N° D'ORDRE

554.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR L'ABBÉ BONAVENTURE BERLOTY.

1re THÈSE. — THÉORIE DES QUANTITÉS COMPLEXES A n UNITÉS PRINCIPALES.
2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 26 mars 1886, devant la Commission d'Examen.

MM. HERMITE, *Président.*
APPELL, } *Examinateurs.*
PICARD, }

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1886

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN par intérim	HÉBERT, Professeur	Géologie.
PROFESSEUR HONORAIRE	PASTEUR.	
PROFESSEURS	DUCHARTRE	Botanique.
	DE LACAZE-DUTHIERS.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BERT	Physiologie.
	HERMITE	Algèbre supérieure.
	TROOST	Chimie.
	FRIEDEL	Chimie organique.
	O. BONNET	Astronomie.
	DARBOUX	Géométrie supérieure.
	DEBRAY	Chimie.
	TISSERAND	Astronomie.
	LIPPMANN	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	HAUTEFEUILLE	Minéralogie.
	BOUTY	Physique.
	APPELL	Mécanique rationnelle.
	DUCLAUX	Chimie biologique.
CHARGÉS DE COURS	POINCARÉ	Mécanique physique et expérimentale.
	PICARD	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	Yves DELAGE	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
AGRÉGÉS	BERTRAND	Sciences mathématiques.
	J. VIEILLE	Sciences mathématiques.
	PELIGOT	Sciences physiques.
SECRÉTAIRE	PHILIPPON.	

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
11560 Quai des Augustins, 55.

PREMIÈRE THÈSE.

THÉORIE
DES QUANTITÉS COMPLEXES
A n UNITÉS PRINCIPALES.

INTRODUCTION.

Le présent travail a pour but d'exposer la théorie de certaines quantités complexes, d'après les idées émises par M. Weierstrass et publiées dans les *Mémoires de la Société de Göttingue*, en novembre 1884 ([1]).

Dans l'état actuel de la Science, les seules quantités sur lesquelles on opère habituellement en Mathématiques sont les quantités *réelles*, les quantités complexes, dites *imaginaires*, et aussi, depuis quelque temps, les quantités complexes d'Hamilton ou *quaternions*.

Considérant, par exemple, les quantités imaginaires, on sait qu'elles s'expriment toutes au moyen des deux seules unités

$$1 \quad \text{et} \quad \sqrt{-1},$$

prises d'ailleurs positivement ou négativement. Si l'on examine ces deux unités au point de vue purement algébrique, on voit qu'elles jouent dans les calculs le rôle de véritables *clefs*, c'est-à-dire que toute

([1]) *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen* (*Nachrichten von der K. G. d. W. zu Göttingen*, S. 395; 1884).

égalité entre quantités imaginaires équivaut, en réalité, à deux relations entre quantités réelles. L'attention attirée sur ce fait, l'esprit se demande naturellement si l'on ne pourrait pas établir une Algèbre fondée sur la considération de *n unités principales* ou *symboles abstraits*, qui, eux aussi, feraient dans les calculs l'office de clefs.

L'origine des recherches de M. Weierstrass fut, comme il le dit lui-même (*loc. cit.*, p. 395), l'opinion émise par Gauss dans son *Arithmétique supérieure* ([1]), qu'il était impossible d'accorder les règles du calcul de quantités de cette nature avec les règles du calcul ordinaire. M. Weierstrass montre, au contraire, que la chose est possible d'une certaine manière, au moins, et semble penser que ce serait pour n'avoir pas connu l'existence de ce que lui-même nomme les *diviseurs de zéro*, que Gauss aurait été amené à émettre son opinion. Toutefois, ce ne peut être là qu'une conjecture, car le passage cité ne permet pas de trancher la question, et, d'autre part, le contexte ne fournit aucune indication à ce sujet.

Quelque temps après la publication du Mémoire dont il s'agit, un autre éminent géomètre, M. Dedekind, reprenant la même question ([2]), fit voir que le nouveau calcul ne différait pas au fond du calcul de certains systèmes de quantités, que lui-même appelle *corps finis* ([3]); ce qui ramène ce calcul à des opérations déjà usuelles dans l'Algèbre supérieure. Il est naturel que les recherches de M. Dedekind trouvent aussi leur place dans les pages que j'écris.

J'ai divisé ce travail en trois Parties :

La *première Partie* contient l'exposé des principes fondamentaux du calcul des quantités complexes, d'après le Mémoire de M. Weierstrass. Arides et abstraits, mais indispensables, les commencements de cette

---

([1]) *Gauss Werke*, Band II, S. 178 (édition de Göttingue, 1876).

([2]) *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen* von Dedekind (*Nachrichten von der K. G. der W. zu Göttingen*, S. 141; 1885).

([3]) Sur les *Corps finis*, on peut consulter le Mémoire de M. Dedekind, paru en plusieurs fois dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* de M. Darboux (années 1876, 1877). Les recherches qu'on y trouvera se rapportent à un sujet tout différent de celui que nous traitons, mais offrent cependant certains rapprochements qui ont guidé M. Dedekind. On peut consulter aussi les Notes de M. Dedekind, publiées à la suite de la deuxième édition des *Vorlesungen über Zahlentheorie* von P. G. Lejeune-Dirichlet, § 159, p. 423.

théorie conduisent finalement à des calculs très simples. La plupart des idées qui composent cette première Partie sont tirées du Mémoire mentionné, mais un certain nombre de détails nous appartiennent. Si l'on observe que l'écrit de M. Weierstrass est d'une concision extrême, on s'expliquera pourquoi je me suis surtout attaché à présenter la théorie d'une manière aussi méthodique et aussi claire que possible, en élucidant les détails et démontrant certaines propositions simplement affirmées par M. Weierstrass, sans craindre même de retrouver quelques résultats de plusieurs manières; j'ai cru, par là, faire mieux ressortir la pensée profonde de l'auteur que je commente. En outre, j'ai souvent insisté sur le cas de $n = 2$, à cause de sa liaison intime avec le calcul ordinaire des quantités imaginaires.

La *deuxième Partie* m'est presque entièrement personnelle; trois points seulement sont extraits du Mémoire de Göttingue; ils seront indiqués en leur temps. Les principes fondamentaux du calcul ayant été établis dans la première Partie, j'étudie dans la seconde quelques-uns des points les plus importants, non plus du calcul élémentaire, mais de l'algèbre des quantités et variables complexes. Un coup d'œil jeté sur la Table des matières suffira pour se rendre compte de la nature des questions qui y sont traitées.

La *troisième Partie* contient l'exposé du Travail de M. Dedekind; elle est formée de deux Chapitres. Le premier renferme l'idée fondamentale de l'auteur. Le second est consacré à l'étude de certaines équations de condition. Cette étude repose en grande partie sur des calculs assez difficiles, que M. Dedekind a résumés dans son Mémoire : j'ai cru rendre un vrai service à ceux qui voudraient étudier cette question, en rétablissant la plupart des intermédiaires; on trouvera ces calculs groupés dans le § II de ce Chapitre (1).

Il m'a semblé que je devais séparer l'exposition des Mémoires de M. Weierstrass et de M. Dedekind, parce que, bien qu'ils concordent dans le fond, ces deux Mémoires procèdent par des voies absolument différentes, qu'il paraît utile de faire connaître à cause de leur intérêt

---

(1) Afin de faciliter la lecture de ces calculs, j'ai reproduit, dans un Tableau séparé, les formules relatives à ce paragraphe.

propre; enfin, m'étant proposé d'expliquer les résultats acquis au sujet des quantités complexes, je devais exposer les deux Mémoires qui sont les seuls [1] parus sur ce sujet.

On me pardonnera, je l'espère, d'avoir introduit dans les deux premières Parties de ce Travail une terminologie presque complète et même d'avoir créé le signe Θ pour désigner *un diviseur de zéro* : cela m'a paru absolument nécessaire pour éviter d'interminables longueurs.

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE I.

PREMIERS PRINCIPES DU CALCUL DES QUANTITÉS COMPLEXES.

§ I.

Définitions. — Les unités principales.

1. Toutes les quantités complexes que nous considérerons formeront ce que nous appellerons l'*Ensemble* $\mathcal{E}$. Une quelconque d'entre elles sera un *élément* de l'Ensemble $\mathcal{E}$.

2. Le but que nous avons en vue étant d'établir un calcul des quantités complexes qui soit en harmonie avec le calcul des quantités ordinairement employées, certaines conditions sont à remplir, quelles que soient d'ailleurs l'origine et la définition de l'Ensemble $\mathcal{E}$.

---

[1] Dans le deuxième Volume de ses *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*, M. Stolz doit aussi traiter des quantités complexes à n unités principales. Annoncé en librairie postérieurement au dépôt de notre manuscrit à la Faculté des Sciences, le Livre de M. Stolz est encore sous presse, au moment même (décembre 1885) où nous faisons imprimer cette thèse.

1° Il faudra que, si a, b, c, ... sont des éléments de l'Ensemble $\mathcal{E}$, leur somme, leur différence, leur produit et leur quotient deux à deux, c'est-à-dire

$$a+b,\quad a-b,\quad ab,\quad \frac{a}{b},$$

soient aussi des éléments du même Ensemble.

2° Il faudra que les théorèmes dits *commutatif, associatif* et *distributif* aient lieu par rapport à ces éléments, tant pour l'addition que pour la multiplication; en d'autres termes, on doit avoir, en général,

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{c} a+b=b+a, \\ (a+b)+c=(a+c)+b, \\ (a-b)+b=a; \end{array}\right.$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{c} ab=ba, \\ (ab)c=(ac)b, \\ a(b+c)=ab+ac. \end{array}\right.$$

On y ajoutera l'égalité

$$(3)\qquad \frac{a}{b}\,b=a,$$

qui sert de définition au quotient des deux éléments a et b, absolument comme la troisième des égalités (1) sert de définition à leur différence.

Ainsi nous excluons d'avance tout système de quantités complexes dont la définition ne permettrait pas de satisfaire à ces diverses conditions.

3. L'Ensemble $\mathcal{E}$ des quantités complexes, que nous considérons ici, sera celui dans lequel elles ont la forme

$$\xi_1 e_1+\xi_2 e_2+\ldots+\xi_n e_n.$$

ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n sont des nombres *réels, commensurables* ou *non,* ils portent le nom de *coordonnées* de la quantité complexe; e_1, e_2, ... sont n symboles, auxquels nous laisserons leur *plus haut degré d'abstraction,* sauf à exiger la vérification de certaines conditions et à ne pas leur donner de définitions contradictoires. A cela près, nous restons absolument maîtres de les définir comme nous voulons.

Ces n symboles abstraits seront appelés les *unités principales*.

4. Une première condition absolument indispensable est que ces n symboles soient *linéairement distincts*, c'est-à-dire qu'il n'existe entre eux aucune relation de la forme

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n = 0, \tag{4}$$

dans laquelle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont des nombres réels qui ne sont pas tous nuls. Il est manifeste, en effet, que si une telle relation existait, les éléments de l'Ensemble $\mathcal{E}$ ne dépendraient pas en réalité de n unités principales, mais d'un moindre nombre.

5. *Première conséquence de cette condition.* — Lorsqu'un élément de l'Ensemble $\mathcal{E}$ est nul, ses n coordonnées sont nulles séparément.

Deuxième conséquence. — Si deux quantités

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n,$$
$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$$

sont égales, leurs coordonnées de même rang sont égales deux à deux, c'est-à-dire que l'on a

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n = \beta_n;$$

car, si $a = b$, la différence $a - b$ doit être nulle, les n coordonnées de cette différence sont donc nulles aussi ; or ces coordonnées sont précisément

$$\alpha_1 - \beta_1, \ \alpha_2 - \beta_2, \ \ldots, \ \alpha_n - \beta_n.$$

6. *Troisième conséquence.* — Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n éléments de l'Ensemble $\mathcal{E}$

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 = \xi_{11} e_1 + \xi_{12} e_2 + \ldots + \xi_{1n} e_n, \\ a_2 = \xi_{21} e_1 + \xi_{22} e_2 + \ldots + \xi_{2n} e_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_n = \xi_{n1} e_1 + \xi_{n2} e_2 + \ldots + \xi_{nn} e_n. \end{array}\right. \tag{5}$$

Supposons que le déterminant

$$\Xi = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \ldots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \ldots & \xi_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \ldots & \xi_{nn} \end{vmatrix} \tag{6}$$

ne soit pas nul.

Soient, de plus, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, n nombres réels indéterminés, mais qui *ne sont pas tous nuls;* la quantité

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$$

ne pourra jamais être nulle.

On a

$$\begin{aligned}\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = \quad & (\lambda_1 \xi_{11} + \lambda_2 \xi_{21} + \ldots + \lambda_n \xi_{n1}) e_1 \\ & + (\lambda_1 \xi_{12} + \lambda_2 \xi_{22} + \ldots + \lambda_n \xi_{n2}) e_2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (\lambda_1 \xi_{1n} + \lambda_2 \xi_{2n} + \ldots + \lambda_n \xi_{nn}) e_n.\end{aligned}$$

Cette quantité est elle-même un élément de l'Ensemble $\mathcal{E}$; elle ne peut donc être nulle que si ces n coordonnées sont nulles, c'est-à-dire si l'on a

$$(7) \qquad \left\{\begin{array}{l}\lambda_1 \xi_{11} + \lambda_2 \xi_{21} + \ldots + \lambda_n \xi_{n1} = 0, \\ \lambda_1 \xi_{12} + \lambda_2 \xi_{22} + \ldots + \lambda_n \xi_{n2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_1 \xi_{1n} + \lambda_2 \xi_{2n} + \ldots + \lambda_n \xi_{nn} = 0.\end{array}\right.$$

Or, puisqu'on a

$$\Xi \neq 0,$$

considérées en $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, ces équations n'admettent pas d'autres solutions que

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0,$$

ce qui est contre l'hypothèse.

7. *Remarque.* — Il est facile de voir que la démonstration précédente repose sur ce que la quantité

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$$

fait partie de l'Ensemble $\mathcal{E}$, aussi bien que les éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Elle serait, par exemple, en défaut si, au lieu de définir les éléments de l'Ensemble $\mathcal{E}$ comme nous l'avons fait, on n'admettait dans leurs expressions que les seules coordonnées *commensurables* et que l'on fît choix, pour les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, de valeurs *incommensurables;* à la vérité, les relations (7) continuent à ne pouvoir être vérifiées par les valeurs prises pour $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$; mais ces relations elles-mêmes n'ont plus aucun lien avec la question. En effet, les quantités

$$\begin{array}{l}\lambda_1\xi_{11}+\lambda_2\xi_{21}+\ldots+\lambda_n\xi_{n1},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \lambda_1\xi_{1n}+\lambda_2\xi_{2n}+\ldots+\lambda_n\xi_{nn}\end{array}$$

n'étant plus *commensurables* (en général du moins),

$$\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_n a_n$$

n'est plus un élément de l'Ensemble $\mathcal{E}$, et, dès lors, on ne peut plus affirmer que ces quantités sont séparément nulles lorsque

$$\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_n a_n$$

l'est. Néanmoins, même dans le cas actuel, la démonstration subsiste pleinement si, pour $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, on prend exclusivement des valeurs rationnelles.

8. Les autres conditions à imposer aux unités principales se déduisent de celles indiquées en général au n° 2 pour toutes les quantités de l'Ensemble $\mathcal{E}$.

La somme et la différence des deux unités e_p, e_q fait évidemment partie de l'Ensemble $\mathcal{E}$; en ce qui concerne leur quotient, on n'aura qu'à particulariser les résultats qu'on trouvera plus loin pour le quotient de deux éléments quelconques a et b.

Enfin, pour le produit $e_p e_q$, nous devons exiger qu'il soit exprimable linéairement au moyen des n unités; nous posons donc

$$e_p e_q=\varepsilon_{1pq}e_1+\varepsilon_{2pq}e_2+\ldots+\varepsilon_{npq}e_n. \tag{8}$$

Les ε_{rpq} sont des nombres réels. Il ressortira de l'ensemble de ce travail que *ce sont véritablement ces nombres qui définissent le système des unités principales, et que leur choix est arbitraire dans certaines limites que nous apprendrons successivement à connaître.*

9. Les théorèmes exprimés par les égalités (1) sont évidemment satisfaits pour tout choix des nombres ε_{rpq}; il n'en est pas de même des égalités (2).

Le théorème commutatif ([1]) pour la multiplication nous oblige à écrire

$$e_p e_q = e_q e_p$$

et, par conséquent,

(9) $$\varepsilon_{rpq} = \varepsilon_{rqp}$$

pour toutes les valeurs

$$r = 1, 2, \ldots, n, \qquad p = 1, 2, \ldots, n, \qquad q = 1, 2, \ldots, n.$$

10. D'après le théorème associatif, on doit avoir

(10) $$(e_p e_q) e_r = (e_p e_r) e_q \qquad (p, q, r = 1, 2, \ldots, n)$$

ou bien, en appliquant plusieurs fois de suite la formule (8),

$$(\varepsilon_{1pq} e_1 + \varepsilon_{2pq} e_2 + \ldots + \varepsilon_{npq} e_n) e_r = (\varepsilon_{1pr} e_1 + \varepsilon_{2pr} e_2 + \ldots + \varepsilon_{npr} e_n) e_q$$

ou encore

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{1pq}(\varepsilon_{11r} e_1 + \varepsilon_{21r} e_2 + \ldots + \varepsilon_{n1r} e_n) + \varepsilon_{2pq}(\varepsilon_{12r} e_1 + \varepsilon_{22r} e_2 + \ldots + \varepsilon_{n2r} e_n) + \ldots \\ &\qquad + \varepsilon_{npq}(\varepsilon_{1nr} e_1 + \varepsilon_{2nr} e_2 + \ldots + \varepsilon_{nnr} e_n) \\ &= \varepsilon_{1pr}(\varepsilon_{11q} e_1 + \varepsilon_{21q} e_2 + \ldots + \varepsilon_{n1q} e_n) + \varepsilon_{2pr}(\varepsilon_{12q} e_1 + \varepsilon_{22q} e_2 + \ldots + \varepsilon_{n2q} e_n) + \ldots \\ &\qquad + \varepsilon_{npr}(\varepsilon_{1nq} e_1 + \varepsilon_{2nq} e_2 + \ldots + \varepsilon_{nnq} e_n). \end{aligned}$$

([1]) Le théorème commutatif n'est pas valable pour la multiplication dans le cas des *quaternions;* aussi les quaternions ne rentrent-ils nullement dans la théorie que j'expose.

On sait qu'un quaternion Q est une quantité complexe dépendant des quatre unités principales : 1, i, j, k, sous la forme

$$Q = w + ix + jy + kz;$$

w, x, y, z sont des nombres réels (appelés *scalars*). Les égalités définissant les symboles i, j, k [elles correspondent à l'égalité (8) du texte] sont

$$\begin{aligned} ij &= k, & ji &= -k, & i^2 &= -1, \\ ki &= j, & ik &= -j, & j^2 &= -1, \\ jk &= i, & kj &= -i, & k^2 &= -1; \end{aligned}$$

dans ces égalités le facteur de gauche est toujours considéré comme le multiplicateur. On voit qu'on a

$$ij = -ji, \qquad ki = -ik, \qquad jk = -kj.$$

(Voir *Traité élémentaire des quaternions,* par Tait, traduit par Plarr. Gauthier-Villars; 1884.)

Cette égalité et les égalités analogues fournissent chacune n relations entre les ε_{rpq}; le type général en est

$$(11)\quad \varepsilon_{1pq}\varepsilon_{k1r}+\varepsilon_{2pq}\varepsilon_{k2r}+\ldots+\varepsilon_{npq}\varepsilon_{knr}=\varepsilon_{1pr}\varepsilon_{k1q}+\varepsilon_{2pr}\varepsilon_{k2q}+\ldots+\varepsilon_{npr}\varepsilon_{knq}$$
$$(p, q, r, k=1, 2, \ldots, n).$$

Il est possible de vérifier les égalités (9) et (11) par une infinité de systèmes de nombres ε_{rpq}. On peut le voir de la manière suivante : on se rappelle que nous sommes absolument maîtres (n° 3) de la définition des symboles $e_1, e_2, \ldots, e_n$; nous pouvons, par conséquent, les définir par la formule

$$(12)\qquad e_p e_q = 0,$$

les deux indices p et q étant différents, et par la formule

$$(13)\qquad e_p e_p = e_p$$

quand les deux indices sont égaux. Alors (8) les ε_{rpq} sont tous nuls, excepté

$$\varepsilon_{111}=\varepsilon_{222}=\varepsilon_{333}=\ldots=\varepsilon_{nnn}=1.$$

Et les égalités (9) et (11) sont vérifiées pour ce système particulier de nombres ε_{rpq}. Maintenant, de celui-ci on en déduit une infinité d'autres.

Prenons un système quelconque de n^2 nombres ξ_{ij}, assujettis à la seule condition que le déterminant

$$\Xi=\begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \ldots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \ldots & \xi_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \ldots & \xi_{nn} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro. Et posons, en conservant aux $e_1, e_2, \ldots, e_n$ les définitions indiquées tout à l'heure (12 et 13),

$$(14)\qquad \left\{\begin{array}{l} E_1=\xi_{11}e_1+\xi_{12}e_2+\ldots+\xi_{1n}e_n, \\ E_2=\xi_{21}e_1+\xi_{22}e_2+\ldots+\xi_{2n}e_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ E_n=\xi_{n1}e_1+\xi_{n2}e_2+\ldots+\xi_{nn}e_n. \end{array}\right.$$

Les n quantités $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont linéairement distinctes (n° 6); et, en tenant compte des formules (12) et (13), on voit que l'on a

$$(15) \qquad \begin{cases} E_p E_q = E_q E_p, \\ (E_p E_q) E_r = (E_p E_r) E_q. \end{cases}$$

De plus, $E_p E_q$ s'exprime en fonction linéaire de $e_1, e_2, \ldots, e_n$, et, par suite aussi, en fonction linéaire de $E_1, E_2, \ldots, E_n$, parce que, d'après la condition $\Xi \neq 0$, les équations (14) donnent $e_1, e_2, \ldots, e_n$ en fonction linéaire de $E_1, E_2, \ldots, E_n$.

On a donc

$$E_p E_q = \varepsilon'_{1pq} E_1 + \varepsilon'_{2pq} E_2 + \ldots + \varepsilon'_{npq} E_n.$$

Les nombres ε'_{rpq} doivent nécessairement vérifier les égalités (9) et (11) à cause des relations (15), qui ont été établies directement. D'autre part, il y a une infinité de systèmes des nombres ε'_{rpq}, puisque ceux-ci dépendent seulement des nombres ξ_{ij} qui sont absolument arbitraires, à la seule condition près

$$\Xi \neq 0.$$

Faisant maintenant abstraction du système $E_1, E_2, \ldots, E_n$, il est démontré que les égalités (9) et (11) peuvent être vérifiées d'une infinité de façons [1].

11. *Cas particulier* : $n = 2$. — Pour simplifier l'écriture, posons

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{111} = \lambda, \qquad \varepsilon_{112} = \varepsilon_{121} = \mu, \qquad \varepsilon_{122} = \nu, \\ &\varepsilon_{211} = \lambda', \qquad \varepsilon_{221} = \varepsilon_{212} = \mu', \qquad \varepsilon_{222} = \nu'. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} e_1^2 &= \lambda e_1 + \lambda' e_2, \\ e_1 e_2 &= \mu e_1 + \mu' e_2, \\ e_2^2 &= \nu e_1 + \nu' e_2; \end{aligned}$$

les diverses conditions que doivent remplir les six coefficients λ, λ', μ,

---

[1] La formation des solutions des équations (9) et (11) forme une grande partie du Mémoire de M. Dedekind, dont on trouvera l'exposé dans la troisième Partie. La démonstration que nous donnons ici de l'existence d'une infinité de systèmes de solutions de ces équations, suffit pour atteindre notre but actuel, et c'est pour cela, sans doute, que M. Weierstrass (Mémoire cité, p. 397) s'est simplement contenté d'affirmer cette existence.

μ', ν, ν' se tirent des deux seules égalités

$$(e_1 e_2) e_1 = (e_1 e_1) e_2,$$
$$(e_2 e_1) e_2 = (e_2 e_2) e_1$$

ou

$$\mu(\lambda e_1 + \lambda' e_2) + \mu'(\mu e_1 + \mu' e_2) = \lambda(\mu e_1 + \mu' e_2) + \lambda'(\nu e_1 + \nu' e_2),$$
$$\mu(\mu e_1 + \mu' e_2) + \mu'(\nu e_1 + \nu' e_2) = \nu(\lambda e_1 + \lambda' e_2) + \nu'(\mu e_1 + \mu' e_2)$$

et se réduisent à

$$(16)\qquad \begin{cases} \mu\mu' - \nu\lambda' = 0, \\ \mu\lambda' + \mu'^2 - \mu'\lambda - \nu'\lambda' = 0, \\ \mu^2 + \mu'\nu - \lambda\nu - \mu\nu' = 0. \end{cases}$$

On peut se donner ν quelconque, mais différent de zéro; les trois égalités (16) sont vérifiées dès qu'on pose

$$(17)\qquad \begin{cases} \mu' = \dfrac{\lambda\nu + \mu\nu' - \mu^2}{\nu}, \\ \lambda' = \dfrac{\mu\mu'}{\nu} = \dfrac{\mu\lambda\nu + \mu^2\nu' - \mu^3}{\nu^2}; \end{cases}$$

sur les six coefficients, trois sont donc tout à fait arbitraires, et un quatrième n'est assujetti qu'à être différent de zéro.

Si l'on prend $\nu = 0$, on aura

$$\mu\mu' = 0,$$
$$\mu\lambda' + \mu'^2 - \mu'\lambda - \nu'\lambda' = 0,$$
$$\mu^2 - \mu\nu' = 0.$$

On doit faire $\mu = 0$ ou $\mu' = 0$. Si $\mu = 0$, on n'a plus qu'à vérifier la seule égalité

$$\mu'^2 - \mu'\lambda - \nu'\lambda' = 0,$$

ce qui permet de prendre, d'une manière quelconque, trois des coefficients. Si $\mu' = 0$, on a

$$(\mu - \nu')\lambda' = 0,$$
$$(\mu - \nu')\mu = 0,$$

ce qui exige seulement $\mu = \nu'$, puisque μ est supposé différent de zéro, de sorte que, outre λ, deux des trois coefficients μ, λ', ν' sont arbitraires.

Concluons donc, en réunissant les deux cas $\nu \gtrless 0$ et $\nu = 0$, que *quatre* des six coefficients peuvent toujours être pris arbitrairement.

§ II.

Les quatre opérations sur les éléments de l'Ensemble $\mathcal{E}$.

12. Soient

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n,$$
$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n.$$

Addition et soustraction. — On a de suite

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1) e_1 + (\alpha_2 + \beta_2) e_2 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n) e_n,$$
$$a - b = (\alpha_1 - \beta_1) e_1 + (\alpha_2 - \beta_2) e_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) e_n.$$

La somme et la différence de deux éléments de l'Ensemble $\mathcal{E}$ sont donc des éléments du même Ensemble. De plus les théorèmes (1) (n° 2) sont vérifiés.

13. *Multiplication.* — Formons le produit ab; on a

$$\begin{aligned} ab = {} & \alpha_1 \beta_1 e_1^2 + \alpha_2 \beta_1 e_2 e_1 + \alpha_3 \beta_1 e_3 e_1 + \ldots + \alpha_n \beta_1 e_n e_1 \\ & + \alpha_1 \beta_2 e_1 e_2 + \alpha_2 \beta_2 e_2^2 + \alpha_3 \beta_2 e_3 e_2 + \ldots + \alpha_n \beta_2 e_n e_2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \alpha_1 \beta_n e_1 e_n + \alpha_2 \beta_n e_2 e_n + \alpha_3 \beta_n e_3 e_n + \ldots + \alpha_n \beta_n e_n^2. \end{aligned}$$

Chacun des produits $e_p e_q$ s'exprime en fonction linéaire à coefficients réels des unités principales, en vertu de l'égalité (8); il en est donc de même de ab : *ainsi ab fait partie de l'Ensemble $\mathcal{E}$.* Imaginons maintenant qu'on ait écrit le produit ba, si l'on remarque alors qu'un terme quelconque du produit ab, par exemple

$$\alpha_p \beta_q e_p e_q,$$

a son correspondant

$$\beta_q \alpha_p e_q e_p$$

dans le produit ba, et que d'ailleurs

$$\alpha_p \beta_q = \beta_q \alpha_p, \qquad e_p e_q = e_q e_p,$$

on devra conclure

$$ab = ba.$$

Un raisonnement pareil manifesterait qu'il en est encore de même des deux relations suivantes

$$(ab)c = (ac)b,$$
$$a(b + c) = ab + ac,$$

et nous voyons que les théorèmes (2) (n° 2) sont satisfaits.

14. *Division.* — Relativement à la division de deux quantités complexes a et b de l'Ensemble proposé, nous partons de l'égalité (3) (n° 2), prise comme définition, ce qui, du reste, est absolument conforme à la manière dont on procède dans les éléments du calcul ordinaire; et nous exigeons en outre que le quotient

$$c = \frac{a}{b},$$

déjà tel que

$$cb = \frac{a}{b} b = a,$$

soit une quantité de même forme que a et b, c'est-à-dire fasse partie de l'Ensemble $\mathcal{E}$. Dès lors, la division de a par b revient à la détermination des coordonnées $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ de l'élément c par la condition

$$cb = a$$

ou

$$(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \ldots + \gamma_n e_n)(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$$

ou bien

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 (\beta_1 e_1^2 \quad + \beta_2 e_1 e_2 + \ldots + \beta_n e_1 e_n) \\
&+ \gamma_2 (\beta_1 e_2 e_1 + \beta_2 e_2^2 \quad + \ldots + \beta_n e_2 e_n) \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \gamma_n (\beta_1 e_n e_1 + \beta_2 e_n e_2 + \ldots + \beta_n e_n^2) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n.
\end{aligned}$$

En remplaçant les produits $e_p e_q$ par leurs valeurs tirées de (8) (n° 8), puis égalant de part et d'autre les coefficients des $e_1, e_2, \ldots, e_n$, on obtient, pour déterminer les n coordonnées $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, les n équations linéaires,

$$(18)\quad \begin{cases} \gamma_1(\varepsilon_{111}\beta_1+\varepsilon_{112}\beta_2+\ldots+\varepsilon_{11n}\beta_n)+\gamma_2(\varepsilon_{121}\beta_1+\varepsilon_{122}\beta_2+\ldots+\varepsilon_{12n}\beta_n)+\ldots \\ \qquad\qquad +\gamma_n(\varepsilon_{1n1}\beta_1+\varepsilon_{1n2}\beta_2+\ldots+\varepsilon_{1nn}\beta_n)=\alpha_1, \\ \gamma_1(\varepsilon_{211}\beta_1+\varepsilon_{212}\beta_2+\ldots+\varepsilon_{21n}\beta_n)+\gamma_2(\varepsilon_{221}\beta_1+\varepsilon_{222}\beta_2+\ldots+\varepsilon_{22n}\beta_n)+\ldots \\ \qquad\qquad +\gamma_n(\varepsilon_{2n1}\beta_1+\varepsilon_{2n2}\beta_2+\ldots+\varepsilon_{2nn}\beta_n)=\alpha_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \gamma_1(\varepsilon_{n11}\beta_1+\varepsilon_{n12}\beta_2)+\ldots+\varepsilon_{n1n}\beta_n)+\gamma_2(\varepsilon_{n21}\beta_1+\varepsilon_{n22}\beta_2+\ldots+\varepsilon_{n2n}\beta_n)+\ldots \\ \qquad\qquad +\gamma_n(\varepsilon_{nn1}\beta_1+\varepsilon_{nn2}\beta_2+\ldots+\varepsilon_{nnn}\beta_n)=\alpha_n. \end{cases}$$

15. Considérons le déterminant

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_{111}\beta_1+\varepsilon_{112}\beta_2+\ldots+\varepsilon_{11n}\beta_n & \varepsilon_{121}\beta_1+\ldots+\varepsilon_{12n}\beta_n & \ldots & \varepsilon_{1n1}\beta_1+\ldots+\varepsilon_{1nn}\beta_n \\ \varepsilon_{211}\beta_1+\varepsilon_{212}\beta_2+\ldots+\varepsilon_{21n}\beta_n & \varepsilon_{221}\beta_1+\ldots+\varepsilon_{22n}\beta_n & \ldots & \varepsilon_{2n1}\beta_1+\ldots+\varepsilon_{2nn}\beta_n \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_{n11}\beta_1+\varepsilon_{n12}\beta_2+\ldots+\varepsilon_{n1n}\beta_n & \varepsilon_{n21}\beta_1+\ldots+\varepsilon_{n2n}\beta_n & \ldots & \varepsilon_{nn1}\beta_1+\ldots+\varepsilon_{nnn}\beta_n \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant contient deux sortes de quantités; les premières dépendent du système des *unités principales :* ce sont les ε_{rpq}; les secondes dépendent uniquement de la *quantité complexe particulière qui sert de diviseur :* ce sont les coordonnées $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ de l'élément b.

Le choix des ε_{rpq} pourrait être tel, que le déterminant ε fût nul, quelles que soient les coordonnées $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ [1] : le système des équations (18) serait alors toujours impossible ou indéterminé; aussi nous *excluons* désormais et *a priori* tout système de nombres ε_{rpq}, pour lequel ce cas se présenterait. On se convainc que le déterminant ε peut ne pas être identiquement nul, en prenant un cas particulier, par exemple, celui indiqué pour une autre fin (n° 10) et qui répond aux formules (12) et (13).

Ayant donc supposé que le déterminant ε n'est pas *identiquement* nul, si les coordonnées du diviseur b ne rendent pas nul ε, on trouvera, quel que soit le dividende a, un système unique et déterminé de coordonnées $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ et, par suite, une valeur unique et déterminée du quotient cherché c. Mais, au contraire, si les coordonnées

---

(1) Par exemple, si l'on prenait $\varepsilon_{rpq}=1$, pour toutes les valeurs $r, p, q = 1, 2, \ldots, n$. Ce système de nombres ε_{rpq} d'ailleurs ne serait pas exclu par les conditions (9) et (11).

de b rendent nul ε, ou bien il n'existera aucun système de coordonnées finies $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ vérifiant les équations (18), ou bien il en existera une infinité et quelques-unes au moins parmi elles seront absolument indéterminées : cela dépendra des coordonnées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ du dividende a.

16. *Diviseurs de zéro.* — Prenons le cas particulier où

$$a = 0,$$

c'est-à-dire

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0;$$

les équations (18) seront compatibles et, outre le système de solutions

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_n = 0,$$

en admettront une infinité d'autres, et cela, du reste, que l'on suppose $b = 0$ ou $b \neq 0$.

Soit $b \neq 0$ et c une quantité complexe dont les coordonnées $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ ne sont pas toutes nulles et vérifient les équations (18).

On aura

$$b \neq 0, \qquad c \neq 0,$$

et cependant

$$bc = 0;$$

un tel fait ne se présente jamais dans le calcul ordinaire basé sur les deux unités principales 1 et $\sqrt{-1}$. Le diviseur considéré $b \neq 0$ est alors appelé par M. Weierstrass un *diviseur de zéro;* ce que j'écrirai

$$b = \Theta.$$

On peut, si l'on veut, continuer à appeler b un diviseur de zéro, lorsque $b = 0$, car on a certainement alors $\varepsilon = 0$.

La dénomination *diviseur de zéro,* donnée au diviseur b, est évidemment fondée sur la propriété $bc = 0$ qui suppose $a = 0$; mais, en réfléchissant sur ce qui précède, on voit de suite que cette propriété du *diviseur de zéro* b dépend uniquement du déterminant ε qui est nul et où n'intervient point la quantité a, de sorte que l'on doit définir un *diviseur de zéro : « un élément de l'Ensemble* $\mathcal{E}$ *pour lequel le déterminant* ε *correspondant est nul* ».

