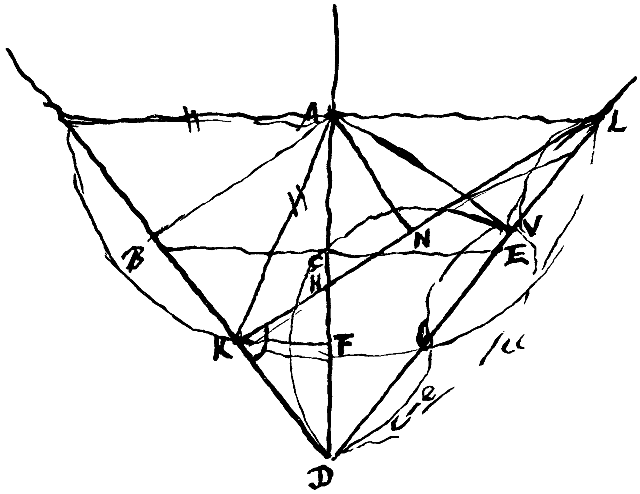
[28]) Voir encore, dans la première partie de cet Appendice, à la page 196, la dernière ligne du texte.

[29]) Voir, dans la première partie, p. 196, la phrase qui suit le signe 9).

[30]) Sur la feuille, mentionnée dans la note 19, on trouve encore, sous l'inscription „ad modum Archim." l'analyse incomplète qui suit. Partant de la proportion □ (KD + DL) : ▭KDL = □ KL : ▭ KHL, Huygens, employant les notations de la note 19 à l'exception de l'y qui représente maintenant la ligne HN, écrit, comme il avait trouvé auparavant, $\frac{4ab^3}{cc}$ pour □(KD + DL), ab pour ▭ KDL: ensuite $\frac{4ab^3}{cc} - 4bb$ pour □KL (formule correcte qu'on déduit aisément de la proportion par laquelle l'alinéa numéroté 3 débute, puisque ▭ KHL

[Troisième partie.] [31])

[Fig. 3.]



$$\text{AD} \propto a;\ \text{AL} \propto b;\ \text{CD} \propto n\ ^{32)}$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{AD } (a) \text{ ad CD } (n) \text{ ut CD } (n) \text{ ad FD} \left(\frac{nn}{a}\right) \\ \text{ex AD } (a)\end{array}\right\}^{33} \text{s.}$$

$$\overline{a - \frac{nn}{a}\ \text{AF}}$$

$= ab - cc$) et enfin pour $\square$ KHL $\frac{ab^3}{cc} - bb - yy$; ce qui est exact, puisqu'on a : KH$\times$HL $=$ (KN $-$ HN) $\times$ (LN $+$ HN) $= \frac{1}{4}$ KL^2 $-$ HN^2. Ainsi il obtient la proportion $\frac{4ab^3}{cc} : ab = \left(\frac{4ab^3}{cc} - 4bb\right) : \left(\frac{ab^3}{cc} - bb - yy\right)$, qui amène successivement: $bb : cc = \left(\frac{ab^3}{cc} - bb\right) : \left(\frac{ab^3}{cc} - bb - yy\right)$; $(bb - cc) : bb = yy : \left(\frac{ab^3}{cc} - bb\right)$; $\left(\frac{ab^3}{cc} - bb\right) : bb = yy : (bb - cc)$ et enfin $(ab - cc) : cc = yy : bb - cc$; ou bien $\square$ KHL : $\square$ HD $=$ $\square$ HN : $\square$ CD $-$ $\square$ HD ce qui constitue la relation par laquelle le texte finit.

[31]) Dans cette troisième partie, très peu achevée quant à la forme, Huygens détermine la condition sous laquelle un cône de révolution pourra flotter, le sommet en bas, dans une position inclinée, de manière que le cercle de base touche justement à la surface du liquide.

En effet, si l'on se reporte à la figure 17, p. 115, du „Liber 1", on voit que dans cette figure pour une telle position la surface HI du liquide passera par le point C; mais, puisque PQ passe par le centre de gravité R du cône HIB, on a toujours $\frac{\text{BI}}{\text{BQ}} = \frac{3}{4} = \frac{\text{BD}}{\text{BG}}$. On aura donc pour la position que nous considérons: $\frac{\text{BC}}{\text{BQ}} = \frac{\text{BD}}{\text{BG}}$, d'où il suit que GQ sera parallèle à DC.

