N° D'ORDRE
319.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PAR M. J. COLLET.

BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITÉ FRANCE

1re **THÈSE.** — INTÉGRATION DES ÉQUATIONS SIMULTANÉES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE D'UNE SEULE FONCTION.

2e **THÈSE.** — DU FACTEUR INTÉGRANT POUR LES EXPRESSIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE RENFERMANT UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES INDÉPENDANTES.

Soutenues le 19 Mars 1870, devant la Commission d'Examen.

MM. PUISEUX, *Président.*
SERRET, BOUQUET, *Examinateurs.*

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.
1870

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

DOYEN	MILNE EDWARDS, Professeur.	Zoologie, Anatomie, Physiologie.
PROFESSEURS HONORAIRES	DUMAS.	
	BALARD.	
PROFESSEURS	DELAFOSSE	Minéralogie.
	CHASLES	Géométrie supérieure.
	LE VERRIER	Astronomie.
	DUHAMEL	Algèbre supérieure.
	LAMÉ	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	DELAUNAY	Mécanique physique.
	P. DESAINS	Physique.
	LIOUVILLE	Mécanique rationnelle.
	HÉBERT	Géologie.
	PUISEUX	Astronomie.
	DUCHARTRE	Botanique.
	JAMIN	Physique.
	SERRET	Calcul différentiel et intégral.
	H. Ste-CLAIRE DEVILLE	Chimie.
	PASTEUR	Chimie.
	LACAZE DUTHIERS	Anatomie, Physiologie comparée, Zoologie.
	BERT	Physiologie.
AGRÉGÉS	BERTRAND	Sciences mathématiques.
	J. VIEILLE	Sciences mathématiques.
	PELIGOT	Sciences physiques.
SECRÉTAIRE	PHILIPPON.	

PARIS. IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

A

MONSIEUR ET MADAME CHEUVREUX,

FONDATEURS DU PRIX AMPÈRE.

Hommage de respectueuse reconnaissance.

J. COLLET.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

PREMIÈRE THÈSE.

INTÉGRATION
DES ÉQUATIONS SIMULTANÉES
AUX DÉRIVÉES PARTIELLES
DU PREMIER ORDRE D'UNE SEULE FONCTION

Le problème de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre a été résolu généralement par Cauchy (*) et Jacobi. Ce dernier, considérant d'abord la question proposée comme un cas particulier du problème de Pfaff (**), lui a appliqué la méthode de résolution relative à ce dernier problème, en démontrant toutefois qu'il suffit alors d'intégrer le premier des n systèmes d'équations qui se présentent dans le cas général (***). Plus tard, Jacobi a donné, d'abord pour le cas de quatre variables (****), puis ensuite pour le cas

(*) CAUCHY, *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. II.
(**) PFAFF, *Mémoires de Berlin*, 1814. — JACOBI, *Journal de Crelle*, t. II.
(***) JACOBI, *Journal de Crelle*, t. XVII.
(****) *Vorlesungen für Dynamik.*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

général (*), une méthode qui se prête facilement à l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une même fonction, problème qui se présente dans différentes théories mathématiques, en particulier dans la recherche des intégrales intermédiaires des équations aux dérivées partielles du second ordre (**) et dans la recherche du facteur intégrant des expressions différentielles du premier ordre. Il y a plus, la méthode même de Jacobi, pour l'intégration d'une seule équation, exige la considération de systèmes successifs d'équations linéaires aux dérivées partielles, et dont il faut trouver une solution commune. Cette solution s'obtient, eu égard à la forme des équations, en appliquant un théorème de Jacobi qui est l'analogue de celui établi par Bour dans son *Mémoire sur l'intégration des équations de la Dynamique* (***), où il l'emploie pour la simplification du problème, au moyen des solutions particulières antérieurement déterminées. On peut d'ailleurs étendre à des équations homogènes quelconques, satisfaisant toutefois aux conditions d'intégrabilité, la méthode de Jacobi relative aux systèmes auxiliaires, en dirigeant les calculs de façon à obtenir la solution complète du système considéré : c'est ce qu'a fait Boole (****) qui, abordant directement la question, est arrivé à des résultats conformes à ceux qui résultent de la méthode de Jacobi. Quant au problème de l'intégration des équations simultanées quelconques, il a été considéré pour la première fois par Bour dans son *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles.*

(*) *Nova methodus pro integratione.....* (*Journal de Crelle*, t. LX).

(**) Ampère, *Mémoire sur l'intégration* (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XI et XII).

(***) Bour, *Mémoires des Savants étrangers*, 1856.

(****) G. Boole, *Philosophical Transactions*, 1863.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

§ I. — *Énoncé du problème.*

Le problème que nous nous proposons de résoudre est le suivant :

Étant données les relations

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \ldots, \quad f_m = 0$$

entre une fonction V, *les variables* $q_1, q_2, \ldots, q_n$ *dont elle dépend et les dérivées de* V *par rapport à ces mêmes variables, trouver l'expression de* V *en fonction de* $q_1, q_2, \ldots, q_n$ *qui satisfait aux équations proposées.*

Nous supposerons toujours, dans la suite, que les équations proposées ne renferment pas la fonction cherchée; dans le cas contraire, on la ferait disparaître par un changement de variable, en posant

$$U = tV, \quad \text{d'où} \quad \frac{dU}{dq_i} = t\frac{dV}{dq_i}, \quad \frac{dU}{dt} = V,$$

U étant la nouvelle fonction cherchée et t une nouvelle variable indépendante.

Si nous considérons maintenant que les valeurs des dérivées partielles $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de la fonction V, prises respectivement par rapport à $q_1, q_2, \ldots, q_n$, tout en satisfaisant aux équations proposées, devront aussi être telles que l'expression $p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \ldots + p_n dq_n$ soit la différentielle totale dV, nous en conclurons que le problème proposé peut encore s'énoncer comme il suit :

Étant données m relations

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \ldots, \quad f_m = 0$$

entre les variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$ *et les dérivées partielles correspondantes* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *de la fonction* V, *trouver entre les mêmes quantités* $n - m$ *autres relations qui, jointes aux premières, permettent de déterminer pour* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *des valeurs en fonction de* $q_1, q_2, \ldots, q_n$ *qui rendent l'expression* $p_1 dq_1 + \ldots + p_n dq_n$ *une différentielle exacte. La fonction* V *sera donnée par l'intégration de cette expression.*

La méthode que nous allons exposer pour le cas de m équations comprend le cas particulier de l'intégration d'une seule équation.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

§ II. — *Des relations qui expriment que* $p_1 dq_1 + \ldots + p_n dq_n$ *est une différentielle exacte.*

L'expression $p_1 dq_1 + \ldots + p_n dq_n$ sera une différentielle exacte si, pour deux quelconques p_i et p_k des quantités $p_1, p_2, \ldots, p_n$, on a la relation

$$\left(\frac{dp_k}{dq_i}\right) = \left(\frac{dp_i}{dq_k}\right), \tag{1}$$

les parenthèses indiquant des dérivées totales.

Supposons que p_i et p_k soient exprimés en fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et d'un certain nombre des quantités $p_1, p_2, \ldots, p_n$; soient $p_\lambda, p_\mu, \ldots$ celles de ces dernières quantités qui entrent dans p_i ou p_k : la condition (1) devient alors, en développant,

$$\frac{dp_k}{dq_i} + \frac{dp_k}{dp_\lambda}\left(\frac{dp_\lambda}{dq_i}\right) + \frac{dp_k}{dp_\mu}\left(\frac{dp_\mu}{dq_i}\right) + \ldots = \frac{dp_i}{dq_k} + \frac{dp_i}{dp_\lambda}\left(\frac{dp_\lambda}{dq_k}\right) + \frac{dp_i}{dp_\mu}\left(\frac{dp_\mu}{dq_k}\right) + \ldots,$$

ou bien, au moyen des conditions analogues à la précédente (1),

$$\frac{dp_k}{dq_i} + \frac{dp_k}{dp_\lambda}\left(\frac{dp_i}{dq_\lambda}\right) + \frac{dp_k}{dp_\mu}\left(\frac{dp_i}{dq_\mu}\right) + \ldots = \frac{dp_i}{dq_k} + \frac{dp_i}{dp_\lambda}\left(\frac{dp_k}{dq_\lambda}\right) + \frac{dp_i}{dp_\mu}\left(\frac{dp_k}{dq_\mu}\right) + \ldots. \tag{2}$$

Nous allons maintenant prouver que, dans cette égalité, ainsi que dans toutes ses analogues, on peut remplacer les dérivées totales qui y entrent par les dérivées partielles correspondantes.

On a, en effet, d'une manière générale,

$$\left(\frac{dp_m}{dq_{\alpha'}}\right) = \frac{dp_m}{dq_{\alpha'}} + \sum_\alpha \frac{dp_m}{dp_\alpha}\left(\frac{dp_\alpha}{dq_{\alpha'}}\right), \tag{3}$$

où α doit prendre successivement les valeurs des indices des quantités p qui entrent dans l'expression de p_m; si $m = i$ ou k, α prend successivement les valeurs $\lambda, \mu, \ldots$ Au moyen de la formule (3), où m prend des valeurs convenables, l'égalité (2) devient la suivante :

$$\begin{aligned} &\frac{dp_k}{dq_i} + \sum_{\alpha'} \frac{dp_k}{dp_{\alpha'}} \frac{dp_i}{dq_{\alpha'}} + \sum_{\alpha'} \frac{dp_k}{dp_{\alpha'}} \sum_\alpha \frac{dp_i}{dp_\alpha}\left(\frac{dp_\alpha}{dq_{\alpha'}}\right) \\ &= \frac{dp_i}{dq_k} + \sum_{\alpha'} \frac{dp_i}{dp_{\alpha'}} \frac{dp_k}{dq_{\alpha'}} + \sum_{\alpha'} \frac{dp_i}{dp_{\alpha'}} \sum_\alpha \frac{dp_k}{dp_\alpha}\left(\frac{dp_\alpha}{dq_{\alpha'}}\right), \end{aligned} \tag{4}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

où α', comme α, doit prendre toutes les valeurs λ, μ, ... Si alors on réunit dans un même membre les deux sommes doubles en permutant les indices α et α' de l'une d'elles, on aura l'expression suivante :

$$\sum_{\alpha'}\sum_{\alpha}\frac{dp_k}{dp_\alpha}\frac{dp_i}{dp_{\alpha'}}\left[\left(\frac{dp_\alpha}{dq_{\alpha'}}\right)-\left(\frac{dp_{\alpha'}}{dq_\alpha}\right)\right],$$

qui est identiquement nulle; donc l'égalité (4) se réduit à la suivante :

$$\frac{dp_k}{dq_i}-\frac{dp_i}{dq_k}+\sum_{\alpha}\left(\frac{dp_k}{dp_\alpha}\frac{dp_i}{dq_\alpha}-\frac{dp_i}{dp_\alpha}\frac{dp_k}{dq_\alpha}\right)=0. \tag{5}$$

Pour établir cette formule, on n'a pas explicitement supposé que l'expression de p_k renfermât p_i, ni que celle de p_i pût contenir p_k; mais il est clair que les raisonnements précédents subsistent complétement dans cette hypothèse, et, par suite, que la formule (5) est encore applicable. Dans le développement de cette formule, il ne faut pas oublier que les valeurs successives que prend α sont celles des indices des différentes variables p entrant explicitement dans p_i ou p_k, et que les valeurs de α répondant à p_i ne sont pas nécessairement les mêmes que celles qui sont relatives à p_k; d'où il résulte que α ne doit pas prendre la valeur k dans la somme $\sum_\alpha \frac{dp_k}{dp_\alpha}\frac{dp_i}{dq_\alpha}$, et qu'il ne doit pas prendre la valeur i dans l'autre somme $\sum_\alpha \frac{dp_i}{dp_\alpha}\frac{dp_k}{dq_\alpha}$. La formule (5) développée sera donc

$$\frac{dp_k}{dq_i}+\frac{dp_k}{dp_i}\frac{dp_i}{dq_i}+\frac{dp_k}{dp_\lambda}\frac{dp_i}{dq_\lambda}+\ldots-\frac{dp_i}{dq_k}-\frac{dp_i}{dp_k}\frac{dp_k}{dq_k}-\frac{dp_i}{dp_\lambda}\frac{dp_k}{dq_\lambda}-\ldots=0; \tag{6}$$

et si p_k contient p_i sans que p_i contienne p_k, on aura alors plus simplement

$$\frac{dp_k}{dq_i}+\frac{dp_k}{dp_i}\frac{dp_i}{dq_i}+\frac{dp_k}{dp_\lambda}\frac{dp_i}{dq_\lambda}+\ldots-\frac{dp_i}{dq_k}-\frac{dp_i}{dp_\lambda}\frac{dp_k}{dq_\lambda}-\ldots=0. \tag{7}$$

En somme, il résulte de ce qui précède que les relations (5) devront être satisfaites par les valeurs de p_i et de p_k, quelle que soit la forme sous laquelle elles se présentent : que ces valeurs soient déduites des équations proposées, et alors les relations (5) donnent naissance à des conditions qui doivent être satisfaites par les équations proposées; ou bien qu'elles soient fournies par l'intégration, et alors les équations

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

considérées pourront précisément servir à la détermination de p_i, si, par exemple, p_k est supposé connu. En un mot, les formules dont la relation (5) est le type sont la base de toute la théorie de l'intégration des équations aux dérivées partielles simultanées du premier ordre.

La formule (5) peut revêtir d'autres formes dont la considération est nécessaire pour ce qui suit.

Pour les obtenir, supposons d'abord que p_i soit fourni par une équation de la forme suivante :

$$f_i(p_i, p_\lambda, p_\mu, \ldots, q_1, q_2, \ldots, q_n) = a_i,$$

a_i étant une constante déterminée ou arbitraire, et p_k pouvant entrer dans la fonction f_i; p_k sera, d'après cela, une fonction de p_λ, p_μ, ..., en même temps que des variables q_1, q_2, ..., q_n. En dérivant les deux membres de l'égalité précédente successivement par rapport à q_m et à p_m, on déduira des équations obtenues les valeurs suivantes :

$$\frac{dp_i}{dq_m} = -\frac{\dfrac{df_i}{dq_m}}{\dfrac{df_i}{dp_i}}, \quad \frac{dp_i}{dp_m} = -\frac{\dfrac{df_i}{dp_m}}{\dfrac{df_i}{dp_i}};$$

et, si nous substituons ces valeurs dans la formule (5), en donnant à m des valeurs convenables, on en obtiendra la formule

$$\frac{df_i}{dq_k} + \sum_\alpha \left(\frac{dp_k}{dq_\alpha}\frac{df_i}{dp_\alpha} - \frac{dp_k}{dp_\alpha}\frac{df_i}{dq_\alpha} \right) = 0, \tag{8}$$

qui est équivalente à la précédente (5), et qui, par conséquent, peut la remplacer pour l'intégration. Les remarques énoncées précédemment au sujet des valeurs successives de α sont d'ailleurs applicables dans le cas actuel, aussi bien que dans le cas précédent.

Si nous supposons maintenant que p_k soit donné à son tour par une équation telle que $f_k = a_k$, on pourra, par un calcul analogue au précédent, transformer la formule (8) et lui donner la forme suivante :

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{df_i}{dq_k}\frac{df_k}{dp_k} + \frac{df_i}{dq_i}\frac{df_k}{dp_i} + \frac{df_i}{dq_\lambda}\frac{df_k}{dp_\lambda} + \frac{df_i}{dq_\mu}\frac{df_k}{dp_\mu} + \ldots \\ &- \frac{df_k}{dq_k}\frac{df_i}{dp_k} - \frac{df_k}{dq_i}\frac{df_i}{dp_i} - \frac{df_k}{dq_\lambda}\frac{df_i}{dp_\lambda} - \frac{df_k}{dq_\mu}\frac{df_i}{dp_\mu} - \ldots = 0. \end{aligned} \right. \tag{9}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Si nous posons

$$(f_i f_k) = \sum_\alpha \left(\frac{df_i}{dq_\alpha} \frac{df_k}{dp_\alpha} - \frac{df_k}{dq_\alpha} \frac{df_i}{dp_\alpha} \right), \tag{10}$$

l'équation (9) s'écrira simplement

$$(f_i f_k) = 0. \tag{11}$$

Telle est la troisième forme des relations déduites de la condition que l'expression $p_1 dq_1 + \ldots + p_n dq_n$ soit une différentielle exacte.

La formule (11) pouvait être établie directement en démontrant que, *si l'expression* $p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \ldots + p_n dq_n$ *est une différentielle exacte, deux quelconques,* f_i, f_k, *des fonctions qui sont les premiers membres des équations, d'où les valeurs des* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *sont déduites, satisfont à la condition* $(f_i f_k) = 0$.

Soient les deux équations $f_i = a_i$, $f_k = a_k$; si on les dérive par rapport à q_α, qu'on retranche les résultats après les avoir multipliés respectivement par $\frac{df_k}{dp_\alpha}$, $\frac{df_i}{dp_\alpha}$, et enfin qu'on prenne la somme des résultats obtenus en donnant à α les valeurs 1, 2, 3,..., n, on aura l'égalité suivante :

$$\sum_\alpha \left(\frac{df_i}{dq_\alpha} \frac{df_k}{dp_\alpha} - \frac{df_k}{dq_\alpha} \frac{df_i}{dp_\alpha} \right) = \sum_\alpha \sum_\beta \left[\frac{df_i}{dp_\alpha} \frac{df_k}{dp_\beta} \left(\frac{dp_\beta}{dq_\alpha} \right) - \frac{df_k}{dp_\alpha} \frac{df_i}{dp_\beta} \left(\frac{dp_\beta}{dq_\alpha} \right) \right],$$

où β, comme α, doit prendre successivement toutes les valeurs 1, 2,..., n. Mais si, dans la deuxième partie du second membre, nous permutons les indices α et β, ce second membre pourra s'écrire

$$\sum_\alpha \sum_\beta \frac{df_i}{dp_\alpha} \frac{df_k}{dp_\beta} \left[\left(\frac{dp_\beta}{dq_\alpha} \right) - \left(\frac{dp_\alpha}{dq_\beta} \right) \right],$$

et cette quantité sera identiquement nulle si l'expression

$$p_1 dq_1 + \ldots + p_n dq_n$$

est une différentielle exacte. Dans ce cas, les fonctions f_i, f_k doivent donc, ainsi que nous l'avons annoncé, satisfaire à la condition

$$\sum_\alpha \left(\frac{df_i}{dq_\alpha} \frac{df_k}{dp_\alpha} - \frac{df_k}{dq_\alpha} \frac{df_i}{dp_\alpha} \right) = 0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Dans les raisonnements précédents, on a supposé que la fonction cherchée V n'entrait pas dans les fonctions f_i, f_k; si le contraire avait lieu, on serait conduit, par un calcul analogue, à des conditions dont la formule est la suivante :

$$(11\ bis) \qquad \sum_\alpha \left[\left(\frac{df_i}{dq_\alpha} + p_\alpha \frac{df_i}{d\mathrm{V}} \right) \frac{df_k}{dp_\alpha} - \left(\frac{df_k}{dq_i} + p_i \frac{df_k}{d\mathrm{V}} \right) \frac{df_i}{dp_\alpha} \right] = 0.$$

Partant de là, on pourrait, en raisonnant comme nous le ferons avec les relations (8) et (11), composer une méthode complète d'intégration où l'on ne supposerait pas que la fonction cherchée fût absente des équations proposées. Nous nous bornerons à cette simple indication et reviendrons immédiatement à la question, telle que nous l'avons posée.

De tout ce qui précède, il résulte que, *si le système des n équations distinctes*,

$$(\alpha) \qquad f_1 = a_1, \ldots, \quad f_i = a_i, \ldots, \quad f_k = a_k, \ldots, \quad f_n = a_n,$$

où $a_1, \ldots, a_n$ *sont des constantes déterminées ou arbitraires, est tel que les valeurs de* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *qu'on en déduit rendent l'expression*

$$(\beta) \qquad p_1 dq_1 + \ldots + p_n dq_n$$

une différentielle exacte, les relations (5), (8), (11) *seront satisfaites pour toutes les valeurs des indices i et k.*

La réciproque de cette proposition est vraie, c'est-à-dire que, *si les relations* (5), *ou* (8), *ou* (11) *sont satisfaites en vertu des équations* (α), *l'expression* (β) *sera une différentielle exacte quand on y remplacera* $p_1, \ldots, p_n$ *par les valeurs déduites des équations* (α).

Démontrons cette réciproque pour les relations (11) en particulier, et supposons, en conséquence, que, pour deux quelconques, f_i, f_k, des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$, on ait

$$(f_i f_k) = \sum_\alpha \left(\frac{df_i}{dq_\alpha} \frac{df_k}{dp_\alpha} - \frac{df_k}{dq_\alpha} \frac{df_i}{dp_\alpha} \right) = 0;$$

il faut prouver que l'on a aussi

$$\left(\frac{dp_k}{dq_i} \right) = \left(\frac{dp_i}{dq_k} \right).$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

En effet, d'après ce qui précède, nous avons

$$(f_i f_k) = \sum_\alpha \sum_\beta \frac{df_i}{dp_\alpha} \frac{df_k}{dp_\beta} \left[\left(\frac{dp_\beta}{dq_\alpha} \right) - \left(\frac{dp_\alpha}{dq_\beta} \right) \right],$$

ce qui peut encore s'écrire, en explicitant tous les termes répondant à une combinaison α, β, des nombres $1, 2, \ldots, n$,

$$(12) \qquad (f_i f_k) = \sum_\alpha \sum_\beta \left(\frac{df_i}{dp_\alpha} \frac{df_k}{dp_\beta} - \frac{df_k}{dp_\alpha} \frac{df_i}{dp_\beta} \right) \left[\left(\frac{dp_\beta}{dq_\alpha} \right) - \left(\frac{dp_\alpha}{dq_\beta} \right) \right].$$

Dans le second membre de cette égalité, nous avons $\frac{n(n-1)}{2}$ termes; d'ailleurs, en attribuant à i et k toutes les valeurs qui donnent des résultats distincts, nous aurons aussi $\frac{n(n-1)}{2}$ équations qui permettront de déterminer les valeurs des quantités telles que la suivante :

$$(13) \qquad \left(\frac{dp_\beta}{dq_\alpha} \right) = \left(\frac{dp_\alpha}{dq_\beta} \right),$$

en fonction des expressions α analogues à $(f_i f_k)$. Je dis que *ces équations donneront pour les quantités cherchées* (13) *des valeurs déterminées qui seront des fonctions linéaires et homogènes des expressions telles que* $(f_i f_k)$.

Il suffit de montrer, pour cela, que le déterminant des équations (12) n'est pas nul; et je dis, d'ailleurs, qu'il n'est pas autre que le suivant :

$$\Delta = \sum \left(\pm \frac{df_1}{dp_1} \cdots \frac{df_n}{dp_n} \right),$$

que l'on sait être différent de zéro, si les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont distinctes, comme on le suppose (*).