17. *b et c n'étant nuls ni l'un ni l'autre, si b est un diviseur de zéro et que $bc = 0$, c sera aussi un diviseur de zéro.*

Cela se déduit immédiatement des équations (18), où l'on suppose $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Il suffit, en effet, pour le voir, d'observer que le déterminant ε' de ces équations considérées non plus en $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, mais en $\beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_n$, est nul : car, s'il ne l'était pas, les équations (18), contrairement à l'hypothèse, ne donneraient que le seul système de solutions

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0.$$

Cette propriété d'un *diviseur de zéro* $b \neq 0$, qu'il existe certaines autres quantités $c \neq 0$, telles que le *produit bc soit nul*, est donc une *propriété caractéristique des diviseurs de zéro*.

18. *Le produit d'un diviseur de zéro par une quantité complexe quelconque est lui-même un diviseur de zéro.*

En effet,

$$b = \Theta$$

équivaut à

$$bc = 0,$$

pour c ayant certaines valeurs; on a donc aussi

$$kbc = 0 \qquad \text{ou} \qquad (kb)c = 0;$$

donc (n° 17)

$$kb = \Theta.$$

19. *Cas de $n = 2$.* — Reprenons les notations du n° 11; en supposant, par exemple, $\nu \neq 0$, on sait qu'on a les deux conditions

$$(17) \qquad \begin{cases} \mu' = \dfrac{\lambda\nu + \mu\nu' - \mu^2}{\nu}, \\ \lambda' = \dfrac{\mu\lambda\nu + \mu^2\nu' - \mu^3}{\nu^2}. \end{cases}$$

Ici

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} \lambda\beta_1 + \mu\beta_2 & \mu\beta_1 + \nu\beta_2 \\ \lambda'\beta_1 + \mu'\beta_2 & \mu'\beta_1 + \nu'\beta_2 \end{vmatrix} = (\lambda\mu' - \mu\lambda')\beta_1^2 + (\lambda\nu' - \nu\lambda')\beta_1\beta_2 + (\mu\nu' - \nu\mu')\beta_2^2;$$

en vertu des formules (17), on a

$$
(19) \quad \begin{cases} \lambda\mu' - \mu\lambda' = \dfrac{(\lambda\nu - \mu^2)^2 + \mu\nu'(\lambda\nu - \mu^2)}{\nu^2} = \dfrac{\lambda\nu - \mu^2 + \mu\nu'}{\nu^2}(\lambda\nu - \mu^2), \\ \lambda\nu' - \nu\lambda' = \dfrac{\nu' - \mu}{\nu}(\lambda\nu - \mu^2), \\ \mu\nu' - \nu\mu' = -(\lambda\nu - \mu^2). \end{cases}
$$

D'après cela, il est nécessaire et suffisant, pour que ε soit identiquement nul, que

$$\lambda\nu - \mu^2 = 0.$$

20. Soit donc, au contraire,

$$\lambda\nu - \mu^2 \neq 0.$$

Si $\beta_1 = \beta_2 = 0$, ε est nul; pour qu'il existe d'autres valeurs réelles de β_1, β_2 annulant ε, il faut et il suffit que

$$(\lambda\nu' - \nu\lambda')^2 - 4(\lambda\mu' - \mu\lambda')(\mu\nu' - \nu\mu') \geq 0$$

ou, à cause des formules (19),

$$\left(\frac{\lambda\nu - \mu^2}{\nu}\right)^2 [(\nu' - \mu)^2 + 4\mu\nu' + 4(\lambda\nu - \mu^2)] \geq 0$$

ou simplement

$$(20) \qquad (\mu + \nu')^2 + 4(\lambda\nu - \mu^2) \geq 0;$$

cette condition sera, en particulier, toujours remplie si l'on prend

$$\lambda\nu - \mu^2 > 0;$$

d'où cette conséquence :

Même dans le cas de $n = 2$, il existe des systèmes d'unités principales, tels que les Ensembles de quantités complexes qui en dépendent admettent des diviseurs de zéro.

21. Examinons le cas, plus particulier encore, où $n = 2$, $e_1 = 1$, $e_2 = \sqrt{-1}$. On a ici

$$e_1^2 = e_1, \qquad e_1 e_2 = e_2, \qquad e_2^2 = -1;$$

donc

$$\lambda = 1, \quad \mu' = 1, \quad \nu = -1,$$
$$\mu = \lambda' = \nu' = 0;$$

ν n'est pas nul, on est dans le cas du n° 19; les conditions (17) sont remplies. De plus, ε n'est pas identiquement nul, puisqu'on a, dans notre cas,

$$\mu^2 - \lambda\nu = 1.$$

Enfin, $\mu + \nu'$ étant nul et $\lambda\nu - \mu^2 < 0$, la condition (20) n'est pas satisfaite, et il n'existe pas de valeurs réelles de β_1 et de β_2 autres que 0, 0 annulant ε; c'est ce que montre d'ailleurs directement l'expression ε, qui est

$$\varepsilon = \beta_1^2 + \beta_2^2.$$

Donc, *il n'y a pas d'autres diviseurs de zéro que zéro dans le cas où l'on prend les deux unités principales* 1 *et* $\sqrt{-1}$.

Ainsi la théorie présente *concorde absolument* avec les résultats du calcul ordinaire.

22. *Application; équation du premier degré.* — L'utilité de l'introduction des *diviseurs de zéro* sera rendue manifeste par la suite de ce travail; néanmoins, nous la ferons pressentir dès maintenant.

Considérons l'équation en quantités complexes à n unités principales

$$a + bx = 0 \tag{21}$$

(a et b sont des éléments de l'Ensemble $\mathcal{E}$).

La résoudre revient évidemment à effectuer la division de $-a$ par b.

Si $b \neq \Theta$, d'après la théorie précédente, on trouvera toujours une quantité complexe x et une seule vérifiant l'équation (21); x sera la racine de cette équation.

Si $b = \Theta$, supposons ce diviseur de zéro de la forme

$$b = kb',$$

k étant lui-même un diviseur de zéro et b' ne l'étant pas. Alors les équations (18), où nous admettons que $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ sont les coordonnées de l'inconnue x, ne conduisent pas à des quantités finies et déterminées; l'équation (21), elle aussi, n'aura donc point une racine finie et déterminée. Un cas est particulièrement intéressant, c'est celui où, en même temps que $b = kb'$, on a aussi $a = ka'$.

Considérons alors l'équation

$$a' + b'x = l, \tag{22}$$

où l désigne un diviseur de zéro quelconque dont le produit par le diviseur de zéro k soit nul. Il existe une infinité de telles quantités (n° 16); on aura donc une infinité d'équations analogues à l'équation (22) et, par suite, une infinité de valeurs de x vérifiant l'équation

$$k(a' + b'x) = kl = 0$$

ou

$$a + bx = 0.$$

Si l'on suppose que l'Ensemble des quantités complexes considérées dépend des deux seules unités principales 1 et $\sqrt{-1}$, on retrouve comme cas particulier cette proposition :

L'équation du premier degré $a + bx = 0$ a toujours une racine et une seule si $b \neq 0$ (si $b \neq \Theta$); si $b = 0$ et si $a = 0$ (si b et a sont des multiples d'un même diviseur de zéro), l'équation aura une infinité de racines. Si $b = 0$ et $a \neq 0$, l'équation sera impossible.

CHAPITRE II.

EXPRESSION DES QUANTITÉS COMPLEXES AU MOYEN D'UN SYSTÈME PARTICULIER D'UNITÉS PRINCIPALES.

§ I.

La quantité e_0.

23. Soit

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$$

un élément de l'Ensemble $\mathcal{E}$, *qui ne soit pas un diviseur de zéro;* si l'on remplace, dans les équations (18), $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ respectivement par

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, celles-ci fourniront un système unique de valeurs finies et déterminées pour les coordonnées $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ d'une certaine quantité complexe e_0.

Cette quantité complexe sera donc, par définition même, telle que

$$e_0 = \frac{a}{a}.$$

Propriétés de e_0.

24. Première propriété. — *Un élément quelconque de l'Ensemble $\mathcal{E}$ reste invariable quand on le multiplie par e_0.*

Soit

$$c = be_0 = b\frac{a}{a};$$

je dis que $c = b$.

Pour obtenir les coordonnées de c, il faut, en effet, effectuer le produit ba et l'identifier avec le produit ca.

Soient:

1° $b = 0$. Alors il faut forcément $c = 0$, donc $b = c$;

2° $b \neq 0$. Alors, puisque $a \neq \Theta$, les équations (18) déterminent un système unique de coordonnées $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ finies et déterminées; par conséquent, si l'on connaît un système de coordonnées vérifiant ces équations, on est sûr qu'il n'y en a pas d'autres; or le système

$$\gamma_1 = \beta_1, \qquad \gamma_2 = \beta_2, \qquad \ldots, \qquad \gamma_n = \beta_n$$

satisfait évidemment, car il transforme en identité l'égalité

$$ca = ba:$$

on a donc

$$c = b\frac{a}{a} = b.$$

C. Q. F. D.

25. Deuxième propriété. — *Quelle que soit la quantité complexe (non diviseur de zéro toutefois), qui sert de point de départ, on arrivera toujours à la même quantité e_0.*

Autrement dit, soient

$$a \neq \Theta \qquad \text{et} \qquad a' \neq \Theta$$

deux éléments quelconques de l'Ensemble $\mathcal{E}$ et

$$\frac{a}{a} = e_0, \qquad \frac{a'}{a'} = e'_0,$$

on aura

$$e_0 = e'_0.$$

D'après la première propriété, toute quantité complexe, multipliée soit par e_0, soit par e'_0, reste invariable; on a donc, en particulier,

$$ae_0 = a, \qquad ae'_0 = a,$$

c'est-à-dire (nos 14 et 15) que les coordonnées de e'_0 satisfont aux mêmes équations que les coordonnées de e_0 et que, par suite, elles sont identiquement les mêmes, puisque le système d'équations dont elles dépendent admet un seul système de solutions à cause de

$$a \neq 0.$$

Donc

$$e'_0 = e_0.$$

26. *Remarque importante.* — La formule

$$ae_0 = a$$

ou, ce qui revient au même (car on peut intervertir l'ordre des facteurs),

$$ae_0 = e_0 a = a \tag{23}$$

montre que, *dans le calcul des quantités complexes, la quantité e_0 se conduit absolument comme le nombre* 1 *dans le calcul ordinaire.*

En fait, il pourra, dans certains cas, arriver que e_0 soit égal à 1, et alors il n'y a pas à se préoccuper davantage de e_0. Supposons qu'un tel cas ne se présente pas, une remarque *essentielle* doit être faite : en vertu de la première propriété de e_0, on a la formule (23)

$$ae_0 = a,$$

a étant un *élément de l'Ensemble $\mathcal{E}$*. Cette formule est établie *exclusivement* pour ces éléments, de sorte que, si les nombres réels ne font pas partie de l'Ensemble $\mathcal{E}$ et que k soit un tel nombre, il n'a nullement été prouvé que l'on eût

$$ke_0 = k,$$

et même, au contraire, cette dernière égalité ne peut subsister, puisque, d'une part, ke_0 est un élément de l'Ensemble $\mathcal{E}$, et que, de l'autre, k ne l'est pas.

D'après cette remarque, aussi nécessaire pour éviter les erreurs qu'elle est simple en elle-même, on peut écrire en particulier

$$\frac{a^{\mu+1}}{a} = a^{\mu}\,\frac{a}{a} = a^{\mu}\,e_0 = a^{\mu},$$

parce que a^{μ} appartient à l'Ensemble $\mathcal{E}$ aussi bien que a. Mais, au contraire, on ne pourra simplifier l'écriture de

$$k\,\frac{a}{a} = ke_0.$$

27. *Calcul de* e_0. — Les coordonnées de e_0 seront, comme on l'a déjà dit (n° 23), déterminées par les équations (18), lorsqu'on y aura fait

$$\beta_1 = \alpha_1, \qquad \beta_2 = \alpha_2, \qquad \ldots, \qquad \beta_n = \alpha_n.$$

Mais comme, en vertu de la deuxième propriété de e_0 (n° 25), cette quantité reste la même, quel que soit a (non diviseur de zéro toutefois), on écrira que les équations (18) sont vérifiées, quels que soient

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n,$$

ce qui conduit aux n^2 équations suivantes :

$$(24)\quad \left\{\begin{array}{l}
\gamma_1\varepsilon_{111} + \gamma_2\varepsilon_{121} + \ldots + \gamma_n\varepsilon_{1n1} = 1,\\
\gamma_1\varepsilon_{112} + \gamma_2\varepsilon_{122} + \ldots + \gamma_n\varepsilon_{1n2} = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\gamma_1\varepsilon_{11n} + \gamma_2\varepsilon_{12n} + \ldots + \gamma_n\varepsilon_{1nn} = 0;\\[1ex]
\gamma_1\varepsilon_{211} + \gamma_2\varepsilon_{221} + \ldots + \gamma_n\varepsilon_{2n1} = 0,\\
\gamma_1\varepsilon_{212} + \gamma_2\varepsilon_{222} + \ldots + \gamma_n\varepsilon_{2n2} = 1,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\gamma_1\varepsilon_{21n} + \gamma_2\varepsilon_{22n} + \ldots + \gamma_n\varepsilon_{2nn} = 0;\\[1ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\[1ex]
\gamma_1\varepsilon_{n11} + \gamma_2\varepsilon_{n21} + \ldots + \gamma_n\varepsilon_{nn1} = 0,\\
\gamma_1\varepsilon_{n12} + \gamma_2\varepsilon_{n22} + \ldots + \gamma_n\varepsilon_{nn2} = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\gamma_1\varepsilon_{n1n} + \gamma_2\varepsilon_{n2n} + \ldots + \gamma_n\varepsilon_{nnn} = 1.
\end{array}\right.$$

Les seconds membres de ces équations sont toujours o ou 1; c'est 1 qu'il faut prendre toutes les fois qu'au premier membre figure un nombre ε_{rpq} ayant ses trois indices égaux, et c'est o dans tous les autres cas. Bien que le nombre de ces équations surpasse de beaucoup celui des inconnues, elles sont certainement compatibles et admettent un autre système de solutions que $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_n = 0$; ainsi l'exigent l'existence et les propriétés de la quantité e_0 démontrées d'ailleurs.

28. *Cas de* $n = 2$. — Les $n^2 = 4$ équations sont, en prenant les notations déjà employées au Chapitre I,

$$\begin{aligned} \gamma_1\lambda + \gamma_2\mu &= 1, \\ \gamma_1\mu + \gamma_2\nu &= 0, \\ \gamma_1\lambda' + \gamma_2\mu' &= 0, \\ \gamma_1\mu' + \gamma_2\nu' &= 1; \end{aligned}$$

elles peuvent se combiner deux à deux de six manières. En accouplant la seconde avec la troisième, on voit que l'on doit avoir

$$\mu\mu' - \lambda'\nu = 0,$$

ce qui a lieu [n° 11, formules (16)].

Les cinq autres combinaisons donnent

$$\gamma_1 = \frac{\nu}{\lambda\nu - \mu^2} = \frac{-\mu'}{\lambda'\nu' - \mu'^2} = \frac{\nu' - \mu}{\lambda\nu' - \mu\mu'} = \frac{\mu'}{\lambda\mu' - \mu\lambda'} = \frac{-\nu}{\mu\nu' - \nu\mu'},$$

$$\gamma_2 = \frac{-\mu}{\lambda\nu - \mu^2} = \frac{\lambda'}{\lambda'\nu' - \mu'^2} = \frac{\lambda - \mu'}{\lambda\nu' - \mu\mu'} = \frac{-\lambda'}{\lambda\mu' - \mu\lambda'} = \frac{\mu}{\mu\nu' - \nu\mu'}.$$

Je ne m'arrêterai pas à vérifier [ce qui est facile, au moyen des formules (16), n° 11] que ces équations sont compatibles; je me contenterai d'observer que, dans le cas plus spécial où les deux unités principales sont

$$1 \quad \text{et} \quad \sqrt{-1},$$

on a

$$\gamma_1 = 1, \qquad \gamma_2 = 0;$$

car

$$\lambda = \mu' = 1, \qquad \nu = -1, \qquad \mu = \lambda' = \nu' = 0.$$

On voit que, dans ce cas,

$$e_0 = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 = \gamma_1 + \gamma_2 \sqrt{-1} = 1,$$

résultat auquel on devait s'attendre.

§ II.

Le système des g.

29. Soit

$$g = \xi_{11} e_1 + \xi_{12} e_2 + \ldots + \xi_{1n} e_n$$

un élément de l'Ensemble $\mathcal{E}$, qui ne soit pas un diviseur de zéro : formons ses puissances successives, et, au moyen des formules (8) (n° 8), ramenons chacune d'elles à la forme linéaire par rapport aux unités principales; désignons ensuite, pour abréger, par des lettres ξ affectées d'indices convenables, les coordonnées des diverses puissances $g^2, g^3, \ldots, g^n$. Nous aurons ainsi

$$(25) \qquad \begin{cases} g = \xi_{11} e_1 + \xi_{12} e_2 + \ldots + \xi_{1n} e_n, \\ g^2 = \xi_{21} e_1 + \xi_{22} e_2 + \ldots + \xi_{2n} e_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ g^n = \xi_{n1} e_1 + \xi_{n2} e_2 + \ldots + \xi_{nn} e_n. \end{cases}$$

Les coordonnées ξ_{ij} sont évidemment des quantités réelles, fonctions de celles d'entre elles dont le premier indice est 1 et aussi des quantités ε_{rpq} qui entrent dans les formules (8).

30. Nous supposerons que l'Ensemble $\mathcal{E}$ remplisse la nouvelle condition, que le déterminant

$$(26) \qquad \Xi = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \ldots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \ldots & \xi_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \ldots & \xi_{nn} \end{vmatrix}$$

ne soit pas nul pour tout système de valeurs des coordonnées ξ_{11}, $\xi_{12}, \ldots, \xi_{1n}$. Cette hypothèse peut être faite; car autrement il devrait y avoir impossibilité de trouver des systèmes de nombres ε_{rpq}, tels que le déterminant Ξ ne fût pas identiquement nul; mais l'emploi d'un système particulier de nombres ε_{rpq} montre précisément le contraire. En effet, prenons le système déjà utilisé au n° 10 pour démontrer la possibilité de satisfaire aux équations (9) et (11). Dans ce système, tous les ε_{rpq} sont nuls, sauf

$$\varepsilon_{111} = \varepsilon_{222} = \ldots = \varepsilon_{nnn} = 1,$$

et l'on a

$$e_p e_q = 0 \quad \text{si } p \gtrless q$$

avec

$$e_p e_p = e_p.$$

Dans le cas présent on trouve donc

$$\begin{aligned} g^i &= \xi_{i1} e_1 + \xi_{i2} e_2 + \ldots + \xi_{in} e_n \\ &= \xi_{11}^i e_1 + \xi_{12}^i e_2 + \ldots + \xi_{1n}^i e_n; \end{aligned}$$

et, par conséquent, en écrivant simplement $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ au lieu de $\xi_{11}, \xi_{12}, \ldots, \xi_{1n}$, on a

$$\Xi = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_n \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \ldots & \xi_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_1^n & \xi_2^n & \ldots & \xi_n^n \end{vmatrix},$$

déterminant certainement différent de zéro, quelles que soient les coordonnées $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ de g, pourvu cependant que deux quelconques d'entre elles ne soient pas égales.

Ayant ainsi reconnu, par un exemple, que le déterminant (26) n'est pas identiquement nul, on voit que la nouvelle condition imposée n'exclut que certains systèmes de nombres ε_{rpq}.

Je ne m'occuperai désormais que des seuls Ensembles $\mathcal{E}$ pour lesquels cette condition est vérifiée.

31. Actuellement les équations (25) pouvant se résoudre par rapport aux *unités principales* $e_1, e_2, \ldots, e_n$, donnent

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} e_1 &= \alpha_{11} g + \alpha_{12} g^2 + \alpha_{13} g^3 + \ldots + \alpha_{1n} g^n, \\ e_2 &= \alpha_{21} g + \alpha_{22} g^2 + \alpha_{23} g^3 + \ldots + \alpha_{2n} g^n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ e_n &= \alpha_{n1} g + \alpha_{n2} g^2 + \alpha_{n3} g^3 + \ldots + \alpha_{nn} g^n. \end{aligned} \right.$$

Les α_{ij} sont des quantités réelles.

32. Formons encore g^{n+1} de la même manière que nous avons formé g^2, g^3, ..., g^n, puis remplaçons dans son expression les unités e_1, e_2, ..., e_n par leurs valeurs tirées des équations (27), nous obtiendrons une relation qu'on pourra écrire

$$g^{n+1} + \varepsilon_1 g^n + \varepsilon_2 g^{n-1} + \ldots + \varepsilon_n g = 0 \tag{28}$$

(ε_1, ε_2, ..., ε_n sont des quantités réelles) ou bien encore (en tenant compte de la remarque du n° 26)

$$g^n + \varepsilon_1 g^{n-1} + \varepsilon_2 g^{n-2} + \ldots + \varepsilon_{n-1} g + \varepsilon_n e_0 = 0. \tag{28'}$$

De l'équation (28'), on déduit également, quel que soit l'entier positif μ,

$$g^{\mu+n} + \varepsilon_1 g^{\mu+n-1} + \varepsilon_2 g^{\mu+n-2} + \ldots + \varepsilon_n g^{\mu} = 0. \tag{28''}$$

33. Actuellement observons :

1° Que, d'après les équations (25) et la condition $\Xi \gtrless 0$, les quantités

$$\frac{g}{g}, \quad \frac{g^2}{g}, \quad \frac{g^3}{g}, \quad \ldots, \quad \frac{g^n}{g}$$

ou

$$e_0, \quad g, \quad g^2, \quad \ldots, \quad g^{n-1}$$

sont linéairement indépendantes aussi bien que les quantités

$$g, \quad g^2, \quad g^3, \quad \ldots, \quad g^n$$

(*voir* Chap. I, n° 6);

2° Que tout élément de l'Ensemble $\mathcal{E}$ peut s'exprimer en fonction linéaire à coefficients réels des n quantités

$$e_0, \quad g, \quad g^2, \quad \ldots, \quad g^{n-1},$$

comme cela résulte de l'application successive des formules (27) et de l'équation (28');

3° Que, réciproquement, toute expression linéaire et homogène par rapport à ces quantités appartient à l'Ensemble $\mathcal{E}$.

De ces trois observations, nous concluons que *les n quantités*

$$e_0, \quad g, \quad g^2, \quad \ldots, \quad g^{n-1}$$

forment un système de n unités principales, que l'on peut substituer aux n unités e_1, e_2, ..., e_n.

34. Pour conserver l'uniformité des notations, nous poserons

$$e_0 = g_0$$

et, d'une manière générale,

$$g^\mu = g_\mu.$$

Tout élément de l'Ensemble $\mathcal{E}$ sera donc de la forme

$$(29) \qquad a = \alpha_0 g_0 + \alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_{n-1} g_{n-1}.$$

35. Le choix de ce système d'unités principales permet d'effectuer la multiplication des quantités complexes de l'Ensemble $\mathcal{E}$ d'une manière simple.

Désignons par ε'_{rpq} les coefficients relatifs au système g_0, g_1, ..., g_{n-1}, analogues aux coefficients ε_{rpq} relatifs au système e_1, e_2, ..., e_n.

On a, immédiatement,

$$g_p g_q = g_{p+q}.$$

Si $p+q \leq n-1$, on voit ainsi que tous les nombres ε'_{rpq} sont nuls, sauf le seul nombre $\varepsilon'_{p+q,\,p,\,q}$, qui est égal à 1.

Si $p+q > n-1$, l'application répétée de la formule (28″) et enfin celle de la formule (28′) permettent de trouver les ε'_{rpq} et montrent que ce sont des fonctions entières des quantités ε_1, ε_2, ..., ε_n (et, par conséquent, des nombres réels).

Ainsi, dans tous les cas, on aura l'expression des produits $g_p g_q$ en fonction linéaire de g_0, g_1, ..., g_{n-1}; et, par suite, le produit des deux éléments

$$a = \alpha_0 g_0 + \alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_{n-1} g_{n-1},$$
$$b = \beta_0 g_0 + \beta_1 g_1 + \ldots + \beta_{n-1} g_{n-1}$$

s'obtiendra facilement sous la même forme

$$c = \gamma_0 g_0 + \gamma_1 g_1 + \ldots + \gamma_{n-1} g_{n-1}.$$

CHAPITRE III.

D'UNE AUTRE MANIÈRE D'EFFECTUER LE CALCUL DES QUANTITÉS COMPLEXES.

36. *Les quantités adjointes.* — Une quantité quelconque de l'Ensemble peut s'écrire (n° 34)

$$a = \alpha_0 g_0 + \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \ldots + \alpha_{n-1} g_{n-1}.$$

Posons

$$A(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \ldots + \alpha_{n-1} \xi^{n-1}.$$

Nous dirons que *la fonction* $A(\xi)$ *appartient à la quantité* a et que, réciproquement, la *quantité* a *appartient à la fonction* $A(\xi)$, ou encore que chacune de ces quantités est l'*adjointe* de l'autre.

D'une manière plus générale, si $P(\xi)$ désigne un polynôme entier en ξ, à coefficients réels, de degré quelconque, et si $\mathfrak{P}$ est l'expression déduite de $P(\xi)$, en y remplaçant les puissances 0, 1, 2, ... de ξ respectivement par g_0, g_1, g_2, ..., nous dirons que $P(\xi)$ et $\mathfrak{P}$ sont deux quantités *adjointes* l'une à l'autre, ou bien encore qu'elles *appartiennent* l'une à l'autre. Ainsi

$$f(\xi) = \xi^n + \varepsilon_1 \xi^{n-1} + \ldots + \varepsilon_{n-1} \xi + \varepsilon_n$$

et

$$g_n + \varepsilon_1 g_{n-1} + \ldots + \varepsilon_{n-1} g_1 + \varepsilon_n g_0$$

appartiennent l'une à l'autre (nous supposons que ε_1, ε_2, ..., ε_n sont les nombres rencontrés dans le Chapitre précédent). Il en est de même des deux quantités

$$\xi^\mu f(\xi) \quad \text{et} \quad g_{\mu+n} + \varepsilon_1 g_{\mu+n-1} + \ldots + \varepsilon_{n-1} g_{\mu+1} + \varepsilon_n g_\mu.$$

Nous appellerons $f(\xi)$ le *polynôme fondamental.*

Prenons maintenant pour l'indéterminée ξ une racine de l'équation

$$f(\xi) = 0.$$

Tout polynôme $P(\xi)$ entier par rapport à cette racine se réduira au degré $n - 1$ par l'emploi de l'équation

$$(30) \qquad f(\xi) = 0 \qquad \text{ou encore de} \qquad \xi^{\mu} f(\xi) = 0.$$

On pourra, en particulier, et c'est ce qu'il y a de plus simple, effectuer la division de $P(\xi)$ par $f(\xi)$ et considérer le reste $R(\xi)$ qui sera le résultat cherché.

D'autre part, l'expression adjointe $\mathfrak{P}$ se réduira aussi à une expression linéaire en $g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}$ seulement, au moyen des deux expressions adjointes de $f(\xi)$ et de $\xi^{\mu} f(\xi)$, qui sont *effectivement nulles*, en vertu des équations (28') et (28''), c'est dire que l'on pourra directement obtenir cette réduction en prenant l'*adjointe* de $R(\xi)$. Quand un élément de l'Ensemble $\mathcal{E}$ sera ainsi réduit à la forme linéaire en g_0, $g_1, \ldots, g_{n-1}$, nous dirons qu'il a la *forme canonique;* son polynôme adjoint sera alors, lui aussi, de la *forme canonique*.

Il est clair que, si un élément $a = \alpha_0 g_0 + \alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_n g_{n-1}$, réduit à la forme canonique, est nul, son polynôme adjoint $A(\xi)$ est identiquement nul, puisque, si $a = 0$, on a $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$.

37. *Nouvelle manière de concevoir la multiplication de deux quantités complexes.* — Soient maintenant

$$a = \alpha_0 g_0 + \alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_{n-1} g_{n-1},$$
$$b = \beta_0 g_0 + \beta_1 g_1 + \ldots + \beta_{n-1} g_{n-1}$$

deux éléments quelconques de l'Ensemble $\mathcal{E}$. Soient aussi $A(\xi)$ et $B(\xi)$ leurs quantités adjointes, ξ étant toujours une racine de l'équation $f(\xi) = 0$. Le produit $A(\xi)B(\xi)$ sera l'*adjoint* du produit ab; on aura, d'ailleurs,

$$A(\xi)B(\xi) = \theta(\xi) f(\xi) + C(\xi);$$

$A(\xi)$ et $B(\xi)$ étant du degré $n-1$ au plus et $f(\xi)$ du degré n, $\theta(\xi)$ sera du degré $n-2$ au plus, et $C(\xi)$ du degré $n-1$ au plus. Si C est la quantité complexe appartenant à $C(\xi)$, on aura évidemment, d'après ce qui précède,

$$ab = c.$$

La multiplication des quantités complexes est ramenée, par les considérations que je viens d'exposer, aux opérations ordinaires sur les polynômes entiers, et nous avons ici comme une sorte de *calcul symbo-*

lique de ces quantités. On voit, par exemple, tout de suite, que l'on a toujours pour trois quantités a, b, c

$$ab = ba, \qquad (ab)c = (ac)b, \qquad a(b+c) = ab + ac;$$

car on a

$$\begin{gathered} A(\xi)B(\xi) = B(\xi)A(\xi), \\ [A(\xi)B(\xi)]C(\xi) = [A(\xi)C(\xi)]B(\xi), \\ A(\xi)[B(\xi) + C(\xi)] = A(\xi)B(\xi) + A(\xi)C(\xi), \end{gathered}$$

et, dans chacune de ces égalités respectivement, les deux membres donneront toujours le même reste quand on les divisera par le polynôme fondamental.

38. De ce procédé de multiplication résulte ce théorème :

Pour qu'un produit de deux facteurs a et b soit nul, il faut et il suffit que le produit des polynômes adjoints soit divisible par le polynôme fondamental $f(\xi)$.

39. *Diviseurs de zéro.* — Considérons trois éléments a, b, c ramenés à leur forme canonique

$$\begin{aligned} a &= \alpha_0 g_0 + \alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_{n-1} g_{n-1}, \\ b &= \beta_0 g_0 + \beta_1 g_1 + \ldots + \beta_{n-1} g_{n-1}, \\ c &= \gamma_0 g_0 + \gamma_1 g_1 + \ldots + \gamma_{n-1} g_{n-1}; \end{aligned}$$

considérons aussi leurs polynômes adjoints

$$A(\xi), \quad B(\xi), \quad C(\xi),$$

qui sont, par suite, au plus du degré $n - 1$.

Soit, en outre,

$$a = bc.$$

On aura

$$A(\xi) + \theta(\xi) f(\xi) = B(\xi) C(\xi). \tag{31}$$

Prenons de suite le cas où $a = 0$. On a, d'une part,

$$bc = 0;$$

d'autre part,

$$B(\xi) C(\xi) = \theta(\xi) f(\xi);$$

$B(\xi)$ et $C(\xi)$, ayant l'un et l'autre un degré inférieur à celui de $f(\xi)$, ne sauraient être séparément divisibles par $f(\xi)$; pour que leur produit le soit, il faut donc et il suffit que certains facteurs linéaires de $f(\xi)$ (un au moins) appartiennent à $B(\xi)$ et les autres à $C(\xi)$. Dès lors, le produit bc peut être nul sans que b ou c le soit. Nous rencontrons ainsi, de nouveau, les *diviseurs de zéro.*

Le caractère des diviseurs de zéro consiste donc, relativement à leur fonction adjointe, en ce que cette fonction adjointe (polynôme au plus du degré $n - 1$) admet comme diviseur *un au moins des facteurs linéaires de* $f(\xi)$.

40. On peut, au moyen de cette nouvelle définition des diviseurs de zéro, retrouver les résultats des n^os 17 et 18 du Chapitre I. Soient $bc = 0$ et b un diviseur de zéro; c sera aussi un diviseur de zéro; car, puisque $B(\xi)$ ne peut admettre comme diviseurs tous les facteurs linéaires de $f(\xi)$ et que le produit $B(\xi)C(\xi)$ les admet tous, il faut bien que $C(\xi)$ en admette un au moins; donc c est un diviseur de zéro.

De même, le produit d'un diviseur de zéro par une quantité complexe quelconque est aussi un diviseur de zéro. Soient $a = \Theta$, b une quantité complexe quelconque, $A(\xi)$ et $B(\xi)$ leurs polynômes adjoints; on pourra toujours écrire

$$A(\xi)B(\xi) = f(\xi)\theta(\xi) + R(\xi),$$

$R(\xi)$ étant du degré $n - 1$ au plus. $A(\xi)$ et $f(\xi)$ ont certainement un diviseur commun, puisque a est un diviseur de zéro; d'après l'égalité précédente, $R(\xi)$, qui est le polynôme adjoint du produit ab, doit nécessairement admettre le diviseur commun à $f(\xi)$ et $A(\xi)$: donc le produit ab est un diviseur de zéro.

41. Voici une autre proposition :

Si l'on suppose que l'équation $f(\xi)$ n'admet pas de racines doubles, il n'y a dans l'Ensemble $\mathcal{E}$ que la seule quantité 0, *dont une puissance entière puisse être nulle.*

Soit a une quantité complexe de l'Ensemble $\mathcal{E}$.

Si $a \neq \Theta$, la proposition est évidente, car dans a^μ il n'y a aucun facteur qui soit un diviseur de zéro.

Si $a = \Theta$, le polynôme adjoint $A(\xi)$, qui est du degré $n-1$, a certains diviseurs linéaires communs avec $f(\xi)$, mais il y en a au moins un de $f(\xi)$ qui n'appartient pas du tout à $A(\xi)$; soit $\xi - u$ ce facteur. Une puissance quelconque de $A(\xi)$ ne peut contenir ce facteur $\xi - u$ et, par suite, être divisible par $f(\xi)$; donc a^μ n'est certainement pas nul (n° 38). Au contraire, si l'équation $f(\xi) = 0$ admet des racines multiples, même une seule, *il y aura certains diviseurs de zéro dont les puissances entières, à partir d'un certain degré, seront toutes nulles*. Soit, en effet, p le plus élevé parmi les degrés de multiplicité des racines de $f(\xi)$; et soit maintenant a un diviseur de zéro dont le polynôme adjoint $A(\xi)$ contient tous les *facteurs linéaires distincts* de $f(\xi)$, ce qui est possible, puisque $A(\xi)$ peut être du degré $n-1$, et que $f(\xi)$ a par hypothèse au moins un facteur linéaire double; il est évident que $[A(\xi)]^p$, qui est la fonction adjointe de a^p, sera divisible par $f(\xi)$ et que, par suite, a^p sera nul. On a dès lors, pour l'entier positif quelconque μ,

$$a^{p+\mu} = a^p a^\mu = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

42. Si donc on veut que 0 soit le seul, parmi les éléments de l'Ensemble $\mathcal{E}$, dont les puissances successives sont nulles, on doit nécessairement admettre que $f(\xi)$ n'a que des racines simples, ou, ce qui est la même chose, que le *discriminant* de $f(\xi)$ est différent de zéro.