Or, la ligne PQ de la figure 17 est représentée dans les figures de l'Appendice présent par

$$\text{AD } (a) \text{ ad AL } (b) \text{ ut DF } \left(\frac{nn}{a}\right) \text{ ad FK } \left(\frac{bnn}{aa}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{bbn^4}{a^4} \ \square \ \text{FK} \\ \dfrac{a^4 - 2aann + n^4}{aa} \ \square \ \text{AF} \end{array}\right\} \text{a.}$$

$$\square \text{ AL per } a^4. \ bba^4 \infty bbn^4 + aan^4 - 2a^4nn + a^6 \text{ q. AK per } a^4$$

$$2a^4nn + bba^4 - a^6 \infty bbn^4 + aan^4$$

$$\frac{2a^4nn + bba^4 - a^6}{bb + aa} \infty n^4$$

Sit [34]) AV perp. in DL ergo $\square$ DV $\infty \dfrac{a^4}{aa + bb}$ sit hoc ∞ cc ergo:

$$2ccnn + bbcc - aacc \infty n^4$$

$$nn \infty cc - \sqrt{c^4 + bbcc - aacc} \quad \text{sed q. AV } \infty aa - cc \infty dd$$

$$nn \infty cc - \sqrt{bbcc - ddcc} \quad \text{sed } bb - dd \infty \text{ q. VL } \infty ee$$

$nn \infty cc - ec.$ [35])

KL et le point G par A. Dans la figure présente AL devra donc, pour la position considérée, être perpendiculaire sur AD. En même temps l'équilibre exige, d'après le „Theoreme 1" du „Liber II" (p. 122) que la ligne AN (où N représente le centre de gravité de la partie immergée) soit perpendiculaire au niveau du liquide, donc aussi à KL. D'autre part on a KN = NL, d'où il suit AK = AL et c'est cette relation qui va servir à déterminer la condition cherchée.

[32]) Comme partout dans les figures de cet Appendice, le point C représente le centre de gravité de la partie immergée dans la situation verticale de l'axe du cône; A celui du cône entier. La densité du cône sera donc à celle du liquide comme n^3 à a^3. De plus on aura DK $\times$ DL = = BD $\times$ ED.

[33]) On a, d'après la note précédente, LD : ED = BD : KD; mais LD : ED = AD : CD et BD : : KD = CD : FD; donc aussi AD : CD = CD : FD.

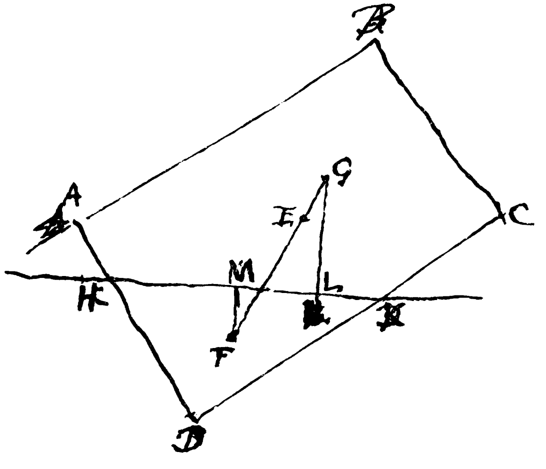
[34]) Ayant trouvé la relation cherchée, Huygens se propose de la simplifier et d'en déduire la construction. Ajoutons que la résolution directe de l'équation quadratique en n^2 amène les racines $n^2 = a^2$ et $n^2 = \dfrac{a^2(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2}$. La première de ces racines conduit à la supposition que la densité du cône est égale à celle du liquide, auquel cas en effet, LK se superposant avec AL, la condition AK = AL est satisfaite. Le cône, il est vrai, pourra flotter alors avec le cercle de base tout entier au niveau du liquide; mais ce n'est pas là la solution désirée. Celle-là est obtenue au moyen de la seconde racine.

[35]) En effet, on vérifie aisément qu'on a : $cc - ec = \dfrac{a^2(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2}$. De plus, on voit que l'autre solution $cc + ec$ = DV $\times$ DL = AD^2, mène à $n = a$. Ajoutons que la construction n'est pas achevée dans la figure. Le demi-cercle, qu'on voit tracé sur DV comme diamètre, y pourra servir, mais elle ne passera pas par le point C.