Cherchons, en effet, la valeur de la quantité (13) fournie par les équations (12); et, dans ce but, ordonnons le déterminant Δ suivant les produits des termes des lignes horizontales dont les rangs sont indiqués par les indices k et i : on aura

$$\Delta = \sum_\alpha \sum_\beta \left(\frac{df_k}{dp_\alpha} \frac{df_i}{dp_\beta} - \frac{df_i}{dp_\alpha} \frac{df_k}{dp_\beta} \right) \delta^{k,i}_{\alpha,\beta},$$

(*) JACOBI, *De determinantibus functionalibus*.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

en désignant par $\delta^{k,i}_{\alpha,\beta}$ le déterminant mineur résultant du proposé par la suppression des colonnes verticales dont les rangs sont indiqués par les indices inférieurs α et β, et par la suppression des lignes horizontales de rangs k et i. Multipliant maintenant les deux membres de l'équation (12) par $\delta^{k,i}_{\alpha,\beta}$, et ajoutant membre à membre les équations obtenues en donnant à i et k les valeurs répondant aux diverses combinaisons des nombres de la suite 1, 2, ..., n pris deux à deux, si l'on remarque que l'on a identiquement

$$\sum_k \sum_i \left(\frac{df_k}{dp_{\alpha'}} \frac{df_i}{dp_{\beta'}} - \frac{df_i}{dp_{\alpha'}} \frac{df_k}{dp_{\beta'}} \right) \delta^{k,i}_{\alpha,\beta} = 0,$$

on aura pour résultat

$$\Delta \left[\left(\frac{dp_\beta}{dq_\alpha} \right) - \left(\frac{dp_\alpha}{dq_\beta} \right) \right] = \Sigma_k \Sigma_i \, \delta^{k,i}_{\alpha,\beta} (f_i f_k),$$

ce qui démontre ce que nous avions avancé. Par conséquent, si les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont telles que, pour deux quelconques d'entre elles, f_i, f_k, on ait la condition satisfaite $(f_i f_k) = 0$, comme Δ est nécessairement différent de zéro par hypothèse, nous en conclurons que

$$\left(\frac{dp_\beta}{dq_\alpha} \right) - \left(\frac{dp_\alpha}{dq_\beta} \right) = 0,$$

et, par conséquent, que l'expression $p_1 dq_1 + \ldots + p_n dq_n$ est une différentielle exacte, ce qui démontre la proposition énoncée.

Remarque I. — Dans ce qui précède, on pourrait remplacer les équations

$$f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2, \ldots, \quad f_n = a_n \tag{14}$$

par n autres équations équivalentes aux précédentes, et qu'on en déduirait en les combinant entre elles d'une manière quelconque. Soient

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots, \quad F_n = 0, \tag{15}$$

ces nouvelles équations dont les premiers membres contiennent une ou plusieurs constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Il est évident que, si les con-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

stantes sont réellement considérées comme telles, deux quelconques, F_i, F_k, des fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_n$ satisferont encore à la condition

$$(16) \qquad (F_i F_k) = 0;$$

il y a plus, en prenant une fonction dans chacun des systèmes (14) et (15), je dis qu'on aura aussi

$$(17) \qquad (F_i f_k) = 0;$$

car, de deux choses l'une : ou bien les équations $F_i = 0$ et $f_k - a_k = 0$ sont distinctes, ou bien elles rentrent l'une dans l'autre. Dans le premier cas, la relation (17) est évidente; dans le second, elle ne l'est pas moins, puisque, F_i étant alors une fonction de $f_k - a_k$, on a

$$(F_i f_k) = \frac{dF_i}{df_k}(f_k f_k),$$

et que le second membre de cette égalité est identiquement nul.

Je dis maintenant que les relations (16) et (17) ont encore lieu quand on considère les constantes comme des fonctions définies par les équations (14).

Si, en effet, nous enfermons entre crochets les expressions dans lesquelles cette hypothèse est introduite, on aura, d'après un théorème connu,

$$[(F_i F_k)] = (F_i F_k) + \Sigma_\alpha [(F_i f_\alpha)] \frac{dF_k}{da_\alpha} + \Sigma_\beta [(f_\beta F_k)] \frac{dF_i}{da_\beta} + \Sigma_\alpha \Sigma_\beta (f_\beta f_\alpha) \frac{dF_i}{da_\beta} \frac{dF_k}{da_\alpha}.$$

Mais, d'après le même théorème, on a aussi

$$[(F_i f_\alpha)] = (F_i f_\alpha) + \Sigma_\gamma (f_\gamma f_\alpha) \frac{dF_i}{da_\gamma};$$

donc, enfin, on a bien, en vertu des conditions (11), (16), (17),

$$[(F_i F_k)] = 0.$$

On verrait de même que l'on a aussi

$$[(F_i f_k)] = 0.$$

Remarque II. — Considérons deux fonctions quelconques φ et ψ renfermant n variables indépendantes $q_1, \ldots, q_n$ et les dérivées d'une fonc-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

tion par rapport à ces mêmes variables, et proposons-nous de chercher ce que devient l'expression $(\varphi\psi)$ quand on change les variables données en un nombre égal d'autres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ liées aux premières par des relations déterminées, quelconques d'ailleurs.

Soit u la fonction, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ses dérivées prises respectivement par rapport à $q_1, q_2, \ldots, q_n$, et enfin $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ses dérivées prises par rapport aux nouvelles variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; on aura, dans l'une ou l'autre hypothèse,

$$du = p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \ldots + p_n dq_n,$$

et

$$du = v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + \ldots + v_n dx_n.$$

Les seconds membres doivent devenir identiques quand on exprime les p et q en fonction des $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ou les v et x en fonction des $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Nous aurons ainsi

$$(18) \qquad v_k = \Sigma_h p_h \frac{dq_h}{dx_k} \quad \text{et} \quad p_h = \Sigma_k v_k \frac{dx_k}{dq_h};$$

de même, en dérivant la fonction φ dans l'une ou l'autre hypothèse, on aura

$$\frac{d\varphi}{dq_i} = \frac{d\varphi}{dx_1}\frac{dx_1}{dq_i} + \ldots + \frac{d\varphi}{dx_n}\frac{dx_n}{dq_i} + \frac{d\varphi}{dv_1}\frac{dv_1}{dq_i} + \ldots + \frac{d\varphi}{dv_n}\frac{dv_n}{dq_i},$$

$$\frac{d\varphi}{dp_i} = \frac{d\varphi}{dv_1}\frac{dv_1}{dp_i} + \ldots + \frac{d\varphi}{dv_n}\frac{dv_n}{dp_i}.$$

La fonction ψ donnerait des résultats analogues. On aura alors

$$\begin{aligned}(\varphi\psi) &= \sum_i \left(\frac{d\varphi}{dq_i}\frac{d\psi}{dp_i} - \frac{d\psi}{dq_i}\frac{d\varphi}{dp_i}\right) \\ &= \sum_i \sum_k \sum_{k'} \frac{dx_k}{dq_i}\frac{dv_{k'}}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_k}\frac{d\psi}{dv_{k'}} - \frac{d\psi}{dx_k}\frac{d\varphi}{dv_{k'}}\right) \\ &+ \sum_i \sum_k \sum_{k'} \frac{dv_k}{dq_i}\frac{dv_{k'}}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dv_k}\frac{d\psi}{dv_{k'}} - \frac{d\psi}{dv_k}\frac{d\varphi}{dv_{k'}}\right),\end{aligned}$$

cette dernière partie pouvant d'ailleurs s'écrire de la façon suivante :

$$\sum_i \sum_k \sum_{k'} \frac{d\varphi}{dv_k}\frac{d\psi}{dv_{k'}}\left(\frac{dv_k}{dq_i}\frac{dv_{k'}}{dp_i} - \frac{dv_{k'}}{dq_i}\frac{dv_k}{dp_i}\right).$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Comme dans chacune des sommes triples précédentes, on peut commencer par les sommations relatives à l'indice i, nous nous proposerons d'abord de calculer les deux sommes suivantes :

$$\sum_i \frac{dx_k}{dq_i}\frac{dv_{k'}}{dp_i} \quad \text{et} \quad \sum_i \left(\frac{dv_k}{dq_i}\frac{dv_{k'}}{dp_i} - \frac{dv_{k'}}{dq_i}\frac{dv_k}{dp_i}\right).$$

Pour la première, de l'identité

$$\Sigma_i p_i\, dq_i = \Sigma_k v_k\, dx_k,$$

on déduira la suivante :

$$dq_i = \sum_k \frac{dv_k}{dp_i}\, dx_k,$$

d'où l'on aura les équations

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{dx_k}{dq_h}\frac{dv_k}{dp_i} = 0, \tag{19}$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{dx_k}{dq_i}\frac{dv_k}{dp_i} = 1, \tag{20}$$

dont la première en donne $n-1$, quand on attribue successivement à h les valeurs $1, 2, \ldots, n$, i étant excepté. Nous obtenons donc ainsi un système de n équations, et nous aurons n systèmes semblables en donnant à i successivement les valeurs $1, 2, \ldots, n$. Si l'on multiplie maintenant l'une quelconque des équations du système précédent par $\frac{dx_k}{dq_i}$, et qu'on fasse la somme des résultats obtenus en donnant à i les valeurs successives $1, 2, \ldots, n$; si l'on opère de même pour toutes les équations du système précédent, et que l'on pose, en général,

$$\sum_i \frac{dx_k}{dq_i}\frac{dv_{k'}}{dp_i} = \mathrm{K}_{k'}, \quad \text{et} \quad \sum_i \frac{dx_k}{dq_i}\frac{dv_k}{dp_i} = 1 + \mathrm{K}_k,$$

on aura n équations qui seront données par la formule suivante :

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{dx_k}{dq_i}\,\mathrm{K}_k = 0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

en attribuant à i successivement les valeurs $1, 2, \ldots, n$. Comme le déterminant de ce système de n équations ne peut être nul, les fonctions $x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant supposées distinctes, on en déduira

$$K_1 = 0, \quad K_2 = 0, \ldots, \quad K_n = 0,$$

ou, en d'autres termes,

$$\sum_i \frac{dx_k}{dq_i}\frac{dv_{k'}}{dp_i} = 0, \quad \text{pour} \quad k \gtrless k',$$

et

$$\sum_i \frac{dx_k}{dq_i}\frac{dv_k}{dp_i} = 1, \quad \text{pour} \quad k = k'.$$

La première partie de l'expression $(\varphi\psi)$ transformée se réduira donc à la suivante :

$$\sum_k \left(\frac{d\varphi}{dx_k}\frac{d\psi}{dv_k} - \frac{d\psi}{dx_k}\frac{d\varphi}{dv_k} \right).$$

Occupons-nous maintenant de la seconde partie.

Si nous représentons par le symbole (k, k') la quantité $\sum_i \frac{dv_k}{dq_i}\frac{dv_{k'}}{dp_i}$, la quantité à calculer se représentera par l'expression $(kk') - (k'k)$. Le calcul de cette expression est basé sur la résolution du système de n équations que l'on obtient en donnant à h, dans la formule suivante,

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{dx_k}{dq_h} u_k = M_h, \tag{21}$$

successivement les valeurs $1, 2, \ldots, n$. La valeur de l'une des inconnues u_k sera de la forme

$$u_k = \sum_{h=1}^{h=n} C_{kh} M_h,$$

les quantités telles que C_{kh} pouvant d'ailleurs se déterminer immédiatement par cette simple remarque, que le système (21) deviendrait identique au système fourni par les formules (19) et (20) si toutes les quantités M_h s'annulaient, à l'exception de M_i qui devrait alors devenir

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

égal à l'unité; d'où il résulte que $C_{kk} = \frac{dv_k}{dp_k}$, et, par suite, que l'on a

$$u_k = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{dv_k}{dp_h} M_h. \tag{22}$$

Ceci posé, si nous considérons les valeurs de p_h et de p_i données par la formule (18), en les différentiant respectivement par rapport à q_i et q_h, puis égalant leurs valeurs, on aura l'équation

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{dx_k}{dq_h} \frac{dv_k}{dq_i} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{dx_k}{dq_i} \frac{dv_k}{dq_h},$$

qui en donne n quand on attribue à h successivement les valeurs 1, 2, ..., n. Si nous posons, en général,

$$M_k = \sum_{dk} \frac{dx_k}{dq_i} \frac{dv_k}{dq_h},$$

on obtiendra un système analogue au système (21), et qui se résoudra, par conséquent, par l'application de la formule (22). On obtiendra ainsi, pour une valeur quelconque de h,

$$\frac{dv_k}{dq_i} = \sum_{k'} \frac{dx_{k'}}{dq_i} (k, k');$$

et, comme en donnant à i successivement les valeurs 1, 2, ..., n, on obtient encore un système analogue au système (21), on en déduira, par une nouvelle application de la formule (22), $(kk') = (k'k)$; donc la seconde partie de l'expression $(\varphi\psi)$ est identiquement nulle, et, par suite, nous pouvons conclure que, par le changement des variables q_1, q_2, ..., q_n dans les suivantes x_1, x_2, ..., x_n, l'expression

$$(\varphi\psi) = \sum_i \left(\frac{d\varphi}{dq_i} \frac{d\psi}{dp_i} - \frac{d\psi}{dq_i} \frac{d\varphi}{dp_i} \right)$$

se change dans la suivante :

$$(\varphi\psi)' = \sum_k \left(\frac{d\varphi}{dx_k} \frac{d\psi}{dv_k} - \frac{d\psi}{dx_k} \frac{d\varphi}{dv_k} \right),$$

qui a exactement la même forme que la première.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

§ III. — *Des conditions que doivent satisfaire les équations proposées pour admettre une solution commune.*

Soit proposé d'intégrer le système suivant de m équations :

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \ldots, \quad f_m = 0, \tag{23}$$

$f_1, f_2, \ldots, f_m$ désignant des fonctions quelconques de $p_1, p_2, \ldots, p_n$, $q_1, q_2, \ldots, q_n$; le problème ne sera possible qu'autant que les fonctions considérées satisferont à des conditions dont la détermination résulte de ce qui précède. On a, en effet, démontré que, si l'on détermine au moyen d'un système de n équations de la forme

$$f_i = a_i,$$

des valeurs des $p_1, p_2, \ldots, p_n$ qui rendent l'expression

$$p_1\,dq_1 + \ldots + p_n\,dq_n$$

une différentielle exacte, les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ satisfont deux à deux à des conditions de la forme

$$(f_i f_k) = 0; \tag{24}$$

et, comme la réciproque de cette proposition a également été établie, nous sommes en droit de conclure, relativement aux équations (23), qu'*il est nécessaire et suffisant, pour que le système considéré admette une solution commune, que deux quelconques des fonctions* $f_1, f_2, \ldots, f_m$ *satisfassent à la condition* (24).

La formule (24) donne donc $\frac{m(m-1)}{2}$ conditions qui doivent être satisfaites soit identiquement, soit en vertu des équations données (23), soit enfin en établissant de nouvelles relations entre les quantités $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$. Ainsi donc, dans ce dernier cas, qui est celui où deux quelconques des fonctions données ne satisfont pas à la condition (24), il n'en faut pas conclure que le problème soit sans solution; mais, posant l'expression $(f_i f_k)$ égale à une nouvelle fonction f_h, on devra adjoindre l'équation $f_h = 0$ aux équations proposées (23), dont le

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

nombre sera ainsi augmenté d'une unité. Mais alors la fonction f_h devra aussi, pour que le problème proposé soit possible, satisfaire aux conditions (24), en lui adjoignant successivement les m fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Si, de nouveau, pour l'une de ces dernières en combinaison avec f_h, on n'a pas $(f_i f_h) = 0$, on opérera comme précédemment, en posant $(f_i f_h) = f_{h'}$, et joignant l'équation $f_{h'} = 0$ aux précédentes. On opérera ainsi successivement jusqu'à ce que l'on soit parvenu à un système d'équations distinctes $f_1 = 0, \ldots, f_m = 0, \ldots, f_{m'} = 0$, telles que, pour deux quelconques d'entre elles, la condition $(f_i f_k) = 0$ soit satisfaite. Alors, si $m' \leq n$, le problème proposé est possible, c'est-à-dire que les équations considérées admettent une solution commune; mais, si $m' > n$, le problème est impossible, car, en éliminant $p_1, p_2, \ldots, p_n$ entre les m' équations précédentes, on aurait pour résultat $m' - n$ relations entre les variables $q_1, \ldots, q_n$, ce qui ne peut arriver, puisque ces variables sont supposées indépendantes. On voit donc que l'on pourra arrêter les calculs précédents quand on aura n équations, et si alors elles ne satisfont pas toutes aux conditions énoncées, le problème est réellement impossible.

Si maintenant on recherche la véritable signification de la marche que nous venons d'indiquer, on voit qu'elle consiste à établir à chaque condition non satisfaite une nouvelle relation finie, c'est-à-dire libre de toute constante ou fonction arbitraire, entre les quantités $q_1, \ldots, q_n$, $p_1, \ldots, p_n$, ce qui restreint la généralité du problème; et on restreint ainsi de proche en proche la généralité du problème proposé jusqu'à le rendre possible, si cela se peut. On peut donc dire que, *si les conditions* (24) *ne sont pas immédiatement satisfaites, soit identiquement, soit en vertu des équations proposées, le problème est impossible à résoudre dans la généralité avec laquelle il est posé; qu'il peut parfois admettre des solutions plus particulières, à la condition toutefois d'établir de nouvelles relations entre les variables, ce qui en diminue la généralité.*

Nous verrons d'ailleurs dans la suite que l'introduction d'une nouvelle équation diminue d'une unité le nombre des constantes arbitraires entrant dans la solution complète.

Quoi qu'il en soit, on voit donc que l'on ramène le problème, quand il est susceptible de solution, à un autre plus particulier dont les équations satisfont toutes aux conditions d'intégrabilité, et qui pourra

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

être résolu dans toute sa généralité : nous n'aurons donc, dans la suite, que ce dernier cas à considérer.

§ IV. — *Des systèmes auxiliaires; leur composition et leurs propriétés.*

Après avoir déterminé les conditions que doivent remplir les équations proposées pour qu'elles puissent admettre une solution commune, nous avons à chercher les nouvelles relations qui, jointes aux précédentes, permettent de déterminer pour $p_1, p_2, \ldots, p_n$ des valeurs en fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_n$ telles, que l'expression $p_1\,dq_1 + \ldots + p_n\,dq_n$ soit une différentielle exacte. Le problème qu'on aura à résoudre pour la détermination de chacune des nouvelles relations en particulier pourra s'énoncer en général de la façon suivante :

Étant données entre les quantités $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ *les relations suivantes :*

$$f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2, \ldots, \quad f_s = a_s, \tag{25}$$

qui satisfont aux conditions (24), *trouver entre les mêmes quantités une nouvelle relation*

$$f_{s+1} = a_{s+1},$$

qui satisfasse aussi à ces mêmes conditions.

Nous représentons par $a_1, a_2, \ldots, a_s, a_{s+1}$ des constantes arbitraires, à l'exception des m premières, qui sont nulles; et, à propos de ces constantes, il importe de remarquer que ces nouvelles relations qui viennent s'adjoindre aux proposées conservent à la question toute sa généralité, eu égard à la constante arbitraire que chacune d'elles introduit dans le système des équations auxquelles elle vient se joindre.

Ceci posé, nous nous proposons de résoudre le problème que nous venons d'énoncer. La fonction cherchée f_{s+1} devra satisfaire à un système d'équations déduites des formules (8) ou (11), en donnant à k successivement les valeurs $1, 2, \ldots, s$, et donnant à i la valeur $(s+1)$. On pourrait même se servir de la formule (5), et alors on se propose-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

rait la détermination directe de p_{s+1} et non de f_{s+1}, ce qui, d'ailleurs, remplirait aussi bien le but que l'on se propose d'atteindre. Nous ferons actuellement usage de la formule (8), et pour cela nous supposerons que des équations (25) on déduise pour $p_1, p_2, \ldots, p_s$ des valeurs en fonction de $p_{s+1}, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n$, et des constantes $a_1, a_2, \ldots, a_s$; quant aux équations auxquelles la fonction f_{s+1} devra satisfaire, elles seront comprises dans la formule suivante :

$$\frac{df_{s+1}}{dq_k} + \sum_{\alpha=s+1}^{\alpha=n} \left(\frac{dp_k}{dq_\alpha} \frac{df_{s+1}}{dp_\alpha} - \frac{dp_k}{dp_\alpha} \frac{df_{s+1}}{dq_\alpha} \right) = 0, \tag{26}$$

où k prendra successivement les valeurs $1, 2, \ldots, s$. Les équations ainsi obtenues auront une forme spéciale qui permettra d'en déterminer une solution commune. Chaque fonction cherchée devra donc satisfaire à un système d'équations simultanées, lequel système est dit *auxiliaire*, par opposition au système des équations proposées qui est dit *principal*. Si le système principal se compose de m équations satisfaisant aux conditions d'intégrabilité, n étant le nombre des variables, les systèmes auxiliaires seront au nombre de $n - m$, et se composeront successivement de $m + 1, m + 2, \ldots, n$ équations; ils se déduiront du précédent (26), en donnant successivement à s les valeurs $m, m + 1, \ldots, n - 1$. Tous ces systèmes s'intégreront de la même façon, à cause de leur forme semblable, que nous appellerons *canonique;* et la recherche d'une solution particulière commune aux équations de l'un de ces systèmes s'effectuera au moyen des théorèmes qui suivent.

THÉORÈME I. — *Si $f_{s+1} = \varphi$ est une solution de l'une quelconque des équations du système* (26), *en remplaçant f_{s+1} par sa valeur φ dans une autre quelconque des équations du même système, si le résultat de la substitution n'est pas identiquement nul ou constant, il sera une nouvelle solution de la première équation considérée.*

Ce théorème est compris dans un autre plus général, et dont l'énoncé suit :

THÉORÈME II. — *Si φ et ψ sont deux fonctions de $p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ assujetties à la condition que l'on ait $(\varphi, \psi) = 0$, et que l'on considère*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

les deux équations simultanées

$$(\varphi f) = 0, \quad (\psi f) = 0,$$

où f est la fonction cherchée; si $f = f_1$ est une solution de la première de ces équations, par exemple, l'expression (ψf_1) résultant de la substitution de f_1 à f dans la seconde équation sera, si elle n'est identiquement nulle ou constante, une nouvelle solution de la première équation, solution qui peut d'ailleurs se réduire à une fonction de la précédente.

La démonstration des théorèmes qui précèdent est basée sur le lemme suivant :

LEMME. — *Si f, φ, ψ désignent trois fonctions quelconques de $p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$, on aura identiquement*

$$(f(\varphi\psi)) + (\varphi(\psi f)) + (\psi(f\varphi)) = 0. \tag{27}$$

En effet, nous avons

$$(\varphi\psi) = \sum_h \left(\frac{d\varphi}{dq_h}\frac{d\psi}{dp_h} - \frac{d\psi}{dq_h}\frac{d\varphi}{dp_h} \right),$$

et des formules analogues pour (ψf) et $(f\varphi)$. L'indice h de la formule précédente étant remplacé successivement par i et k, on en déduira facilement l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}(\varphi(\psi f)) = \sum_{i,h} \Bigg[& \frac{d\varphi}{dq_h}\left(\frac{d\psi}{dq_i}\frac{d^2 f}{dp_h dp_i} - \frac{d\psi}{dp_i}\frac{d^2 f}{dp_h dq_i}\right) - \frac{d\varphi}{dp_h}\left(\frac{d\psi}{dq_i}\frac{d^2 f}{dq_h dp_i} - \frac{d\psi}{dp_i}\frac{d^2 f}{dq_h dq_i}\right) \\ & - \frac{d\varphi}{dq_h}\left(\frac{df}{dq_i}\frac{d^2\psi}{dp_h dp_i} - \frac{df}{dp_i}\frac{d^2\psi}{dp_h dq_i}\right) + \frac{d\varphi}{dp_h}\left(\frac{df}{dq_i}\frac{d^2\psi}{dq_h dp_i} - \frac{df}{dp_i}\frac{d^2\psi}{dq_h dq_i}\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{28}$$

On obtiendra les développements de $(\varphi(f\varphi))$ et de $(f(\varphi\psi))$ en remplaçant, dans la formule précédente, les lettres φ, ψ, f successivement par les suivantes ψ, f, φ, puis par f, φ, ψ, et les indices h, i par i, k, et ensuite par k, h. On peut alors démontrer l'identité (27) en faisant voir que tous les termes en $d^2 f$, par exemple, s'entre-détruisent. Pour arriver à cette conclusion, il suffit de remarquer que les expressions $(\varphi(\psi f))$ et $(\psi(f\varphi))$ renferment seules des termes de l'espèce considérée; que les termes en question entrant dans la première de ces deux expressions

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

sont les mêmes en valeur absolue que ceux qui entrent dans la seconde; et enfin que les signes de ces premiers termes sont respectivement contraires des signes des seconds. Cette dernière assertion résulte de cette remarque que, dans l'égalité (28), tout terme contenant une dérivée seconde de f est positif si les deux variables par rapport auxquelles on dérive sont de même espèce, négatif dans le cas contraire; et que l'inverse a lieu pour les termes en $d^2\varphi$: comme dans la seconde expression f prend la place qu'occupe ψ dans la première, ce que nous avons avancé se trouve pleinement justifié. Ce que nous avons dit pour les termes en d^2f pouvant se répéter pour les termes en $d^2\varphi$ et en $d^2\psi$, la proposition énoncée est donc complétement démontrée.

