THÈSE

SUR

LES FONCTIONS QUI SERVENT A DÉTERMINER L'ATTRACTION

DES

SPHÉROÏDES QUELCONQUES,

PAR F. FRENET,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE, PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES
AU COLLÉGE ROYAL DE TOULOUSE.

TOULOUSE,
TYPOGRAPHIE DE A. CHAUVIN ET COMP.,
RUE MIREPOIX, 3, PRÈS LA RUE DES BALANCES.

1847.

THÈSE

SUR

LES FONCTIONS QUI SERVENT A DÉTERMINER L'ATTRACTION

DES

SPHÉROÏDES QUELCONQUES.

1. Dans le 3^{me} livre de la *Mécanique céleste*, Laplace fait un usage fréquent de la fonction qu'on obtient en divisant chaque molécule d'un corps par sa distance à un point que ce corps attire, et prenant la somme des résultats. Désignons par V cette fonction et par x, y, z, les coordonnées rectangulaires du point attiré **M**, on a la relation

$$\frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2}+\frac{d^2\mathrm{V}}{dy^2}+\frac{d^2\mathrm{V}}{dz^2}=o,$$

tant que le point **M** n'est pas dans l'intérieur du corps. Cette équation sert de base à la théorie de l'attraction des sphéroïdes quelconques.

La détermination de V repose essentiellement sur le développement en série de la quantité

$$\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}=\mathrm{U}$$

dans laquelle x', y', z' sont les coordonnées d'un point quelconque de la masse attirante. Laplace a reconnu que les fonctions qui naissent de ce développement jouissent de propriétés fort importantes. C'est de leur étude qu'il s'agit ici.

2. Conformément à l'usage adopté dans cette théorie, nous emploierons les coordonnées polaires. Soient donc r le rayon vecteur de **M**, θ l'angle que le rayon r fait avec l'axe des z, ψ l'inclinaison du plan qui contient le rayon et l'axe des z sur le plan des zx. Désignons par r', θ', ψ' les quantités analogues pour un point quelconque m du corps attirant, on aura

$$U = \frac{1}{\sqrt{r'^2 - 2rr'[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi-\psi')] + r^2}},$$

ou plus simplement

$$U = \frac{1}{\sqrt{r'^2 - 2rr'\cos\varphi + r^2}},$$

φ étant l'angle des rayons vecteurs des points **M** et m.

Cette expression peut s'écrire :

$$U = \frac{1}{r'\sqrt{1 - 2\frac{r}{r'}\cos\varphi + \frac{r^2}{r'^2}}} = \frac{1}{r\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r}\cos\varphi + \frac{r'^2}{r^2}}};$$

et en représentant par h le quotient $\frac{r}{r'}$ ou $\frac{r'}{r}$ selon que r' est plus grand ou plus petit que r, on voit que les coefficients du développement de **U**, suivant les puissances croissantes de h, seront, à un facteur près, qui est le même pour tous les termes, ceux du développement de

$$(1 - 2h\cos\varphi + h^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Soit pour abréger $p = \cos\varphi$, et posons

$$(1 - 2ph + h^2)^{-\frac{1}{2}} = T;$$

cette fonction **T** peut être développée en série convergente, ordonnée suivant les puissances entières et positives de h. On a en effet, i étant égal à $\sqrt{-1}$,

$$(1 - 2h\cos\varphi + h^2) = 1 - h\,(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) + h^2 e^{i\varphi}.\,e^{-i\varphi}$$
$$= (1 - he^{i\varphi})(1 - he^{-i\varphi})$$

et par suite

$$(1 - 2h\cos\varphi + h^2)^{-\frac{1}{2}} = (1 - he^{i\varphi})^{-\frac{1}{2}}(1 - he^{-i\varphi})^{-\frac{1}{2}}.$$

Or, en général, $(1 - he^{i\varphi})^{-m}$ peut être développé en série convergente d'après le binôme de Newton, puisque le module du second terme est plus petit que celui du premier. Il en est de même de $(1 - he^{-i\varphi})^{-m}$.

On a donc

$$(1 - he^{i\varphi})^{-m} = 1 + mhe^{i\varphi} + \frac{m(m+1)}{1.2}\,h^2 e^{2i\varphi} + \text{etc.}$$
$$(1 - he^{-i\varphi})^{-m} = 1 + mhe^{-i\varphi} + \frac{m(m+1)}{1.2}\,h^2 e^{-2i\varphi} + \text{etc.}$$

En multipliant ces deux séries terme à terme et faisant $m = \frac{1}{2}$, on trouve pour T une série convergente, ordonnée suivant les puissances positives et croissantes de h.

3. D'après ce qui précède, on peut poser :

$$T = P_0 + P_1 h + \dots + P_n h^n + \text{etc.} \qquad (1)$$

P_n est une expression de la forme

$$A\cos n\varphi + B\cos(n-2)\varphi + \text{etc.},$$

comme cela résulte immédiatement de la multiplication des séries que nous venons de considérer, et les quantités A, B, etc., sont essentiellement positives. Le maximum de P_n correspond donc à $\varphi = o$ ou $p = 1$. Mais pour cette valeur de p, on a

$$T = \frac{1}{1-h} = 1 + h + h^2 + \text{etc.};$$

il résulte de là que le maximum de P_n est égal à 1.

4. Si l'on multiplie par $(h-p)\,dh$ les deux membres de l'équation

$$(1-2ph+h^2)^{-\frac{1}{2}} = P_0 + P_1 h + \dots + P_n h^n + \text{etc.} \qquad (2),$$

et si l'on intègre entre les limites 0 et h, on trouve

$$\left.\begin{aligned}(1-2ph+h^2)^{\frac{1}{2}} - 1 = -\left[P_0 ph + (P_1 p - P_0)\frac{h^2}{2} + \right. \\ \dots + (P_n p - P_{n-1})\frac{h^{n+1}}{n+1} + \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

d'où

$$\frac{1}{T} = 1 - P_0 ph - (P_1 p - P_0)\frac{h^2}{2} - \text{etc.}$$

Soit Q_{n+1} le multiplicateur de h^{n+1} dans ce développement, on a

$$(n+1)\,Q_{n+1} + P_n p - P_{n-1} = 0.$$

5. On tire encore de (2) en multipliant les deux membres par $1-2ph+h^2$,

$$\frac{1}{T} = (1-2ph+h^2)(P_0 + P_1 h + \text{etc.})$$

Identifions les multiplicateurs des mêmes puissances de h dans les deux développements que nous venons d'obtenir pour $\frac{1}{T}$, il viendra

$$\begin{aligned}&P_0 = 1\\ &P_1 = p\\ &2P_2 - 3p\,P_1 + P_0 = 0\end{aligned}$$

et généralement

$$(n+1)\,P_{n+1} - (2n+1)\,pP_n + nP_{n-1} = 0. \qquad (4).$$

Au lieu d'intégrer les deux membres de l'équation (1), nous aurions pu les différencier par rapport à h, et nous serions parvenus aux mêmes résultats. Il y aurait même avantage à prendre les logarithmes des deux membres avant de différencier.

6. La relation (4) montre que P_n est un polynome algébrique du

degré n par rapport à p. Elle prouve aussi que l'équation

$$P_n = 0$$

a n racines inégales, comprises entre $+1$ et -1.

Pour établir cette dernière proposition, on observe que la suite des fonctions

$$P_0, P_1, P_2 \ldots, P_n$$

présente n variations de signes pour $p = -1$ et n permanences pour $p = 1$. Les fonctions de cette suite jouissent en outre des propriétés des fonctions que l'on considère dans le théorème de M. Sturm. Ainsi, deux termes successifs ne peuvent s'annuler à la fois pour une valeur de p comprise entre $+1$ et -1; si l'une de ces fonctions s'annule, les deux qui la comprennent sont de signes contraires, d'où il résulte que la suite ne peut perdre de variations, quand p s'élève de -1 à $+1$, qu'autant que P_n devient égal à zéro. On conclut facilement de là la proposition énoncée.