APPENDICE III [1]

A L'OUVRAGE: DE IIS QUAE LIQUIDO SUPERNATANT.

[1650].



Cadant enim in liquidi ſuperficiem perpendiculares è centris G et F quae erunt GL, et FM. [2]

et manifeſtum eſt diverſa fore puncta L et M quoniam linea FG non ſecat liq. ſup.m ad angulos rectos.

Conſideratis autem ſeparatim corporis partibus, apparet [3] quidem HABÇK partem incumbere parti merſae HDK, atque ita eam premere ac ſi tota ejus gravitas ſuperſtaret puncto L; quoniam perpend. GL descendit e centro

[1]) Cet appendice contient une autre démonstration du „Theorema 1", p. 122. du „Liber II."

[2]) Le manuscrit fait suivre encore la phrase biffée: „Quoniam igitur et has quidem non posse in eandem lineam rectam incidere manifestum est."

[3]) Le manuscrit faisait suivre primitivement les phrases suivantes, biffées depuis: „quidem HDK partem quae infra liq. sup.m demersa est, esse leviorem liquido suae molis ideoque eam conaturam emergere nisi centrum suae grav. F ascensu prohibeatur, id est, nisi pars ipsa prematur in puncto quod sit in perpend.m FM. atqui à pondere partis HABCK premitur eâ ratione, ac si totam hujus gravitas incumberet super puncto L; itaque constat ab hoc presso nihil non impediri centrum F quo minus ascendat at contra constat hoc ipso adjutum iri." De même on lisait en marge„ primo pars ABCD. ſimiliter HDK."

gr. Rurſus pars merſa HDK quoniam levior eſt liquido ſuae molis conatur aſcendere, atque eâ ratione premit partem HABCK quaſi tota levitatis vis collecta foret in puncto M, quoniam hoc ad perpend. ſuperſtat centro gr. F. Itaque ſic ſe res habet, ac ſi corpus ABCD deorſum premeretur in puncto L, et ſurſum in punctum M, quo fieri neceſſe eſt ut circumvertatur in eam partem ad quam inclinat linea FG; quod erat dem.

APPENDICE IV [1])

A L'OUVRAGE: DE IIS QUAE LIQUIDO SUPERNATANT.

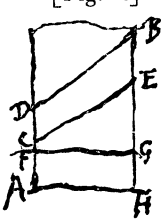
[1650].

Pars Cylindri quae inter duo plana parallela, cylindrum oblique ſecantia continetur, fruſtum cylindri vocatur.

Pr[opositio]. 1. *Fruſtum cylindri aequale eſt cylindro ejuſdem cylindri parti, qui latera habeat lateribus fruſti aequalia.*

A cylindro AB abſciſſa ſint fruſtum DE et cylindrus FH, quorum latera DC, FA ſint aequalia ideoque et HG, EB. dico fruſtum DE aequale eſſe cylindro FH. additâ enim utrinque ÇF aequalibus AF et CD erit AC aequ. FD; eademque ratione HE aequ. GB. Habet itaque cylindri portio ACEH latera lateribus portionis FDBG aequalia, verum et baſes AH, EC baſibus FG, DB aequales et ſimiliter poſitas, itaque manifeſtum eſt ipſas portiones ACEH, FDBG inter ſe ſimiles et aequales eſſe, quare ablata portione communi FCEG, remanet fruſtum DE aequale cylindro FH, q. er. dem.

[Fig. 1.]

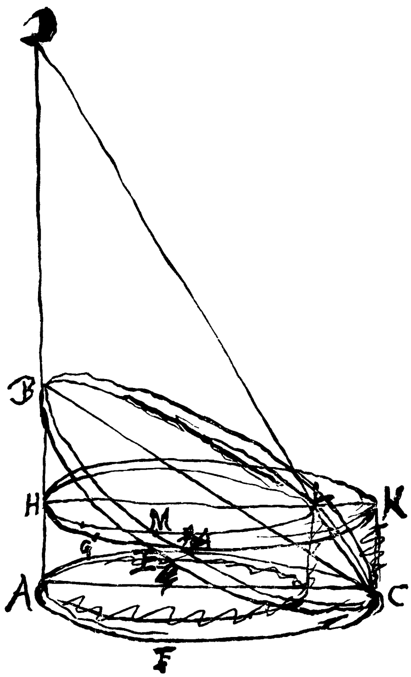


Pr. 2. *Si ſuper cunei Cylindrici baſe circulari conus ſcalenus conſtituatur cujus vertex ſit in producto cunei latere, cadet cunei convexa ſuperficies extra conicam, eritque coni pars ſolida quae intra cunea comprehenditur, ipſo cuneo minor.*