Nous supposerons cela désormais :

43. *Détermination du quotient de deux éléments au moyen des polynômes adjoints.* — Soit b une quantité complexe qui ne soit pas *un diviseur de zéro;* on peut alors toujours déterminer le quotient par b d'une autre quantité complexe a. Soit c ce quotient :

b n'est pas un diviseur de zéro; donc $B(\xi)$ et $f(\xi)$ sont premiers entre eux, et, d'après le théorème d'Euler, on peut trouver deux polynômes

$$\mathfrak{F}(\xi) \quad \text{et} \quad \mathfrak{B}(\xi),$$

tels que

$$B(\xi)\,\mathfrak{B}(\xi) - \mathfrak{F}(\xi)\,f(\xi) = 1,$$

d'où

$$A(\xi)\,B(\xi)\,\mathfrak{B}(\xi) - A(\xi)\,\mathfrak{F}(\xi)\,f(\xi) = A(\xi);$$

en écrivant ensuite

$$A(\xi)\,\mathfrak{B}(\xi) = \overline{\mathfrak{B}}(\xi)\,f(\xi) + C(\xi),$$

de telle sorte que $C(\xi)$ soit de degré inférieur à $f(\xi)$, c'est-à-dire de degré $n - 1$ au plus, ce qu'on obtiendra par une simple division; portant maintenant cette valeur dans l'égalité précédente et groupant les termes en $f(\xi)$, on aura

$$A(\xi) + \theta(\xi) f(\xi) = B(\xi) C(\xi);$$

d'où

$$a = bc, \qquad \frac{a}{b} = c,$$

en appelant c la quantité complexe adjointe du polynôme $C(\xi)$.

44. Soit $b = 0$. Il est généralement impossible de trouver le quotient $\frac{a}{b}$; car, les deux polynômes $B(\xi)$ et $f(\xi)$ n'étant plus premiers entre eux, l'égalité

$$A(\xi) + \theta(\xi) f(\xi) = B(\xi) C(\xi),$$

dont dépend, en fait, la possibilité de la division, ne peut avoir lieu si $A(\xi)$ n'admet pas le facteur $D(\xi)$, plus grand commun diviseur entre $f(\xi)$ et $B(\xi)$.

Si $A(\xi)$ admet le diviseur $D(\xi)$, la division est possible et la détermination du quotient c, au moyen de sa fonction adjointe $C(\xi)$, se fait comme il suit :

On pose

$$\begin{aligned} A(\xi) &= A_1(\xi) D(\xi), \\ B(\xi) &= B_1(\xi) D(\xi), \\ f(\xi) &= f_1(\xi) D(\xi); \end{aligned}$$

puis, les deux polynômes $f_1(\xi)$ et $B_1(\xi)$ étant actuellement premiers entre eux, on déterminera deux polynômes $\mathfrak{B}(\xi)$ et $\mathfrak{F}(\xi)$, tels que

$$B_1(\xi) \mathfrak{B}(\xi) - \mathfrak{F}(\xi) f_1(\xi) = 1,$$

d'où

$$A_1(\xi) D(\xi) B_1(\xi) \mathfrak{B}(\xi) - \mathfrak{F}(\xi) f_1(\xi) D(\xi) A_1(\xi) = A(\xi)$$

ou

$$A_1(\xi) \mathfrak{B}(\xi) B(\xi) - \mathfrak{F}(\xi) f(\xi) A_1(\xi) = A(\xi)$$

et, en posant

$$A_1(\xi) \mathfrak{B}(\xi) = \overline{\mathfrak{B}}(\xi) f(\xi) + C(\xi),$$

puis, groupant les termes en $f(\xi)$, on aura finalement

$$A(\xi) + \theta(\xi) f(\xi) = B(\xi) C(\xi),$$

$C(\xi)$ étant au plus de degré $n - 1$: c'est là le polynôme adjoint du quotient cherché.

CHAPITRE IV.

SIMPLIFICATION DU CALCUL.

§ I.

Les composants et leurs propriétés.

45. Imaginons qu'on ait décomposé le polynôme fondamental $f(\xi)$ en ses facteurs linéaires; groupons deux à deux ceux d'entre eux qui correspondent à des racines imaginaires conjuguées, puis désignons généralement par $f_\mu(\xi)$ un des facteurs *linéaires* à *coefficients réels* ou bien encore un des facteurs *du deuxième degré* à *coefficients réels,* mais à *racines imaginaires*. On aura identiquement

$$f(\xi) = f_1(\xi) f_2(\xi) \dots f_\mu(\xi) \dots f_r(\xi);$$

r est inférieur ou égal à n selon que $f(\xi)$ a ou bien n'a pas de racines imaginaires.

Soit maintenant $A(\xi)$ le polynôme adjoint (de degré $n - 1$ au plus) de l'élément a. Une décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$\frac{A(\xi)}{f(\xi)}$$

nous donnera (les coefficients étant tous réels)

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} A(\xi) = {} & \frac{f(\xi)}{f_1(\xi)} A_1(\xi) + \frac{f(\xi)}{f_2(\xi)} A_2(\xi) + \dots \\ & + \frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)} A_\mu(\xi) + \dots + \frac{f(\xi)}{f_r(\xi)} A_r(\xi). \end{aligned} \right.$$

$A_\mu(\xi)$ est une constante réelle si $f_\mu(\xi)$ est du premier degré; $A_\mu(\xi)$ est, au contraire, un polynôme du premier degré en ξ à coefficients réels si $f_\mu(\xi)$ est du deuxième degré.

Soient $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_r$ les Ensembles de toutes les quantités complexes appartenant respectivement aux *polynômes* de la *forme*

$$\frac{f(\xi)}{f_1(\xi)} A_1(\xi), \quad \frac{f(\xi)}{f_2(\xi)} A_2(\xi), \quad \ldots, \quad \frac{f(\xi)}{f_r(\xi)} A_r(\xi);$$

et $a_1, a_2, \ldots, a_r$ les éléments correspondants de chacun de ces *Ensembles partiels*. On voit que toute quantité complexe a de l'Ensemble $\mathcal{E}$ peut se représenter à l'aide des éléments des Ensembles partiels $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_r$ sous la forme

$$a = a_1 + a_2 + \ldots + a_r \quad \text{[formule (32)]}.$$

On dira que les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_r$ sont les *composants* de a.

Propriétés des composants.

46. 1° *Un élément a ne peut être nul que si ses composants sont tous nuls séparément.*

Soit, en effet, a_μ un composant quelconque de a; je dis que, si l'on a $a = 0$, on a aussi $a_\mu = 0$. La démonstration sera faite si l'on prouve que $A_\mu(\xi)$ est identiquement nul dès que $A(\xi)$ l'est lui-même. Or, $A(\xi)$ étant identiquement nul, l'égalité (32) divisée par $f(\xi)$, qui lui n'est pas nul identiquement, devient

$$\frac{A_1(\xi)}{f_1(\xi)} + \frac{A_2(\xi)}{f_2(\xi)} + \ldots + \frac{A_\mu(\xi)}{f_\mu(\xi)} + \ldots + \frac{A_r(\xi)}{f_r(\xi)} = 0$$

et doit avoir lieu, quel que soit ξ.

Alors, si, en premier lieu, $f_\mu(\xi)$ *est du premier degré*, donnons à ξ la valeur qui annule $f_\mu(\xi)$; cette égalité est impossible à moins que la *constante* $A_\mu(\xi)$ ne soit nulle.

Si, en second lieu, $f_\mu(\xi)$ *est du second degré*, donnant à ξ l'une des deux valeurs imaginaires qui annulent $f(\xi)$, on voit que l'égalité en question est impossible, à moins que pour cette valeur imaginaire de ξ le polynôme $A_\mu(\xi)$ du *premier* degré et à coefficients *réels* ne s'annule lui-même : or cela exige que $A_\mu(\xi)$ soit identiquement nul.

C. Q. F. D.

2° (α) *Le produit de deux éléments appartenant à deux Ensembles partiels différents est toujours nul.*

(β) *Le produit de deux éléments appartenant au même Ensemble partiel est lui aussi un élément de ce même Ensemble partiel, et l'élément produit ne peut être nul que si l'un des éléments facteurs est nul.*

(α) Considérons les deux éléments

$$a_\mu \quad \text{et} \quad b_\nu$$

appartenant respectivement aux Ensembles $\mathcal{E}_\mu$ et $\mathcal{E}_\nu$. Leurs polynômes adjoints seront

$$\frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)} A_\mu(\xi) \quad \text{et} \quad \frac{f(\xi)}{f_\nu(\xi)} B_\nu(\xi);$$

le produit $a_\mu b_\nu$ a pour polynôme adjoint, avant réduction à la forme canonique,

$$\frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)} \frac{f(\xi)}{f_\nu(\xi)} A_\mu(\xi) B_\nu(\xi);$$

or cette expression est certainement divisible par $f(\xi)$, puisque

$$\frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi) f_\nu(\xi)}$$

est un polynôme entier; en conséquence, on a bien pour la quantité adjointe

$$a_\mu b_\nu = 0.$$

(β) Prenons maintenant les deux éléments a_μ, b_μ et leurs polynômes adjoints $A_\mu(\xi)$ et $B_\mu(\xi)$. Le polynôme adjoint du produit sera

$$\frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)} \frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)} A_\mu(\xi) B_\mu(\xi).$$

Effectuant la division de ce polynôme par $f(\xi)$, on aura

$$\frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)} \frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)} A_\mu(\xi) B_\mu(\xi) = Q(\xi) f(\xi) + R(\xi),$$

$R(\xi)$ sera le polynôme adjoint du produit $a_\mu b_\mu$ réduit à la forme canonique. Cette égalité montre immédiatement que $R(\xi)$ (de degré $n-1$ au plus) est divisible par $\dfrac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)}$ (degré $n-1$ ou $n-2$), puisque les deux autres termes admettent ce diviseur; en sorte que, si $C_\mu(\xi)$ désigne une certaine constante convenable, ou un certain polynôme du premier degré en ξ, selon que $f_\mu(\xi)$ est du premier ou du second degré, le polynôme adjoint du produit $a_\mu b_\mu$ aura la forme

$$\frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)} C_\mu(\xi);$$

il en résulte que le produit $a_\mu b_\mu$ est lui-même un élément c_μ de l'Ensemble $\mathcal{E}_\mu$.

Il nous reste à voir que cet élément est nul seulement lorsque l'on a

$$a_\mu = 0 \qquad \text{ou bien} \qquad b_\mu = 0.$$

Pour que c_μ soit nul, il faut que

$$\frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)} \frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)} A_\mu(\xi) B_\mu(\xi)$$

soit exactement divisible par $f(\xi)$ ou, ce qui revient au même, que

$$\frac{1}{f_\mu(\xi)} \frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)} A_\mu(\xi) B_\mu(\xi)$$

soit entier, ou encore, puisque (n° 42) $\frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)}$ et $f_\mu(\xi)$ sont premiers entre eux, que

$$\frac{A_\mu(\xi) B_\mu(\xi)}{f_\mu(\xi)}.$$

soit un polynôme entier. Cela est manifestement impossible quand $f_\mu(\xi)$ est du premier degré, car alors $A_\mu(\xi)$ et $B_\mu(\xi)$ sont indépendants de ξ. Lorsque $f_\mu(\xi)$ est du second degré, $f_\mu(\xi)$ a ses deux racines imaginaires, tandis que le produit $A_\mu(\xi) B_\mu(\xi)$ n'a que des racines réelles. On voit donc que dans tous les cas $\frac{A_\mu(\xi) B_\mu(\xi)}{f_\mu(\xi)}$ ne peut être entier, à moins que $A_\mu(\xi)$ ou $B_\mu(\xi)$ ne soit identiquement nul.

3° *L'Ensemble $\mathcal{E}_\mu$ est une multiplicité* (MANNIGFALTIGKEIT) *à 1 ou 2 dimensions, selon que $f_\mu(\xi)$ est du premier ou du deuxième degré.*

Lorsque $f_\mu(\xi)$ est du premier degré, $A_\mu(\xi)$ étant une constante, tous les éléments de l'Ensemble $\mathcal{E}_\mu$ peuvent se déduire de la seule quantité appartenant à

$$\frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)}.$$

Lorsque $f_\mu(\xi)$ est du deuxième degré, $A_\mu(\xi)$ étant du premier degré, tous les éléments de l'Ensemble $\mathcal{E}_\mu$ peuvent se déduire des deux seules quantités appartenant respectivement à

$$\frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)} \quad \text{et à} \quad \xi\frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)};$$

mais on peut aussi déduire tous les éléments de deux quelconques d'entre eux appartenant aux deux polynômes

$$\frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)}(\alpha\xi+\beta) \quad \text{et} \quad \frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)}(\alpha'\xi+\beta'),$$

où l'on suppose

$$\alpha\beta'-\beta\alpha'\neq 0.$$

Comme on le voit, les deux polynômes adjoints, en vertu de cette condition, ne peuvent se déduire l'un de l'autre par une relation linéaire homogène à coefficients numériques. D'autre part, on voit aussi que le polynôme adjoint

$$\frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)}(\gamma\xi+\delta)$$

d'un autre élément quelconque de l'Ensemble $\mathcal{E}_\mu$ se déduit aisément par une combinaison linéaire à coefficients numériques des deux polynômes précédents; car, lorsqu'on a

$$\alpha\beta'-\beta\alpha'\neq 0,$$

on peut toujours déterminer deux nombres λ et λ' tels que

$$\begin{aligned}\lambda\alpha+\lambda'\alpha'&=\gamma,\\ \lambda\beta+\lambda'\beta'&=\delta.\end{aligned}$$

§ II.

Choix particulier d'éléments fondamentaux de calcul.

47. Nous allons faire choix d'éléments particuliers, comme éléments fondamentaux de calcul.

A cet effet, exprimons la quantité g_0, trouvée plus haut, au moyen de ses *composants*

$$g_0=g'+g''+\ldots+g^{(r)}.$$

D'après les propriétés (α) et (β) des composants, on a

$$g_0 a_\mu = (g' + g'' + \ldots + g^{(\mu)} + \ldots + g^{(r)}) a_\mu = g^{(\mu)} a_\mu;$$

d'ailleurs on a aussi (nº 24)

$$g_0 a_\mu = a_\mu;$$

donc

$$g^{(\mu)} a_\mu = a_\mu,$$

d'où, en particulier,

$$(g^{(\mu)})^2 = g^\mu \qquad \text{et} \qquad \frac{g^{(\mu)}}{g^{(\mu)}} = g^{(\mu)},$$

c'est-à-dire que la quantité $g^{(\mu)}$, laissant invariable par multiplication tout élément de l'Ensemble $\mathcal{E}_\mu$, jouit dans cet Ensemble partiel $\mathcal{E}_\mu$ de la même propriété que possède g_0 dans l'Ensemble $\mathcal{E}$ (¹).

48. A présent, séparons le cas où la multiplicité de l'Ensemble $\mathcal{E}_\mu$ n'a qu'une dimension, de celui où elle en a deux.

Premier cas : $\mathcal{E}_\mu$ *est une multiplicité à* 1 *dimension.* — Tous les éléments ont pour polynôme adjoint un polynôme de la forme

$$\frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)} A_\mu,$$

A_μ étant un nombre réel. Le polynôme adjoint de $g^{(\mu)}$ a, par suite, lui-même cette forme; au reste, les polynômes adjoints des autres éléments de l'Ensemble $\mathcal{E}_\mu$ ne différant de celui de $g^{(\mu)}$ que par un facteur numérique, tous ces éléments ont la forme

$$\alpha g^{(\mu)},$$

où α est un nombre réel quelconque.

(¹) On a vu (nº 25) que la quantité g_0 (ou e_0) était *unique,* quand on prenait comme point de départ pour la former un élément *a non diviseur de zéro,* et il n'est pas *contradictoire* de trouver ici r quantités g', g'', ..., $g^{(r)}$, jouissant des propriétés de g_0, chacune dans son ensemble respectif : cela tient à ce fait qui sera prochainement démontré, que le composant a_μ, considéré comme élément de l'Ensemble $\mathcal{E}$, est un *diviseur de zéro ;* en posant, ce qui répond à la définition de $g^{(\mu)}$,

$$g^{(\mu)} = \frac{a_\mu}{a_\mu},$$

on n'est donc pas dans le cas de la définition de g_0.

Il en résulte immédiatement, pour le produit et le quotient des deux éléments

$$\alpha g^{(\mu)} \quad \text{et} \quad \beta g^{(\mu)}$$

de cet Ensemble $\mathcal{E}_\mu$, les expressions

$$(\alpha g^{(\mu)})(\beta g^{(\mu)}) = \alpha\beta g^{(\mu)} \tag{33}$$

et

$$\frac{\alpha g^{(\mu)}}{\beta g^{(\mu)}} = \frac{\alpha}{\beta} g^{(\mu)}. \tag{34}$$

Remarque. — Implicitement, nous avons admis que β n'était pas nul; en convenant d'appeler *infini* un élément $\alpha' g^{(\mu)}$ de l'Ensemble $\mathcal{E}_\mu$, dans lequel le coefficient α' est infini, on dira, lorsque $\beta = 0$, que le quotient $\frac{\alpha}{\beta} g^{(\mu)}$ est *infini*.

49. Deuxième cas : *$\mathcal{E}_\mu$ est une multiplicité à deux dimensions.* — Outre la quantité $g^{(\mu)}$, nous considérerons dans ce cas une autre quantité quelconque $h^{(\mu)}$ de l'Ensemble $\mathcal{E}_\mu$, mais qui ne puisse pas se déduire de $g^{(\mu)}$ par une simple relation linéaire homogène à coefficients numériques. Alors, d'après une remarque faite à la fin du n° 46, toute autre quantité de l'Ensemble $\mathcal{E}_\mu$ pourra se déduire linéairement de ces deux éléments

$$g^{(\mu)} \quad \text{et} \quad h^{(\mu)}.$$

Dès lors on déterminera les deux nombres réels γ et γ', qui permettent d'exprimer $(h^{(\mu)})^2$, au moyen de $g^{(\mu)}$ et $h^{(\mu)}$, et l'on aura

$$(h^{(\mu)})^2 = \gamma h^{(\mu)} + \gamma' g^{(\mu)},$$

formule que l'on peut écrire

$$(h^{(\mu)} - \tfrac{1}{2}\gamma g^{(\mu)})^2 - (\gamma' + \tfrac{1}{4}\gamma^2)(g^{(\mu)})^2 = 0, \tag{ϖ}$$

en se rappelant que

$$h^{(\mu)} g^{(\mu)} = h^{(\mu)} \quad \text{et} \quad (g^{(\mu)})^2 = g^{(\mu)}.$$

Dans l'égalité (ϖ), on doit nécessairement avoir

$$\gamma' + \tfrac{1}{4}\gamma^2 < 0,$$

car autrement, en décomposant le premier membre, on aurait les deux quantités

$$h^{(\mu)} - \left(\tfrac{1}{2}\gamma + \sqrt{\gamma' + \tfrac{1}{4}\gamma^2}\right) g^{(\mu)},$$
$$h^{(\mu)} - \left(\tfrac{1}{2}\gamma - \sqrt{\gamma' + \tfrac{1}{4}\gamma^2}\right) g^{(\mu)}.$$

On voit qu'elles appartiennent à l'Ensemble $\mathcal{E}_\mu$, que leur produit est nul (ϖ), et que cependant chacune d'elles n'est point nulle ([1]), ce qui devrait être (n° 46, 2°).

Cette même égalité (ϖ), écrite sous la forme

$$\left[\frac{h^{(\mu)} - \frac{1}{2}\gamma g^{(\mu)}}{\sqrt{-(\gamma' + \frac{1}{4}\gamma^2)}}\right]^2 + (g^{(\mu)})^2 = 0,$$

montre qu'en posant

$$k^{(\mu)} = \frac{1}{\sqrt{-(\gamma' + \frac{1}{4}\gamma^2)}} h^{(\mu)} - \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\sqrt{-(\gamma' + \frac{1}{4}\gamma^2)}} g^{(\mu)},$$

on aura

$$(k^{(\mu)})^2 = - g^{(\mu)}; \tag{35}$$

et, parce que toute quantité de l'Ensemble $\mathcal{E}_\mu$ s'exprime linéairement au moyen de $g^{(\mu)}$ et de $h^{(\mu)}$, elle s'exprimera aussi linéairement au moyen de $g^{(\mu)}$ et de $k^{(\mu)}$: la forme générale de ces quantités sera donc

$$\alpha g^{(\mu)} + \beta k^{(\mu)}.$$

50. Remarque I. — Mise sous cette forme, une quantité complexe de l'Ensemble $\mathcal{E}_\mu$ ne peut être nulle que si l'on a simultanément

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0,$$

car de

$$\alpha g^{(\mu)} + \beta k^{(\mu)} = 0$$

on tire, en remplaçant $k^{(\mu)}$ par sa valeur en fonction de $h^{(\mu)}$,

$$\left[\alpha - \beta \frac{\frac{1}{2}\gamma}{\sqrt{-(\gamma' + \frac{1}{4}\gamma^2)}}\right] g^{(\mu)} + \beta \frac{1}{\sqrt{-(\gamma' + \frac{1}{4}\gamma^2)}} h^{(\mu)} = 0;$$

or cette relation est impossible par hypothèse, à moins que simultané-

---

([1]) Car, par hypothèse, $h^{(\mu)}$ ne peut pas se déduire de $g^{(\mu)}$.

ment on ait

$$\beta \frac{1}{\sqrt{-(\gamma' + \frac{1}{4}\gamma^2)}} = 0, \qquad \alpha - \beta \frac{\frac{1}{2}\gamma}{\sqrt{-(\gamma' + \frac{1}{4}\gamma^2)}} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\beta = 0, \qquad \alpha = 0.$$

Corollaire. — *Si*

$$\alpha g^{(\mu)} + \beta k^{(\mu)} = \alpha' g^{(\mu)} + \beta' k^{(\mu)},$$

on a

$$\alpha = \alpha', \qquad \beta = \beta'.$$

Remarque II. — *Le produit des deux éléments*

$$\alpha g^{(\mu)} + \beta k^{(\mu)} \quad \text{et} \quad \alpha' g^{(\mu)} + \beta' k^{(\mu)}$$

appartenant à l'Ensemble $\mathcal{E}_\mu$ est donné par la formule

$$(36) \quad (\alpha g^{(\mu)} + \beta k^{(\mu)})(\alpha' g^{(\mu)} + \beta' k^{(\mu)}) = (\alpha\alpha' - \beta\beta')g^{(\mu)} + (\alpha\beta' + \beta\alpha')k^{(\mu)}.$$

De même, pour *le quotient de deux éléments de l'Ensemble $\mathcal{E}_\mu$ dont le second n'est pas nul, on aura*

$$(37) \qquad \frac{\alpha g^{(\mu)} + \beta k^{(\mu)}}{\alpha' g^{(\mu)} + \beta' k^{(\mu)}} = \frac{\alpha\alpha' + \beta\beta'}{\alpha'^2 + \beta'^2} g^{(\mu)} + \frac{\alpha'\beta - \beta'\alpha}{\alpha'^2 + \beta'^2} k^{(\mu)},$$

résultat que l'on obtient immédiatement en multipliant haut et bas dans le premier membre par

$$\alpha' g^{(\mu)} - \beta' k^{(\mu)}.$$

On a admis que

$$\alpha' g^{(\mu)} + \beta' k^{(\mu)}$$

n'était pas nul; si ce cas se présentait, c'est-à-dire si

$$\alpha'^2 + \beta'^2 = 0,$$

on dira que le quotient est *infini*, en appelant, en général, *infini* tout élément de l'Ensemble $\mathcal{E}_\mu$

$$\alpha g^{(\mu)} + \beta k^{(\mu)},$$

pour lequel l'un au moins des deux coefficients α et β est infini ou, ce qui revient au même, pour lequel

$$\alpha^2 + \beta^2$$

est infini.

51. *Conséquence importante.* — La quantité $g^{(\mu)}$, ainsi que je l'ai déjà signalé, se conduit dans le calcul des quantités de l'Ensemble $\mathcal{E}_\mu$ *absolument de la même manière que le nombre* 1 *dans le calcul des quantités réelles ordinaires;* les derniers résultats que nous venons de trouver [en particulier la formule (35), les remarques I et II] montrent que, de son côté, la quantité $k^{(\mu)}$ *se conduit relativement à* $g^{(\mu)}$, dans le calcul des quantités de l'Ensemble $\mathcal{E}_\mu$, *de la même manière que le symbole* $\sqrt{-1}$ *relativement au nombre* 1 *dans le calcul ordinaire des quantités imaginaires,* de telle sorte que l'on peut, sans aucun inconvénient, poser

$$k^{(\mu)} = \sqrt{-1}\, g^{(\mu)}$$

et, par conséquent,

$$\alpha g^{(\mu)} + \beta k^{(\mu)} = (\alpha + \beta\sqrt{-1})\, g^{(\mu)}.$$

Pour que deux quantités a_μ et a'_μ soient égales, il faudra encore et il suffira que l'on ait

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}.$$

De cette façon, *la considération directe du symbole* $k^{(\mu)}$ *se trouve supprimée.*

De là encore cette conclusion importante, que fréquemment il sera inutile de distinguer les deux cas où $\mathcal{E}_\mu$ est à une ou bien à deux dimensions; car on pourra toujours écrire, pour un élément quelconque a_μ de cet Ensemble,

$$a_\mu = \alpha_\mu g^{(\mu)},$$

α_μ étant d'ailleurs réel ou imaginaire.

Ainsi ces trois points

1° α_μ *réel ou imaginaire,*

2° $(g^{(\mu)})^2 = g^{(\mu)}$,

3° $\dfrac{g^{(\mu)}}{g^{(\mu)}} = g^{(\mu)}$

contiennent au fond tout le calcul des éléments de l'Ensemble $\mathcal{E}_\mu$.

52. Enfin observons aussi que la formule $a_\mu = \alpha_\mu g^{(\mu)}$ prouve que $g^{(\mu)}$ ne saurait être nul; car, s'il l'était, il faudrait admettre que l'Ensemble $\mathcal{E}_\mu$ n'existe pas. Les composants de g_0 sont donc tous différents de zéro.

CHAPITRE V.

CALCUL ÉLÉMENTAIRE DES QUANTITÉS COMPLEXES DE L'ENSEMBLE $\mathcal{E}$, AU MOYEN DE LEURS COMPOSANTS.

---

§ I.

Addition, soustraction, multiplication, diviseurs de zéro.

53. Soient $a, b, \ldots$ diverses quantités complexes de l'Ensemble $\mathcal{E}$ et $a_1, a_2, \ldots, a_r$; $b_1, b_2, \ldots, b_r, \ldots$. leurs composants respectifs.

Addition et soustraction. — On a immédiatement

$$a + b = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_r + b_r),$$
$$a - b = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots + (a_r - b_r),$$

et il est clair, du reste, que les quantités

$$(a_1 \pm b_1), \quad (a_2 \pm b_2), \quad \ldots, \quad (a_r \pm b_r)$$

appartiennent respectivement aux Ensembles $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_r$, comme on peut le voir, par exemple, en se reportant aux polynômes adjoints.

54. *Multiplication.* — La seconde propriété des composants donne également de suite

$$ab = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_r b_r.$$

$a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_r b_r$ appartiennent respectivement aux Ensembles $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_r$ et ne peuvent être nuls que si l'un des composants facteurs est nul. Pour calculer ces produits partiels, on aura recours, suivant les cas, à l'une des formules (33) ou (36).

55. *Diviseurs de zéro.* — Considérons le produit ab. Il ne peut être nul que si chacun de ses composants est nul (première propriété des composants); si donc on a

$$ab = 0,$$

on a aussi

$$a_1 b_1 = 0, \qquad a_2 b_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad a_r b_r = 0;$$

d'où

$$a_1 \text{ ou } b_1 = 0, \qquad a_2 \text{ ou } b_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad a_r \text{ ou } b_r = 0;$$

autrement dit : pour qu'un produit de deux facteurs soit nul, il faut et il suffit qu'à tous les composants différents de zéro, de l'un des facteurs, correspondent dans l'autre facteur des composants nuls.

Par suite, si l'on suppose que l'un au moins des composants de a est nul, il sera toujours possible de trouver une autre quantité complexe b, différente de zéro et telle que le produit ab soit nul.

Par exemple, si a_i est un des *composants nuls* de a, on pourra prendre

$$b = b_i \quad (b_i \neq 0).$$

a et b seront dans ce cas des *diviseurs de zéro*. On se rappelle, en effet, qu'un diviseur de zéro a pour propriété fondamentale de donner un produit nul, quand on le multiplie par certaines autres quantités complexes, bien que ni lui, ni ces autres quantités ne soient nulles.

D'après ce qu'on vient de voir, *un diviseur de zéro est une quantité complexe dont l'un au moins des composants est nul.*

Je n'ai pas besoin de faire observer que l'on déduit facilement de là les propriétés des diviseurs de zéro, déjà établies plus haut de deux manières, savoir :

1° Que le produit d'un diviseur de zéro par une quantité complexe quelconque de l'Ensemble $\mathcal{E}$ est lui-même un diviseur de zéro;

2° Que, si le produit ab est nul et que a soit un diviseur de zéro autre que zéro, b est lui-même un diviseur de zéro.

§ II.

La division.

56. Pour effectuer la division de a par b, nous avons à évaluer les composants $c_1, c_2, \ldots, c_r$ d'une troisième quantité complexe, telle que

$$\frac{a}{b} = c \qquad \text{ou} \qquad a = bc.$$

1° $b \neq \Theta$. — De l'égalité

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_r = (b_1 + b_2 + \ldots + b_r)(c_1 + c_2 + \ldots + c_r),$$

qui entraîne

$$a_1 = b_1 c_1, \qquad a_2 = b_2 c_2, \qquad \ldots, \qquad a_r = b_r c_r,$$

et parce qu'aucun des composants

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_r$$

n'est nul, on tire

$$c = c_1 + c_2 + \ldots + c_r = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_r}{b_r}.$$

Le calcul des quotients partiels se fait au moyen des formules (34) ou (37), selon les cas.

2° $b = \Theta$. — Alors, parmi les composants de b, il y en a un au moins et peut-être plusieurs qui sont nuls; nous supposerons ceux-ci écrits les premiers, de sorte que l'on ait

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_i = 0,$$

mais

$$b_{i+1} \neq 0, \qquad b_{i+2} \neq 0, \qquad \ldots, \qquad b_r \neq 0.$$

Pour que la division soit possible, les i premiers composants de a, c'est-à-dire $a_1, a_2, \ldots, a_i$ devront être nuls. Si ces i conditions sont remplies, le quotient $\frac{a}{b}$ aura une infinité de valeurs, car toute quantité

$$c = c_1 + c_2 + \ldots + c_i + c_{i+1} + \ldots + c_r,$$

dans laquelle on aura pris arbitrairement les composants $c_1, c_2, \ldots, c_i$, et déterminé les autres par les égalités

$$c_{i+1} = \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}, \qquad c_{i+2} = \frac{a_{i+2}}{b_{i+2}}, \qquad \ldots, \qquad c_r = \frac{a_r}{b_r},$$

sera telle que

$$a = bc.$$

57. Lorsque les composants $a_1, a_2, \ldots, a_i$ ne sont pas tous nuls, la division est, à proprement parler, *impossible*. Néanmoins, on peut encore dire que le quotient *existe* et qu'il est *infini*, en conservant la formule

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_r}{b_r} \tag{38}$$

et remarquant que, parmi les i premiers composants du deuxième membre, quelques-uns sont *infinis*. Cela suppose la définition suivante :

Une quantité complexe a est dite infinie, lorsque l'un au moins de ses composants est infini.

D'après la définition donnée plus haut d'*un composant infini*, cette nouvelle définition est toute naturelle. Il est également permis d'adopter, dans tous les cas, la formule (38), et l'on y est forcément amené, en considérant $\frac{a_i}{b_i}$ pour $b_i = 0$, comme la limite de $\frac{a_i}{b_i}$ pour b_i d'abord différent de zéro et tendant ensuite vers zéro.

58. L'introduction des quantités complexes infinies nécessite quelques distinctions importantes.

Soit

$$a = a_1 + a_2 + \ldots + a_r$$

une quantité complexe. J'emploierai les dénominations suivantes :

a est une quantité complexe ORDINAIRE, lorsque, parmi ses composants, il n'y en a *aucun* qui soit *nul* ou *infini*.

a est un diviseur de zéro ORDINAIRE, lorsque, parmi ses composants, *un au moins est nul,* et qu'*aucun n'est infini*.

a est un infini ORDINAIRE, lorsque, parmi ses composants, *un au moins est infini* et qu'*aucun n'est nul.*

a est un infini MIXTE, ou encore *un diviseur de zéro* MIXTE, lorsque, parmi ses composants, *un au moins est nul* et *un au moins est infini*.

Quand j'emploierai les mots *quantités complexes, diviseur de zéro, infini,* sans spécifier davantage, ce sera toujours en sous-entendant après ces termes le mot *ordinaire*.

59. J'adopterai encore cette autre définition :

L'inverse d'une quantité a est la quantité

$$b = \frac{g_0}{a}.$$

En écrivant

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_r = \frac{g'}{a_1} + \frac{g''}{a_2} + \ldots + \frac{g^{(r)}}{a_r},$$

on arrive sans peine à se convaincre de l'exactitude des propositions que voici :

1° *Les composants de l'inverse d'une quantité complexe sont les inverses des composants de cette quantité ;*

2° *L'inverse d'une quantité complexe ordinaire est une quantité complexe ordinaire ;*

3° *L'inverse d'un diviseur de zéro ordinaire est un infini ordinaire, et* RÉCIPROQUEMENT ;

4° *L'inverse d'un infini mixte ou diviseur de zéro mixte est un infini mixte ou diviseur de zéro mixte.*

§ III.

Le théorème général.

60. Les calculs faits précédemment conduisent immédiatement au théorème général que voici :

La quantité complexe a de l'Ensemble $\mathcal{E}$ étant formée avec d'autres quantités b, c, d, ... du même Ensemble, à l'aide d'un certain nombre des opérations élémentaires : addition, soustraction, multiplication, division, s'obtiendra en calculant séparément chacun de ses composants.

Le composant a_μ se déduira des composants b_μ, c_μ, d_μ, ... en effectuant identiquement les mêmes opérations élémentaires qu'on doit exécuter sur b, c, d, ... pour avoir a.

Enfin, dans chaque Ensemble partiel $\mathcal{E}_\mu$, les calculs sont tout à fait analogues à ceux du calcul des quantités ordinaires, réelles ou imaginaires.

61. *Application.* — Ce théorème est évidemment susceptible d'un grand nombre d'applications : par exemple, si

$$\begin{matrix} a^{(1)}, & a^{(2)}, & \ldots, & a^{(p)}, \\ b^{(1)}, & b^{(2)}, & \ldots, & b^{(p)}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ l^{(1)}, & l^{(2)}, & \ldots, & l^{(p)} \end{matrix}$$

sont p^2 quantités complexes de l'Ensemble $\mathcal{E}$ et que l'on désigne leurs *composants* respectifs au moyen d'indices inférieurs, on aura, sans calcul,

$$\begin{vmatrix} a^{(1)} & a^{(2)} & \dots & a^{(p)} \\ b^{(1)} & b^{(2)} & \dots & b^{(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l^{(1)} & l^{(2)} & \dots & l^{(p)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & \dots & a_1^{(p)} \\ b_1^{(1)} & b_1^{(2)} & \dots & b_1^{(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_1^{(1)} & l_1^{(2)} & \dots & l_1^{(p)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2^{(1)} & a_2^{(2)} & \dots & a_2^{(p)} \\ b_2^{(1)} & a_2^{(2)} & \dots & b_2^{(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_2^{(1)} & l_2^{(2)} & \dots & l_2^{(p)} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_r^{(1)} & a_r^{(2)} & \dots & a_r^{(p)} \\ b_r^{(1)} & b_r^{(2)} & \dots & b_r^{(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_r^{(1)} & l_r^{(2)} & \dots & l_r^{(p)} \end{vmatrix};$$

formule que l'on vérifierait, du reste facilement, en développant le déterminant proposé et appliquant la deuxième propriété des composants.