On voit aussi qu'entre deux racines de $P_n = 0$, il y a une racine de $P_{n-1} = 0$, et il n'y en a qu'une.

7. Nous pouvons déduire de l'expression de T une autre série qui nous servira plus tard. On trouve par la différenciation

$$\frac{dT}{dh} = \frac{1}{2}(1 - 2ph + h^2)^{-\frac{3}{2}}(2p - 2h) = P_1 + 2P_2 h + \ldots. + nP_n h^{n-1} + \text{etc.}$$

Multiplions les deux membres de cette équation par $2h$, et ajoutons-là à l'équation $T = P_0 + P_1 h +$ etc., il vient

$$T + 2h\frac{dT}{dh} = \frac{1 - h^2}{(1 - 2ph + h^2)^{\frac{3}{2}}} = P_0 + 3P_1 h + \ldots. + (2n+1)P_n h^n + \text{etc.}$$

$$= \sum_0^\infty (2n+1) P_n h^n.$$

La série Σ est convergente pour toutes les valeurs de h plus petites que l'unité. Or, pour $h = 1$, le premier membre $\dfrac{1 - h^2}{(1 - 2ph + h^2)^{\frac{3}{2}}}$ se réduit à 0, excepté le cas où $p = 1$. Cette expression est donc infiniment petite en même temps que $1-h$, excepté pour les valeurs de p très-voisines de l'unité. La série Σ qui lui est constamment égale, tant que h est plus petit que 1, jouit par conséquent des mêmes propriétés.

8. L'expression générale de P_n, considérée comme fonction de p, est facile à obtenir. Pour y arriver, représentons par z le multiplicateur de $-h$ dans le second membre de l'équation (3), on a

$$z = P_0 p + (P_1 p - P_0)\frac{h}{2} + (P_2 p - P_1)\frac{h^2}{3} + \dots$$
$$+ (P_n p - P_{n-1})\frac{h^n}{n+1} + \text{etc.}; \qquad (5)$$

et par suite

$$z = \frac{1-(1-2ph+h^2)^{\frac{1}{2}}}{h},$$

d'où

$$z = p + \frac{h}{2}(z^2 - 1).$$

Or, de l'équation

$$z = p + hf(z),$$

on déduit généralement

$$\frac{d^m z}{dh^m} = \frac{d^{m-1}\left\{[f(z)]^m \frac{dz}{dp}\right\}}{dp^{m-1}};$$

et si l'on fait $h=0$, on a

$$\left(\frac{d^m z}{dh^m}\right)_0 = \frac{d^{m-1}\left\{[f(p)]^m\right\}}{dp^{m-1}}.$$

En appliquant ici cette dernière formule, on trouve

$$\left(\frac{d^m z}{dh^m}\right)_0 = \frac{1}{2^m}\frac{d^{m-1}(p^2-1)^m}{dp^{m-1}}.$$

D'ailleurs, l'équation (5) nous donne par la différenciation

$$\left(\frac{d^m z}{dh^m}\right)_0 = \frac{m(m-1)\dots 2.1}{(m+1)}(P_m p - P_{m-1}).$$

On a donc

$$\frac{P_m p - P_{m-1}}{m+1} = \frac{1}{1.2\ldots m}\frac{1}{2^m}\frac{d^{m-1}(p^2-1)^m}{dp^{m-1}}$$

et la valeur de z peut se mettre sous la forme

$$z = p + \frac{h}{1}\frac{p^2-1}{2} + \frac{h^2}{1.2}\frac{1}{2^2}\frac{d(p-1)^2}{dp} + \frac{h^n}{1.2\ldots n}\frac{1}{2^n}\frac{d^{n-1}(p^2-1)^n}{dp^{n-1}} + \text{etc.},$$

ce qui n'est autre chose que la série de Lagrange.

Si nous observons maintenant que

$$\frac{dz}{dp} = (1 - 2ph + h^2)^{-\frac{1}{2}},$$

nous trouverons

$$(1 - 2ph + h^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{h}{1}\frac{1}{2}\frac{d(p^2-1)}{dp} + \ldots + \frac{h^n}{1.2..n}\frac{1}{2^n}\frac{d^n(p^2-1)^n}{dp^n} + \text{etc.}$$

On conclut de là

$$P_n = \frac{1}{1.2..n}\frac{1}{2^n}\frac{d^n(p^2-1)^n}{dp^n}.$$

9. Revenons maintenant à la fonction U. On vérifie sans peine qu'elle satisfait à la même équation que V, c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{d^2U}{dz^2} = 0.$$

Pour trouver ce que cette équation devient quand on passe aux coordonnées polaires, on peut employer le procédé suivant qui conduit à des calculs assez symétriques.

On a les relations

$$x = r \sin \theta \cos \psi,$$
$$y = r \sin \theta \cos \psi.$$

Soit s une variable auxiliaire telle qu'on ait $s = r \sin \theta$, il vient

$$\left.\begin{aligned} x &= s \cos \psi, \\ y &= s \sin \psi. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Considérons U comme fonction des variables indépendantes s et ψ liées à x et y par les équations (6), et différencions sous ce point de vue, nous trouverons :

$$\frac{dU}{ds} = \frac{dU}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{dU}{dy}\frac{dy}{ds} = \frac{dU}{dx}\cos\psi + \frac{dU}{dy}\sin\psi \tag{7}$$

$$\frac{d^2U}{ds^2} = \frac{d^2U}{dx^2}\cos^2\psi + 2\frac{d^2U}{dxdy}\cos\psi\sin\psi + \frac{d^2U}{dy^2}\sin^2\psi \tag{8}$$

$$\frac{dU}{d\psi} = -\frac{dU}{dx}s\sin\psi + \frac{dU}{dy}s\cos\psi \tag{9}$$

$$\frac{d^2U}{d\psi^2} = \frac{d^2U}{dx^2}s^2.\sin^2\psi - 2\frac{d^2U}{dxdy}s^2\cos\psi\sin\psi + \frac{d^2U}{dy^2}s^2\cos^2\psi$$
$$-\frac{dU}{dx}s\cos\psi - \frac{dU}{dy}s\sin\psi \tag{10}$$

Divisons par s^2 les deux membres de l'équation (10), ajoutons-la membre à membre à l'équation (8) et réduisons au moyen de (7); il vient

$$\frac{d^2U}{ds^2} + \frac{1}{s^2}\frac{d^2U}{d\psi^2} = \frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} - \frac{1}{s}\frac{dU}{ds}. \tag{11}$$

On a aussi

$$\left.\begin{aligned} z &= r\cos\theta, \\ s &= r\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Regardons U comme une fonction des deux variables indépendantes r et θ; en vertu des relations (12), z, s, r, θ étant liées entre elles exactement de la même manière que les quantités x, y, s, ψ, dans le calcul précédent, on trouvera l'équation

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2U}{d\theta^2} = \frac{d^2U}{dz^2} + \frac{d^2U}{ds^2} - \frac{1}{r}\frac{dU}{dr}. \tag{13}$$

en ajoutant (11) et (13) on obtient

$$\frac{1}{s^2}\frac{d^2U}{d\psi^2} + \frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2U}{d\theta^2} = -\frac{1}{s}\frac{dU}{ds} - \frac{1}{r}\frac{dU}{dr}. \tag{14}$$

Il reste à éliminer s et $\frac{dU}{ds}$ de cette dernière relation. Pour cela, observons que les équations (7) et (9) nous donnent, par un calcul facile,

$$\frac{dU}{dy} = \frac{dU}{ds} \sin \psi + \frac{dU}{d\psi} \frac{\cos \psi}{s}.$$

Remarquant, comme tout-à-l'heure, que les variables z, s, r, θ sont liées entre elles de la même manière que x, y, s et ψ, nous conclurons qu'on a également

$$\frac{dU}{ds} = \frac{dU}{dr} \sin \theta + \frac{dU}{d\theta} \frac{\cos \theta}{r}.$$

Substituons cette valeur de $\frac{dU}{ds}$ dans (14) et remplaçons-y s par $r \sin \theta$, il vient