Eſto Cuneus cylindricus ABC [Fig. 2] et ſuper ejus baſe circulari AFC conſtitu-

[1]) L'appendice contient une déduction, d'après les méthodes des anciens, du „Theorema 3," p. 160, du „Liber III" de l'ouvrage: „De iis quae liquido supernatant." Comparez la note 2 du „Liber" cité, p. 158 du Tome présent.

[Fig. 2.]



tus conus ADC cujus vertex D sit in producto cunei latere AB faciens in plano BEC sectionem ellipsin BMC. dico cunei convexam superficiem cadere extra superficiem coni ADC.

Sumatur enim in cunei superficie convexa quodcunque punctum G, constructoque super baseo AFC cylindro AK, secentur simul hic et conus plano HGK, per punctum G transeunte, quodque aequidistans basi AC; fiet igitur cylindri sectio circulus HEK, coni vero, circulus minor HML qui priorem intus contingit in puncte H lateris BA. Itaque major minorem undique comprehendit, et punctum G quod est in majori circumferentia HEK erit extra minorem HML, circulus autem HML est plani per HGK sola pars quae intra conum ADC continetur. Igitur punctum G erit extra conum ADC. Eadem erit demonstratio si alia puncta in cunei convexa superficie sumantur; tota igitur est extra conum.

Atqui hinc quoque manifestum est ellipsin BMC ab ellipsi BEC quae in eodem plano et circa eandem diam. est contineri, quum sit BEC circumf. in superficie convexa cunei at BMC in superficie conica: Et patet cuneum cylindricum coni parte quam comprehendit majorem esse, duabus figuris solidis, qualis est ea quae continetur superficiebus curvis BECFA, BMCFA et planâ BMCE.

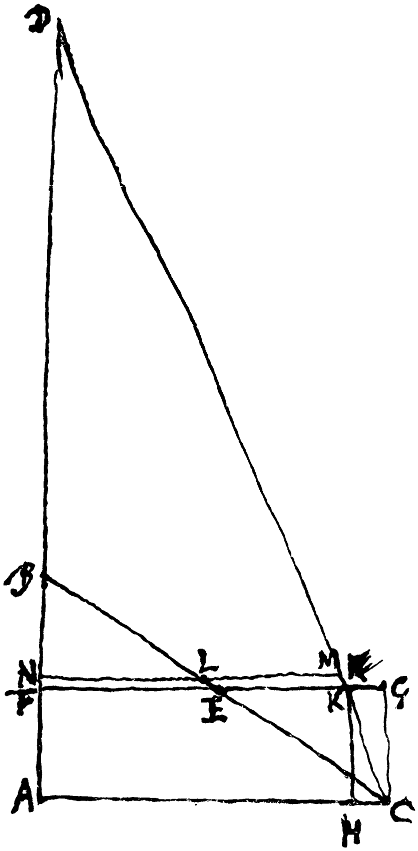
PR. 3. *Dato Cuneo Cylindrico, potest super ipsius base circulari Conus scalenus constitui verticem habens in producto cunei latere cujus pars intra cuneum comprehensa deficiat à cuneo magnitudine figura solidâ, quae minor sit quacunque datâ.* [2])

Detur cuneus cylindricus ABC [Fig. 3] cujus basis circularis sit circa diametrum AC, elliptica vero circa diametrum BC. diviso AB latere bifariam in F, exstruatur super base AC cylindrus AFGC; quem constat cuneo aequalem fore; diameter vero superioris basis FG secabit quoque BC per medium in E. denuo intra cylindrum AG extruatur cylindrus AK qui ab ipso AG

---

[2]) Huygens aura recours à cette proposition dans la démonstration de la „Pr. 6.'