Le second théorème énoncé se déduit immédiatement du lemme qui précède. En effet, si, comme on le suppose, on a identiquement $(\varphi\psi)=0$, et que $f=f_1$ soit une solution de l'équation $(\varphi\psi)=0$, on aura aussi l'identité $(\varphi f_1)=0$; en conséquence, si dans la relation (27) on remplace f par f_1, on aura l'identité suivante :

$$(\varphi(\psi f_1))=0,$$

ce qui démontre bien que, dans le cas où l'expression (ψf_1) n'est pas identiquement nulle ou constante, elle est une solution de l'équation $(\varphi f)=0$, ainsi qu'on l'avait annoncé.

Nous allons actuellement démontrer le premier théorème. Posons, pour cela,

$$\varphi=\varphi_1-p_k, \quad \psi=\psi_1-p_i,$$

ψ_1 et φ_1 étant deux fonctions des quantités $p_{s+1},\ldots, p_n$ et des variables $q_1,\ldots, q_n$, et k, i deux nombres quelconques de la suite $1,\ldots, s$, d'où il résulte que les fonctions ψ_1 et φ_1 ne contiennent ni p_i, ni k_i; si en outre la fonction f ne contient aussi que les quantités $p_{s+1},\ldots, p_n$, $q_1,\ldots, q_n$, ce qui est conforme au théorème en question, on aura, pour l'équation $(\varphi f)=0$ développée,

$$\frac{df}{dq_k}+\sum_{\alpha=s+1}^{\alpha=n}\left(\frac{d\varphi_1}{dq_\alpha}\frac{df}{dp_\alpha}-\frac{d\varphi_1}{dq_\alpha}\frac{df}{dq_\alpha}\right)=0; \tag{29}$$

l'équation $(\psi f)=0$ conduira à une équation en ψ_1 analogue à la pré-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

cédente, k y étant remplacé par i; enfin, la condition $(\varphi\psi) = 0$ deviendra alors

$$(30) \qquad \frac{d\psi_i}{dq_k} - \frac{d\varphi_i}{dq_i} + \sum_{\alpha=s+1}^{\alpha=n} \left(\frac{d\varphi_i}{dq_\alpha}\frac{d\psi_i}{dp_\alpha} - \frac{d\varphi_i}{dp_\alpha}\frac{d\psi_i}{dq_\alpha} \right) = 0.$$

Le théorème II démontré s'applique à l'équation (29) et à son analogue, quelles que soient les fonctions ψ_i et φ_i, pourvu qu'elles satisfassent à la condition exprimée par l'équation (30); si donc on considère pour ψ_i et φ_i les valeurs de p_i et de p_k exprimées en fonction des variables $p_{s+1}, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$, l'équation (29) et celle qui lui est jointe rentrent alors dans la formule (26), et la condition (30) devient la condition (5) antérieurement établie, et qui démontre le premier théorème énoncé.

Remarquons en passant que l'on aurait pu supposer, dans tout ce qui précède,

$$\begin{aligned} &p_1 \text{ fonction de } p_2, p_3, \ldots, \quad p_n, q_1, \ldots, q_n, \\ &p_2 \quad \text{» de} \quad p_3, \ldots, \quad p_n, q_1, \ldots, q_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &p_s \quad \text{» de} \quad p_{s+1}, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n; \end{aligned}$$

alors les équations d'un système auxiliaire n'auraient plus le même nombre de termes; mais les théorèmes précédents seraient encore applicables à ces équations, et, pour le démontrer, il suffirait de répéter les raisonnements précédents, en supposant toutefois que ψ_i contienne p_k et φ_i, p_i. Ce que nous dirons sur l'intégration des systèmes auxiliaires s'appliquera donc aussi bien à ce mode de composition qu'à celui que nous avons spécialement considéré.

§ V. — *Intégration des systèmes auxiliaires.*

Considérons le système auxiliaire déduit de la formule (26) en donnant à k successivement les valeurs 1, 2, ..., s; nous avons à chercher une solution commune des équations de ce système, ce que nous ferons en appliquant les théorèmes précédemment démontrés.

Soit $f_{s+1} = \varphi_1$ une solution particulière de l'une des équations considérées, de la première par exemple; en substituant cette valeur de φ_1 à

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

la place de f_{s+1} dans une autre équation du système, la seconde par exemple, le résultat de la substitution, s'il n'est pas nul ou constant, sera une nouvelle solution de la première équation; soit φ_2 ce résultat, on a

$$\varphi_2 = \frac{d\varphi_1}{dq_2} + \frac{dp_2}{dq_{s+1}}\frac{d\varphi_1}{dp_{s+1}} + \ldots + \frac{dp_2}{dq_n}\frac{d\varphi_1}{dp_n} - \frac{dp_2}{dp_{s+1}}\frac{d\varphi_1}{dq_{s+1}} - \ldots - \frac{dp_2}{dp_n}\frac{d\varphi_1}{dq_n}.$$

En opérant de nouveau avec φ_2, comme on l'a fait avec φ_1, ce qui revient à remplacer, dans l'égalité précédente, φ_1 par φ_2, on aura pour résultat une nouvelle solution φ_3 de la première équation, à la condition toutefois que φ_3 ne soit pas nul ou constant. On continuera ainsi les substitutions successives jusqu'à ce que l'on arrive à un résultat ou nul, ou constant, ou fonction des résultats antérieurement obtenus, ainsi que des variables $q_2, q_3, \ldots, q_s$, qui sont considérées comme constantes dans l'équation intégrée; et, à défaut des deux premières circonstances, la troisième se présentera toujours après un nombre limité d'opérations, puisque le nombre des solutions particulières distinctes de ladite équation est lui-même limité. Dans le cas d'un résultat nul, la fonction substituée est une solution commune des deux équations considérées; nous verrons bientôt l'usage que l'on ferait d'un résultat constant; enfin, dans le troisième cas, qui est en réalité le cas le plus général, si φ_μ est un résultat fonction des précédents $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{\mu-1}$ et des variables $q_2, \ldots, q_s$, une fonction quelconque ϖ de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{\mu-1}, q_2, \ldots, q_s$ sera encore une solution de la première équation; nous nous proposerons de déterminer la forme de cette fonction de façon qu'elle soit aussi une solution de la seconde équation. La condition à satisfaire pour cela se trouvera en remplaçant f_{s+1} par ϖ dans la seconde équation du système (26), et qui donnera, en tenant compte des valeurs de $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mu$,

$$(31) \qquad 0 = \frac{d\varpi}{dq_2} + \frac{d\varpi}{d\varphi_1}\varphi_2 + \frac{d\varpi}{d\varphi_2}\varphi_3 + \ldots + \frac{d\varpi}{d\varphi_{\mu-1}}\varphi_\mu,$$

équation dans laquelle $q_2, \varphi_1, \ldots, \varphi_{\mu-1}$ sont les variables, et φ_μ une fonction connue de ces variables. Soit $\varpi_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{\mu-1}, q_2)$ une solution de cette équation; en posant $f_{s+1} = \varpi_1$, on aura une solution commune des deux premières équations du système auxiliaire considéré, et il en sera de même d'une fonction quelconque de ϖ_1, des autres solutions de

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

l'équation (31) et des variables $q_3, \ldots, q_s$ qui sont considérées comme constantes dans ces deux équations. Dans le cas que nous avons seulement indiqué, où la série des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ se termine à une constante, on obtiendrait une solution commune en opérant comme précédemment, φ_μ se trouvant remplacé par la constante en question; mais, dans ce cas, on peut arriver beaucoup plus simplement au même résultat, en remarquant que $\varpi_1 = \varphi_{\mu-1} - c_1 q_2$ est une solution commune des deux équations considérées.

Ayant une solution commune de deux équations du système, nous allons nous en servir pour trouver une fonction qui soit à son tour une solution commune de trois équations du système considéré. Pour cela, nous substituerons ϖ_1 à la place de f_{s+1} dans la troisième équation, et le résultat de la substitution, s'il n'est nul ou constant, sera une nouvelle solution commune des deux premières; et opérant alors sur cette troisième équation comme on l'a fait précédemment sur la seconde, on déterminera une série de fonctions $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_\lambda$ qui seront des solutions communes des deux premières équations, la fonction ϖ_λ qui termine la série étant une fonction de $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_{\lambda-1}$ et des variables $q_3, q_4, \ldots, q_s$, à moins qu'elle ne soit nulle ou constante. Si elle était nulle, $\varpi_{\lambda-1}$ serait une solution commune des trois équations; si elle est constante et égale à c_2, $\varpi_{\lambda-1} - c_2 q_3$ sera cette solution commune; mais, dans le cas général, on se proposera de satisfaire à la troisième équation par une fonction ψ de $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_{\lambda-1}, q_3, \ldots, q_s$, cette fonction étant d'ailleurs, quelle que soit sa forme, une solution commune des deux premières équations. L'équation à laquelle la fonction ψ doit satisfaire est la suivante :

$$(32) \qquad 0 = \frac{d\psi}{dq_3} + \frac{d\psi}{d\varpi_1}\varpi_2 + \frac{d\psi}{d\varpi_2}\varpi_3 + \ldots + \frac{d\psi}{d\varpi_{\lambda-1}}\varpi_\lambda.$$

En opérant sur cette équation comme on l'a fait sur la précédente (31), et en continuant de la même façon pour les diverses équations du système considéré, on obtiendra enfin une fonction f_{s+1} de $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_{s+1}, p_{s+2}, \ldots, p_n$ qui sera une solution particulière commune de toutes les équations de ce système. Si l'on pose $f_{s+1} = a_{s+1}$, a_{s+1} étant une constante arbitraire, et que l'on joigne cette équation à celle que l'on a déjà (25), on obtiendra un système de $(s+1)$ équations entre les

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

quantités $p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$, et desquelles on pourra déduire les valeurs de $p_1, p_2, \ldots, p_{s+1}$ en fonction de $p_{s+2}, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$, valeurs qui serviront à la composition du système auxiliaire suivant dont dépend la détermination de f_{s+2}. En continuant ainsi, on parviendra à un système de n équations

$$(33) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \ldots, \quad f_m = 0, \quad f_{m+1} = a_{m+1}, \ldots, \quad f_n = a_n,$$

qui seront telles, que les valeurs qu'on en déduira pour $p_1, p_2, \ldots, p_n$ en fonction de $q_1, \ldots, q_n$ et des constantes $a_{m+1}, \ldots, a_n$ rendront l'expression $p_1 dq_1 + \ldots + p_n dq_n$ une différentielle exacte.

La marche que nous venons de suivre pourrait être un peu modifiée, suivant la remarque qui termine le § IV; mais la modification serait plus marquée si l'on partait des équations (11) au lieu des équations (8) dont on s'est servi jusqu'alors. La méthode à laquelle on serait conduit présenterait sur la précédente l'avantage d'éviter les calculs d'élimination que celle-ci suppose et qui la rendent parfois impraticable.

Supposons qu'il s'agisse, par exemple, de la détermination de la fonction f_{s+1}, elle devra satisfaire au système auxiliaire donné par la formule suivante :

$$(34) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{df_h}{dp_i} \frac{df_{s+1}}{dq_i} - \frac{df_h}{dq_i} \frac{df_{s+1}}{dp_i} \right) = 0,$$

lorsque h prend successivement les valeurs $1, 2, \ldots, s$.

L'intégration de ce système résultera alors de l'application du théorème II, et la marche à suivre sera analogue à la précédente.

On pourrait même généraliser ce qui précède, en supposant les systèmes auxiliaires composés d'équations rentrant dans les formules (26) et (27), et l'intégration s'effectuerait en appliquant tour à tour les théorèmes I et II.

Quelle que soit d'ailleurs la marche suivie, on obtiendra finalement pour $p_1, p_2, \ldots, p_n$ des valeurs contenant $n - m$ constantes arbitraires, et telles que, substituées dans l'expression

$$p_1 dq_1 + \ldots + p_n dq_n,$$

elles la rendent une différentielle exacte dont l'intégrale sera la fonc-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

tion cherchée V. Cette intégrale contiendra $n-m+1$ constantes arbitraires, en comptant celle qui s'introduit par simple addition; et nous verrons dans la suite que cette solution, que nous appellerons *solution complète*, peut donner toutes les autres par la variation des constantes.

§ VI. — *Remarque.*

Avant de quitter le sujet dont nous nous sommes occupés jusqu'à présent, nous poserons une remarque qui nous est suggérée par la généralité même de la méthode qui précède, et qui est peut-être susceptible d'application. En examinant un peu les calculs précédents, on remarque facilement que les quantités, $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ y sont simplement considérées comme formant deux séries de variables conjuguées deux à deux, sans que nulle part intervienne la signification de dérivées partielles attachées aux lettres $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Si donc on fait abstraction de cette signification des lettres $p_1, p_2, \ldots, p_n$, le problème proposé rentre dans cet autre plus général : *Étant données m relations entre les variables* $p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ *conjuguées deux à deux, on se propose d'en déterminer* $n-m$ *autres qui, jointes aux premières, permettent d'exprimer n des variables considérées et dont deux ne soient pas conjuguées, en fonction des n autres, de façon que l'expression*

$$\sum_{i=1}^{i=n} (\pm r_i ds_i) \tag{35}$$

soit une différentielle exacte, $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *désignant les n variables choisies et qui sont déterminées en fonction des n autres* $s_1, s_2, \ldots, s_n$ *respectivement conjuguées des précédentes.*

Les conditions que les relations données ou inconnues devront satisfaire varieront en général avec la forme de l'expression (35), et il en sera de même de l'intégrale obtenue. Mais, parmi les problèmes compris dans l'énoncé précédent, il en est qui présentent cette particularité remarquable, que les équations proposées doivent satisfaire aux mêmes conditions que dans le cas où il s'agit de former la différentielle exacte $\Sigma p_i dq_i$; et, en outre, les relations établies subséquemment entre les va-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

riables p et q sont aussi les mêmes que dans le cas précédemment considéré. Ces problèmes sont ceux où la différentielle exacte à obtenir est de la forme $\Sigma_i p_i dq_i - \Sigma_h q_h dp_h$, i prenant des valeurs quelconques de la suite 1, 2,..., n, et h toutes les autres. Mais l'intégrale différera dans tous les cas de celle obtenue pour $\Sigma p_i dq_i$; ses dérivées partielles seront les p_i et les q_h, ces derniers précédés du signe —; les variables correspondantes seront les q_i et les p_h. Si donc on considère simultanément deux problèmes dont les équations soient en nombre égal, et qui d'ailleurs soient telles, qu'on puisse passer des unes aux autres en remplaçant quelques-unes des variables indépendantes par leurs dérivées partielles correspondantes changées de signe, et ces dernières par les variables correspondantes et de même signe; alors, d'après ce qui précède, ces deux systèmes seront assujettis aux mêmes conditions, c'est-à-dire que, si l'un d'eux est intégrable, l'autre l'est aussi nécessairement; et, en outre, les nouvelles relations entre ces diverses quantités se déduiront les unes des autres par les mêmes changements que les équations proposées. Donc, en intégrant complétement l'un de ces systèmes, on aura immédiatement intégré d'autres systèmes présentant avec le premier les relations que nous avons dites, et pour la recherche de la solution complète desquels il ne reste plus qu'à effectuer la quadrature finale qui est différente dans chacun d'eux.

Démontrons maintenant ce que nous avons annoncé. Pour cela, il suffit de considérer le cas où, dans l'expression $p_1 dq_1 + \ldots + p_n dq_n$, on remplace un terme unique $+p_h dq_h$ par $\pm q_h dp_h$. Si nous considérons les conditions (5), (8), (11), elles s'appliquent au cas actuel en y changeant $+p_h$ en $\pm q_h$ et $+q_h$ en $+p_h$; on trouvera alors facilement que les termes dépendant de l'indice h dans la formule (11), par exemple, se réduisent, après les changements indiqués, au groupe suivant :

$$\mp\left(\frac{df_k}{dq_h}\frac{df_i}{dp_h} - \frac{df_k}{dp_h}\frac{df_i}{dq_h}\right);$$

d'où l'on voit que les équations (11) conserveront leur forme normale dans l'hypothèse actuelle, si l'on prend le signe + devant l'expression précédente, c'est-à-dire si l'on remplace $+p_h dq_h$ par $-q_h dp_h$. On démontrerait de même que les équations (8) conservent, dans le cas actuel, leur forme primitive, et, par suite, que les systèmes auxiliaires ne

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

seront pas modifiés par les changements que nous venons d'indiquer. D'où il résulte bien que, sauf la quadrature finale, tous les problèmes dans lesquels l'expression à rendre une différentielle exacte se ramène à la suivante : $\Sigma_i p_i dq_i - \Sigma_h p_h dq_h$, sont résolus en même temps par la résolution de l'un quelconque d'entre eux.

Ce qui précède peut d'ailleurs être établi directement, et, pour cela, il suffit de démontrer que, si les conditions (32) sont telles, que les valeurs qu'on en déduit pour $p_1, \ldots, p_n$ en fonction de $q_1, \ldots, q_n$ rendent l'expression $p_1 dq_1 + \ldots$ une différentielle exacte, ces mêmes équations fourniront pour $q_1, p_2, \ldots, p_n$ des valeurs en fonction de $p_1, q_2, \ldots, q_n$ qui rendront aussi l'expression $-q_1 dp_1 + p_2 dq_2 + \ldots + p_n dq_n$ une différentielle exacte; ou, en d'autres termes, que, pour toute valeur de α, on a

$$\left(\frac{dp_\alpha}{dp_1}\right) = -\left(\frac{dq_1}{dq_\alpha}\right).$$

Soit pour cela $f_i = a_i$ l'une des équations données; en différentiant par rapport à p_1 et par rapport à q_α, on en déduira

$$(36) \qquad 0 = \frac{df_i}{dp_1} + \frac{df_i}{dq_1}\left(\frac{dq_1}{dp_1}\right) + \frac{df_i}{dp_2}\left(\frac{dp_2}{dp_1}\right) + \ldots + \frac{df_i}{dp_n}\left(\frac{dp_n}{dp_1}\right),$$

$$(37) \qquad 0 = \frac{df_i}{dq_\alpha} + \frac{df_i}{dq_1}\left(\frac{dq_1}{dq_\alpha}\right) + \frac{df_i}{dp_2}\left(\frac{dp_2}{dq_\alpha}\right) + \ldots + \frac{df_i}{dp_n}\left(\frac{dp_n}{dq_\alpha}\right).$$

Donnant à i successivement les valeurs $1, 2, \ldots, n$, chaque formule précédente donnera un système de n équations d'où l'on pourra déduire, d'une part les valeurs des $\frac{dq_1}{dp_1}, \frac{dp_2}{dp_1}, \ldots, \frac{dp_n}{dp_1}$, de l'autre celles des $\frac{dq_1}{dq_\alpha}, \frac{dp_2}{dq_\alpha}, \ldots, \frac{dp_n}{dq_\alpha}$. Ces deux systèmes ont pour déterminant commun

$$\Delta = \sum\left(\pm \frac{df_1}{dq_1}\frac{df_2}{dp_2}\cdots\frac{df_n}{dp_n}\right),$$

qui peut s'écrire, en ordonnant par rapport aux produits des éléments des colonnes verticales de rangs 1 et α,

$$(38) \qquad \Delta = \sum_i \sum_k \left(\frac{df_i}{dq_1}\frac{df_{i+k}}{dp_\alpha} - \frac{df_{i+k}}{dq_1}\frac{df_i}{dp_\alpha}\right)\delta_{1,\alpha}^{(i,i+k)},$$

$\delta_{1,\alpha}^{(i,i+k)}$ étant le déterminant qui résulte de Δ quand on y supprime les

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

colonnes verticales de rangs 1 et α, et les colonnes horizontales de rangs i et $i+k$; i devant recevoir successivement toutes les valeurs 1, 2,..., $n-1$, et k, pour chaque valeur de i, toutes les valeurs positives satisfaisant à la condition $k \leq n-1$. D'après un théorème connu, on a identiquement

$$(39) \qquad 0 = \sum_i \sum_k \left(\frac{df_i}{dp_{\alpha'}} \frac{df_{i+k}}{dp_\alpha} - \frac{df_{i+k}}{dp_{\alpha'}} \frac{df_i}{dp_\alpha} \right) \delta_{1,\alpha}^{(i,i+k)},$$

et par conséquent aussi

$$(40) \qquad 0 = \sum_i \sum_k \left(\frac{df_i}{dp_{\alpha'}} \frac{df_{i+k}}{dq_{\alpha'}} - \frac{df_{i+k}}{dp_{\alpha'}} \frac{df_i}{dq_{\alpha'}} \right) \delta_{1,\alpha}^{(i,i+k)}.$$

Mais les systèmes d'équations déduits des formules (36) et (37) donnent

$$\frac{dq_1}{dq_\alpha} = + \sum_i \sum_k \left(- \frac{df_i}{dq_\alpha} \frac{df_{i+k}}{dp_\alpha} + \frac{df_i}{dp_\alpha} \frac{df_{i+k}}{dq_\alpha} \right) \delta_{1,\alpha}^{(i,i+k)},$$

$$\frac{dp_\alpha}{dp_1} = + \sum_i \sum_k \left(- \frac{df_i}{dq_1} \frac{df_{i+k}}{dp_1} + \frac{df_i}{dp_1} \frac{df_{i+k}}{dq_1} \right) \delta_{1,\alpha}^{(i,i+k)};$$

en additionnant ces deux valeurs avec les identités déduites de (40), en donnant à α' les valeurs 2, 3,..., $\alpha-1$, $\alpha+1$,..., n, on aura

$$\frac{dq_1}{dq_\alpha} + \frac{dp_\alpha}{dp_1} = \Sigma_i \Sigma_k (f_i f_{i+k}) \delta_{1,\alpha}^{(i,i+k)},$$

et comme les fonctions f_i, f_{i+k} satisfont par hypothèse aux conditions (11), on en conclura que

$$\frac{dq_1}{dq_\alpha} = - \frac{dp_\alpha}{dq_1},$$

ce qui est justement ce que l'on voulait démontrer.

§ VII. — *Des diverses classes de solutions d'un système d'équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre.*

Nous appellerons *intégrale* ou *solution complète* d'un système d'équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre, une solution renfermant un nombre tel de constantes arbitraires, que l'on puisse, par

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

leur élimination entre la fonction et ses dérivées du premier ordre, obtenir un système d'équations équivalent à celui qui est proposé.

D'après cette définition, l'intégrale complète représentera, entre la fonction et les variables, des dépendances précisément équivalentes à celles qui sont exprimées par les équations proposées.