Cette formule peut s'écrire en employant une notation évidente

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_r,$$

et les déterminants $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_r$ sont les *composants* du déterminant Δ : on le voit en remarquant que Δ_μ est une somme d'éléments appartenant à l'Ensemble $\mathcal{E}_\mu$.

Si Δ' est un deuxième déterminant (du même ordre ou d'ordre différent, peu importe) formé avec des quantités appartenant toutes à l'Ensemble $\mathcal{E}$ et, si $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_r$ sont ses composants, on en conclut

$$\Delta\Delta' = \Delta_1\Delta'_1 + \Delta_2\Delta'_2 + \dots + \Delta_r\Delta'_r,$$

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\Delta_1}{\Delta'_1} + \frac{\Delta_2}{\Delta'_2} + \dots + \frac{\Delta_r}{\Delta'_r}.$$

On ramène facilement les *composants* de Δ à la forme ordinaire. Considérons Δ_μ.

Soient

$$a_\mu^{(1)} = \alpha_\mu^{(1)} g^{(\mu)}, \qquad a_\mu^{(2)} = \alpha_\mu^{(2)} g^{(\mu)}, \qquad \dots,$$
$$b_\mu^{(1)} = \beta_\mu^{(1)} g^{(\mu)}, \qquad b_\mu^{(2)} = \beta_\mu^{(2)} g^{(\mu)}, \qquad \dots.$$

Si $\mathcal{E}_\mu$ est une *multiplicité à* 1 *dimension*, les lettres grecques qui figurent dans ces expressions seront des quantités *réelles* et, si $\mathcal{E}_\mu$ est une multiplicité à 2 dimensions, ce seront des quantités *imaginaires* (qui pourront d'ailleurs se réduire à des quantités réelles).

Alors, en appelant D_μ le déterminant déduit de Δ_μ, en y remplaçant

$$a_\mu^{(1)}, \quad a_\mu^{(2)}, \quad \dots, \quad b_\mu^{(1)}, \quad \dots$$

respectivement par

$$\alpha_\mu^{(1)}, \quad \alpha_\mu^{(2)}, \quad \ldots, \quad \beta_\mu^{(1)}, \quad \ldots,$$

on aura

$$\Delta_\mu = g^{(\mu)} D_\mu.$$

Donc

$$\Delta = g' D_1 + g'' D_2 + \ldots + g^{(r)} D_r.$$

DEUXIÈME PARTIE.

AVERTISSEMENT.

62. *But de la deuxième Partie.* — Le théorème général auquel nous sommes arrivés dans le dernier Chapitre de la I[re] Partie entraîne cette conséquence que le calcul des nouvelles quantités se déduira toujours avec facilité du calcul ordinaire, et, à cet égard, le résultat obtenu est complet, mais il y a un autre aspect de la question : les théorèmes du calcul algébrique ordinaire, suffisants pour effectuer les calculs dans chaque Ensemble composant $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_r$, sont-ils vrais sans modification aucune pour l'Ensemble $\mathcal{E}$ lui-même? La réponse à cette question se trouvera, pour une partie au moins, dans cette deuxième Section de mon travail.

Au premier abord, certains résultats obtenus par cette voie semblent être opposés aux *théorèmes algébriques ordinaires;* mais, en les examinant de plus près, on s'aperçoit bien vite qu'ils en sont de véritables *généralisations* et qu'ils admettent bien, comme cas particuliers, ces théorèmes eux-mêmes.

Dans cet ordre d'idées, je signalerai, par exemple, ce qui a trait aux racines égales des équations algébriques (n° 79).

Un autre point assez important, ce me semble, recevra aussi quelque éclaircissement dans le courant de l'étude que je vais faire; je parle de la possibilité d'opérer dans certains cas sur les quantités de l'Ensemble $\mathcal{E}$, sans les exprimer au moyen de leurs composants, et de les traiter alors comme des quantités ordinaires; cela n'étant pas toujours possible, il m'a paru utile d'en donner quelques exemples dans ce qui suit. On les reconnaîtra sans peine ([1]).

63. *Remarques préliminaires.* — 1° Dans tous les calculs que nous allons faire, nous devons évidemment supposer que tous les termes et éléments qui y entrent appartiennent au même Ensemble $\mathcal{E}$; car nous ne pouvons pas imaginer de relations d'égalité entre des objets de nature différente : par exemple, l'équation $ax + \alpha = 0$, où α serait un pur nombre, tandis que a serait une quantité complexe appartenant à l'Ensemble $\mathcal{E}$, n'a absolument aucune signification.

2° Il y a néanmoins un certain sens, dans lequel l'introduction de quantités purement numériques n'est point absurde. Un exemple fera comprendre ma pensée : soit ab un produit; pour qu'il appartienne à l'Ensemble $\mathcal{E}$, il suffit que l'un des deux facteurs appartienne lui-même à cet Ensemble, l'autre pouvant aussi lui appartenir, ou bien encore étant simplement un *nombre réel.* Ce dernier cas, d'ailleurs, se ramène facilement à l'autre; car, si a est un nombre réel et que b appartienne à l'Ensemble $\mathcal{E}$, on peut écrire

$$b = bg_0,$$
$$ab = abg_0 = ag_0 b;$$

ag_0 appartient alors à l'Ensemble $\mathcal{E}$. *En vertu de cette remarque, on pourra toujours, dans les raisonnements, supposer que les deux facteurs a et b appartiennent à l'Ensemble* $\mathcal{E}$.

On peut aller plus loin dans certains cas et admettre d'une façon analogue les constantes imaginaires : cela aura lieu d'abord pour chaque Ensemble partiel, qui sera une multiplicité à deux dimensions; et ensuite aussi pour l'Ensemble $\mathcal{E}$ lui-même, si tous les Ensembles composants de celui-ci sont à deux dimensions.

3° Bien que plusieurs des points que je vais traiter n'excluent pas les Ensembles composants à une *seule* dimension, néanmoins, sauf avis

([1]) *Voir,* par exemple, les fractions rationnelles nos 82 et 83.

contraire, je supposerai généralement qu'ils en ont *tous* deux. Cette hypothèse sera bientôt justifiée (nº 68).

CHAPITRE I.

LES POLYNOMES ENTIERS ET LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

§ I.

La division de deux polynômes.

64. Soient

$$l' x^{p'} + k' x^{p'-1} + \dots$$

et

$$l x^p + k x^{p-1} + \dots$$

deux polynômes dont tous les coefficients et la variable x appartiennent à l'Ensemble $\mathcal{E}$ (*voir* nº 63, 2º).

Supposons que l'on veuille effectuer la division du premier polynôme par le second, et, en outre, admettons que l'on ait

$$p' > p \qquad \text{et aussi} \qquad l \neq \Theta.$$

Alors (nº 60) on devra séparer dans chaque polynôme les divers composants, puis effectuer la division des composants relatifs aux Ensembles correspondants, ce qui donnera les composants du quotient et du reste relatifs au même Ensemble partiel. On aura ainsi à diviser

$$l'_i x_i^{p'} + k'_i x_i^{p'-1} + \dots$$

par

$$l_i x_i^p + k_i x_i^{p-1} + \dots.$$

En posant

$$\begin{array}{lll} l'_i = \lambda'_i g^{(i)}, & k'_i = \varkappa'_i g^{(i)}, & \dots, \\ l_i = \lambda_i g^{(i)}, & \dots\dots\dots\dots, & \dots, \\ x_i = \xi_i g^{(i)}, & \dots\dots\dots\dots, & \dots \end{array}$$

(les lettres grecques représentent des quantités réelles ou imaginaires), le quotient sera

$$\frac{(\lambda'_i \xi_i^{p'} + \varkappa'_i \xi_i^{p'-1} + \ldots) g^{(i)}}{(\lambda_i \xi_i^p + \varkappa_i \xi_i^{p-1} + \ldots) g^{(i)}} = g^{(i)} \frac{\lambda'_i \xi_i^{p'} + \varkappa'_i \xi_i^{p'-1} + \ldots}{\lambda_i \xi_i^p + \varkappa_i \xi_i^{p-1} + \ldots} = g^{(i)} \left(\frac{\lambda'_i}{\lambda_i} \xi_i^{p'-p} + \ldots \right).$$

Le quotient obtenu est unique, et il en est de même du reste, s'il y en a un. La somme de tous les quotients partiels sera donc unique également, aussi bien que celle des restes, et l'on aura

$$\frac{l' x^{p'} + \ldots}{l x^p + \ldots} = g' \left(\frac{\lambda'_1}{\lambda_1} \xi_1^{p-p'} + \ldots \right) + g'' \left(\frac{\lambda'_2}{\lambda_2} \xi_2^{p'-p} + \ldots \right) + \ldots + g^{(r)} \left(\frac{\lambda'_r}{\lambda_r} \xi_r^{p'-p} + \ldots \right).$$

Or le deuxième membre est visiblement égal à

$$\frac{l'}{l} x^{p'-p} + \ldots,$$

et l'on voit qu'on eût obtenu directement le quotient, en effectuant la division comme si les polynômes eussent été des polynômes dépendant de quantités réelles ou imaginaires.

Cette remarque permet donc de simplifier le calcul.

§ II.

Nombre des solutions des équations algébriques en quantités complexes.

65. Soit l'équation

$$(39) \qquad F(x) = a + bx + cx^2 + \ldots + l x^p = 0;$$

$a, b, \ldots, l$ peuvent être considérés comme appartenant à l'Ensemble $\mathcal{E}$ (n° 63, 2°).

Une décomposition de chaque élément de l'Ensemble $\mathcal{E}$ figurant dans l'équation (39), en éléments des Ensembles $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_r$, et l'application des règles de calcul données ramènent la résolution de cette équation à celle des r équations [1]

$$\begin{aligned}
&a_1 + b_1 x_1 + c_1 x_1^2 + \ldots + l_1 x_1^p = 0,\\
&a_2 + b_2 x_2 + c_2 x_2^2 + \ldots + l_2 x_2^p = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&a_r + b_r x_r + c_r x_r^2 + \ldots + l_r x_r^p = 0;
\end{aligned}$$

ou bien, en écrivant respectivement

$$\alpha_i g^{(i)}, \quad \beta_i g^{(i)}, \quad \ldots, \quad \lambda_i g^{(i)} \quad \text{et} \quad \xi_i g^{(i)}$$

au lieu de

$$a_i, \quad b_i, \quad \ldots, \quad l_i \quad \text{et} \quad x_i,$$

on aura, pour l'équation relative à l'Ensemble $\mathcal{E}_i$,

$$g^{(i)}(\alpha_i + \beta_i \xi_i + \gamma_i \xi_i^2 + \ldots + \lambda_i \xi_i^p) = 0.$$

Il en sera de même pour les autres Ensembles composants. Ces équations entraînent les r suivantes :

$$(40)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\alpha_1 + \beta_1 \xi_1 + \gamma_1 \xi_1^2 + \ldots + \lambda_1 \xi_1^p = 0,\\
&\alpha_2 + \beta_2 \xi_2 + \gamma_2 \xi_2^2 + \ldots + \lambda_2 \xi_2^p = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\alpha_r + \beta_r \xi_r + \gamma_r \xi_r^2 + \ldots + \lambda_r \xi_r^p = 0,
\end{aligned}\right.$$

qui sont des équations algébriques ordinaires. Ces équations sont parfaitement indépendantes les unes des autres, de sorte que l'on peut assembler d'une manière quelconque leurs racines pour former les composants de l'inconnue x.

66. Une question importante s'impose donc maintenant : *Quel est le nombre des racines de l'équation* (39) ?

La réponse à cette question est liée à la nature des coefficients a, b, ..., l de l'équation et encore au nombre des dimensions des Ensembles composants. Il s'agit uniquement de savoir si toutes les solutions des équations (40) indistinctement peuvent être prises; et si elles ne peuvent pas toutes l'être, il faut distinguer le nombre de solutions *admissibles* pour chacune des équations (40). Si

$$n_1, \quad n_2, \quad \ldots, \quad n_r$$

[1] Ce mode de résolution est indiqué par M. Weierstrass, dans son Mémoire, p. 407.

désignent ces nombres pour celles d'entre elles qui sont respectivement affectées du même indice, le nombre des solutions de l'équation (39) sera

$$N = n_1 n_2 \ldots n_r.$$

67. Premier cas : $l \neq \Theta$. — Alors (n° 55)

$$\lambda_1 \neq 0, \qquad \lambda_2 \neq 0, \qquad \ldots, \qquad \lambda_r \neq 0.$$

Les r équations (40) sont du degré p exactement.

Première catégorie. — Parmi les Ensembles $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, ..., $\mathcal{E}_r$, il n'y en a aucun qui soit une multiplicité à une seule dimension. Alors, comme chacune des équations (40) a exactement p racines réelles ou imaginaires et que les racines, tant imaginaires que réelles, sont admissibles pour des multiplicités à deux dimensions, on a

$$n_1 = n_2 = \ldots = n_r = p.$$
$$N = p^r.$$

Dans ce cas, le polynôme fondamental $f(\xi)$ du Chapitre III de la Ire Partie (nos 36 et suivants), doit avoir toutes ses racines imaginaires conjuguées; il est donc de degré pair, et l'on a

$$r = \tfrac{1}{2} n;$$

ainsi

$$N = p^{\frac{1}{2}n} \text{ (1)}.$$

Remarque. — Parmi ces N solutions, il peut y en avoir d'égales (*voir* plus loin, § IV).

Deuxième catégorie. — Parmi les Ensembles $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, ..., $\mathcal{E}_r$, il y en a qui sont des multiplicités à une seule dimension. Soit, par exemple, $\mathcal{E}_1$ un tel Ensemble. Parmi les racines de l'équation

$$\alpha_1 + \beta_1 \xi_1 + \gamma_1 \xi_1^2 + \ldots + \lambda_1 \xi_1^p = 0,$$

dont, au reste, tous les coefficients sont réels, il faudra rejeter toutes les racines imaginaires; dès lors, p n'est plus qu'un maximum, que

---

(1) Ce nombre est donné sans démonstration par M. Weierstrass dans son Mémoire, p. 410. L'auteur se place du reste dans le cas de $l \neq \Theta$.

peut atteindre ou ne pas atteindre le nombre n_1 des *racines convenables;* et ce nombre dépend complètement de la particularisation des composants $a_1, b_1, \ldots, l_1$, des coefficients $a, b, \ldots, l$ de l'équation (39); il peut même arriver, si p est pair, que $n_1 = 0$ et, par suite aussi, $N = 0$.

Dans tous les cas,

$$N = p^r$$

est le nombre maximum des racines de l'équation (39).

68. *Remarque I.* — En Algèbre, l'admission des racines imaginaires permet d'énoncer ce théorème général : *que toute équation du $p^{\text{ième}}$ degré a exactement p racines.* Si donc on veut poursuivre rigoureusement l'analogie du nouveau calcul avec l'ancien, on devra rejeter les Ensembles $\mathcal{E}$, pour lesquels le polynôme fondamental $f(\xi)$ ne répondra pas à la première catégorie; et c'est là une des raisons qui justifient l'hypothèse faite au n° 63, 3°, que tous les Ensembles composants sont à deux dimensions. Cette hypothèse admise, on a, dans la formule

$$N = p^{\frac{1}{2}n},$$

la généralisation véritable du théorème rappelé ici. En effet, pour $n = 2$, on retrouve la formule

$$N = p \quad (^1).$$

69. *Remarque II.* — Ayant toujours $l \neq \Theta$, si en même temps $a \neq \Theta$, aucune des équations (40) n'admettra de racines nulles, et l'équation proposée n'aura pas, pour solution, un *diviseur de zéro*. Les solutions seront donc toutes des *quantités complexes* ORDINAIRES (n° 58).

Si $l \neq \Theta$ et $a = \Theta$, l'une au moins des équations (40) admettra au moins une racine nulle. Soient

$$n'_1, \quad n'_2, \quad \ldots, \quad n'_r$$

les nombres de racines nulles que possèdent respectivement les équa-

---

(1) D'après le procédé même qui a servi à trouver la formule générale, cela devait être évidemment, et par conséquent ce résultat n'a nullement la prétention d'être une démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques, mais c'est une simple vérification.

tions (40) (ces nombres pouvant d'ailleurs être nuls), le nombre des racines de l'équation proposée, qui seront des *quantités complexes* ORDINAIRES, sera

$$(p - n'_1)(p - n'_2) \ldots (p - n'_r),$$

et, par suite, cette équation admettra comme solutions

$$p^r - (p - n'_1)(p - n'_2) \ldots (p - n'_r)$$

diviseurs de zéro ORDINAIRES.

70. DEUXIÈME CAS : $l = \Theta$. — On supposera tout d'abord $a \neq \Theta$. Alors, en admettant comme racines les quantités que j'ai nommées *des infinis ordinaires* (n° 58) et passant de l'équation (40) à l'équation

$$\mathrm{F}\left(\frac{g_0}{x}\right),$$

par l'application des propositions indiquées (n° 59) et de la remarque II (n° 69), on trouvera encore

$$\mathrm{N} = p^r = p^{\frac{1}{2}n}$$

racines dont

$$p^r - (p - n''_1)(p - n''_2) \ldots (p - n''_r)$$

sont des *infinis* ORDINAIRES.

[n''_1, n''_2, ..., n''_r sont des nombres analogues aux nombres n'_1, n'_2, ..., n'_r du numéro précédent, et correspondent aux racines nulles des équations aux inverses des équations (40)].

$l = \Theta$, $a = \Theta$, *mais l'un au moins des autres coefficients diffèrent d'un diviseur de zéro*. — On pourra continuer d'admettre que chaque équation (40) a p racines, dont un certain nombre sont nulles et d'autres infinies (¹). On pourra dire alors que l'équation (39) admet des solutions des quatre espèces : *quantités complexes ordinaires, diviseurs de zéro ordinaires, infinis ordinaires, infinis mixtes* (n° 58). Le lecteur comptera facilement le nombre des racines de chacune de ces espèces ; le nombre total sera toujours

$$\mathrm{N} = p^r.$$

(¹) Cette manière de procéder se justifie de la même façon que dans l'Algèbre ordinaire, en considérant les coefficients diviseurs de zéro comme des limites de *quantités complexes ordinaires variables*.

71. Dernier cas : *Tous les coefficients sont des diviseurs de zéro.* — Si tous les coefficients étaient nuls rigoureusement, il est clair que l'inconnue x *serait absolument indéterminée.* J'exclus cette supposition.

Si, parmi les Ensembles composants, il ne s'en rencontre aucun pour lequel tous les composants des coefficients, qui lui appartiennent, soient simultanément nuls, on obtient les mêmes résultats que dans le cas examiné immédiatement avant celui-ci.

Si, au contraire, pour l'Ensemble $\mathcal{E}_\mu$, on a

$$a_\mu = b_\mu = \ldots = l_\mu = 0,$$

ξ_μ n'est plus déterminé par les équations (40), puisque l'équation d'indice μ a tous ses coefficients nuls. Il en résulte que l'on peut donner au composant x_μ de l'inconnue x telle valeur que l'on voudra, les autres composants de x étant d'ailleurs *parfaitement déterminés*, s'ils n'appartiennent pas à des Ensembles analogues à $\mathcal{E}_\mu$. *En conséquence, l'équation* (39) *est vérifiée, dans ce cas, par une infinité de racines.*

Ce cas est du reste le seul où l'équation n'a pas exactement $N = p^{\frac{1}{2}n}$ racines ; mais il est *très remarquable* que l'équation (39) puisse avoir une infinité de racines, sans que tous ses coefficients soient nuls.

Un peu d'attention permet d'énoncer ainsi ce théorème :

Pour que l'équation $F(x) = 0$ *ait une infinité de racines, il faut et il suffit que ses coefficients soient tous des multiples d'un même diviseur de zéro* [1].

Pour fixer les idées, on peut supposer que ce sont les Ensembles $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_i$ pour lesquels tous les composants des coefficients de l'équation sont nuls, les autres ne rentrant pas dans ce cas.

Maintenant prenons un coefficient quelconque, a par exemple, on a

$$\begin{aligned} a &= a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_r \\ &= (g^{(i+1)} + g^{(i+2)} + \ldots + g^{(r)})(a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_i + a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_r), \end{aligned}$$

$a'_1, a'_2, \ldots, a'_i$ étant des éléments des Ensembles respectifs $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_i$, *absolument quelconques.*

---

[1] Ce résultat si intéressant est dû à M. Weierstrass (*loc. cit.*, p. 408). C'est le dernier des trois points que, dans l'Introduction, j'ai annoncés comme ne m'appartenant pas.

Opérons de même sur les autres coefficients, nous voyons alors qu'ils contiennent tous en facteur le diviseur de zéro

$$g^{(i+1)} + g^{(i+2)} + \ldots + g^{(r)}.$$

La condition énoncée dans le théorème est donc nécessaire, et, d'autre part, on voit immédiatement qu'elle est suffisante.

72. *Remarque importante.* — Bien que l'équation admette alors une infinité de racines, *le polynôme* $F(x)$ *n'est pas nul pour* TOUTE *valeur de* x; car, toutes les racines en nombre illimité, qui vérifient $F(x) = 0$, ont certains composants absolument déterminés ; de sorte que les théorèmes suivants restent rigoureusement exacts :

I. *Un polynôme* $F(x)$ *ne peut s'annuler pour* TOUTE *valeur complexe de* x, *que si tous ses coefficients sont nuls.*

II. *Deux polynômes égaux pour* TOUTE *valeur complexe de* x *ont les coefficients des mêmes puissances de* x *égaux entre eux deux à deux.*

§ III.

La décomposition de $F(x)$ en facteurs linéaires.

73. *La division par* $x - x'$. — Je suppose $l \neq 0$. Soit

$$x' = x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_r = \xi'_1 g' + \xi'_2 g'' + \ldots + \xi'_r g^{(r)}$$

une racine de l'équation

$$(39) \qquad F(x) = 0.$$

Je recherche quel est, sur cette équation, l'effet de la division de $F(x)$ par $x - x'$. Effectuer la division par $x - x'$ revient à diviser chaque composant de $F(x)$ par le composant correspondant de $x - x'$; on devra, par exemple, diviser

$$a_\mu + b_\mu x_\mu + \ldots + l_\mu x_\mu^p \quad \text{par} \quad x_\mu - x'_\mu$$

ou

$$\alpha_\mu + \beta_\mu \xi_\mu + \ldots + \lambda_\mu \xi_\mu^p \quad \text{par} \quad \xi_\mu - \xi'_\mu ;$$

la division sera toujours possible dès que x' désignera, comme on le suppose, une racine de l'équation (39). On ne sera même pas arrêté quand certains composants de x' seront nuls ; car si, par exemple, $x'_\mu = 0$, c'est que, dans les équations

$$a_\mu + b_\mu x_\mu + \ldots + l_\mu x_\mu^p = 0,$$
$$\alpha_\mu + \beta_\mu \xi_\mu + \ldots + \lambda_\mu \xi_\mu^p = 0,$$

on a

$$a_\mu = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_\mu = 0 ;$$

on peut donc les diviser la première par x_μ et la deuxième par ξ_μ.

La division effectuée, chacune des équations (40) aura son degré réduit d'une *unité :* et les racines de la proposée correspondant aux racines restantes des équations (40) ne seront plus qu'au nombre de

$$(p-1)^r ;$$

ainsi *l'opération faite a enlevé*

$$p^r - (p-1)^r$$

racines.

Si $r = 1$ ($n = 2$), une seule racine a disparu : le résultat de l'Algèbre ordinaire n'est pas *contredit*, mais *généralisé.*

74. *Des systèmes fondamentaux de racines.* — Soit

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} x'_1, & x''_1, & \ldots, & x_1^{(p)}, \\ x'_2, & x''_2, & \ldots, & x_2^{(p)}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ x'_r, & x''_r, & \ldots, & x_r^{(p)} \end{cases}$$

le système complet de tous les composants des valeurs de x qui satisfont à l'équation (39). J'appelle *système fondamental de racines tout système de p racines où chaque composant* (d'indices $^{(i)}_{j}$ quelconques) *figure une fois et une seule fois.* Un système fondamental épuise donc les pr composants. Pour évaluer le *nombre des systèmes fondamentaux distincts*, je suppose d'abord que tous les composants d'une même ligne du tableau (A) ont des valeurs différentes ; alors, puisqu'on peut toujours imaginer qu'on écrive les composants d'une même racine dans l'ordre croissant des r indices inférieurs, on obtiendra précisément par les divers arrangements des indices supérieurs r à r

$$\varpi = p(p-1)\ldots(p-r+1)$$

racines *distinctes*, pouvant servir, si on les groupe p à p d'une manière quelconque, à former des systèmes fondamentaux tous distincts. Leur nombre est donc dans ce cas exactement

$$\sigma = \frac{\varpi(\varpi-1)\ldots(\varpi-p+1)}{1.2\ldots p}.$$

Si un composant d'une ligne du tableau (A) devient égal à un composant d'une autre ligne, il n'y a pas de réduction dans le nombre des systèmes fondamentaux, parce que les éléments de lignes différentes étant relatifs à des Ensembles différents ne sont pas échangeables entre eux.

Au contraire, si k_{i1} termes de la $i^{\text{ième}}$ ligne deviennent égaux, le nombre des systèmes fondamentaux distincts se réduira à

$$\frac{\sigma}{1.2\ldots k_{i1}}.$$

Car, ayant d'abord écrit tous les σ systèmes fondamentaux comme si les k_{i1} termes en question étaient différents, si l'on vient à prendre égaux ces derniers, et qu'on se rappelle aussi qu'un système fondamental épuise tous les composants, on voit que chacun des systèmes est écrit autant de fois qu'il y a de permutations des k_{i1} termes égaux.

D'une manière générale, désignant par

$$k_{i1}, \quad k_{i2}, \quad \ldots \quad k_{ij_i}$$

les divers nombres des composants de la ligne i qui deviennent respectivement égaux entre eux, on aura dans tous les cas pour le nombre exact des systèmes fondamentaux distincts

$$S = \frac{\sigma}{k_{11}!\,k_{12}!\ldots k_{1j_1}!\,k_{21}!\ldots k_{2j_2}!\ldots k_{rj_r}!}.$$

75. Soit maintenant

$$\begin{aligned}
x' &= x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_r,\\
x'' &= x''_1 + x''_2 + \ldots + x''_r,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x^{(p)} &= x^{(p)}_1 + x^{(p)}_2 + \ldots + x^{(p)}_r
\end{aligned}$$

un *système fondamental quelconque de racines*, on a identiquement

$$(41) \qquad F(x) = l(x - x')(x - x'')\ldots(x - x^{(p)});$$

car on a successivement

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{i=1}^{i=r} (a_i + b_i x_i + \ldots + l_i x_i^p) \\ &= \sum_{i=1}^{i=r} (\alpha_i + \beta_i \xi_i + \ldots + \lambda_i \xi_i^p)\, g^{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^{i=r} [\lambda_i(\xi_i - \xi_i')(\xi_i - \xi_i'')\ldots(\xi_i - \xi_i^{(p)})]\, g^{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^{i=r} [\, l_i(x_i - x_i')(x_i - x_i'')\ldots(x_i - x_i^{(p)})] \\ &= l(x - x')(x - x'')\ldots(x - x^{(p)}); \end{aligned}$$

$F(x)$ peut donc se mettre sous la forme (41) de S manières différentes, et cela quelle que soit la quantité complexe x.

76. Corollaire I : *Relations entre les coefficients et les racines.* — Les relations habituelles auront encore lieu entre les coefficients et les p racines $x', x'', \ldots, x^{(p)}$, pourvu que celles-ci forment un système fondamental. Cela résulte immédiatement de la décomposition trouvée (nº 75) et du théorème II (nº 72).

77. Corollaire II. — Comme une racine quelconque de $F(x) = 0$ fait toujours partie de l'un au moins des systèmes fondamentaux distincts, la décomposition des polynômes en produit de facteurs linéaires au moyen d'un système fondamental montre tout de suite que si les équations

$$F(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(x) = 0$$

ont une *racine commune* x', elles admettront le diviseur commun

$$x - x'.$$

Plus généralement, si

$$x', \quad x'', \quad \ldots, \quad x^{(i)}$$

sont i racines faisant partie d'un même système fondamental, tant dans l'équation $F(x) = o$ que dans l'équation $\varphi(x) = o$, les deux polynômes $F(x)$ et $\varphi(x)$ auront le diviseur commun

$$(x - x')(x - x'') \ldots (x - x^{(i)}).$$

§ IV.

Les racines égales.

78. *Nombre des racines égales.* — Écrivons l'ensemble des pr composants trouvés par la résolution des équations (40) :

$$\text{(A)} \qquad \left\{ \begin{array}{llll} x'_1, & x''_1, & \ldots, & x_1^{(p)}, \\ x'_2, & x''_2, & \ldots, & x_2^{(p)}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ x'_r, & x''_r, & \ldots, & x_r^{(p)}. \end{array} \right.$$

Si l'on suppose différents tous ceux qui ont même indice inférieur, il est évident que les p^r racines de l'équation (39) seront également différentes. Supposons toutes ces racines écrites, et puis imaginons maintenant que τ_{r1} des éléments de la dernière ligne deviennent égaux entre eux, les autres éléments de la même ligne ou des autres lignes restant distincts, l'ensemble des racines se partagera en

$$(p - \tau_{r1})p^{r-1}$$

racines inégales et

$$p^{r-1}$$

groupes de τ_{r1} racines : les τ_{r1} racines d'un même groupe étant égales entre elles, mais les groupes différant les uns des autres.

Si τ_{r2} autres éléments de la même ligne deviennent égaux, puis τ_{r3} autres, etc., enfin τ_{rj_r}, on aura

$$(p - \tau_{r1} - \tau_{r2} - \ldots - \tau_{rj_r})p^{r-1}$$

racines inégales :

p^{r-1} groupes distincts de τ_{r1} racines égales entre elles,
p^{r-1} » » » τ_{r2} » »
....,
p^{r-1} » » » τ_{rj_r} » »

Si l'on a soin d'admettre les valeurs de τ_{ri} égales à l'unité, on aura

$$p - \tau_{r1} - \tau_{r2} - \ldots - \tau_{rj_r} = 0,$$

ce qui simplifie le calcul; les groupes restent distincts entre eux.

Le nombre des racines distinctes est en définitive actuellement

$$j_r p^{r-1}.$$

Si maintenant nous opérons de la même manière sur les éléments de la $r - 1^{\text{ième}}$ ligne, en tenant compte des changements déjà survenus dans la $r^{\text{ième}}$, et si

$$\tau_{r-1,1}, \quad \tau_{r-1,2}, \quad \ldots, \quad \tau_{r-1,j_{r-1}}$$

sont les nombres analogues aux nombres

$$\tau_{r1}, \quad \tau_{r2}, \quad \ldots, \quad \tau_{rj_r},$$

avec la condition

$$\tau_{r-1,1} + \tau_{r-1,2} + \ldots + \tau_{r-1,j_{r-1}} = p,$$

les p^{r-1} groupes distincts de τ_{r1} racines égales vont donner lieu à

p^{r-2} groupes distincts de $\tau_{r1}\tau_{r-1,1}$ racines égales,
p^{r-2} » » » $\tau_{r1}\tau_{r-1,2}$ » »
....,
p^{r-2} » » » $\tau_{r1}\tau_{r-1,j_{r-1}}$ » » .

Un fait semblable aura lieu pour les p^{r-1} groupes de τ_{r2} racines égales, etc.

Le nombre des racines distinctes sera alors de

$$j_r j_{r-1} p^{r-2}.$$

Continuant de la sorte et prenant des notations analogues, on arrivera à montrer que les racines de l'équation se partagent finalement en groupes de

$$\tau_{ri_r}\tau_{r-1,i_{r-1}}\tau_{r-2,i_{r-2}}\ldots\tau_{1i_1}$$

racines égales entre elles, les indices recevant de toutes les façons possibles toutes les valeurs dont ils sont susceptibles. Le nombre des racines distinctes sera alors

$$j_r j_{r-1} \ldots j_1,$$

c'est-à-dire *le nombre des racines distinctes de l'équation* (39) *est égal au produit des nombres des racines distinctes des équations* (40).

79. *Recherche des racines égales.* — Considérons le polynôme $F'(x)$ déduit de $F(x)$ par l'application de la règle de dérivation, comme si les coefficients des diverses puissances de x, et x aussi, étaient des quantités ordinaires, $F'(x)$ sera encore pour nous la *dérivée* de $F(x)$. On a

$$F'(x) = b + 2cx + \ldots + plx^{p-1} = \sum_{i=1}^{i=r} g^{(i)}(\beta_i + 2\gamma_i \xi_i + \ldots + p\lambda_i \xi_i^{p-1}).$$

Pour résoudre l'équation $F'(x) = 0$, on devra donc écrire les r équations

$$(42) \qquad \beta_i + 2\gamma_i \xi_i + \ldots + p\lambda_i \xi_i^{p-1} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

et l'on voit de suite que si $F(x) = 0$ a des racines égales, au moins une des équations (40) aura aussi deux ou plusieurs racines égales, et, par suite, cette dernière aura une ou plusieurs racines communes avec l'équation (42) de même indice qu'elle.

Dans tous les cas, cette remarque permettra de trouver les racines égales de la proposée. Toutefois, et *c'est là un fait digne d'attention,* l'existence d'une racine multiple x' dans l'équation proposée n'entraîne nullement l'existence de cette même racine x' pour l'équation dérivée, et d'autre part, cependant, on n'a point là une contradiction du théorème ordinaire de l'Algèbre, comme on va le voir.

Reprenons la considération des *systèmes fondamentaux de racines* (n° 74). Observons que l'équation proposée peut avoir des racines multiples sans qu'il soit possible de trouver un seul *système fondamental* contenant *deux racines égales entre elles;* il suffit, pour que ce cas se présente, que les p valeurs trouvées pour le composant relatif à l'un des Ensembles partiels soient distinctes, tandis que, pour d'autres Ensembles partiels, certaines sont égales.

On reconnaît en même temps que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un système fondamental ayant deux racines égales est que, pour chaque Ensemble composant $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, ..., $\mathcal{E}_r$, on trouve au moins deux valeurs égales des composants de x.*

Il en résulte que chacune des équations (42) doit avoir une racine commune avec l'équation (40) de même indice. Et l'on peut énoncer ce théorème :

Pour qu'il existe un système fondamental de racines de l'équation

$F(x) = 0$ *ayant deux racines égales, il faut et il suffit que l'équation* $F'(x) = 0$ *ait une racine commune avec l'équation* $F(x) = 0$.

Plus généralement, *pour qu'il existe un système fondamental de racines de l'équation* $F(x) = 0$, *ayant exactement* p *racines égales entre elles (tout autre système fondamental étant de plus supposé ne pas admettre cette racine plus de* p *fois), il faut et il suffit qu'il existe également, pour l'équation* $P'(x) = 0$, UN *système fondamental* AU MOINS, *ayant* $p - 1$ *racines égales à cette même racine, et qu'il n'en existe pas l'admettant plus de* $p - 1$ *fois. Si* x' *est cette racine,* $F(x)$ *et* $F'(x)$ *admettent alors le diviseur commun* $(x - x')^{p-1}$.

Ces théorèmes ne contredisent pas ceux de l'Algèbre ordinaire, puisque alors il n'y a jamais qu'un seul système fondamental.

§ V.

De la racine $p^{\text{ième}}$ d'une quantité complexe.

80. Soit

$$a = a_1 + a_2 + \ldots + a_r = \alpha_1 g' + \alpha_2 g'' + \ldots + \alpha_r g^{(r)}.$$

Nous supposons que tous les Ensembles composants sont des multiplicités à deux dimensions, afin de pouvoir admettre des coefficients imaginaires (nº 63, 3º).