Fig. 3.



deficiat ſolido minore quam ſit magnitudo data. diametri vero baſium AH, FK conveniant cum diametris AC, FG, ductaque CKD quae conveniat cum producto latere AB, intelligatur conus ſcalenus ADC; dico partem hujus quae intra cuneum ABC continetur ab eodem cuneo deficere ſolido minore quam ſit data magnitudo.

Sit enim inter FE et EK media proportion. LM aptata intra lineas BC, DC ut parallela ſit diametro AC, eaque producatur usque in latus AB in N, et ſecundum MN ducatur planum baſi AC aequidiſtans quod conum circulo ſecabit, conſtat autem hoc magis à baſi AC diſtare debere quam planum FG, quoniam LM major eſt neceſſario quam EK. Cum autem quadr. LM aequale ſit rect. FEK et FK, LM parallelae ſint, ſequitur ſi per E punctum deſcribatur in plano ADC hijperbole ad aſymptotos DA, DC, eam contactum iri à recta ML in puncto L, [3] ſed eadem quoque tangetur à recta BC in puncto E quoniam ibi bifariam dividitur [4], itaque ſecundum ea quae in primo libro [5] oſtenſa ſunt, erit abſciſſor coni BDC aequalis cono NDM quare et partes coni ABC, ANMC erunt aequales, pars autem ANMC manifeſtò major eſt cylindro AK; itaque minor eſt exceſſus cylindri AG ſuprà partem coni ABC quam ſuprà cylindrum AK. at Cylindro AG aequalis eſt cuneus cylindri ABC, ergo minor quoque eſt exceſſus cunei ABC ſupra coni partem ABC quam cylindri AG ſupra cylindrum AK, ideoque et minor data ſolida magnitudine. quod erat oſtend.

---

3) Il y quelque confusion dans cette partie de la démonstration. En effet, pour que l'hyperbole en question touche la ligne NM au point L, on doit construire cette ligne NM parallèle à la base AC de telle manière qu'on ait $NL^2 = LM^2 = FE \times EK$; mais alors le point L se trouvera à gauche de la ligne BC. D'ailleurs la démonstration reste valide, puisqu'elle exige seulement que la ligne NM se trouve au-dessus de la ligne FK, ce qui a lieu aussi bien avec la ligne NM dont nous venons d'indiquer la construction qu'avec la ligne NM du texte.

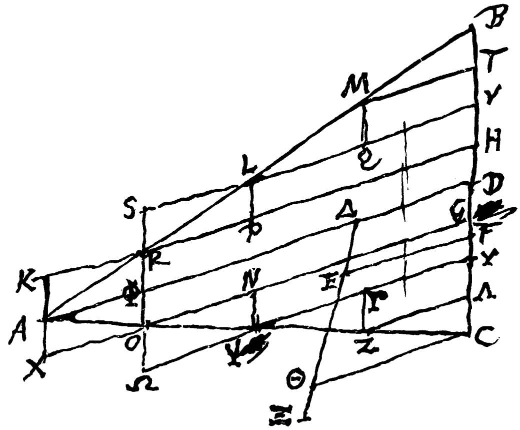
4) On lit encore en marge: „9. 2 con." Voir à la page 46 verso des „Coniques" d'Apollonius (éd.Comm., citée p. 6 du Tome I, note 4): „Si recta linea asymptotis occurrens ab hyperbola bifariam secetur; in uno tantum puncto sectionem contingit."

5) Voir le „Lemma 2" à la page 113 du Tome présent.

Pr. 4. *Cunei Cylindrici centrum gravitatis eſt in linea rectâ quae à contactu baſium ad medium latus ducitur.* [6])