D'après la définition précédente, on voit immédiatement que, *si le système proposé se compose de m équations, le nombre des variables étant égal à n, celui des constantes entrant dans la solution complète sera égal à* $n - m + 1$, *les équations proposées étant d'ailleurs supposées satisfaire aux conditons d'intégrabilité.*

Remarquons que, si les équations proposées ne renferment pas la fonction cherchée, l'élimination ne devra s'effectuer qu'entre les équations dérivées de la solution complète; par conséquent, si l'on a m équations, les dérivées en question ne pourront contenir que $n - m$ constantes. Mais, quant à l'intégrale complète, elle contiendra, comme précédemment, $n - m + 1$ constantes, en comptant celle qui s'introduit par simple addition.

Ceci posé, nous nous proposons de déduire de nouvelles solutions des équations proposées, en remplaçant les constantes de la solution complète par des fonctions des variables : ces fonctions devront être tellement choisies, que la nouvelle valeur obtenue pour la solution satisfasse encore aux équations proposées.

Si $V = f(q_1, q_2, \ldots, q_n, a_1, a_2, \ldots, a_h)$ est l'intégrale complète d'un système de $n - h + 1$ équations, les conditions que devront satisfaire les fonctions de $q_1, q_2, \ldots, q_n$, mises à la place des constantes $a_1, a_2, \ldots, a_h$, seront exprimées par les équations déduites de la formule suivante :

$$\sum_{i=1}^{i=h} \frac{df}{da_i} \frac{da_i}{dq_k} = 0, \tag{41}$$

quand on y remplace k successivement par les nombres $1, 2, \ldots, n$.

Pour déduire des équations précédentes (41) les conséquences qu'elles comportent, nous nous servirons du théorème suivant qui exprime la propriété principale des déterminants fonctionnels de Jacobi :

THÉORÈME. — *Si n fonctions* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *de n variables indépendantes*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$q_1, q_2, \ldots, q_n$ ont entre elles une ou plusieurs relations quelconques, le déterminant fonctionnel de ces fonctions est nul.

Réciproquement, si le déterminant fonctionnel de n fonctions à n variables est nul, il y a entre ces fonctions une ou plusieurs relations.

Revenons maintenant aux équations (41), et voyons de quelle façon on pourra les satisfaire.

Supposons, en premier lieu, qu'en prenant d'une manière quelconque k équations du système (41), le déterminant de ce système partiel dans lequel les termes de la forme $\frac{df}{da_i}$ sont considérés comme les inconnues, soit différent de zéro, et cela pour tous les groupes possibles de k équations : les équations précédentes ne pourront alors être satisfaites qu'en posant

$$\frac{df}{da_1} = 0, \quad \frac{df}{da_2} = 0, \ldots, \quad \frac{df}{da_k} = 0.$$

Résolvant ces équations par rapport aux quantités $a_1, a_2, \ldots, a_k$, on déterminera pour ces dernières quantités des valeurs en fonction des variables $q_1, \ldots, q_n$, et qui seront telles, que, substituées dans la solution complète à la place des constantes, la fonction obtenue sera une solution des équations intégrées. Les solutions de cette nature sont en nombre limité, et présentent cette particularité, qu'elles ne contiennent aucune quantité arbitraire. Nous les désignerons sous le nom de *solutions singulières*.

Si, contrairement à ce qui précède, on suppose maintenant que l'un au moins des déterminants dont il est question precédemment soit nul, il suffira, pour cela, d'établir une ou plusieurs relations, quelconques d'ailleurs, entre les fonctions $a_1, \ldots, a_k$, et les équations (41) seront alors identiquement satisfaites, quelles que soient les fonctions et les relations qui existent entre elles. Suivant le nombre de relations que nous établirons entre les fonctions en question, nous obtiendrons des classes de solutions ayant des caractères très-différents; ces solutions contiendront un nombre plus ou moins grand de fonctions arbitraires, et pour cela nous les appellerons des *intégrales générales*.

Supposons d'abord que l'on n'établisse qu'une seule relation entre les fonctions $a_1, a_2, \ldots, a_k$, et que l'une de ces quantités a_k soit une

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

fonction arbitraire des autres, en totalité ou en partie, on aura

$$(42) \qquad V = f(q_1, q_2, \ldots, q_n, a_1, \ldots, a_h), \quad a_h = \varphi(a_1, \ldots, a_{h-1}).$$

Si, dans cette hypothèse, on dérive la fonction V par rapport à q_i, en remarquant que

$$p_i = \frac{df}{dq_i},$$

on aura

$$0 = \sum_{k=1}^{k=h-1} \frac{df}{da_k} \frac{da_k}{dq_i} + \frac{df}{da_h} \sum_{k=1}^{k=h-1} \frac{d\varphi}{da_k} \frac{da_k}{dq_i};$$

multipliant par dq_i, et ajoutant les égalités obtenues de la précédente en donnant à i les valeurs 1, 2,..., n, et égalant séparément à zéro les coefficients des différentielles da_1, da_2,..., da_{h-1}, on aura $h-1$ équations de la forme

$$(43) \qquad \begin{cases} 0 = \dfrac{df}{da_k} + \dfrac{df}{da_h} \dfrac{d\varphi}{da_k}, \\ (k = 1, 2, \ldots, h-1). \end{cases}$$

Ces dernières équations permettraient, dans le cas où la fonction φ serait particularisée, d'éliminer les arbitraires a_1, a_2,..., a_{h-1} de l'intégrale V qui contient aussi une fonction arbitraire.

La solution V, accompagnée des $(h-1)$ équations (43), représente une intégrale générale de l'espèce qui ne contient qu'une fonction arbitraire.

Si maintenant nous supposons que l'on exprime en général un nombre r des fonctions a_1, a_2,..., a_h en fonction des $h-r$ autres, on aura, pour l'une d'elles,

$$a_{h-r+l} = \varphi_l(a_1, a_2, \ldots, a_{h-r}), \quad (l = 1, 2, \ldots, r),$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ étant des fonctions arbitraires.

Si l'on dérive, comme précédemment, la fonction V par rapport à q_i, en supposant que a_1, a_2, ..., a_h soient des fonctions présentant entre elles les relations que nous avons dites, on trouvera n équations de la forme

$$0 = \sum_{k=1}^{k=h-r} \frac{df}{da_k} \frac{da_k}{dq_i} + \sum_{l=1}^{l=r} \frac{df}{da_{h-r+l}} \sum_{k=1}^{k=h-r} \frac{d\varphi_l}{da_k} \frac{da_k}{dq_i},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

en faisant successivement $i = 1, 2, 3, \ldots, n$; elles conduiront à leur tour aux $h - r$ équations de la forme suivante :

$$(44) \qquad o = \frac{df}{da_k} + \sum_{l=1}^{l=r} \frac{df}{da_{h-r+l}} \frac{d\varphi_l}{da_k},$$

en faisant successivement $k = 1, 2, 3, \ldots, h - r$.

Ces équations permettraient de déterminer les valeurs des fonctions a_k si les formes des fonctions φ_l étaient particularisées; la fonction V, accompagnée de ces $h - r$ équations, représente une intégrale générale de l'espèce qui contient r fonctions arbitraires. Si l'on attribue à r successivement les valeurs $1, 2, \ldots, h - 1$, on aura les formules de $h - 1$ classes de solutions générales renfermant successivement $1, 2, \ldots, h - 1$ fonctions arbitraires. Le cas d'une seule fonction arbitraire que nous avons considéré isolément est compris dans la formule actuelle, ainsi que le dernier cas où toutes les constantes, moins une, sont des fonctions de cette dernière.

Ces différentes classes de solutions ont un caractère très-différent, suivant le nombre des relations arbitraires que l'on suppose exister entre les constantes arbitraires. La classe renfermant les solutions les plus générales est celle où il n'entre qu'une relation entre les constantes, et cette généralité diminue quand le nombre des relations, et par suite des fonctions arbitraires, augmente; car il est visible que l'étendue ou l'indétermination des résultats est d'autant plus grande que les constantes ont moins de conditions à satisfaire. A la limite de ces classes, on peut considérer l'intégrale complète, puisque l'on peut supposer h relations arbitraires entre les h constantes, ce qui donnerait pour chacune d'elles une fonction arbitraire de quantités constantes, c'est-à-dire une constante arbitraire.

Les solutions des diverses classes peuvent encore renfermer dans leurs fonctions arbitraires des constantes aussi arbitraires et en nombre quelconque. Si donc, dans l'une des solutions générales, on donne aux fonctions arbitraires en tout h constantes aussi arbitraires, en particularisant d'une manière quelconque les fonctions, l'intégrale générale considérée deviendra une *solution complète* de laquelle on pourrait déduire des classes de solutions dont le degré de généralité dépendrait

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

aussi du nombre des fonctions arbitraires qu'elles contiendraient respectivement. Il semblerait donc, d'après cela, que le nombre des solutions complètes, et par suite celui des solutions des diverses classes, doive être considéré comme infini; mais nous démontrerons dans la suite que l'on peut d'une solution complète unique déduire toutes les autres solutions dont le système d'équations proposé est susceptible; d'où il résulte que les solutions déduites de plusieurs solutions complètes rentrent les unes dans les autres.

On peut aussi particulariser chaque solution générale de manière qu'il en résulte une solution appartenant à une classe moins générale. Par exemple, si k constantes sont des fonctions arbitraires des $h-k$ autres, et si l est compris entre h et k, on peut particulariser les k fonctions arbitraires de façon qu'elles contiennent l fonctions arbitraires de $h-l$ constantes; on pourra alors regarder cette solution comme appartenant à une classe moins générale que la première, et pouvant se déduire de la solution complète en y considérant l constantes comme fonctions arbitraires des autres, et en mettant pour celles-ci de telles fonctions, que les coefficients différentiels partiels de la solution complète, pris par rapport à elles, s'évanouissent.

Enfin, pour terminer ces généralités, nous remarquerons qu'il pourrait se faire aussi que les fonctions arbitraires, au nombre de r, par exemple, qui entrent dans les intégrales générales de la $r^{ième}$ classe, ne continssent pas toutes les $h-r$ dernières constantes arbitraires. On pourrait alors, sans particulariser les fonctions arbitraires, éliminer de la solution considérée les constantes qui n'entrent dans aucune fonction arbitraire. Les valeurs de ces dernières, que nous supposerons être $a_1, a_2, \ldots, a_s$, seraient données par les équations

$$\frac{df}{da_1}=0, \quad \frac{df}{da_2}=0, \ldots, \quad \frac{df}{da_s}=0.$$

Les valeurs fournies par ces équations pour $a_1, \ldots, a_s$ contiendront les fonctions arbitraires $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ de $a_{s+1}, \ldots, a_{h-r}$, ainsi que ces dernières constantes; substituant ces valeurs dans la solutiou générale, elle contiendra, outre les constantes $a_{s+1}, \ldots, a_{h-r}$, r fonctions arbitraires de ces mêmes constantes; les fonctions mises à la place des constantes restantes devront satisfaire à des équations de la forme (44),

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

où k ne devra recevoir que les valeurs suivantes : $s+1$, $s+2$, ..., $h-r$.

Remarquons aussi que, dans la recherche des intégrales générales, aussi bien que dans celle des solutions singulières, certaines constantes auraient pu être considérées absolument comme telles. Pour les intégrales générales, cela ne conduit à rien de particulier; mais, dans le cas des solutions singulières, si l'on remplace les constantes demeurées telles par des fonctions présentant entre elles une ou plusieurs relations, ces solutions nouvelles satisferont aux équations proposées, et l'on aura ainsi une nouvelle classe de solutions ne rentrant ni dans la catégorie des intégrales générales, ni dans celle des solutions singulières. Ces *solutions*, que nous appellerons *mixtes*, pourraient se diviser en classes et en groupes dépendant du plus ou moins grand nombre de constantes laissées telles dans la recherche des solutions singulières, et aussi du nombre de relations établies entre les fonctions que l'on substitue à ces constantes. Il nous suffit d'indiquer cette nouvelle catégorie de solutions auxquelles on pourrait d'ailleurs appliquer quelques-unes des observations relatives aux intégrales générales. Maintenant, avant de démontrer le théorème important que nous avons précédemment énoncé, nous allons vérifier que *l'élimination des fonctions arbitraires que renferme une solution générale quelconque conduit bien à un système de* $n-h+1$ *équations aux dérivées partielles du premier ordre*, n étant le nombre des variables indépendantes, et h le nombre des constantes de la solution complète.

Considérons, en effet, une intégrale générale renfermant r fonctions arbitraires des $h-r$ constantes a_1, a_2, ..., a_{h-r}, les fonctions substituées à ces dernières constantes étant d'ailleurs assujetties à satisfaire aux équations (44); on aura, en différentiant l'intégrale par rapport à q_i,

$$p_i = \frac{df}{dq_i} + \sum_{k=1}^{k=h-r} \frac{df}{da_k}\frac{da_k}{dq_i} + \sum_{l=1}^{l=r} \frac{df}{da_{h-r+l}} \sum_{k=1}^{k=h-r} \frac{d\varphi_l}{da_k}\frac{da_k}{dq_i},$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Mais, au moyen des équations (44), le système précédent se réduit au

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

suivant :

$$p_1 = \frac{df}{dq_1}, \quad p_2 = \frac{df}{dq_2}, \ldots, \qquad p_n = \frac{df}{dq_n};$$

et, si l'on élimine entre ces dernières équations et l'intégrale générale considérée les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_{h-r}, \varphi_1, \ldots, \varphi_r$, au nombre de h, on obtiendra bien finalement un système de $n - h + 1$ équations, comme nous nous proposions de le démontrer.

Enfin, pour terminer, nous allons établir le théorème général suivant :

Toutes les solutions dont un système d'équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre est susceptible peuvent se déduire d'une solution complète unique.

Soit $V = \psi(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ une solution commune des $n - m$ équations simultanées dont l'une est la suivante :

$$(45) \qquad \begin{cases} f_i(q_1, q_2 \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = 0, \\ (i = 1, 2, 3, \ldots, n - m), \end{cases}$$

et soit

$$(46) \qquad V = f(q_1, q_2, \ldots, q_n, a_1, a_2, \ldots, a_{m+1})$$

une solution complète de ce système.

Si nous déterminons les valeurs des constantes $a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}$ au moyen des $m + 1$ équations suivantes :

$$(47) \qquad f = \psi, \quad \frac{df}{dq_1} = \frac{d\psi}{dq_1}, \ldots, \quad \frac{df}{dq_m} = \frac{d\psi}{dq_m},$$

je dis que les dérivées des fonctions f et ψ, par rapport aux variables $q_{m+1}, \ldots, q_n$, seront aussi égales chacune à chacune.

En effet, par hypothèse, on a les deux systèmes d'équations satisfaites résultant des deux formules suivantes :

$$f_i\left(q_1, q_2, \ldots, q_n, \frac{d\psi}{dq_1}, \ldots, \frac{d\psi}{dq_n}\right) = 0, \quad f_i\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{df}{dq_1}, \ldots, \frac{df}{dq_n}\right) = 0,$$

quand on donne à i les valeurs successives $1, 2, \ldots, n - m$; et le der-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

nier de ces systèmes, en vertu des équations (47), devient le suivant :

$$f_i\left(q_1, q_2, \ldots, q_m, \frac{d\psi}{dq_1}, \ldots, \frac{d\psi}{dq_m}, \frac{df}{dq_{m+1}}, \ldots, \frac{df}{dq_n}\right) = 0,$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots, n - m).$$

Comparant alors ce dernier système au premier, on en conclut les égalités

$$\frac{df}{dq_{m+1}} = \frac{d\psi}{dq_{m+1}}, \ldots, \quad \frac{df}{dq_n} = \frac{d\psi}{dq_n}, \tag{48}$$

qui auront lieu en même temps que les équations (47). Donc si, dans la solution complète, on attribue aux constantes $a_1, \ldots, a_{m+1}$ les valeurs déterminées par les équations (47), elle devient égale à la fonction ψ, et les dérivées successives de ces deux fonctions le sont aussi : la solution $V = \psi$ est donc bien comprise dans la solution complète. Il nous reste à déterminer l'espèce de la solution.

Les valeurs obtenues des équations (47), pour les constantes a_1, $a_2, \ldots, a_{m+1}$, sont généralement des fonctions des variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Dans le cas particulier où ces valeurs seraient constantes, la solution considérée serait une solution particulière de l'intégrale complète. Dans le cas général, si l'on remplace dans la fonction f les constantes par leurs valeurs, on aura l'identité $f = \psi$; différentiant, par rapport à q_k, les deux membres de cette égalité, on aura

$$\frac{d\psi}{dq_k} = \frac{df}{dq_k} + \sum_{h=1}^{h=m+1} \frac{df}{da_h}\frac{da_h}{dq_k},$$

$$(k = 1, 2, 3 \ldots, n);$$

comparant ces égalités aux précédentes (47), (48), qu'on suppose satisfaites, on aura le système suivant de conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \displaystyle\sum_{h=1}^{h=m+1} \frac{df}{da_h}\frac{da_h}{dq_k}, \\ (k = 1, 2, \ldots, n). \end{array} \right. \tag{49}$$

Si les valeurs obtenues pour $a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}$ sont telles, qu'en prenant un groupe quelconque de m équations du système précédent, le déter-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

minant correspondant, et dont les éléments sont les dérivées partielles des fonctions mises pour $a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}$, soit différent de zéro, alors les équations (49) exigent que l'on ait en même temps

$$\frac{df}{da_1} = 0, \quad \frac{df}{da_2} = 0, \ldots, \quad \frac{df}{da_{m+1}} = 0,$$

c'est-à-dire que la solution considérée rentre dans la catégorie des solutions singulières. Mais si, contrairement à ce qui précède, de quelque façon que l'on choisisse m équations du système (49), le déterminant du système ainsi formé est constamment égal à zéro, les fonctions a_1, $a_2, \ldots, a_{m+1}$ ont entre elles une ou plusieurs relations, et la solution considérée est une solution particulière de l'une des intégrales générales.

En terminant, nous remarquerons que, si l'on a à intégrer un système d'équations en nombre égal à celui des variables, l'intégrale complète ne contiendra plus qu'une constante; dans ce cas, l'intégrale générale se confond avec la solution complète, et, quant aux solutions singulières, elles résultent encore de l'élimination de la constante a_1 entre les deux équations

$$V = f(q_1, q_2, \ldots, q_n, a_1) \quad \text{et} \quad \frac{df}{da_1} = 0.$$

Dans le paragraphe suivant, nous allons appliquer à un exemple particulier la méthode d'intégration précédemment développée pour l'intégration des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre.

§ VIII. — *Application.*

Soit proposé d'intégrer le système suivant :

$$f_1 = p_1 p_4 - q_2 q_3 = 0,$$
$$f_2 = p_2 p_3 - q_1 q_4 = 0.$$

Si nous formons l'expression représentée par le symbole $(f_1 f_2)$, nous trouvons qu'elle ne s'annule pas, et que sa valeur f_3 est la suivante :

$$f_3 = q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3 + q_4 p_4.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On trouve ensuite que ces trois fonctions f_1, f_2, f_3 donnent $(f_1 f_3) = 0$, $(f_2 f_3) = 0$; posant donc $f_3 = 0$, c'est-à-dire $(f_1 f_2) = 0$, la question sera ramenée à l'intégration d'un système de trois équations

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0,$$

satisfaisant aux conditions d'intégrabilité.

Nous avons à chercher une nouvelle relation de la forme $f_4 = a$, qui, jointe aux précédentes, permette de déterminer pour p_1, p_2, p_3, p_4 des valeurs en fonction de q_1, q_2, q_3, q_4, qui, substituées dans l'expression $p_1\,dq_1 + \ldots + p_4\,dq_4$, la rendent une différentielle exacte.

Si nous supposons que des équations (49) on tire les valeurs de p_1, p_2, p_3 en fonctions de p_4, q_1, q_2, q_3, q_4, la fonction f_4 devra satisfaire à un système de trois équations dont la formule est la suivante :

$$0 = \frac{df}{dq_m} + \frac{dp_m}{dq_4}\frac{df}{dp_4} - \frac{dp_m}{dp_4}\frac{df}{dq_4},$$
$$(m = 1, 2, 3).$$

Les équations (49) nous donnent les valeurs suivantes :

$$p_1 = \frac{q_2 q_3}{p_4}, \quad p_2 = \frac{q_1 q_4}{p_3}, \quad p_3 = \frac{q_1 q_2 q_3 + q_4 p_4^2 \pm (q_1 q_2 q_3 - q_4 p_4^2)}{2 q_3 p_4},$$

pour lesquelles il nous faudra considérer deux cas, suivant le signe que l'on prend dans la valeur de p_3.

Premier cas. — On prend le signe supérieur, d'où

$$p_1 = \frac{q_2 q_3}{p_4}, \quad p_2 = \frac{q_1 p_4}{q_2}, \quad p_3 = \frac{q_1 q_2}{p_4};$$

les équations du système auxiliaires sont alors les suivantes :

$$0 = \frac{df}{dq_1} + \frac{q_2 q_3}{p_4^2}\frac{df}{dq_4},$$
$$0 = \frac{df}{dq_2} + \frac{p_4}{q_2}\frac{df}{dp_4} - \frac{q_4}{p_2}\frac{df}{dq_4},$$
$$0 = \frac{df}{dq_3} + \frac{q_1 q_2}{p_4^2}\frac{df}{dq_4}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La première de ces équations admet la solution

$$f = q_4 - \frac{q_1 q_2 q_3}{p_4^2} = \varphi_1;$$

portant cette valeur dans la seconde équation, à la place de f, on obtient, pour le résultat,

$$\varphi_2 = -\frac{q_4}{q_2} + \frac{q_1 q_3}{p_4^2} = -\frac{\varphi_1}{q_2},$$

qui n'est pas une nouvelle solution, mais simplement une fonction de la première, puisque, dans cette première équation, q_2 est considéré comme une constante. Une fonction quelconque de φ_1, q_2, q_3 sera encore une solution de la première équation; soit $\varpi(\varphi_1, q_2, q_3)$ une telle fonction : nous nous proposons de déterminer la forme de cette fonction ϖ de façon qu'elle soit aussi une solution de la seconde équation. La condition pour que cela ait lieu est que l'on ait

$$0 = \frac{d\varpi}{dq_2} + \frac{d\varpi}{dq_1}\varphi_2.$$

Cette équation admet la solution particulière $q_2\varphi_1$ qui, satisfaisant aussi, comme il est facile de le constater, à la troisième équation du système, sera la solution commune cherchée. On devra donc joindre aux équations (49) la suivante :

$$f_4 = q_2 q_4 - \frac{q_1 q_2^2 q_3}{p_4^2} = a,$$

et de ces quatre équations on déduira

$$p_1 = q_3\frac{\sqrt{q_2 q_4 - a}}{\sqrt{q_1 q_3}}, \quad p_2 = q_4\frac{\sqrt{q_1 q_3}}{\sqrt{q_2 q_4 - a}},$$

$$p_3 = q_1\frac{\sqrt{q_2 q_4 - a}}{\sqrt{q_1 q_3}}, \quad p_4 = q_2\frac{\sqrt{q_1 q_3}}{\sqrt{q_2 q_4 - a}}.$$

La différentielle exacte $p_1\,dq_1 + \ldots + p_4\,dq_4$ aura ainsi pour intégrale la fonction

$$V = 2q_1^{\frac{1}{2}} q_3^{\frac{1}{2}}(q_2 q_4 - a)^{\frac{1}{2}} + b,$$

et c'est là une solution complète des équations proposées. Il est facile

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de vérifier qu'elle ne donne pas de solutions singulières, et qu'elle admet pour intégrale générale celle qui est définie par le système

$$V = 2q_1^{\frac{1}{2}} q_3^{\frac{1}{2}} (q_2 q_4 - a)^{\frac{1}{2}} + \varphi(a), \quad o = q_1^{\frac{1}{2}} q_3^{\frac{1}{2}} (q_2 q_4 - a)^{-\frac{1}{2}} - \varphi'(a),$$

φ représentant une fonction complétement arbitraire.