Il est clair que

$$(\alpha) \qquad \sqrt[p]{a} = \tau_1 \sqrt[p]{\alpha_1}\, g' + \tau_2 \sqrt[p]{\alpha_2}\, g'' + \ldots + \tau_r \sqrt[p]{\alpha_r}\, g^{(r)}$$

(où $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ sont des racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité qui, du reste, peuvent ne pas différer) est une quantité qui, élevée à la puissance p, reproduit a; car, en appliquant les règles de multiplication que nous connaissons, nous avons

$$\begin{aligned}(\sqrt[p]{a})^p &= (\tau_1 \sqrt[p]{\alpha_1}\, g' + \tau_2 \sqrt[p]{\alpha_2}\, g'' + \ldots + \tau_r \sqrt[p]{\alpha_r}\, g^{(r)})^p \\ &= \tau_1^p \alpha_1 g' + \tau_2^p \alpha_2 g'' + \ldots + \tau_r^p \alpha_r g^{(r)} \\ &= \alpha_1 g' + \alpha_2 g'' + \ldots + \alpha_r g^{(r)}.\end{aligned}$$

Aussi la quantité $\sqrt[p]{a}$, définie par l'égalité (α), sera dite une racine

$p^{\text{ième}}$ de a. On pourra encore, si l'on veut, l'écrire

$$\sqrt[p]{a} = \tau_1 \sqrt[p]{a_1} + \tau_2 \sqrt[p]{a_2} + \ldots + \tau_r \sqrt[p]{a_r}$$

ou même simplement

$$\sqrt[p]{a_1} + \sqrt[p]{a_2} + \ldots + \sqrt[p]{a_r},$$

en se rappelant alors que chaque radical est susceptible de prendre p valeurs.

On voit qu'il y a $p^r = p^{\frac{1}{2}n}$ racines $p^{\text{ièmes}}$ d'une même quantité complexe a.

81. *Remarque.* — Avant de quitter les équations algébriques, sur lesquelles il y a sans doute encore beaucoup à dire, notons qu'on peut se proposer la résolution de ce que j'appellerai *une équation partielle*, c'est-à-dire la recherche des valeurs de x propres à satisfaire à la relation

$$F(x) = \Theta.$$

On voit tout de suite que cette question a de sa nature une infinité de solutions. Néanmoins, toute valeur de x ne répond pas à la question; car, $F(x)$ étant toujours de degré p, il ne peut y avoir plus de p valeurs de x qui rendent nul un composant déterminé de $F(x)$. La question sera d'autant plus déterminée qu'on exigera plus de *composants nuls*.

Par exemple, si l'on veut que le troisième composant de $F(x)$ ainsi que le quatrième soient nuls, ce que l'on pourra écrire

$$F(x) = [\Theta]_{3,4},$$

il n'y aura que p^2 systèmes de valeurs x_3 et x_4 vérifiant cette équation partielle.

CHAPITRE II.

LES FRACTIONS RATIONNELLES.

82. On a vu que, si

$$x', \quad x'', \quad \ldots, \quad x^{(p)}$$

était un système fondamental quelconque de racines de l'équation

$$F(x) = o,$$

on avait identiquement

$$F(x) = l(x - x')(x - x'') \ldots (x - x^{(p)})$$

en supposant $l \neq o$ (ce que nous continuerons à faire).

Considérons maintenant la fraction

$$\frac{f(x)}{F(x)},$$

où $f(x)$ est un polynôme entier de degré quelconque $p' < p$ [1].

Désignons par

$$F_1(x_1), \quad F_2(x_2), \quad \ldots, \quad F_r(x_r)$$

et

$$f_1(x_1), \quad f_2(x_2), \quad \ldots, \quad f_r(x_r)$$

les composants respectifs des deux polynômes ; on a toujours

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f_1(x_1)}{F_1(x_1)} + \frac{f_2(x_2)}{F_2(x_2)} + \ldots + \frac{f_r(x_r)}{F_r(x_r)};$$

en posant

$$f_i(x_i) = \varphi_i(\xi_i) g^{(i)},$$
$$F_i(x_i) = \Phi_i(\xi_i) g^{(i)},$$

---

[1] On peut toujours supposer que l'on est dans ce cas; car, si le degré de $f(x)$ était supérieur ou égal à celui de $F(x)$, une simple division *ordinaire* (n° 64) ramènerait à ce cas, comme dans le calcul algébrique ordinaire.

cette égalité devient

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\varphi_1(\xi_1)}{\Phi_1(\xi_1)} g' + \frac{\varphi_2(\xi_2)}{\Phi_2(\xi_2)} g'' + \ldots + \frac{\varphi_r(\xi_r)}{\Phi_r(\xi_r)} g^{(r)}.$$

D'après l'hypothèse $l \neq 0$ et en admettant qu'aucune des équations

$$\Phi_i(\xi_i) = 0$$

n'a de racines multiples, chacune des fractions rationnelles entrant dans le second membre de l'égalité précédente est décomposable exactement en p fractions simples; on a, par exemple,

$$\frac{\varphi_i(\xi_i)}{\Phi_i(\xi_i)} g^{(i)} = \frac{\mathcal{A}'_i}{\xi_i - \xi'_i} g^{(i)} + \frac{\mathcal{A}''_i}{\xi_i - \xi''_i} g^{(i)} + \ldots + \frac{\mathcal{A}^{(p)}_i}{\xi_i - \xi^{(p)}_i} g^{(i)},$$

et cela d'une seule manière.

Ayant effectué la même opération pour chaque fraction, supposant que le système fondamental (ce qui est permis) soit

$$x' = \xi'_1 g' + \xi'_2 g'' + \ldots + \xi'_r g^{(r)},$$
$$x'' = \xi''_1 g' + \xi''_2 g'' + \ldots + \xi''_r g^{(r)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et posant encore

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A}'_1 g' + \mathcal{A}'_2 g'' + \ldots + \mathcal{A}'_r g^{(r)},$$
$$\mathcal{A}'' = \mathcal{A}''_1 g' + \mathcal{A}''_2 g'' + \ldots + \mathcal{A}''_r g^{(r)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on aura

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\mathcal{A}'}{x - x'} + \frac{\mathcal{A}''}{x - x''} + \ldots + \frac{\mathcal{A}^{(p)}}{x - x^{(p)}}.$$

Cette décomposition en fractions simples peut se faire évidemment d'autant de façons qu'il y a de systèmes fondamentaux de racines, pourvu toujours que $F(x) = 0$ n'ait aucune racine multiple.

En particulier,

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{g_0}{x - x'} + \frac{g_0}{x - x''} + \ldots + \frac{g_0}{x - x^{(p)}}.$$

83. Supposons actuellement que $\Phi_i(\xi_i)$ admette une certaine racine, par exemple, ξ'_i, au degré μ de multiplicité, on aura

$$\frac{\varphi_i(\xi_i)}{\Phi_i(\xi_i)} g^{(i)} = \left[\frac{\mathcal{A}'_i}{(\xi_i - \xi'_i)^{\mu}} + \frac{\mathcal{A}''_i}{(\xi_i - \xi'_i)^{\mu-1}} + \ldots + \frac{\mathcal{A}^{(\mu)}_i}{\xi - \xi'_i}\right] g^{(i)} + \ldots.$$

Bien qu'au deuxième membre figure en réalité le composant de rang i

$$\frac{\mathcal{A}'_i g^{(i)}}{(x_i - x'_i)^{\mu}} + \frac{\mathcal{A}''_i g^{(i)}}{(x_i - x'_i)^{\mu-1}} + \ldots + \frac{\mathcal{A}_i^{(\mu)} g^{(i)}}{x_i - x'_i}$$

de la quantité

$$\frac{\mathcal{A}'}{(x - x')^{\mu}} + \frac{\mathcal{A}''}{(x - x')^{\mu-1}} + \ldots + \frac{\mathcal{A}^{(\mu)}}{x - x'},$$

on voit qu'il ne sera pas possible, *en général*, de décomposer $\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)}$ en fractions simples, comme s'il s'agissait de polynômes composés avec des quantités réelles ou imaginaires. On voit néanmoins que cela sera encore possible, toutes les fois que chaque équation

$$\Phi_i(\xi_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

contiendra le même nombre de racines distinctes que chacune des autres, et que, de plus, les degrés de multiplicité seront les mêmes, de sorte, par exemple, que si $\Phi_1(\xi_1) = 0$ admet une racine triple, deux racines doubles et les autres simples, $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = 0$, ... devront admettre chacune : une racine triple, deux racines doubles et les autres simples. Pour arriver au résultat désiré, on choisira le *système fondamental* des racines, de manière que *tous les composants* d'une même racine de ce système correspondent à des racines de même degré de multiplicité des diverses équations $\Phi_i = 0$.

CHAPITRE III.

LES SÉRIES.

84. Je dirai qu'une série de quantités complexes

$$\mathrm{A}^{(1)} + \mathrm{A}^{(2)} + \ldots + \mathrm{A}^{(p)} + \ldots$$

est convergente quand les r séries composantes le seront elles-mêmes, à savoir

$$
\begin{gathered}
a_1^{(1)} + a_1^{(2)} + \ldots + a_1^{(p)} + \ldots, \\
a_2^{(1)} + a_2^{(2)} + \ldots + a_2^{(p)} + \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
a_r^{(1)} + a_r^{(2)} + \ldots + a_r^{(p)} + \ldots.
\end{gathered}
$$

A son tour, chacune des séries précédentes sera dite convergente, quand la série des coefficients affectant la quantité $g^{(\mu)}$ correspondante sera convergente.

Ainsi la série

$$
\begin{aligned}
& a_\mu^{(1)} + a_\mu^{(2)} + \ldots + a_\mu^{(p)} + \ldots \\
& \quad = \alpha_\mu^{(1)} g^{(\mu)} + \alpha_\mu^{(2)} g^{(\mu)} + \ldots + \alpha_\mu^{(p)} g^{(\mu)} + \ldots \\
& \quad = g^{(\mu)} [\alpha_\mu^{(1)} + \alpha_\mu^{(2)} + \ldots + \alpha_\mu^{(p)} + \ldots]
\end{aligned}
$$

sera convergente si

$$\alpha_\mu^{(1)} + \alpha_\mu^{(2)} + \ldots + \alpha_\mu^{(p)} + \ldots$$

l'est. Cette série étant une série à termes réels ou imaginaires, on est ramené à l'étude des séries ordinaires.

Soient deux séries à termes complexes

$$
\begin{gathered}
\mathcal{A} = \mathrm{A}^{(1)} + \mathrm{A}^{(2)} + \ldots + \mathrm{A}^{(p)} + \ldots, \\
\mathcal{B} = \mathrm{B}^{(1)} + \mathrm{B}^{(2)} + \ldots + \mathrm{B}^{(p)} + \ldots
\end{gathered}
$$

ou bien

$$
\begin{gathered}
\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \ldots + \mathcal{A}_r, \\
\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 + \ldots + \mathcal{B}_r,
\end{gathered}
$$

en posant

$$
\begin{gathered}
\mathcal{A}_i = a_i^{(1)} + a_i^{(2)} + \ldots + a_i^{(p)} + \ldots, \\
\mathcal{B}_i = b_i^{(1)} + b_i^{(2)} + \ldots + b_i^{(p)} + \ldots \\
(i = 1, 2, \ldots, r),
\end{gathered}
$$

le produit des deux séries $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sera

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{A}_1\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}_2\mathcal{B}_2 + \ldots + \mathcal{A}_r\mathcal{B}_r,$$

le produit $\mathcal{A}_i\mathcal{B}_i$ étant effectué à la manière ordinaire pour le produit de deux séries.

Les séries ordonnées suivant les puissances croissantes d'une variable complexe x n'offrent pas de difficultés, parce que l'on a

$$x^\lambda = (x_1 + x_2 + \ldots + x_r)^\lambda = x_1^\lambda + x_2^\lambda + \ldots + x_r^\lambda.$$

Si

$$a + bx + cx^2 + \ldots$$

est une telle série, il faut observer que tous les coefficients, sauf a, peuvent être de purs nombres; a doit forcément appartenir à l'Ensemble $\mathcal{E}$ (n° 63).

CHAPITRE IV.

PREMIERS PRINCIPES DE LA THÉORIE DES FONCTIONS.

§ I.

Dérivées.

85. Soit

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_r = \xi_1 g' + \xi_2 g'' + \ldots + \xi_r g^{(r)}$$

une variable complexe, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ étant des variables indépendantes réelles ou imaginaires.

Soit encore $F(x)$ une fonction de la variable x. Afin qu'à chaque valeur de x appartenant à l'Ensemble $\mathcal{E}$ la fonction prenne elle-même une valeur appartenant à ce même Ensemble, nous devons exiger qu'elle puisse toujours se ramener à la forme

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_r = \mathbf{\Phi}_1 g' + \mathbf{\Phi}_2 g'' + \ldots + \mathbf{\Phi}_r g^{(r)},$$

$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_r$ étant des fonctions réelles ou imaginaires des variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$.

Regardons d'abord x_1 ou ξ_1 comme seul variable; on aura alors

$$\Delta x = \Delta x_1 = g' \Delta \xi_1,$$

et il en résulte

$$\frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta x} = \frac{\Delta \mathbf{\Phi}_1}{\Delta \xi_1} \frac{g'}{g'} + \frac{\Delta \mathbf{\Phi}_2}{\Delta \xi_1} \frac{g''}{g'} + \ldots + \frac{\Delta \mathbf{\Phi}_r}{\Delta \xi_1} \frac{g^{(r)}}{g'}.$$

Chacune des quantités $\frac{\Delta \Phi_i}{\Delta \xi_1}$ est réelle ou imaginaire, et l'on peut la supposer finie et déterminée. Mais le facteur $\frac{g^{(i)}}{g'}$ qui multiplie cette quantité n'est fini que pour $i = 1$ (n^os 56 et suiv.), auquel cas on a

$$\frac{g^{(i)}}{g'} = \frac{g'}{g'} = g'.$$

Pour que l'égalité précédente ait un sens admissible, il faut donc exiger

$$\frac{\Delta\Phi_i}{\Delta\xi_1} = 0, \qquad \text{pour} \qquad i \neq 1.$$

En regardant comme seuls variables successivement $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$, on se convaincra sans peine que chaque fonction Φ_i doit être fonction de la seule variable ξ_i de même indice, ou encore que *le composant* F_i *de* F *n'est fonction que du composant de même indice de la variable indépendante.*

Supposant maintenant cette condition remplie et laissant variables tous les composants de x, on aura, pour la dérivée de $F(x)$,

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d\Phi_1}{d\xi_1} g' + \frac{d\Phi_2}{d\xi_2} g'' + \ldots + \frac{d\Phi_r}{d\xi_r} g^{(r)}.$$

D'ailleurs rien n'empêche d'écrire

$$\frac{d\Phi_i}{d\xi_i} g^{(i)} = \frac{dF_i}{dx_i};$$

d'où ce théorème : « *Les composants de la dérivée d'une fonction sont les dérivées des composants de cette fonction par rapport à l'unique composant dont ils dépendent.* »

86. Le théorème général (n° 60) permet d'affirmer que toutes les fonctions composées avec la variable x au moyen des seules opérations : addition, soustraction, multiplication, division, satisfont à la condition que l'on vient de trouver.

De même, toute fonction définie par une *série convergente procédant suivant les puissances entières et positives de la variable* x *satisfait à cette condition.*

Également *toute fonction définie par une série convergente dont les* *termes sont eux-mêmes des fonctions vérifiant la condition indiquée la vérifiera elle-même.*

87. *Remarque.* — La condition précédente est nécessaire, soit que tous les Ensembles partiels aient deux dimensions, soit qu'ils n'en aient qu'une; mais on doit en outre exiger que la fonction Φ_i de ξ_i soit une fonction réelle de ξ_i, si l'Ensemble $\mathcal{E}_i$ est une multiplicité à une seule dimension.

§ II.

Classification des fonctions.

88. Une valeur de ξ_i étant figurée par un point dans un plan, on pourra l'appeler le point ξ_i ou le *point* x_i; et l'on pourra dire de même le point x, au lieu de la valeur de x; pour ce dernier, il y aura lieu, plus loin, de distinguer le cas où x est *nul* ou bien est *un diviseur de zéro :* on est donc amené à parler du *point zéro,* d'un *point diviseur de zéro d'ordre* p, p étant le nombre des composants x_i qui sont nuls; si $p = r$, x est le *point zéro lui-même.*

Contourner un point x', *ce sera faire décrire aux divers points composants de* x *des chemins fermés autour des points composants de* x'. Il n'est pas nécessaire que tous les composants de x varient.

J'appellerai *intérieur de l'espace* X l'ensemble des valeurs complexes de x, pour lesquelles chaque variable ξ_i reste intérieure à une certaine courbe Ξ_i du plan représentatif de cette variable imaginaire ξ_i.

La fonction F sera dite *monogène* tant que chacune des fonctions F_1, $F_2, \ldots, F_r$ restera fonction monogène de la variable dont elle dépend, c'est-à-dire tant que $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_r$ seront respectivement fonctions monogènes de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$.

F sera *uniforme* pour toute valeur de x intérieure à l'espace X, quand $\Phi_i (i = 1, 2, \ldots, r)$ sera *uniforme* pour toute valeur de ξ_i intérieure à la courbe Ξ_i.

Les propriétés qu'aura $F(x)$ d'être *continue* et d'être *holomorphe* se définiront d'une façon pareille.

$F(x)$ sera *méromorphe* à l'intérieur de X, quand *une* ou *plusieurs* des fonctions Φ_i seront méromorphes à l'intérieur des courbes correspondantes Ξ_i, les autres restant holomorphes.

On voit immédiatement que, si une fonction $F(x)$ est holomorphe à l'intérieur de X, il en est de même de toutes ses dérivées successives.

§ III.

Série de Taylor.

89. *La série de Taylor est applicable aux fonctions holomorphes de la variable complexe x.* — Soit

$$x' = x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_r = \xi'_1 g' + \xi'_2 g'' + \ldots + \xi'_r g^{(r)}$$

une valeur de x intérieure à l'espace X, dans lequel $F(x)$ est holomorphe.

Autour de chaque point ξ'_i, décrivons un cercle C'_i tout entier intérieur à la courbe Ξ_i et appelons *sphère* Γ' l'espace Γ' comprenant toutes les valeurs de x qui correspondent à toutes les valeurs des quantités ξ_i, respectivement intérieures aux cercles C'_i ($i = 1, 2, \ldots, r$).

Je dis qu'on aura

$$F(x) = F(x') + \frac{x - x'}{1} F'(x') + \frac{(x - x')^2}{1.2} F''(x') + \ldots \tag{43}$$

On a, en effet,

$$\begin{aligned} F(x) &= F_1(x_1) + F_2(x_2) + \ldots + F_r(x_r) \\ &= \Phi_1(\xi_1) g' + \Phi_2(\xi_2) g'' + \ldots + \Phi_r(\xi_r) g^{(r)}; \end{aligned}$$

d'ailleurs, par hypothèse,

$$\Phi_i(\xi_i) = \Phi_i(\xi'_i) + \frac{\xi_i - \xi'_i}{1} \Phi'_i(\xi'_i) + \frac{(\xi_i - \xi'_i)^2}{1.2} \Phi''_i(\xi'_i) + \ldots$$
$$(i = 1, 2, \ldots, r).$$

Donc

$$(44) \left\{ \begin{array}{llll} F(x) = & \Phi_1(\xi'_1) g' + & \Phi_2(\xi'_2) g'' + \ldots + & \Phi_r(\xi'_r) g^{(r)} \\ \quad + \dfrac{\xi_1 - \xi'_1}{1} & \Phi'_1(\xi'_1) g' + \dfrac{\xi_2 - \xi'_2}{1} & \Phi'_2(\xi'_2) g'' + \ldots + \dfrac{\xi_r - \xi'_r}{1} & \Phi'_r(\xi'_r) g^{(r)} \\ \quad + \dfrac{(\xi_1 - \xi'_1)^2}{1.2} & \Phi''_1(\xi'_1) g' + \dfrac{(\xi_2 - \xi'_2)^2}{1.2} & \Phi''_2(\xi'_2) g'' + \ldots + \dfrac{(\xi_r - \xi'_r)^2}{1.2} & \Phi''_r(\xi'_r) g^{(r)} \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; & & & \end{array} \right.$$

or, d'une manière générale,

$$\frac{(\xi_i - \xi_i')^\lambda}{1.2\ldots\lambda}\,\Phi_i^{(\lambda)}(\xi_i')\,g^{(i)}$$

est le $i^{\text{ième}}$ composant de

$$\frac{(x - x')^\lambda}{1.2\ldots\lambda}\,\mathrm{F}^{(\lambda)}(x').$$

Dès lors, la formule (44) donne immédiatement la formule (43) qu'on se proposait d'établir.

Inversement, on verrait sans peine que toute fonction $\mathrm{F}(x)$, développable en série convergente suivant les puissances entières et positives de

$$x - x'$$

dans une sphère Γ' est une fonction holomorphe à l'intérieur de la sphère Γ'.

§ IV.

Fonctions inverses.

90. La fonction inverse d'une fonction

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}_1(x_1) + \mathrm{F}_2(x_2) + \ldots + \mathrm{F}_r(x_r)$$

sera la fonction dont les composants sont les fonctions inverses des fonctions composantes de

$$y = \mathrm{F}(x).$$

Quant à la fonction inverse de la fonction composante

$$y_i = \mathrm{F}_i(x_i),$$

pour la définir, posons

$$x_i = \xi_i g^{(i)}, \qquad y_i = \eta_i g^{(i)}, \qquad \mathrm{F}_i(x_i) = \Phi_i(\xi_i) g^{(i)}.$$

L'égalité

$$\eta_i g^{(i)} = \Phi_i(\xi_i) g^{(i)}$$

exige

$$\eta_i = \Phi_i(\xi_i);$$

posons

$$\xi_i = \Psi_i(\eta_i),$$

d'où

$$\xi_i g^{(i)} = \Psi_i(\eta_i) g^{(i)},$$

et, en faisant $\Psi_i(\eta_i) g^{(i)} = \mathfrak{F}(y_i)$, $x_i = \mathfrak{F}(y_i)$ sera la fonction inverse de la fonction y_i.

91. Le théorème sur la dérivation des fonctions inverses subsiste en y remplaçant évidemment 1 par g_0.

En effet,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1} + \frac{dy_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dy_r}{dx_r},$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx_1}{dy_1} + \frac{dx_2}{dy_2} + \ldots + \frac{dx_r}{dy_r},$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dy} = \frac{dy_1}{dx_1}\frac{dx_1}{dy_1} + \frac{dy_2}{dx_2}\frac{dx_2}{dy_2} + \ldots + \frac{dy_r}{dx_r}\frac{dx_r}{dy_r}.$$

Or, d'une manière générale,

$$\frac{dy_i}{dx_i}\frac{dx_i}{dy_i} = g^{(i)}\frac{d\Phi_i(\xi_i)}{d\xi_i} g^{(i)}\frac{d\Psi_i(\eta_i)}{d\eta_i} = g^{(i)}$$

et, par conséquent,

$$\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dy} = g' + g'' + \ldots + g^{(r)} = g_0,$$

C. Q. F. D.

§ V.

Différentielles et intégrales.

92. On a

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}_1(x_1) + \mathrm{F}_2(x_2) + \ldots + \mathrm{F}_r(x_r)$$

et

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_r = \xi_1 g' + \xi_2 g'' + \ldots + \xi_r g^{(r)},$$

$$dx = dx_1 + dx_2 + \ldots + dx_r = g'\,d\xi_1 + g''\,d\xi_2 + \ldots + g^{(r)}\,d\xi_r.$$

Donc

$$\mathrm{F}(x)\,dx = \mathrm{F}_1(x_1)\,dx_1 + \mathrm{F}_2(x_2)\,dx_2 + \ldots + \mathrm{F}_r(x_r)\,dx_r.$$

Il n'y a plus actuellement aucune difficulté à définir une intégrale prise entre des limites complexes : il suffit de la considérer, suivant l'usage, comme la somme de ses éléments différentiels. On aura

$$\int_a^b \mathrm{F}(x)\,dx = \int_{a_1}^{b_1} \mathrm{F}_1(x_1)\,dx_1 + \int_{a_2}^{b_2} \mathrm{F}_2(x_2)\,dx_2 + \ldots + \int_{a_r}^{b_r} \mathrm{F}_r(x_r)\,dx_r$$

$$(a = a_1 + a_2 + \ldots + a_r, \quad b = b_1 + b_2 + \ldots + b_r);$$

maintenant

$$(45) \qquad \int_{a_i}^{b_i} \mathrm{F}_i(x_i)\,dx_i = \int_{\alpha_i g^{(i)}}^{\beta_i g^{(i)}} \Phi_i(\xi_i)\,d\xi_i g^{(i)} = g^{(i)} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \Phi_i(\xi_i)\,d\xi_i,$$

et l'on est ramené au calcul des intégrales prises entre des limites réelles ou imaginaires.

La formule (45) et les règles de calcul des quantités complexes montrent de suite que l'intégration de tout polynôme entier ou de toute série convergente procédant suivant les puissances entières et positives de la variable peut s'effectuer par les règles du calcul ordinaire, comme si la variable et les coefficients n'étaient pas complexes; mais la constante à ajouter doit toujours être une quantité complexe faisant partie de l'Ensemble $\mathcal{E}$.

CHAPITRE V.

DE QUELQUES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE.

§ I.

L'exponentielle complexe.

93. Pour définir l'exponentielle complexe e^x (où $x = x_1 + \ldots + x_r$), définissons d'abord ses composants. Pour cela, nous posons

$$e^{x_i} = e^{\xi_i g^{(i)}} = g^{(i)} e^{\xi_i} = g^{(i)} + \frac{x_i}{1} + \frac{x_i^2}{1.2} + \ldots + \frac{x_i^p}{1.2\ldots p} + \ldots;$$

e^{ξ_i} est alors une exponentielle ordinaire, et l'on a

$$\begin{aligned} e^x &= e^{x_1} + e^{x_2} + \ldots + e^{x_r} \\ &= g' e^{\xi_1} + g'' e^{\xi_2} + \ldots + g^{(r)} e^{\xi_r} \\ &= g_0 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^p}{1.2\ldots p} + \ldots . \end{aligned}$$

94. *La propriété fondamentale de l'exponentielle,* savoir

$$e^x e^y = e^{x+y}$$

est conservée.

Posons

$$y = y_1 + y_2 + \ldots + y_r = \eta_1 g' + \eta_2 g'' + \ldots + \eta_r g^{(r)},$$

on a

$$\begin{aligned} e^x e^y &= (e^{x_1} + e^{x_2} + \ldots + e^{x_r})(e^{y_1} + e^{y_2} + \ldots + e^{y_r}) \\ &= e^{x_1} e^{y_1} + e^{x_2} e^{y_2} + \ldots + e^{x_r} e^{y_r}. \end{aligned}$$

Or

$$e^{x_i} e^{y_i} = g^{(i)} e^{\xi_i} g^{(i)} e^{\eta_i} = g^{(i)} e^{\xi_i + \eta_i} = e^{x_i + y_i};$$

donc

$$e^x e^y = e^{x_1 + y_1} + e^{x_2 + y_2} + \ldots + e^{x_r + y_r} = e^{x+y}.$$

95. *L'exponentielle complexe admet r périodes,* car chacun de ses r composants en admet une :

$$e^{x_i} \text{ a la période } 2\pi\sqrt{-1}\, g^{(i)},$$

puisque

$$e^{x_i} = g^{(i)} e^{\xi_i} = g^{(i)} e^{2\pi\sqrt{-1} + \xi_i} = e^{2\pi\sqrt{-1} g^{(i)} + x_i}.$$

Les r périodes sont donc

$$2\pi\sqrt{-1}\, g', \quad 2\pi\sqrt{-1}\, g'', \quad \ldots, \quad 2\pi\sqrt{-1}\, g^{(r)},$$

et l'une des périodes déduites de celles-là est

$$2\pi\sqrt{-1}\, g_0 = 2\pi\sqrt{-1}\, g' + 2\pi\sqrt{-1}\, g'' + \ldots + 2\pi\sqrt{-1}\, g^{(r)}.$$

96. On a

$$\frac{d}{dx} e^x = \frac{d}{dx_1} e^{x_1} + \frac{d}{dx_2} e^{x_2} + \ldots + \frac{d}{dx_r} e^{x_r};$$

or

$$\frac{d}{dx_i} e^{x_i} = g^{(i)} \frac{d}{d\xi_i} e^{\xi_i} = g^{(i)} e^{\xi_i} = e^{x_i}.$$

Donc

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x.$$

§ II.

Les fonctions complexes $\sin x$ et $\cos x$.

97. On pose

$$\sin x = \sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_r,$$
$$\cos x = \cos x_1 + \cos x_2 + \ldots + \cos x_r$$

avec

$$\sin x_i = g^{(i)} \sin \xi_i = g^{(i)}\left(\frac{\xi_i}{1} - \frac{\xi_i^3}{1.2.3} + \ldots\right) = x_i - \frac{x_i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$\cos x_i = g^{(i)} \cos \xi_i = g^{(i)}\left(1 - \frac{\xi_i^2}{1.2} + \frac{\xi_i^4}{1.2.3.4} - \ldots\right) = g^{(i)} - \frac{x_i^2}{1.2} + \frac{x_i^4}{1.2.3.4} - \ldots.$$

Il en résulte

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$
$$\cos x = g_0 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots.$$

98. On a

$$\sin^2 x + \cos^2 x = g_0;$$

car

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 x &= (\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_r)^2 + (\cos x_1 + \cos x_2 + \ldots + \cos x_r)^2 \\ &= (\sin^2 x_1 + \cos^2 x_1) + (\sin^2 x_2 + \cos^2 x_2) + \ldots + (\sin^2 x_r + \cos^2 x_r) \\ &= g' + g'' + \ldots + g^{(r)} = g_0,\end{aligned}$$

puisque l'on a

$$\sin^2 x_i + \cos^2 x_i = g^{(i)}(\sin^2 \xi_i + \cos^2 \xi_i) = g^{(i)}.$$

99. Des développements en séries, on déduit facilement

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x = e^{\sqrt{-1}x},$$
$$\cos x - \sqrt{-1}\sin x = e^{-\sqrt{-1}x};$$

d'où les formules d'Euler généralisées, et cette conséquence : que les nouvelles fonctions $\sin x$ et $\cos x$ admettent chacune les r périodes

$$2\pi g', \quad 2\pi g'', \quad \ldots, \quad 2\pi g^{(r)},$$

et cette autre période qui se déduit des précédentes

$$2\pi g_0 = 2\pi g' + 2\pi g'' + \ldots + 2\pi g^{(r)}.$$

100. On a aussi (n° 85)

$$\frac{d}{dx}\sin x = \frac{d}{dx_1}\sin x_1 + \frac{d}{dx_2}\sin x_2 + \ldots + \frac{d}{dx_r}\sin x_r.$$

Or

$$\frac{d}{dx_i}\sin x_i = g^{(i)}\frac{d}{d\xi_i}\sin\xi_i = g^{(i)}\cos\xi_i = \cos x_i;$$

donc

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x.$$

On trouverait de même

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x.$$

§ III.

Le logarithme complexe.

101. Considérons la fonction inverse de e^x. D'après la définition donnée plus haut (n° 90), la fonction inverse de

$$y_i = e^{x_i}$$

est

$$x_i = g^{(i)}\mathrm{L}\eta_i;$$

nous conserverons le nom ordinaire : *logarithme* et nous poserons

$$x_i = g^{(i)}\mathrm{L}\eta_i = \mathrm{L}y_i.$$

On aura alors

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_r = \mathrm{L}y_1 + \mathrm{L}y_2 + \ldots + \mathrm{L}y_r$$

et, par définition,

$$\mathrm{L}y = \mathrm{L}y_1 + \mathrm{L}y_2 + \ldots + \mathrm{L}y_r.$$

102. *La propriété fondamentale des logarithmes,* savoir

$$\mathrm{L}u + \mathrm{L}v = \mathrm{L}uv, \tag{46}$$

subsiste, car

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}u &= \mathbf{L}u_1 + \mathbf{L}u_2 + \ldots + \mathbf{L}u_r,\\
\mathbf{L}v &= \mathbf{L}v_1 + \mathbf{L}v_2 + \ldots + \mathbf{L}v_r,\\
\mathbf{L}uv &= \mathbf{L}u_1 v_1 + \mathbf{L}u_2 v_2 + \ldots + \mathbf{L}u_r v_r.
\end{aligned}
$$

D'ailleurs, posant en général

$$u_i = g^{(i)} \upsilon_i \qquad \text{et} \qquad v_i = g^{(i)} \upsilon'_i,$$

on a

$$\mathbf{L}u_i v_i = g^{(i)} \mathbf{L} \upsilon_i \upsilon'_i = g^{(i)} \mathbf{L} \upsilon_i + g^{(i)} \mathbf{L} \upsilon'_i = \mathbf{L}u_i + \mathbf{L}v_i.$$

La formule (46) en résulte immédiatement.

103. Actuellement, pour conserver x comme variable indépendante, prenons la notation

$$y = \mathbf{L}x,$$

lorsque x contourne un *point diviseur de zéro* d'ordre p (n° 88), y se reproduit augmenté de p périodes.

On pourra plus généralement considérer la fonction

$$y = \mathbf{L}(x - x'),$$

x' étant un point quelconque.

104. *Dérivée :*

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy_1}{dx_1} + \frac{dy_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dy_r}{dx_r},\\
\frac{dy_i}{dx_i} &= \frac{d}{dx_i}\mathbf{L}(x_i - x'_i) = g^{(i)} \frac{d}{d\xi_i}\mathbf{L}(\xi_i - \xi'_i) = \frac{g^{(i)}}{\xi_i - \xi'_i},
\end{aligned}
$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g_0}{x - x'}$$

et, par suite aussi, la valeur indéfinie de l'intégrale

$$\int \frac{dx}{x - x'} = \int \frac{g_0\, dx}{x - x'}$$

est

$$\mathbf{L}(x - x').$$

Mais, pour passer de là à l'intégrale

$$\int_{x''}^{x'''} \frac{dx}{x - x'},$$

il faudra tenir compte du chemin suivi pour se rendre du point x'' au point x''' (n° 103).

§ IV.

De l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{(g_0 - x^2)(g_0 - k^2 x^2)}}$.

105. k désignant un nombre réel ou imaginaire [1], on a (n° 80), pour la quantité

$$\sqrt{(g_0 - x^2)(g_0 - k^2 x^2)},$$

les 2^r valeurs comprises dans la formule

$$\begin{aligned}&\sqrt{(g_0 - x^2)(g_0 - k^2 x^2)}\\ &= \tau_1 \sqrt{(g' - x_1^2)(g' - k^2 x_1^2)} + \tau_2 \sqrt{(g'' - x_2^2)(g'' - k^2 x_2^2)} + \ldots + \tau_r \sqrt{(g^{(r)} - x_r^2)(g^{(r)} - k^2 x_r^2)}\end{aligned}$$

($\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ sont des nombres égaux à $+1$ ou -1).