Eſto Cuneus Cylindricus plano ABC in aequales partes et ſimiles ſectus cujus cunei baſis circularis circa diametrum AC, elliptica vero circa diametrum AB; ab harum contactu A ducatur AD ad medium latus BC. dico in linea AD reperiri centrum grav. cunei ABC. Si enim non eſt in linea AD, ſit alibi in plano ABC nimirum in E; (nam quod ſit in plano ABC manifeſtum eſt quum ab hoc cuneus in partes duas oppoſitas aequales et ſimiles dividatur) et ducatur EF lineae AD aequidiſtans. Porro ſecetur cuneus plano ſecundum AD erecto ſuper planum ABC, (quae ſectio ellipſis erit) et lineae DB, DC eousque continuè bifariam ſecentur, donec habeatur tandem linea minor quam DF, DH, et à ſectionis punctis plana exeant HR, VL &c. plano ſecundum AD aequidiſtantia inde autem ubi haec ellipſi AB occurrunt et circulo AC, ducantur alia plana MQ, LP &c. aequidiſtantia plano quod cuneum ſecundum latus BC contingeret, quae quidem omnia rectangula efficere conſtat. Et erit hac ratione cuneo inſcripta quaedam figura ex fruſtorum cylindri ſegmentis conſtans, et quodque ipſa reſiduum relinquit erit aequale fruſtro cylindrico DX. quod ut apertum fiat compleantur fruſtorum ſegmenta quaecunque inter plana VL, YΨ medias baſes AB et AC ſecantia continentur, ut fiant fruſtra integra DK, DX, ſegmenta verò fruſtorum SH, OY aequalia ſegmentis RD, ΦG. Certum eſt itaque partem ſolidam AKR nihil prorſus differre a parte BTM neque partem RSL à parte LQM, quum iisdem ſuperficiebus ſimiliter etiam ſed ſubcontrarie poſitis contineantur. ideoque omnes partes triangulares AΦR, RPL, LQM, MTB aequari partibus KΦ et SP; eâdem quoque ratione triangulares AΦO, ΟΝΨ, ΨΓΖ, ΖΛC, aequantur partibus XΦ, ΩN; atqui haſce ipſas XΦ et ΩN manifeſtum eſt aequari dimidio fruſtri XD ſicut et KΦ, SP; igitur totum reſiduum ex partibus triangularibus conſtans. aequale eſt fruſto XD. Porro autem in Figurâ cuneo inſcriptâ binae quaeque partes ſibi invicem reſpondent, ut qualis fruſti cylindrici pars eſt MV talis et ΓΛ eadem magnitudine et figura et qualis LH talis quoque NY atque ita de caeteris, et omnes à

Fig. 4.



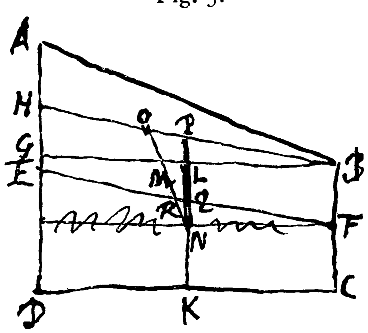
[6]) Comparez le „Theorema 1" du „Liber III", p. 159 du Tome préſent.

plano ABC dividuntur in duas partes oppofitas, inter fe fimiles et aequales, unde manifeftum eft omnium quoque centra gravitatis in eodem plano ABC reperiri; itaque unius partis centr. gr. erit in parallelog. MV, et partis oppofitae in parallelogr. ΓΛ, verum et fimiliter pofita erunt centra haec in dictis parallelogrammis, eoque aequaliter diftabunt à lineâ AD, igitur quae utrumque centrum conjunget à linea AD bifariam dividetur fed ubi illa bifariam dividetur ibi erit compofitae magnitudinis ex duabus aequalibus centrum gravitatis, ergo compos. magn.is ex partibus folidis MV et ΓΛ centr. gr. erit in linea AD; eadem ratione mag.is comp.ae ex partibus LH, NY erit centr. gr. in linea AD, ut et compofitae ex partibus RD, ΦG itaque totius figurae cuneo infcriptae centr. grav. eft in linea AD; Sit hoc Δ et jungatur ΔE, et producatur et ducatur CΘ ipfi lineae DA aequid. quae proinde cadet extra cuneum.

Quia igitur cuneus ABC aequalis eft cylindro habenti bafin circ. AC et altitudinem CD[7]); fruftum verò DX aequ. cylindro eandem bafin AC habenti et altit.m DG, fequitur cuneum ABC effe ad fruftum DX ut CD ad DG. DF autem major eft quam DG; igitur CD ad DF vel ΘΔ ad ΔE minorem habet rationem quam cuneus ad fruftum DX five refiduum ex partibus triangularibus conftans, quare et dividendo minor erit ratio ΘE ad EΔ quam figurae cuneo infcriptae ad dictum refiduum; fit itaque ΞE ad EΔ ficut infcripta figura eft ad idem refiduum. Ergo quum E pofitum fuerit c. gr. totius cunei, Δ autem fit c. gr. figurae infcriptae, erit refidui c. gr. punctum Ξ, quod effe nequit nam plano quod per Ξ agetur ellipfi circa AD aequidiftans in eandem partem erunt omnes partes triang.es e quibus refiduum componitur.