Deuxième cas. — On prend le signe inférieur dans la valeur de p_3; on a alors

$$p_1 = \frac{q_2 q_3}{p_4}, \quad p_2 = \frac{q_1 q_3}{p_4}, \quad p_3 = \frac{q_1 p_4}{q_3},$$

et le système auxiliaire est le suivant :

$$o = \frac{df}{dq_1} + \frac{q_2 q_3}{p_4^2} \frac{df}{dq_4},$$

$$o = \frac{df}{dq_2} + \frac{q_1 q_3}{p_4^2} \frac{df}{dq_4},$$

$$o = \frac{df}{dq_3} + \frac{p_4}{q_3} \frac{df}{dp_4} - \frac{q_4}{q_3} \frac{df}{dq_4}.$$

En opérant comme précédemment, on trouve, pour solution commune de ces équations,

$$f_4 = q_3 q_4 - \frac{q_1 q_2 q_3^2}{p_4^2};$$

posant $f_4 = a_1$, et joignant cette équation au système (49), on en déduira les valeurs de p_1, p_2, p_3, p_4, et l'on trouvera la solution complète

$$V = 2q_1^{\frac{1}{2}} q_2^{\frac{1}{2}} (q_3 q_4 - a_1)^{\frac{1}{2}} + b,$$

qui jouit des mêmes propriétés que la précédente.

§ IX. — *Intégration des équations linéaires.*

Le problème de l'intégration des équations linéaires est résolu d'une manière générale en même temps que celui des équations quelconques, car la méthode que nous avons développée leur est en tout point appli-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

cable. Mais cette méthode générale nécessite elle-même l'intégration directe de systèmes linéaires auxiliaires d'une forme spéciale. Nous nous proposons d'étendre cette méthode aux équations linéaires quelconques, et de la compléter de façon qu'elle puisse nous conduire à la solution complète, tandis que précédemment on ne se proposait que la recherche d'une solution particulière commune.

On aura bien encore ici à considérer des systèmes successifs d'équations simultanées; mais d'un système au suivant, le nombre des équations, ainsi que celui des termes de chacune d'elles, diminuera d'une unité. Il n'en faudrait pas pourtant conclure que cette méthode soit, pour cette raison, bien supérieure à la méthode générale; car elle présente, en revanche, le désavantage d'exiger constamment des intégrations complètes, alors que, pour la première, il ne fallait déterminer chaque fois qu'une solution particulière; aussi, dans la pratique, préférera-t-on souvent la méthode générale comme présentant plus de chances de réussite, sans exiger pour cela des calculs beaucoup plus étendus.

Si nous considérons les équations d'un système auxiliaire (§ IV), nous voyons qu'elles sont homogènes, et que l'équation de rang k ne contient que les termes en $p_k, p_{m+1}, \ldots, p_n$, m étant le nombre des équations du système considéré. Nous allons montrer que tout système d'équations linéaires peut être ramené à cette forme, et, pour cela, il suffit de pouvoir les rendre homogènes, car alors, par des éliminations convenablement dirigées, on parviendra toujours à mettre les équations sous la forme désirée.

Soit donc proposé d'intégrer un système de m équations distinctes de la forme

$$(50) \qquad X_1^k p_1 + X_2^k p_2 + \ldots + X_m^k p_m + \ldots + X_n^k p_n - X^k = 0,$$

$X^k, X_1^k, \ldots, X_n^k$ étant des fonctions de $q_1, q_2, \ldots, q_n$, ne contenant pas la fonction cherchée V; les différentes équations du système s'obtiendront de la précédente en attribuant à k successivement les valeurs $1, 2, \ldots, m$.

Si ces équations ne satisfont pas toutes aux conditions d'intégrabilité, on sera conduit à ajouter de nouvelles équations à celles qui sont proposées, et il est facile de voir que ces nouvelles relations ont la même

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

forme que les premières; le problème proposé conservera donc la même forme dans tous les cas où il est possible.

Pour rendre ces équations homogènes, nous remarquerons que, si u est une fonction quelconque de la fonction cherchée v et des variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$, on aura

$$p_i = -\frac{\frac{du}{dq_i}}{\frac{du}{dv}},$$

et par suite l'équation (50) deviendra la suivante :

$$X^k \frac{du}{dv} + X_1^k \frac{du}{dq_1} + \ldots + X_n^k \frac{du}{dq_n} = 0.$$

Toutes les équations du système (50) seront donc ainsi rendues homogènes par rapport aux dérivées partielles de la nouvelle fonction u, la fonction v n'étant plus alors considérée que comme une simple variable; comme la fonction u n'entre pas non plus dans les coefficients, les équations ont bien la forme que nous voulions leur donner. Mais ici ce n'est plus la fonction v que l'on se propose de déterminer, mais une fonction u de v et des variables; et, quand on aura trouvé cette fonction u, en l'égalant à zéro, on aura une équation d'où l'on déduira la valeur de v.

Remarquons que la transformation précédente conviendrait encore dans le cas où les coefficients renfermeraient la fonction cherchée, en supposant satisfaites les conditions d'intégrabilité relatives à ce cas (11 *bis*).

Nous supposerons dorénavant que le système à intégrer se compose de m équations linéaires, homogènes, ne contenant pas la fonction cherchée, et enfin, satisfaisant aux conditions d'intégrabilité. Soient

$$(51) \qquad f_i = X_1^i \frac{dv}{dq_1} + X_2^i \frac{dv}{dq_2} + \ldots + X_n^i \frac{dv}{dq_n} = 0,$$

$$(52) \qquad f_k = X_1^k \frac{dv}{dq_1} + \ldots\ldots\ldots + X_n^k \frac{dv}{dq_n} = 0$$

deux équations quelconques d'un tel système : nous nous proposons de démontrer que le théorème I (§ IV) s'applique à ces équations, c'est-à-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

dire que *si* $v = \varphi$ *est une solution de la première de ces équations, le résultat* ψ *de la substitution de* φ *à la place de* v, *dans la seconde, sera encore une solution de la première, si toutefois ce résultat n'est pas identiquement nul ou constant.*

En effet, par hypothèse, les fonctions f_i, f_h satisfont à la condition

$$(f_i f_h) = 0,$$

qui, développée, donne l'équation suivante :

$$\Sigma_\alpha X_\alpha^h \frac{d}{dq_\alpha} \Sigma_\beta X_\beta^i p_\beta - \Sigma_\alpha X_\alpha^i \frac{d}{dq_\alpha} \Sigma_\beta X_\beta^h p_\beta = 0.$$

Mais, $v = \varphi$ étant une solution de la première équation, on aura identiquement

$$\Sigma_\beta X_\beta^i \frac{d\varphi}{dq_\beta} \quad \text{ou} \quad \Sigma_\beta X_\beta^i p_\beta = 0;$$

d'où il suit que l'équation précédente devient alors

$$X_1^i \frac{d\psi}{dq_1} + X_2^i \frac{d\psi}{dq_2} + \ldots + X_n^i \frac{d\psi}{dq_n} = 0,$$

en posant

$$\Sigma_\beta X_\beta^h \frac{d\varphi}{dq_\beta} \quad \text{ou} \quad \Sigma_\beta X_\beta^h p_\beta = \psi,$$

ce qui démontre précisément le théorème énoncé, puisque ψ est bien, d'après ce qui est posé, le résultat de la substitution de φ à v dans la seconde équation, et que l'égalité qui vient d'être obtenue exprime précisément que ψ satisfait à la première équation. Si donc ψ n'est pas une constante, ce sera une solution de l'équation (51), solution qui peut d'ailleurs n'être qu'une fonction de la précédente.

Le théorème qui précède nous permet de résoudre le proposé, et, pour cela, nous suivrons la méthode de Boole (*); mais nous rappellerons préalablement quelques propriétés des équations linéaires isolées, et qui s'étendent immédiatement aux équations simultanées.

On sait qu'une équation linéaire aux dérivées partielles renfermant

(*) Boole, *Philosophical Transactions*, 1863.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

n variables admet en général n intégrales particulières distinctes qui, dans le cas où la fonction cherchée n'entre pas dans les coefficients, représentent précisément les n valeurs distinctes de la fonction cherchée satisfaisant à l'équation considérée, l'une de ces solutions se réduisant toutefois à une constante, dans le cas où l'équation est homogène. On sait en outre que toute fonction de ces solutions satisfait aussi à l'équation proposée; et réciproquement, que toute solution est une fonction des précédentes. Ces propriétés des équations isolées étant rappelées, on voit sans peine qu'elles s'appliquent aussi aux équations simultanées, le nombre des solutions particulières distinctes étant seul modifié.

Pour ce qui va suivre, nous avons besoin de connaître *ce que devient une équation linéaire quand on change de variables.*

Soit l'équation

$$\mathrm{X}_1^k \frac{dv}{dq_1} + \mathrm{X}_2^k \frac{dv}{dq_2} + \ldots + \mathrm{X}_n^k \frac{dv}{dq_n} = \mathrm{X}^k, \tag{53}$$

dont nous représenterons le premier membre par $(\Delta_k v)$, et supposons que les n variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$ soient exprimées en fonction des n autres $r_1, r_2, \ldots, r_n$: on propose de trouver ce que devient l'équation après ce changement.

Si l'on suppose la fonction v exprimée en fonction des nouvelles variables, on aura

$$\frac{dv}{dq_h} = \frac{dv}{dr_1}\frac{dr_1}{dq_h} + \ldots + \frac{dv}{dr_n}\frac{dr_n}{dq_h},$$

et par suite l'équation (53) pourra s'écrire, en groupant les termes d'une façon convenable,

$$(\Delta_k r_1)\frac{dv}{dr_1} + (\Delta_k r_2)\frac{dv}{dr_2} + \ldots + (\Delta_k r_n)\frac{dv}{dr_n} = \mathrm{X}^k, \tag{54}$$

et c'est là le résultat cherché, si l'on suppose toutefois que, dans la fonction X^k, $q_1, q_2, \ldots, q_n$ soient remplacés par leurs valeurs en fonction de $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Nous ajouterons que, si les équations telles que (53) satisfaisaient aux conditions d'intégrabilité, ces dernières (54) y satisferont aussi, d'après la remarque qui termine le § II.

Passons maintenant à l'intégration d'un système de m équations ho-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

mogènes, la fonction cherchée n'entrant pas dans les coefficients, et supposons ces équations mises sous la forme

$$\mathrm{X}_k^k \frac{dv}{dq_k} \mathrm{X}_{m+1}^k \frac{dv}{dq_{m+1}} + \ldots + \mathrm{X}_n^k \frac{dv}{dq_n} = 0, \tag{55}$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots, m).$$

Cette équation, renfermant n variables indépendantes, aura $n-1$ intégrales indépendantes distinctes $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$; et si $k = 1$, on pourra supposer $v_2 = q_2$, $v_3 = q_3, \ldots$, $v_m = q_m$, puisque ces dernières variables sont considérées comme constantes dans la première équation du système (55). Une fonction quelconque de $v_1, q_2, q_3, \ldots, q_m, v_{m+1}, \ldots, v_{n-1}$ sera encore une solution de l'équation considérée. Si l'on change alors de variables, et que le système $q_1, q_2, \ldots, q_n$ soit remplacé par le suivant : $q_1, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$, les équations du système (55), sauf la première, prendront la forme suivante :

$$(\Delta_h q_1) \frac{dv}{dq_1} + (\Delta_h v_1) \frac{dv}{dv_1} + (\Delta_h v_2) \frac{dv}{dv_2} + \ldots + (\Delta_h v_{n-1}) \frac{dv}{dv_{n-1}} = 0,$$

$$(h = 2, 3, \ldots, m).$$

Mais on a, pour les valeurs précédentes de h, $(\Delta_h q_1) = 0$, et par suite le système transformé se compose de $m-1$ équations avec $n-1$ variables indépendantes $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$; en outre, ce système est de même forme que le précédent, puisque l'on a, pour une valeur quelconque de h,

$$(\Delta_h v_k) = 0,$$

k pouvant prendre toutes les valeurs de la suite $2, \ldots, m$, h étant excepté.

La recherche des solutions communes des équations du premier système revient donc à celle des solutions communes du second, puisque ces dernières ne sont que des fonctions de $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$, à la condition toutefois que les coefficients des nouvelles équations ne contiennent pas d'autres variables que ces dernières. Cela a lieu en vertu du théorème que nous avons précédemment démontré, puisque $(\Delta_h v_k)$, devant être une solution de l'équation $(\Delta_1 v) = 0$, ne peut être qu'une fonction des seules quantités $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$, ce qui justifie ce que nous avons avancé.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Nous pourrons donc raisonner sur ce second système absolument comme nous l'avons fait sur le précédent, et nous passerons de là à un troisième, en prenant pour nouvelles variables q_2, w_1, w_2,..., w_{n-2}, ces dernières quantités w_1,..., w_{n-2} étant les $n-2$ solutions distinctes de la première équation du second système. La variable q_2 disparaîtra complétement de ce nouveau système comme q_1 l'avait fait du précédent, et toute solution commune des équations de ce système sera, pour cette raison, une solution commune des précédents.

En continuant ainsi, on voit que d'un système au suivant le nombre des équations et celui des variables diminuent chacun d'une unité, et qu'on arrivera enfin à une seule équation homogène renfermant $n-m$ variables indépendantes : les $n-m-1$ solutions particulières distinctes de cette équation seront les solutions communes du système proposé; égalées à des constantes, elles constituent la solution complète du problème proposé, et une fonction arbitraire de ces mêmes solutions en sera l'intégrale générale.

Nous allons, pour terminer ce travail, faire sur un exemple particulier l'application des deux méthodes d'intégration des équations linéaires.

§ X. — *Applications.*

Soit proposé d'intégrer le système suivant :

$$f_1 = 2q_4^2 q_2 \frac{dv}{dq_1} + q_3^2 q_4 \frac{dv}{dq_4} - q_3^2 v = 0,$$

$$f_2 = 2q_2 \frac{dv}{dq^2} - q_4 \frac{dv}{dq_4} - v = 0,$$

$$f_3 = q_2 q_4^2 \frac{dv}{dq_3} + q_1 q_3 q_4 \frac{dv}{dq_4} - q_1 q_3 v = 0.$$

Première méthode. — On fera disparaître la fonction v, tout en laissant les équations linéaires, en posant $u = \log v$; si l'on pose aussi $p_i = \frac{du}{dq_i}$, on aura, pour le système précédent,

$$(\alpha) \quad \begin{cases} f_1 = 2q_2 q_4^2 p_1 + q_3^2 q_4 p_4 - q_3^2 = 0, \\ f_2 = 2q_2 p_2 - q_4 p_4 - 1 = 0, \\ f_3 = q_2 q_4^2 p_3 + q_1 q_3 q_4 p_4 - q_1 q_3 = 0. \end{cases}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On vérifie facilement que ces équations satisfont aux conditions d'intégrabilité.

De ces équations, on déduit les valeurs suivantes :

$$(\beta)\quad p_1 = -\frac{q_3^2}{2q_2q_4}p_4 + \frac{q_3^2}{2q_2q_4^2},\quad p_2 = \frac{q_4}{2q_2}p_4 + \frac{1}{2q_2},\quad p_3 = -\frac{q_1q_3}{q_2q_4}p_4 + \frac{q_1q_3}{q_2q_4^2},$$

au moyen desquelles on compose le système auxiliaire auquel doit satisfaire la fonction f_4 que, d'après la règle générale, il nous faut déterminer d'abord. Ce système auxiliaire sera le suivant :

$$(\gamma)\qquad 0 = \frac{df_4}{dq_1} + \frac{q_3^2}{2q_2q_4}\frac{df_4}{dq_4} + \frac{q_3^2}{2q_2q_4^2}(q_4p_4 - 2)\frac{df_4}{dp_4},$$

$$(\delta)\qquad 0 = \frac{df}{dq_2} - \frac{q_4}{2q_2}\frac{df_4}{dq_4} + \frac{p_4}{2q_2}\frac{df_4}{dp_4},$$

$$(\varepsilon)\qquad 0 = \frac{df}{dq_3} + \frac{q_1q_3}{q_2q_4}\frac{df}{dq_4} + \frac{q_1q_3}{q_2q_4^2}(q_4p_4 - 2)\frac{df_4}{dp_4}.$$

Pour chercher une solution commune de ces équations, nous partirons de l'équation (δ) qui admet la solution particulière $\varphi_1 = p_4q_4$; substituant dans l'équation (ε), on aura pour résultat

$$\varphi_2 = \frac{2q_1q_2}{q_2q_4^2}(q_4p_4 - 1);$$

substituant de nouveau dans la même équation, on aura pour résultat

$$\varphi_3 = \frac{2q_1}{q_2q_4^2}(q_4p_4 - 1),$$

qui s'exprime au moyen de φ_2 et de q_3, qui est considéré comme une constante dans l'équation (δ). Une fonction $\varpi_1(q_3\varphi_1\varphi_2)$ sera aussi une solution de l'équation (δ), et, pour qu'elle satisfasse aussi à l'équation (ε), il faudra que l'on ait

$$\frac{d\varpi}{dq_3} + \frac{d\varpi}{d\varphi_1}\varphi_2 + \frac{d\varpi}{d\varphi^2}\varphi_3 = 0,$$

d'où

$$\varpi_1 = \frac{\varphi^2}{q_3} = \frac{2q_1}{q_2q_4^2}(p_4q_4 - 1).$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Portant cette valeur dans l'équation (γ), elle donnera

$$\varpi_2 = \frac{2(p_4 q_4 - 1)}{q_2 q_4^2} = \frac{\varpi_1}{q_1}.$$

Une fonction $\lambda(q_1 \varpi_1)$ sera aussi une solution de l'équation (ε), ainsi que de l'équation (δ) : elle le sera de l'équation (γ) si l'on a

$$\frac{d\lambda}{dq_1} + \frac{d\lambda}{d\varpi_1} \varpi_2 = 0,$$

d'où

$$\lambda = \frac{\varpi_1}{q_1} = \frac{2(q_4 p_4 - 1)}{q_2 q_4^2}.$$

Posant cette solution du système auxiliaire égale à une constante a, et joignant l'équation ainsi obtenue aux équations données (α), on en déduira

$$p_1 = -aq_3^2, \quad p_2 = \frac{1}{q_2} + aq_4^2, \quad p_3 = -2aq_1 q_3, \quad p_4 = \frac{1}{q_1} + 2aq_2 q_4,$$

d'où

$$u = \text{const.} + a(q_2 q_4^2 - q_1 q_3^2) + \log q_2 q_4,$$

et par suite

$$v = bq_2 q_4 e^{a(q_2 q_4^2 - q_1 q_3^2)}.$$

Telle est la solution complète du système proposé.

Deuxième méthode. — Si nous rendons les équations proposées homogènes, en suivant pour cela la règle donnée à cet effet, nous obtiendrons le système suivant :

$$(\beta) \qquad (\Delta u) = 2q_2 q_4^2 \frac{du}{dq_1} + q_3^2 q_4 \frac{du}{dq_4} + q_3^2 v \frac{du}{dv} = 0,$$

$$(\gamma) \qquad (\Delta_1 u) = 2q_2 \frac{du}{dq_2} - q_4 \frac{du}{dq_4} + v \frac{du}{dv} = 0,$$

$$(\delta) \qquad (\Delta_2 u) = q_2 q_4^2 \frac{du}{dq_3} + q_1 q_3 q_4 \frac{du}{dq_4} + q_1 q_3 v \frac{du}{dv} = 0,$$

où u est la nouvelle fonction cherchée, v n'étant plus considéré que comme une variable indépendante..

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On trouve immédiatement, pour l'équation (β), la série suivante de solutions distinctes,

$$u_1 = \frac{v}{q_1}, \quad u_2 = q_2, \quad u_3 = q_3, \quad u_4 = \frac{q_2 q_4^2 - q_1 q_3^2}{q_2}.$$

Si l'on prend alors pour variables les quantités suivantes : q_1, u_1, u_2, u_3, u_4, les équations (γ) et (δ) deviendront

$$(\gamma') \quad (\Delta'_1 u) = (\Delta_1 q_1)\frac{du}{dq_1} + (\Delta_1 u_1)\frac{du}{du_1} + (\Delta_1 q_2)\frac{du}{dq_2} + (\Delta_1 q_3)\frac{du}{dq_3} + (\Delta_1 u_4)\frac{du}{du_4} = 0,$$

$$(\delta') \quad (\Delta'_2 u) = (\Delta_2 q_1)\frac{du}{dq_1} + (\Delta_2 u_1)\frac{du}{du_1} + (\Delta_2 q_2)\frac{du}{dq_2} + (\Delta_2 q_3)\frac{du}{dq_3} + (\Delta_2 u_4)\frac{du}{du_4} = 0.$$

Mais on a

$$(\Delta_1 q_1) = 0, \quad (\Delta_1 u_1) = 2u_1, \quad (\Delta_1 q_2) = 2q_2, \quad (\Delta_1 q_3) = 0, \quad (\Delta_1 u_4) = -2u_4,$$
$$(\Delta_2 q_1) = 0, \quad (\Delta_2 u_1) = 0, \quad (\Delta_2 q_2) = 0, \quad (\Delta_2 q_3) = q_2 q_4^2, \quad (\Delta_2 u_4) = 0;$$

donc les équations précédentes se réduiront aux suivantes :

$$u_1\frac{du}{du_1} + q_2\frac{du}{dq_2} - u_4\frac{du}{du_4} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{du}{dq_3} = 0.$$

La première de ces équations admet les solutions

$$u'_1 = \frac{u_1}{q_2} = \frac{v}{q_2 q_4}, \quad u'_2 = q_2 u_4 = q_2 q_4^2 - q_1 q_3^2;$$

ces solutions, satisfaisant aussi à la dernière équation, sont les solutions communes du système proposé. L'intégrale générale sera donc une fonction arbitraire de u'_1 et u'_2, d'où l'on aura enfin

$$v = q_2 q_4 \varphi(q_2 q_4^2 - q_1 q_3^2),$$

φ étant une fonction arbitraire.

Il est d'ailleurs évident que ce résultat s'accorde avec celui que nous avons déjà obtenu en appliquant aux équations proposées la méthode générale relative aux équations quelconques.

Nous indiquerons encore les exemples suivants.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Soit le système

$$(q_4^2 - q_3^2)\frac{dv}{dq_1} - (q_1q_3 - q_2q_4)\frac{dv}{dq_3} + (q_2q_3 - q_1q_4)\frac{dv}{dq_4} = 0,$$
$$(q_4^2 - q_3^2)\frac{dv}{dq_2} + (q_2q_3 - q_1q_4)\frac{dv}{dq_3} + (q_1q_3 - q_2q_4)\frac{dv}{dq_4} = 0;$$

en appliquant la même méthode, on trouvera

$$v = \varphi(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2,\ q_1q_4 + q_3q_4).$$

Soit encore le système suivant

$$q_1\frac{dv}{dq_1} - q_2\frac{dv}{dq_2} + q_3\frac{dv}{dq_3} - q_4\frac{dv}{dq_4} = 0,$$
$$q_3\frac{dv}{dq_1} + q_4\frac{dv}{dq_2} - q_1\frac{dv}{dq_3} - q_2\frac{dv}{dq^4} = 0.$$

Pour l'application de la seconde méthode, il faut remplacer ce système par le suivant, qui lui est équivalent,

$$(q_1q_4 + q_2q_3)\frac{dv}{dq_1} + (q_3q_4 - q_1q_2)\frac{dv}{dq_3} - (q_4^2 + q_2^2)\frac{dv}{dq_4} = 0,$$
$$(q_1q_4 + q_2q_3)\frac{dv}{dq_2} - (q_1^2 + q_3^2)\frac{dv}{dq_3} + (q_3q_4 - q_1q_2)\frac{dv}{dq_4} = 0;$$

et la solution générale de ce système est la suivante :

$$v = \varphi\left[(q_1^2 + q_3^2)(q_2^2 + q_4^2),\ \frac{q_1q_2 + q_3q_4}{q_2q_3 - q_1q_4}\right].$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

DEUXIÈME THÈSE.