Prendre une valeur initiale déterminée du radical, c'est prendre un système particulier de nombres τ. Supposons cela fait : on aura

$$\begin{aligned}&\int \frac{dx}{\sqrt{(g_0 - x^2)(g_0 - k^2 x^2)}}\\ &= \int \frac{dx_1}{\sqrt{(g' - x_1^2)(g' - k^2 x_1^2)}} + \int \frac{dx_2}{\sqrt{(g'' - x_2^2)(g'' - k^2 x_2^2)}} + \ldots + \int \frac{dx_r}{\sqrt{(g^{(r)} - x_r^2)(g^{(r)} - k^2 x_r^2)}}\end{aligned}$$

ou bien encore

$$= g' \int \frac{d\xi_1}{\sqrt{(1 - \xi_1^2)(1 - k^2 \xi_1^2)}} + g'' \int \frac{d\xi_2}{\sqrt{(1 - \xi_2^2)(1 - k^2 \xi_2^2)}} + \ldots + g^{(r)} \int \frac{d\xi_r}{\sqrt{(1 - \xi_r^2)(1 - k^2 \xi_r^2)}}.$$

106. Chaque intégrale composante a deux périodes : il en résulte

---

[1] On pourrait même, si l'on voulait, prendre k complexe; le lecteur verra facilement les modifications qui en résulteraient.

que l'intégrale proposée admettra les $2r$ périodes

$$\begin{array}{llll} 4Kg', & 4Kg'', & \ldots, & 4Kg^{(r)}, \\ 2\sqrt{-1}K'g', & 2\sqrt{-1}K'g'', & \ldots, & 2\sqrt{-1}K'g^{(r)}. \end{array}$$

K et K' ont le sens qui leur est attribué d'ordinaire dans la théorie des fonctions elliptiques.

Quelques-unes de ces périodes s'ajoutent chaque fois que l'on contourne un point critique, c'est-à-dire un point x, pour lequel quelques-uns des points composants correspondent aux valeurs qui annulent le radical relatif au même Ensemble partiel.

Par exemple, si

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_r = v_1 g' + v_2 g'' + \ldots + v_r g^{(r)}$$

est la valeur de l'intégrale prise de o à x le long d'un chemin rectiligne (c'est-à-dire rectiligne pour chacune des variables ξ_i), toutes les valeurs de l'intégrale

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(g_0 - x^2)(g_0 - k^2x^2)}}$$

seront comprises dans la formule

$$\begin{aligned} &(v_1 + 4m_1K + 2m'_1\sqrt{-1}K')g' + (v_2 + 4m_2K + 2m'_2\sqrt{-1}K')g'' + \ldots \\ &\quad + (v_r + 4m_rK + 2m'_r\sqrt{-1}K')g^{(r)}. \end{aligned}$$

107. Enfin, on n'aura aucune peine à définir $\operatorname{sn} x$; on posera

$$\operatorname{sn} x = \operatorname{sn} x_1 + \operatorname{sn} x_2 + \ldots + \operatorname{sn} x_r$$

et

$$\operatorname{sn} x_i = g^{(i)} \operatorname{sn} \xi_i.$$

La fonction $y = \operatorname{sn} x$ est bien alors la fonction inverse de

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(g_0 - y^2)(g_0 - k^2y^2)}},$$

d'après la définition donnée plus haut pour les fonctions inverses.

TROISIÈME PARTIE.

CHAPITRE I.

NOUVEAU FONDEMENT DE LA THÉORIE DES QUANTITÉS COMPLEXES.

108. Ainsi que je l'ai annoncé dans l'Introduction, je me propose d'exposer, dans cette troisième Partie, le remarquable travail de M. Dedekind. La voie que nous allons suivre est absolument différente de celle qui précède, et je dois avertir, afin d'éviter toute confusion, que désormais les quantités sur lesquelles nous raisonnerons sont de deux sortes : les premières sont les quantités réelles et imaginaires du calcul ordinaire; les autres sont certaines quantités que nous nommerons *multivalentes* (MEHRWERTHIG), en attachant à ce mot un sens qui sera ultérieurement expliqué et qui fait dépendre ces quantités de certaines substitutions. Les premières quantités pourraient, par opposition, prendre le qualificatif d'*univalentes*.

109. Considérons le Tableau E :

$$(47)\qquad \mathbf{E}\ \left\{\begin{matrix} e_{11}, & e_{21}, & \ldots, & e_{n1}, \\ e_{12}, & e_{22}, & \ldots, & e_{n2}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ e_{1n}, & e_{2n}, & \ldots, & e_{nn} \end{matrix}\right.$$

de n^2 nombres quelconques, réels ou imaginaires, assujettis toutefois à avoir un déterminant

$$(48)\qquad e = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{21} & \ldots & e_{n1} \\ e_{12} & e_{22} & \ldots & e_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e_{1n} & e_{2n} & \ldots & e_{nn} \end{vmatrix}$$

différent de zéro. Associées par lignes, ces quantités forment n systèmes de n quantités, dont le type général est

$$e_{1s}, \quad e_{2s}, \quad \ldots, \quad e_{ns}.$$

Concevons maintenant un système de n quantités

(49) $$e_1, \quad e_2, \quad \ldots, \quad e_n,$$

auxquelles nous rattacherons les n substitutions [1]

(50) $$\left\{\begin{array}{l} (e_1, e_2, \ldots, e_n \mid e_{11}, e_{21}, \ldots, e_{n1}), \\ (e_1, e_2, \ldots, e_n \mid e_{12}, e_{22}, \ldots, e_{n2}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (e_1, e_2, \ldots, e_n \mid e_{1n}, e_{2n}, \ldots, e_{nn}). \end{array}\right.$$

Les quantités $e_1, e_2, \ldots, e_n$ formeront une *base* et s'appelleront *multivalentes;* leurs diverses valeurs correspondent aux n substitutions (50), de sorte que *toute relation*

(51) $$\mathfrak{F}(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 0,$$

composée rationnellement avec les n quantités de la base et des nombres réels ou imaginaires déterminés, équivaut par définition même aux n relations qu'on en déduit en y effectuant les substitutions (50). C'est là le vrai sens qu'on doit attribuer à une relation telle que (51) et aux quantités *multivalentes* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ qui sont au fond de véritables *symboles* destinés à tenir la place de quantités ordinaires.

110. Démontrons le théorème suivant :

Toute fonction rationnelle entière x des n quantités de la base s'exprime d'une façon, et d'une seule, sous la forme

(52) $$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n,$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *étant des nombres (réels ou imaginaires) appelés les coordonnées de x.*

---

(1) Je représente, d'une manière générale, par

$$(x, y, \ldots, z \mid x', y', \ldots, z')$$

l'opération qui consiste à remplacer respectivement x par x', y par y', ..., z par z'.

En effet, quelle que soit la fonction entière x des quantités (49), lorsqu'on y effectuera la substitution

$$(e_1, e_2, \ldots, e_n \mid e_{1s}, e_{2s}, \ldots, e_{ns}),$$

elle prendra une certaine valeur numérique (réelle ou imaginaire) bien déterminée et finie (la fonction x est entière); soit x_s cette valeur. En effectuant successivement les n substitutions dans x, nous obtiendrons les n quantités

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n.$$

Dire alors qu'on a l'égalité (52), d'après la définition donnée plus haut, c'est dire qu'on a entre les nombres $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ les n équations linéaires

$$(53) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \xi_1 e_{11} + \xi_2 e_{21} + \ldots + \xi_n e_{n1}, \\ x_2 = \xi_1 e_{12} + \xi_2 e_{22} + \ldots + \xi_n e_{n2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \xi_1 e_{1n} + \xi_2 e_{2n} + \ldots + \xi_n e_{nn}. \end{array} \right.$$

Le déterminant (48) de ces équations est différent de zéro; elles donnent donc toujours un système de coordonnées ξ_r et un seul, savoir

$$(54) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = f_{11} x_1 + f_{12} x_2 + \ldots + f_{1n} x_n, \\ \xi_2 = f_{21} x_1 + f_{22} x_2 + \ldots + f_{2n} x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \xi_n = f_{n1} x_1 + f_{n2} x_2 + \ldots + f_{nn} x_n; \end{array} \right.$$

ef_{ij} est le mineur du déterminant (48), qui correspond à l'élément e_{ij} et qui est pris avec le signe convenable. Le théorème est donc démontré.

111. Corollaire important. — *Le système des quantités multivalentes* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *est irréductible;* en d'autres termes, l'égalité

$$(55) \qquad \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n = 0$$

est impossible, à moins qu'on n'ait simultanément

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0;$$

car, la fonction entière et rationnelle de $e_1, e_2, \ldots, e_n$,

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n,$$

vérifiant l'égalité $x = 0$, on doit par définition obtenir, au moyen des n substitutions (50),

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0;$$

les équations (53) sont alors homogènes, à déterminant différent de zéro; donc on a

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0.$$

Dès lors, on voit que $e_1, e_2, \ldots, e_n$ forment un système de n clefs, de telle sorte que l'égalité

$$(56) \qquad \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n = \xi'_1 e_1 + \xi'_2 e_2 + \ldots + \xi'_n e_n$$

entraîne toujours les n suivantes :

$$\xi_1 = \xi'_1, \qquad \xi_2 = \xi'_2, \qquad \ldots, \qquad \xi_n = \xi'_n.$$

L'*Ensemble* $\mathcal{E}$ sera désormais l'Ensemble de toutes les quantités susceptibles d'être mises sous la forme (52) [1].

112. *Base complémentaire.* — Considérons le Tableau F des n^2 nombres

$$(57) \qquad F \begin{cases} f_{11} & f_{21} & \ldots & f_{n1}, \\ f_{12} & f_{22} & \ldots & f_{n2}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ f_{1n} & f_{2n} & \ldots & f_{nn}. \end{cases}$$

Associés par colonnes, ils forment n systèmes de n nombres, dont le type général est

$$(58) \qquad f_{s1}, \quad f_{s2}, \quad \ldots, \quad f_{sn}.$$

Cela étant, soit

$$f_s = \xi_1^{(s)} e_1 + \xi_2^{(s)} e_2 + \ldots + \xi_n^{(s)} e_n$$

un élément de l'Ensemble $\mathcal{E}$; on pourra déterminer les coordonnées $\xi_1^{(s)}, \xi_2^{(s)}, \ldots, \xi_n^{(s)}$ par cette condition que les n substitutions (50) fassent prendre à f_s les valeurs respectives

$$f_{s1}, \quad f_{s2}, \quad \ldots, \quad f_{sn}.$$

---

[1] C'est cette propriété de l'indépendance linéaire des symboles $e_1, e_2, \ldots, e_n$ qui a été prise comme point de départ dans la Ire Partie.

Il suffira pour cela d'affecter de l'indice supérieur (s) les lettres ξ dans les équations (53) ou (54) et d'y remplacer respectivement $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par $f_{s1}, f_{s2}, \ldots, f_{sn}$ [1].

On pourra faire une détermination semblable de n éléments $f_1, f_2, \ldots, f_n$ de l'Ensemble $\mathcal{E}$, et ces éléments jouiront de la propriété qu'aux n substitutions

$$(58) \qquad (e_1, e_2, \ldots, e_n \mid e_{1s}, e_{2s}, \ldots, e_{ns}) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

correspondront respectivement les n substitutions [2]

$$(59) \qquad (f_1, f_2, \ldots, f_n \mid f_{1s}, f_{2s}, \ldots, f_{ns}) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Le système des quantités multivalentes

$$(60) \qquad f_1, \quad f_2, \quad \ldots, \quad f_n$$

est la *base complémentaire*.

113. *Remarque*. — Le déterminant

$$(61) \qquad f = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{21} & \cdots & f_{n1} \\ f_{12} & f_{22} & \cdots & f_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{1n} & f_{2n} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

---

[1] Voici explicitement ces équations :

$$\begin{aligned} f_{s1} &= \xi_1^{(s)} e_{11} + \xi_2^{(s)} e_{21} + \ldots + \xi_n^{(s)} e_{n1}, \\ f_{s2} &= \xi_1^{(s)} e_{12} + \xi_2^{(s)} e_{22} + \ldots + \xi_n^{(s)} e_{n2}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_{sn} &= \xi_1^{(s)} e_{1n} + \xi_2^{(s)} e_{2n} + \ldots + \xi_n^{(s)} e_{nn} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \xi_1^{(s)} &= f_{11} f_{s1} + f_{12} f_{s2} + \ldots + f_{1n} f_{sn}, \\ \xi_2^{(s)} &= f_{21} f_{s1} + f_{22} f_{s2} + \ldots + f_{2n} f_{sn}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ \xi_n^{(s)} &= f_{n1} f_{s1} + f_{n2} f_{s2} + \ldots + f_{nn} f_{sn}. \end{aligned}$$

[2] On peut se rendre compte de ce détail de la façon suivante. On a

$$f_j = \xi_1^{(j)} e_1 + \xi_2^{(j)} e_2 + \ldots + \xi_n^{(j)} e_n,$$

et, par la substitution $(e_1, e_2, \ldots, e_n \mid e_{1s}, e_{2s}, \ldots, e_{ns})$, on obtient f_{js}, de sorte qu'à cette substitution correspondent les diverses substitutions

$$(f_1 \mid f_{1s}), \quad (f_2 \mid f_{2s}), \quad \ldots, \quad (f_n \mid f_{ns})$$

ou simplement

$$(f_1, f_2, \ldots, f_n \mid f_{1s}, f_{2s}, \ldots, f_{ns}).$$

n'est pas nul ; car on a, d'après une propriété connue des déterminants réciproques [1],

$$e^n f = \begin{vmatrix} ef_{11} & ef_{21} & \dots & ef_{n1} \\ ef_{12} & ef_{22} & \dots & ef_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ef_{1n} & ef_{2n} & \dots & ef_{nn} \end{vmatrix} = e^{n-1},$$

d'où

$$f = \frac{1}{e}.$$

114. *Relations entre les deux bases.* — Ces relations sont très connues et se tirent d'ailleurs de suite des équations (53) en écrivant qu'elles deviennent identiques lorsqu'on y remplace $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ par leurs valeurs déduites des équations (54), ou encore en écrivant que les équations (54) deviennent identiques lorsqu'on y remplace $x_1, x_2, \dots, x_n$ par leurs valeurs déduites des équations (53).

On a alors

$$\begin{aligned} &e_{11} f_{11} + e_{21} f_{21} + \dots + e_{n1} f_{n1} = 1, \\ &e_{11} f_{12} + e_{21} f_{22} + \dots + e_{n1} f_{n2} = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

d'une manière générale :

$$e_{1p} f_{1q} + e_{2p} f_{2q} + \dots + e_{nq} f_{nq} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q, \\ 0 & \text{si } p \neq q. \end{cases}$$

On a aussi

$$e_{p1} f_{q1} + e_{p2} f_{q2} + \dots + e_{pn} f_{qn} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q, \\ 0 & \text{si } p \neq q. \end{cases}$$

En posant

$$(62) \qquad \begin{cases} (p, q) = 1 & \text{si } p = q, \\ (p, q) = 0 & \text{si } p \neq q, \end{cases}$$

on pourra écrire

$$(63) \quad e_{1p} f_{1q} + e_{2p} f_{2q} + \dots + e_{np} f_{nq} = e_{p1} f_{q1} + e_{p2} f_{q2} + \dots + e_{pn} f_{qn} = (p, q).$$

115. *Du changement de base.* — La base $e_1, e_2, \dots, e_n$ est définie au moyen des n^2 quantités du Tableau E et des substitutions (50); on peut

---

[1] On se rappelle (n° 110) que ef_{ij} est le mineur du déterminant e, correspondant à l'élément e_{ij}.

remplacer cette base par une autre $c_1, c_2, \ldots, c_n$ équivalente, c'est-à-dire telle que tout élément x de l'Ensemble $\mathcal{E}$ puisse s'exprimer sous la forme

$$x = \zeta_1 c_1 + \zeta_2 c_2 + \ldots + \zeta_n c_n, \tag{64}$$

et cela d'une seule façon, pourvu que $c_1, c_2, \ldots, c_n$ soient n éléments de l'Ensemble $\mathcal{E}$ convenablement choisis : ils seront convenablement choisis, si le déterminant de leurs coordonnées n'est pas nul.

Si, en effet, on a

$$\left\{\begin{array}{l} c_1 = e_1 m_{11} + e_2 m_{21} + \ldots + e_n m_{n1}, \\ c_2 = e_1 m_{12} + e_2 m_{22} + \ldots + e_n m_{n2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ c_n = e_1 m_{1n} + e_2 m_{2n} + \ldots + e_n m_{nn}, \end{array}\right. \tag{65}$$

avec

$$\begin{vmatrix} m_{11} & m_{21} & \ldots & m_{n1} \\ m_{12} & m_{22} & \ldots & m_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{1n} & m_{2n} & \ldots & m_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{66}$$

on en déduit immédiatement et d'une seule façon

$$\begin{array}{l} e_1 = p_{11} c_1 + p_{12} c_2 + \ldots + p_{1n} c_n, \\ e_2 = p_{21} c_1 + p_{22} c_2 + \ldots + p_{2n} c_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ e_n = p_{n1} c_1 + p_{n2} c_2 + \ldots + p_{nn} c_n, \end{array}$$

valeurs qui, portées dans

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n,$$

permettent d'exprimer x sous la forme (64), et cela d'une seule façon.

Quant aux n valeurs dont est susceptible la quantité multivalente c_j, on les obtient de suite en effectuant dans

$$c_j = e_1 m_{1j} + e_2 m_{2j} + \ldots + e_n m_{nj}$$

les n substitutions (50); on pourra donc former le Tableau C des n^2 nombres c_{ji}, ainsi que les n substitutions analogues aux substitutions (50). Le déterminant formé avec ce Tableau sera forcément différent de zéro; en effet, d'après le n° 111, un élément quelconque de l'Ensemble $\mathcal{E}$ ne peut être nul que si toutes ses coordonnées sont simultanément nulles; on en déduit sans peine que, dans l'hypothèse (66), une relation de la forme

$$\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \ldots + \lambda_n c_n = 0 \tag{67}$$

est impossible, si l'on n'a pas $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Les n relations dont la relation (67) tient lieu sont donc aussi impossibles dans le même sens : c'est dire que le déterminant formé avec le Tableau C est différent de zéro. C. Q. F. D.

116. *Base normale.* — Effectuons un changement de base au moyen des formules

$$c_q = e_1 f_{1q} + e_2 f_{2q} + \ldots + e_n f_{nq}, \tag{68}$$

qui remplissent bien la condition voulue, savoir : que le déterminant des coordonnées ne soit pas nul (n° 113).

La nouvelle base formera la *base* dite *normale*. Les n substitutions de ce système multivalent sont

$$(c_1, c_2, \ldots, c_n \mid c_{1s}, c_{2s}, \ldots, c_{ns}) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

117. *Première propriété de la base normale.* — Elle consiste dans l'égalité

$$c_{qp} = (p, q) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q, \\ 1 & \text{si } p = q. \end{cases}$$

Effectuant dans (68) la substitution

$$(e_1, e_2, \ldots, e_n \mid e_{1p}, e_{2p}, \ldots, e_{np}),$$

nous aurons c_{qp} dans le premier membre, par définition, et dans le deuxième (p, q), d'après la formule (63).

118. *Deuxième propriété.* — Elle consiste dans les égalités

$$\begin{cases} c_p c_q = 0 & \text{si } p \neq q, \\ c_p c_q = c_p & \text{si } p = q. \end{cases} \tag{69}$$

En effet (68)

$$c_p c_q = (e_1 f_{1p} + e_2 f_{2p} + \ldots + e_n f_{np})(e_1 f_{1q} + e_2 f_{2q} + \ldots + e_n f_{nq}).$$

Or, en effectuant au deuxième membre les n substitutions (50), on obtient constamment pour valeur 0, lorsque p diffère de q; et, lorsque $p = q$, la seule substitution

$$(e_1, e_2, \ldots, e_n \mid e_{1p}, e_{2p}, \ldots, e_{np})$$

fait prendre au deuxième membre la valeur 1, tandis que les autres lui donnent encore la valeur zéro.

Actuellement, si $p \neq q$, les n valeurs que prend le produit $c_p c_q$ par les n substitutions (50) étant nulles, le produit lui-même est nul, car l'égalité

$$c_p c_q = 0$$

ne signifie pas autre chose (n° 109).

Si $p = q$, les $n - 1$ valeurs

$$(c_p c_q)_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n)$$

que prend le produit sont nulles, mais on a la valeur

$$(c_p c_p)_p = 1$$

pour $i = p$. Or on a de même (première propriété)

$$c_{pi} = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n$$

et

$$c_{pp} = 1.$$

L'égalité

$$(c_p c_p)_i = c_{pi}$$

subsiste donc pour toutes les n substitutions; donc

$$c_p c_p = c_p. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

119. *Expression d'un élément quelconque x de l'Ensemble $\mathcal{E}$ au moyen de la base normale.* — On a

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n.$$

Remplaçant les coordonnées ξ par leurs valeurs tirées des équations (54) et ordonnant, par rapport aux quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on trouve

$$
\begin{aligned}
x = & (e_1 f_{11} + e_2 f_{21} + \ldots + e_n f_{n1}) x_1 \\
& + (e_1 f_{12} + e_2 f_{22} + \ldots + e_n f_{n2}) x_2 \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (e_1 f_{1n} + e_2 f_{2n} + \ldots + e_n f_{nn}) x_n
\end{aligned}
$$

ou, d'après (68),

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n.$$

On peut donner aux quantités $c_i x_i$ le nom de *composants* de x, suivant l'expression de M. Weierstrass. On retrouve maintenant avec facilité leurs diverses propriétés au moyen des formules (69). Ce que nous avons dit dans les deux premières Parties de ce travail nous dispense d'insister davantage.

120. Le fait capital ici est que, du système des n^2 nombres E, nous avons déduit l'expression des éléments de l'Ensemble $\mathcal{E}$, au moyen de leurs composants, de sorte que ce système des nombres E peut être regardé comme un vrai fondement de la théorie des quantités complexes.

CHAPITRE II.

DE CERTAINES ÉQUATIONS DE CONDITION QUE L'ON RENCONTRE DANS LA THÉORIE DES QUANTITÉS COMPLEXES.

§ I.

Recherche des solutions de ces équations au moyen du système E.

121. Parmi les fonctions entières des quantités multivalentes e_1, e_2, ..., e_n, les plus simples sont les produits de ces quantités deux à deux : d'après ce qu'on a vu au n° 110, chacun de ces produits s'exprime linéairement au moyen des quantités multivalentes e_1, e_2, ..., e_n elles-mêmes; on peut donc écrire, par exemple,

$$e_p e_q = \varepsilon_{1pq} e_1 + \varepsilon_{2pq} e_2 + \ldots + \varepsilon_{npq} e_n. \tag{70}$$

Pour déterminer les coordonnées ε_{1pq}, ε_{2pq}, ..., ε_{npq}, on se servira des équations (54); en observant qu'on a ici

$$\xi_r = \varepsilon_{rpq}, \qquad x_s = e_{ps} e_{qs},$$

on trouvera

$$(71) \qquad \varepsilon_{rpq} = f_{r1} e_{p1} e_{q1} + f_{r2} e_{p2} e_{q2} + \ldots + f_{rn} e_{pn} e_{qn} \qquad (r, p, q = 1, 2, \ldots, n).$$

122. Actuellement, recherchons si le théorème commutatif et le théorème associatif exprimés par les égalités

$$ab = ba,$$
$$(ab)c = (ac)b$$

ont lieu pour les quantités multivalentes e_1, e_2, ..., e_n. Pour vérifier ces propositions, nous serons évidemment conduits à écrire les mêmes conditions que nous avons déjà trouvées dans la I^{re} Partie (n^{os} 9 et 10), savoir :

$$(72) \qquad \varepsilon_{rpq} = \varepsilon_{rqp}$$

et

$$\varepsilon_{1pq} \varepsilon_{k1r} + \varepsilon_{2pq} \varepsilon_{k2r} + \ldots + \varepsilon_{npq} \varepsilon_{knr} = \varepsilon_{1pr} \varepsilon_{k1q} + \varepsilon_{2pr} \varepsilon_{k2q} + \ldots + \varepsilon_{npr} \varepsilon_{knq}.$$
$$(p, q, r, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous écrirons les conditions de cette dernière forme en profitant des conditions (72) supposées remplies, c'est-à-dire

$$(73) \qquad \Sigma_j \varepsilon_{jpq} \varepsilon_{krj} = \Sigma_j \varepsilon_{jpr} \varepsilon_{kqj} \ (^1).$$

Ce sont les équations (72) et (73) que nous avons voulu désigner par le titre de ce Chapitre.

123. Il est facile de reconnaître que les valeurs données aux ε_{rpq} par la formule (71) satisfont aux équations (72) et (73) et en constituent dès lors un système de solutions.

En premier lieu, observons que dans les égalités (71) il n'entre aucune quantité *multivalente*, mais seulement des quantités ordinaires; il est donc permis d'intervertir l'ordre des facteurs de chaque terme;

---

[1] En général, la lettre Σ affectée d'un indice signifiera la somme des termes déduits de l'expression soumise au signe Σ en donnant à cet indice les valeurs $1, 2, \ldots, n$, les autres indices restant fixes.

dès lors, la symétrie par rapport aux deux indices p et q montre immédiatement que

$$\varepsilon_{rpq} = \varepsilon_{rqp}.$$

124. Pour former les sommes qui entrent dans l'égalité (73), j'effectue le produit

$$\begin{aligned}\varepsilon_{jpq}\varepsilon_{krj} = & (f_{j1}e_{p1}e_{q1} + f_{j2}e_{p2}e_{q2} + \ldots + f_{jn}e_{pn}e_{qn}) \\ & \times (f_{k1}e_{r1}e_{j1} + f_{k2}e_{r2}e_{j2} + \ldots + f_{kn}e_{rn}e_{jn});\end{aligned}$$

en groupant dans chaque terme les facteurs qui contiennent l'indice j, on a, pour le produit, la valeur suivante, que j'écris sous forme de Tableau :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{jpq}\varepsilon_{krj} = & f_{j1}e_{j1}e_{p1}e_{q1}e_{r1}f_{k1} + f_{j1}e_{j2}e_{p1}e_{q1}e_{r2}f_{k2} + \ldots + f_{j1}e_{jn}e_{p1}e_{q1}e_{rn}f_{kn} \\ & + f_{j2}e_{j1}e_{p2}e_{q2}e_{r1}f_{k1} + f_{j2}e_{j2}e_{p2}e_{q2}e_{r2}f_{k2} + \ldots + f_{j2}e_{jn}e_{p2}e_{q2}e_{rn}f_{kn} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + f_{jn}e_{j1}e_{pn}e_{qn}e_{r1}f_{k1} + f_{jn}e_{j2}e_{pn}e_{qn}e_{r2}f_{k2} + \ldots + f_{jn}e_{jn}e_{pn}e_{qn}e_{rn}f_{kn}.\end{aligned}$$

A cause des formules (62) et (63), les seuls termes du Tableau précédent qui donneront des termes dans la somme

$$\Sigma_j\, \varepsilon_{jpq}\varepsilon_{krj}$$

seront ceux de la diagonale descendant de gauche à droite, et l'on aura

$$\Sigma_j\, \varepsilon_{jpq}\varepsilon_{krj} = e_{p1}e_{q1}e_{r1}f_{k1} + e_{p2}e_{q2}e_{r2}f_{k2} + \ldots + e_{pn}e_{qn}e_{rn}f_{kn}.$$

Cette formule est symétrique par rapport aux indices p, q, r; par conséquent, si l'on calculait la somme

$$\Sigma_j\, \varepsilon_{jpr}\varepsilon_{kqj},$$

on lui trouverait la même valeur. Ainsi les nombres ε_{rpq} déduits du système E par la formule (71) satisfont bien encore aux conditions (73).

125. *Remarque I.* — Il est évident, d'après ce qui précède, que l'on pourra trouver une infinité de systèmes de solutions des équations (72) et (73). Il suffira pour cela de partir successivement de divers systèmes de n^2 nombres dont le déterminant ne soit pas nul.

Remarque II. — On a noté dans la I^re Partie (n° 8) que la définition des unités principales de M. Weierstrass reposait véritablement sur le choix des nombres ε_{rpq}. Nous venons d'obtenir ici un moyen simple de trouver des nombres ε_{rpq} convenables, et c'est en cela même que consiste une des conséquences les plus remarquables du Mémoire de M. Dedekind, puisque par là nous pouvons effectivement former autant de systèmes de quantités complexes que nous voulons.

§ II.

Calculs auxiliaires.

126. Dans le § I de ce Chapitre, on a montré comment l'on pouvait toujours d'un système quelconque de n^2 nombres, dont le déterminant n'est pas nul, déduire un système de solutions des équations (72) et (73). Il serait intéressant de savoir, en outre, si tout système de solutions de ces équations peut effectivement se déduire d'un tel système de n^2 nombres; mais, pour répondre à cette question, nous avons besoin de calculs préliminaires assez considérables : ces calculs feront l'objet du présent paragraphe [1].

Nous supposerons maintenant que nous avons trouvé un certain système de nombres ε_{rpq} vérifiant les relations (72) et (73); de sorte que, dans ce qui suit, on doit toujours considérer ces nombres ε_{rpq} comme connus.

127. Nous posons

$$\sigma_p = \Sigma_j\, \varepsilon_{jpj}, \tag{74}$$

$$\tau_{pq} = \tau_{qp} = \Sigma_j\, \sigma_j\, \varepsilon_{jpq}, \tag{75}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{vmatrix}. \tag{76}$$

On supposera toujours $\Delta \neq 0$.

Nous introduisons aussi certaines fonctions, soit linéaires, soit qua-

---

[1] Afin que le lecteur puisse plus facilement suivre ces calculs, nous avons groupé les formules dans un Tableau placé à la fin de ce travail.

dratiques, *de n variables absolument indépendantes* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Ce seront les fonctions $\eta_r, \eta_{rs}, \sigma, \tau, \tau_r$ ($r, s = 1, 2, \ldots, n$). Voici leurs définitions :

(77) $$2\eta_r = \Sigma_i \Sigma_j \varepsilon_{rij} \xi_i \xi_j,$$

(78) $$\eta_{rs} = \frac{\partial \eta_r}{\partial \xi_s} = \Sigma_j \varepsilon_{rsj} \xi_j,$$

(79) $$\sigma = \Sigma_j \eta_{jj},$$

(80) $$2\tau = \Sigma_i \Sigma_j \tau_{ij} \xi_i \xi_j$$

(81) $$\tau_r = \frac{\partial \tau}{\partial \xi_r} = \Sigma_j \tau_{rj} \xi_j.$$

128. En vertu de la condition (72), on a

(82) $$\frac{\partial^2 \eta_r}{\partial \xi_p \partial \xi_q} = \varepsilon_{rpq}.$$

De (77) et (78), on tire

$$2\eta_r = \Sigma_i \Sigma_j \varepsilon_{rij} \xi_i \xi_j = \Sigma_i \xi_i \Sigma_j \varepsilon_{rij} \xi_j = \Sigma_i \xi_i \eta_{ri}.$$

De (79), (78) et de (74), en tenant compte de (72), on tire

$$\sigma = \Sigma_i \eta_{ii} = \Sigma_i \Sigma_j \varepsilon_{iij} \xi_j = \Sigma_j \xi_j \Sigma_i \varepsilon_{iij} = \Sigma_j \xi_j \Sigma_i \varepsilon_{iji} = \Sigma_j \sigma_j \xi_j.$$

De (80), (75) et (77), on tire

$$2\tau = \Sigma_i \Sigma_j \tau_{ij} \xi_i \xi_j = \Sigma_i \Sigma_j \Sigma_k \sigma_k \varepsilon_{kij} \xi_i \xi_j = \Sigma_k \sigma_k \Sigma_i \Sigma_j \varepsilon_{kij} \xi_i \xi_j = \Sigma_k \sigma_k (2\eta_k).$$

De (81), (75) et (78), on tire

$$\tau_r = \Sigma_j \tau_{rj} \xi_j = \Sigma_j \Sigma_k \sigma_k \varepsilon_{krj} \xi_j = \Sigma_k \sigma_k \Sigma_j \varepsilon_{krj} \xi_j = \Sigma_k \sigma_k \eta_{kr} = \Sigma_k \sigma_k \frac{\partial \eta_k}{\partial \xi_r}.$$

Donc nous avons les quatre nouvelles formules

(83) $$2\eta_r = \Sigma_i \xi_i \eta_{ri},$$

(84) $$\sigma = \Sigma_j \sigma_j \xi_j,$$

(85) $$\tau = \Sigma_j \sigma_j \eta_j,$$

(86) $$\tau_r = \Sigma_j \sigma_j \eta_{jr} = \Sigma_j \sigma_j \frac{\partial \eta_j}{\partial \xi_r}.$$

129. Dans ce qui suit, nous désignons par $d, d', \ldots, \delta, \delta_1, \ldots, \delta_p, \ldots$ diverses caractéristiques de différentiation.

De (78), on tire

$$d\eta_{rs} = \Sigma_j \, \varepsilon_{rsj} \, d\xi_j. \tag{87}$$

De (77), en profitant en outre de (87) ou de (78) et tenant compte des conditions (72), on tire

$$\begin{aligned} 2\, d\eta_r &= \Sigma_i \, \Sigma_j \, \varepsilon_{rij} \, \xi_i \, d\xi_j + \Sigma_i \, \Sigma_j \, \varepsilon_{rij} \, \xi_j \, d\xi_i = 2\, \Sigma_i \, \Sigma_j \, \varepsilon_{rij} \, \xi_i \, d\xi_j \\ &= 2\, \Sigma_i \, \xi_i \, \Sigma_j \, \varepsilon_{rij} \, d\xi_j = 2\, \Sigma_i \, \xi_i \, d\eta_{ri} \end{aligned}$$

ou

$$= 2\, \Sigma_j \, d\xi_j \, \Sigma_i \, \varepsilon_{rij} \, \xi_i = 2\, \Sigma_j \, d\xi_j \, \eta_{rj},$$

Donc, en ajoutant encore les formules qu'on tire directement de (81), (86), (85), on a les formules

$$d\eta_{rs} = \Sigma_j \, \varepsilon_{rsj} \, d\xi_j, \tag{87}$$

$$d\eta_r = \Sigma_j \, \xi_j \, d\eta_{rj}, \tag{88}$$

$$d\eta_r = \Sigma_j \, \eta_{rj} \, d\xi_j, \tag{89}$$

$$d\tau_r = \Sigma_j \, \tau_{rj} \, d\xi_j, \tag{90}$$

$$d\tau_r = \Sigma_j \, \sigma_j \, d\eta_{jr}, \tag{91}$$

$$d\tau = \Sigma_j \, \sigma_j \, d\eta_j. \tag{92}$$

Remarque. — Il est clair que l'on aurait obtenu les mêmes formules en employant une caractéristique de différentiation autre que d; afin d'abréger, lorsque je serai obligé de changer ainsi la caractéristique, je l'indiquerai en ajoutant au renvoi le signe *.

130. Les conditions (72) et (73) conduisent à la relation

$$\Sigma_j \, d\eta_{kj} \, d'\eta_{jp} = \Sigma_j \, d'\eta_{kj} \, d\eta_{jp}, \tag{93}$$

où d et d' sont deux caractéristiques indépendantes l'une de l'autre. On a en effet (87) et (87*)

$$\begin{aligned} \Sigma_j \, d\eta_{kj} \, d'\eta_{jp} &= \Sigma_j \, \Sigma_i \, \Sigma_q \, \varepsilon_{kji} \, d\xi_i \;\; \varepsilon_{jpq} \, d'\xi_q, \\ \Sigma_j \, d'\eta_{kj} \, d\eta_{jp} &= \Sigma_j \, \Sigma_i \, \Sigma_q \, \varepsilon_{kjq} \, d'\xi_q \, \varepsilon_{jpi} \, d\xi_i. \end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans (93), tenant compte des conditions (72) pour permuter certains indices et faisant tout passer dans le premier membre, on a

$$\Sigma_i \Sigma_q d\xi_i d'\xi_q (\Sigma_j \varepsilon_{kij} \varepsilon_{jpq} - \Sigma_j \varepsilon_{kqj} \varepsilon_{jpi}) = 0,$$

expression effectivement nulle, en vertu des conditions (73). Le calcul fait montre aussi que la formule (93) peut s'écrire

(93′) $$\Sigma_j \Sigma_i \Sigma_q \varepsilon_{kji} \varepsilon_{jpq} d\xi_i d'\xi_q = \Sigma_j \Sigma_i \Sigma_q \varepsilon_{kjq} \varepsilon_{jpi} d'\xi_q d\xi_i.$$

De (93), on tire successivement

$$\Sigma_j d\eta_{kj} d'\eta_{jp} \xi_p = \Sigma_j d'\eta_{kj} d\eta_{jp} \xi_p,$$
$$\Sigma_p \Sigma_j d\eta_{kj} d'\eta_{jp} \xi_p = \Sigma_p \Sigma_j d'\eta_{kj} d\eta_{jp} \xi_p,$$
$$\Sigma_j d\eta_{kj} \Sigma_p \xi_p d'\eta_{jp} = \Sigma_j d'\eta_{kj} \Sigma_p \xi_p d\eta_{jp},$$

et, d'après (88*) et (88),

$$\Sigma_j d\eta_{kj} d'\eta_j = \Sigma_j d'\eta_{kj} d\eta_j.$$

De (93), on tire successivement

$$\Sigma_j d\eta_{kj} d'\eta_{jp} \sigma_k = \Sigma_j d'\eta_{kj} d\eta_{jp} \sigma_k,$$
$$\Sigma_k \Sigma_j \sigma_k d\eta_{kj} d'\eta_{jp} = \Sigma_k \Sigma_j \sigma_k d'\eta_{kj} d\eta_{jp},$$
$$\Sigma_j d'\eta_{jp} \Sigma_k \sigma_k d\eta_{kj} = \Sigma_j d\eta_{jp} \Sigma_k \sigma_k d'\eta_{kj},$$

et, d'après (91) et (91*),

$$\Sigma_j d'\eta_{jp} d\tau_j = \Sigma_j d\eta_{jp} d'\tau_j.$$

Profitant de ce que les variations $d'\xi_1, d'\xi_2, \ldots, d'\xi_n$ sont arbitraires pour les prendre égales respectivement à $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, on tire successivement de (93′), (78) et (87)

$$\Sigma_j \Sigma_i \Sigma_q \varepsilon_{kji} \varepsilon_{jpq} \xi_q d\xi_i = \Sigma_j \Sigma_i \Sigma_q \varepsilon_{kjq} \varepsilon_{jpi} \xi_q d\xi_i,$$
$$\Sigma_j \Sigma_i \varepsilon_{kji} d\xi_i \Sigma_q \varepsilon_{jpq} \xi_q = \Sigma_j \Sigma_i \varepsilon_{jpi} d\xi_i \Sigma_q \varepsilon_{kjq} \xi_q,$$
$$\Sigma_j \Sigma_i \varepsilon_{kji} d\xi_i \eta_{jp} = \Sigma_j \Sigma_i \varepsilon_{jpi} d\xi_i \eta_{kj},$$
$$\Sigma_j \eta_{jp} \Sigma_i \varepsilon_{kji} d\xi_i = \Sigma_j \eta_{kj} \Sigma_i \varepsilon_{jpi} d\xi_i,$$
$$\Sigma_j \eta_{jp} d\eta_{kj} = \Sigma_j \eta_{kj} d\eta_{jp}.$$

En résumé, nous avons les formules

(93) $$\Sigma_j d\eta_{kj} d'\eta_{jp} = \Sigma_j d'\eta_{kj} d\eta_{jp},$$
(94) $$\Sigma_j d\eta_{kj} d'\eta_j = \Sigma_j d'\eta_{kj} d\eta_j,$$
(95) $$\Sigma_j d'\eta_{jp} d\tau_j = \Sigma_j d\eta_{jp} d'\tau_j,$$
(96) $$\Sigma_j \eta_{jp} d\eta_{kj} = \Sigma_j \eta_{kj} d\eta_{jp}.$$

131. Actuellement, définissons n variations $\delta\xi_1, \delta\xi_2, \ldots, \delta\xi_n$ finies par les équations

$$(97)\qquad \begin{cases} \tau_{11}\,\delta\xi_1 + \tau_{12}\,\delta\xi_2 + \ldots + \tau_{1n}\,\delta\xi_n = \sigma_1, \\ \tau_{21}\,\delta\xi_1 + \tau_{22}\,\delta\xi_2 + \ldots + \tau_{2n}\,\delta\xi_n = \sigma_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \tau_{n1}\,\delta\xi_1 + \tau_{n2}\,\delta\xi_2 + \ldots + \tau_{nn}\,\delta\xi_n = \sigma_n. \end{cases}$$

La chose est possible, car, par hypothèse, le déterminant de ces équations, qui est Δ, n'est pas nul (n° 127).

De (90*), on conclut

$$(98)\qquad \delta\tau_r = \sigma_r.$$

De (95*), (98) et (91), on tire

$$(99)\qquad \Sigma_j\, d\tau_j\, \delta\eta_{jp} = \Sigma_j\, d\eta_{jp}\, \delta\tau_j = \Sigma_j\, \sigma_j\, d\eta_{jp} = d\tau_p.$$

Maintenant supposons écrites les formules déduites de (90) en donnant à r les valeurs 1, 2, ..., n; observons que les variations $d\xi_1, d\xi_2, \ldots, d\xi_n$ étant absolument arbitraires et le déterminant Δ différent de zéro, les variations correspondantes $d\tau_1, d\tau_2, \ldots, d\tau_n$ sont linéairement indépendantes, nous concluons alors que la formule (99) ne peut subsister sans être identique; on a donc

$$\delta\eta_{pq} = 0 \quad \text{si } p \neq q,$$
$$\delta\eta_{pq} = 1 \quad \text{si } p = q$$

ou, d'après une notation déjà employée (n° 114),

$$(100)\qquad \delta\eta_{pq} = (p, q).$$

On tire de (88*) et (100)

$$(101)\qquad \delta\eta_r = \Sigma_j\, \xi_j\, \delta\eta_{rj} = \xi_r.$$

On tire de (92*), (101) et (84)

$$\delta\tau = \Sigma_j\, \sigma_j\, \delta\eta_j = \Sigma_j\, \sigma_j\, \xi_j = \sigma.$$

En résumé, ayant défini $\delta\xi_1, \delta\xi_2, \ldots, \delta\xi_n$ par les formules (97), on a

$$(98)\qquad \delta\tau_r = \sigma_r,$$
$$(100)\qquad \delta\eta_{pq} = (p, q),$$
$$(101)\qquad \delta\eta_r = \xi_r,$$
$$(102)\qquad \delta\tau = \sigma.$$

132. Des calculs précédents résulte cette conséquence importante, que pour tout système de nombres ε_{rpq} vérifiant les conditions (72) et (73), et de plus tel que Δ ne soit pas nul, *le déterminant*

$$(103)\qquad \varphi = \begin{vmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \dots & \eta_{1n} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \dots & \eta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \eta_{n1} & \eta_{n2} & \dots & \eta_{nn} \end{vmatrix}$$

n'est pas identiquement nul.

Si, en effet, on attribue respectivement aux variables $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ les valeurs $\delta\xi_1, \delta\xi_2, \dots, \delta\xi_n$ définies tout à l'heure, il devient, d'après (100),

$$(104)\qquad \begin{vmatrix} \delta\eta_{11} & \delta\eta_{12} & \dots & \delta\eta_{1n} \\ \delta\eta_{21} & \delta\eta_{22} & \dots & \delta\eta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta\eta_{n1} & \delta\eta_{n2} & \dots & \delta\eta_{nn} \end{vmatrix} = 1.$$

Remarque I. — En remplaçant $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ respectivement par $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, on reconnaît que le déterminant φ est précisément le même que le déterminant ε considéré dans la première Partie de ce travail (n° 15).

Dans ce qui suit, nous supposerons qu'on ne donne pas aux variables $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ des valeurs annulant φ.

Remarque II. — φ est une fonction homogène du $n^{\text{ième}}$ degré des variables $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$; observant donc que $\delta\xi_1, \delta\xi_2, \dots, \delta\xi_n$ sont des constantes déterminées, que η_{ij} est linéaire et que, par suite,

$$\delta^{p+1}\eta_{ij} = 0 \quad \text{pour} \quad p \geqq 1.$$

On voit que $\delta^n\varphi$ se réduit au déterminant (104) répété $1.2\dots n$ fois, de sorte qu'on a

$$(105)\qquad \frac{\delta^n \varphi}{1.2\dots n} = 1.$$

133. Introduisons de nouvelles variations définies par la formule

$$(106)\qquad \delta_{p+1}\xi_r = \delta_p \eta_r$$

pour toute valeur entière positive, nulle ou négative de l'indice p, et convenons d'ailleurs que δ_0 désigne la caractéristique δ que nous avons déjà rencontrée (n° 131).

De (94*), on tire

$$\Sigma_j \delta_p \eta_{kj} d\eta_j = \Sigma_j d\eta_{kj} \delta_p \eta_j.$$

D'après (106), (87), (72) et (87*), on a

$$\Sigma_j d\eta_{kj} \delta_p \eta_j = \Sigma_j d\eta_{kj} \delta_{p+1} \xi_j = \Sigma_j \Sigma_i \varepsilon_{kji} d\xi_i \delta_{p+1} \xi_j = \Sigma_i d\xi_i \Sigma_j \varepsilon_{kji} \delta_{p+1} \xi_j$$
$$= \Sigma_i d\xi_i \Sigma_j \varepsilon_{kij} \delta_{p+1} \xi_j = \Sigma_i d\xi_i \delta_{p+1} \eta_{ki};$$

donc enfin

$$(107) \qquad \Sigma_j \delta_p \eta_{kj} d\eta_j = \Sigma_j d\eta_{kj} \delta_{p+1} \xi_j = \Sigma_j \delta_{p+1} \eta_{kj} d\xi_j.$$

D'après (89), on a

$$\Sigma_j \delta_p \eta_{kj} d\eta_j = \Sigma_j \delta_p \eta_{kj} \Sigma_i \eta_{ji} d\xi_i = \Sigma_i d\xi_i \Sigma_j \eta_{ji} \delta_p \eta_{kj},$$

et, comme les variations $d\xi_1, d\xi_2, \ldots, d\xi_n$ sont arbitraires, l'identification du premier membre de la formule (107) avec le dernier donne

$$\delta_{p+1} \eta_{ki} = \Sigma_j \eta_{ji} \delta_p \eta_{kj}$$

et, à cause de (96*),

$$(108) \qquad \delta_{p+1} \eta_{ki} = \Sigma_j \eta_{ji} \delta_p \eta_{kj} = \Sigma_j \eta_{kj} \delta_p \eta_{ji}.$$

Faisant $p = -1$, on a (100)

$$\delta_0 \eta_{ki} = \delta \eta_{ki} = (k, i)$$

et par conséquent

$$(109) \qquad \Sigma_j \eta_{ji} \delta_{-1} \eta_{kj} = \Sigma_j \eta_{kj} \delta_{-1} \eta_{ji} = (k, i).$$

134. La formule (108) pour $p = 0$, combinée avec (100), donne

$$\delta_1 \eta_{ki} = \Sigma_j \eta_{ji} \delta_0 \eta_{kj} = \Sigma_j \eta_{ji} \delta \eta_{kj} = \Sigma_j \eta_{ji} (k, j) = \eta_{ki};$$

dès lors, la formule (108) peut s'écrire

$$(110) \qquad \delta_{p+1} \eta_{ki} = \Sigma_j \delta_1 \eta_{ji} \delta_p \eta_{kj},$$

et cela pour toute valeur entière, positive, nulle ou négative de p.

D'une manière générale, on aura

$$(111) \qquad \delta_{p+q} \eta_{ki} = \Sigma_j \delta_p \eta_{kj} \delta_q \eta_{ji}.$$

Cette formule vient d'être démontrée quand on a $q = 1$; elle est évidente pour $q = 0$.

Si l'on admet qu'elle soit vraie lorsqu'on y remplace l'indice q par l'indice $q-1$, elle sera vraie aussi pour l'indice q lui-même; car, en remplaçant dans (110) p par $p+q-1$, on a

$$\delta_{p+q}\eta_{ki} = \Sigma_j\,\delta_1\eta_{ji}\,\delta_{p+q-1}\eta_{kj},$$

et, en vertu d'abord de l'hypothèse, puis de la formule (110),

$$\begin{aligned}\delta_{p+q}\eta_{ki} &= \Sigma_j\,\delta_1\eta_{ji}\,\Sigma_s\,\delta_p\eta_{ks}\,\delta_{q-1}\eta_{sj} = \Sigma_s\,\delta_p\eta_{ks}\,\Sigma_j\,\delta_1\eta_{ji}\,\delta_{q-1}\eta_{sj}\\ &= \Sigma_s\,\delta_p\eta_{ks}\,\delta_q\eta_{si} = \Sigma_j\,\delta_p\eta_{kj}\,\delta_q\eta_{ji}.\end{aligned}$$

La formule (111) est ainsi démontrée pour les valeurs entières, positives ou nulles de q et pour toute valeur entière de p.

Pour établir que l'on peut aussi admettre des valeurs négatives de q, je suppose la formule (111) exacte pour une valeur de q, et je démontre qu'elle l'est encore pour la valeur $q-1$. A cet effet, je remplace p par $p+q-1$ dans (108) et j'en conclus

$$\delta_{p+q}\eta_{ki} = \Sigma_s\,\eta_{si}\,\delta_{p+q-1}\eta_{ks};$$

d'autre part, par hypothèse, on a

$$\delta_{p+q}\eta_{ki} = \Sigma_j\,\delta_p\eta_{kj}\,\delta_q\eta_{ji}$$

ou, d'après (108),

$$\delta_{p+q}\eta_{ki} = \Sigma_j\,\delta_p\eta_{kj}\,\Sigma_s\,\eta_{si}\,\delta_{q-1}\eta_{js} = \Sigma_s\,\eta_{si}\,\Sigma_j\,\delta_p\eta_{kj}\,\delta_{q-1}\eta_{js}.$$

Égalant les deux valeurs de $\delta_{p+q}\eta_{ki}$, on a

$$\Sigma_s\,\eta_{si}\,\delta_{p+q-1}\eta_{ks} = \Sigma_s\,\eta_{si}\,\Sigma_j\,\delta_p\eta_{kj}\,\delta_{q-1}\eta_{js}$$

ou

$$\Sigma_s\,\eta_{si}(\delta_{p+q-1}\eta_{ks} - \Sigma_j\,\delta_p\eta_{kj}\,\delta_{q-1}\eta_{js}) = 0;$$

écrivons les n relations semblables, obtenues en donnant à i les valeurs $1, 2, \ldots, n$. On voit qu'elles ne peuvent subsister que si l'on a séparément

$$\delta_{p+q-1}\eta_{ks} - \Sigma_j\,\delta_p\eta_{kj}\,\delta_{q-1}\eta_{js} = 0$$

pour chaque valeur de s; cela résulte, en effet, de ce que le déterminant φ n'est pas nul (nº 132, remarque I).

Ainsi la formule (111) est absolument générale.

135. De (111) on tire

$$\xi_i\, \delta_{p+q}\, \eta_{ki} = \Sigma_j\, \delta_p\, \eta_{kj}\, \delta_q\, \eta_{ji}\, \xi_i,$$
$$\Sigma_i\, \xi_i\, \delta_{p+q}\, \eta_{ki} = \Sigma_i\, \Sigma_j\, \delta_p\, \eta_{kj}\, \delta_q\, \eta_{ji}\, \xi_i = \Sigma_j\, \delta_p\, \eta_{kj}\, \Sigma_i\, \xi_i\, \delta_p\, \eta_{ji},$$

ou, en appliquant à chaque membre (88*),

(112) $$\delta_{p+q}\, \eta_k = \Sigma_j\, \delta_p\, \eta_{kj}\, \delta_q\, \eta_j$$

ou encore

$$\delta_{p+q-1}\, \eta_k = \Sigma_j\, \delta_p\, \eta_{kj}\, \delta_{q-1}\, \eta_j$$

et, d'après (106),

(113) $$\delta_{p+q}\, \xi_k = \Sigma_j\, \delta_p\, \eta_{kj}\, \delta_q\, \xi_j.$$

136. Établissons la formule

(114) $$d\delta_p\, \xi_r = p\, \Sigma_j\, \delta_{p-1}\, \eta_{rj}\, d\xi_j = p\, \Sigma_j\, d\eta_{rj}\, \delta_{p-1}\, \xi_j.$$

En changeant p en $p-2$ et k en r dans (107), on voit que les deux derniers membres de (114) sont égaux. Ainsi il suffit d'établir l'égalité du premier et du deuxième, ou du premier et du troisième membre de (114).

Pour $p = 0$, les trois membres sont nuls : le premier parce que $\delta_0\, \xi_r = \delta\xi_r$ est une constante, les deux autres à cause du facteur p.

Pour $p = 1$, à cause de (100), (106) et (101), on a

$$\delta_0\, \eta_{rj} = (r, j) \qquad \text{et} \qquad \delta_1\, \xi_r = \delta_0\, \eta_r = \delta\eta_r = \xi_r.$$

Les deux premiers membres sont donc égaux comme se réduisant à $d\xi_r$.

Supposons la formule vraie pour l'indice $p-1$, je dis qu'elle le sera pour l'indice p.

De (89*), (106), (107), (108), on tire

$$\delta_{p-1}\, \eta_r = \Sigma_i\, \eta_{ri}\, \delta_{p-1}\, \xi_i,$$
$$\delta_p\, \xi_r = \Sigma_i\, \eta_{ri}\, \delta_{p-1}\, \xi_i,$$

d'où

$$d.\delta_p\, \xi_r = \Sigma_i\, \delta_{p-1}\, \xi_i\, d\eta_{ri} + \Sigma_i\, \eta_{ri}\, d.\delta_{p-1}\, \xi_i = \Sigma_i\, \delta_{p-1}\, \eta_{ri}\, d\xi_i + \Sigma_i\, \eta_{ri}\, d.\delta_{p-1}\, \xi_i,$$
$$\Sigma_i\, \eta_{ri}\, d.\delta_{p-1}\, \xi_i = (p-1)\, \Sigma_i\, \eta_{ri}\, \Sigma_j\, \delta_{p-2}\, \eta_{ij}\, d\xi_j$$
$$= (p-1)\, \Sigma_j\, d\xi_j\, \Sigma_i\, \eta_{ri}\, \delta_{p-2}\, \eta_{ij} = (p-1)\, \Sigma_j\, d\xi_j\, \delta_{p-1}\, \eta_{rj};$$

donc

$$d.\delta_p \xi_r = \Sigma_i \delta_{p-1} \eta_{ri} d\xi_i + (p-1) \Sigma_j \delta_{p-1} \eta_{rj} d\xi_j = p \Sigma_j \delta_{p-1} \eta_{rj} d\xi_j.$$

Ainsi la formule (114), vraie pour $p = 0$, l'est pour toute valeur positive de p. Nous allons voir qu'elle l'est aussi pour les valeurs négatives; il suffit de montrer que si la formule (114) est vraie pour l'indice p, elle l'est pour l'indice $(p-1)$. Comme précédemment, on a, d'une part,

$$d.\delta_p \xi_r = \Sigma_i \delta_{p-1} \eta_{ri} d\xi_i + \Sigma_i \eta_{ri} d.\delta_{p-1} \xi_i,$$

et, puisque l'égalité (114) est admise pour l'indice p, en reprenant en sens inverse les calculs faits tout à l'heure, on a, d'autre part,

$$\begin{aligned} d.\delta_p \xi_r = p \Sigma_j \delta_{p-1} \eta_{rj} d\xi_j &= \Sigma_i \delta_{p-1} \eta_{ri} d\xi_i + (p-1) \Sigma_j \delta_{p-1} \eta_{rj} d\xi_j \\ &= \Sigma_i \delta_{p-1} \eta_{ri} d\xi_i + (p-1) \Sigma_i \eta_{ri} \Sigma_j \delta_{p-2} \eta_{ij} d\xi_j. \end{aligned}$$

La comparaison des deux valeurs de $d.\delta_p \xi_r$ donne alors

$$\Sigma_i \eta_{ri} d.\delta_{p-1} \xi_i = (p-1) \Sigma_i \eta_{ri} \Sigma_j \delta_{p-2} \eta_{ij} d\xi_j$$

ou

$$\Sigma_i \eta_{ri} [d.\delta_{p-1} \xi_i - (p-1) \Sigma_j \delta_{p-2} \eta_{ij} d\xi_j] = 0;$$

d'où nous concluons, d'après un raisonnement déjà employé au n° 134,

$$d.\delta_{p-1} \xi_i - (p-1) \Sigma_j \delta_{p-2} \eta_{ij} d\xi_j = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La formule (114) est donc absolument générale.

137. Remplaçant d par δ_q dans (114) et tenant compte de (113), on a

$$\delta_q \delta_p \xi_r = p \Sigma_j \delta_{p-1} \eta_{rj} \delta_q \xi_j = p \delta_{p+q-1} \xi_r. \tag{115}$$

Il en résulte que, si λ est une fonction linéaire homogène quelconque de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, on a

$$\delta_q \delta_p \lambda = p \delta_{p+q-1} \lambda; \tag{116}$$

d'où, pour $q = 0$,

$$\delta \delta_p \lambda = p \delta_{p-1} \lambda, \tag{117}$$

d'où

$$\delta\delta\delta_p \lambda = \delta^2 \delta_p \lambda = p \delta\delta_{p-1} \lambda = p(p-1) \delta_{p-2} \lambda;$$

et, en répétant la même opération, on obtiendra d'une manière générale

$$\delta^m \delta_p \lambda = p(p-1)\ldots(p-m+1)\,\delta_{p-m}\lambda \tag{118}$$

et, pour $p = -1$,

$$\delta^m \delta_{-1}\lambda = (-1)^m\, 1.2\ldots m\, \delta_{-1-m}\lambda. \tag{119}$$

138. Dans les numéros suivants, nous étudierons d'une manière particulière le déterminant φ.

En premier lieu,

$$\varphi\, \delta_{-1}\eta_{ri}$$

est précisément le coefficient de l'élément η_{ir} dans le déterminant φ.

Dans la formule (109), en effet, laissant invariable l'indice i, attribuons successivement à k les valeurs 1, 2, ..., n, nous obtiendrons les n équations

$$\begin{aligned}
&\eta_{11}\,\delta_{-1}\eta_{1i} + \ldots + \eta_{1r}\,\delta_{-1}\eta_{ri} + \ldots + \eta_{1n}\,\delta_{-1}\eta_{ni} = (1, i),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\eta_{i1}\,\delta_{-1}\eta_{1i} + \ldots + \eta_{ir}\,\delta_{-1}\eta_{ri} + \ldots + \eta_{in}\,\delta_{-1}\eta_{ni} = (i, i),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\eta_{n1}\,\delta_{-1}\eta_{1i} + \ldots + \eta_{nr}\,\delta_{-1}\eta_{ri} + \ldots + \eta_{nn}\,\delta_{-1}\eta_{ni} = (n, i).
\end{aligned}$$

Il suffit maintenant de les résoudre par rapport à $\delta_{-1}\eta_{ri}$ et de multiplier la valeur obtenue par φ pour vérifier la proposition énoncée [1].

On a donc

$$\varphi = \Sigma_j\, \eta_{jr}\, \varphi\, \delta_{-1}\eta_{rj}. \tag{120}$$

139. D'après la règle connue pour la dérivation des déterminants, on aura, en appliquant la formule (120) successivement aux diverses valeurs de r,

$$\begin{aligned}
d\varphi &= \Sigma_j\, d\eta_{j1}\, \varphi\, \delta_{-1}\eta_{1j} + \Sigma_j\, d\eta_{j2}\, \varphi\, \delta_{-1}\eta_{2j} + \ldots + \Sigma_j\, d\eta_{jn}\, \varphi\, \delta_{-1}\eta_{nj}\\
&= \varphi\, \Sigma_j\, \Sigma_i\, d\eta_{ji}\, \delta_{-1}\eta_{ij}
\end{aligned}$$

ou, d'après (87),

$$d\varphi = \varphi\, \Sigma_j\, \Sigma_i\, \Sigma_k\, \delta_{-1}\eta_{ij}\, \varepsilon_{jik}\, d\xi_k.$$

---

[1] φ n'est pas nul (n° 132, remarque I).

Pour transformer cette valeur de $d\varphi$, observons qu'on a

$$\Sigma_j \varepsilon_{rrj} \delta_{-1} \eta_{js} = \Sigma_j \varepsilon_{jrs} \delta_{-1} \eta_{rj}.$$

En effet, lorsque dans (93) on remplace d' par δ_{-1}, k par r, p par s, qu'on prend, de part et d'autre, les coefficients des variations arbitraires $d\xi_1$, $d\xi_2$, ..., $d\xi_n$, qu'on les égale, après avoir tenu compte de (87), et qu'enfin on se rappelle les conditions (72), on est précisément amené à écrire cette formule.

On a donc

$$\begin{aligned} d\varphi &= \varphi \, \Sigma_i \Sigma_k \, d\xi_k \, \Sigma_j \varepsilon_{jik} \delta_{-1} \eta_{ij} = \varphi \, \Sigma_i \Sigma_k \, d\xi_k \, \Sigma_j \varepsilon_{iij} \delta_{-1} \eta_{jk} \\ &= \varphi \, \Sigma_k \Sigma_j \, d\xi_k \, \delta_{-1} \eta_{jk} \, \Sigma_i \varepsilon_{iij} \end{aligned}$$

et, à cause de (72), (74) et (91*),

$$d\varphi = \varphi \, \Sigma_k \Sigma_j \, \sigma_j \, d\xi_k \, \delta_{-1} \eta_{jk} = \varphi \, \Sigma_k \, \delta_{-1} \tau_k \, d\xi_k. \tag{121}$$

D'autre part, de (81) on tire

$$d\tau = \Sigma_j \tau_j \, d\xi_j.$$

Supposons prises constantes les variations $d\xi_1$, $d\xi_2$, ..., $d\xi_n$; nous pourrons déterminer ces valeurs constantes, de telle sorte que la fonction de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ linéaire et homogène $d\tau$ soit telle fonction linéaire et homogène que nous voudrons; car la détermination de ces constantes se fera au moyen d'équations analogues aux équations (97); ces équations, du reste, donneront toujours des solutions puisqu'on a $\Delta \neq 0$.

Soit λ une fonction linéaire quelconque; dans notre hypothèse, on a

$$\delta_{-1} \, d\tau = \Sigma_j \, d\xi_j \, \delta_{-1} \tau_j$$

et, à cause de (121),

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = \delta_{-1} \, d\tau. \tag{122}$$

ou

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = \delta_{-1} \lambda. \tag{122'}$$

140. Posons

$$\varphi_\mu = \frac{(-1)^\mu}{1 . 2 \ldots \mu} \delta^\mu \varphi, \tag{123}$$

d'où

(124) $$\mu\varphi_\mu = -\,\delta\varphi_{\mu-1};$$

on a aussi

$$d\varphi_m = d\left[\frac{(-1)^m}{1.2\ldots m}\,\delta^m\varphi\right] = \frac{(-1)}{1.2\ldots m}\,\delta^m d\varphi;$$

d'après (122′) et en admettant, par conséquent, que les $d\xi_i$ sont constants, on a encore

$$\delta^m d\varphi = \delta^m(\varphi\,\delta_{-1}\lambda) = \delta^m\varphi\,\delta_{-1}\lambda + \frac{m}{1}\,\delta^{m-1}\varphi\,\delta\delta_{-1}\lambda + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}\,\delta^{m-p}\varphi\,\delta^p\delta_{-1}\lambda + \ldots + \varphi\,\delta^m\delta_{-1}\lambda$$

et, à cause de (119),

$$\delta^m d\varphi = \delta^m\varphi\,\delta_{-1}\lambda - m\,\delta^{m-1}\varphi\,\delta_{-2}\lambda + m(m-1)\,\delta^{m-2}\varphi\,\delta_{-3}\lambda - \ldots$$
$$+ (-1)^p\,m(m-1)\ldots(m-p+1)\,\delta^{m-p}\varphi\,\delta_{-1-p}\lambda + \ldots,$$

d'où enfin (123)

(125) $$\left\{\begin{array}{l} d\varphi_m = \varphi_m\,\delta_{-1}\lambda + \varphi_{m-1}\,\delta_{-2}\lambda + \ldots + \varphi_1\,\delta_{-m}\lambda + \varphi\,\delta_{-1-m}\lambda = \displaystyle\sum_{\mu=0}^{\mu=m}\varphi_\mu\,\delta_{\mu-m-1}\lambda \\ \qquad\qquad (\varphi_0 = \varphi). \end{array}\right.$$

Distinguons les deux cas

$$m \geqq n,$$
$$m < n.$$

Premier cas. — On a (105)

$$\varphi_n = (-1)^n$$

et, par conséquent (124),

$$0 = \varphi_{n+1} = \varphi_{n+2} = \ldots;$$

d'où, si $m \geqq n$,

(126) $$0 = d\varphi_m = \sum_{\mu=0}^{\mu=m}\varphi_\mu\,\delta_{\mu-m-1}\lambda = \sum_{\mu=0}^{\mu=n}\varphi_\mu\,\delta_{\mu-m-1}\lambda.$$

La fonction linéaire homogène λ étant quelconque, on peut la remplacer successivement par $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. On a donc

(127) $$\sum_{\mu=0}^{\mu=n}\varphi_\mu\,\delta_{\mu-m-1}\xi_r = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n) \qquad (m \geqq n).$$

Soit ψ une fonction quelconque des ξ_i, on aura

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n} \varphi_\mu \delta_{\mu-m-1} \psi = 0, \tag{128}$$

car

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n} \varphi_\mu \delta_{\mu-m-1} \psi = \sum_{\mu=0}^{\mu=n} \sum_{j=1}^{j=n} \varphi_\mu \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j} \delta_{\mu-m-1} \xi_j = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j} \sum_{\mu=0}^{\mu=n} \varphi_\mu \delta_{\mu-m-1} \xi_j = 0.$$

Appliquant (128) à la fonction $\delta_{p+m+2}\xi_r$, où p désigne un entier quelconque, on a

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n} \varphi_\mu \delta_{\mu-m-1} \delta_{p+m+2} \xi_r = 0 \quad (m \geqq n),$$

mais (116)

$$\delta_{\mu-m-1} \delta_{p+m+2} \xi_r = (p+m+2) \delta_{p+\mu} \xi_r;$$

donc

$$(p+m+2) \sum_{\mu=0}^{\mu=n} \varphi_\mu \delta_{p+\mu} \xi_r = 0,$$

et, comme pour chaque entier p, on peut toujours choisir l'entier m $(m \geqq n)$, tel que $p+m+2$ ne soit pas nul, on voit donc en particulier que l'on a pour $p \geqq 0$

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n} \varphi_\mu \delta_{p+\mu} \xi_r = 0; \tag{129}$$

d'où l'on déduit [de la même manière que la formule (128) se déduit de la formule (127)], pour une fonction quelconque,

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n} \varphi_\mu \delta_{p+\mu} \psi = 0. \tag{130}$$

Et, en appliquant à la fonction σ,

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n} \varphi_\mu \delta_{p+\mu} \sigma = 0; \tag{131}$$

cette formule est importante.

Deuxième cas. — Si $m < n$, on a

$$d\varphi_m = \sum_{\mu=0}^{\mu=m} \varphi_\mu \delta_{\mu-m-1}\lambda = \sum_{\mu=0}^{\mu=n} \varphi_\mu \delta_{\mu-m-1}\lambda - \sum_{\mu=m+1}^{\mu=n} \varphi_\mu \delta_{\mu-m-1}\lambda$$

ou (130) simplement

$$d\varphi_m = - \sum_{\mu=m+1}^{\mu=n} \varphi_\mu \delta_{\mu-m-1}\lambda;$$

posant $\mu = m + 1 + \mu'$, puis remplaçant de nouveau μ' par μ, on a

$$d\varphi_m = - \sum_{\mu=0}^{\mu=n-m-1} \varphi_{\mu+m+1} \delta_\mu \lambda.$$

Particularisons la fonction linéaire λ et prenons-la égale à $d\tau$, nous obtiendrons

$$d\varphi_m = - \sum_{\mu=0}^{\mu=n-m-1} \varphi_{\mu+m+1} \delta_\mu \, d\tau.$$

Nous pouvons, dans cette formule, remplacer les variations constantes $d\xi_i$ par les variations correspondantes $\delta\xi_i$ qu'on sait être constantes, et l'on a, en vertu de (102) et (124),

$$-(m+1)\varphi_{m+1} = - \sum_{\mu=0}^{\mu=n-m-1} \varphi_{\mu+m+1} \delta_\mu \sigma,$$

ou, faisant $m + 1 = m'$ et supprimant l'accent,

$$m\varphi_m = \sum_{\mu=0}^{\mu=n-m} \varphi_{\mu+m} \delta_\mu \sigma. \tag{132}$$

Cette formule importante a lieu pour

$$m = 1, 2, \ldots, n$$

et aussi pour $m = 0$, en vertu de (131).

§ III.

Détermination du système de n^2 nombres dont dépend un système donné de solutions des équations de condition.

141. Ce paragraphe est consacré à la démonstration de la proposition que voici :

« *Un système donné de nombres* ε_{rpq} *vérifiant les conditions* (72), (73) *et* $\Delta \neq 0$ *peut toujours se déduire, au moyen des formules* (71), *d'un système de* n^2 *nombres* e_{ij}, *dont le déterminant n'est pas nul; et le système des nombres* e_{ij} *correspondant à un système donné de nombres* ε_{rpq} *est unique.* »

Le déterminant φ est une fonction homogène du $n^{\text{ième}}$ degré des n variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Si, d'une manière générale, on y change

$$\xi_r \quad \text{en} \quad \xi_r - X\delta\xi_r$$

($\delta\xi_1, \delta\xi_2 \ldots, \delta\xi_n$ étant les constantes déterminées n° 131), φ deviendra, d'après la formule de Taylor,

$$\varphi - X\frac{\delta\varphi}{1} + X^2\frac{\delta^2\varphi}{1.2} - \ldots + (-1)^n X^n \frac{\delta^n\varphi}{1.2\ldots n},$$

c'est-à-dire (123)

$$\Phi = \varphi + X\varphi_1 + X^2\varphi_2 + \ldots + X^n\varphi_n \quad (^1); \tag{133}$$

à cause de (105), on pourra écrire identiquement

$$\Phi(X) = (x_1 - X)(x_2 - X)\ldots(x_n - X), \tag{134}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant les n racines de l'équation $\Phi = 0$.

---

(1) En observant que le changement de ξ_r en $\xi_r - X\delta\xi_r$ remplace, d'après (100), η_{ij} par $\eta_{ij} - (i,j)X$, Φ peut encore s'écrire

$$\Phi = \begin{vmatrix} \eta_{11} - X & \eta_{12} & \ldots & \eta_{1n} \\ \eta_{21} & \eta_{22} - X & \ldots & \eta_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ \eta_{n1} & \eta_{n2} & \ldots & \eta_{nn} - X \end{vmatrix}.$$

142. Posons

$$S_p = x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p \qquad (S_0 = n);$$

les formules de Newton, appliquées à la sommation des puissances semblables des racines de l'équation $\Phi = 0$, sont ici

$$(135) \qquad \varphi S_p + \varphi_1 S_{p+1} + \ldots + \varphi_n S_{p+n} = 0 \qquad (p \geqq 0)$$

et

$$p\varphi_{n-p} + \varphi_{n-p+1} S_1 + \ldots + \varphi_n S_p = 0 \qquad (p < n);$$

cette dernière peut s'écrire, en faisant $n - p = m$,

$$(136) \qquad m\varphi_m = \varphi_m S_0 + \varphi_{m+1} S_1 + \ldots + \varphi_n S_{n-m} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, n);$$

ces deux formules déterminent complètement et d'une *seule manière* les sommes $S_1, S_2, \ldots$ en fonction des coefficients $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de l'équation $\Phi = 0$. Or, d'après les formules (131) et (132) trouvées au § II de ce Chapitre, on a aussi

$$\varphi\, \delta_p \sigma + \varphi_1 \delta_{p+1} \sigma + \ldots + \varphi_n \delta_{p+n} \sigma = 0 \qquad (p \geqq 0)$$

et

$$m\varphi_m = \varphi_m \delta\sigma + \varphi_{m+1} \delta_1 \sigma + \ldots + \varphi_n \delta_{n-m} \sigma \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, n);$$

il faut donc en conclure rigoureusement

$$(137) \qquad S_p = \delta_p \sigma.$$

On voit en conséquence que le discriminant D de l'équation $\Phi = 0$, c'est-à-dire le produit des carrés des différences des racines, a pour valeur

$$D = \begin{vmatrix} \delta\sigma & \delta_1 \sigma & \ldots & \delta_{n-1} \sigma \\ \delta_1 \sigma & \delta_2 \sigma & \ldots & \delta_n \sigma \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_{n-1} \sigma & \delta_n \sigma & \ldots & \delta_{2n-2} \sigma \end{vmatrix}.$$

143. Transformons cette expression. On a (90*)

$$\delta_p \tau_r = \tau_{r1} \delta_p \xi_1 + \tau_{r2} \delta_p \xi_2 + \ldots + \tau_{rn} \delta_p \xi_n;$$

on en conclut

$$
\begin{vmatrix}
\partial\tau_1 & \partial\tau_2 & \partial\tau_n \\
\partial_1\tau_1 & \partial_1\tau_2 & \partial_1\tau_n \\
\dots & \dots & \dots \\
\partial_{n-1}\tau_1 & \partial_{n-1}\tau_2 & \partial_{n-1}\tau_n
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
\tau_{11}\,\partial\xi_1 + \tau_{12}\,\partial\xi_2 + \ldots + \tau_{1n}\,\partial\xi_n & \tau_{21}\,\partial\xi_1 + \tau_{22}\,\partial\xi_2 + \ldots + \tau_{2n}\,\partial\xi_n & \ldots & \tau_{n1}\,\partial\xi_1 + \ldots + \tau_{nn}\,\partial\xi_n \\
\tau_{11}\,\partial_1\xi_1 + \tau_{12}\,\partial_1\xi_2 + \ldots + \tau_{1n}\,\partial_1\xi_n & \tau_{21}\,\partial_1\xi_1 + \tau_{22}\,\partial_1\xi_2 + \ldots + \tau_{2n}\,\partial_1\xi_n & \ldots & \tau_{n1}\,\partial_1\xi_1 + \ldots + \tau_{nn}\,\partial_1\xi_n \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\tau_{11}\,\partial_{n-1}\xi_1 + \tau_{12}\,\partial_{n-1}\xi_2 + \ldots + \tau_{1n}\,\partial_{n-1}\xi_n & \tau_{21}\,\partial_{n-1}\xi_1 + \tau_{22}\,\partial_{n-1}\xi_2 + \ldots + \tau_{2n}\,\partial_{n-1}\xi_n & \ldots & \tau_{n1}\,\partial_{n-1}\xi_1 + \ldots + \tau_{nn}\,\partial_{n-1}\xi_n
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
\tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1n} \\
\tau_{21} & \tau_{22} & \ldots & \tau_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\tau_{n1} & \tau_{n2} & \ldots & \tau_{nn}
\end{vmatrix}
\times
\begin{vmatrix}
\partial\xi_1 & \partial\xi_2 & \ldots & \partial\xi_n \\
\partial_1\xi_1 & \partial_1\xi_2 & \ldots & \partial_1\xi_n \\
\dots & \dots & \ldots & \dots \\
\partial_{n-1}\xi_1 & \partial_{n-1}\xi_2 & \ldots & \partial_{n-1}\xi_n
\end{vmatrix}
= \Delta\rho,
$$

en appelant ρ le deuxième déterminant facteur.

Je dis maintenant que, pour le discriminant D, on a

$$D = \Delta\rho^2.$$

Effectuons, en effet, le produit des deux déterminants $\Delta\rho$ et ρ, en procédant par ligne dans l'un et l'autre déterminant. Le $(q+1)^{\text{ième}}$ élément de la $(p+1)^{\text{ième}}$ colonne du déterminant produit sera donné par la combinaison de la $(q+1)^{\text{ième}}$ ligne de $\Delta\rho$ avec la $(p+1)^{\text{ième}}$ ligne de ρ, c'est-à-dire sera

$$\Sigma_j\, \partial_q \tau_j\, \partial_p \xi_j.$$

En se servant de (91*), (113), puis (84), on trouve

$$\partial_q \tau_j = \Sigma_k\, \sigma_k\, \partial_q \eta_{kj},$$

$$\partial_{p+q}\, \xi_k = \Sigma_j\, \partial_q \eta_{kj}\, \partial_p\, \xi_j,$$

$$\Sigma_j\, \partial_q \tau_j\, \partial_p\, \xi_j = \Sigma_j\, \partial_p\, \xi_j\, \Sigma_k\, \sigma_k\, \partial_q\, \eta_{kj} = \Sigma_k\, \sigma_k\, \Sigma_j\, \partial_p\, \xi_j\, \partial_q\, \eta_{kj} = \Sigma_k\, \sigma_k\, \partial_{p+q}\, \xi_k = \partial_{p+q}\, \sigma.$$

Ainsi l'élément qui appartient à la $(p+1)^{\text{ième}}$ colonne et à la $(q+1)^{\text{ième}}$ ligne est précisément le même dans les deux déterminants $\Delta\rho^2$ et D; on a donc effectivement

$$D = \Delta\rho^2. \tag{138}$$

De là cette conséquence que D et ρ sont différents de zéro en même temps (car $\Delta \neq 0$).

On peut démontrer que, si Δ n'est pas nul, comme on l'a supposé dès le commencement, on peut toujours choisir des valeurs pour les variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, telles que l'équation $\Phi = 0$ n'ait aucune racine multiple; dans ce cas, ni le discriminant D, ni le déterminant $\underset{\cdot}{\rho}$ ne sont nuls [1]. Nous supposerons les valeurs des variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ choisies en fait, de manière qu'il en soit ainsi.

---

[1] Pour établir cette proposition, on montre d'abord que les n racines de l'équation $\Phi = 0$ sont de la forme

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_n\xi_n.$$

Cela étant, et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ désignant ces n racines, au moyen des formules (137), (84), (106), (85), (89), (101), (83), on montre que

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 2\tau;$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant des fonctions linéaires homogènes des variables ξ_j, on voit que la forme quadratique 2τ est décomposée en une somme de n carrés. Le discriminant de cette forme est précisément Δ, qui, par hypothèse, n'est pas nul; on en conclut que les n fonctions linéaires $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont linéairement indépendantes. Leur déterminant n'étant pas nul, on pourra déterminer $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ par les équations

$$x_1 = a, \qquad x_2 = b, \qquad \ldots, \qquad x_n = l,$$

$a, b, \ldots, l$ étant n quantités distinctes. On aura ainsi atteint le but proposé.

Voici maintenant, en résumé, comment on montre que les racines de l'équation $\Phi = 0$ sont de la forme $X = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_n\xi_n$.

Soient $d\xi_i$ et $d'\xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ des variations constantes; $d\tau_r, d\eta_{rs}, d'\tau_r, d'\eta_{rs}$ sont alors constants. L'application successive des formules (91), (89*), (96), (86), (89*) conduit à

$$\text{(A)} \qquad \Sigma_j\, d\tau_j\, d'\eta_j = \Sigma_j\, \tau_j\, d\,d'\eta_j.$$

Partant de

$$d'\log\underset{\cdot}{\varphi} = \Sigma_k\, \delta_{-1}\tau_k\, d'\xi_k,$$

au moyen de (121*), (86), (81), (114), (75), (90), (88) et enfin (A), et de ce que $d'\xi_k$, $d\eta_{js}$, $d'\tau_j$ sont constants, on déduit

$$\text{(B)} \qquad d\,d'\log\underset{\cdot}{\varphi} = -\,\delta_2\,\Sigma_j\,\tau_j\,d\,d'\eta_j.$$

On définit une troisième variation (constante) par la formule

$$d''\xi_r = d\,d'\eta_r.$$

Appliquant (81), (B), (119), (122), on trouvera

$$\text{(C)} \qquad d\,d'\log\underset{\cdot}{\varphi} = d''\delta\log\underset{\cdot}{\varphi}.$$

On remarque alors que l'on a

$$\delta\left(\frac{\underset{\cdot}{\varphi}^2\, d''\delta\log\underset{\cdot}{\varphi}}{\delta\underset{\cdot}{\varphi}}\right) = \underset{\cdot}{\varphi}\,\delta\left(\frac{d''\delta\underset{\cdot}{\varphi}}{\delta\underset{\cdot}{\varphi}}\right);$$

cette formule montre que son premier membre est divisible par $\underset{\cdot}{\varphi}$.

De (C) et en prenant les variations constantes $d'\xi_r$ égales aux variations correspondantes $d\xi_r$, on conclut que l'expression

$$\text{(D)} \qquad R = \delta\underset{\cdot}{\varphi}^2\, d^2\underset{\cdot}{\varphi} - 2\,\delta\underset{\cdot}{\varphi}\, d\underset{\cdot}{\varphi}\,\delta d\underset{\cdot}{\varphi} + \delta^2\underset{\cdot}{\varphi}\, d\underset{\cdot}{\varphi}^2$$

144. Cela posé, soit x l'une quelconque des racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$; définissons n quantités $e_1, e_2, \ldots, e_n$ par les égalités

$$(139)\quad \left\{\begin{array}{l} e_1\delta\xi_1 \quad + e_2\delta\xi_2 \quad + \ldots + e_n\delta\xi_n \quad = 1, \\ e_1\delta_1\xi_1 \quad + e_2\delta_1\xi_2 \quad + \ldots + e_n\delta_1\xi_n \quad = x, \\ e_1\delta_2\xi_1 \quad + e_2\delta_2\xi_2 \quad + \ldots + e_n\delta_2\xi_n \quad = x^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ e_1\delta_{n-1}\xi_1 + e_2\delta_{n-1}\xi_2 + \ldots + e_n\delta_{n-1}\xi_n = x^{n-1}; \end{array}\right.$$

---

peut s'écrire, en désignant par P une fonction entière de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$,

$$(E)\qquad R = \varphi P.$$

Ce point important établi, soit, d'une manière générale, ψ une fonction entière des variables ξ_r; posons

$$\varepsilon(\psi) = \psi - X\frac{\delta\psi}{1} + X^2\frac{\delta^2\psi}{1.2} - \ldots$$

[résultat des substitutions $(\xi_r \mid \xi_r - X\,\delta\xi_r)$ dans ψ], on aura (car les $d\xi_r$ sont constants)

$$(F)\qquad d\,\varepsilon(\psi) = \varepsilon(d\psi) - \varepsilon(\delta\psi)\,dX.$$

L'équation $\Phi = 0$ pourra s'écrire

$$(G)\qquad \varepsilon(\varphi) = 0.$$

Soit X une racine de l'équation (G); en différentiant deux fois et appliquant chaque fois (F), on a

$$(H)\qquad d\,\varepsilon(\varphi) = 0 = \varepsilon(d\varphi) - \varepsilon(\delta\varphi)\,dX,$$

$$\begin{aligned} 0 &= d[\varepsilon(d\varphi)] - d[\varepsilon(\delta\varphi)\,dX] \\ &= \varepsilon(d^2\varphi) - \varepsilon(\delta\, d\varphi)\,dX - \varepsilon(\delta\varphi)\,d^2X - dX[\varepsilon(d\,\delta\varphi) - \varepsilon(\delta^2\varphi)\,dX]; \end{aligned}$$

éliminant dX au moyen de (H) et parce que $\delta\, d\varphi = d\,\delta\varphi$, on a

$$(K)\quad [\varepsilon(\delta\varphi)]^3\,d^2X = [\varepsilon(\delta\varphi)]^2\,\varepsilon(d^2\varphi) - 2\,\varepsilon(\delta\varphi)\,\varepsilon(d\,\delta\varphi)\,\varepsilon(d\varphi) + \varepsilon(\delta^2\varphi)\,[\varepsilon(d\varphi)]^2.$$

D'ailleurs, pour deux fonctions entières ψ et ψ_1 des variables ξ_r, on a

$$\varepsilon(\psi\psi_1) = \varepsilon(\psi)\,\varepsilon(\psi_1);$$

l'égalité (K) peut s'écrire (D), (E)

$$[\varepsilon(\delta\varphi)]^3\,d^2X = \varepsilon(R) = \varepsilon(\varphi)\,\varepsilon(P).$$

Si X est une racine de (G), on a $d^2X = 0$, quels que soient les ξ_r; car $\varepsilon(\delta\varphi)$ ne peut être identiquement nul, puisque $\delta\varphi$ lui-même ne l'est pas [en effet (105) donne $\delta^n\varphi = 1.2..n$].

Donc on a

$$X = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_n\xi_n$$

sans terme indépendant des ξ_r, puisque pour $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0$, $\Phi = 0$ se réduit à $X^n = 0$.

(*Voir* les Notes de M. Dedekind dans les *Vorlesungen über Zahlentheorie*, von Lejeune-Dirichlet. Zweite Auflage, p. 434; 1871.)

la chose est possible, puisque l'on a

$$\rho \neq 0.$$

Mais, en outre, on a aussi

$$e_1 \partial_{n+p} \xi_1 + e_2 \partial_{n+p} \xi_2 + \ldots + e_n \partial_{n+p} \xi_n = x^{n+p},$$

pour toutes les valeurs

$$p = 0, 1, 2, \ldots.$$

En effet, supposons que l'on ait

$$(140) \qquad e_1 \partial_m \xi_1 + e_2 \partial_m \xi_2 + \ldots + e_n \partial_m \xi_n = x^m,$$

pour les valeurs

$$m = p, \quad p+1, \quad \ldots, \quad p+n-1;$$

multiplions (140) par φ_{m-p}, puis donnons à m successivement les valeurs p, $p+1$, ..., $p+n-1$ et ajoutons tous les résultats obtenus, nous aurons

$$e_1 \sum_{m=p}^{m=p+n-1} \varphi_{m-p} \partial_m \xi_1 + e_2 \sum_{m=p}^{m=p+n-1} \varphi_{m-p} \partial_m \xi_2 + \ldots + e_n \sum_{m=p}^{m=p+n-1} \varphi_{m-p} \partial_m \xi_n = \sum_{m=p}^{m=p+n-1} \varphi_{m-p} x^m$$

ou, en posant $m - p = \mu$,

$$\sum_j \left(e_j \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \varphi_\mu \partial_{\mu+p} \xi_j \right) = \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \varphi_\mu x^{\mu+p}.$$

D'après la relation (129), on a

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \varphi_\mu \partial_{\mu+p} \xi_j = - \varphi_n \partial_{n+p} \xi_j,$$

et, d'après l'équation $\Phi = 0$,

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \varphi_\mu x^{\mu+p} = - \varphi_n x^{p+n}.$$

On a donc aussi

$$\Sigma_j(-e_j\varphi_n\delta_{n+p}\xi_j) = -\varphi_n x^{p+n}$$

ou

$$e_1\delta_{n+p}\xi_1 + e_2\delta_{n+p}\xi_2 + \ldots + e_n\delta_{n+p}\xi_n = x^{p+n}$$

(car $\varphi_n \neq 0$). C'est dire que, si l'égalité (140) a lieu pour $n-1$ valeurs consécutives de l'entier m, elle a lieu aussi pour la valeur suivante et, par conséquent, à cause de (139), elle est générale.

145. Définissons maintenant, pour chaque système d'indices r, s, de nouvelles quantités au moyen des égalités

$$e_r^{(s)} = e_s^{(r)} = \varepsilon_{1rs}e_1 + \varepsilon_{2rs}e_2 + \ldots + \varepsilon_{nrs}e_n. \tag{141}$$

Multiplions les deux membres par

$$\delta_p\xi_r\,\delta_q\xi_s,$$

attribuons à r et s tous les systèmes de valeurs déduits de

$$r = 1, 2, \ldots, n, \qquad s = 1, 2, \ldots, n$$

et faisons la somme; nous aurons

$$\Sigma_r\Sigma_s e_r^{(s)}\delta_p\xi_r\delta_q\xi_s = \Sigma_r\Sigma_s\Sigma_j\varepsilon_{jrs}e_j\delta_p\xi_r\delta_q\xi_s = \Sigma_r\Sigma_j e_j\delta_p\xi_r\Sigma_s\varepsilon_{jrs}\delta_q\xi_s;$$

mais (78) et (113)

$$\eta_{jr} = \Sigma_s\varepsilon_{jrs}\xi_s,$$
$$\delta_{p+q}\xi_j = \Sigma_r\delta_q\eta_{jr}\delta_p\xi_r.$$

Donc, en tenant compte aussi de (140),

$$\begin{aligned}\Sigma_r\Sigma_s e_r^{(s)}\delta_p\xi_r\delta_q\xi_s &= \Sigma_j\Sigma_r e_j\delta_p\xi_r\delta_q\eta_{jr} = \Sigma_j e_j\delta_{p+q}\xi_j \\ &= x^{p+q} = x^p x^q = (\Sigma_r e_r\delta_p\xi_r)(\Sigma_s e_s\delta_q\xi_s).\end{aligned}$$

On en conclut, en ordonnant par rapport à $\delta_p\xi_r$ et $\delta_q\xi_s$,

$$\Sigma_r\Sigma_s(e_r^{(s)} - e_r e_s)\delta_p\xi_r\delta_q\xi_s = 0.$$

ou

$$\begin{aligned}[\Sigma_s(e_1^{(s)} - e_1e_s)\delta_q\xi_s]\delta_p\xi_1 + [\Sigma_s(e_2^{(s)} - e_2e_s)\delta_q\xi_s]\delta_p\xi_2 + \ldots \\ + [\Sigma_s(e_n^{(s)} - e_ne_s)\delta_q\xi_s]\delta_p\xi_n = 0.\end{aligned}$$

Donnant à p successivement les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$, puisque le déterminant ρ est différent de zéro, on doit avoir

$$\Sigma_s (e_j^{(s)} - e_j e_s) \partial_q \xi_s = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

et cela pour toutes les valeurs $q = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Ici encore, l'hypothèse que le déterminant ρ est différent de zéro exige que l'on ait

$$e_j^{(s)} = e_j e_s \qquad (j = 1, 2, \ldots, n; \quad s = 1, 2, \ldots, n)$$

ou, ce qui revient au même (141),

$$(142) \qquad e_r e_s = \varepsilon_{1rs} e_1 + e_{2rs} e_2 + \ldots + \varepsilon_{nrs} e_n.$$

146. A présent, reprenons tous les calculs que nous venons de faire pour chacune des racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de l'équation $\Phi = 0$; nous obtiendrons chaque fois un système de n nombres, que nous désignerons par

$$\mathrm{E} \left\{ \begin{array}{llll} e_{11}, & e_{21}, & \ldots, & e_{n1}, \\ e_{12}, & e_{22}, & \ldots, & e_{n2}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ e_{1n}, & e_{2n}, & \ldots, & e_{nn}. \end{array} \right.$$

Pour chacun de ces systèmes, la formule (142) aura lieu, de sorte que les n quantités

$$e_1, \quad e_2, \quad \ldots, \quad e_n$$

peuvent être regardées comme un système de quantités *multivalentes* dans le sens expliqué au Chapitre I de cette troisième Partie. Les n substitutions seront

$$(143) \qquad (e_1, e_2, \ldots, e_n \mid e_{1s}, e_{2s}, \ldots, e_{ns}) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

147. Un point important est encore à prouver, savoir que le déterminant

$$e = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{21} & \ldots & e_{n1} \\ e_{12} & e_{22} & \ldots & e_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e_{1n} & e_{2n} & \ldots & e_{nn} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul.

A cet effet, après avoir effectué dans (139) les n substitutions (143), considérons le discriminant D, nous trouverons

$$\sqrt{D} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e_{11}\delta\xi_1 + e_{21}\delta\xi_2 + \ldots + e_{n1}\delta\xi_n & e_{12}\delta\xi_1 + \ldots + e_{n2}\delta\xi_n & \ldots & e_{1n}\delta\xi_1 + \ldots + e_{nn}\delta\xi_n \\ e_{11}\delta_1\xi_1 + e_{21}\delta_1\xi_2 + \ldots + e_{n1}\delta_1\xi_n & e_{12}\delta_1\xi_1 + \ldots + e_{n2}\delta_1\xi_n & \ldots & e_{1n}\delta_1\xi_1 + \ldots + e_{nn}\delta_1\xi_n \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots \\ e_{11}\delta_{n-1}\xi_1 + e_{21}\delta_{n-1}\xi_2 + \ldots + e_{n1}\delta_{n-1}\xi_n & e_{12}\delta_{n-1}\xi_1 + \ldots + e_{n2}\delta_{n-1}\xi_n & \ldots & e_{1n}\delta_{n-1}\xi_1 + \ldots + e_{nn}\delta_{n-1}\xi_n \end{vmatrix}$$

$$= \rho e.$$

et, puisque

$$D = \Delta\rho^2,$$

on a

$$e^2 = \Delta,$$

de sorte que si Δ n'est pas nul, ce qui est supposé, e ne l'est pas non plus.

On peut dès lors appliquer au système des n^2 nombres que l'on vient de trouver tout ce qui a été dit du système des n^2 nombres considérés dans le Chapitre I de cette troisième Partie. Et, en particulier, il est démontré : « que chaque système donné de nombres ε_{rpq}, vérifiant les conditions (72), (73) et $\Delta \neq 0$, peut toujours se déduire d'un système de n^2 nombres dont le déterminant n'est pas nul, et cela par les formules (71) ». C'est là précisément la première partie de la proposition énoncée au commencement de ce paragraphe; l'assertion contenue dans la seconde partie de la même proposition sera justifiée par la remarque qu'on va lire.

148. *Remarque*. — Dans le courant de la démonstration précédente, on a particularisé les variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$: on a obtenu dès lors un certain système de n^2 nombres E. Arriverait-on au même système E en particularisant autrement les variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$? (Les valeurs attribuées à ces variables sont toujours supposées prises telles que l'équation $\Phi = 0$ n'ait que des racines simples.) C'est la question que nous allons résoudre en terminant.

En nous servant du système des n^2 nombres E que l'on vient de trouver, imaginons une quantité y qui, par les n substitutions (143), prend les n valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Soit, par exemple,

$$y = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n$$

ou

$$(144)\qquad \begin{cases} y_1 = \xi_1 e_{11} + \xi_2 e_{21} + \ldots + \xi_n e_{n1}, \\ y_2 = \xi_1 e_{12} + \xi_2 e_{22} + \ldots + \xi_n e_{n2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n = \xi_1 e_{1n} + \xi_2 e_{2n} + \ldots + \xi_n e_{nn}; \end{cases}$$

et laissons ici les variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ susceptibles de prendre n'importe quel système de valeurs (vérifiant toujours cependant la condition relative à l'équation $\Phi = 0$).

En vertu de (142), on aura

$$\begin{aligned} y e_r &= \xi_1 e_r e_1 + \xi_2 e_r e_2 + \ldots + \xi_n e_r e_n \\ &= \quad \xi_1 (\varepsilon_{1r1} e_1 + \varepsilon_{2r1} e_2 + \ldots + \varepsilon_{nr1} e_n) \\ &\quad + \xi_2 (\varepsilon_{1r2} e_1 + \varepsilon_{2r2} e_2 + \ldots + \varepsilon_{nr2} e_n) \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad + \xi_n (\varepsilon_{1rn} e_1 + \varepsilon_{2rn} e_2 + \ldots + \varepsilon_{nrn} e_n) \\ &= \Sigma_k \Sigma_j \xi_j \varepsilon_{krj} e_k = \Sigma_k e_k \Sigma_j \varepsilon_{krj} \xi_j = \Sigma_k e_k \eta_{kr}. \end{aligned}$$

Considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} (y_1 - \mathrm{X}) e_{11} & (y_2 - \mathrm{X}) e_{12} & \ldots & (y_n - \mathrm{X}) e_{1n} \\ (y_1 - \mathrm{X}) e_{21} & (y_2 - \mathrm{X}) e_{22} & \ldots & (y_n - \mathrm{X}) e_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ (y_1 - \mathrm{X}) e_{n1} & (y_2 - \mathrm{X}) e_{n2} & \ldots & (y_n - \mathrm{X}) e_{nn} \end{vmatrix} = e (y_1 - \mathrm{X})(y_2 - \mathrm{X}) \ldots (y_n - \mathrm{X})$$

formé avec les n^2 quantités, que l'on déduit au moyen des n substitutions (143) de la différence

$$(145)\qquad (y - \mathrm{X}) e_r = \Sigma_k e_k [\eta_{kr} - (k, r) \mathrm{X}],$$

en attribuant à r successivement toutes les valeurs 1, 2, ..., n, et où X est une variable quelconque indépendante des n^2 nombres E.

TABLEAU DES FORMULES.

$$\begin{cases} (p, q) = 1 \quad \text{si } p = q. \\ (p, q) = 0 \quad \text{si } p \neq q. \end{cases} \tag{62}$$

$$\varepsilon_{rpq} = \Sigma_j f_{rj} e_{pj} e_{qj}. \tag{71}$$

$$\varepsilon_{rpq} = \varepsilon_{rqp}. \tag{72}$$

$$\Sigma_j \varepsilon_{jpq} \varepsilon_{krj} = \Sigma_j \varepsilon_{jpr} \varepsilon_{kqj}. \tag{73}$$

$$\sigma_p = \Sigma_j \varepsilon_{jpj}. \tag{74}$$

$$\tau_{pq} = \tau_{qp} = \Sigma_j \sigma_j \varepsilon_{jpq}. \tag{75}$$

$$2\eta_r = \Sigma_i \Sigma_j \varepsilon_{rij} \xi_i \xi_j. \tag{77}$$

$$\eta_{rs} = \frac{\partial \eta_r}{\partial \xi_s} = \Sigma_j \varepsilon_{rsj} \xi_j. \tag{78}$$

$$\sigma = \Sigma_j \eta_{jj}. \tag{79}$$

$$2\tau = \Sigma_i \Sigma_j \tau_{ij} \xi_i \xi_j. \tag{80}$$

$$\tau_r = \frac{\partial \tau}{\partial \xi_r} = \Sigma_j \tau_{rj} \xi_j. \tag{81}$$

$$2\eta_r = \Sigma_i \xi_i \eta_{ri}. \tag{83}$$

$$\sigma = \Sigma_j \sigma_j \xi_j. \tag{84}$$

$$\tau = \Sigma_j \sigma_j \eta_j. \tag{85}$$

$$\tau_r = \Sigma_j \sigma_j \eta_{jr} = \Sigma_j \sigma_j \frac{\partial \eta_j}{\partial \xi_r}. \tag{86}$$

$$d\eta_{rs} = \Sigma_j \varepsilon_{rsj}\, d\xi_j. \tag{87}$$

$$\begin{cases} d\eta_r = \Sigma_j \xi_j\, d\eta_{rj}. & (88) \\ d\eta_r = \Sigma_j \eta_{rj}\, d\xi_j. & (89) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d\tau_r = \Sigma_j \tau_{rj}\, d\xi_j. & (90) \\ d\tau_r = \Sigma_j \sigma_j\, d\eta_{jr}. & (91) \end{cases}$$

$$d\tau = \Sigma_j \sigma_j\, d\eta_j. \tag{92}$$

$$\Sigma_j\, d\eta_{kj}\, d'\eta_{jp} = \Sigma_j\, d'\eta_{kj}\, d\eta_{jp}. \tag{93}$$

$$\Sigma_j\, d\eta_{kj}\, d'\eta_j = \Sigma_j\, d'\eta_{kj}\, d\eta_j. \tag{94}$$

$$\Sigma_j\, d'\eta_{jp}\, d\tau_j = \Sigma_j\, d\eta_{jp}\, d'\tau_j. \tag{95}$$

$$\Sigma_j \eta_{jp}\, d\eta_{kj} = \Sigma_j \eta_{kj}\, d\eta_{jp}. \tag{96}$$

$$\begin{cases} \tau_{j1} \delta\xi_1 + \tau_{j2} \delta\xi_2 + \ldots + \tau_{jn} \delta\xi_n = \sigma_j \\ (j = 1, 2, \ldots, n). \end{cases} \tag{97}$$

$$\delta\tau_r = \sigma_r. \tag{98}$$

$$\delta\eta_{pq} = (p, q). \tag{100}$$

$$\delta\eta_r = \xi_r. \tag{101}$$

$$\delta\tau = \sigma. \tag{102}$$

$$\begin{vmatrix} \delta\eta_{11} & \ldots & \delta\eta_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \delta\eta_{n1} & \ldots & \delta\eta_{nn} \end{vmatrix} = 1. \tag{104}$$

$$\frac{\delta^n \varphi}{1.2\ldots n} = 1. \tag{105}$$

$$\delta_{p+1} \xi_r = \delta_p \eta_r \quad (\text{définition}) \quad (\delta_0 = \delta). \tag{106}$$

$$\begin{cases} \Sigma_j \delta_p \eta_{kj}\, d\eta_j = \Sigma_j\, d\eta_{kj}\, \delta_{p+1} \xi_j \\ \qquad\qquad = \Sigma_j \delta_{p+1} \eta_{kj}\, d\xi_j. \end{cases} \tag{107}$$

$$\delta_{p+1} \eta_{ki} = \Sigma_j \eta_{ji} \delta_p \eta_{kj} = \Sigma_j \eta_{kj} \delta_p \eta_{ji}. \tag{108}$$

$$\Sigma_j \eta_{ji} \delta_{-1} \eta_{kj} = \Sigma_j \eta_{kj} \delta_{-1} \eta_{ji} = (k, i). \tag{109}$$

$$\delta_{p+q} \eta_{ki} = \Sigma_j \delta_p \eta_{kj} \delta_q \eta_{ji}. \tag{111}$$

$$\delta_{p+q} \eta_k = \Sigma_j \delta_p \eta_{kj} \delta_q \eta_j. \tag{112}$$

$$\delta_{p+q} \xi_k = \Sigma_j \delta_p \eta_{kj} \delta_q \xi_j. \tag{113}$$

$$d\, \delta_p \xi_r = p\, \Sigma_j \delta_{p-1} \eta_{rj}\, d\xi_j = p\, \Sigma_j\, d\eta_{rj}\, \delta_{p-1} \xi_j. \tag{114}$$

$$\delta_q \delta_p \xi_r = p\, \Sigma_j \delta_{p-1} \eta_{rj} \delta_q \xi_j = p\, \delta_{p+q-1} \xi_r. \tag{115}$$

$$\delta_q \delta_p \lambda = p\, \delta_{p+q-1} \lambda \quad (\lambda = \text{fonct. lin. des } \xi_i). \tag{116}$$

$$\delta \delta_p \lambda = p\, \delta_{p-1} \lambda. \tag{117}$$

$$\delta^m \delta_p \lambda = p(p-1)\ldots(p-m+1) \delta_{p-m} \lambda. \tag{118}$$

$$\delta^m \delta_{-1} \lambda = (-1)^m . 1.2\ldots m\, \delta_{-1-m} \lambda. \tag{119}$$

$$d\varphi = \varphi \Sigma_k \delta_{-1} \tau_k\, d\xi_k. \tag{121}$$

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = \delta_{-1}\, d\tau \quad (\text{les } d\xi_i \text{ sont constants}). \tag{122}$$

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = \delta_{-1} \lambda \quad (\lambda = \text{fonct. lin. des } \xi_i). \tag{122'}$$

$$\varphi_\mu = \frac{(-1)^\mu}{1.2\ldots\mu} \delta^\mu \varphi. \tag{123}$$

$$\mu \varphi_\mu = -\delta \varphi_{\mu-1}. \tag{124}$$

$$d\varphi_m = \sum_{\mu=0}^{\mu=m} \varphi_\mu \delta_{\mu-m-1} \lambda. \tag{125}$$

$$d\varphi_m = \sum_{\mu=0}^{\mu=n} \varphi_\mu \delta_{\mu-m-1} \lambda = 0 \quad (m \geqq n). \tag{126}$$

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n} \varphi_\mu \delta_{\mu-m-1} \xi_r = 0 \quad (m \geqq n). \tag{127}$$

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n} \varphi_\mu \delta_{\mu-m-1} \psi = 0 \quad (\psi \text{ fonc. quelc. des } \xi_i). \tag{128}$$

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n} \varphi_\mu \delta_{p+\mu} \xi_r = 0 \quad (p \geqq 0). \tag{129}$$

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n} \varphi_\mu \delta_{p+\mu} \psi = 0. \tag{130}$$

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n} \varphi_\mu \delta_{p+\mu} \sigma = 0. \tag{131}$$

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n-m} \varphi_{\mu+m} \delta_\mu \sigma = m \varphi_m \quad (m = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{132}$$

Ce déterminant a pour valeur, comme le montre la formule (145), en remplaçant en outre le symbole (k, r) par sa valeur o ou 1,

$$\begin{vmatrix} e_{11}(\eta_{11}-X)+e_{21}\eta_{21}+\ldots+e_{n1}\eta_{n1} & e_{12}(\eta_{11}-X)+e_{22}\eta_{21}+\ldots+e_{n2}\eta_{n1} & \ldots & e_{1n}(\eta_{11}-X)+e_{2n}\eta_{21}+\ldots+e_{nn}\eta_{n1} \\ e_{11}\eta_{12}+e_{21}(\eta_{22}-X)+\ldots+e_{n1}\eta_{n2} & e_{12}\eta_{12}+e_{22}(\eta_{22}-X)+\ldots+e_{n2}\eta_{n2} & \ldots & e_{1n}\eta_{12}+e_{2n}(\eta_{22}-X)+\ldots+e_{nn}\eta_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e_{11}\eta_{1n}+e_{21}\eta_{2n}+\ldots+e_{n1}(\eta_{nn}-X) & e_{12}\eta_{1n}+e_{22}\eta_{2n}+\ldots+e_{n2}(\eta_{nn}-X) & \ldots & e_{1n}\eta_{1n}+e_{2n}\eta_{2n}+\ldots+e_{nn}(\eta_{nn}-X) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e_{11} & e_{21} & \ldots & e_{n1} \\ e_{12} & e_{22} & \ldots & e_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e_{1n} & e_{2n} & \ldots & e_{nn} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \eta_{11}-X & \eta_{12} & \eta_{1n} \\ \eta_{21} & \eta_{22}-X & \eta_{2n} \\ \ldots & \ldots\ \ldots & \ldots \\ \eta_{n1} & \eta_{n2} & \eta_{nn}-X \end{vmatrix}.$$

Ainsi (puisque $e \neq 0$), on a (*voir* la note, p. 113)

$$(146) \qquad (y_1-X)(y_2-X)\ldots(y_n-X)=\Phi(X).$$

La fonction $\Phi(X)$ de X et des variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ a ses coefficients *absolument déterminés* par les nombres ε_{rpq} : il faut donc, à cause de (146), que les coefficients des variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ le soient aussi dans les quantités $y_1, y_2, \ldots, y_n$; par conséquent le système des n^2 nombres E est unique et une autre particularisation des valeurs $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ ne conduira pas à un système différent.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

TROISIÈME PARTIE.

Vu et approuvé :

Paris, le 4 décembre 1885.

POUR LE DOYEN EMPÊCHÉ,

E. HÉBERT.

Permis d'imprimer :

Paris, le 4 décembre 1885.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GRÉARD.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Équations générales de l'Hydrodynamique.

Théorèmes de M. Helmholtz sur les Wirbelbewegungen.

Vu et approuvé :
Paris, le 4 décembre 1885.
Pour le Doyen empêché,
E. HÉBERT.

Permis d'imprimer :
Paris, le 4 décembre 1885.
Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,
GRÉARD.

11560 Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55.