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{dU}{d\theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2U}{d\psi^2} + r^2 \frac{d^2U}{dr^2} + 2r \frac{dU}{dr} = 0,$$

ou

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d\left(\sin \theta \frac{dU}{d\theta}\right)}{d\theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2U}{d\psi^2} + r \frac{d^2 . rU}{dr^2} = 0.$$

On pose ordinairement $\cos \theta = \mu$, ce qui donne :

$$\frac{d\left\{(1-\mu^2)\frac{dU}{d\mu}\right\}}{d\mu} + \frac{1}{1-\mu^2} \frac{d^2U}{d\psi^2} + r \frac{d^2 . rU}{dr^2} = 0.$$

Cette relation convient évidemment à toute fonction f pour laquelle on a

$$\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dy^3} + \frac{d^2f}{dz^2} = 0.$$

10. D'après ce qui a été vu précédemment, U est égal à l'un des deux développements

$$\frac{1}{r}\left(P_0 + P_1 \frac{r'}{r} + P_1 \frac{r'^2}{r^2} + \text{etc.}\right),$$

$$\frac{1}{r'}\left(P_0 + P_1 \frac{r}{r'} + P_2 \frac{r^2}{r'^2} + \text{etc.}\right);$$

Portons l'une quelconque de ces valeurs dans l'équation que nous venons d'obtenir; à cause de l'indétermination de r, les divers coefficients devront être séparément nuls, ce qui donnera, quel que soit n,

$$\frac{d\left\{(1-\mu^2)\frac{dP_n}{d\mu}\right\}}{d\mu}+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{d^2P_n}{d\psi^2}+n(n+1)P_n=0. \tag{A}$$

P_n est une fonction particulière de θ et ψ, qui satisfait à cette équation différentielle, mais elle n'en est pas l'intégrale générale.

Avant d'étudier les fonctions P_n dans toute leur généralité, examinons un cas particulier où elles ne contiennent qu'une seule variable: c'est celui où $\theta'=0$. Cos φ se réduit alors à la quantité μ. Désignons par X_n ce que devient P_n pour $\theta'=0$, et pour plus d'analogie substituons la lettre x à μ. X_n ne diffère de P_n, regardé comme fonction de p, qu'en ce que p est remplacé par x ou cos φ par cos θ.

L'équation (A) devient

$$d\,\frac{(1-x^2)\frac{dX_n}{dx}}{dx}+n(n+1)X_n=0, \tag{X}$$

ce qui nous montre que X_n est une intégrale particulière de l'équation

$$d\,\frac{(1-x^2)\frac{dy}{dx}}{dx}+n(n+1)y=0. \tag{y}$$

Si l'on suppose connue la fonction X_n, ou même toute autre intégrale particulière de (y), on peut trouver son intégrale générale. Remarquons pour cela qu'on a

$$y\,\frac{d\left(u\,\frac{dz}{dx}\right)}{dx}-z\,\frac{d\left(u\,\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(uy\,\frac{dz}{dx}-uz\,\frac{dy}{dx}\right).$$

On le voit sans peine en effectuant le calcul. Cela posé, retranchons (y) de (X) après avoir multiplié la première équation par X_n et la deuxième par y, il viendra

$$y\,d\,\frac{(1-x^2)\dfrac{dX_n}{dx}}{dx} - X_n\,d\,\frac{(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}}{dx} =$$
$$= \frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\left(y\,\frac{dX_n}{dx} - X_n\,\frac{dy}{dx}\right)\right\} = 0,$$

ce qui donne

$$(1-x^2)\left(y\,\frac{dX_n}{dx} - X_n\,\frac{dy}{dx}\right) = C, \qquad (C)$$

en désignant par C une constante. On déduit de là

$$X_n dy - y dX_n = \frac{C}{x^2-1}\,dx,$$

ce qui peut s'écrire

$$X_n^2 d\left(\frac{y}{X}\right) = \frac{Cdx}{x^2-1}.$$

On trouve en intégrant et appelant C′ une nouvelle constante

$$y = C'X_n + CX_n\int\frac{dx}{(x^2-1)X_n^2}.$$

Telle est l'intégrale générale de (y). Quand X_n sera connue, l'intégration indiquée pourra toujours s'effectuer, puisque X_n est une fonction entière de x.

Le calcul qu'on vient de faire prouve que les seules solutions entières que puisse admettre l'équation (y) sont de la forme AX_n, A étant une constante. On doit avoir en effet, à cause de la relation (C),

$$y\,\frac{dX_n}{dx} - X_n\,\frac{dy}{dx}$$

identiquement nul quand on y remplace y et X_n en fonction d'x, sans quoi ce polynome, multiplié par $1-x^2$, ne pourrait pas être égal à une quantité constante C. On a donc

$$y\,\frac{dX_n}{dx} - X_n\,\frac{dy}{dx} = 0,$$

ou bien $d\,\dfrac{y}{X_n} = 0$, d'où l'on conclut $y = AX_n$.

12. Les polynomes X_n jouissent d'une propriété remarquable, qui peut même leur servir de définition. Elle consiste en ce qu'on a toujours

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n \, dx = 0$$

pour des valeurs différentes de m et de n.

Pour le démontrer, on considère les deux équations

$$\left.\begin{aligned} m(m+1) X_m + d \frac{(1-x^2) \dfrac{dX_m}{dx}}{dx} = 0, \\ n(n-1) X_n + d \frac{(1-x^2) \dfrac{dX_n}{dx}}{dx} = 0. \end{aligned}\right\}$$

Multiplions la première par X_n, la deuxième par X_m et retranchons membre à membre, il vient

$$(m-n)(m+n+1) X_m X_n + X_n d \frac{(1-x^2) \dfrac{dX_m}{dx}}{dx} - X_m \, d \frac{(1-x^2) \dfrac{dX_n}{dx}}{dx} = 0.$$

Multiplions le premier membre par dx et intégrons entre les limites -1 et $+1$, on trouve

$$(m-n)(m+n+1) \int_{-1}^{+1} X_m X_n dx$$
$$+ \int_{-1}^{+1} d \left\{ (1-x^2) \left(X_n \frac{dX_m}{dx} - X_m \frac{dX_n}{dx} \right) \right\} = 0;$$

et comme la seconde intégrale s'annule aux deux limites, il reste

$$\int_{-1}^{1} X_m X_n \, dx = 0.$$

En partant de cette propriété, M. O. Rodrigue a déterminé la valeur de la fonction X_n. Nous allons la retrouver par une autre méthode, dans laquelle nous appliquerons une formule générale résultant de l'intégration par parties.

13. Quelle que soit la fonction X_n, nous pouvons la regarder comme

la dérivée n^{me} d'un certain polynome R, de sorte qu'on ait

$$\mathrm{R} = \int^n \mathrm{X}_n \, dx^n.$$

L'intégrale renferme n constantes arbitraires que nous supposerons déterminées par la condition que R et ses $n - 1$, premières dérivées, s'annulent pour $x = 1$. La relation

$$(1 - x^2) \frac{d^2\mathrm{X}^n}{dx^2} - 2x \frac{d\mathrm{X}^n}{dx} + n(n+1)\,\mathrm{X}_n = 0$$

devient par la substitution de R,

$$(1 - x^2) \frac{d^{n+2}\mathrm{R}}{dx^{n+2}} - 2x \frac{d^{n+1}\mathrm{R}}{dx^{n+1}} + n(n+1) \frac{d^n\mathrm{R}}{dx^n} = 0.$$

Intégrons une fois par parties; il vient, toutes réductions faites,

$$(1 - x^2) \frac{d^{n+1}\mathrm{R}}{dx^{n+1}} + n(n+1) \frac{d^{n+1}\mathrm{R}}{dx^{n+1}} = \mathrm{Const.}$$

pour $x = 1$ le premier terme s'annule ainsi que $\frac{d^{n-1}\mathrm{R}}{dx^{n-1}}$; la constante est donc égale à zéro et on a

$$(1 - x^2) \frac{d^{n+1}\mathrm{R}}{dx^{n+1}} + n(n+1) \frac{d^{n-1}\mathrm{R}}{dx^{n-1}} = 0.$$