DU FACTEUR INTÉGRANT

POUR LES EXPRESSIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

RENFERMANT UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES INDÉPENDANTES;

PAR M. COLLET,

DOCTEUR ÈS SCIENCES.

Dans le Mémoire précédent, nous avons développé une méthode générale pour l'intégration des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre; nous nous proposons actuellement d'appliquer cette méthode à la recherche du facteur intégrant des expressions différentielles du premier ordre et d'un nombre quelconque de variables indépendantes. Ce facteur n'existe pas en général pour des expressions quelconques : cette existence est subordonnée à certaines conditions qui doivent être satisfaites par l'expression proposée, et dont l'étude va nous occuper tout d'abord.

§ I. — *Des conditions nécessaires dont dépend l'existence du facteur intégrant.*

Considérons l'expression

$$(1) \qquad X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \ldots + X_k\,dx_k + \ldots + X_h\,dx_h + \ldots + X_n\,dx_n,$$

et soit μ la fonction par laquelle il faut la multiplier pour qu'elle devienne une différentielle exacte; les conditions nécessaires et suffisantes

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

pour que cela ait lieu sont que l'on ait identiquement, pour toutes les valeurs de h et de k, depuis 1 jusqu'à n,

$$\frac{d.\mu X_h}{dx_k} = \frac{d.\mu X_k}{dx_h},$$

c'est-à-dire, en développant,

$$(2) \qquad X_h \frac{d\mu}{dx_k} - X_k \frac{d\mu}{dx_h} + \mu\left(\frac{dX_h}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_h}\right) = 0.$$

En donnant à h et k toutes les valeurs de la suite $1, 2, \ldots, n$, la formule (2) donnera $\frac{n(n-1)}{2}$ équations aux dérivées partielles, et qui devront être satisfaites simultanément par la fonction cherchée. Il est facile de voir que les équations qui précèdent ne peuvent exister simultanément, à moins que leurs coefficients ne satisfassent identiquement à de certaines conditions qui seront des conditions nécessaires pour l'existence du facteur.

Pour cela, posons, en général,

$$[h, k] = X_h \frac{d\mu}{dx_k} - X_k \frac{d\mu}{dx_h} + \mu\left(\frac{dX_h}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_h}\right),$$

et considérons les trois équations

$$[h, k] = 0, \quad [k, m] = 0, \quad [m, h] = 0;$$

en les multipliant respectivement par X_m, X_h, X_k et ajoutant, on obtient, après la suppression du facteur commun μ, l'égalité suivante :

$$(3) \qquad X_h\left(\frac{dX_k}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_k}\right) + X_k\left(\frac{dX_m}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_m}\right) + X_m\left(\frac{dX_h}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_h}\right) = 0.$$

Cette égalité, ne contenant plus la fonction cherchée, doit être une identité, sans quoi elle établirait une dépendance entre les variables, qui, par hypothèse, sont idépendantes.

Si, dans la formule (3), on donne à h, k, m toutes les valeurs de la suite $1, 2, \ldots, n$, on obtiendra des conditions nécessaires pour l'existence du facteur.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Supposons ces conditions satisfaites, le nombre des équations (2) distinctes est alors diminué. En effet, ayant montré que l'équation $[h, k] = 0$ est une conséquence des deux autres $[m, h] = 0$, $[m, k] = 0$, on voit qu'on aura un système complet d'équations distinctes et comprenant toutes les autres, en prenant pour m une valeur quelconque de la suite $1, 2, \ldots, n$, et donnant simplement à h, dans le symbole $[m, h] = 0$, toutes les autres valeurs de cette suite.

On pourrait former de bien des manières des systèmes complets et équivalents d'équations distinctes, par exemple en écrivant dans un ordre quelconque les nombres de la suite $1, 2, \ldots, n$, et prenant pour m et h, dans $[m, h] = 0$, tous les systèmes de deux nombres consécutifs de cette suite; et plus généralement, en prenant un système tellement composé, qu'il y entre les dérivées de μ par rapport à toutes les variables. Quelle que soit la marche suivie, on arrive à ce résultat, que *le nombre des équations auxquelles le facteur intégrant μ doit satisfaire est réduit à $n - 1$, au moyen des conditions* (3) *énoncées comme nécessaires.*

Revenons à ces conditions. Si, dans la formule (3), on donne à m, k, h toutes les valeurs $1, 2, \ldots, n$, on forme $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ conditions : *nous allons démontrer que ces conditions ne sont pas toutes distinctes, et que le nombre de ces dernières est seulement égal à* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Pour cela, représentons, pour plus de simplicité, par le symbole $[h, k, m]$ le premier membre de la formule (3), on aura évidemment

$$[h, k, m] = [k, m, h] = [m, h, k],$$

et aussi

$$[h, k, m] = -[h, m, k].$$

Nous allons démontrer, en général, que les trois conditions

$$[h, k, m] = 0, \quad [k, p, m] = 0, \quad [p, h, m] = 0,$$

comprennent la suivante :

$$[h, k, p] = 0.$$

En effet, si l'on développe les trois premières conditions, qu'on mul-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

tiplie les équations obtenues respectivement par X_p, X_h, X_k, et qu'on ajoute, on voit facilement que les coefficients des produits $X_h X_k$, $X_k X_p$, $X_p X_h$ s'annulent identiquement, et que celui de X_m est l'expression suivante :

$$X_h\left(\frac{dX_k}{dx_p}-\frac{dX_p}{dx_k}\right)+X_k\left(\frac{dX_p}{dx_h}-\frac{dX_h}{dx_p}\right)+X_p\left(\frac{dX_h}{dx_k}-\frac{dX_k}{dx_h}\right),$$

qui, par conséquent, sera nulle; ce qui nous donne la condition $[h, k, p] = 0$, qui, ainsi que nous l'avions annoncé, n'est qu'une conséquence des précédentes.

Il résulte donc de cela que l'on aura toutes les conditions distinctes en donnant simplement à h et k, dans l'équation symbolique $[m, h, k] = 0$, toutes les valeurs de la suite $1, 2, \ldots, n$, m excepté, et le système ainsi obtenu représentera toutes les conditions nécessaires à l'existence du facteur. Nous verrons dans la suite que ces mêmes conditions expriment précisément les conditions d'intégrabilité des équations aux différentielles partielles que l'on aura à intégrer simultanément pour la détermination du facteur : *les conditions qui précèdent sont donc à la fois nécessaires et suffisantes.* Le nombre de ces conditions est maintenant égal à $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$; et si $n = 2$, c'est-à-dire s'il n'y a que deux variables indépendantes, il n'y a plus de conditions, et alors le facteur intégrant existe toujours.

§ II. — *Conditions d'intégrabilité des équations dont dépend la détermination du facteur.*

Considérons maintenant les équations à intégrer, et dont (2) est la formule générale; elles renferment la fonction cherchée et ses dérivées prises par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On peut faire disparaître la fonction en suivant la méthode générale qui consiste à poser $\mu = \frac{\psi}{t}$, ψ étant une nouvelle fonction et t une nouvelle variable; mais il est ici plus simple de poser $\mu = e^z$, d'où $\frac{d\mu}{dx_k} = e^z \frac{dz}{dx_k}$, ce qui a l'avantage de ne pas introduire de variable nouvelle. Posant $\frac{dz}{dx_k} = p_k$, les

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

équations à intégrer prennent alors la forme suivante :

$$(4)\qquad f_m = X_1 p_m - X_m p_1 + \frac{dX_1}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_1} = 0,$$

où m devra prendre successivement les valeurs $2, 3, \ldots, n$.

Nous allons démontrer que *les fonctions* $f_2, f_3, \ldots, f_n$ *satisfont aux conditions d'intégrabilité, si les premières conditions sont elles-mêmes satisfaites.*

Si nous considérons deux quelconques des équations proposées,

$$(5)\qquad \begin{cases} f_m = X_1 p_m - X_m p_1 + \dfrac{dX_1}{dx_m} - \dfrac{dX_m}{dx_1} = 0, \\ f_h = X_1 p_h - X_h p_1 + \dfrac{dX_1}{dx_h} - \dfrac{dX_h}{dx_1} = 0, \end{cases}$$

on devra avoir

$$(f_m, f_h) = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{df_m}{dp_k}\frac{df_h}{dx_k} - \frac{df_m}{dx_k}\frac{df_h}{dp_k} \right) = 0.$$

Pour le prouver, des équations (5) nous tirons

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{df_m}{dp_1} = -X_m, \quad \dfrac{df_m}{dp_m} = X_1, \quad \dfrac{df_m}{dp_2} = \dfrac{df_m}{dp_3} = \ldots = \dfrac{df_m}{dp_n} = 0; \\ \dfrac{df_h}{dp_1} = -X_h, \quad \dfrac{df_h}{dp_h} = X_1, \quad \dfrac{df_h}{dp_2} = \dfrac{df_h}{dp_3} = \ldots = \dfrac{df_h}{dp_n} = 0; \end{cases}$$

et l'expression de (f_m, f_h) se réduit simplement aux termes suivants :

$$(7)\qquad \frac{df_m}{dp_1}\frac{df_h}{dx_1} + \frac{df_m}{dp_m}\frac{df_h}{dx_m} - \frac{df_m}{dx_1}\frac{df_h}{dp_1} - \frac{df_m}{dx_h}\frac{df_h}{dp_h}.$$

On aura aussi

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{df_m}{dx_1} = p_m \dfrac{dX_1}{dx_1} - p_1 \dfrac{dX_m}{dx_1} + \dfrac{d}{dx_1}\left(\dfrac{dX_1}{dx_m} - \dfrac{dX_m}{dx_1} \right), \\ \dfrac{df_m}{dx_h} = p_m \dfrac{dX_1}{dx_h} - p_1 \dfrac{dX_m}{dx_h} + \dfrac{d}{dx_h}\left(\dfrac{dX_1}{dx_m} - \dfrac{dX_m}{dx_1} \right), \\ \dfrac{df_h}{dx_1} = p_h \dfrac{dX_1}{dx_1} - p_1 \dfrac{dX_h}{dx_1} + \dfrac{d}{dx_1}\left(\dfrac{dX_1}{dx_h} - \dfrac{dX_h}{dx_1} \right), \\ \dfrac{df_h}{dx_m} = p_h \dfrac{dX_1}{dx_m} - p_1 \dfrac{dX_h}{dx_m} + \dfrac{d}{dx_m}\left(\dfrac{dX_1}{dx_m} - \dfrac{dX_m}{dx_1} \right). \end{cases}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

En portant dans l'expression (7) les valeurs (6) et (8), on aura un résultat de la forme

$$\mathrm{P}p_1 + \mathrm{Q}p_h + \mathrm{R}p_m + \mathrm{S}, \tag{9}$$

P, Q, R, S ayant les valeurs suivantes :

$$\mathrm{P} = \mathrm{X}_1\left(\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_m} - \frac{d\mathrm{X}_m}{dx_h}\right) + \mathrm{X}_h\frac{d\mathrm{X}_m}{dx_1} - \mathrm{X}_m\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_1},$$

$$\mathrm{Q} = \mathrm{X}_m\frac{d\mathrm{X}_1}{dx_1} - \mathrm{X}_1\frac{d\mathrm{X}_1}{dx_m},$$

$$\mathrm{R} = -\mathrm{X}_h\frac{d\mathrm{X}_1}{dx_1} + \mathrm{X}_1\frac{d\mathrm{X}_1}{dx_h},$$

$$\mathrm{S} = \mathrm{X}_1\frac{d}{dx_1}\left(\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_m} - \frac{d\mathrm{X}_m}{dx_h}\right) + \mathrm{X}_h\frac{d}{dx_1}\left(\frac{d\mathrm{X}_m}{dx_1} - \frac{d\mathrm{X}_1}{dx_m}\right) + \mathrm{X}_m\frac{d}{dx_1}\left(\frac{d\mathrm{X}_1}{dx_h} - \frac{d\mathrm{X}_h}{dx_1}\right).$$

Considérons maintenant les équations (5) et la suivante :

$$\mathrm{X}_m p_h - \mathrm{X}_h p_m + \frac{d\mathrm{X}_m}{dx_h} - \frac{d\mathrm{X}_h}{dx_m} = 0,$$

qui en est une conséquence, quand on suppose la condition

$$[1, h, m] = 0$$

satisfaite; multiplions ces équations respectivement par

$$\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_1} + \left(\frac{d\mathrm{X}_1}{dx_h} - \frac{d\mathrm{X}_h}{dx_1}\right),$$

$$-\frac{d\mathrm{X}_m}{dx_1} - \left(\frac{d\mathrm{X}_1}{dx_m} - \frac{d\mathrm{X}_m}{dx_1}\right),$$

et

$$\frac{d\mathrm{X}_1}{dx_1};$$

en ajoutant les résultats, on aura une identité de la forme

$$\mathrm{P}'p_1 + \mathrm{Q}'p_h + \mathrm{R}'p_m + \mathrm{S}' = 0. \tag{10}$$

Pour les quantités P', Q', R', S', on trouve facilement, en faisant usage

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de la condition (9), les valeurs

$$P' = P, \quad Q' = Q, \quad R' = R,$$

$$S' = -\frac{dX_i}{dx_i}\left(\frac{dX_h}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_h}\right) - \frac{dX_h}{dx_i}\left(\frac{dX_m}{dx_i} - \frac{dX_i}{dx_m}\right) - \frac{dX_m}{dx_i}\left(\frac{dX_i}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_i}\right).$$

Si enfin on dérive l'équation (9) par rapport à x_i, on trouve, par une transposition convenable des termes obtenus, que

$$S' = S,$$

d'où il suit que l'on a bien l'identité

$$P p_i + Q p_h + R p_m + S = 0,$$

qui n'est autre que la condition d'intégrabilité

$$(f_h f_m) = 0,$$

qui est ainsi satisfaite, pour toutes les valeurs de h et de m, quand l'expression proposée satisfait d'ailleurs à toutes les conditions $[m, h, p] = 0$. Donc *ces dernières conditions sont bien à la fois nécessaires et suffisantes.*

Nous nous occuperons encore de ces conditions dans la suite; actuellement nous allons indiquer la marche à suivre pour intégrer les équations dont dépend la solution du problème en question.

§ III. — *Intégration des équations du facteur.*

Les équations du facteur sont aux dérivées partielles du premier ordre, linéaires mais non homogènes. Pour les intégrer, on peut suivre les deux méthodes que nous avons indiquées : la méthode générale des équations quelconques, ou la méthode particulière aux équations linéaires. L'emploi de cette dernière méthode exigera l'introduction d'une nouvelle variable. Nous allons les considérer l'une et l'autre successivement.

Première méthode. — La méthode générale se ramène, pour le problème actuel, à chercher une relation $f = a$ entre les quantités $p_1, \ldots,$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$p_n, x_1, \ldots, x_n$, a étant une constante, de telle sorte que l'on puisse, au moyen de cette relation et des $(n-1)$ équations

$$f_2 = 0, \quad f_3 = 0, \ldots, \quad f_n = 0, \tag{11}$$

déterminer, pour $p_1, p_2, \ldots, p_n$, des valeurs en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui rendent l'expression

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n$$

une différentielle. L'intégrale de cette différentielle sera la fonction z, qui donne immédiatement la valeur complète du facteur μ, à cause de la relation $\mu = e^z$.

Si des équations (11) on tire les valeurs de $p_2, p_3, \ldots, p_n$ en fonction de $p_1, x_1, x_2, \ldots, x_n$, on pourra supposer que la relation cherchée $f = a$ ne contienne aussi que $p_1, x_1, \ldots, x_n$; dans cette hypothèse, la fonction f doit être une solution commune d'un système canonique de $n-1$ équations linéaires, aux dérivées partielles, de la forme suivante :

$$0 = \frac{df}{dx_m} + \frac{dp_m}{dx_1}\frac{df}{dp_1} - \frac{dp_m}{dp_1}\frac{df}{dx_1}, \tag{12}$$

où m recevra successivement les valeurs 2, 3, ..., n. Des équations (11) on déduit, pour $p_2, p_3, \ldots, p_n$, des valeurs de la forme

$$p_m = \frac{X_m}{X_1} p_1 + \frac{1}{X_1}\left(\frac{dX_m}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx_m}\right), \tag{13}$$

et l'équation générale (12) devient alors

$$\begin{cases} 0 = X_1^2 \dfrac{df}{dx_m} - X_1 X_m \dfrac{df}{dx_1} \\ \quad + \left[\left(X_1 \dfrac{dX_m}{dx_1} - X_m \dfrac{dX_1}{dx_1}\right) p_1 - X_1 \dfrac{d}{dx_1}\left(\dfrac{dX_1}{dx_m} - \dfrac{dX_m}{dx_1}\right) + \dfrac{dX_1}{dx_1}\left(\dfrac{dX_1}{dx_m} - \dfrac{dX_m}{dx_1}\right)\right] \dfrac{df}{dp_1}. \end{cases} \tag{14}$$

Mais, sans diminuer en rien la généralité de la question, on peut supposer $X_1 = 1$, ce qui revient à comprendre la fonction X_1 dans le facteur cherché. Cette hypothèse simplifie toutes les formules. Les conditions d'intégrabilité se réduisent à la forme suivante :

$$0 = \frac{dX_h}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_h} + X_h \frac{dX_m}{dx_1} - X_m \frac{dX_h}{dx_1};$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et les égalités (13) et (14) deviennent respectivement

$$p_m = p_1 X_m + \frac{dX_m}{dx_1}, \tag{15}$$

$$0 = \frac{df}{dx_m} - X_m \frac{df}{dx_1} + \left(p_1 \frac{dX_m}{dx_1} + \frac{d^2 X_m}{dx_1^2} \right) \frac{df}{dp_1}. \tag{16}$$

Dans toutes ces formules, m doit prendre successivement les valeurs $2, 3, \ldots, n$.

Nous remarquerons que les équations (15) et (16) ne contiennent chacune que l'une des fonctions $X_2, \ldots, X_n$. Le système auxiliaire (16) s'intégrera en suivant la marche que nous avons indiquée; aussi ne nous arrêterons-nous sur cette partie de la question que pour signaler quelques particularités qui peuvent se présenter dans la recherche de la solution commune de ces équations.

Et d'abord on voit immédiatement que, s'il ne s'agissait que de trouver une solution commune, quelconque d'ailleurs, des équations du système (16), on pourrait satisfaire à ces équations par une fonction indépendante de p_1 qui serait alors une solution commune des équations (16) réduites à la forme

$$0 = \frac{df}{dx_m} - X_m \frac{df}{dx_1}.$$

Pour trouver une telle solution, on considérera d'abord une solution $f = \varphi$ de l'équation

$$0 = \frac{df}{dx_2} - X_2 \frac{df}{dx_1};$$

cette solution ne contenant pas p_1, on voit que, en effectuant les substitutions successives qui conduisent à la solution commune cherchée, la quantité p_1 n'apparaîtra nulle part, et qu'on aura enfin une fonction $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ qui sera une solution commune des équations du système considéré. On doit alors se demander ce que représente cette fonction, et voir si elle peut satisfaire aux équations (15), auquel cas elle serait la solution immédiate de la question, sans qu'il soit alors nécessaire d'effectuer la quadrature qui se présente dans la méthode générale. A cela, on peut répondre que la fonction φ, quoique satisfaisant aux équations (16), n'en est pas pour cela une solution de la question, car

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

elle ne satisfait pas aux équations (15). En effet, la fonction φ donne en général

$$0 = \frac{d\varphi}{dx_m} - X_m \frac{d\varphi}{dx_1},$$

et, comme il faudrait que l'on eût

$$0 = \frac{d\varphi}{dx_m} - X_m \frac{d\varphi}{dx_1} - \frac{dX_m}{dx_1},$$

on voit que la fonction φ ne satisfera à la question qu'autant que l'on aura $\frac{dX_m}{dx_1} = 0$, pour toutes les valeurs de m, c'est-à-dire seulement dans le cas où la variable x_1 n'entrera pas dans la composition des fonctions $X_2, X_3, \ldots, X_n$. Mais, dans ce cas, les conditions d'intégrabilité deviennent, pour les valeurs $2, 3, \ldots, n$ de m et de h,

$$\frac{dX_m}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_m} = 0;$$

par conséquent, la partie

$$X_2\,dx_2 + \ldots + X_n\,dx_n$$

de l'expression proposée est alors une différentielle exacte, et, comme $X_1 = 1$, l'expression proposée est immédiatement intégrable, et il n'y a pas lieu de chercher de facteur.

Ce cas particulier étant excepté, on aura, pour solution commune du système (16), une fonction f de $p_1, x_1, x_2, \ldots, x_n$; et, posant $f = a$, a étant une constante, on aura, au moyen de cette équation et des formules (15), les valeurs de $p_1, p_2, \ldots, p_n$ exprimées en fonction des variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$, et d'une constante arbitraire a: ces valeurs seront telles, qu'en formant l'expression

$$p_1\,dq_1 + \ldots + p_n\,dq_n,$$

on aura une différentielle exacte, dont l'intégrale sera précisément la fonction z que nous avons substituée au facteur μ dans les équations du problème. De la valeur complète

$$z = F(x_1, x_2, \ldots, x_n, a) + b,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

on déduira la solution complète du facteur intégrant

$$\mu = \beta\, e^{F(x_1, \ldots, x_n, a)},$$

β étant, ainsi que b, une constante arbitraire. La solution générale sera définie par le système

$$\mu = \varphi(a) e^{F(x_1, \ldots, x_n, a)}, \quad 0 = \varphi'(a) e^{F(x_1, \ldots, x_n, a)} + \frac{dF}{da}\varphi(a) e^{F(x_1, \ldots, x_n, a)};$$

et enfin les solutions singulières résulteront de l'élimination de a entre les deux équations

$$\mu = \beta\, e^{F(x_1, \ldots, x_n, a)}, \quad \text{et} \quad \frac{dF}{da} = 0.$$

Telle est la marche à suivre dans la recherche du facteur, d'après la méthode générale d'intégration des équations quelconques. Nous allons maintenant considérer la méthode qui est spéciale aux équations linéaires.

Deuxième méthode. — La méthode d'intégration particulière aux équations linéaires suppose ces dernières homogènes et débarrassées de la fonction cherchée.

Si nous considérons les équations (2), nous leur donnerons la forme convenable, non plus en nous proposant la détermination de μ, mais celle d'une fonction u de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et de μ; ces équations prennent alors la forme

$$(17) \qquad 0 = X_1 \frac{du}{dx_m} - X_m \frac{du}{dx_1} + \mu\left(\frac{dX_1}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_1}\right)\frac{du}{d\mu};$$

et même, en supposant, comme précédemment, que $X_1 = 1$, on aura le système suivant :

$$(18) \qquad 0 = \frac{du}{dx_m} - X_m \frac{du}{dx_1} - \mu \frac{dX_m}{dx_1}\frac{du}{d\mu},$$

$$(m = 2, 3, \ldots, n);$$

et si nous posons, en général,

$$(\Delta_m u) = \frac{du}{dx_m} - X_m \frac{du}{dx_1} - \mu \frac{dX_m}{dx_1}\frac{du}{d\mu},$$

les équations du système (18) deviendront les suivantes :

$$(\Delta_2 u) = 0, \quad (\Delta_3 u) = 0, \ldots, \quad (\Delta_n u) = 0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Ceci posé, nous avons d'abord à chercher les solutions particulières de l'équation $(\Delta_2 u) = 0$. Pour cela, l'une d'elles u' étant déterminée, on pourra, pour déterminer la seconde u'', faire l'application du théorème démontré dans le § VIII (Première Thèse). Quoi qu'il en soit, quand on connaîtra les deux solutions particulières u' et u'' de la première des équations (18) on changera de variables en exprimant μ, x_1, x_2, x_3, ..., x_n en fonction de $x_2, x_3, \ldots, x_n, u', u''$; l'une quelconque des équations suivantes $(\Delta_m u) = 0$ deviendra

$$0 = (\Delta_m x_3)\frac{du}{dx_3} + \ldots + (\Delta_m x_n)\frac{du}{dx_n} + (\Delta_m u')\frac{du}{du'} + (\Delta_m u'')\frac{du}{du''},$$

en remarquant que $(\Delta_m x_2) = 0$ pour les valeurs 2, 3, ..., n de m; enfin, eu égard aux conditions $(\Delta_m x_k) = 0$, pour $m \leqslant k$ et $(\Delta_m x_m) = 1$, on aura, pour l'une des équations transformées,

$$0 = \frac{du}{dx_m} + (\Delta_m u')\frac{du}{du'} + (\Delta_m u'')\frac{du}{du''}, \tag{19}$$

m devant prendre successivement les valeurs 3, 4, ..., n.