Pr. 5. *Portionis Cylindri centr. gr. eft in linea recta quae à medio majoris lateris ducitur ad medium minoris.* [8])

Fig. 5.



Efto portio cylindr. cujus latera AD maius et BC minus, fecundum quae fecta intelligatur plano ABCD, ipfa vero latera bifariam fecentur et fectionum puncta jungantur linea EF, dico in hâc reperiri c. gr. Portionis propofitae. Sit enim fi poteft extra lineam EF in M (erit autem centrum M in plano ABCD quum ab hoc portio dividatur in duas partes oppofitas, fimiles et aequales) et dividatur portio plano fecundum GB quod bafi DC aequidiftet in cuneum AGB et cylindrum GC; Porro ducatur linea BH ad mediam AG, fitque cylindri GC axis LK, in

[7]) Comparez le dernier des „Manifesta" du „Liber III," p. 159 du Tome présent.
[8]) Comparez le „Theorema 2" du „Liber III," p. 160 du Tome présent.

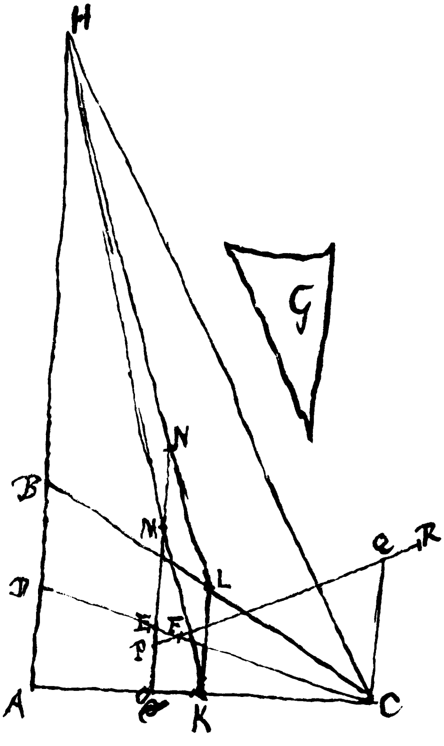
cujus medio ejuſdem centr. gr. N. Jungatur NM et producatur uſque dum occurrat lineae BH in O, eòdem que producatur axis KL qui ei occurat in P, lineam autem EF ſecet NO in R, et KP in Q.

Quia igitur M eſt c. gr. totius portionis, N vero cylindri GC, erit partis reliquae nimirum cunei AGB c. gr. in producta NM, ſed idem quoque in linea BH reperiri oſtenſum eſt [9]), itaque neceſſario cunei ABC c. gr. eſt punctum O, eritque reciprocè MN ad MO, ſicut cuneus AGB ad cylindr. GC. Porro quum AE ſit aequalis dimidiae AD, id eſt aequalis dimidiae AG cum dimidia GD, erit ablata AH reliqua HE aequalis dimidiae GD id eſt BF; igitur parallelae ſunt HB, EF quare erit NR ad RO, ſicut NQ ad QP id eſt PL ad LN; ut autem PL ad LN ita eſt HG ad GD, (quoniam utraque utriuſque eſt dupla), et ut HG ad GD ita eſt cuneus AGC ad cylindrum GC; ergo ſicut cuneus AGB ad cylind. GC ita eſt NR ad RO; ſed ſic etiam eſſe NM ad MO oſtenſum fuit; itaque idem erit punctum R et M, quod eſſe non poteſt, quoniam M ponebatur extra lineam EF in qua eſt punctum R. Apparet igitur centr. gr. portionis ABCD non poſſe ſtatui extra lineam EF, quamobrem id in ipſa reperiri neceſſe eſt. q. er. dem.

Pr. 6. *Cunei Cylindrici centr. gr. lineam rectam quae à contactu baſium ad medium latus oppoſitum ducitur ita dividit ut pars verſus contactum ſit ad reliquam ut quinque ad tria* [10]).

Eſto cuneus Cylindricus ABC cujus baſes circulus circa diametrum AC et ellipſis circa diam. BC, ab harum contactu C ducta ſit CD ad medium latus AB, eaque dividatur in puncto E ut ſit CE ad ED ſicut quinque ad tria. dico punctum E eſſe cunei gravitatis centrum. Si enim fieri poteſt ſit alibi in linea DC et primò magis verſus contactum baſium in F. et quam rationem habet CE ad EF eam habeat cuneus ABC ad magnitudinem quandam ſolidam G. Tum ſuper baſe AC conſtituatur conus ſcalenus AHC, cujus vertex H ſit in producto latere AB, ita ut pars coni intra cuneum ABC comprehenſa ab eodem cuneo deficiat ſolido mi-

Fig. 6.



[9]) Voir la „Pr. 4" qui précède,

[10]) Comparez le „Theorema III" du „Liber III," p. 160 du Tome présent.

nore quam ſit G. [11]) Et dividantur AC et BC bifariam in puntis K et L, quae jungantur, et ducantur KH, quae erit axis coni AHC, et LH axis abſciſſoris coni BHC, hi rurſus dividantur in punctis M et N, ita ut HM ſit tripla MK, et HN tripla NL; eritque hac ratione M c. gr. coni AHC, et N abſciſſoris BHC. Jungatur NM, et producatur; eâque tranſibit per punctum E, nam quum KL utràque AC et BC bifariam dividat, ſequitur eam aequidiſtare lateri AB, ipſi autem LK aquidiſtat NM quoniam duas HK, HL, in eandem rationem dividit, itaque et NM lateri AB aequidiſtat ac proinde producta ſecabit AK in O puncto in eandem rationem ac HK; eſt igitur AO tripla OK, et conſequenter CO ad OA vel etiam CE ad ED ut quinque ad tria in hanc autem proportionem linea DC à puncto E diviſa fuerat, itaque conſtat NM productam tranſire per E punctum. Porro quum M ſit totius coni centr. gr., N autem absciſſoris BHC, neceſſe etiam eſt partis coni reliquae ABC centr. gr. reperiri in producta NM: ſit hoc P, et jungatur PF, eaque producatur et occurrat ei CQ parallela lateri AB. Quoniam igitur cuneus cylindricus ad exceſſum quo ipſe ſuperat coni partem ABC, majorem habet rationem quàm ad magnitudinem G, ad quam eam habet quam CE ad EF, etiam dividendo coni pars ABC majorem habebit rationem ad dictum exceſſum quam CF ad FE vel quam QF ad FP; habeat itaque RF ad FP eam rationem quam pars coni ABC ad exceſſum quo ſuperatur ipſa à cuneo cylindrico, ergo quum F poſitum fuerit centr. gr. totius cunei, P, autem c. gr. partis coni quae cuneo comprehenſa eſt, erit c.gr. magnitudinis reliquae punctum R quod eſſe non poteſt, nam ſi planum per R ducatur faciens angulos rectos cum plano per ABC, tota magnitudo reliqua. qua coni pars à cuneo ipſam comprehendente ſuperatur erit ab una eius plani parte. Non eſt igitur Cunei ABC c. gr. magis verſus contactum. Verum neque eſſe ab altera parte puncti E ſimili ratione oſtendi poterit, itaque eſt ipſum punctum E. q. er. dem. [12])

---

[11]) Voir la „Pr. 3."

[12]) L'Appendice finit ici sans traiter le cas du tronc de cylindre droit; mais on doit remarquer que la démonstration du „Theorema 4" qui se rapporte au centre de gravité d'un tel tronc et qu'on trouve p. 161 du Tome présent, est indépendante de la méthode de Cavalieri. Ainsi le but que Huygens s'était évidemment proposé, c'est-à-dire: de remplacer les démonstrations du „Liber III" qui dépendent de cette méthode, par d'autres, qui lui semblaient plus rigoureuses, a été atteint dans l'Appendice présent.

En outre du texte que nous avons reproduit ici, la même feuille contient encore le théorème que voici: „Si conus secetur plano basi parallelo, idemque secetur alio plano transverso quod circulum ex priori sectione factum et basin coni contingat; fiet absciſſor coni medius proportione inter conum propositum et eum qui abscissus est." Après quoi suivent quelques phrases, biffées depuis, qui constituent le commencement de la démonstration de ce théorème, lequel d'ailleurs se déduit facilement du „Lemma 2" de la page 113.