Une deuxième intégration donnera

$$(1 - x^2) \frac{d^n\mathrm{R}}{dx^n} + 2x \frac{d^{n-1}\mathrm{R}}{dx^{n-1}} + \Big\{ n(n+1) - 2 \Big\} \frac{d^{n-2}\mathrm{R}}{dx^{n-2}} = 0.$$

En continuant les intégrations, tant que le dernier terme ne contiendra que les dérivées de R ou R, les constantes seront toujours nulles, à cause de l'hypothèse que nous avons faite sur celles qui entrent dans R. Mais nous pouvons, sans passer par les calculs intermédiaires, obtenir le résultat de n intégrations successives opérées sur la première équation. En effet, si nous représentons par u et v deux fonctions de la variable x, nous aurons la formule générale

$$\int^n uv\,dx^n$$
$$= u\int^n v\,dx^n - \frac{n}{1}\frac{du}{dx}\int^{n+1} v\,dx^{n+1} + \frac{n\,(n+1)}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2}\int^{n+2} v\,dx^{n+2} - \text{etc.}$$

On l'établit sans peine pour $n = 1$, puis on fait voir que si elle est vraie pour une valeur de n, elle subsiste pour une valeur supérieure d'une unité.

Appliquons-la à l'équation dont il s'agit, cette équation devient

$$(1 - x^2)\frac{d^2R}{dx^2} + 2\,(n - 1)\frac{dR}{dx} + 2nR = 0.$$

Intégrons encore une fois, le second membre devra renfermer une constante. Nous obtenons, après des réductions simples,

$$(1 - x^2)\frac{dR}{dx} + 2nxR = \text{Const.};$$

et il est facile de voir que cette constante est encore nulle.

Une dernière intégration donne

$$R = A\,(x^2 - 1)^n;$$

et par suite

$$X_n = A\,\frac{d^n\,(x-1)^n}{dx^n}.$$

Pour déterminer A, faisons $x = 1$ dans les deux membres; à cause de la relation

$$(1 - 2hx + h^2)^{-\frac{1}{2}} = X_0 + X_1 h + \text{etc.},$$

on voit que X_n devient égal à 1.

Pour trouver ce qui devient le second membre, rappelons-nous qu'on a généralement

$$\frac{d^n uv}{dx^n} = u\,\frac{d^n v}{dx^n} + \frac{n}{1}\frac{du}{dx}\frac{d^{n-1} v}{dx^{n-1}} + \text{etc.}$$

Soit ici

$$u = (x+1)^n,$$
$$v = (x-1)^n;$$

on en déduit

$$\frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} = (x+1)^n \frac{d^n (x-1)^n}{dx^n} + \text{etc.}$$

Pour $x = 1$, tous les termes qui suivent le premier s'annulent à cause du facteur $x - 1$ qui entre dans chacun d'eux, et l'expression se réduit à

$$2^n.1.2.3\ldots n.$$

Donc

$$1 = A.2^n.\ 1.2.3\ldots.n,$$

et

$$X_n = \frac{1}{2^n} \frac{1}{1.2..n} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}.$$

14. On peut, en général, représenter au moyen de ces quantités X_n un polynome entier par rapport à x. Soit en effet ce polynome

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots. + A_m;$$

on l'égalera à l'expression suivante

$$a_0 X_m + a_1 X_{m-1} + \ldots. + a_m X_0,$$

dans laquelle on déterminera les coefficients a_0, a_1, a_m par la condition que les multiplicateurs des mêmes puissances de x soient identiques de part et d'autre. On obtiendra ainsi $m+1$ équations pour calculer $m+1$ inconnues.

Il résulte de là et du n° (12) que la quantité

$$\int_{-1}^{+1} X_n F(x)\, dx$$

est constamment nulle, si $F(x)$ désigne un polynome entier par rapport à x de degré inférieur à n. Par conséquent, il en est de même de l'expression

$$\int_{-1}^{+1} X_n x^t dx,$$

lorsque t est plus petit que n.

Mais on peut reconnaître que cette dernière intégrale ne peut être nulle si $t = n$. Pour cela, développons la valeur de X_n, obtenue dans le n° (**13**), il vient

$$X_n = \frac{1}{1.2\ldots n}\,\frac{1}{2^n}\left\{2n(2n-1)\ldots.(n+1)x^n + \text{etc.}\right\},$$

les termes de la parenthèse qui suivent le premier formant un polynome du degré $n - 1$. On déduit de là, en s'appuyant sur la remarque qui vient d'être faite,

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2 dx = \frac{1}{1.2..n}\,\frac{1}{2^n}(n+1)(n+2)\ldots.2n\int_{-1}^{+1} X_n x^n dx.$$

Comme les éléments de la première intégrale sont tous positifs, la deuxième ne peut pas être nulle.

15. Laissons maintenant à la quantité P_n toute sa généralité et regardons-là, non plus comme fonction de p, mais des deux variables μ et ψ. On sait qu'on a

$$d\,\frac{(1-\mu^2)\dfrac{dP_n}{d\mu}}{d\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\,\frac{d^2P_n}{d\psi^2} + n(n+1)P_n = 0.$$

P_n est une fonction rationnelle et entière des quantités μ, $\sqrt{1-\mu^2}$, $\sin\psi$, $\cos\psi$; mais il existe d'autres fonctions de cette nature satisfaisant à la même équation différentielle. Soit par exemple l'expression

$$A = \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} P_n f(\mu', \psi')\, d\mu'\, d\psi';$$

on voit d'abord, par la seule substitution et à cause de la différenciation sous le signe, que A satisfait à l'équation différentielle; de plus, c'est une fonction rationnelle et entière des mêmes quantités que P_n. Un terme quelconque de P_n est, en effet, de la forme $\alpha HH'$, α étant un coefficient numérique, **H** un produit des facteurs μ, $\sqrt{1-\mu^2}$, sin ψ, cos ψ élevés à des puissances positives entières, et **H**$'$ un terme analogue par rapport à μ' et ψ'. Or, dans l'intégration à effectuer, α**H** ne changera pas, de sorte que **A** ne diffère de $\mathbf{P}_n$ qu'en ce que les divers termes de $\mathbf{P}_n$ y sont multipliés par d'autres facteurs numériques.

Nous désignerons par $\mathbf{Y}_n$ toute fonction entière de l'espèce indiquée qui satisfait à la même équation que $\mathbf{P}_n$.

16. Soient $\mathbf{Z}_m$ et $\mathbf{Y}_n$ deux fonctions de ce genre, mais répondant à des indices différents; je dis qu'on a toujours

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} \mathrm{Y}_n \mathrm{Z}_m \, d\mu \, d\psi = 0.$$

Pour le démontrer, considérons les deux équations

$$d\,\frac{(1-\mu^2)\dfrac{d\mathrm{Y}_n}{d\mu}}{d\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\,\frac{d^2\mathrm{Y}_n}{d\psi^2} + n(n+1)\,\mathrm{Y}_n = 0,$$

$$d\,\frac{(1-\mu^2)\dfrac{d\mathrm{Z}_m}{d\mu}}{d\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\,\frac{d^2\mathrm{Z}_m}{d\psi^2} + m(m+1)\,\mathrm{Z}_m = 0.$$

Multiplions la première par $\mathbf{Z}_m$ et intégrons les deux membres par rapport à μ et ψ entre les limites indiquées, il vient

$$n(n+1)\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} \mathrm{X}_n \mathrm{Z}_m \, d\mu \, d\psi =$$

$$-\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} \mathrm{Z}_m \, d\mu \, d\psi \left\{ d\,\frac{(1-\mu^2)\dfrac{d\mathrm{Y}_n}{d\mu}}{d\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\,\frac{d^2\mathrm{Y}_n}{d\psi^2} \right\}.$$

Intégrant par parties et observant que $(1-\mu^2)$ est nul à chaque limite, on trouve

$$\int_{-1}^{+1} \mathrm{Z}_m \, d\,\frac{(1-\mu^2)\dfrac{d\mathrm{Y}_n}{d\mu}}{d\mu}\, d\mu = -\int_{-1}^{+1} \frac{d\mathrm{Y}_n}{d\mu}\,\frac{d\mathrm{Z}_m}{d\mu}\,(1-\mu^2)\, d\mu.$$

De même

$$\int_0^{2\pi} Z_m \frac{d^2 Y_n}{d\psi^2}\, d\psi = -\int_0^{2\pi} \frac{dY_n}{d\psi}\,\frac{dZ_m}{d\psi}\, d\psi,$$

car la quantité $Z_m \dfrac{dY_n}{d\psi}$, qui devrait précéder le second membre, prend la même valeur aux deux limites, parce qu'elle ne renferme que sin ψ et cos ψ, et non pas l'angle ψ lui-même.

On a donc

$$n(n+1)\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} Z_m Y_n\, d\mu\, d\psi$$

$$= \int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} \left\{ (1-\mu^2)\frac{dY_n}{d\mu}\,\frac{dZ_m}{d\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\,\frac{dY_n}{d\psi}\,\frac{dZ_m}{d\psi} \right\} d\mu\, d\psi.$$

La symétrie du second membre nous apprend qu'on trouverait la même valeur pour l'expression

$$m(m+1)\int_{-1}^{+1} Z_m Y_n\, d\mu\, d\psi;$$

par conséquent

$$[n(n+1) - m(m+1)]\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} Z_m Y_n\, d\mu\, d\psi = 0,$$

ou bien

$$\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} Z_m Y_n\, d\mu\, d\psi = 0,$$

puisque m est différent de n.

17. P_0 étant égal à 1, il résulte du théorême précédent qu'on a toujours, pour les valeurs de n différentes de 0,

$$\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} P_n\, d\mu\, d\psi = 0;$$

de même

$$\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} P_n\, d\mu'\, d\psi' = 0,$$

à cause de l'identité de composition de P_n par rapport à μ et ψ ou par rapport à μ' et ψ'.

18. Les fonctions Y_n jouissent d'une autre propriété fort importante et dont on fait un fréquent usage. Elle consiste en ce qu'une fonction quelconque des deux variables μ et ψ peut être représentée par une série de cette forme

$$f(\mu,\psi)=Y_0+Y_1+\dots+Y_n+\text{etc.},$$

pour toutes les valeurs de μ et de ψ comprises entre les limites -1 et $+1$, 0 et 2π, pourvu que cette fonction ne devienne pas infinie entre ces mêmes limites.

La démonstration qu'on en donne est fondée sur la proposition snivante :

La limite de la série

$$\sum_0^\infty (2n+1)\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} P_n h^n F(\mu',\psi')\,d\mu' d\psi'$$

lorsque h tend indéfiniment vers 1, est égale à $4\pi F(\mu,\psi)$, ou bien

$$4\pi F(\mu,\psi)=\sum_0^\infty (2n+1)\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} P_n F(\mu',\psi')\,d\mu' d\psi'.$$

Pour établir ce lemme, nous allons suivre une méthode qui diffère de celle que donne M. Poisson, dans la *Théorie mathématique de la chaleur.*

On a vu précédemment que la série

$$\sum_0^\infty (2n+1)\,P_n h^n$$

avait une valeur infiniment petite en même temps que la quantité $1-h$, excepté pour les valeurs de p très-voisines de 1. Or, il est facile de voir que p ne devient égal à 1 que lorsqu'on a $\mu'=\mu$ et $\psi'=\psi$; ainsi, la somme $\sum$ est infiniment petite toutes les fois que les différences $\psi'-\psi$ et $\mu'-\mu$ ne le sont pas elles-mêmes. D'ailleurs, en s'appuyant sur la relation du nº 17, on trouve

$$\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}[P_0+3P_1h+5P_2h^2+\dots+(2n+1)P_nh^n+\text{etc.}]\,d\mu' d\psi'=4\pi.$$

La série sous le signe $\int$ étant infiniment petite pour toutes les valeurs des variables qui ne sont pas infiniment voisines de μ et de ψ, la valeur de l'intégrale variera infiniment peu si, aux limites actuelles, on substitue $\mu-\varepsilon$, $\mu+\varepsilon$, $\psi-\delta$, $\psi+\delta$, ε et δ étant des infiniments petits; de sorte qu'on aura

$$4\pi = \int_{\mu-\varepsilon}^{\mu+\varepsilon}\int_{\psi-\delta}^{\psi+\delta} \Sigma\,(2n+1)\,\mathrm{P}_n h^n\, d\mu' d\psi' \quad +\omega,$$

étant un infiniment petit.

De même, le produit

$$\mathrm{F}(\mu', \psi') \sum_0^{\infty} (2n+1)\,\mathrm{P}_n h^n,$$

ou plus simplement

$$\mathrm{F}(\mu', \psi') \Sigma$$

est une quantité infiniment petite avec $1-h$, si, comme nous le supposons, $\mathrm{F}(\mu', \psi')$ reste constamment finie entre les limites considérées, excepté pour les valeurs de μ' et ψ' très-voisines de μ et ψ. Donc

$$\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} \mathrm{F}(\mu', \psi') \sum_0^{\infty} (2n+1)\,\mathrm{P}_n h^n\, d\mu' d\psi'$$

diffère infiniment peu de

$$\int_{\mu-\varepsilon}^{\mu+\varepsilon}\int_{\psi-\delta}^{\psi+\delta} \mathrm{F}(\mu', \psi')\, \Sigma\, d\mu' d\psi'.$$

Or, dans cette dernière intégrale, $\mathrm{F}(\mu', \psi')$ supposée continue ne prend que des valeurs très-voisines de celles qu'elle a pour μ et ψ; on peut donc, sous le signe $\int$, remplacer $\mathrm{F}(\mu', \psi')$ par $\mathrm{F}(\mu, \psi)+\zeta$, ζ ne recevant que des valeurs infiniment petites. Il vient alors

$$\int_{\mu-\varepsilon}^{\mu+\varepsilon}\int_{\mu-\delta}^{\mu+\delta} \mathrm{F}(\mu', \psi')\, \Sigma\, d\mu' d\psi'$$

$$= \mathrm{F}(\mu, \psi)\int_{\mu-\varepsilon}^{\mu+\varepsilon}\int_{\mu-\delta}^{\mu+\delta} \Sigma\, d\mu' d\psi' + \int_{\mu-\varepsilon}^{\mu+\varepsilon}\int_{\mu-\delta}^{\mu+\delta} \zeta.\,\Sigma\,.\, d\mu' d\psi';$$

et par suite

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} F(\mu', \psi') \Sigma\, d\mu' d\psi' = 4\pi F(\mu, \psi),$$

à moins d'un infiniment petit près. Cette relation subsistant, quelque petit que soit $1-h$, on en conclut que la limite du premier membre est égale à $4\pi F(\mu, \psi)$.

Il est bon d'observer aussi qu'on peut écrire :

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} F(\mu, \psi) \Sigma \,.\, d\mu d\psi = 4\pi F(\mu', \psi').$$

Le théorème se démontre maintenant sans difficulté. On vient de trouver

$$F(\mu, \psi) = \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} [P_0 + 3P_1 + \text{etc.}]\, F(\mu'\psi')\, d\mu' d\psi';$$

or

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} P_n\, F(\mu', \psi')\, d\mu' d\psi'$$

est une des fonctions désignées par Y_n; donc on peut écrire

$$F(\mu, \psi) = Y_0 + Y_1 + \dots + Y_n + \text{etc.},$$

ce qui est la proposition énoncée.

19. Puisque $F(\mu, \psi)$ peut être une fonction quelconque, faisons $F(\mu, \psi) = Y_n$; il vient alors

$$Y_n' = \frac{2n+1}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} Y_n P_n\, d\mu\, d\psi,$$

Y' étant ce que devient Y quand on y change μ en μ' et ψ et ψ'. On déduit de là

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} Y_n P_n\, d\mu d\psi = \frac{4\pi Y_n'}{2n+1}.$$

Laplace a tiré un grand parti de cette équation dans l'attraction des sphéroïdes.

Une conséquence immédiate de cette propriété, c'est que la somme de plusieurs fonctions de l'espèce de Y_n ne peut être nulle, quels que soient μ et ψ, qu'autant que ces diverses fonctions sont nulles séparément. Soit en effet

$$Y_0 + Y_1 + \dots + Y_n + \text{etc.} = 0;$$

multiplions les deux membres de cette égalité par $P_n d\mu d\psi$ et intégrons entre les limites ordinaires, il vient

$$\frac{4\pi Y_n'}{2n+1} = 0, \text{ et par conséquent } Y_n = 0.$$

Il suit de là que $F(\mu, \psi)$ n'admet pas deux développements différents au moyen des quantités de la nature de Y_n.

Supposons qu'on eût en effet

$$F(\mu, \psi) = Y_0 + Y_1 + \dots + Y_n + \text{etc.} = Z_0 + Z_1 + \dots + Z_n + \text{etc.},$$

Z_n étant analogue à Y_n; il en résulterait

$$Y_0 - Z_0 + Y_1 - Z_1 + \dots + Y_n - Z_n + \text{etc.} = 0,$$

et en vertu de l'observation précédente, $Y_n - Z_n = 0$; c'est-à-dire que les deux développements sont identiques terme à terme.

20. Le lemme sur lequel reposent le théorême du n° 18 et les conséquences que nous venons d'en déduire peut recevoir l'interprétation suivante :

Soit tracée une sphère de rayon 1 et dont le centre est à l'origine. Appelons θ et ψ les coordonnées d'un point M intérieur à cette sphère et situé à une distance du centre marquée par h, θ' et ψ' celles d'un point m de la surface qu'on suppose douée de masse et dont la densité, variable d'un point à l'autre, est une fonction connue des coordonnées θ' et ψ'; nous représenterons cette fonction par $F(\mu', \psi')$, μ' ayant la signification ordinaire. L'élément de masse de cette surface aura pour expression

$$F(\mu', \psi') \sin \theta' d\theta' d\psi';$$

et si l'on forme la quantité

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{F(\mu', \psi') \sin \theta' d\theta' d\psi'}{\sqrt{1-2ph+h^2}} = \int_{-1}^{+1} T.F(\mu', \psi') d\mu' d\psi' = V_1,$$

V_1 sera, pour la surface de la sphère et par rapport au point **M**, la fonction **V** dont on a parlé déjà et que **M.** Gauss désigne sous le nom de *Potentiel.*

T et V_1 dépendent de la distance h et F n'en dépend pas; on a donc

$$\frac{dV_1}{dh} = \int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} F(\mu', \psi') \frac{dT}{dh} d\mu' d\psi',$$

et par suite

$$V_1 + 2h\frac{dV_1}{dh} = \int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} \left(T + 2h\frac{dT}{dh}\right) F(\mu', \psi') d\mu' d\psi'.$$

Mais le lemme du n° **18** montre que la limite du second membre, quand h tend indéfiniment vers 1, est égale à $4\pi F(\mu, \psi)$; c'est donc aussi celle du premier membre, et on peut écrire

$$\text{lim.}\left(V_1 + 2h\frac{dV_1}{dh}\right) = 4\pi F(\mu, \psi);$$

c'est-à-dire que la valeur de $V_1 + 2h\frac{dV_1}{dh}$, pour $h = 1$, est une fonction du potentiel de la surface sphérique, par rapport à un point de cette surface, qui dépend uniquement de la densité en ce point.

21. La construction que nous venons d'employer nous permet de réduire une certaine intégrale définie double à une intégrale simple: soit en effet $F(p)$ la densité variable des points de la surface de la sphère que nous considérons; le potentiel de cette surface par rapport au point **M** est, d'après le numéro précédent,

$$\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} T.F(p)\, d\mu' d\psi',$$

dans laquelle, comme on sait,

$$p = \cos\varphi = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi - \psi').$$

Afin d'obtenir une autre expression de cette quantité, observons que pour les rayons vecteurs qui font un angle constant avec le rayon vecteur de M, $F(p)$ et T ne changent pas. Il suit de là que la partie du potentiel, relative aux points qui répondent à une même valeur de p et qui forment une zône sphérique dont la hauteur est infiniment petite, est égale à la quantité

$$2\pi . F(p) . T \sin \varphi d\varphi,$$

ce qui donne, pour le potentiel de toute la surface,

$$2\pi \int_{-1}^{+1} F(p) T \, dp;$$

donc

$$\int_{-1}^{+1} \int_{0}^{2\pi} \frac{F(p) \, d\mu' d\psi'}{\sqrt{1 - 2ph + h^2}} = 2\pi \int_{-1}^{+1} \frac{F(p) \, dp}{\sqrt{1 - 2ph + h^2}}.$$

On déduit aussi de là

$$\int_{-1}^{+1} \int_{0}^{2\pi} F(p) P_n \, d\mu d\psi = 2\pi \int_{-1}^{+1} F(p) P_n \, dp.$$

20. Après avoir étudié les fonctions P_n, nous allons déterminer leur forme, en adoptant la méthode indiquée par M. Jacobi. Elle repose sur la détermination d'une intégrale définie et sur une extension importante du théorème de Taylor. Nous traiterons d'abord de ces deux questions que l'auteur ne fait qu'énoncer.

1^er^ *lemme.* Soit proposé de chercher l'intégrale définie

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{d\alpha}{A + Bi \cos \alpha + Ci \sin \alpha}$$

dans laquelle A est positif.

Posons

$$B = H \cos \theta,$$
$$C = H \sin \theta,$$
$$\alpha - \theta = \omega;$$

elle devient

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{A + Hi \cos \omega}.$$

Or, on a la relation

$$(p + qe^{i\omega})(p + qe^{-i\omega}) = A + Hi \cos \omega,$$

dans laquelle

$$p = \sqrt{\frac{A+K}{2}},$$
$$q = \sqrt{\frac{A-K}{2}},$$

K étant égal à $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

Par conséquent, en désignant $\frac{q}{p}$ par h, le module de h sera plus petit que 1, et il viendra

$$(A + Hi \cos \omega)^{-1} = p^{-2}(1 + he^{i\omega})^{-1}(1 + he^{-i\omega})^{-1}.$$

Or

$$(1 + he^{i\omega})^{-1} = 1 - he^{i\omega} + h^2 e^{2i\omega} - \text{etc.},$$
$$(1 + he^{-i\omega})^{-1} = 1 - he^{-i\omega} + h^2 e^{-2i\omega} - \text{etc.}$$

Multiplions ces deux égalités membre à membre, le terme indépendant des exponentielles sera

$$1 + h^2 + h^4 + \text{etc.} = \frac{1}{1-h^2} = \frac{p^2}{p^2 - q^2} = \frac{p^2}{K}.$$

Si on remplace les exponentielles par des cosinus, on trouve

$$(A + Hi \cos \omega)^{-1} = \frac{1}{K} + a \cos \omega + b \cos 2\omega + \text{etc.}$$

Donc

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{A + Hi \cos \omega} = \frac{2\pi}{K},$$

l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \cos n\,(\alpha - \theta)\,d\alpha$$

étant nulle pour toute valeur entière de n différente de zéro.

L'intégrale proposée est donc égale à

$$\frac{2\pi}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

23. 2e *lemme.* Quand une fonction d'un binôme $z+h$ se trouve développée en une série renfermant des puissances de z ou de h entières, positives et négatives et en nombre infini, elle jouit de la propriété que chacun de ses termes se forme du précédent d'après la loi que suivent les termes de la série de Taylor.

Supposons qu'on ait en effet

$$f(z+h) = \ldots Kz^{-n} + Hz^{-n+1} + \ldots + Bz^{-1} + A + bz + \ldots\, lz^p + mz^{p+1} + \text{etc.}$$

Les dérivées partielles de $f(z+h)$ par rapport à z ou à h sont identiques; on peut donc écrire

$$\begin{aligned} &..\,K(-n)z^{-n-1} + H(-n+1)z^{-n} + .. + b + .. + lpz^{p-1} + m(p+1)z^p + \text{etc.} \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{dK}{dh} z^{-n} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{dl}{dh} z^p + \text{etc.} \end{aligned}$$

On conclut de là

$$H = \frac{1}{-n+1}\frac{dK}{dh}, \quad m = \frac{1}{p+1}\frac{dl}{dh},$$

ce qui prouve la proposition énoncée.

24. Ces deux lemmes établis, procédons à la détermination de P_n.

On a déjà trouvé

$$\left(1 - 2\frac{r}{r'}\cos\varphi + \frac{r^2}{r'^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = P_0 + P_1\frac{r}{r'} + \ldots + P_n\frac{r^n}{r'^n} + \text{etc.}$$

P_n étant fonction des deux variables θ et ψ, en vertu de la relation

$$\cos\varphi = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi - \psi').$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned} A &= r' \cos \theta' - r \cos \theta, \\ B &= r' \sin \theta' \cos \psi' - r \sin \theta \cos \psi, \\ C &= r' \sin \theta' \sin \psi' - r \sin \theta \sin \psi, \end{aligned}$$

il résulte du n° 22 qu'on pourra écrire

$$(r'^2 - 2rr' \cos \varphi + r'^2)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{r' [\cos \theta' + i \sin \theta' \cos (\psi' - \alpha)] - r [\cos \theta + i \sin \theta \cos (\psi - \alpha)]},$$

ou bien

$$\left(1 - 2 \frac{r}{r'} \cos \varphi + \frac{r^2}{r'^2}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{[\cos \theta' + i \sin \theta' \cos (\psi' - \alpha)] \left(1 - \frac{\cos \theta + i \sin \theta \cos (\psi - \alpha)}{\cos \theta' + i \sin \theta' \cos (\psi' - \alpha)} \frac{r}{r'}\right)}.$$

En développant la quantité sous le signe $\int$ suivant les puissances croissantes de $\frac{r}{r'}$, on trouve généralement

$$P_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[\cos \theta + i \sin \theta \cos (\psi - \alpha)]^n}{[\cos \theta' + i \sin \theta' \cos (\psi' - \alpha)]^{n+1}} d\alpha \qquad (a)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\cos \theta + i \sin \theta \cos (\psi - \alpha)]^n [\cos \theta' + i \sin \theta' \cos (\psi' - \alpha)]^{-(n+1)} d\alpha.$$

25. Observons maintenant qu'on a, en posant pour abréger $\psi - \alpha = \omega$,

$$\cos \theta + i \sin \theta \cos \omega = \cos \theta + i \sin \theta \left(\frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2}\right)$$

$$= \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\omega}\right) \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\omega}\right);$$

cette transformation nous permet d'obtenir, pour le premier facteur sous le signe, un développement ordonné suivant les cosinus des multiples de l'arc ω et renfermant un nombre fini de termes. On trouve ainsi

$$[\cos\theta + i\sin\theta\cos(\psi-\alpha)]^n =$$
$$X_n + 2i\,X_n'\cos(\psi-\alpha) - 2X_n''\cos 2(\psi-\alpha) - 2i\,X_n'''\cos 3(\psi-\alpha)$$
$$+ 2X_n^{\prime v}\cos 4(\psi-\alpha) + \text{etc.} \qquad (b)$$

Le dernier terme renfermera $\cos n(\psi-\alpha)$.

Quant au second facteur

$$[\cos\theta' + i\sin\theta'\cos(\psi'-\alpha)]^{-(n+1)},$$

on peut le remplacer aussi par le produit

$$\left(\cos\frac{\theta'}{2} + i\sin\frac{\theta'}{2}e^{i\omega}\right)^{-(n+1)}\left(\cos\frac{\theta'}{2} + i\sin\frac{\theta'}{2}e^{-i\omega}\right)^{-(n+1)}$$

dans lequel ω remplace $\psi'-\alpha$.

Supposons $\sin\frac{\theta'}{2}$ plus petit que $\cos\frac{\theta'}{2}$, et désignons $i.\tan\!g\frac{\theta'}{2}$ par h; l'expression considérée deviendra

$$\left(\cos\frac{\theta'}{2}\right)^{-2(n+1)}(1+he^{i\omega})^{-(n+1)}(1+he^{-i\omega})^{-(n+1)}.$$

En développant les puissances des binômes $1+he^{i\omega}$ et $1+he^{-i\omega}$, multipliant les résultats membre à membre, et remplaçant les exponentielles par des cosinus, on trouve

$$[\cos\theta' + i\sin\theta'\cos(\psi'-\alpha)]^{-(n+1)} =$$
$$L_n + 2iL_n'\cos(\psi'-\alpha) - 2L_n''\cos 2(\psi'-\alpha) - 2iL_n'''\cos 3(\psi'-\alpha)$$
$$+ 2L_n^{\prime v}\cos 4(\psi'-\alpha) + \text{etc.} \qquad (c)$$

26. Si nous multiplions maintenant (b) par (c), en observant qu'on a toujours

$$\int_0^{2\pi}\cos(a+b\alpha)\,d\alpha = 0,$$

lorsque b est un nombre entier différent de zéro, l'expression de P_n devient

$$P_n = L_n X_n - 2L_n' X_n' \cos(\psi' - \psi) + 2L_n'' X_n'' \cos 2(\psi' - \psi) - \ldots \\ \pm 2L_n^{(n)} X_n^{(n)} \cos n(\psi' - \psi).$$

Ce développement a un nombre fini de termes.

27. Il est facile de s'assurer que la quantité désignée ici par X_n est précisément celle qu'on a déjà étudiée. Si nous faisons en effet $\theta' = 0$ dans l'équation (a), P_n se réduit alors à

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\cos\theta + i \sin\theta \cos(\psi - \alpha)^n \, d\alpha] = X_n.$$

On voit de même que pour $\theta = 0$, P_n se réduit à L_n et le radical U à

$$\frac{1}{\sqrt{r'^2 - 2rr' \cos\theta' + r^2}};$$

comme d'ailleurs, pour $\theta' = 0$, ce même radical devient

$$\frac{1}{\sqrt{r'^2 - 2rr' \cos\theta + r^2}},$$

on en conclut que L_n ne diffère de X_n que par le changement de θ' en θ.

28. La détermination de P_n repose sur celle des quantités X_n, X_n'... L_n, L_n',... etc. Occupons-nous des premières.

Dans le second membre de la formule (b) substituons des exponentielles aux cosinus et faisons encore $\psi - \alpha = \omega$, il vient

$$(\cos\theta + i \sin\theta \cos\omega)^n = X_n + iX_n' e^{i\omega} - X_n'' e^{2i\omega} - iX_n''' e^{3i\omega} - X_n^{\text{iv}} e^{4i\omega} + \text{etc.} \\ + iX_n' e^{-i\omega} - X_n'' e^{-2i\omega} - iX_n''' e^{-3i\omega} + X_n^{\text{iv}} e^{-4i\omega} + \text{etc.}$$

Cherchons à obtenir, au moyen de la série de Taylor, un autre développement de cette expression ordonné suivant les puissances de la même variable $e^{i\omega}$, afin que la comparaison des mêmes puissances de la variable puisse nous fournir la valeur des coefficients inconnus. Pour cela, il faut remplacer cos ω par la quantité exponentielle équivalente, ce qui donne

$$\cos\theta + i\sin\theta\cos\omega = \frac{1}{2}\left(2\cos\theta + i\sin\theta e^{i\omega} + i\sin\theta e^{-i\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2x + i\sin\theta e^{i\omega} + i\sin\theta e^{-i\omega}\right),$$

en posant, comme on l'a déjà fait, $\cos\theta = x$. Il sera commode, pour abréger, de représenter aussi par une seule lettre la quantité $e^{i\omega}$, ou mieux encore le produit $i\sin\theta e^{i\omega}$; désignons-le par z. Le terme restant $i\sin\theta e^{-i\omega}$ s'exprime facilement au moyen de z. De l'égalité

$$z = i\sin\theta e^{i\omega},$$

on tire en effet

$$ze^{-i\omega} = i\sin\theta;$$

multipliant les deux termes par $i\sin\theta$, il vient

$$zi\sin\theta e^{-i\omega} = -\sin^2\theta = x^2 - 1;$$

par suite on a

$$(\cos\theta + i\sin\theta\cos\omega) = \frac{1}{2z}\left[(x+z)^2 - 1\right].$$

Nous concluons de là que le développement de $[(x-z)^2 - 1]^n$ est égal à

$$2^n z^n \left\{\begin{array}{l} X_n + iX_n' e^{i\omega} - X_n'' e^{2i\omega} - iX_n''' e^{3i\omega} + X_n^{iv} e^{4i\omega} + \text{etc.} \\ \quad + iX_n'^{-i\omega} - X_n'' e^{-2i\omega} - iX_n''' e^{-3i\omega} + X_n^{iv} e^{-4i\omega} + \text{etc.} \end{array}\right\}$$

$$= 2^n z^n \left\{\begin{array}{l} X_n + X_n' \dfrac{z}{\sin\theta} + X_n'' \dfrac{z^2}{\sin^2\theta} + \text{etc.} \\ \quad - X_n' \sin\theta z^{-1} + X_n'' \sin^2\theta z^{-2} - \text{etc.} \end{array}\right\}$$

L'expression $2^n X_n^{(m)} \dfrac{1}{\sin^m\theta}$ représente donc le coefficient de z^{n+m} dans le développement de $[(x+z)^2 - 1]^n$, c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{2^n}{\sin^m\theta} X_n^{(m)} = \frac{1}{\Gamma(n+m+1)} \frac{d^{n+m}(x^2-1)^n}{dx^{n+m}},$$

en posant généralement

$$\Gamma(K+1) = 1.2.3. \ldots. K.$$

Quand $m = 0$ on retrouve la valeur connue

$$X_n = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n},$$

d'où l'on déduit pour un coefficient quelconque :

$$X_n^m = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+m+1)} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m X_n}{dx^m}.$$

29. Déterminons maintenant L_n, L_n',.... etc.

En suivant la marche précédente, nous poserons

$$\cos\theta' = l,$$
$$\psi' - \alpha = \omega,$$
$$i \sin\theta' e^{i\omega} = z.$$

Il viendra alors

$$[(l+z)^2-1]^{-(n+1)} = (2z)^{-(n+1)} [\cos\theta' + i\sin\theta' \cos(\psi'-\alpha)]^{-(n+1)}$$
$$= (2z)^{-(n+1)} \left\{ \begin{array}{l} L_n + L_n' \dfrac{z}{\sin\theta'} + \text{etc.} \\ \quad - L_n' \sin\theta' z^{-1} + \text{etc.} \end{array} \right\}$$

Cette dernière série est donc une fonction du binôme $(l+z)$, et comme elle renferme à la fois des puissances positives et négatives de z en nombre infini, nous savons que la formation d'un terme au moyen du précédent s'opère comme dans la série de Taylor. Or le coefficient de $z^{-(n+1)}$ est $2^{-(n+1)} L_n$, et généralement celui de $z^{-(n+1)+m}$ est $\dfrac{2^{-(n+1)}}{\sin^m\theta'} L_n^{(m)}$; on a donc

$$\frac{2^{-(n+1)}}{\sin^m\theta'} L_n^{(m)} = \frac{2^{-(n+1)}}{(-1)^m n(n-1)\ldots(n-m+1)} \frac{d^m L_n}{dl^m},$$

d'où

$$L_n^{(m)} = (-1)^m \sin^m\theta' \frac{\Gamma(n+1-m)}{\Gamma(n+1)} \frac{d^m L_n}{dl^m}.$$

Mais L_n est composé au moyen de l comme X_n au moyen de x; par conséquent

$$L_n = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)} \frac{d^n (l^2-1)^n}{dl^n}.$$

Donc enfin

$$L_n^{(m)} = (-1)^m \frac{1}{2^n} \frac{\Gamma(n+1-m)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+1)} (1-l)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{m+n}(l^2-1)^n}{dl^{m+n}}.$$

Pour calculer P_n, il suffira de donner à m toutes les valeurs entières depuis 0 jusqu'à n inclusivement.

Au moyen des expressions obtenues pour $X_n^{(m)}$ et $L_n^{(m)}$, P_n prendra la forme suivante :

$$\begin{aligned} P_n = X_n L_n &+ 2\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+2)} \sin\theta \sin\theta' \frac{dX_n}{dx}\frac{dL_n}{dl}\cos(\psi'-\psi) \\ &+ 2\frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n+3)} \sin^2\theta \sin^2\theta' \frac{d^2X_n}{dx^2}\frac{d^2L_n}{dl^2}\cos 2(\psi'-\psi) + \text{etc.} \end{aligned}$$

Vu pour les épreuves du doctorat ès-sciences mathématiques.

Toulouse, le 5 juillet 1847.

Le Doyen de la Faculté des Sciences de Toulouse,

BOISGIRAUD AINÉ.

Permis d'imprimer.

Le Recteur de l'Académie,

NOUSEILLES.

PROGRAMME D'UNE THÈSE

SUR

QUELQUES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES COURBES A DOUBLE COURBURE.

Calcul de l'angle de deux directions infiniment voisines. — Position limite d'une droite qui coupe ces deux directions sous des angles égaux. — Application à l'angle de contingence, à l'angle de torsion. — Formules qui en résultent. — Le rapport des flexions d'une courbe en un point est égal au rapport des accroissements que subissent, en passant de ce point à un point infiniment voisin, les cosinus des angles d'une droite quelconque avec la tangente et l'axe. — Diverses formes de l'angle de torsion. — Le carré de l'angle de deux rayons de courbure consécutifs est égal à la somme des carrés des angles de première et de deuxième flexion.

Courbe des centres de courbure. — Son élément. — Direction de la tangente à cette courbe.

Surface polaire. — Position d'une génératrice. — Coordonnées du centre de la sphère osculatrice. — Rayon de cette sphère. — Distance du centre de courbure sphérique au plan osculateur. — L'angle de la tangente à la courbe des centres de courbure avec le rayon du cercle osculateur est le complément de l'angle que fait ce rayon avec le rayon de courbure sphérique. — Le rayon de la sphère osculatrice est égal au rapport de l'élément de la courbe des centres de courbure à l'angle de torsion. — L'angle de contingence de la courbe, lieu des centres de courbure sphérique, est égal à l'angle de torsion de la courbe donnée, et *vice versâ*. — Diverses formes de l'élément de l'arète de rebroussement de la surface polaire. — Rapport de cet élément à celui de la courbe des centres de courbure. — Rayons de courbure du lieu des centres de courbure sphérique.

Angle de deux rayons de courbure sphérique infiniment voisins.

Angle de deux *obliques* infiniment voisines. (*L'oblique* en un point est l'intersection du plan normal et du plan tangent à la sphère osculatrice en ce point.)

Génératrice de la surface développable, enveloppe des plans tangents menés par les points d'une courbe aux sphères osculatrices de ces points.

Surface rectifiante. — Génératrice de cette surface. La tangente de l'angle qu'elle fait avec la tangente à la courbe est égale au rapport de l'angle de contingence à l'angle de torsion. — Angle de deux droites rectifiantes consécutives. — Coordonnées d'un point de l'arète de rebroussement de la surface rectifiante. Distance de ce point au point correspondant de la courbe. — Elément et rayons de courbure de cette arète de rebroussement.

Distance de deux génératrices consécutives dans quelques surfaces réglées. — Expression de la distance de deux droites passant par deux points d'une courbe quelconque. Elle établit une différence remarquable entre les surfaces développables et les surfaces gauches. — Application de cette formule aux droites polaires; aux rayons de courbure; aux axes des plans osculateurs; aux rayons de courbure sphérique.

TOULOUSE. — TYPOGRAPHIE DE A. CHAUVIN ET C^{e},
RUE MIREPOIX, 3, PRÈS LA RUE DES BALANCES.