Ce dernier système, qui satisfait d'ailleurs, comme le précédent, aux conditions d'intégrabilité (Première Thèse, § II, *Remarque II*), jouit de cette propriété, que toute solution commune des équations (18) est solution commune des équations de ce dernier système; et réciproquement, que toute solution commune des équations du système (19) satisfait aux équations (18). Ce système (19), ayant la même forme que le précédent, se traitera comme lui, et, si l'on trouve les deux solutions particulières distinctes u'_1, u''_1, pour la première des équations (19), on remplacera les variables x_3, x_4, ..., x_n, u', u'' en fonction des suivantes: x_3, x_4, ..., x_n, u'_1, u''_1; x_3 disparaissant d'ailleurs identiquement du résultat, comme cela est arrivé pour x_2 dans la première transformation. En opérant ainsi successivement, on voit que le nombre des équations de chaque système diminue d'une unité en passant d'un système au suivant, et que le nombre des variables subit la même réduction; on arrivera donc enfin à une seule équation à trois variables de la forme

$$0 = A\frac{du}{dx_n} + B\frac{du}{du'_{n-2}} + C\frac{du}{du''_{n-2}},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et dont on cherchera les deux solutions particulières u'_{n-1}, u''_{n-1}. Revenant aux variables primitives, on aura, en égalant ces deux solutions à des constantes, la solution complète du problème proposé; la solution générale sera une fonction quelconque de u'_{n-1}, u''_{n-1}, qui, égalée à zéro, donnera la valeur du facteur intégrant μ.

Si nous comparons les deux méthodes que nous venons d'indiquer, nous voyons que la première ne nécessite la recherche que d'une solution commune des équations d'un seul système auxiliaire, tandis que la seconde exige la formation de $n-2$ systèmes auxiliaires successifs, et pour chacun d'eux la solution complète de l'une de ses équations. Ce qui caractérise la seconde méthode, c'est qu'elle donne le facteur sous une forme semblable à celle qui lui convient en général, d'après les théorèmes que nous allons maintenant démontrer.

§ IV. — *Propriétés générales du facteur intégrant.*

LEMME. — *Si* U *et u sont deux fonctions de n variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *et telles que l'on ait, pour chacune de ces variables,*

$$\frac{d\mathrm{U}}{dx_h} = \lambda \frac{du}{dx_h},$$

λ *étant une fonction donnée de* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *ou plus simplement*

$$d\mathrm{U} = \lambda\, du:$$

alors U *est seulement une fonction de u.*

Supposons, en effet, que, dans $\mathrm{U} = \mathrm{F}(x_1, \ldots, x_n)$, on remplace x_n par sa valeur tirée de l'égalité $u = f(x_1, \ldots, x_n)$, le résultat sera en général de la forme

$$\mathrm{U} = \mathrm{F}_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, u).$$

Je dis que, dans le cas actuel, les variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sont éliminées en même temps que x_n.

Différentions, en effet, la fonction U par rapport à $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

la substitution indiquée étant supposée effectuée, nous aurons

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{dx_1} &= \frac{dF_1}{dx_1} + \frac{dF_1}{du}\frac{du}{dx_1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
\frac{dU}{dx_{n-1}} &= \frac{dF_1}{dx_{n-1}} + \frac{dF_1}{du}\frac{du}{dx_{n-1}},\\
\frac{dU}{dx_n} &= \frac{dF_1}{du}\frac{du}{dx_n}.
\end{aligned}$$

Mais, par hypothèse, $\frac{dU}{dx_n} = \lambda\frac{du}{dx_n}$; d'où l'on aura, en comparant avec les valeurs qui précèdent,

$$\lambda = \frac{dF_1}{du}, \quad \text{puis} \quad \frac{dF_1}{dx_1} = 0, \quad \frac{dF_1}{dx_2} = 0, \ldots, \quad \frac{dF_1}{dx_{n-1}} = 0, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Ceci pouvait être établi beaucoup plus simplement, en considérant que l'égalité $dU = \lambda\, du$ exprime que U reste constant quand $x_1, x_2, \ldots, x_n$ varient de façon à laisser u constant, et que U ne variera qu'autant que u variera aussi : donc U n'est qu'une fonction de u.

THÉORÈME. — *Il existe une infinité de valeurs pour le facteur intégrant de l'expression*

$$X_1\, dx_1 + \ldots + X_n\, dx_n.$$

Si μ est une valeur du facteur, on aura

$$\mu(X_1\, dx_1 + \ldots + X_n\, dx_n) = du;$$

multipliant les deux membres de cette égalité par une fonction arbitraire de u, $\varphi(u)$, on aura

$$\varphi(u)\mu(X_1\, dx_1 + \ldots + X_n\, dx_n) = \varphi(u)\, du,$$

qui est encore une différentielle exacte.

Il y a donc une infinité de valeurs du facteur de la forme $\mu\varphi(u)$.

RÉCIPROQUEMENT. — *Toutes les valeurs du facteur sont de la forme* $\mu\varphi(u)$, μ *étant l'une quelconque d'entre d'elles.*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Soit, en effet, une valeur V du facteur, on aura

$$V(X_1\,dx_1+\ldots+X_n\,dx_n)=dU;$$

d'ailleurs, par hypothèse,

$$\mu(X_1\,dx_1+\ldots+X_n\,dx_n)=du;$$

d'où

$$\frac{dU}{du}=\frac{V}{\mu};$$

et, par conséquent, $\frac{V}{\mu}$ sera une fonction de u seulement. La formule générale du facteur intégrant est donc

$$\mu=\mu_1\varphi(u),$$

μ_1 étant une valeur particulière de ce facteur, et u la fonction dont l'expression proposée devient la différentielle, quand on la multiplie par μ_1.

COROLLAIRE. — Si l'on peut obtenir deux valeurs du facteur, leur rapport sera l'intégrale cherchée, ou plutôt une valeur de cette intégrale.

§ V. — *Remarques relatives aux théories précédentes. — Cas particulier où le facteur est décomposable en un produit de fonctions.*

La marche que nous avons suivie pour arriver à la détermination du facteur peut facilement être modifiée; elle est seulement la plus simple en général. On pourrait, en effet, remplacer le système d'équations dont nous sommes partis par $(n-1)$ équations fournies par le symbole $[h, k]=0$, h et k prenant des valeurs de la suite $1, 2, \ldots, n$, et de telle sorte que chaque nombre de cette suite soit pris au moins une fois; car alors le système des $(n-1)$ équations obtenues renfermera les dérivées de μ par rapport à toutes les variables. Mais on voit immédiatement que la détermination de $(n-1)$ des quantités $p_1, \ldots, p_n$ en fonction de la dernière et des variables indépendantes exigera des

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

substitutions qui compliqueront les résultats obtenus, et par suite les calculs ultérieurs. Ce n'est que dans des cas très-particuliers, par exemple dans celui où l'on a, entre quelques-unes des fonctions $X_1, \ldots, X_n$, des relations telles que la suivante :

$$\frac{dX_m}{dx_k} = \frac{dX_k}{dx_m},$$

qu'il pourra y avoir intérêt à modifier dans le sens que nous venons d'indiquer la marche générale des opérations; et l'on voit facilement comment il faudra choisir les valeurs de h et k dans le symbole $[h, k] = 0$, pour apporter aux calculs la plus grande simplification possible; aussi ne nous arrêterons-nous pas plus longtemps sur ce sujet.

Nous nous proposons actuellement d'étudier le cas remarquable où le facteur intégrant est décomposable en un produit de fonctions ne contenant chacune qu'une seule variable, c'est-à-dire le cas où l'on a

$$\mu = z_1 z_2 \ldots z_n,$$

z_1 étant une fonction de x_1 seulement, z_2, de $x_2, \ldots$. En nous reportant au changement de variable que nous avons opéré pour appliquer la théorie générale de l'intégration aux cas des équations du facteur, on trouvera, dans l'hypothèse actuelle,

$$p_1 = \frac{1}{z_1}\frac{dz_1}{dx_1}, \quad p_2 = \frac{1}{z_2}\frac{dz_2}{dx_2}, \ldots, \quad p_m = \frac{1}{z_m}\frac{dz_m}{dx_m}, \ldots, \quad p_n = \frac{1}{z_n}\frac{dz_n}{dx_n}.$$

Les $p_1, p_2, \ldots, p_m, \ldots, p_n$ devant d'ailleurs satisfaire aux équations de la forme

$$X_1 p_m - X_m p_1 + \frac{dX_1}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_1} = 0,$$

il faudra que l'on puisse avoir

$$X_1\left(\frac{1}{z_m}\frac{dz_m}{dx_m}\right) - X_m\left(\frac{1}{z_1}\frac{dz_1}{dx_1}\right) = \frac{dX_m}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx_m};$$

mais le premier membre de cette équation peut se représenter par

$$X_1 \varphi_m(x_m) - X_m \varphi_1(x_1); \tag{20}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

donc on ne pourra obtenir pour μ une fonction décomposable en facteurs de la forme supposée qu'autant que $\frac{d\mathrm{X}_m}{dx_l} - \frac{d\mathrm{X}_l}{dx_m}$ pourra aussi se mettre sous cette forme (20); et il faudra non-seulement que cette décomposition soit possible pour toutes les valeurs de l'indice m, mais encore que les valeurs fournies par les différentes décompositions, pour $\varphi_l(x_l)$, soient identiques.

Telles sont les conditions nécessaires et suffisantes qui doivent être remplies par les fonctions X_1, X_2,..., X_n pour que le facteur intégrant soit de la forme supposée.

Plus généralement, si l'on partait des équations fournies par le symbole $[h, k] = 0$, où h et k prennent des valeurs quelconques de la suite $1, 2, \ldots, n$, l'une quelconque d'entre elles,

$$\mathrm{X}_k p_k - \mathrm{X}_k p_k + \frac{d\mathrm{X}_k}{dx_k} - \frac{d\mathrm{X}_k}{dx_k} = 0,$$

conduirait à la condition

$$\frac{d\mathrm{X}_k}{dx_k} - \frac{d\mathrm{X}_k}{dx_k} = \mathrm{X}_k\left(\frac{1}{z_k}\frac{dz_k}{dx_k}\right) - \mathrm{X}_k\left(\frac{1}{z_k}\frac{dz_k}{dx_k}\right), \tag{21}$$

c'est-à-dire qu'il faudrait que la quantité

$$\frac{d\mathrm{X}_k}{dx_k} - \frac{d\mathrm{X}_k}{dx_k},$$

pût se mettre sous la forme

$$\mathrm{X}_k\varphi_k(x_k) - \mathrm{X}_k\varphi_k(x_k),$$

et, en outre, que toutes les valeurs de $\varphi_k(x_k)$, par exemple, fussent identiquement les mêmes pour toutes les décompositions analogues à la précédente. Si toutes ces conditions sont remplies, il existera un facteur intégrant de la forme

$$\mu = z_1 z_2 \ldots z_m \ldots z_n,$$

où z_m est seulement fonction de x_m, et les calculs qui précèdent auront déterminé en même temps les valeurs des fonctions

$$\varphi_1(x_1), \ldots, \quad \varphi_m(x_m), \ldots, \quad \varphi_n(x_n).$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Si nous considérons les dernières conditions répondant aux équations $[h, k] = 0$, elles sont évidemment plus nombreuses que celles fournies par les équations désignées par le symbole $[1, k] = 0$; mais cette plus grande multiplicité n'est qu'apparente, et, si les conditions répondant aux équations $[1, k] = 0$ sont satisfaites, celles qui sont relatives aux équations $[h, k] = 0$, pour toutes les valeurs de h et de k, le seront en même temps. Ce fait, qui pourrait être établi directement, résulte d'ailleurs immédiatement de cette considération, que les équations fournies par le symbole $[1, k] = 0$, où k prend les valeurs $2, 3, \ldots, n$, comprennent toutes les autres. Mais, sans nous étendre davantage sur ce point, revenons à la détermination des fonctions $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Les décompositions précédentes nous ayant donné les valeurs de $\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_m(x_m), \ldots, \varphi_n(x_n)$, nous aurons, en général, pour la détermination de z_m,

$$\frac{1}{z_m}\frac{dz_m}{dx_m} = \varphi_m(x_m),$$

d'où

$$z_m = c\, e^{\int \varphi_m(x_m)\, dx_m},$$

c étant une constante; et, par suite, pour le facteur intégrant, on aura immédiatement

$$\mu = \mathrm{A}\, e^{\sum_{m=1}^{m=n} \int \varphi_m(x_m)\, dx_m},$$

en représentant par A une constante quelconque.

Nous remarquons immédiatement que, si toutes les conditions de décomposition en facteurs sont satisfaites, il pourra manquer certaines variables dans le facteur intégrant, dans le cas où quelques-unes des fonctions $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ satisfont aux conditions

$$\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_k} - \frac{d\mathrm{X}_k}{dx_h} = 0. \tag{22}$$

Supposons en particulier qu'il n'y ait que cette condition de satisfaite; en considérant l'équation

$$\mathrm{X}_h p_k - \mathrm{X}_k p_h + \frac{d\mathrm{X}_h}{dx_k} - \frac{d\mathrm{X}_k}{dx_h} = 0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

dans l'hypothèse actuelle, elle conduira à cette condition

$$\frac{d\mathrm{X}_k}{dx_h} - \frac{d\mathrm{X}_h}{dx_k} = \mathrm{X}_k\,\varphi_h(x_h) - \mathrm{X}_h\,\varphi_k(x_k) = 0,$$

qui pourra être satisfaite en posant

$$\varphi_h(x_h) = 0, \quad \varphi_k(x_k) = 0;$$

si les autres décompositions donnent les mêmes résultats pour φ_h et φ_k, les variables x_h et x_k feront défaut dans la valeur de μ.

Mais il peut manquer certaines variables dans μ, sans pour cela que les fonctions $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ satisfassent à aucune des conditions (22). Supposons, par exemple, que $\varphi_1(x_1) = 0$; on devra alors avoir, pour les valeurs $2, 3, \ldots, n$ de l'indice m,

$$\frac{\dfrac{d\mathrm{X}_1}{dx_m} - \dfrac{d\mathrm{X}_m}{dx_1}}{\mathrm{X}_1} = \varphi_m(x_m), \tag{23}$$

c'est-à-dire que la fonction représentée par le premier membre de cette équation doit se réduire à une fonction de x_m. Telles sont les $n-1$ conditions qui doivent être satisfaites pour que la variable x_1 n'entre pas dans la fonction μ, supposée d'ailleurs décomposable en facteurs.

Si nous cherchons ce que deviennent les conditions d'intégrabilité quand on suppose satisfaites les conditions de la décomposition en facteurs, on voit que ces dernières comprennent les premières, c'est-à-dire que, si pour deux quelconques des fonctions données on a

$$\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_k} - \frac{d\mathrm{X}_k}{dx_h} = \mathrm{X}_k\,\varphi_h(x_h) - \mathrm{X}_h\,\varphi_k(x_k), \tag{24}$$

les fonctions $\varphi_h(x_h)$, $\varphi_k(x_k)$, ... restant identiques à elles-mêmes dans les différentes décompositions, et cela pour toutes les valeurs des indices h et k, on aura aussi, identiquement,

$$\mathrm{X}_h\left(\frac{d\mathrm{X}_k}{dx_m} - \frac{d\mathrm{X}_m}{dx_k}\right) + \mathrm{X}_k\left(\frac{d\mathrm{X}_m}{dx_h} - \frac{d\mathrm{X}_h}{dx_m}\right) + \mathrm{X}_m\left(\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_k} - \frac{d\mathrm{X}_k}{dx_h}\right) = 0,$$

ce que l'on vérifie facilement.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La considération des seules conditions (21) permettra donc d'affirmer que la fonction proposée peut être intégrée par la méthode du facteur, et que ce facteur peut se décomposer en un produit de fonctions de la forme considérée. Les conditions (23) permettront même de déterminer *à priori* les variables qui n'entrent pas dans l'expression du facteur intégrant.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que les fonctions dont le produit composait le facteur intégrant ne renfermaient chacune qu'une seule variable; mais on peut se proposer de rechercher en général les conditions qui doivent être satisfaites pour que μ soit égal à un produit de fonctions ne contenant chacune qu'une seule variable, et d'une autre fonction des variables non comprises dans les premières, c'est-à-dire que la forme supposée de μ est la suivante :

$$\mu = z_1 z_2 \dots z_m f(x_{m+1}, \dots, x_n).$$

On trouverait, en procédant comme précédemment, une série de conditions de la forme (24), et qui s'en déduiraient en faisant $h = 1$, et donnant à k les valeurs 2, 3,..., m. Quant aux équations répondant aux valeurs $m+1, m+2, \dots, n$, de k, h restant toujours égal à l'unité, elles donnent

$$X_1 \frac{1}{f}\frac{df}{dx_k} = X_k \frac{1}{z_1}\frac{dz_1}{dx_1} + \frac{dX_k}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx_k},$$

en remarquant que

$$p_1 = \frac{1}{z_1}\frac{dz_1}{dx_1} \quad \text{et} \quad p_k = \frac{1}{f}\frac{df}{dx_k}.$$

Mais le premier membre de l'égalité obtenue est de la forme

$$X_1 F_k(x_{m+1}, \dots, x_k, \dots, x_n);$$

donc il faudra que le second membre puisse se mettre sous la même forme, et cela pour toutes les valeurs de k, depuis $m+1$ jusqu'à n. Si ces conditions sont satisfaites, on aura, pour déterminer la fonction f, l'équation

$$\frac{1}{f}\frac{df}{dx_k} = F_k,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et, par conséquent, on connaîtra les dérivées de la fonction $\log f$ par rapport à ses variables : la fonction f sera donc donnée par une simple quadrature, et l'on aura

$$F = \log f = \int \left(\sum_{m+1}^{n} F_i \, dx_i \right) + \text{const.},$$

et, par suite,

$$\mu = A e^{F + \int \left(\sum_{1}^{m} \varphi_i(x_i) \, dx_i \right)},$$

les fonctions φ étant analogues à celles qui se présentent dans le cas examiné précédemment.

Dans le cas où quelques-unes des fonctions X satisferaient aux conditions (22), on pourrait, en suivant la marche déjà suivie, chercher ce qu'il en résulterait pour la composition du facteur; mais ce qui précède suffit pour le faire prévoir : aussi nous nous contenterons d'indiquer cette analogie, croyant inutile d'entrer dans de plus grands développements à ce sujet, non plus que sur la marche à suivre pour déterminer *à priori* la forme du facteur intégrant. Nous terminerons ces recherches par des considérations qui se rattachent immédiatement aux conditions d'intégrabilité des expressions différentielles par la méthode du facteur.

§ VI. — *Sur l'intégration d'une classe d'équations linéaires simultanées aux dérivées partielles du premier ordre.*

Si nous considérons les conditions d'intégrabilité représentées en général par l'équation symbolique $[m, h, k] = 0$, nous voyons que ces conditions expriment, soit entre les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$, soit entre les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, des relations dont la considération peut intervenir dans diverses questions se rattachant plus ou moins étroitement à la théorie de l'intégration des expressions différentielles. Ainsi, par exemple, les conditions non satisfaites expriment précisément les relations qu'il faudrait établir entre les variables, jusqu'alors supposées indépendantes, pour que l'expression proposée devint intégrable. On peut aussi considérer ces relations comme définissant certaines des

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

fonctions X en fonction des autres, et c'est à ce point de vue que nous allons nous arrêter, parce qu'il nous conduira à un résultat général pour l'intégration des équations simultanées linéaires d'une certaine forme.

Le problème que nous nous proposons de résoudre est le suivant :

Étant données m fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_m$ *de n variables indépendantes,* $n > m$, *on propose de trouver* $n - m$ *nouvelles fonctions* $X_{m+1}, \ldots, X_n$ *des mêmes variables, et telles que l'expression*

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_m dx_m + \ldots + X_n dx_n$$

soit intégrable par le facteur, les fonctions données satisfaisant d'ailleurs aux conditions $[h, k, l] = 0$, *où h, k et l prennent successivement toutes les valeurs* $1, 2, \ldots, m$.

Proposons-nous d'abord la détermination de X_{m+1}, et cherchons pour cela le nombre et la forme des équations auxquelles cette fonction doit satisfaire. Toutes les relations entre les fonctions $X_1, \ldots, X_m, \ldots, X_n$ s'obtiennent de la formule $[1, h, k] = 0$, où h et k prennent toutes les valeurs de la suite $1, 2, \ldots, n$; on aura donc toutes les relations qui contiennent X_{m+1}, en supposant, dans la formule considérée, $k = m + 1$, et donnant à h les valeurs $2, 3, \ldots, m$. On voit donc que la fonction X_{m+1} aura à satisfaire à $m - 1$ équations de la forme

$$f_h = X_1\left(\frac{dX_h}{dx_{m+1}} - \frac{dX_{m+1}}{dx_h}\right) + X_h\left(\frac{dX_{m+1}}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx_{m+1}}\right) + X_{m+1}\left(\frac{dX_1}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_1}\right) = 0;$$

les seules variables considérées comme telles, dans la recherche de X_{m+1}, sont $x_1, x_2, \ldots, x_m$, les dérivées de la fonction cherchée qui entrent dans ces équations n'étant relatives qu'à ces variables.

La question est donc ramenée à la forme générale suivante que nous avions en vue :

Intégrer un système de $m - 1$ *équations linéaires, à m variables, de la forme*

$$f_h = X_1\frac{dv}{dx_h} - X_h\frac{dv}{dx_1} + v\left(\frac{dX_h}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx_h}\right) - X_1\frac{dX_h}{dx_{m+1}} + X_h\frac{dX_1}{dx_{m+1}} = 0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

où h doit prendre les valeurs 2, 3, ..., m, *les fonctions* $X_1, X_2, \ldots, X_m$ *satisfaisant d'ailleurs identiquement à des conditions de la forme*

$$X_h\left(\frac{dX_k}{dx_l}-\frac{dX_l}{dx_k}\right)+X_k\left(\frac{dX_l}{dx_h}-\frac{dX_h}{dx_l}\right)+X_l\left(\frac{dX_h}{dx_k}-\frac{dX_k}{dx_h}\right)=0,$$

où h, k, l prennent toutes les valeurs 1, 2, ..., m.

Nous allons démontrer que les équations précédentes satisfont aux conditions d'intégrabilité, c'est-à-dire que, pour deux quelconques d'entre elles,

$$f_h=0, \quad f_k=0,$$

on a

$$(25) \qquad (f_h f_k)=\sum_{i=1}^{i=m}\left(\frac{df_h}{dp_i}\frac{df_k}{dq_i}-\frac{df_h}{dq_i}\frac{df_k}{dp_i}\right)=0.$$

Tel est le résultat général que nous nous proposons d'établir, après quoi le problème qui précède se résoudra en suivant les méthodes qui ont été développées à cet effet.

On remarquera d'abord que les équations considérées contiennent la fonction dans les coefficients. Pour la faire disparaître, on posera $tv=u$, t étant une variable nouvelle et u la nouvelle fonction cherchée; on aura alors

$$\frac{dv}{dx_i}=\frac{1}{t}\frac{du}{dx_i}, \quad \text{et} \quad v=\frac{du}{dt};$$

en posant $\frac{du}{dx_i}=p_i$, $\frac{du}{dt}=p$, les équations $f_h=0$ et $f_k=0$ deviendront

$$(26) \qquad f_h=\frac{X_1}{t}p_h-\frac{X_h}{t}p_1-\left(\frac{dX_1}{dx_h}-\frac{dX_h}{dx_1}\right)p-X_1\frac{dX_h}{dx_{m+1}}+X_h\frac{dX_1}{dx_{m+1}}=0,$$

$$(27) \qquad f_k=\frac{X_1}{t}p_k-\frac{X_k}{t}p_1-\left(\frac{dX_1}{dx_k}-\frac{dX_k}{dx_1}\right)p-X_1\frac{dX_k}{dx_{m+1}}+X_k\frac{dX_1}{dx_{m+1}}=0.$$

En tenant compte de la relation identique

$$(28) \qquad X_1\left(\frac{dX_h}{dx_k}-\frac{dX_k}{dx_h}\right)+X_h\left(\frac{dX_k}{dx_1}-\frac{dX_1}{dx_k}\right)+X_k\left(\frac{dX_1}{dx_h}-\frac{dX_h}{dx_1}\right)=0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

on déduit de (26) et (27) l'équation (29), qui est une conséquence des précédentes,

$$(29)\quad f_{h,k}=\frac{X_h}{t}p_k-\frac{X_k}{t}p_h-\left(\frac{dX_h}{dx_k}-\frac{dX_k}{dx_h}\right)p-X_k\frac{dX_h}{dx_{m+1}}+X_k\frac{dX_h}{dx_{m+1}}=0.$$

Des valeurs de f_h et f_k, on déduit

$$(30)\quad\begin{cases}\dfrac{df_h}{dp}=-\dfrac{dX_1}{dx_h}+\dfrac{dX_h}{dx_1},\quad \dfrac{df_h}{dp_1}=-\dfrac{X_h}{t},\quad \dfrac{df_h}{dp_h}=\dfrac{X_1}{t},\quad \dfrac{df_h}{dp_i}=0,\quad i\gtrless h,\quad i>1;\\ \dfrac{df_k}{dp}=-\dfrac{dX_1}{dx_k}+\dfrac{dX_k}{dx_1},\quad \dfrac{df_k}{dp_1}=-\dfrac{X_k}{t},\quad \dfrac{df_k}{dp_k}=\dfrac{X_1}{t},\quad \dfrac{df_k}{dp_i}=0,\quad i\gtrless k,\quad i>1.\end{cases}$$

D'après ces valeurs, on voit déjà que l'expression (25) se réduira aux termes suivants :

$$(31)\quad (f_hf_k)=\frac{df_h}{dp}\frac{df_k}{dt}+\frac{df_h}{dp_1}\frac{df_k}{dx_1}+\frac{df_h}{dp_h}\frac{df_k}{dx_h}-\frac{df_h}{dt}\frac{df_k}{dp}-\frac{df_h}{dx_1}\frac{df_k}{dp_1}-\frac{df_h}{dx_k}\frac{df_k}{dp_k},$$

et nous avons maintenant à calculer les valeurs de

$$\frac{df_k}{dt},\quad \frac{df_h}{dt},\quad \frac{df_k}{dx_1},\quad \frac{df_h}{dx_1},\quad \frac{df_k}{dx_h},\quad \frac{df_h}{dx_k}.$$

On a immédiatement

$$(32)\quad\begin{cases}\dfrac{df_k}{dt}=-\dfrac{X_1}{t^2}p_k+\dfrac{X_k}{t^2}p_1,\\ \dfrac{df_h}{dt}=-\dfrac{X_1}{t^2}p_h+\dfrac{X_h}{t^2}p_1,\\ \dfrac{df_k}{dx_1}=\dfrac{dX_1}{dx_1}\dfrac{p_k}{t}-\dfrac{dX_k}{dx_1}\dfrac{p_1}{t}-p\dfrac{d}{dx_1}\left(\dfrac{dX_1}{dx_k}-\dfrac{dX_k}{dx_1}\right)-\dfrac{d}{dx_1}\left(X_1\dfrac{dX_k}{dx_{m+1}}-X_k\dfrac{dX_1}{dx_{m+1}}\right),\\ \dfrac{df_h}{dx_1}=\dfrac{dX_1}{dx_1}\dfrac{p_h}{t}-\dfrac{dX_h}{dx_1}\dfrac{p_1}{t}-p\dfrac{d}{dx_1}\left(\dfrac{dX_1}{dx_h}-\dfrac{dX_h}{dx_1}\right)-\dfrac{d}{dx_1}\left(X_1\dfrac{dX_h}{dx_{m+1}}-X_h\dfrac{dX_1}{dx_{m+1}}\right),\\ \dfrac{df_k}{dx_h}=\dfrac{dX_1}{dx_h}\dfrac{p_k}{t}-\dfrac{dX_k}{dx_h}\dfrac{p_1}{t}-p\dfrac{d}{dx_h}\left(\dfrac{dX_1}{dx_k}-\dfrac{dX_k}{dx_1}\right)-\dfrac{d}{dx_h}\left(X_1\dfrac{dX_k}{dx_{m+1}}-X_k\dfrac{dX_1}{dx_{m+1}}\right),\\ \dfrac{df_h}{dx_k}=\dfrac{dX_1}{dx_k}\dfrac{p_h}{t}-\dfrac{dX_h}{dx_k}\dfrac{p_1}{t}-p\dfrac{d}{dx_k}\left(\dfrac{dX_1}{dx_h}-\dfrac{dX_h}{dx_1}\right)-\dfrac{d}{dx_k}\left(X_1\dfrac{dX_h}{dx_{m+1}}-X_h\dfrac{dX_1}{dx_{m+1}}\right).\end{cases}$$

Si nous substituons maintenant les valeurs (30) et (32) dans l'ex-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

pression (31), nous obtenons un résultat de la forme

$$(f_h f_k) = \mathrm{P}p + \mathrm{Q}p_i + \mathrm{R}p_h + \mathrm{S}p_k + \mathrm{T}, \tag{33}$$

et nous allons nous proposer de calculer les valeurs des coefficients P, Q, R, S, T, ce qui se fera en supposant les substitutions effectuées, et cherchant séparément les termes contenant p_i, p_k, p_h, p, ou ceux qui sont indépendants de ces quantités. En opérant ainsi, nous trouverons d'abord

$$\mathrm{P} = \frac{1}{t}\left[\mathrm{X}_i \frac{d}{dx_i}\left(\frac{d\mathrm{X}_k}{dx_h} - \frac{d\mathrm{X}_h}{dx_k}\right) + \mathrm{X}_k \frac{d}{dx_i}\left(\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_i} - \frac{d\mathrm{X}_i}{dx_h}\right) + \mathrm{X}_h \frac{d}{dx_i}\left(\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_k} - \frac{d\mathrm{X}_k}{dx_i}\right)\right];$$

et, si l'on tient compte de la relation obtenue en dérivant par rapport à x_i l'équation

$$[i, k, h] = 0, \tag{34}$$

la valeur précédente deviendra

$$\mathrm{P} = \frac{1}{t}\left(\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_i}\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_k} - \frac{d\mathrm{X}_i}{dx_i}\frac{d\mathrm{X}_k}{dx_h} + \frac{d\mathrm{X}_i}{dx_h}\frac{d\mathrm{X}_k}{dx_i} - \frac{d\mathrm{X}_i}{dx_k}\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_i}\right). \tag{35}$$

On trouvera ensuite

$$\mathrm{Q} = \frac{1}{t^2}\left[\mathrm{X}_h \frac{d\mathrm{X}_k}{dx_i} - \mathrm{X}_k \frac{d\mathrm{X}_h}{dx_i} + 2\mathrm{X}_i\left(\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_k} - \frac{d\mathrm{X}_k}{dx_h}\right)\right], \tag{36}$$

$$\mathrm{R} = \frac{1}{t^2}\left[\mathrm{X}_k \frac{d\mathrm{X}_i}{dx_i} - \mathrm{X}_i \frac{d\mathrm{X}_i}{dx_k} + \mathrm{X}_i\left(\frac{d\mathrm{X}_k}{dx_i} - \frac{d\mathrm{X}_i}{dx_k}\right)\right], \tag{37}$$

$$\mathrm{S} = \frac{1}{t^2}\left[-\mathrm{X}_h \frac{d\mathrm{X}_i}{dx_i} + \mathrm{X}_i \frac{d\mathrm{X}_i}{dx_k} - \mathrm{X}_i\left(\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_i} - \frac{d\mathrm{X}_i}{dx_h}\right)\right]. \tag{38}$$

Enfin, pour T, on aura

$$\begin{aligned}\mathrm{T} = \frac{1}{t}\Bigg[&\mathrm{X}_h \frac{d}{dx_i}\left(\mathrm{X}_i \frac{d\mathrm{X}_k}{dx_{m+i}} - \mathrm{X}_k \frac{d\mathrm{X}_i}{dx_{m+i}}\right) - \mathrm{X}_i \frac{d}{dx_h}\left(\mathrm{X}_i \frac{d\mathrm{X}_k}{dx_{m+i}} - \mathrm{X}_k \frac{d\mathrm{X}_i}{dx_{m+i}}\right)\\ &- \mathrm{X}_k \frac{d}{dx_i}\left(\mathrm{X}_i \frac{d\mathrm{X}_h}{dx_{m+i}} - \mathrm{X}_h \frac{d\mathrm{X}_i}{dx_{m+i}}\right) + \mathrm{X}_i \frac{d}{dx_k}\left(\mathrm{X}_i \frac{d\mathrm{X}_h}{dx_{m+i}} - \mathrm{X}_h \frac{d\mathrm{X}_i}{dx_{m+i}}\right)\Bigg];\end{aligned}$$

en effectuant les différentiations indiquées, et groupant convenable-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ment les termes obtenus, on aura

$$\begin{aligned}\iota\mathrm{T} = &-\mathrm{X}_i\left[\mathrm{X}_i\frac{d}{dx_{m+1}}\left(\frac{d\mathrm{X}_k}{dx_k}-\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_k}\right)+\mathrm{X}_k\frac{d}{dx_{m+1}}\left(\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_i}-\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_h}\right)\right.\\ &\left.+\mathrm{X}_h\frac{d}{dx_{m+1}}\left(\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_k}-\frac{d\mathrm{X}_k}{dx_i}\right)\right]\\ &-\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_i}\left(\mathrm{X}_k\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_{m+1}}-\mathrm{X}_h\frac{d\mathrm{X}_k}{dx_{m+1}}\right)+\mathrm{X}_i\left(\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_k}\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_{m+1}}-\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_h}\frac{d\mathrm{X}_k}{dx_{m+1}}\right)\\ &+\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_{m+1}}\left[\mathrm{X}_k\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_i}-\mathrm{X}_h\frac{d\mathrm{X}_k}{dx_i}+\mathrm{X}_i\left(\frac{d\mathrm{X}_k}{dx_h}-\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_k}\right)\right].\end{aligned}$$

Mais la première partie de cette expression n'est autre que la suivante :

$$\mathrm{X}_i\left[\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_{m+1}}\left(\frac{d\mathrm{X}_k}{dx_h}-\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_k}\right)+\frac{d\mathrm{X}_k}{dx_{m+1}}\left(\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_i}-\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_h}\right)+\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_{m+1}}\left(\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_k}-\frac{d\mathrm{X}_k}{dx_i}\right)\right];$$

d'où, par un arrangement convenable des termes, on aura

$$\begin{aligned}\iota\mathrm{T} = &-\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_i}\left(\mathrm{X}_k\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_{m+1}}-\mathrm{X}_h\frac{d\mathrm{X}_k}{dx_{m+1}}\right)+\mathrm{X}_i\left(\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_k}\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_{m+1}}-\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_h}\frac{d\mathrm{X}_k}{dx_{m+1}}\right)\\ &+\mathrm{X}_i\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_{m+1}}\left(\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_k}-\frac{d\mathrm{X}_k}{dx_i}\right)+\mathrm{X}_i\frac{d\mathrm{X}_k}{dx_{m+1}}\left(\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_i}-\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_h}\right)\\ &+\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_{m+1}}\left[\mathrm{X}_k\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_i}-\mathrm{X}_h\frac{d\mathrm{X}_k}{dx_i}+2\mathrm{X}_i\left(\frac{d\mathrm{X}_k}{dx_h}-\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_k}\right)\right].\end{aligned}$$

Mais on a, d'après l'équation (34),

$$\begin{aligned}&\mathrm{X}_k\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_i}-\mathrm{X}_h\frac{d\mathrm{X}_k}{dx_i}+2\mathrm{X}_i\left(\frac{d\mathrm{X}_k}{dx_h}-\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_k}\right)\\ &=\left(\mathrm{X}_k\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_h}-\mathrm{X}_h\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_k}\right)-\mathrm{X}_k\left(\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_i}-\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_h}\right)-\mathrm{X}_h\left(\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_k}-\frac{d\mathrm{X}_k}{dx_i}\right),\end{aligned}$$

ce qui nous donne enfin, pour T, la valeur suivante :

$$(39)\quad\left\{\begin{aligned}\mathrm{T} = \frac{1}{t}\Bigg[&-\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_i}\left(\mathrm{X}_k\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_{m+1}}-\mathrm{X}_h\frac{d\mathrm{X}_k}{dx_{m+1}}\right)+\mathrm{X}_i\left(\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_k}\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_{m+1}}-\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_h}\frac{d\mathrm{X}_k}{dx_{m+1}}\right)\\ &+\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_{m+1}}\left(\mathrm{X}_k\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_h}-\mathrm{X}_h\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_k}\right)+\left(\mathrm{X}_i\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_{m+1}}-\mathrm{X}_h\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_{m+1}}\right)\left(\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_k}-\frac{d\mathrm{X}_k}{dx_i}\right)\\ &+\left(\mathrm{X}_i\frac{d\mathrm{X}_k}{dx_{m+1}}-\mathrm{X}_k\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_{m+1}}\right)\left(\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_h}-\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_i}\right)\Bigg].\end{aligned}\right.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Cette expression pourrait se mettre sous une forme plus symétrique; mais, pour l'objet que nous avons en vue, il est préférable de la conserver sous cette forme.

Si maintenant nous multiplions les équations (26), (27), (29) respectivement par

$$-\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_k}-\left(\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_k}-\frac{d\mathrm{X}_k}{dx_i}\right),$$

$$+\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_h}+\left(\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_h}-\frac{d\mathrm{X}_h}{dx_i}\right),$$

$$-\frac{d\mathrm{X}_i}{dx_i},$$

et que nous ajoutions les produits obtenus, nous aurons un résultat de la forme

$$\mathrm{P}'p+\mathrm{Q}'p_1+\mathrm{R}'p_2+\mathrm{S}'p_3+\mathrm{T}'=0,$$

et si nous cherchons les valeurs des coefficients P′, Q′, R′, S′, T′, nous trouvons qu'elles sont les suivantes :

$$\mathrm{P}'=t\mathrm{P},\quad \mathrm{Q}'=t\mathrm{Q},\quad \mathrm{R}'=t\mathrm{R},\quad \mathrm{S}'=t\mathrm{S},\quad \mathrm{T}'=t\mathrm{T};$$

d'où il suit que l'on a bien, (33),

$$(f_k,f_k)=0,$$

ce qui démontre que les équations du système considéré satisfont à toutes les conditions d'intégrabilité, comme nous nous proposions de l'établir.

Pour terminer cette étude, nous donnerons quelques exemples de détermination du facteur intégrant.

§ VII. — *Applications.*

PREMIER EXEMPLE. — *Soit proposé de déterminer le facteur intégrant de l'expression*

(1) $x_1(x_2-1)(x_3-1)dx_1+x_2(x_3-1)(x_1-1)dx_2+x_3(x_1-1)(x_2-1)dx_3.$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Divisant par $x_1(x_2-1)(x_3-1)$, on aura

$$(2)\qquad dx_1+\frac{x_2(x_1-1)}{x_1(x_2-1)}\,dx_2+\frac{x_3(x_1-1)}{x_1(x_3-1)}\,dx_3;$$

posant

$$X_1=1,\quad X_2=\frac{x_2(x_1-1)}{x_1(x^2-1)},\quad X_3=\frac{x_3(x_1-1)}{x_1(x_3-1)},$$

on vérifie immédiatement que la condition d'intégrabilité représentée par le symbole $[1, 2, 3] = 0$ est identiquement satisfaite. D'après ce que nous avons vu, nous aurons à intégrer les équations simultanées suivantes :

$$(3)\quad p_2=\frac{x_2(x_1-1)}{x_1(x_2-1)}p_1+\frac{x_2}{x_1^2(x_2-1)},\quad p_3=\frac{x_3(x_1-1)}{x_1(x_3-1)}p_1+\frac{x_3}{x_1^2(x_3-1)};$$

et, pour effectuer cette intégration, nous suivrons la méthode générale. Le système auxiliaire dont il faut chercher une solution commune est alors le suivant :

$$0=\frac{df}{dx_2}-\frac{x_2(x_1-1)}{x_1(x_2-1)}\frac{df}{dx_1}+\left(\frac{p_1x_2}{x_1^2(x_2-1)}-\frac{2x_2}{x_1^3(x_2-1)}\right)\frac{df}{dp_1},$$

$$0=\frac{df}{dx_3}-\frac{x_3(x_1-1)}{x_1(x_3-1)}\frac{df}{dx_1}+\left(\frac{p_1x_3}{x_1^2(x_3-1)}-\frac{2x_3}{x_1^3(x_3-1)}\right)\frac{df}{dp_1},$$

et l'on trouve que ces deux équations sont satisfaites par la solution

$$(4)\qquad f=\frac{p_1(x_1-1)}{x_1}+\frac{1}{x_1^2}.$$

Égalant cette fonction à une constante a, on en déduira, ainsi que des équations (3), les valeurs

$$p_1=\frac{ax_1}{x_1-1}-\frac{1}{x_1(x_1-1)},\quad p_2=\frac{ax_2}{x_2-1},\quad p_3=\frac{ax_2}{x_3-1};$$

conséquemment, en appelant μ le facteur cherché, on aura

$$\log\mu=\int(p_1\,dx_1+p_2\,dx_2+p_3\,dx_3)+b,$$

b étant une constante; d'où

$$\mu=bx_1(x_1-1)^{a-1}(x_2-1)^a(x_3-1)^a e^{a(x_1+x_2+x_3)}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La fonction intégrale, considérée dans toute sa généralité, s'obtiendra au moyen d'une série à termes entiers, et dont le nombre limité dépend de a. Dans le cas simple où l'on attribue à la constante arbitraire a l'unité pour valeur, on a

$$u = b(x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_3 - 1)\, e^{(x_1+x_2+x_3)},$$

pour l'expression correspondante de la fonction cherchée.

Nous présenterons encore quelques applications très-simples, en nous bornant à quelques indications sommaires.

Nous désignerons toujours par μ le facteur intégrant, par u la fonction cherchée, par a et b deux constantes arbitraires, et enfin par e la base des logarithmes népériens.

DEUXIÈME EXEMPLE. — *Soit l'expression*

$$dx_1 + \frac{x_1}{x_2}\, dx_2 - \frac{x_1}{2x_3}\, dx_3,$$

qui satisfait identiquement à la condition d'intégrabilité

$$[1, 2, 3] = 0.$$

En appliquant la méthode générale, on trouve

$$\mu = \frac{b}{x_1}\left(\frac{x_1^2 x_2}{x_3}\right)^{\frac{a+1}{2}}, \quad \text{et} \quad u = \frac{b}{a+1}\left(\frac{x_1^2 x_2}{x_3}\right)^{\frac{a+1}{2}}.$$

L'expression proposée est immédiatement intégrable en la multipliant par $\frac{2}{x_1}$, et l'intégale est alors

$$u = \log \frac{x_1^2 x_2}{x_3}.$$

Cette valeur particulière du facteur rentre dans la solution générale, en attribuant aux constantes les valeurs suivantes :

$$a + 1 = 2\left(\log \frac{x_1^2 x_2}{x_3}\right)^{-1}, \quad b = \left(\frac{x_1^2 x_2}{x_3}\right)^{\frac{-1}{\log \frac{x_1^2 x_2}{x_3}}},$$

l'une de ces valeurs étant fonction de l'autre.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

TROISIÈME EXEMPLE. — *Soit l'expression*

$$dx_1 + \frac{x_1}{2x_2}\,dx_2 - \frac{x_3 x_4}{x_1 x_2}\,dx_3 - \frac{x_3^2}{2x_1 x_2}\,dx^4,$$

pour laquelle les conditions d'intégrabilité

$$[1, 2, 3] = 0, \quad [1, 2, 4] = 0, \quad [1, 3, 4] = 0$$

sont satisfaites.

On trouve

$$\mu = b\,x_1\,x_2\,e^{\frac{a}{2}(x_1^2 x_2 - x_3^2 x_4)}$$

et

$$u = \frac{b}{a}\,e^{\frac{a}{2}(x_1^2 x_2 - x_3^2 x_4)}$$

Ce résultat est obtenu en suivant la méthode générale d'intégration; si l'on avait employé la méthode particulière aux équations linéaires, on aurait trouvé

$$\mu = x_1\,x_2\,\varphi(x_1^2\,x_2 - x_3^2\,x_4),$$

résultat qui concorde avec le précédent, φ étant une fonction arbitraire.

On reconnaît d'ailleurs immédiatement que l'expression proposée devient une différentielle exacte quand on la multiplie par $2x_1x_2$, valeur particulière du facteur qui rentre dans la formule générale que nous venons de donner.

QUATRIÈME EXEMPLE. — *Soit l'expression*

$$dx_1 + \frac{x_1}{x_2 \log x_2 x_3}\,dx_2 + \frac{x_1}{x_3 \log x_2 x_3}\,dx_3 + \frac{x_1}{x_5}\operatorname{cotang}\frac{x_4}{x_5}\,dx_4 - \frac{x_1 x_4}{x_5^2}\operatorname{cotang}\frac{x_4}{x_5}\,dx_5,$$

qui satisfait à toutes les conditions d'intégrabilité.

On trouve, en suivant la méthode générale d'intégration,

$$\mu = \frac{b}{x_1}\left(x_1 . \log x_2 x_3 . \sin\frac{x_4}{x_5}\right)^{a+1} \quad \text{et} \quad u = \frac{b}{a+1}\left(x_1 . \log x_2 x_3 . \sin\frac{x_4}{x_5}\right)^{a+1};$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

en appliquant la méthode relative aux équations linéaires, on trouve

$$\mu = \frac{1}{x_1}\varphi\left(x_1 . \log x_2 x_3 . \sin\frac{x_4}{x_5}\right).$$

Enfin, en multipliant l'expression proposée par $\frac{1}{x_1}$, on reconnaît qu'elle devient la différentielle exacte de la fonction

$$\log\left(x_1 . \log x_2 x_3 . \sin\frac{x_4}{x_5}\right),$$

qui est comprise, ainsi que la valeur particulière $\frac{1}{x_1}$ du facteur intégrant, dans les formules générales qui précèdent.

Vu et approuvé.

Le 29 novembre 1869.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer.

Le 30 novembre 1869.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

A. MOURIER.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC