COMPLÉMENTS

DE

GÉOMÉTRIE

FONDÉS SUR LA PERSPECTIVE

FORMANT SUITE

A TOUS LES TRAITÉS DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

Par M. POUDRA,

Officier supérieur d'État-major, en retraite.

AVEC 17 PLANCHES.

PARIS

LIBRAIRIE MILITAIRE, MARITIME ET POLYTECHNIQUE

J. CORRÉARD, ÉDITEUR,

3, Boulevard St-André, 3

MAISON DE LA FONTAINE SAINT-MICHEL.

1868.

COMPLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE

FONDÉS SUR LA PERSPECTIVE.

TABLE.

FIN DE LA TABLE.

COMPLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE

FONDÉS SUR LA PERSPECTIVE

Formant suite à tous les Traités de Géométrie élémentaire

Par M. POUDRA,

Officier supérieur d'état-major en retraite.

PRÉLIMINAIRES.

Parmi les méthodes employées en géométrie, pour passer des vérités connues à d'autres nouvelles, une des plus simples et surtout des plus intuitives est celle fondée sur la perspective.

Déjà Desargues s'était servi de cette méthode pour déduire les propriétés des sections coniques de celles du cercle; mais à cette époque parut la géométrie analytique de Descartes, qui, par sa généralité et ses belles applications, fit oublier les essais de Desargues et aussi les méthodes employées par les géomètres anciens; c'est au général Poncelet, dans son célèbre traité des Propriétés projectives, que l'on doit d'avoir fait connaître de nouveau la fécondité et l'importance de cette méthode.

Depuis, la géométrie s'est enrichie de nouvelles méthodes qui ont fait faire un pas immense à cette science ; parmi celles-ci il faut surtout remarquer celle due à M. Chasles, et qui est fondée sur la notion du rapport anharmonique, elle est exposée par l'auteur dans son cours de la Sorbonne et dans son traité de géométrie supérieure ; nous citerons aussi celle due à Bobillier, qui, par un algorithme particulier, a simplifié et généralisé les démonstrations géométriques. (Voir les *Annales de mathématiques*, par Gergonne, t. XVIII, années 1827-28, et dans les ouvrages anglais de Salmon, sous le titre de Notions abrégées.)

Nous nous proposons dans cet ouvrage, en employant exclusivement la perspective, de faire connaître les propriétés descriptives et métriques des figures qu'on peut obtenir par la perspective d'autres figures dont les propriétés sont connues par la géométrie élémentaire, et de former ainsi des compléments de géométrie.

INTRODUCTION

Si on joint par des droites tous les points d'une figure donnée à un point fixe de l'espace, et qu'on coupe le cône ainsi formé par un plan, la figure obtenue par cette intersection est ce qu'on appelle la perspective plane de la première.

Au lieu d'un plan on pourrait supposer une surface sphérique, cylindrique ou conique, et on obtiendrait par les intersections, des figures qu'on pourrait appeler les perspectives sphériques, cylindriques ou coniques de la première; nous ne nous occuperons pas de ces espèces de figures.

Il est encore une autre espèce de perspective qu'on peut obtenir en prenant sur chaque rayon du cône un point, d'après certaine loi, de manière à obtenir, par leur réunion, une figure à trois dimensions, ayant ainsi du relief, et qu'en conséquence nous avons appelée perspective-relief de la première.

Nous diviserons cet ouvrage en deux parties : Dans la première, nous nous occuperons des perspectives planes de figures planes. Dans la deuxième, nous considérerons les perspectives-reliefs de figures reliefs.

PREMIÈRE PARTIE

Perspective plane de figures planes.

CHAPITRE PREMIER.

CONVENTIONS. — Pour éviter par la suite des longues périphrases, nous croyons convenable de commencer par établir quelques conventions dans la désignation des points, des droites, des plans dont nous nous servirons à tout instant.

1° Nous désignerons par S (*Sol*) le plan de la figure donnée.

Ce plan (*fig.* 1) peut toujours se supposer horizontal.

2° Nous désignerons par T (*Tableau*) le plan de la perspective de cette première figure.

Les plans S et T peuvent faire entre eux un angle quelconque. Dans la fig. (1), nous supposons ce plan T vertical, par conséquent perpendiculaire à celui S.

3° Les deux plans S et T se coupent suivant une droite T_1T_2, qu'on appelle ordinairement la *ligne de terre;* elle peut avoir sur le plan S une direction quelconque.

4° V sera le sommet du cône perspectif, c'est-à-dire le point fixe de l'espace qu'on joint à tous les points de la figure donnée.

5° Nous désignerons par H (*Horizontal*) le plan mené par le point V, parallèlement à celui S (dans la fig. (1) il est donc horizontal).

6° Le plan H coupe le plan T, suivant une droite parallèle à la ligne de terre T_1T_2, nous la désignerons par les lettres I_1I_2 (*Infini*).

7° Nous désignerons par V_1 (*Vertical*) (*fig.* 1), le plan mené par V parallèle à celui T.

8° Le plan V_1 coupe celui S, suivant une droite parallèle à la ligne de terre, nous la désignerons par J_1J_2.

9° Nous désignerons par P (*Principal*) le plan mené par V perpendiculairement à ceux S,T,V.

10° Ce plan P coupe celui H, suivant une droite VO parallèle au plan S, et qui est le rayon principal, ou axe du cône perspectif.

11° O sera le point central de la perspective.

12° La distance VO, du point V au point O, contée parallèlement au plan S, sera désignée par d (distance).

13° Le plan P coupe celui V_1, suivant la droite VP, cette distance sera désignée par h (hauteur).

14° Nous désignerons généralement les points de la figure donnée par les lettres ordinaires : a, b, c... et ceux correspondants de la perspective par a', b', c', c'est-à-dire les mêmes lettres respectives avec un accent.

Les dispositions de ces plans, de ces droites, de ces points sont représentées dans la fig. (1), suivant la position qu'on leur donne dans la perspective des peintres; mais il est nécessaire d'observer ici que, dans nos considérations géométriques, ces plans, ces droites sont censés prolongés indéfiniment et peuvent occuper, suivant les circonstances, toutes les positions possibles, pourvu que ceux désignés comme parallèles conservent dans toutes les positions leur *parallélisme*.

Le but que nous nous proposons maintenant est de déterminer la figure qui résulte de l'intersection, par le plan T, du cône, qui aurait son sommet en V et pour base une figure tracée sur le plan S.

La perspective d'une figure donnée résulte évidemment de celle de chacun de ses points. Nous allons donc commencer par déterminer la perspective d'un point.

PERSPECTIVE D'UN POINT. — Soit (*fig.* 1) a un point donné sur le plan S. Sa perspective a' sur le plan T, pour le point de vue V, sera déterminée par l'intersection du rayon perspectif Va et du plan T. Une infinité de moyens se présentent pour résoudre ce problème élémentaire; nous exposerons seulement le suivant, qui nous sera fort utile.

Sur la droite J_1J_2 indéfini (*fig.* 1), prenons arbitrairement deux points j_1 et j_2 et joignons-les à V par les deux droites Vj_1, Vj_2. Par ces deux droites et le point donné a menons deux plans, ils couperont le plan T suivant les droites ma', na', respectivement parallèles à Vj_1, Vj_2, et le point a' de leur commune intersection sera sur le rayon perspectif Vaa'; donc, ce point a' sera la perspective du point a. Or, remarquons que m est l'intersection de la droite j_1ma avec la ligne de terre T_1T_2, donc, m est la perspective du point a, prise du point j_1. De même n étant l'intersection de la droite j_2na avec la ligne de terre, il s'ensuit que ce point n est la perspective de ce même point a, prise du point j_2. Donc, le point a' cherché sera déterminé, en menant par le point m une parallèle à j_1V et par n une parallèle à j_2V. Au moyen des deux points de vue auxiliaires j_1 et j_2, on déterminera de même la perspective de tous les points de la figure donnée. Il est facile de voir que, si au lieu des points j_1 et j_2 on eût pris sur la même droite deux autres points quelconques, on aurait deux autres droites que celles j_1V, j_2V; mais, par la même construction, on aurait en dernier résultat le même point a' pour la perspective du point a. Nous pouvons en conclure que : « *La perspective plane d'une figure donnée est la résultante de deux perspectives auxiliaires sur la ligne de terre T_1T_2, prises de deux points de vue choisis arbitrairement sur la droite indéfinie J_1J_2, qui, comme on le sait, est l'intersection du plan S et de celui V.*

Si un des points de vue auxiliaires j_1 ou j_2 était en P au pied de la perpendiculaire VP à J_1J_2, alors le rayon Pa rencontrerait T_1T_2 en q, d'où, élevant une parallèle qa' à VP ou une perpendiculaire à T_1T_2, elle passerait par le point a' cherché, et qui pourrait alors être déterminé par l'intersection de cette droite qa' avec le rayon perspectif V$a'a$.

Dans la fig. (1) nous avons supposé que les plans parallèles T et V étaient verticaux; mais il est facile de voir (*fig.* 2) que la perspective d'une figure donnée ne change pas, en faisant tourner ces deux plans autour de leur trace respective, pourvu que, dans toutes les positions, les deux plans restent parallèles; on voit, en effet, que dans toutes ces positions les points m et n ne changent pas, et qu'ainsi le triangle $ma'n$, toujours semblable au triangle j_1Vj_2, puisqu'il est formé par des côtés respectivement parallèles, ne changera pas non plus, qu'ainsi le point a' reste toujours à la même position.

Cette proposition est vraie pour toutes les inclinaisons parallèles des plans V et T, elle le sera encore (fig. 3) lorsque ces deux plans se confondront avec celui S; alors la figure donnée, sa perspective et le point de vue sont ramenés dans un même plan. La construction pour obtenir la perspective a' d'un point quelconque a sera la même; mais elle sera d'une exécution plus facile, car, au lieu d'employer, comme dans les fig. (1 et 2), la perspective des constructions, ou bien de se servir de deux plans de projections, comme on le fait en géométrie descriptive, toutes les opérations se feront ici sur un seul et même plan, les résultats seront les mêmes que si elles avaient été exécutées dans l'espace; seulement, si on veut rétablir les deux figures en perspective, il suffira de redresser parallèlement les plans T et V, et dans toutes les positions qu'on pourra ainsi leur donner, elles seront encore en perspective. Lorsqu'il ne s'agira que de trouver la figure qui est la perspective d'une autre figure donnée, la position des plans T et V est indifférente, on doit donc se servir de celle qui est le plus commode. Nous verrons en outre que deux figures perspectives ainsi ramenées dans un même plan donnent lieu à des considérations géométriques fort importantes.

Le général Poncelet, dans son Traité des propriétés projectives, a donné le nom de figures homologiques à deux figures perspectives ainsi ramenées dans un même plan. Le point V est dit le centre d'homologie, la ligne de terre est appelée l'axe d'homologie; un point et sa perspective sont des points homologues, de même pour deux droites et en général pour deux figures perspectives ainsi placées. Nous nous servirons, suivant la circonstance, de ces mêmes expressions consacrées par ce célèbre géomètre.

Perspective d'une droite. — La perspective d'une droite est évidemment une droite; sachant déterminer la perspective d'un point, il sera facile de déterminer celle d'une droite par les perspectives de deux de ses points.

Soit (*fig.* 1, 2 et 3) sur le plan S, la droite indéfinie *amj*. qui rencontre T_1T_2 en m et celle $J.J_2$ en j_1, il est évident d'abord que ce point m qui est sur le plan T est sa propre perspective, donc il est déjà un des points de la perspective de *amj*., et comme a' est la perspective d'un point a de cette droite, il en résulte que la droite $ma'r$ est la perspective de *amj*.

Chacun des points de la droite *am* a sa perspective sur $a'm$, à l'intersection de cette droite $a'm$ et du rayon perspectif de ce point. Sur cette droite *ma* il y a un point situé à l'infini, la perspective de ce point à l'infini sera donc à l'intersection du plan T et du rayon perspectif Vr mené de V parallèlement à *ma*. Or, cette droite Vr étant parallèle à *ma*., qui est sur le plan S, elle rencontrera le plan T en un point r, situé sur la droite I_1I_2, ce sera donc un point de la droite cherchée ma'; ainsi, on voit que la perspective $ma'r$ d'une droite *ma* peut être déterminée par les deux points m et r, dont l'un est sa trace sur le plan T et l'autre est ce qu'on appelle son point de fuite.

Si on avait à déterminer les perspectives d'une suite de droites parallèles à *ma*, chacune d'elles aurait une trace différente, mais aurait un même point de fuite *r*. Pour tout autre système de droites parallèles, il y aurait toujours un seul point de fuite; on en conclut donc que :

POINTS DE CONCOURS. — *Les perspectives de droites parallèles sont des droites concourantes en un point de la droite* I_1I_2 *déterminée par l'intersection de cette droite et du rayon perspectif mené parallèlement au système de droites parallèles considérées; point commun, appelé leur point de fuite.*

Remarquons que tous ces points de fuite seront sur la droite I_1I_2 parallèle au plan S. Comme la perspective d'une droite est toujours une droite et réciproquement, il s'ensuit donc que tous les points qui, dans la figure donnée, sont à l'infini, doivent être considérés comme étant sur une droite à l'infini dont I_1I_2 sera la perspective.

Nous avons vu que la droite *ma'* perspective de *ma* était parallèle à celle Vj_1, de même toute droite de la figure donnée qui passerait par ce même point j_1 aurait donc pour perspective une autre droite parallèle à Vj_1, par conséquent à ma'. De même pour tout autre système de droites concourantes en un des points de la droite J_1J_2, elles donneraient en perspective des droites parallèles et réciproquement; on voit que tout système de droites parallèles dans la perspective, par conséquent situées sur le plan T, proviendrait de droites concourantes, en un des points de cette droite J_1J_2 et a son intersection avec la droite menée de V parallèlement à celles du système considéré. Nous pouvons donc dire, comme ci-dessus, que la droite J_1J_2 est la perspective de tous les points qui sont à l'infini dans la deuxième figure et qu'on doit regarder aussi comme étant tous sur une droite.

Lorsqu'il s'agit d'obtenir la perspective d'une figure donnée sur le plan S, la droite I_1I_2 joue un rôle important; mais si la figure donnée était sur le plan T, la droite I_1I_2 jouerait le même rôle; il en résulte que les deux figures sont des perspectives réciproques l'une de l'autre pour le même point de vue.

Dans la perspective des peintres, la perspective d'une droite, quelque longue qu'elle soit, commence à sa trace et ne peut dépasser son point de fuite, elle est donc comprise entièrement entre les deux droites parallèles T_1T_2 et I_1I_2. Mais il n'en sera pas de même dans nos considérations géométriques; une droite infinie en longueur sera aussi représentée par une droite infinie; mais il est nécessaire de bien remarquer les différentes parties de ces droites qui se correspondent. Ainsi, considérons la droite ma comme celle donnée, en la supposant prolongée indéfiniment dans les deux sens. La partie de cette droite partant de m et allant à l'infini en passant par le point a sera représentée en perspective par la partie $ma'r$ comprise entre m et r. Tandis que la partie mj_1 de cette première droite comprise entre m et j_1 sera représentée par cette partie de la deuxième commençant à m et allant à l'infini dans le sens de a' vers m et son prolongement. Enfin, la première droite qui va de j_1 à l'infini dans le sens de m vers j_1, est représentée par la partie prolongée de $ma'r$ comprise entre l'infini et le point r. De sorte que ce point r est la perspective du point de la droite donnée, qui est à l'infini aussi bien dans un sens que dans l'autre.

Sachant trouver les perspectives d'un point et d'une droite, les considérations précédentes sont suffisantes pour construire la perspective d'une figure donnée et réciproquement, pour passer de la seconde à la première.

DES RELATIONS PERSPECTIVES.

Entre deux figures qui sont ainsi perspectives réciproques, il existe des relations que nous proposons d'établir. Ces relations sont de deux espèces, celles qu'on peut appeler descriptives, qui tiennent à la forme des figures, et celles métriques qui dépendent des longueurs, ou distances entre les points, les droites.

RELATIONS DESCRIPTIVES.

Les relations descriptives sont évidemment les suivantes :

1° A un point dans l'une des figures, correspond un seul et unique point dans l'autre, et ces points correspondants ou homologues sont sur une droite qui va passer par un même point V de l'espace, quels que soient ces deux points.

2° A une droite de l'une des figures correspond une seule et unique droite dans l'autre, et ces deux droites sont dans un même plan passant de même par le point fixe V.

3° Deux droites ainsi correspondantes ou homologues se rencontrent en un même point de la ligne de terre, ou axe d'homologie. De même deux figures quelconques homologues se coupent suivant cette même droite. De sorte que cette ligne est commune aux deux figures.

4° Si dans l'une des figures on exécute une construction géométrique qui donne pour résultat des points, des droites, la construction correspondante, faite avec des points, des droites homologues, donnera pour résultat des points et des droites homologues des premières.

5° Tous les points de la première figure qui sont à l'infini et par suite sur une droite, ont leurs homologues respectifs sur la droite $I_1 I_2$, et ceux de la 2ᵉ figure qui sont à l'infini ont leurs homologues dans la première, sur la droite $J_1 J_2$.

La première conséquence que l'on peut retenir de ces relations est que si une des figures est rencontrée par une droite en un certain nombre de points, la figure homologue sera rencontrée par la droite homologue, dans le même nombre de points, d'où résultera que si une figure est une courbe du degré m sa perspective sera une courbe du même degré.

On voit aussi qu'à une tangente, à une courbe d'une des figures correspondra une tangente à la courbe homologue. Si d'un point de la première on peut mener un certain nombre de tangentes à la seconde, il en résultera que du point homologue dans la deuxième on pourra mener le même nombre de tangentes à la courbe homologue, par conséquent les deux courbes perspectives réciproques seront de même classe.

Telles sont à peu près toutes les relations descriptives qui existent entre deux figures perspectives réciproques. Nous verrons dans les applications quelles sont les transformations que l'on peut faire subir dans la forme d'une figure donnée au moyen de ces relations.

RELATIONS MÉTRIQUES.

Les relations métriques sont bien plus nombreuses, ce sont elles que nous allons maintenant examiner.

Soient d'abord (*fig.* 4) deux points homologues a et a' déterminés comme ci-dessus (*fig.* 3).

Observons d'abord que puisque deux figures perspectives réciproques ne changent pas, lorsqu'on fait tourner le plan T autour de la ligne de terre, pourvu qu'il en soit de même du plan V autour de JJ, de sorte que ces deux plans V et T soient toujours parallèles ; nous pouvons ne considérer que la position où S est perpendiculaire à T et à V et celle où les deux plans T et T sont rabattus sur le plan S. De sorte que la distance VO que nous avons désignée par d sera bien la distance du point V au plan T et celle VP, la hauteur du point V au-dessous du plan S; cette convention nous évitera cette périphrase — « distance parallèlement à tel ou tel plan.

Considérons d'abord dans le plan S, les deux droites rectangulaires αpP et T_1T_2 qui sont les traces des plans P et T sur ce plan. Le point a donné de ce plan S sera connu de position, si l'on donne les distances $a\alpha, a\delta$ de ce point à ces deux droites, c'est ce qu'on appelle les coordonnées de ce point relativement à ces deux droites prises pour axes. Désignons suivant la coutume, la distance $a\alpha$ par x et $a\delta$ par y.

Prenons de même, dans le plan T, pour axes, les traces sur ce plan de ceux P et S, auxquels nous rapportons le point a' de ce plan. Or, on voit que si on rabat le plan T sur celui S les deux axes de la 2e figure se confondront avec ceux de la première. Désignons par x' la distance $a'6$ de a' à αpP et par y'

celle $a'q$ de a' à T_1T_2. De sorte que a et a' sont déterminés par les coordonnées relatives aux mêmes axes.

Par la perspective nous savons que lorsque le point a est donné, son homologue a' est déterminé; donc il faut qu'entre les coordonnées x, y du point a et celles x', y' du point a' il y ait des relations telles que lorsque x, y sont donnés, les valeurs de x' y' en résultent et réciproquement. Ce sont ces relations que nous nous proposons d'abord de déterminer.

Prolongeons (*fig.* 4) la droite $a\delta = y$ jusqu'en r à sa rencontre avec J_1J_2, et de même celle $a'q = y'$ jusqu'en θ à sa rencontre avec la droite $a\alpha$.

Par suite de triangles semblables on a :

$$\frac{x}{x'} = \frac{\mathrm{V}a'}{\mathrm{V}a} = \frac{\mathrm{P}q}{\mathrm{P}a} = \frac{\delta\gamma}{a\gamma}.$$

or

$$\delta\gamma = Pp = Vo = d, \quad a\gamma = a\delta + \delta\gamma = y + d.$$

donc on a

$$\frac{x'}{x} = \frac{\mathrm{V}a'}{\mathrm{V}a} = \frac{d}{d+y} \tag{1}$$

La droite $qa'\theta$ étant parallèle à $\mathrm{V}p\alpha$ on aura aussi :

$$\frac{a'q}{\theta q} = \frac{\mathrm{VP}}{\mathrm{P}\alpha};$$

mais

$$a'q = y',\ \theta q = a\delta = y,\ Vp = h,\ P\alpha = Pp + \alpha p = d + y\,;$$

donc

$$\frac{y'}{y} = \frac{h}{y+d}. \tag{2}$$

Les deux égalités (1) et (2) serviront donc à déterminer les coordonnées x', y' du point a', lorsque celles x, y du point a seront connues.

En changeant dans (1) et (2) x' en x, y' en y et h en d et réciproquement, on obtiendrait de même les valeurs de x, y en fonction de x', y' ; mais d'ailleurs on a

$$\frac{x}{x'} = \frac{Va}{Va'},$$

Les triangles semblables $aa'q$, aVp donnent

$$\frac{Va}{aa'} = \frac{VP}{a'q}\,;$$

d'où

$$\frac{Va - aa'}{Va} = \frac{VP - a'q}{VP},$$

ou

$$\frac{Va'}{Va} = \frac{VP - a'q}{VP} = \frac{h - y'}{h}\,;$$

donc

$$\frac{x}{x'}=\frac{\mathrm{V}a}{\mathrm{V}a'}=\frac{h}{h-y'}=\frac{-h}{y'-h}. \tag{3}$$

La droite $a\delta$ passe évidemment par a', alors les deux triangles semblables $aa'\delta$ et voa' coupés par une transversale $\varphi a'\pi$ donnent

$$\frac{a\delta}{\pi\delta}=\frac{y}{y'}=\frac{\mathrm{V}o}{o\,\mathrm{C}}=\frac{\mathrm{V}o}{op-o\,\mathrm{C}}=\frac{d}{h-y'};$$

donc on aura

$$\frac{y}{y'}=\frac{d}{h-y'}=\frac{d}{y'-d}. \tag{4}$$

Les égalités (3) et (4) serviront à passer des valeurs de x',y' à celles de x,y.

Les égalités (1) et (2) jointes à celles (3) et (4) donnent donc

$$\frac{\mathrm{V}a}{\mathrm{V}a'}=\frac{x}{x'}=\frac{y+d}{d}=-\frac{h}{y'-h} \quad \text{et} \quad \frac{y}{y'}=\frac{y+d}{h}=\frac{d}{y'-h},$$

et peuvent s'exprimer par divers théorèmes :

1° On a

$$\frac{x}{y}:\frac{x'}{y'}=\frac{h}{d}=\text{constante},$$

c'est-à-dire

1^er^ Théorème. — *Le rapport des distances d'un point quelconque de la première figure aux deux* *plans P et T est à celui des distances du point homologue aux deux mêmes plans, dans le rapport constant* $=\frac{h}{d}$.

Si $h=d$, alors ces rapports sont égaux.

2° On a

$$\frac{Va}{Va'}=\frac{y+d}{d}=\frac{a\gamma}{d},$$

c'est-à-dire

2ᵉ Théorème. — *Le rapport des distances de deux points homologues au point de vue V est égal à la distance d'un des points à la droite J_1J_2 divisée par la constante* d.

Ce théorème servirait donc à déterminer la distance Va', connaissant la position du point a.

3° Des égalités ci-dessus on tire :

$$\frac{h}{h-y'}=\frac{y+d}{d};$$

d'où

$$(h-y')\,(y+d)=h.\,d=\text{ constante},$$

on aura donc ce théorème :

3ᵉ Théorème — *Le produit des distances du point quelconque* a *à la droite J_1J_2 par celle du point homologue* a' *à J_1J_2 est constant* $=$ h,d.

La droite Vaa' qui passe par deux points homologues a et a' coupe la ligne de terre T_1T_2 en s et on a

$$\frac{sa}{sa'} = \frac{y}{y'},$$

et comme

$$\frac{Va}{Va'} = \frac{x}{x'},$$

et que

$$\frac{x}{x'} : \frac{y}{y'} = \frac{h}{d}$$

il en résulte

$$\frac{Va}{Va'} : \frac{sa}{sa'} = \frac{h}{d} = \text{constante},$$

c'est-à-dire

4e Théorème. — *Le rapport des distances de deux points homologues quelconques au point V est à celui des deux mêmes points à celui* s *où le rayon perspectif* Vaa' *coupe le plan T dans un rapport constant* $= \frac{h}{d}$.

Si dans cette égalité $h = d$, alors il en résulterait que les quatre points V, s, a, a' forment des segments en rapport harmonique.

Ce théorème ainsi posé recevra d'importantes applications.

Remarque sur les égalités (1) (2) (3) (4). Si on suppose $y' = h$ on trouve x et y infinis, et si on fait

$y = -d$ alors x', y' sont infinis ; ce qui confirme que si le point a' est sur I_1I_2 celui a est à l'infini. Que si a est sur J_1J_2 alors a' est à l'infini. Ou réciproquement que si a est à l'infini, a' est sur I_1I_2, et si a' est à l'infini, a est sur J_1J_2.

RELATION ENTRE DEUX SEGMENTS HOMOLOGUES.

Soient (*fig.* 5) $abmk$ une droite donnée et $ra'b'm$ sa perspective : m est le point commun à ces deux droites, il est donc sur T_1T_2. k est le point où la droite donnée rencontre J_1J_2. r est le point de fuite de la droite $mb'a'r$ situé sur I_1I_2. Enfin Vr est parallèle à la droite donnée et Vk à sa perspective.

Le théorème (3) démontré ci-dessus :

$$(h-y')\ (y+d)=h.d$$

appliqué aux points a et a' donne

$$a\gamma . a'\mu = h.\ d,$$

et pour les points b et b'

$$b\gamma - b'\gamma = h.d\,;$$

donc

$$a\gamma . a'\mu = b\gamma_1 . b\mu'\,;$$

d'où

$$\frac{a\gamma}{b\gamma_1} = \frac{b'\mu}{a'\mu};$$

mais

$$\frac{a\gamma}{b\gamma_1} = \frac{ak}{bk},$$

et

$$\frac{b'\mu}{a'\mu} = \frac{b'r}{a'r};$$

donc

$$\frac{ak}{bk} = \frac{b'r}{a'r}.$$

On tire de cette égalité

$$\frac{ak - bk}{bk} = \frac{b'r - a'r}{a'r},$$

ou bien

$$\frac{ak - bk}{ak} = \frac{b'r - a'r}{b'r},$$

c'est-à-dire

$$\frac{ab}{bk} = \frac{a'b'}{a'r},$$

ou bien

$$\frac{ab}{a'k} = \frac{a'b'}{b'r};$$

donc

$$\frac{ab}{a'b'} = \frac{bk}{a'r}$$

ou

$$\frac{ab}{a'b'} = \frac{ak}{b'r}.$$

On a donc ce théorème :

5ᵉ Théorème. — *Une longueur ou segment* ab *est à son homologue* a'b' *comme la distance de l'une des extrémités* a (*ou* b) *de ce segment au point* k (*où cette droite rencontre* J_1J_2) *est à celle de* b' (ou a') *au point* r (*où* a'b' *rencontre la droite* I_1I_2).

Si le point b se confond avec m, alors b' se réunira aussi à ce point et on aura alors :

$$\frac{am}{a'm} = \frac{mk}{a'r},$$

ou

$$\frac{am}{a'm} = \frac{ak}{mr}.$$

Le rapport ci-dessus entre deux segments perspectifs ab, $a'b'$ a lieu quelle que soit la longueur de ces segments; elle aura donc lieu quand ils seront infiniment petits; ainsi on aura ce théorème :

6ᵉ Théorème.—*Lorsqu'une droite augmente d'une quantité infiniment petite, son homologue augmentera aussi d'une quantité infiniment petite, et le rapport de ces deux infiniment petits sera égal au rap-*

port fait entre la distance du point a *à* k, *à celle de* a′ *à* r.

Le rapport ci-dessus aura donc lieu entre l'élément d'une courbe et l'élément homologue.

RELATION ENTRE QUATRE SEGMENTS HOMOLOGUES EN LIGNE DROITE.

Soient maintenant a, b, c, d (*fig.* 6), quatre points sur une droite donnée, et a', b', c', d' les perspectives respectives. Par le théorème ci-dessus on a :

$$\frac{ab}{a'b'} = \frac{ak}{b'r},$$

et

$$\frac{ac}{a'c'} = \frac{ak}{c'r};$$

donc

$$\frac{ab}{ac} : \frac{a'b'}{a'c'} = \frac{c'r}{b'r}.$$

De même

$$\frac{db}{d'b'} = \frac{dk}{b'r},$$

et

$$\frac{dc}{d'c'} = \frac{dk}{c'r};$$

donc

$$\frac{db}{dc}:\frac{d'b'}{d'c'}=\frac{c'r}{b'r};$$

par conséquent on aura

$$\frac{ab}{ac}:\frac{db}{dc}=\frac{a'b'}{a'c'}:\frac{d'b'}{d'c'},$$

égalité qui donne lieu à ce théorème :

7e Théorème. — *Lorsqu'on a quatre points en ligne, le double rapport formé comme ci-dessus, entre ces quatre points, est égal au double rapport formé de la même manière entre les quatre points homologues.*

Ce double rapport est le premier exemple d'une relation existante entre des points d'une première figure, et qui ne change pas en perspective. Ce sera ce que nous appellerons une relation perspective.

On voit qu'on peut prendre arbitrairement deux des quatre points pour les sommets des deux rapports, le résultat est le même.

M. Chasles, dans son traité de géométrie supérieure, a donné le nom de *rapport anharmonique* au donble rapport ci-dessus, et, vu son importance, il en a fait le départ de toutes ses considérations géométriques.

Nous nous servirons aussi de cette expression ainsi consacrée, et nous dirons : « *Le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite est égal à celui des quatres points homologues obtenus par leurs perspectives.*

On peut démontrer directement le théorème ci-dessus de la manière suivante : On a (*fig.* 6) surf. triangle $(Vab) = Va.Vb.\sin(aVb)$ et surf. tri. $(Vac) = Va.Vc.\sin(aVc)$; mais les deux triangles (Vab) (Vac) ayant même hauteur, sont entre eux comme leur base; on a donc :

$$\frac{\text{surf. tri. } (Vab)}{\text{surf. tri. } (Vac)} = \frac{ab}{ac} = \frac{Vb}{Vc} \cdot \frac{\sin(aVb)}{\sin(aVc}.$$

Les triangles dVb, dVc, donnent de même

$$\frac{db}{dc} = \frac{Vb}{Vc} \cdot \frac{\sin(dVb)}{\sin(dVc)};$$

divisant l'une par l'autre on aura :

$$\frac{ab}{ac} : \frac{db}{dc} = \frac{\sin(aVb)}{\sin(aVc)} : \frac{\sin(dVb)}{\sin(d'Vc)},$$

c'est-à-dire :

8^e^ Théorème. — *Le double rapport formé par quatre points en lignes droites, ou bien le rapport anharmonique de ces quatre points est égal au double* *rapport formé par les sinus des angles des droites qui joignent un point quelconque de l'espace aux extrémités respectives des segments formés par ces points.*

Ce théorème démontre que le double rapport de ces quatre points est une relation perspective; car cette relation ne changera pas, quelle que soit la transversale qui coupe quatre droites issues d'un même point et passant par ces points.

On peut donc dire aussi :

9e Théorème. — *Lorsque quatre droites issues d'un point fixe sont coupées par une transversale quelconque, le double rapport formé par les quatre points, ou le rapport anharmonique de ces quatre points conserve toujours la même valeur.*

Nous appellerons *faisceau de droites,* une suite de droites issues d'un même point. Le double rapport d'un faisceau de quatre droites, ou le rapport anharmonique de ces quatre droites, est celui formé par les sinus des angles respectifs de ces droites; il est égal à celui formé par les segments résultant de l'intersection de ces quatre droites par une transversale quelconque. Nous pouvons donc en conclure :

10e Théorème. — *Lorsque plusieurs faisceaux de quatre droites passent par quatre points communs situés sur une droite, le double rapport dans chaque* *faisceau formé par les quatre droites, est constant, ou bien le rapport anharmonique est toujours le même.*

Il sera encore le même si les différents faisceaux, au lieu de passer par les quatre même points, passent par d'autres points dont le rapport anharmonique soit le même.

Il en résulte encore qu'un faisceau de quatre droites donnant en perspective un autre faisceau de quatre droites homologues, on a :

11ᵉ Théorème. — *Le rapport anharmonique de ces deux faisceaux est le même. Ainsi on voit que ce double rapport formé par les sinus des angles de quatre droites, est une relation perspective.*

Nous avons vu que le double rapport perspectif formé par les quatre points a,b,c,d sur une droite et celui formé par les quatre points homologues a',b',c',d' sont égaux ; mais réciproquement nous disons que si le double rapport ci-dessus, entre les quatre points $a',b',c',d,$ est égal à celui des quatre autres $a,b,c,d,$ c'est que ces points respectifs sont perspectives réciproques les unes des autres. En effet :

Transportons la droite $a'b'c'd'$ de manière à faire coïncider le point a' avec a. Dans cette position traçons les droites bb', cc'; elles se rencontreront en un point quelconque V, et je dis que la droite dd' doit aussi passer par ce même point. Si cela n'avait pas lieu, la droite Vd qui joint V à d déterminerait sur $a'b'c'd'$, un point d'' différent de d', et tel que le double rapport des quatre points a', b', c', d'' serait égal à celui des quatre points a, b, c, d, et par suite à ceux de a', b', c', d'. Ce qui, évidemment, ne peut avoir lieu qu'autant que d'' se confond avec d', donc, etc.

Le double rapport de quatre points a, b, c, d peut s'exprimer de plusieurs manières, qui, en définitive, se réduisent aux trois suivantes :

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}, \quad \frac{ad}{ab} : \frac{cd}{cb}, \quad \frac{ab}{ac} : \frac{db}{dc}.$$

or, il est évident que chacun de ces rapports est égal à celui formé par les points homologues pris de la même manière ; il est donc indifférent de prendre l'un ou l'autre ; ils expriment tous les trois que les quatre points a', b', c', d' sont perspectives respectives de ceux a, b, c, d.

Il est à remarquer que le produit de ces trois doubles rapports formé par quatre points est égal à -1.

Lorsque deux systèmes a, b, c, d et a', b', c', d' de quatre points ont leurs rapports anharmoniques égaux, nous venons de voir qu'on peut les placer en perspective, de manière que a corresponde à a', b à b', c à c', d à d'; mais on peut les placer en perspective de trois autres manières, en changeant la correspondance des points : en effet, on a par hypothèse :

$$(1) \qquad \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{a'c'}{a'd'} : \frac{b'c'}{b'd'},$$

Or, sans changer l'égalité, on peut écrire :

$$(2) \qquad \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{b'd'}{b'c'} : \frac{a'd'}{a'c'},$$

$$(3) \qquad \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{c'a'}{c'b'} : \frac{d'a'}{d'b'},$$

$$(4) \qquad \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{d'b'}{d'c'} : \frac{c'b'}{c'a'}.$$

Or, la 1re égalité exprime qu'aux 4 points :

	$a, b, c, d,$	correspond respectivement	a', b', c', d';
La 2e :	$a, b, c, d,$	id.	b', a', d', c';
La 3e :	$a, b, c, d,$	id.	c', a', d', b';
La 4e :	$a, b, c, d,$	id.	d', c', b', a'.

Ainsi on peut dire :

12e Théorème. — *Lorsque quatre points en ligne droite sont perspectives de quatre autres points nécessairement aussi en ligne droite, on peut les établir de trois autres manières différentes, en perspective en changeant la correspondance des points.*

Dans l'égalité

$$\frac{ac}{ad}:\frac{bc}{bd}=\frac{a'c'}{a'd'}:\frac{b'c'}{b'd'}$$

on peut supposer que trois des points, tels que b, c, d sont fixes et que le quatrième a soit variable ; il en sera de même des points homologues b', c', d' qui seront fixes, et du point a' qui sera variable. Or on peut écrire l'égalité ci-dessus sous la forme suivante :

$$\frac{ac}{ad}:\frac{a'c'}{a'd'}=\frac{bc}{bd}:\frac{b'c'}{b'd'}=\text{constante},$$

qu'on peut exprimer en disant :

13e Théorème. — *Le rapport des distances d'un point quelconque* a *d'une droite à deux points fixes* c *et* d *pris sur cette droite, est à celui du point homologue* a' *aux deux points homologues* c' *et* d' *dans une raison constante.*

Si par les points fixes c et d on mène deux droites quelconques, le rapport des distances de b à ces deux droites, divisé par celui de a à ces mêmes droites, est égal au double rapport des segments ci-dessus. Si de même par c' et d' on mène les deux droites homologues (ou même non homologues), il en sera de même pour les distances des points b' et a' à ces deux droites ; il en résultera que :

14e Théorème. — *Le rapport des distances d'un point à deux droites fixes, est à celui du point homologue aux deux droites homologues, dans une raison constante.*

Si on suppose les points c,d et c',d' fixes, et une droite mobile, on aurait alors :

15e Théorème. — *Le rapport des distances d'une droite quelconque à deux points fixes est au rapport des distances de la droite homologue aux deux points homologues dans une raison constante, quelle que soit la position de la droite.*

Dans ces deux propositions, on peut supposer un des deux points ou des deux droites fixes à l'infini, il en résulterait divers corollaires.

Le double rapport perspectif, ou le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite, peut avoir une valeur quelconque, elle peut, par conséquent, être égale à l'unité, alors on a :

$$\frac{ac}{ad}=\frac{bc}{bd}$$

et par suite :

$$\frac{a'c'}{a'd'}=\frac{b'c'}{b'd'}.$$

Cette relation entre quatre points est dite *harmonique*, donc cette relation est perspective. Elle a encore lieu entre les sinus des angles formés par un faisceau de quatre droites passant par ces points.

Dans l'égalité

$$\frac{ac}{ad}:\frac{bc}{bd}=\frac{a'c'}{a'd'}:\frac{b'c'}{b'd'},$$

si une des droites, telle que Vd était parallèle à la droite $a'b'c'd'$, c'est que le point d' serait à l'infini, alors :

$$\frac{a'd'}{b'd'}=$$

d'où

$$\frac{ac}{ad}:\frac{bc}{bd}=\frac{a'c'}{c'b'}.$$

Si on avait en outre

$$\frac{ac}{ad}=\frac{bc}{bd},$$

c'est-à-dire si le rapport des quatre points a, b, c, d était harmonique, alors on aurait $a'c' = b'c'$, donc

16e Théorème. — *Lorsqu'un faisceau harmonique est coupé par une transversale parallèle à l'une des droites du faisceau, les deux segments formés par les trois droites sur cette transversale sont égaux.*

Ce théorème sera fort utile.

Relations entre les surfaces.

Des relations analogues à celles que nous avons établies pour des segments situés sur deux droites perspectives réciproques peuvent s'établir entre les surfaces des deux figures.

Soient a, b, c, d, e, cinq points dans un même plan, et de même a', b', c', d', e' les cinq points perspectifs correpondants ; formons avec les cinq premiers les triangles eab, ebc, dab, dbc, et avec les cinq autres ceux correspondants $e'a'b', e'b'c', d'a'b, d'b'c'$.

On peut considérer le point de vue V comme le sommet commun de deux systèmes de quatre pyramides triangulaires ayant pour bases les triangles ci-dessus.

Appelons p et p' les longueurs des perpendiculaires abaissés de V sur les deux plans des triangles; ce seront les hauteurs des deux systèmes de pyramides.

Comparons les pyramides correspondantes, c'est-à-dire qui ont des arêtes communes, telles que V*eab* et V*e'a'b'*; et leurs volumes seront entre eux comme le produit de leur base par leur hauteur; mais par un théorème connu, ayant les arêtes communes en direction, ils seront aussi entre eux comme le produit des trois arêtes correspondantes; on aura donc :

$$\frac{eab.p}{e'a'b'.p} = \frac{\mathrm{V}a.\mathrm{V}b.\mathrm{V}e}{\mathrm{V}a'.\mathrm{V}b'.\mathrm{V}e'};$$

on aurait de même :

$$\frac{ebc.p}{e'b'c'.p'} = \frac{\mathrm{V}b.\mathrm{V}c.\mathrm{V}e}{\mathrm{V}b'.\mathrm{V}c'.\mathrm{V}e'};$$

divisant ces deux égalités l'une par l'autre, on aura :

$$\frac{eab}{e'a'b'} : \frac{ebc}{e'b'c} = \frac{\mathrm{V}a}{\mathrm{V}a'} : \frac{\mathrm{V}c}{\mathrm{V}c'};$$

en prenant maintenant les triangles qui, ayant même base respective, ont le point d pour sommet au lieu de e, on aura pareillement :

$$\frac{dab}{d'a'b'} : \frac{dbc}{d'b'c'} = \frac{\mathrm{V}a}{\mathrm{V}a'} : \frac{\mathrm{V}c}{\mathrm{V}c'},$$

d'où il suit qu'on a :

$$\frac{eab}{e'a'b'} : \frac{ebc}{e'b'c'} = \frac{dab}{d'a'b'} : \frac{dbc}{d'b'c'}$$

ou bien

$$\frac{eab}{ebc} : \frac{dab}{dbc} = \frac{e'a'b'}{e'b'c'} : \frac{d'a'b'}{d'b'c'}$$

double rapport qui lie les surfaces des triangles formés par cinq points à celles des triangles qui en sont la perspective on peut l'énoncer ainsi :

Théorème. — *La perspective de cinq points, donne cinq points tels que le double rapport des surfaces des quatre triangles différents que l'on peut former en prenant pour bases les deux droites* (*tels que* ab, bc) *qui joignent trois de ces points, et pour segments les deux autres des cinq points* (e *et* d) *est égal au double rapport formé de même par les triangles correspondants formés de même par les points perspectifs.*

Il en résulte donc que ce double rapport est une relation perspective, c'est-à-dire qui se conserve toujours entre ces quatre triangles, d'où il résulte ce corollaire que :

Corollaire. — *Si cinq droites dans l'espace passent par un même point en les coupant par divers plans quelconques, le double rapport formé dans* *chaque plan entre les surfaces des triangles résultant des cinq points d'intersection, sera constant.*

Remarquons que de même que dans le double rapport formé entre quatre points situés sur une droite, on peut prendre pour sommets du rapport deux quelconques des quatre points, de même ici on peut prendre pour sommets des triangles, deux quelconques des cinq points et les trois autres pour former leurs bases, pourvu qu'on prenne dans l'autre figure, de la même manière, les points respectivement correspondants, les deux doubles rapports ainsi formés seront égaux. Ce qui donnerait plusieurs expressions de ce double rapport existant entre cinq points correspondants.

Réciproquement si à cinq points quelconques a,b,c,d,e pris dans un plan, correspondent respectivement cinq autres points a',b',c',d',e' dans un autre plan, de telle manière que le double rapport perspectif, formé par les premiers points, soit égal à celui formé par ceux correspondants, il en résultera que les deux figures peuvent se mettre en perspetive. En effet, considérons les deux quadrilatères correspondants $abcd$, $a'b'c'd'$, nous démontrerons un peu plus loin que deux quadrilatères quelconques, tels que ceux-ci, peuvent toujours se mettre en perspective, c'est-à-dire tels que les droites aa', bb', cc', dd' passent par un même point tel que —V, joignons ce point V avec le cinquième point e de la première figure par une droite, elle percera le plan de la deuxième figure en un point qui doit être e'; car supposons qu'elle puisse le percer en un point e'' différant de e', alors, d'après le théorème ci-dessus, le double rapport entre les triangles formés par les cinq points a', b', c', d', e'' sera égal à celui formé par les cinq points a, b, c, d, e; mais celui-ci est égal à celui des cinq points a', b', c', d', e', donc il faut que celui des cinq points a', b', c', d', e'. soit égal à celui des cinq points a', b', c', d', e', ce qui exigerait que non-seulement le rapport des surfaces soit égal à celui

$$\frac{e''a'b'}{e''b'c'},$$

mais aussi celui

$$\frac{e'b'c'}{e'd'c'} = \frac{e''b'c'}{e''d'c'}$$

ce qui ne peut être que si le point e'' se confond avec e'.

Remarquons bien qu'il ne suffirait pas que

$$\frac{e'a'b'}{e'b'c'} = \frac{e''a'b'}{e''b'c'},$$

mais encore que

$$\frac{e'b'c'}{e'd'c'} = \frac{e''b'c'}{e''d'c'}.$$

On voit par cette réciproque du théorème, qu'il suffit pour avoir la perspective d'une figure donnée de connaître quatre points de cette perspective, car un point quelconque de la première figure aura de suite son correspondant déterminé comme ci-dessus.

Si on joint un quelconque des cinq points $a,b,c,d,e,$ avec les quatre autres, on forme quatre triangles, et le double rapport formé par les surfaces de ces quatres triangles est de même un rapport perspectif. Ainsi prenons le point e pour sommet, les quatre triangles seront $eba, ebc, eda, edc,$ et on aura

$$\frac{eba}{ebc} : \frac{eda}{edc} = \frac{e'b'a'}{e'b'c'} : \frac{e'd'a'}{e'b'a'}.$$

La démonstration peut se faire comme ci-dessus.

CHAPITRE II.

DES RELATIONS EXISTANT ENTRE DEUX FIGURES PARTICULIÈRES QUI SONT PERSPECTIVES RÉCIPROQUES L'UNE DE L'AUTRE.

Dans le premier chapitre, nous avons exposé les relations descriptives et métriques qui existent entre deux figures perspectives réciproques l'une de l'autre ; ce sont des relations fondamentales de la transformation perspective ; elles vont nous servir maintenant à établir celles relatives à des figures particulières. Ainsi, étant donnée une figure géométrique, nous chercherons les formes diverses qu'on peut en obtenir par la perspective, puis ensuite, au moyen des propriétés connues de cette première figure et des relations fondamentales établies ci-dessus, nous chercherons celles de la seconde.

Avant de commencer, il est nécessaire de se reporter à notre fig. 1, pour bien concevoir les divers plans, les diverses droites, les divers points qui neus serviront dans nos constructions, et dont les positions respectives sont évidentes dans cette fig. 1, mais qui le seront moins lorsque nous ne nous servirons plus de cette figure, mais bien de celles indiquées dans la fig. 3.

Rappelons, en conséquence, que le plan S est un plan indéfini sur lequel se trouve la figure donnée ; il peut toujours être regardé comme horizontal et être représenté par le plan du papier ; c'est sur lui que se feront toutes les constructions et les rabattements.

Le plan T, aussi défini, est celui sur lequel doit se trouver la perspective donnée ; il peut avoir une direction quelconque dans l'espace, et ainsi faire un angle quelconque avec celui S ; il aura sur ce plan pour trace une droite T_1T_2 qui le déterminera.

Le plan V est un plan mené par le point de vue V, et qui doit toujours être parallèle à celui T. Sa trace sur le plan S est la droite indéfinie J_1J_2, qui contient tous les points de la première figure, qui sont à l'infini sur sa perspective.

Le plan indéfini H est celui mené par V, parallèlement à celui S, et qui coupe celui T suivant la droite I_1I_2, qui contient tous les points de la perspective, qui sont à l'infini dans la première.

Rappelons que les plans V et T peuvent tourner autour de leur trace respective sur le plan S sans cesser d'être parallèles et que, dans quelque position qu'on les arrête, la figure perspective de celle donnée sera toujours la même; elle ne changera pas ainsi dans son plan, d'où résulte que l'angle dièdre du plan T avec celui S est indifférent aux résultats, qu'on peut ainsi le supposer droit ou nul et qu'on obtiendra toujours la même figure. Nous choisirons donc, suivant la nécessité, une de ces deux positions.

Dans ce mouvement des plans parallèles V et T, on voit que celui H reste parallèle à celui S, et, qu'enfin, le point de vue V décrit une circonférence dont le point p, qui est le pied de la perpendiculaire abaissée de V sur JJ_2, est le centre, et Vp le rayon.

Lorsque les plans T et V seront rabattus sur le plan S, comme dans la fig. 3, les deux figures seront homologiquement placées. Le point V devient le centre d'homologie, et la droite T_1T_2 sera l'axe d'homologie des deux figures, et ces trois droites T_1T_2, II, JJ, sont toujours parallèles.

Parmi tous les angles que le plan T peut faire avec celui S, il faut remarquer celui où ces deux plans seraient parallèles; alors leur intersection commune serait à l'infini, ainsi que les droites I_1I_2, J_1J_2, et cela quelle que soit la position du point de vue. On voit que, dans cette position, il en résultera qu'à des droites quelconques dans l'une des figures correspondront dans l'autre des droites respectivement parallèles aux premières; qu'ainsi, à un système de droites parallèles dans l'une des figures correspondra un système de droites, non-seulement parallèles entre elles, mais encore parallèles aux premières; les deux figures seront donc des figures semblables et semblablement placées. Si, de plus, le point V était à l'infini, les deux figures seraient égales.

Le point de vue peut se trouver seul à l'infini, alors les rayons perspectifs deviendraient des droites parallèles; le cône perspectif se changerait donc en un cylindre.

La distance du point V au plan T, comptée parallèlement à celui S, peut être quelconque; nous l'avons désignée par d. Elle est toujours égale à celle qui sépare les deux droites T_1T_2, J_1J_2.

Il en est de même de celle qui sépare le point V à celui S, contée parallèlement à T, que nous avons désignée par h, et qui est toujours égale à la distance entre les droites TT, II.

Comme ces plans T et V peuvent toujours se ramener à être perpendiculaires à celui S, nous pouvons donc considérer *d* et *h* comme les distances de ce point à ces deux plans.

Les relations qui existent entre deux figures perspectives réciproques dépendent évidemment des positions relatives des plans S, T et du point V. Parmi ces relations, il y en a qui subsistent dans les deux figures séparées; par exemple : le double rapport entre les segments formés par quatre points en ligne droite est une relation de ce genre. D'autres, au contraire, dépendent de leurs positions en perspective; par exemple, que les droites homologues se coupent toujours sur la ligne de terre. Enfin, d'autres résultent de leurs positions dans un même plan.

Le point de vue V peut occuper toutes les positions possibles dans les quatre angles dièdres formés par les plans T et S. Le rabattement du plan T sur le plan peut s'effectuer dans deux sens différents; les deux figures perspectives ne changeront pas pour cela de forme, mais leurs positions dans ce plan ne seront plus les mêmes.

Le rabattement peut d'abord s'effectuer d'avant en arrière, comme dans la fig. 7. On voit alors que si V est au-dessus du plan S et en avant de celui T, comme dans les tableaux des peintres, il arrivera que la droite T_1T_2 sera intermédiaire entre celles I_1I_2 et J_1J_2. Le point V rabattu se trouvera alors au-dessous de T_1T_2 ou en dessus, suivant que Vp ou h sera plus petit ou plus grand que pT ou d.

Si le rabattement se faisait d'arrière en avant, alors les droites I_1I_2 et J_1J_2 se trouveraient du même côté par rapport à T_1T_2, comme on le voit fig. 8.

Si les distances de V aux plans S et T étaient égales, c'est-à-dire si $h = d$, alors, dans le premier mode de rabattement, le point V tomberait sur T_1T_2, et cette droite serait à égale distance de I_1I_2 et J_1J_2.

Dans le deuxième mode, alors I_1I_2 et J_1J_2 se confondraient suivant une seule droite à égale distance de V et de T_1T_2.

Dans ce cas, il résulte cette particularité intéressante entre les deux figures : c'est qu'à un point, une droite, ou même une figure quelconque, correspond toujours le même point, la même droite, la même figure, soit que l'on considère la figure donnée comme appartenant au plan S ou au plan T. Ainsi, soit le point a déterminé par l'intersection des deux droites am, an. Si par V on mène Vr parallèle à am, le point r où cette droite rencontre la ligne I_1I_2 ou J_1J_2, qui se confondent, sera aussi bien le point de fuite de cette droite am, soit qu'on la considère comme étant dans le plan T ou dans celui S; il s'ensuit que mr sera la perspective de am dans les mêmes suppositions. De même, tn sera la perspective de an, et, par suite, a' intersection de mr et nt sera la perspective du point a, soit que ce point soit considéré comme appartenant au plan S ou au plan T.

Nous verrons que, par suite de cette position du point V à égale distance des plans S et T, il en résulte, dans les relations des deux figures, des particularités remarquables; nous avons déjà trouvé qu'alors $\frac{Va}{Va'} = \frac{Sa}{Sa'}$ (fig. 10).

Dans les transformations que nous allons faire subir à une figure géométrique, en la mettant en perspective, nous aurons surtout égard à la facilité que nous aurons de faire passer à l'infini, dans la figure transformée, des points de cette première situés en ligne droite; il suffira, en effet, de prendre pour la droite JJ, celle qui passerait par les points que l'on veut faire ainsi passer à l'infini.

Lorsque deux figures sont placées homologiquement, nous pourrons ensuite regarder ces deux figures ainsi placées comme formant une seule et même figure tracée sur le plan S, de sorte qu'en la mettant en perspective, nous aurons ces deux figures dans diverses positions où les relations qui existent entre elles seront plus évidentes. Par exemple, en transformant ces deux figures de manière que, restant toujours homologiques, la droite J_1J_2 soit à l'infini.

Lorsque nous aurons fait voir que, par la perspective, des figures peuvent se transformer l'une dans l'autre, il nous suffira de démontrer que des relations perspectives sont évidentes dans la plus simple des figures de l'espèce, pour en conclure immédiatement, sans autre démonstration, que ces relations, étant perspectives, existent dans toutes les figures qu'on peut obtenir par cette première. C'est ainsi, par exemple, que nous déduirons les propriétés des sections coniques de celles bien connues du cercle, etc.

Toutes les ressources que l'on peut tirer ainsi de la perpective s'éclairciront par les diverses applications que nous allons faire.

Deux droites dans un même plan.

Deux droites L, L' fig. 11, dans un même plan, peuvent toujours être considérées comme perspectives réciproques l'une de l'autre pour un point de vue quelconque V de ce plan, soit que l'on regarde ce plan comme étant leur plan perspectif, soit qu'on regarde la droite L comme appartenant au plan désigné par S, et celle L′ à celui T, ce dernier étant rabattu sur le plan S, conjointement avec le point V, suivant le principe indiqué des figures homologiques. Dans tous les cas, on voit qu'à un point quelconque m de la droite L correspondra un seul et unique point m' de la droite L′ et déterminé par le rayon perspectif Vmm', et réciproquement à un point quelconque m' de la droite L′ correspondra un seul et unique point m de la droite L.

Si donc sur la droite L on a une division quelconque formée par des points a, b, c, d ..., on aura sur L′ une autre division formée par les points correspondants a', b', c', d' ..., et les deux droites sont dites divisées perspectivement.

Au point de la droite L, qui est à l'infini, correspondra sur L′ un point i' déterminé par l'intersection de cette droite L′ et du rayon Vi' mené par V parallèle à L. De même, au point à l'infini sur la droite L′, correspondra sur la droite L le point j, déterminé par l'intersection de cette droite L et du rayon Vj mené par V parallèlement à L'.

Si on considère les deux droites L et L' comme étant dans leur plan perspectif, le point ff' d'intersection de ces deux droites sera ce à quoi se réduit, pour ces deux droites, la ligne de terre T_1T_2.

Les quatre points V, f, i', j forment un parallélogramme $Vjfi'$. Supposons que les sommets soient des charnières qui permettent la déformation des angles de ce parallélogramme, sans changer les longueurs des côtés. Si maintenant on suppose que la droite L' tourne dans le plan de la droite L, autour du point f, alors le point V décrira une circonférence dont le centre serait en j, et dont le rayon serait Vj. Dans toutes les positions que l'on peut ainsi obtenir pour le parallélogramme, la droite L' sera toujours divisée aux mêmes points par les rayons qui joindront V aux divers points a, b, c ..., de la droite fixe L.

Il y a deux positions remarquables que peut occuper la droite L', relativement à la droite L :

1° Celle où elle lui est perpendiculaire ;

2° Celle où elle se confond avec elle ; et, dans ce dernier cas, il faut observer que le rabattement peut s'effectuer en deux sens différents.

Lorsque L et L' sont placées rectangulairement, le parallélogramme devient un rectangle, et alors la distance V*i* est celle du point V à la droite L' que nous avons représentée par *d*, et celle V*j* est la distance de ce point V à la droite L, et désignée par *h*.

Si les deux droites L, L' se confondent, alors le point V tombera en un point *e* tel que $je = j\text{V}$, ou si le rabattement avait lieu dans l'autre sens, le point V tomberait en *g*, tel que $gj = j\text{V}$. Le point *e* serait la perspective du point *e'*, tel que $fe' = fe$, ou bien, dans l'autre sens, le point *g* serait celle du point *g'*, tel que $fg' = fg$. Si nous ne considérons que le premier rabattement, il en résultera donc que les points *a'*, *b'*, *c'*, formeront une deuxième division sur la droite L, perspective de la première et qui auront deux points doubles *e* et *f*.

Dans toutes les positions des deux droites il existera, entre les segments formés par les points respectifs, les relations que nous avons déjà indiquées et que nous allons rappeler :

1° Le double rapport $\frac{ab}{ac} : \frac{db}{de}$ entre quatre points quelconques de la première division est égal à celui $\frac{a'b'}{a'c'} : \frac{d'b'}{d'c'}$ formé par les points correspondants, ou bien (13ᵉ théorème) :

$$\frac{ac}{ad} : \frac{a'c'}{a'd'} = \frac{bc}{bd} : \frac{b'c'}{b'd'} = \text{constante},$$

c'est-à-dire le rapport des distances d'un point quelconque a à deux points fixes c et d, est à celui du point homologue a' aux deux points correspondants c' et d', dans une raison constante.

Ou encore (5e théorème) :

$$\frac{ab}{a'b'} = \frac{aj}{b'i'} = \frac{bj}{a'i'},$$

ou bien (3e théorème) :

$$aj.a'i' = \text{constante} = h.d = je.jf = if.ie = fi.fj = ej.ei.$$

Réciproquement, lorque deux droites, prises séparément, sont divisées en des points respectivement correspondants, de telle manière que le double rapport formé par quatre quelconques des points de la première est égal à celui formé, de la même manière, par les points correspondants de la seconde, les deux divisions peuvent se placer en perspective de bien des manières. Il suffit, en effet, de faire coïncider deux points correspondants, tels que f et f', puis de tracer les droites aa', bb', qui se rencontreront en un point V, qui sera le point de vue; il est évident, en effet, à cause du double rapport perspectif, que si on joint V à un point quelconque c de la première par une droite, elle passera par le point correspondant c', etc. Le point V étant retrouvé, on déterminera ensuite ceux i', j, e, g.

Lorsque les deux droites L et L' se confondent, il y a donc deux divisions perspectives sur une même droite ; parmi ces points, il faut remarquer :

1° Les deux points doubles e et f qui ne sont pas toujours connus, et qu'il faut savoir déterminer, car c'est autour de l'un quelconque de ces deux points qu'on peut faire tourner une des droites sur l'autre, de manière à remettre en perspective les deux divisions, et, par suite à déterminer les divers points correspondants. Ces deux points servent en outre à résoudre plusieurs problèmes importants.

2° Les deux points i' et j qui, comme on le sait, correspondent chacun à l'infini de l'autre droite.

3° Enfin, on voit que le point o milieu de ij sera aussi le milieu de ef, puisque $ej = jv = ef$, et, par suite, $jf = ie$. D'où résultera que, lorsqu'on connaîtra trois des quatre points i, j, e, f, le quatrième sera aussi connu.

Il est facile d'abord de déterminer les deux points i et j, Il suffit, par un des points quelconques a de la première division de mener une droite quelconque sur laquelle, à partir de ce point a on rapportera les points de division de la deuxième, de manière que a et a' se confondent ; ensuite les deux droites qui joindraient b avec b' et c avec c' se rencontreraient en un point V, par lequel, menant des parallèles à ces deux droites, elles les rencontreraient respectivement aux points i et j. On pourra alors rapporter le point i sur la droite qui contient les deux divisions perspectives; ainsi, lorsqu'on a deux divisions perspectives, on peut avoir facilement le point de chacune de ces divisions qui correspond à l'infini dans l'autre,

Le point o, milieu entre i et j, sera bien le milieu entre les deux points doubles, mais ne suffira pas pour les déterminer.

Nous avons vu qu'entre deux divisions perspectives, on avait :

$$fi.fj = ei.ej = aj.a'i' = bj.b'i' = \ldots$$

Or, si on connaît les points i et j, il sera facile d'avoir la moyenne géométrique m entre aj et $a'i$, de sorte qu'on aura :

$$m^2 = aj.a'i = fi.fj = ei.ej.$$

Si donc sur ij comme diamètre on décrit une circonférence et qu'on mène une parallèle à ce diamètre, à une distance m, elle coupera la circonférence en deux points. En abaissant, de ces deux points, deux perpendiculaires sur le diamètre, les pieds seront les points doubles e et f cherchés.

Si cette parallèle au diamètre ne rencontrait pas la circonférence, cela indiquerait que les deux points doubles sont imaginaires.

Connaisant la longueur m, donnée par

$$m^2 = aj.a'c,$$

on voit qu'il est facile d'avoir de suite le point correspondant b' à un point quelconque b; car, puisqu'on a $bj.b'i = m^2$, ayant bj on aura $b'i$, qu'on reportera sur la droite à partir de i, et le point b' sera ainsi déterminé.

Nous avons jusqu'ici considéré les deux droites L et L' comme étant dans leur plan respectif. Regardons-les maintenant comme étant, l'une dans le plan S, et l'autre dans le plan T, rabattu sur le plan S (fig. 12) autour de leur commune intersection T_1T_2. Elles seront encore perspectives réciproques pour un point quelconque V de ce plan. Leur point f d'intersection sera nécessairement un des points de l'axe d'homologie. De même, le point i est un point de la ligne de fuite I_1I_2 et j de la droite JJ. Ces trois droites T_1T_2, I_1I_2, J_1J_2, devraient être parallèles, mais on voit qu'il y a encore indétermination de leur commune direction. Soient (fig. 12) les droites T/T prises arbitrairement, alors II, JJ, en résulteront.

Ces deux droites L et L' et T_1T_2 étant connues, on peut obtenir la perspective d'une autre droite ca, qui coupe la droite L en a et celle T_1T_2 en α. En effet, a a pour perspective, pour un point de vue V, le point a'. Le point α est un point commun à la droite ca et à sa perspective ; donc, $\alpha a'$ est la perspective de $ca\alpha$. On trouverait pareillement que $cb'\alpha$ serait la perspective de cb et, par suite, le point c' d'intersection de ca et cb, serait la perspective du point c. Ainsi on voit qu'on peut avoir la perspective d'un point quelconque et, par suite, de toute figure donnée.

Si dans la première figure on avait deux droites parallèles, leurs perspectives seraient deux droites se coupant sur II, et réciproquement, deux droites parallèles dans la deuxième figure, donneraient dans la première deux droites concourantes sur J_1J_2.

Remarquons que dans cette figure la distance de

V à II est égale à celle de T_1T_2 à I_1I_2, et, de même, celle de V à J_1J_2 est égale à celle de la droite T_1T_2 à I_1I_2.

Au lieu de se donner, comme ci-dessus, la droite T_1T_2, on peut la déterminer par cette condition : qu'un point quelconque de la première figure étant considéré comme appartenant à la seconde, a pour perspective le même point dans la première.

Ainsi (fig. 13), considérons les points a, b, c, ... de la première droite L ; ils auront pour perspective sur la droite L′ les points a', b', c', ... pour un point V pris arbitrairement, et quelle que soit la droite T_1T_2. Mais si on ajoute, par exemple, que la droite ac' de la première figure, qui joint a au point c', est la perspective de celle $a'c$, qui joint le point a', perspective de a avec c perspective de c', c'est dire que le point c' a pour perspective le point c, non-seulement en considérant le point c' comme appartenant à la droite L′ de la deuxième figure, mais aussi à la droite ac' de la première, et s'il en est de même pour les autres points pris de la même manière, il en résultera :

1° Que toutes les intersections, telles que α, β, de ac' avec $a'c$, de bc' avec $b'c$, etc., devront se trouver sur une même droite T_1T_2 ;

2° Que dans ce cas, le point V sera à égale distance des plans T et S, comme nous l'avons indiqué (fig. 10), et que, par suite, les droites I_1I_2 et J_1J_2 doivent, comme dans cette fig. 10, se confondre en une seule ; aussi, il en résulte (fig. 13) que la droite qui joint i à j sera les deux droites II, JJ, confondues, et qui sera parallèle à $T_1\,\alpha\beta - T_2$.

Il en résulte plusieurs théorèmes connus sur les transversales. Ainsi :

1° Si d'un point quelconque, tel que V, on mène une suite de transversales, les droites qui, deux à deux, joignent les points d'intersection, se coupent en des points qui sont sur une même droite T_1T_2, passant par le point d'intersection de ces deux droites. Cette droite est dite la polaire du point V, relativement aux deux droites L et L'.

2° Les transversales sont coupées par les droites L, L', T_1T_2 et par le point V, en quatre points dont le rapport des segments est harmonique (3e théorème). Ainsi, on a $\frac{Va}{Va'} = \frac{Sa}{Sa'}$, etc.

Si on transporte le point V en un point quelconque de la droite qui joint V à f, les deux parallèles menées de ce nouveau point aux droites L et L′, détermineront deux autres points i et j, mais tels que la droite qui les joindra sera toujours parallèle à celle I_1I_2, et, par conséquent, à T_1T_2. Donc :

3° La polaire d'un point quelconque de la droite Vf est toujours la même droite ; mais, réciproquement, on verra que la polaire d'un point quelconque de T_1T_2 sera la droite Vf.

Ces deux droites Vf et TfT, qui jouissent de cette propriété, sont dites conjuguées rélatives aux droites L et L′. On voit qu'une transversale quelconque coupe ces deux droites, et celles L et L′ en quatre points formant toujours un rapport harmonique.

La position particulière du point V dans la fig. 13, où il est à égale distance du plan T et de celui S, nous fait voir que dans ce cas, une figure géométrique quelconque située dans le plan S se confondra avec sa perspective dans le plan T lorsqu'on rabattra cette dernière sur le plan S, sans cependant que les points homologues coïncident, mais seulement qu'un point considéré comme appartenant à l'une ou l'autre figure aura toujours le même point pour son homologue. Ainsi la droite L considérée comme appartenant à la première figure a pour homologue la droite L′, et considérée comme appartenant à la deuxième, elle aura pour homologue encore la droite L′, mais appartenant alors à la première figure.

Nous aurons occasion, par la suite, d'examiner des figures ainsi placées et d'en déduire quelques-unes de leurs propriétés.

Involution.

La considération du point V à égale distance des plans S et T nous a conduit à quelques résultats remarquables ; il en sera de même pour deux divisions perspectives sur une même droite, lorsque (fig. 11, 12, 13) nous supposerons la distance $Vi = Vj$, auquel cas le point V se trouve situé sur l'une des bisectrices de l'angle des deux droites L et L′, comme on le voit (fig. 14), les deux droites étant regardées comme étant dans leur plan respectif.

Dans cette position, il est évident qu'à des points quelconques a, b, c, situés sur la droite L′ correspondront toujours perspectivement des points a', b' c' sur L′, seulement, les points i et j seront tels que $fi = fj$; la perpendiculaire ee', menée par V, à la bisectrice fV, donnera les deux points e et e', à égale distance de f. Si maintenant on fait tourner la droite L′ autour du point f, de manière à la rabattre sur L, il en résultera :

1° Que les deux points i et j tomberont l'un sur l'autre, en un point que nous désignerons par o ;

2° Que le point e' tombera de même sur e, de sorte que les points f et e seront les points communs aux deux divisions ; on les appelle, en conséquence, les points doubles ;

3° Que les triangles efe', eoV étant isocèles, on aura $oe = o$V, de sorte que V tournant autour du point o se rabattra en e;

4° Que si un point quelconque a de la droite L avait pour perspective le point a', ce point a rabattu sur L en a', et considéré maintenant comme appartenant à cette droite L, serait la perspective du point a_1 de la droite L′, qui se rabat sur le point a lui-même, de sorte que le point a, considéré comme appartenant à la droite L ou à celle L′, a toujours pour perspective le point a' appartenant à la droite L′ ou à celle L, et de même pour tous les autres. Il s'ensuit que ces deux divisions sur une même droite présentent cette particularité, qu'à un point quelconque de l'une de ces divisions correspond toujours le même point dans l'autre, soit que l'on considère le premier point comme appartenant indifféremment à l'une ou l'autre de ces deux divisions.

Lorsqu'une droite se trouve ainsi divisée, on dit que ces deux divisions sont en involution.

Les propriétés de ces deux divisions sont d'abord celles de deux divisions perspectives ; mais il résulte de cette position que si on prend quatre points a, b, c, c', considérés comme appartenant à la première division, les points homologues ou correspondants seront a', b', c', c, de sorte que le double rapport formé par les quatre premiers sera égal à celui formé de la même manière par les points respectifs des quatre autres. Cette propriété est caractéristique des divisions en involution et peut servir à les définir. Ainsi, si trois couples de points a, a', b, b', c, c' sont tels que le double rapport formé par quatre quelconques de ces six points est égal à celui formé par les quatre autres correspondants ; ces six points sont dits en involution ; et de même pour deux divisions où cette même relation existe entre trois couples de points correspondants.

Quatre points a, a', f', f, correspondants ou conjugués deux à deux, suffisent, sur une droite, pour déterminer les divers points d'involution. En effet :

Traçons deux droites quelconques L et L' (fig. 14) et leur bisectrice fV. Rapportons sur ces deux droites les points donnés, en faisant coïncider f de l'une avec f' de l'autre ; alors la droite qui joindra a avec a' rencontrera la bisectrice en un point V, qui sera le point de vue, de sorte que, joignant un point quelconque b de la première avec V, cette droite coupera L$'$ en b', homologue de b.

Deux divisions perspectives, telles que celles tracées (fig. 11, 12, 13), peuvent toujours se mettre l'une sur l'autre en involution. En effet, nous avons (fig. 11) sur L deux segments fe, fg, respectivement égaux à ceux correspondant respectivement fe', fg'; considérons seulement ceux fe, fe' et plaçons la droite L$'$ sur celle L, de manière que le point f' coïncide avec e, et celui e' avec f; il s'ensuivra évidemment que les quatre points a, b, e, f, auront pour correspondants ceux a', b', f, e, le double rapport des quatre premiers sera égal à celui des seconds ; donc, les 2 divisions seront en involution. On voit aussi que i se confondra avec j, puisque $ej = fi$.

On voit aussi que l'involution de deux divisions sur une même droite ne tient qu'aux positions respectives données à ces deux divisions.

La propriété la plus importante de deux divisions en involution est que les deux points i et j, correspondants à l'infini dans l'une et l'autre des divisions, se confondent.

Alors le théorème 3 donne :

$$aj.a'i' = bj.b'j' = h.d = je.jf = if \times ie = \text{etc.}$$

Or, ici, $h = d$ ou $jf = je$, $if = ie$. Les deux points i et j se confondent en un point, de sorte qu'on a

$$oa.oa' = ob.ob' = oc.oc = \mathrm{L}^2 = of^2 = oe^2 = oe^2 = o\mathrm{V}^2.$$

Le point o s'appelle le centre de l'involution et les points e et f en sont les points doubles. Il en résulte ce théorème :

Dans deux divisions en involution sur une même droite, il existe un point central tel que le produit des distances de ce point à deux points homologues est constant et, en outre, deux points doubles e *et* f, *situés de chaque côté du point* o, *à une distance commune égale à la racine carrée du produit précédent.*

Si les points homologues a, a', b, b', sont du même côté de o, les segments oa, oa', ob, ob', ont le même signe et alors la racine carrée de

$$oa.oa' = ob.ob'$$

est réelle, il y a donc deux points doubles réels; mais, au contraire, si les points homologues sont l'un à droite, et l'autre à gauche, auquel cas ils sont tous ainsi, alors les deux segments oa, oa' ou ob, ob' sont de signe contraire, d'où résulte que les points doubles sont alors imaginaires.

Toutes les circonférences qui passeront par deux points homologues, tels que a et a' ou b et b' et par V seront tangentes à oV, puisque

$$o\mathrm{V}^2 = oa, ob' = ab.ob' = \text{etc.}$$

Si donc au point V on élève une perpendiculaire o.V, toute circonférence ayant son centre sur cette droite, et passant par V, coupera la droite en deux points homologues ; ou bien, si l'un de ces points est connu on aura facilement l'autre.

Parmi ces circonférences il y en aura une passant par e et par V, et qui sera tangente en ces points à oe et oV, puisque $oe = o\mathrm{V}$.

On peut construire avec ces circonférences deux divisions en involution ; mais remarquons qu'alors les points homologues a, a', b, b' seront du même côté de o, et que les segments aa', bb', seront tous les uns dans les autres, sans empiéter l'un sur l'autre.

Pour concevoir des segments qui empiètent l'un sur l'autre, et qui soient en involution, il faut supposer la droite L′ se renversant sur L autour du point o, de telle sorte que f tombe sur e et e sur f, comme on le voit fig. 14.

Alors deux segments aa', bb', empiétant l'un sur l'autre, la circonférence décrite sur aa' comme diamètre, coupera celle décrite pareillement sur bb' en deux points m et m' (fig. 16), tels que la corde commune coupera la droite en un point o, tel que $oa.oa' = ob.ob' = om^2$. Toutes les circonférences qui auront leur centre sur la droite et qui passeront par ces deux points m et m', couperont la droite en deux points homologues c, c', d, d', tels que

$$oc.oc' = od.od' = oa.oa' = ob.ob = om^2,$$

d'où résultera des couples de points

$$a, a' - b, b' - c, c' - d, d',$$

qui doivent être en involution, car évidemment, si on a $oa.oa' = oc.oc'$, en changeant c en c' et c' en c, l'équation subsiste. Donc, si le point c' est regardé comme appartenant à la première division, son homologue dans la seconde est le point c, ce qui est le caractère de deux divisions en involution. On voit que dans ce cas où les segments empiètent l'un sur l'autre, les points doubles sont imaginaires. En décrivant sur des segments en involutions, empiétant les uns sur les autres, comme diamètres, toutes ces circonférences se couperont en deux mêmes points, et la corde commune passera par le centre o de l'involution. Chaque segment sera vu de m ou n suivant un angle droit.

Dans le cas où les segments n'empiètent pas l'un sur l'autre, il est toujours facile de déterminer le point central o; on prendra un point m quelconque, par ce point et ceux a, a' on fait passer une circonférence; par ce même point m et b et b', on en fait passer une autre; ces deux circonférences se couperont en un autre point n, et la droite mn passera par le point o, car $om.on = oa.oa' = ob.ob'$.

Connaissant le point o, la racine carrée de

$$om.on = oa.oa' = \text{etc.},$$

sera égale à $oV = oe = of$. De sorte qu'en décrivant une circonférence du point o comme centre avec oV pour rayon, elle coupera la droite aux points doubles e et f.

Les deux points doubles e et f divisent harmoniquement chaque segment aa', bb'. En effet : V étant (fig. 14) sur la bisectrice de l'angle des deux droites, on a

$$\frac{Va}{Va'}=\frac{fa}{fa'}.$$

Or les deux triangles eVa, $e'Va'$, ayant un angle commun, sont entre eux comme le produit des deux côtés qui comprennent cet angle ; or, comme $Ve=Ve'$, ils sont donc comme Va est à Va'. Mais ces deux triangles sont entre eux comme le produit de leur base par leur hauteur ; la hauteur est la même, donc ils sont entre eux comme leurs bases ; il en résulte

$$\frac{Va}{Va'}=\frac{ea}{ea'}=\frac{fa}{fa'},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Réciproquement, si une suite de deux points a, a', b, b' divisent harmoniquement un segment ef, les points a, b, c, et ceux homologues a', b', c', formeront deux divisions en involution.

Deux divisions perspectives sur une même droite ne sont généralement pas en involution ; nous avons vu qu'on peut les y ramener en changeant la position relative d'une des divisions sur l'autre. Dans leur position ordinaire, comme celle qui résulterait (fig. 11) du rabattement de la droite L sur celle L', s'il n'y a pas involution générale entre les deux divisions, il y a cependant involution entre les points doubles e et f et deux couples de points tels que a, b' et a', b. En effet, les quatre points a, b, e, f, correspondent aux quatre points a', b', e', f', de sorte qu'on a entre les segments

$$\frac{ae}{af}:\frac{be}{bf}=\frac{a'e}{a'f}:\frac{b'e}{b'f}$$

ou bien

$$\frac{ae}{af}:\frac{be}{bf}=\frac{b'f}{b'e}:\frac{a'f}{a'e}\ (12^{\text{e}}\ \text{th.}),$$

dernière égalité qui exprime qu'aux points

a, b, e, f,

correspondent respectivement ceux b', a', f, e, ce qui prouve qu'il y a involution entre les segments ab', $a'b$, ef.

1° Il suit de là que les circonférences décrites sur les trois segments ab', $a'b$, ef, passent toutes trois par deux mêmes points ;

2° Les trois circonférences menées par un même point et ayant pour cordes respectives les trois segments ab', $a'b$, ef, passent toutes trois par un second point commun.

Il en résulte que si l'on connaît trois points

a, b, c, et leurs homologues a', b', c', on peut obtenir facilement les deux points doubles e et f.

Par un point g, pris arbitrairement, on fera passer deux circonférences qui aient pour cordes respectives les deux segments ab', $a'b$, elles se couperont en un second point g'. Par le même point g, deux autres circonférences, ayant pour cordes ac', $a'c$, lesquelles se couperont en un autre point g''. La circonférence passant par les trois points g, g', g'', déterminera sur la droite ab les deux points doubles e et f; car ces deux points seront en involution : d'une part, avec les deux couples a, b' et $a'b$, et d'autre part, avec ceux a, c' et a', c.

Donc, etc.

La relation d'involution est évidemment une relation perspective, car elle repose sur l'égalité de doubles rapports perspectifs; il s'ensuit que, si une droite porte deux divisions en involution, toute perspective de cette droite sera divisée en involutions par les points homologues.

Si un faisceau de droites passe par les divers point d'une involution, ce faisceau sera formé de même par des rayons en involution. De sorte que, si on coupe ce faisceau par une droite quelconque, cette transversale sera divisée en involution.

On voit que dans un faisceau en involution, il y a deux rayons doubles, mais on ne peut pas dire qu'il y a un rayon central, car à ce rayon devrait correspondre l'infini dans un autre, ce qui ne peut exister pour des rayons passant par un même point.

(Voir sur l'involution, pour de plus amples détails, les divers chapitres de la *Géométrie supérieure* de M. Chasles, qui traitent de ce sujet.)

Nous pouvons considérer que dans les figures 11, 12, 13, 14, les deux droites L et L′ sont une même figure située dans le plan S, et dont nous allons chercher la perspective en prenant pour la droite J_1J_2 une des droites de la figure; par exemple, celle qui joint les points V et *f*. On voit de suite que, dans cette hypothèse, quelles que soient les positions du point V et des droites T_1T_2, I_1I_2, le point V passant à l'infini, il en résultera pour L et L′ deux droites parallèles; de plus le point V passant ainsi à l'infini, toutes les transversales V*aa*′, V*bb*, V*cc*′, deviennent des parallèles. Alors les deux divisions qui sont sur ces deux droites sont déterminées par deux parallèles coupées par des parallèles; donc les segments correspondants sont égaux. On peut donc dire :

Deux divisions perspectives sur deux droites proviennent de deux divisions égales formées sur deux droites parallèles et peuvent ainsi se transformer l'une dans l'autre.

Remarquons que les quadrilatères tels que $aa'bb'$, $bb'cc'$, etc., dans les figures 11, 12, 13, 14, deviennent des parallélogrammes. Or, il évident :

1° Que tous les points d'intersection des diagonales seront, sur une même droite, parallèles aux droites L et L';

2° Que cette droite est à égale distance de L et de L' et coupe les distances aa', bb', en deux parties égales;

3° De même que les parallèles menées par les points d'intersection des diagonales à la direction des transversales partagent ainsi les segments ab, bc ..., $a'b'$, $a'c'$ ... en deux parties égales.

Or, lorsqu'un segment tel que aa' est divisé en un point, en deux parties égales, ces trois points et celui qui, sur la même droite, est à l'infini, forment entre eux une division harmonique; il en résulte donc que nous pouvons conclure (fig. 11), sans démonstration, les propositions que nous avons énoncées déjà, qui sont (fig. 13) :

1° Si d'un point quelconque V on mène des transversales coupant deux droites quelconques L et L′ en des points a, b, c, et a', b', c', ... les diagonales de chaque quadrilatère ainsi formé se couperont en des points α d'une même droite passant par le point d'intersection f de ces deux droites; droite que nous avons appelée la polaire du point V.

2⁰ La polaire partagera chaque transversale Vaa' en un point s qui, avec ceux a, a', V, formera un rapport harmonique.

3⁰ De même, la transversale qui joint V à un des points d'intersection des diagonales coupe chaque coté, tels que ab, en un point tel qu'avec ceux a, b et f, ils forment un rapport harmonique;

4⁰ On voit par les mêmes raisons, que si le point V se trouve en un point quelconque de la droite qui joint V à f, la polaire de ces points sera toujours la même droite.

5⁰ Réciproquement, si on considère le point de vue sur cette polaire, les droites aa', bb', se rencontreront sur la droite Vf; de sorte qu'elle sera la polaire de chaque point de cette droite; ainsi ces deux polaires sont conjuguées respectives l'une de l'autre, c'est-à-dire que chacune de ces droites est la polaire de chaque point de l'autre.

DU TRIANGLE.

Un triangle quelconque abc a pour perspective un autre triangle $a'b'c'$, tels que les côtés homologues ab, $a'b'$ — ac, $a'c'$ — bc, $b'c'$ se coupent en des points situés sur une même droite TT_1 qui est la commune intersection des plans des deux figures.

Il est facile de voir qu'une de ces deux relations emporte l'autre ; en effet, si les droites ab, $a'b'$ se rencontrent en un même point, c'est qu'elles sont dans un même plan ; il en est de même de ac, $a'c'$ et bc, $b'c'$. Par conséquent, les deux plans $aba'b'$, $aca'c'$ se coupent suivant la droite aa' ; de même ceux $aba'b'$, $bc\,b'c'$ suivant bb', et les deux autres $aca'c'$, $bcb'c'$ suivant cc'. Ces trois plans se coupent en un même point V qui sera sur chacune des trois droites aa', bb', cc'. Donc, etc.

Si les deux figures sont ramenées dans un même plan et homologiquement placées, il est de même évident que si les droites aa', bb', cc' passent par un même point, celles ab, $a'b'$, ac, $a'c'$, bc, $b'c'$ se couperont en trois points situés en ligne droite et réciproquement.

Deux triangles quelconques peuvent se mettre en perspective d'une infinité de manières.

Ainsi (fig. 17), si on place le triangle quelconque $a'b'c$ sur le plan de celui abc, de telle sorte que le point a tombe sur a', alors bb' rencontrera cc' en un point V, tel que les deux figures seront en perspective pour ce point. On voit, en outre, que l'intersection de bc et $b'c'$ donnera un point p tel qu'en le joignant à celui aa', cette ligne TapT sera la ligne de terre T_1T_2 ou axe d'homologie.

Connaissant le point V et l'axe TT, on trouverait facilement la droite I_1I_2 qui, dans la deuxième figure, correspond aux points à l'infini de la première, et celle JJ_1 qui, dans la première, correspond aux points à l'infini de la deuxième.

Les côtés ab, ac, bc du triangle abc rencontrent T_1T_2 aux points v, v_1, v_2, et il en résulte que les droites Vv, Vv_1, Vv_2 sont parallèles aux côtés respectifs $a'c'$, $a'b'$, $b'c'$ du triangle $a'b'c'$.

Considérons un triangle quelconque abc (fig. 18) et donnons-nous le point V, les droites TT, JJ, d'où résulte celle II à une distance de TT égale à celle de V à JJ.

Les côtés ac, ab, bc de ce triangle abc rencontrent l'axe TT_1 aux points m, n, p. Si par ces points on mène $ma'c'$ parallèle à Vv — $na'b'$ parallèle à Vv_1

et $pb'c'$ parallèle à Vv_2, ces trois droites formeront le triangle $a'b'c'$, perspectif de celui abc, pour le point V et dont les côtés sont parallèles aux droites Vv, Vv_1, Vv_2 que nous appellerons les directrices de la construction. Il en résulte un moyen très-facile de déterminer la position d'un triangle semblable à un triangle donné, perspective de celui abc et passant par les points m, n, p.

On décrira sur vv_1 un segment capable de l'angle $b'\overline{a'}c'$ donné, sur v_1v_2, un segment capable de l'angle $a'\overline{b'}c'$, ils se couperont en un point V; le segment décrit sur vv_2, capable de l'angle $a'\overline{c'}b'$ ou de son supplément passera nécessairement par ce point V. On connaîtra donc ainsi les trois directrices parallèles aux côtés respectifs du triangle cherché $a'b'c'$, et comme on connaît un des points de chaque côté de ce triangle, sa position est donc déterminée.

Si on faisait mouvoir l'axe TT_1 parallèlement à lui-même, on aurait dans chaque position, pour perspective du triangle abc un autre triangle dont les côtés seraient parallèles à ceux de $a'b'c'$, et les grandeurs de ces côtés seraient à ceux du triangle $a'b'c'$ comme les distances respectives de V à ces deux plans T. Il sera donc facile d'avoir ainsi pour perspective du triangle abc, un autre triangle quelconque donné.

Deux triangles quelconques donnés peuvent donc se mettre ainsi en perspective.

Si au lieu du point V_1 on eût pris un autre point V_2, sans changer rien du reste, on voit que les directrices changeraient et qu'ainsi on aura pour ce point, pour perspective du triangle abc, un autre triangle dont les côtés seront parallèles à ces nouvelles directrices V_2v, V_2v_1, V_2v_2, et ainsi pour d'autres positions du point V.

Remarquons que le triangle $ma'n$ est semblable à celui vVv_1, que celui $ma''n$ est semblable à celui vVv_2. Or, comme les deux triangles $ma'n$, $ma''n$ ont même base mn, leurs surfaces sont comme leurs hauteurs ; il en est de même de ceux des triangles vV_1v_1, vV_2v_1 qui ont même base vv_1, d'où il résulte que les surfaces des deux triangles $ma'n$, $ma''n$ sont entre elles comme les distances des points V_1, V_2 à la base vv_1. De même, les deux triangles $nb'p$, $nb''p$ sont entre eux comme les distances des mêmes points à la même droite, de même, ceux $mc'p$, $mc''p$. Or le triangle $a'b'c'$ est égal à

$$nb'p + ma'n - mc'p$$

et celui $a''b''c'' = nb''p + ma''n - mc''p$; donc, la surface du triangle $a'b'c'$ est à celle de $a''b''c''$, comme la distance de V_1 à JJ est à celle de V_2 à la même droite.

On conçoit, qu'au lieu du triangle *abc*, si on avait eu une figure quelconque, on pourrait, en la décomposant en triangles, trouver le même rapport pour les diverses perspectives de chacun d'eux prises de points de vue différents; il en résulte ce théorème :

Les perspectives diverses d'une même figure prises de différents points avec même axe TT *et* JJ *sont des figures dont les surfaces sont entre elles comme les hauteurs des points de vue sur* TT.

Remarquons, en outre, que les côtés du triangle $a'b'c'$ étant parallèles à ceux des directrices Vv, Vv_1, Vv_2 et ceux du triangle $a''b''c''$ aux directrices respectives V_2v, V_2v_1, V_2v_2, il en résulte que les droites $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$ sont toutes parallèles à la droite qui joindrait V_1 à V_2. De plus, comme les côtés $a'b'$, $a''b''$ — $a'c'$, $a''c''$, $b'c'$, $b''c''$ se coupent en trois points n, m, p en ligne droite, il en résulte que les triangles $a'b'c'$, $a''b''c''$ sont deux figures homologiques pour un point de vue à l'infini, situé sur une directrice parallèle à la droite V_1V_2 qui joint les deux points de vue. Il en serait de même pour toutes les figures qu'on obtiendrait ainsi pour deux autres points de vue. D'où résulte que :

Les perspectives diverses qu'on obtient ainsi d'une même figure pour des points de vue différents, sont deux à deux des figures homologiques pour un point de vue à l'infini, situé dans la direction de la droite qui joint les deux points de vue correspondants, d'où résulte que tous ces centres divers d'homologie sont sur une même droite à l'infini.

Soit (fig. 19) un triangle abc dont les côtés sont coupés en m, n, p par une transversale quelconque. Soit V un point arbitraire pris dans le plan de ce triangle ; joignons V aux trois sommets a, b, c par les droites $\mathrm{V}aa'$, $\mathrm{V}bb'$, $\mathrm{V}cc'$, elles couperont la transversale aux points a', b', c' qu'on peut regarder comme les perspectives de ceux a, b, c sur cette transversale. Il résulte de cette disposition que les quatre droites $\mathrm{V}a$, $\mathrm{V}c$, $\mathrm{V}ob$, $\mathrm{V}m$ et celles ba, bc, bo, bm, passant par les quatre mêmes points a, c, o, m de la droite $maoc$, ont même double rapport perspectif, c'est-à-dire même rapport anharmonique, d'où résulte que ces deux faisceaux, coupés par la même transversale mnp, donnent deux rapports anharmoniques égaux, et qu'ainsi aux points a', c', b', m, correspondent respectivement ceux n, p, b', m, ou, renversant le dernier rapport, à ceux p, n, m, b', d'où il résulte que les six points a', p, c', n, b', m forment une involution. Ainsi :

Toute transversale coupe les côtés du triangle en trois points m, n, *p, et les trois points où trois droites, menées d'un même point aux trois sommets du triangle, coupent cette transversale, forment six points en involution. — Par suite, les six droites menées du point* V *aux trois points* m, n, p, *et aux sommets* a, b, c, *forment trois couples de droites en involution.*

Réciproquement, si d'un même point on mène des droites aux trois sommets d'un triangle et trois autres droites formant avec ces premières trois couples en involution, ces trois droites iront rencontrer les côtés opposés en trois points situés en ligne droite ; on voit facilement la démonstration de cette réciproque.

La transversale mnp donne lieu aux trois triangles mna, npb, mpc, dans lesquels on a

$$\frac{ma}{na}=\frac{\sin n}{\sin m},\quad \frac{nb}{pb}=\frac{\sin p}{\sin n},\quad \frac{pc}{mc}=\frac{\sin n}{\sin p}.$$

En multipliant ces trois équations membre à membre, on a

$$\frac{ma}{na}\cdot\frac{nb}{pb}\cdot\frac{pc}{mc}=1=\frac{ma}{mc}\cdot\frac{nb}{na}\cdot\frac{pc}{pb}$$

ou

$$ma.nb.pc=mc.na.pb\,;$$

on a donc ce théorème, connu sous le nom de Ptolémée :

Lorsqu'un triangle abc *est coupé par une transversale il existe la relation ci-dessus entre les segments que cette droite fait sur ses côtés.*

Si les trois points m, n, p sont à l'infini, il en résulte que les trois droites menées d'un même point aux trois sommets du triangle et les trois droites menées parallèlement à ses côtés forment trois couples de droites en involution.

Considérons maintenant la fig. 18 comme une seule et même figure donnée sur le plan S, et mettons-la en perspective. On voit que dans la figure qui en résultera, tous les triangles $a'b'c'$, $a''b''c''$ qui ont la droite mnp pour axe d'homologie, auront encore pour axe d'homologie la droite homologue de celle mnp; mais ces triangles avaient tous, deux à deux, leur centre d'homologie à l'infini ; par conséquent sur une droite à l'infini, qui deviendra une droite à distance finie.

Dans cette figure 18, faisons passer la droite *mnp* à l'infini en la prenant pour la droite JJ, il en résultera que les points m, n, p, passant à l'infini, tous les triangles abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$ deviendront des triangles semblables et semblablement placés ; de plus, on peut les rendre semblables à un triangle donné. Il suffit de prendre le nouveau point de vue V, de manière que les trois directrices, passant alors par m, n, p, fassent entrer les angles de ce triangle, comme nous l'avons vu ci-dessus pour les points v, v_1, v_2. On peut ainsi rendre équilatéraux tous ces triangles.

Supposons que (fig. 20) abc soit le triangle obtenu par la transformation du triangle abc de la fig. 19, en faisant passer la droite *mnp* à l'infini. Par chaque sommet a, b, c de ce triangle, menons une parallèle au côté opposé ; nous formerons ainsi le triangle $a'b'c'$ qui sera homologique avec celui abc, car les côtés homologues vont se rencontrer sur une même droite à l'infini ; il en résulte donc que les trois droites aa', bb', cc' vont passer par un même point V. On voit de même que le petit triangle $a''b''c''$ formé en joignant les points a'', b'', c''

d'intersection des côtés du triangle, avec les droites $aa''a'$, $bb''b'$, $cc''c'$ sera homologique, et avec le triangle abc, et à celui $a'b'c'$. On pourrait faire ainsi une suite d'autres triangles homologiques dont les côtés iraient passer par les points homologues à ceux m, n, p qui sont à l'infini.

Les points a, b, c sont milieux des côtés $b'c'$, $a'c'$, $a'b'$. De même, ceux a'', b'', c'', des côtés $b''c''$, $a''c''$, $a''b''$ et ainsi de suite. Or, si sur chaque côté on considère le point qui est à l'infini, on aura ainsi sur chaque côté quatre points formant un rapport harmonique.

Si on suppose que abc soit un triangle équilatéral, et qu'on mène par V des parallèles aux côtés, ces parallèles seront perpendiculaires aux droites aa', bb', cc', d'où en résultera en V trois couples de deux droites à angle droit ; par conséquent formant trois couples de droites en involution.

Il en résulte que, si on revient à la figure primitive qui a donné naissance à la fig 20, on aura la série de propositions suivantes (fig. 21) :

1° Un triangle abc étant coupé par une transversale aux trois points m, n, p, en joignant m à b, n à c, p à a, on formera le triangle $a'b'c'$ homologue à celui abc, de sorte que les trois droites aa', bb', cc', passeront par un même point.

2° Si on joint de même a à a', b à b', c à c', on aura le triangle $a''b''c''$ homologue à ceux abc, $a'b'c'$, et dont les côtés passent de même par les points m, n, p et ainsi de suite ;

3° Si sur chaque côté du même triangle on prend les quatrièmes harmoniques du point où il coupe la transversale, en joignant ces points au sommet opposé du triangle, les trois droites passeront par le même point V ;

4° Si on joint le point V aux trois sommets d'un triangle et aux trois points m, n, p, les six droites formeront trois couples en involution.

QUADRILATÈRE.

Un quadrilatère complet se compose (fig. 22) de quatre côtés ab, bc, cd, da et de trois diagonales ac, bd, v_1v_2 qui joignent deux à deux les points de concours $o_1v_1v_2$ des côtés opposés.

Tout quadrilatère a nécessairement pour perspective un autre quadrilatère, mais qui peut devenir un parallélogramme, un rectangle, un carré... par la position que l'on donne aux divers points et droites de la construction.

Prenons d'abord (fig. 22) la droite J_1J_2 passant par les deux points v_1, v_2 de concours des côtés opposés, il est évident qu'alors, quelle que soit la position du point V, la perspective du quadrilatère *abcd* sera nécessairement un parallélogramme, puisque les deux points de concours v_1 et v_2 des côtés *ab dc*, et *ad dc* passeront à l'infini. Les directions des côtés du parallélogramme seront celles des directions, qui joindront V_1 à v_1 et v_2.

Décrivons sur v_1v_2 comme diamètre une circonférence, si on prend le point de vue en un point quelconque V (fig. 22) de cette circonférence, alors les directions Vv_1 Vv_2 seront à angle droit, et alors le parallélogramme deviendra le rectangle $a'b'c'd'$ en prenant pour T_1T_2 une droite quelconque parallèle à JJ.

Le rapport des côtés du rectangle sera facile à déterminer, car on a évidemment

$$\frac{a'b'}{pq} = \frac{nb'}{nq} = \frac{v_1 V}{v_1 v_2}$$

et

$$\frac{b'c'}{mn} = \frac{b'q}{nq} = \frac{v_2 V}{v_1 v_2},$$

d'où on tire, en divisant l'une par l'autre,

$$\frac{a'b'}{c'd'} = \frac{pq}{mn} \cdot \frac{v_1 V}{v_2 V},$$

expression dans laquelle *pq mn* sont données d'après la position de la ligne de terre TT, prise d'ailleurs arbitrairement.

Par conséquent on peut prendre la position de V sur la circonférence, de manière à obtenir un rapport demandé entre les côtés du rectangle. Par exemple, si on veut que la perspective du quadrilatère soit un carré, il faut que

$$\frac{ab}{cd}=1=\frac{pq}{mn}\cdot\frac{v_1V}{v_2V},$$

d'où

$$\frac{v_1V}{v_2V}=\frac{mn}{pq}.$$

Prenons sur v_1v_2, à partir de v_1 la distance $v_1r=nm$, et sur la perpendiculaire élevée en ce point $ru=pq$. Joignons v_1 à u, la droite v_1u prolongée rencontrera la circonférence au point V_2 pour lequel la perspective du quadrilatère sera le carré $a''b''c''d''$; ainsi :

On peut, par la perspective, transformer un quadrilatère quelconque en un rectangle, dont les côtés auront entre eux un rapport donné.

De même on peut le transformer en un parallélogramme dont les côtés auraient aussi entr'eux un rapport donné.

Pour cela (fig. 23) on décrira sur v_1v_2 un segment de cercle capable de l'angle des deux côtés du parallélogramme cherché, le point V doit être sur cette circonférence. On a de même

$$\frac{a'b'}{c'd'} = \frac{pq}{mn} \cdot \frac{v_1V}{v_2V};$$

dans cette expression $\frac{a'b'}{c'd'}$ sera donné, $\frac{pq}{mn}$ est connu, donc il sera facile de construire $\frac{v_1V}{v_2V}$ qui donnera la position du point V.

En faisant varier ensuite la droite TT_1 parallèlement à JJ_1 on augmenterait ou diminuerait les distances mn, pq, on obtiendrait ainsi des grandeurs absolues différentes pour les côtés du parallélogramme, de manière à transformer le quadrilatère en un parallélogramme donné.

Si on place le point V en o à l'intersection des deux diagonales, on voit qu'on obtiendra pour la perspective du quadrilatère, un parallélogramme dont les sommets seront sur les diagonales communes au parallélogramme et au quadrilatère.

On peut transformer un quadrilatère en un autre dans lequel deux des diagonales $a'b'$, $c'd'$ correspondront à deux des côtés ab, cd du premier;

on voit qu'il suffit (fig. 24) de prendre JJ, de manière à couper les diagonales *ac, bd* du quadrilatère donné en des points situés dans l'intérieur du quadrilatère $abcd_{\prime\prime}$, car alors ces points passent à l'infini, ces diagonales deviennent extérieures au nouveau quadrilatère.

Si JJ_1 passait par le point *o*, on voit que les deux diagonales deviendront des côtés parallèles.

En prenant pour TT (fig. 25) un des côtés même du quadrilatère donné, on voit que ce côté restera commun à l'autre.

Si on prenait la droite JJ sur un des côtés *cd* (fig. 26), alors dans la figure homologue, quelles que soient les positions de V et de TT', ce côté *cd* passerait tout entier à l'infini; d'où résulterait que la perspective du quadrilatère *abcd* deviendrait le triangle *a'b'm'* plus un côté à l'infini; on voit que les sommets *a'*,*b'* de ce triangle seraient les homologues respectifs de ceux *a*,*b* du quadrilatère, mais le troisième *m'* serait l'homologue du point *m* de concours des côtés opposés *ad, bc*.

Ainsi on voit que l'on peut transformer un quadrilatère donné en une infinité de divers quadrilatères, mais il nous reste à faire voir qu'on peut le transformer en un autre quadrilatère donné;

c'est-à-dire que deux quadrilatères quelconques dont les sommets se correspondent respectivement, peuvent toujours se placer en perspective.

Ce problème fort important et difficile a occupé longtemps les anciens qui n'avaient trouvé que des solutions particulières ; c'est M. CHASLES qui le premier l'a résolu d'une manière générale. Je vais donner un exemple pratique de ce problème.

Soit (fig. 27) un quadrilatère quelconque *abcd* complet avec ses trois diagonales ; soit de même (fig. 28) *a'b'c'd'* un autre quadrilatère complet dont les sommets de même dénomination se correspondent ; on demande de les placer en perspective, ou ce qui est la même chose de les placer homologiquement.

Pour résoudre ce problème, il faut commencer par déterminer dans la première fig. 27 la droite JJ_1 qui correspond dans la fig. 28 aux points qui sont à l'infini, et réciproquement déterminer dans la fig. 28 la droite JJ qui correspond aux points de la fig. 27 qui sont à l'infini. Nous savons ensuite que lorsque les deux figures seront homologiquement placées, ces deux droites JJ_1 et II_1 doivent être parallèles entr'elles et à TT_1.

Par f (fig. 27) je mène fr parallèle au côté cd et par g la droite gs parallèle à ad. Ces droites rencontrent la diagonale bd aux points r et s. La diagonale bd (fig. 27) a pour homologue (fig. 28) la droite $b'd'$ sur laquelle doivent par conséquent se trouver les points homologues à ceux r et s. Pour trouver ces points, nous porterons sur l'autre diagonale $a'c'$ (fig. 28) à partir de o', $o'b_2 = ob$ de la fig. 27 $o'd_2 = od$, $or_2 = or$, $os_2 = os$, on joint $b'ab_2$, $da\, d_2$ par des droites qui se rencontrent en un point y (hors du cadre). Alors tirant yr_2, ys_2 ces deux droites yr_2, ys_2 couperont $b'd'$ aux points r', s' homologues de ces r et s; par conséquent les droites $f'r'$, $g's''$ seront les homologues de celles fr, gs. La droite fr (fig. 27) est parallèle à cd, dont la droite $f'r$ (fig. 28) rencontre la droite $c'd'$ en un point p qui est l'homologue de celui à l'infini, c'est-à-dire où fr rencontre cd. De même le point q, où $g's'$ rencontre $a'd'$, sera l'homologue de celui à l'infini c'est-à-dire ou gs rencontre ad; il s'en suit que la droite pq, qui joint ces deux points p et q, sera donc la droite de la fig. 28, qui correspond aux points à l'infini de la fig. 27. Ce sera donc la droite désignée par II.

De la même manière, en menant (fig. 28)

la droite $f'i$ parallèle à ab et $g'j$ parallèle à ad, on trouverait (fig. 27) leurs homologues fkn, glm qui rencontrent la première, la droite ab en n et la seconde celle ad en m; de sorte que mn serait la droite de la fig. 27 qui correspond aux points à l'infini de la fig. 28, c'est donc la doite JJ.

Ces deux droites étant déterminées, il faut chercher la position du point V. Or rappelons-nous 1° que ces deux droites doivent être placées parallèlement dans la figure homologique; 2° que si dans la fig. (27) on avait la position du point de vue V en le joignant aux points m et n où les côtés ad, ab rencontrent JJ, ces deux droites Vm, Vn seraient parallèles aux droites $a'd'$, $a'b'$ placées homologiquement. Mais (fig. 28) nous connaissons les angles que $a'd'$, $a'b$ font avec pq, c'est-à-dire avec II, et par conséquent à JJ; donc nous pouvons construire (fig. 27) ce point V en faisant l'angle $Vmn = a'\bar{q}p$ et celui $Vnm = d'pq$.

On trouvera pareillement le point V dans la fig. 28, en faisant l'angle $vp\bar{q}$ égal à celui de cd, avec mn et celui $vqp = dmn$.

Le point V étant connu dans les deux fig. 27 et 28, il suffit maintenant de rapporter la fig. 27 sur celle 28, comme on le voit (fig. 29), de manière que les deux points se confondent et que II soit parallèle à JJ.

Il ne reste plus qu'à déterminer la droite TT, sur laquelle les côtés homologues se rencontrent. Pour cela on sait que la distance de TT à JJ est précisément égale à celle de V à II, et de même que celle de TT à II est égale à celle de V à JJ, donc TT est connue.

Le problème est ainsi complètement résolu, et il en résulte que deux quadrilatères quelconques peuvent toujours être regardés comme perspectives réciproques l'un de l'autre ; de sorte que ces deux figures étant dans une position quelconque, si on se donne un cinquième point dans l'une, on trouvera facilement le cinquième point homologue dans l'autre.

Il suffira de mener par le premier deux droites quelconques qui rencontreront les côtés du quadrilatère ou des points, dont on trouvera facilement les homologues sur les droites homologues et qui serviront à construire les deux droites qui déterminent le cinquième point cherché.

Lorsqu'on transforme un quadrilatère quelconque en divers autres ayant les mêmes droites TT et JJ, toutes les figures qu'on obtient pour différents points de vue sont toutes deux à deux homologiques entr'elles pour un point de vue à l'infini. La direction d'homologie est celle qui joint les deux points de vue correspondants ; de plus les surfaces de ces figures sont entr'elles comme les distances de ces points de vue à la droite commune JJ.

Puisqu'on peut transformer un quadrilatère quelconque, un parallélogramme, un rectangle, un carré; toutes les propriétés perspectives d'une de ces figures appartiendront donc aussi à tout quadrilatère.

Prenons le carré *abcd* (fig. 30), auquel il faut supposer une droite à l'infini qui contient les points de concours des droites parallèles.

Dans un carré, il y a un centre *o* point d'intersection des diagonales, toutes les droites qui passent par ce point et se terminent à deux côtés opposés du carré, y sont divisées en deux parties égales. Donc, etc.

Dans tout quadrilatère toute droite passant par le point *o* d'intersection des diagonales rencontre deux côtés opposés et la ligne $v_1 v_1$ qui représente celle à l'infini (fig. 31) en quatre points formant un rapport harmonique.

Les six points où cette droite rencontre les quatre côtés, la droite v_1v_1 et ce point o sont en involution.

Si dans un quadrilatère *abcd* (fig. 31) on joint les points e, f, g, h déterminés par les droites qui joignent les trois points de concours $o_1v_1v_2$ des côtés opposés, on forme un second quadrilatère inscrit au premier dont les côtés opposés concourent sur la droite v_1v_2.

Si on joignait de même les points où les côtés de ce nouveau quadrilatère rencontrent les diagonales du premier, on formerait un autre quadrilatère inscrit au second, dont les côtés iraient concourir aux mêmes points v_1, v_2 et ainsi de suite.

Dans le carré chaque côté est divisé en deux parties égales, par la ligne qui est menée par le centre parallèle à l'autre. Si avec ces trois points, on considère celui qui, sur la même droite est à l'infini, on aura quatre points formant ainsi un rapport harmonique; de même pour le point qui partage les deux diagonales en deux parties égales, etc.; donc, dans un quadrilatère quelconque, chaque côté est divisé par les deux autres et par les deux droites, qui joignent les points de concours des côtés opposés en quatre points, formant un rapport harmonique. De même les deux diagonales, avec les deux sommets, le point où elle rencontre la droite v_1, v_2 et le point o en quatre points, forment un rapport harmonique.

On peut en conclure pareillement que si (fig. 31) par un des points v_1 de concours de deux côtés opposés, on mène une transversale quelconque, elle sera coupée par les deux autres côtés, l'autre ligne $v_2 o$ et ce point en quatre points, formant un rapport harmonique.

On peut prendre indifféremment un des trois points v_1, v_2, o, pour le point de départ de la transversale.

De même chaque diagonale est coupée par les deux autres et par les côtés opposés en quatre points, formant un rapport harmonique.

Les points v_1, v_2, o, s, t, sont des sommets de faisceaux harmoniques ; donc, si on les coupe par des transversales quelconques, on obtiendra sur chacune un rapport harmonique.

Si la transversale est parallèle à une des droites du faisceau, les trois points seront tels que l'un partagera en deux parties égales le segment formé par les deux autres.

Ainsi si par le point o d'intersection des deux diagonales, on mène la droite 5 6 7 8, parallèle à la troisième v_1v_2, les parties de cette droite interceptée entre les côtés opposés seront divisées en ce point en deux parties égales.

Ainsi la droite mn sur TT parallèle à $v_1\,v_2$ est divisée en deux parties égales par vo, de même pq est divisée en g par v_2o.

Les deux triangles semblables v_1mf, vos donnent

$$\frac{mf}{os}=\frac{v_1f}{v_1o}=\frac{tl}{to}$$

et ceux v_2qg, v_28o,

$$\frac{qg}{8o}=\frac{v_2g}{v_2o}=\frac{tt}{to},$$

donc

$$\frac{mf}{qg}\text{ ou }\frac{mn}{pq}=\frac{05}{08};$$

mais, à cause des triangles semblables bos, bvt, ainsi que ceux $bo8$, btv_2, on aura

$$\frac{o5}{o8}=\frac{v_1t}{v_2t}=\frac{o5}{ob}=\frac{sv_1}{sv_2};$$

donc

$$\frac{mn}{pq}=\frac{v_1t}{v_2t}=\frac{sv_1}{sv_2}=\frac{o5}{o6}=\frac{57}{68}.$$

Ainsi, si on coupe les côtés d'un quadrilatère par une transversale TT_1 parallèle à la droite v_1v_2, qui joint les points de concours des côtés opposés, les longueurs mn, pq, interceptées entre les côtés opposés, sont entre elles comme le rapport des segments formés sur cette droite v_1v_2 par une des deux diagonales en s ou t. Ce rapport $\frac{mn}{pq}$ nous a déjà servi.

Les quatre points s, v_1, t, v_2 sur la droite, qui joint les deux points v_1 et v_2 de concours des côtés opposés, formant un rapport harmonique; les quatre droites os, ov_1, ot, ov_2 qui aboutissent à ces points, forment donc un faisceau, donc :

Toute transversale coupe les deux diagonales et les deux médianes en quatre points, formant un rapport harmonique.

Les quatre droites qui joignent le sommet b aux quatre points a', o, c', k, ont leur double rapport perspectif égal à celui des quatre droites, partant du sommet d et passant par les mêmes points. En coupant ces deux faisceaux par une transversale quelconque, passant par le point k, il en résulte que le double rapport des quatre points q, l, m, k, où le premier faisceau rencontre la transversale, est égal à celui des quatre points n, l, p, k, où le second faisceau rencontre cette même transversale, donc on a :

$$\frac{lm}{lq} : \frac{km}{kq} = \frac{lp}{ln} : \frac{lp}{ln},$$

ou

$$\frac{kn}{kp} : \frac{ln}{lp}.$$

Ainsi les quatre points m, q, l, k du premier rapport correspondent respectivement à ceux du second n, p, k, l, donc les six points

$$m, n;\ q, p;\ l, n$$

forment une involution. On en conclut donc :

Toute transversale coupe les quatre côtés et les deux diagonales d'un quadrilatère en six points qui sont en involution.

Les six droites menées d'un même point o *aux quatre sommets et au point de concours des côtés opposés d'un quadrilatère, forment un faisceau en involution.*

Soient $abcd$ le quadrilatère, o le point fixe d'où partent les droites. Les droites ob, oc, et acv_2, abv_2 forment un quadrilatère, qui est coupé par la transversale adv en six points qui sont en involution, donc les six droites ov, od, oc, ov_2, ob qui passent par six points, forment un faisceau en involution.

Le point o peut être à l'infini, alors les six droites sont parallèles, alors on dira que les *projections des quatre sommets et des deux points de concours des côtés opposés d'un quadrilatère, sur une droite, sont six points en involution.*

Dans un faisceau en involution, si deux des couples de droites sont rectangulaires, il faut nécessairement que les autres couples le soient.

Si on prend le point o à l'intersection des deux circonférences décrites sur les deux diagonales, comme diamètre, il s'ensuivra que les droites menées de ce point à chaque couple de sommets opposés seront rectangulaires; donc les deux autres droites qui passent par les deux points de concours des côtés opposés sont aussi rectangulaires. On a donc ce théorème :

Les trois circonférences qui ont pour diamètres les diagonales et la droite qui joint les points de concours des côtés opposés, ont toutes trois les mêmes points d'intersection.

Et par suite :

Les points milieux des deux diagonales d'un quadrilatère et le milieu de la droite qui joint les points *de concours des côtés opposés, sont en ligne droite.*

Un quadrilatère peut toujours être considéré comme le lien de deux quadrilatères superposés et qui sont perspectives réciproques l'un de l'autre, et cela pour plusieurs points de vue différents. Ces cas sont ceux où le point de vue est à égale distance du plan S et du plan T, alors si les figures sont placées homologiquement les droites II et JJ se confondent.

Ainsi (fig. 31) dans le quadrilatère *abcd,* si on prend *o* pour point de vue ; la droite v_1v_2 qui joint les deux points de concours des côtés opposés sera la ligne de terre TT, ou axe d'homologie, et la droite menée à égale distance de O et de cette droite v_1v_2 sera la droite commune IJ, IJ ; alors on voit qu'au point *a* correspond celui *c* et réciproquement ; qu'à celui *b* correspond *d* et réciproquement, etc. ; qu'ainsi à la droite *ab,* correspond celle *cd* et réciproquement, à *ad* correspond *bc*, et on voit en outre que ces droites homologues concourent sur la droite v_1v_2. Si on supposait une figure quelconque liée à un des quadrilatères, on obtiendrait pour son homologue une figure, dont les côtés homologues se rencontreraient de même sur v_1v_2 et des droites parallèles dans l'une ou l'autre auraient pour homologues respectives, des droites concourantes sur la droite IJ, I'J'.

On pourrait, au lieu du point o, prendre pour point de vue, ceux v_1, v_2, s, t, et on aurait pour chacun d'eux les deux mêmes quadrilatères superposés; mais avec un autre axe d'homologie, et une autre droite IJ.

Ces observations conduisent naturellement à une infinité de propriétés des transversales, dont plusieurs résultent de la comparaison du quadrilatère avec un carré; par exemple toutes les divisions harmoniques signalées.

Si nous appliquons à cette figure et pour les divers points de vue, les théorèmes trouvés sur deux figures perspectives réciproques, on voit qu'on peut en tirer beaucoup de propriétés du quadrilatère.

Ainsi le théorème 2 donne, en considérant le point o comme le point de vue (fig. 31).

$$\frac{od}{ob} = \frac{dl}{ol},$$

et comme $ol = {}^1/_2\, ot$, on a

$$\frac{od}{ob} = \frac{dl}{{}^1/_2\, ot},$$

de même

$$\frac{oc}{oa} = \frac{ok}{{}^1/_2 os},$$

qu'on peut exprimer par un théorème.

Le théorème 3 dit que le produit des distances d'un point a à la droite JJ, par celle du point homologue a' à II est constant $= h.d.$ Dans cette figure $h = d$, II et JJ se confondent. Alors ce produit $= h^2$. On peut remplacer les distances par les segments sur les droites, et alors on aura :

$$ak.ck = \overline{ok}^2, \quad bl.dl = \overline{ol}^2,$$

En laissant les distances à IJ, on trouve que le produit des distances des deux extrémités d'une diagonale à IJ est égal au carré de celle de o, à cette même droite, par conséquent :

Le produit des distances des deux extrémités d'un diamètre à IJ est égal à celui des extrémités de l'autre à la même droite.

Le 4^e^ théorème donne les segments harmoniques, etc.

Le 5^e^ théorème donne

$$\frac{ab}{cd} = \frac{aq}{dp}, \quad \frac{ad}{cd} = \frac{dn}{cm},$$

et comme sur une même diagonale, oa est la perspective de oc et ob de od, on aura donc :

$$\frac{oc}{oa} = \frac{ck}{ok}$$

et

$$\frac{od}{ob} = \frac{dl}{ol}.$$

De l'égalité ci-dessus

$$\overline{ok}^2 = ak.ck \quad \text{et} \quad bl.dl = \overline{ol}^2$$

on tire

$$ok = (ok+ao)\,(ok-oc) = ok^2+\overline{ok}\,(ao-oc) - ao.oc,$$

d'où

$$\overline{ok} = \frac{\overline{os}}{2} = \frac{\overline{ao}.\overline{oe}}{ao-oc}$$

et

$$ol = \frac{ot}{2} = \frac{ob.od}{ob-od}.$$

Si le quadrilatère est inscriptible dans une circonférence, on aura

$$ao.oc = ob.od;$$

donc, en divisant ces deux égalités l'une par l'autre,

$$\frac{ob-od}{oa-oc} = \frac{ot}{os},$$

c'est-à-dire que :

Dans tout quadrilatère inscrit, le rapport des différences entre les deux parties de chaque diagonale est égal au rapport inverse des distances du point o *d'intersection des diagonales aux points où ces diagonales sont coupées par l'axe d'homologie* sv_1tv_2.

Des égalités ci-dessus,

$$ok^2 = ak - ck$$

et

$$\overline{ol}^2 = bl.dl,$$

on tire

$$\overline{ok}^2 = \overline{sk}^2 = (as - sk)(cs - sk) = \overline{sk}^2 - sk(as + cs) + as.cs,$$

$$\overline{ol}^2 = \overline{tl}^2 = (bt - tl)(dt - tl) = lt^2 - tl(bt + dt) + bt.dt;$$

d'où

$$\frac{as.cs}{as + cs} = sk$$

et

$$\frac{bt.dt}{bt + dt} = tl.$$

Si on reprend les distances des points a, b, c, d, à la droite sv_1tv_2, alors sk et lt deviendront égaux et on aura ce théorème.

Le produit des distances de deux points homo-

logues à l'axe d'homologie, divisé par leur différence est constant et égal à h^2.

Nous voyons le nombre considérable de théorèmes que l'on trouve, en prenant o pour centre d'homologie et v_1v_2 la droite, qui joint les deux points de concours pour l'axe d'homologie. En prenant maintenant les autres points tels que v_1, v_2, s, t pour centre d'homologie, on aurait d'autres expressions de ces théorèmes.

Nous nous contentons de les indiquer.

DE LA CIRCONFÉRENCE

Avant d'examiner les courbes diverses que l'on peut obtenir par la perspective d'une circonférence, il est nécessaire de faire connaître les propriétés de cette courbe même qui dépendent de la perspective et qui seront utiles par la suite.

Toute circonférence (fig. 33) coupée par une transversale TT, peut être considérée comme formée de deux circonférences superposées et qui sont perspectives réciproques l'une de l'autre; cette transversale étant la ligne de terre, ou axe d'homologie, le point de vue est déterminé par l'intersection des deux tangentes Va, Vb aux extrémités de la corde ab.

Cela est évident d'après la figure, mais pour concevoir la légitimité de ce principe, supposons qu'on fasse tourner une de ces circonférences autour de cette droite ab comme charnière, tandis que la première reste fixe, jusqu'à ce que les deux plans de ces courbes soient placés rectangulairement. Faisons la projection de la figure ainsi placée, sur un plan vertical perpendiculaire à cette droite ab. On voit qu'une des circonférences aura pour projection la droite $m_1 m'_1$ et la seconde celle $m_2 m'_2$ si on joint m_1 à m'_2 et m_2 à m'_1 par des droites, elles se rencontreront en un point V sur la bissectrice de ces deux droites. Si on regarde ce point V, comme le sommet du cône perspectif ayant pour base la première circonférence se projetant en m_1 m'_1, on voit que le cône passera évidemment par l'autre circonférence, car tout est symétrique relativement à l'axe, de sorte qu'il suffirait de concevoir ce cône tournant d'un demi-tour autour de cet axe, pour se confondre avec lui-même ; il en résulte donc que ces deux circonférences sont perspectives réciproques l'une de l'autre, pour ce point de vue V la ligne de terre étant par conséquent la droite d'intersection des deux plans de ces courbes. Le point V étant sur la bisectrice, se trouve à égale distance des deux plans, de sorte que Vi ou d est égal à Vj ou H.

Ramenons maintenant les deux figures de manière à être homologiques, en faisant tourner les plans autour de leur trace, d'avant en arrière, il est évident 1° que les deux circonférences se confondront ; 2° que la droite II tombera sur celle JJ ; 3° enfin que le point V viendra se placer sur la perpendiculaire Vo à ab et à une distance de IJ égale à celle qui sépare IJ de ab. D'après cela, il en résulte :

1° Les deux droites Va, Vb seront deux tangentes à la courbe; a et b représentant chacun deux points a et a', et b et b' superposés.

2° Un point quelconque c aura pour perspective le point c' sur le rayon perspectif Vcc', soit que l'on regarde le point c comme appartenant à l'une ou l'autre circonférence.

3° La tangente tc en ce point c aura pour perspective la tangente tc', au point c', et ces deux tangentes se rencontreront en un point t de l'axe d'homologie TT_1.

4° Si par V on mène les deux rayons perspectifs

Vd Vf, la droite df qui joint d et f aura pour perspective la droite $d'f'$ qui joint les points d' et f' perspectives de ceux d et f, et ces deux droites se couperont en un point de l'axe d'homologie.

5° Si on regarde d comme étant sur la première circonférence et par suite d' sur la seconde, et qu'en même temps on admette que f est sur la première et par conséquent f' sur la seconde, il en résultera que la diagonale $f'd$ du quadrilatère $dfd''f'$ aura pour homologue l'autre diagonale fd', donc ces deux diagonales se couperont sur l'axe d'homologie.

6° Deux cordes parallèles telles que fd, $f'g$ auront pour perspectives deux cordes $f'd'$, $f'g'$ qui se rencontrent en un point k sur la droite IJ.

7° Tout rayon perspectif, tel que $Vc'\,t_1c$ sera coupé par la courbe et l'axe d'homologie de manière qu'on aura le rapport harmonique

$$\frac{Vc}{Vc'}=\frac{t_1c}{t_1c'};$$

8° D'après le théorème trois, on sait que le produit des distances de deux points homologues (tels que c et c') à la droite IJ, est constant et égal au carré de la distance de V à IJ ou de o_1 à IJ. Si au lieu des distances, on prend les segments sur la droite perspective on aura donc

$$\overline{rt_1}^2 = rc.rc'.$$

On a aussi

$$rc = rt_1 + t_1c$$

et

$$rc' = rt_1 - t_1c\,;$$

donc

$$\overline{rt_1}^2 = (rt_1 + t_1c)(rt_1 - t_1c') = rt_1^2 + rt_1(t_1c - t_1c') = t_1c.t_1c',$$

d'où

$$rt_1 = \frac{t_1c.t_1c'}{t_1c - t_1c'},$$

qui est une autre expression du même théorème,

On peut ainsi appliquer tous les théorèmes que nous avons établis pour deux figures perspectives.

Dans la figure 33 nous avons regardé le plan dont ab était la trace, comme celui sur lequel on faisait la perspective de la circonférence ; maintenant supposons-le transporté parallèlement à lui-même, de l'autre côté de IJ et à une même distance, de manière à passer par l'ancienne position du point V, il en résultera comme on le voit (fig. 34) que ce plan coupera le cône perspectif suivant une circonférence absolument égale à la précédente puisque les deux plans sont parallèles et à égale distance de son sommet, et cette circonférence sera encore perspective de la première pour le sommet du cône; ramenons le tout sur un même plan, en faisant ici le rabattement d'arrière en avant; il en résultera que :

1° Les deux circonférences perspectives tomberont l'une sur l'autre et se confondront.

2° Le point de vue tombera en o, dans la circonférence.

3° L'axe d'homologie sera (fig. 34) transporté extérieurement.

4° La droite IJ ne change pas.

Et nous aurons encore deux circonférences superposées et perspectives réciproques pour un autre point de vue et un autre axe d'homologie. Ainsi (fig. 34) :

1° Un point a aura pour homologue celui a' sur le rayon perspectif oaa'.

3° Une corde bc aura pour homologue la corde $b'c'$ passant par le point $b'{}_1c'$ perspective respective de b, c et ces deux droites homologues iront se rencontrer en r sur l'axe d'homologie.

2° Les deux cordes parallèles bc, de, auront pour homologues celles $b'c'$, $d'e'$ qui se couperont en p sur IJ.

4° Les tangentes aux deux extrémités des rayons perspectifs tels que Va, Va' seront homologiques et se couperont ainsi sur l'axe d'homologie.

5° Toutes les droites, menées par ce point V seront coupées par la circonférence et l'axe d'homologie en quatre points formant un rapport harmonique.

Enfin, tous les théorèmes ci-dessus peuvent recevoir les mêmes applications, il nous suffit de l'indiquer.

Il résulte des considérations ci-dessus, qu'une circonférence quelconque peut toujours être considérée comme formée de deux circonférences superposées et qui sont perspectives réciproques l'une de l'autre pour un point quelconque du plan, que ce point soit situé extérieurement ou intérieurement à la circonférence; dans le premier cas, l'axe d'homologie sera déterminé par la corde des points de tangences de deux tangentes menées du point de vue à cette circonférence et dans l'autre il sera extérieur à la circonférence perpendiculairement à la droite qui joint le point de vue au centre et à une distance Vs telle que :

$$\frac{Vm}{Vm'} = \frac{sm}{sm'},$$

c'est-à-dire que les quatre points forment un rapport harmonique, ou mieux d'une manière qui s'applique à tous les cas : L'axe d'homologie sera le lieu des points qui, avec la circonférence et le point de vue, divisera harmoniquement tous les rayons perspectifs menés par ce point.

La droite IJ est, dans tous les cas, menée pareillement à l'axe d'homologie et à moitié de la distance qui sépare le point de vue de l'axe d'homologie.

La perspective donne comme on le voit des propriétés d'une seule circonférence considérée comme appartenant à deux circonférences superposées ; ces propriétés ont été connues indépendamment de la perspective, mais par des méthodes qui ne semblent pas aussi intuitives que celle-là.

M. le général Poncelet a établi sur ce sujet sa belle théorie des polaires réciproques, dont il est nécessaire de dire ici quelque chose, quoique cela s'écarte de notre sujet.

Nous venons de voir que lorsqu'on a une circonférence, à un point quelconque de son plan, considéré comme centre d'homologie, correspond toujours une seule droite qui est l'axe d'homologie. On a appelé pôle le point de vue, et on a donné le nom de polaire à l'axe, d'où résulte qu'à un point correspond toujours une droite qui est sa polaire et réciproquement, à une droite correspond un point qui en est le pôle. On peut supposer le point parcourant une figure quelconque, à chacune des positions de ce point correspondra celle de sa polaire, ainsi, si le point décrit une courbe, sa polaire sera les tangentes successives à une autre courbe dont elle sera l'enveloppe et qui s'appelle la polaire de la première, et ces deux courbes sont dites polaires réciproques l'une de l'autre ; de sorte qu'aux propriétés attachées à des points de l'une, correspondront d'autres propriétés de droites dans l'autre.

Les propriétés principales et relatives de deux figures polaires réciproques sont que :

1° A quatre points en ligne droite de la première, correspondent dans l'autre quatre droites passant par un même point, qui sera par conséquent le pôle de la droite des quatre points et réciproquement.

2° Que le double rapport entre quatre points situés sur une même droite dans la première, ou le *rapport anharmonique* de ces quatre points, sera égal à celui des quatre droites correspondantes et réciproquement.

Ce rapport, comme on le voit, peut servir à passer des propriétés d'une figure à celle de sa polaire.

On voit que la théorie des polaires réciproques est un moyen de transformer une ligne en une autre telle qu'à des points dans l'une correspondent des droites dans l'autre et réciproquement.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur ce sujet intéressant. (Voir l'ouvrage de M. le général Poncelet.)

Nous nous servirons souvent des expressions *Pôle* et *Polaire*.

Reprenons (fig. 35) une circonférence dont le centre est en o et dont le rayon $oa = R$.

Si dans le plan de cette circonférence, on prend extérieurement un point quelconque v_1, nous venons de voir qu'il pouvait être regardé comme le centre d'homologie de deux circonférences superposées sur celle donnée, et que l'axe d'homologie sera une droite mnv_2 déterminée, soit en menant les deux tangentes v_1m, et v_1n et joignant les deux points de tangentes m et n par une droite, soit en menant par v_1 une suite de transversales et prenant sur chacune d'elles le quatrième harmonique du point v_1 et des deux points où chaque transversale coupe la circonférence. Si maintenant on prend sur mn un point quelconque v_2 extérieur à la circonférence, puis qu'on regarde ce point comme un nouveau centre d'homologie, son axe d'homologie pq sera de même déterminé par la droite pq qui joint les points de tangentes, des deux tangantes v_2p, v_2q, ou bien en menant des transversales et prenant sur chacune d'elles le quatrième harmonique du point v_2 et des deux points d'intersection de la transversale et de la courbe, or, il résulte évidemment des propriétés des axes d'homologie que ce second axe ira passer par le premier point v_1 ces deux droites mnv_2, pqv_1 se couperont en un point v_3 qui pourra ainsi être considéré comme un centre d'homologie des deux circonférences superposées et dont l'axe d'homologie serait la droite v_1v_2 qui joint les deux autres centres d'homologie v_1v_2, et déterminée en menant par v_3 une suite de transversales sur chacune desquelles on prend le quatrième harmonique du point v_3 et des deux points d'intersection de la transversale et de la courbe. La droite mn est ce que nous avons appelé la polaire du point v_2; de même pqv_1 est la polaire de v_2 et enfin v_1v_2 est celle de v_3 il en résulte : que dans le plan d'une circonférence, il existe une infinité de systèmes de trois points, (tels que v_1,v_2,v_3), dont chacun est le pôle de la droite qui joint les deux autres et qui peuvent être considérés comme des centres d'homologie de deux circonférences superposées et dont l'axe d'homologie pour chacun d'eux est sa polaire. Ces trois points seront très-importants à connaître dans la théorie des sections coniques, et forment ce qu'on appelle un triangle polaire.

Si par v_1 et v_2 on mène des transversales v_1a, v_2a à un même point a de la courbe, la première coupera la courbe en un second point h et la deuxième en un second point g, en joignant g à v_1 et h à v_2, ces deux droites gv_1, hv_2 se rencontreront nécessairement en un point b de la courbe, de sorte que le quadrilatère $ahbg$ ainsi formé sera inscrit dans la circonférence, et de plus ces deux diagonales ab, gh passeront par v_3. On peut concevoir ainsi une infinité de quadrilatères inscrits dans la même circonférence et qui auront les mêmes points de concours des côtés opposés, et même point d'intersection de leurs diagonales. Le quadrilatère circonscrit formé par les quatre tangentes v_1m, v_1n, v_2p, v_2q jouira des mêmes propriétés.

On sait en outre qu'à chacun des points v_1, v_2, v_3 correspond une droite kk_3, k_2k_3, kk_2 qui représente la droite désignée par IJ et qui jouit de diverses propriétés, parmi lesquelles il faut remarquer la suivante.

Pour la droite k_1k_2 relative à v_3, on a :

Le produit des distances des deux extrémités p et q d'une transversale quelconque menée par v_3 à $k_1 k_2$ est égal au carré de la distance de v_3 à cette même droite; donc le produit est constant pour toutes les transversales menées de v_3. Ce produit, comme on voit, est égal à

$$\overline{v_3r}^2 = \overline{rp}^2 = h^2.$$

On peut prendre les segments sur les transversales et on aurait ainsi :

$$kp.kq = \overline{kv_3}^2, \quad k_2m.k_2n = k_2v_3.$$

De même pour les transversales menées par v_1 ou v_2 et coupées par $k_1 k_2$ ou $k_2 k_3$.

Si par v_3 on mène une parallèle à $v_1 v_2$ la partie de cette droite interceptée entre les côtés opposés d'un des quadrilatères sera divisée en ce point en deux parties égales; il en sera de même pour $k_1 k_2$ parallèle à $v_1 v_2$; le point k_1 divisera en deux parties égales la distance comprise entre les côtés opposés partant de v_1 et par k_2 ceux partant de v_2; il en résulte que le faisceau de droites dont le sommet est en v_1 et qui forment deux à deux les côtés opposés d'un même quadrilatère, formeront un faisceau en involution. Ainsi le faisceau déterminera sur mnv_2 une division en involution. On voit que v_3 et v_2 en seraient les points doubles et k_2 le point central.

De même pour le faisceau partant de v_2 ou v_3.

Trois points tels que v_1, v_1, v_3 sont dits conjugués; lorsque l'un d'eux est donné, sa polaire en résulte, c'est une droite qui passe par les deux autres; on peut prendre arbitrairement sur cette droite un second point, et alors par les constructions indiquées, on aura le troisième. Supposons que ce soit le point v_3 qui soit donné, d'où résulte la connaissance de sa polaire $v_1\ v_2$.

Nous savons d'abord que si on mène par v_3 une suite de cordes, les tangentes aux deux extrémités se couperont sur $v_1\ v_2$; réciproquement si d'un point quelconque de $v_1\ v_2$ on mène deux tangentes, la corde de contact passe par v_3. Si on prend sur $v_1\ v_2$ le point p, pied de la perpendiculaire abaissée du centre o sur $v_1\ v_2$, sur laquelle se trouve le point v_3, la corde de contact st sera parallèle à $v_1\ v_2$, elle le rencontrera donc à l'infini; donc dans ce cas le troisième point v_2 est à l'infini; c'est pourquoi dans les fig. 33-34 on ne trouvait que deux points conjugués.

Considérons une sphère de centre o et le rayon oa. Si on regarde le point v_1 comme le sommet d'un cône tangent à cette sphère, le plan du cercle de contact aura pour trace mnv_2. De même si on regarde le point v_2 comme le sommet d'un autre cône tangent à la sphère, le plan vertical du cercle de contact aura pour trace la droite pqv_1 passant par v_2. Ces deux plans verticaux se couperont suivant une droite verticale projetée en v_3. Remarquons que chacun de ces cônes est droit; de sorte que chaque arête est perpendiculaire à la tangente, à la base menée par son pied. Si on conçoit le plan tangent à la sphère, menée par la droite $v_1 v_2$, il sera évidemment tangent aux deux cônes, et par suite les points de tangence avec la sphère seront aux extrémités de la corde d'intersection des deux plans de contact et qui se projette en v_3. Les tangentes menées de v_2 au cercle mn seront donc les droites qui joignent ce point aux deux extrémités de cette corde. De même les tangentes menées de v_1 au cercle pm seront les droites qui joignent v_1 aux extrémités de cette même corde. Or la tangente à l'un des cercles sera une génératrice de l'autre cône et réciproquement; donc les deux tangentes qui joignent v_1 et v_2 à chaque extrémité seront rectangulaires; la somme des carrés des longueurs de ces deux tangentes sera donc égale a $v_1 \overline{v_2}^2$. Mais la tangente qui va de v_1 aux extrémités de cette corde est égale à la longueur d'une génératrice de ce cône, par conséquent à $v_1m = v_1n_1$ de même, celle qui joint v_2 aux mêmes extrémités est égale à $v_2p = v_3q$. Donc on a :

$$\overline{v_1m}^2 + \overline{v_2p}^2 = \overline{v_1v_2}^2.$$

Si donc on décrit du point v_1 comme centre, une circonférence avec v_1m pour rayon, de v_3 comme centre avec v_2m pour rayon une autre circonférence; enfin sur $v_1\, v_2$ comme diamètre une troisième circonférence, ces trois circonférences se couperont en deux mêmes points Q et Q. Situés sur la droite *op*, à égale distance de la droite $v_1\, v_2$ de chaque côté de cette droite.

Puisque la droite v_1 Q est perpendiculaire au rayon v_1 Q et réciproquement v_1 Q est perpendiculaire au rayon v_1 Q, il en résulte que ce sont des tangentes aux circonférences; donc les deux circonférences qui ont leur centre respectif en des points conjugués v_1 et v_2 se coupent *orthogonalement*, et coupent de même orthogonalement la circonférence donnée.

Prenons pour sommet d'un cône tangent à la sphère, le pied P de la perpendiculaire abaissée du centre o sur $v_1 v_2$; la circonférence de contact sera celle dont le diamètre est le cercle st. Cette circonférence psssera de même par les deux extrémités de la corde commune qui se projette en v_3, la longueur de la génératrice de ce cône droit sera égale à la tangente

$$Ps = Pt = PQ = PQ_1 = Pv_1 \times Pv_2 = \overline{Po}^2 - \overline{ob}^2 = Pa.Pb.$$

Pour deux points conjugués quelconques, on voit que les points Q et Q, seront toujours les mêmes et seront les sommets de deux angles droits comprenant sur la droite $v_1 v_2$ deux points conjugués, il en résulte :

1° Si d'un point v_1 quelconque dc la droite $v_1 v_3$ on mène deux tangentes à la circonférence, la corde de contact passera toujours par un même point; étant prolongée, elle déterminera sur cette même droite le point v_2 conjugué du point v_1.

2° Si d'un point v_1 quelconque on décrit comme centre une circonférence avec la longueur v_1m de la tangente, toutes les circonférences passeront toujours par deux mêmes points Q et Q_1. Située sur la perpendiculaire OP menée du centre o sur $v_1 v_2$, de chaque côté de cette droite et à une distance égale à

$$\overline{oP}^2 - oa^2 = PQ^2 = Pa.Pb,$$

d'où

$$\frac{PQ}{Pa} = \frac{Pb}{PQ},$$

d'où

$$\frac{PQ+Pa}{Pa-PQ} = \frac{Pb+Pa}{PQ-Pb}$$

ou

$$\frac{Q.a}{aQ} = \frac{Q.b}{bQ};$$

toutes ces circonférences seront orthogonales avec celle donnée.

3° Deux de ces circonférences qui auront pour centre deux des points conjugués sont orthogonales entre elles et à la proposée.

4° Si sur la distance qui sépare deux points conjugués, comme diamètre, on décrit une circonférence, elle passera aussi par ces deux points Q et Q_1.

5° Il en résulte que si on regarde un des points Q comme le sommet d'un angle droit mobile, les deux côtés de l'angle droit détermineront sur la droite deux point conjugués. — Le point P a son conjugué à l'infini.

6° La suite des points conjugués détermine donc sur la droite deux divisions en involution.

7° D'après la relation

$$\frac{Q_1a}{Q_1b}=\frac{aQ}{bQ},$$

il en résulte que la droite Q_1b Qa est divisée par ces points Q_1b,Q,a suivant un rapport harmonique, d'où résulte que si de Q_1. on mène deux tangentes à la circonférence de centre o, la corde de contact passera par le point Q.

De même que le point v_3 est le point d'intersection de toutes les cordes de tangence des circonférences orthogonales à la proposée dont le centre est situé sur v_1 v_2, il résulte que les points Q et Q_1 sont les points d'intersection de ces circonférences. Le point v_3 s'appelle le pôle linéaire de v_1 v_2, ceux Q,Q^1 peuvent alors s'appeler les pôles circulaires de cette même droite.

Dans la fig. 33 si le rabattement du plan T sur celui S, au lieu de se faire d'arrière en avant, avait lieu d'avant en arrière, on voit que le point V tomberait en O, au milieu de la corde comme *ab*, et que les deux circonférences ne se confondraient plus; il en serait de même de la droite II, qui ne tomberait plus sur celle JJ, et alors on aurait deux circonférences égales, homologiques entre elles; le milieu de la corde serait le centre d'homologie, cette corde elle-même étant l'axe d'homologie. — Il est inutile de rapporter toutes les conséquences qui résultent évidemment de cette position.

La fig. 33 fait voir aussi que les deux circonférences superposées peuvent être regardées comme provenant de deux circonférences perspectives réciproques pour un point de vue à l'infini. L'axe d'homologie serait aussi à l'infini, ainsi que les droites II et JJ, mais ce cas ne présente point d'observations importantes, puisqu'alors les deux figures sont identiquement superposées. C'est-à-dire que chaque point se confond avec son homologue.

On peut appliquer aux fig. 33 et 34 tous les théorèmes trouvés sur les figures homologiques, pour lesquelles $h = d$.

Ainsi, d'après le théorème 3, on aura :

Le produit des distances de deux points homologues, tels que d et d', ou m et m' est égal au carré de

$$h_2 = d^2 = \mathrm{V}p^2 = \overline{o_1 p}^2 = \frac{1}{4}\,\overline{vo}^2.$$

or comme

$$\mathrm{V}o_1 . oo_1 = \overline{\mathrm{Q}o_1}^2 = \frac{\overline{ab}^2}{4},$$

il s'ensuit qu'on a pour deux points homologues tels que m et m'

$$mp . m'p = \frac{1}{16} \cdot \frac{\overline{ab}^2}{oo_1}.$$

Deux circonférences dans un même plan, quelles que soient leurs positions relatives, sont toujours des figures homologiques pour deux points de vue de ce plan, situés sur la ligne des centres et formant avec eux quatre points harmoniques.

Reprenons (fig. 35) une circonférence représentant deux circonférences superposées, et faisons une projection verticale auxiliaire représentant en perspective les deux circonférences, pour le point de vue V.

Il est évident que si maintenant on coupe le cône perspectif par un plan vertical parallèle à celui de la circonférence $m'n'$, on obtiendra pour section une figure semblable et semblablement placée, et qui sera, sur ce plan et pour le même point de vue, la perspective non-seulement de la circonférence verticale $n'm'$, mais de celle horizontale m_1n_1. Lorsqu'on voudra ensuite placer homologiquement ces figures, il faudra faire tourner chacun de ces plans autour de sa trace sur le plan horizontal. Ce rabattement peut se faire en deux sens, d'abord d'arrière en avant, et alors le point de vue viendra en V sur les deux tangentes communes aux deux circonférences, ce sera le centre d'homologie. L'axe d'homologie sera la trace TT_1 des deux plans. Le point de vue n'étant plus à égales distances des plans des deux figures la droite II ne se confondra plus avec JJ, comme on le voit dans la fig. 35; il en résultera :

1° Que toute transversale menée par V coupera les deux circonférences en des points homologues; mais il est à remarquer que deux points homologues s'éloignent ou se rapprochent en même temps de l'axe d'homologie; ainsi le point m de la première circonférence a pour homologue celui m' et le point n celui n'.

Dans ce rabattement on suppose que la deuxième circonférence est la perspective de celle horizontale. Si, au contraire, on la regardait comme la perspective de celle verticale qui lui est parallèle, il en résulterait que dans le rabattement effectué comme ci-dessus, le point V sera toujours le même, mais l'axe d'homologie et les droites II, JJ seront toutes à l'infini ; de sorte qu'alors à des droites parallèles entre elles, correspondront des droites parallèles entre elles et parallèles aux premières, de manière à former des figures semblables; mais alors remarquons que deux points homologues ne seront plus placés symétriquement comme tout à l'heure; qu'ainsi au point m correspondrait le point n' et à celui n celui m'.

2° On voit que dans la première hypothèse à une corde cd, correspond une corde $c'd'$ déterminée par les deux rayons perspectifs $Vc'c$, $Vd'd$, et cd, et $c'd'$ étant prolongés, se rencontreront, comme cela doit être, sur l'axe d'homologie TT.

3° A une autre corde fe correspondrait une autre corde $f'e'$ et si cd, fe sont parallèles, les deux cordes homologues $c'd'$, $f'e'$ iront se couper sur la droite II. De même à deux cordes parallèles dans la deuxième, correspondraient deux droites dans la première, concourant sur la droite JJ.

4° A une tangente gl au point g de la première correspondrait la tangente lg' au point g' homologue de celui g, et ces deux tangentes se couperaient en un point l sur TT.

La tangente gl remonterait en k la droite ab qui est la pôlaire du point V dans la première circonférence, ou qui est l'axe d'homologie, dans le cas où on considérerait deux circonférences superposées. Dans ce cas kh serait la tangente homologue à celle kg et on aurait $kg = kh$; mais nous avons dit que la figure obtenue par leur nouveau plan devait être semblable et semblablement placée que celle-là; d'où résulte que la tangente lg' au point g' doit être parallèle à celle kh, et comme les points g,h,h',g' sont sur une même droite, il en résulte que $lg' = lg$, ainsi :

5° Si d'un point quelconque de l'axe d'homologie, on mène des tangentes aux deux circonférences, elles seront toujours égales. D'où résulte :

6° Si d'un point quelconque on mène des sécantes aux deux circonférences, le produit des distances de ce point d'intersection de la transversale sera constant pour toutes les transversales menées du même point et égal au carré de la tangente; il en résulte :

7° Que les quatre points d'intersection de deux transversales seront toujours sur une même circonférence, et, par suite, que si on trace une circonférence quelconque, coupant les deux circonférences, les deux cordes se couperont en un point de l'axe d'homologie TT. Ce qui donne un moyen très-facile de déterminer cet axe.

En appelant R le rayon de la première circonférence et r celui de la deuxième, on voit que le rayon oa, au point de tangence a étant parallèles à celui oa', il en résulte les deux triangles Vao et V$a'o_1$, et ainsi on a

$$\frac{\mathrm{V}o}{\mathrm{V}o_1} = \frac{\mathrm{R}}{r},$$

c'est-à-dire que :

8° Le rapport des distances des centres des cercles au centre d'homologie est égal à celui des rayons ; ce qui donne un moyen facile d'obtenir le point V.

9° Le rectangle des distances de deux points homologues des deux circonférences est constant, quels que soient ces deux points ; car les points *mm'* et deux points homologues quelconques sont sur une même circonférence.

Nous avons démontré que, si d'un point de la droite TT on mène deux tangentes à la circonférence *o*, et qu'on décrive une circonférence de ce point comme centre, et passant par les points de tangence, toutes les circonférences qu'on peut obtenir ainsi, et qui sont orthogonales à la proposée, passent toutes par deux mêmes points, que nous avons appelés les pôles circulaires de la droite TT_1, par rapport à la circonférence, et, de plus, que les cordes des points de tangence passent de même par le pôle linéaire de cette droite. Or, si des mêmes points on mène des tangentes à la seconde circonférence, nous venons de voir qu'elles seront égales aux premières, d'où résulte :

10° Si d'un point quelconque de l'axe d'homologie on mène des tangentes aux deux circonférences, les quatre points de tangence seront sur une même circonférence décrite de ce point comme centre et cette circonférence passe par deux points fixes sur la ligne des centres.

Si au lieu de faire le rabattement d'arrière en avant on l'eût fait d'avant en arrière, on eût obtenu de même les deux circonférences placées homologiquement, mais dans une position différente; ainsi (fig. 35) on voit que la seconde peut se trouver en entier dans la première. Dans tous les cas, on voit :

1° Que le point V tombera alors sur la corde *ab* en V_1, il est évident que les distances des deux points V et V_1 à JJ_1 seront égales;

2° Que la nouvelle droite II sera à même distance de TT_1 que l'ancienne;

3° Que celle JJ sera la même;

4° Qu'on aura encore

$$\frac{V_1 o}{V_1 o_1} = \frac{R}{r},$$

et comme on a

$$\frac{Vo}{Vo_1} = \frac{R}{r},$$

il s'ensuit qu'on a

$$\frac{Vo}{Vo_1} = \frac{V_1 o}{V_1 o_1};$$

c'est-à-dire que les deux points V et V_1 forment avec les deux centres o et o_1 un rapport harmonique;

5° Que toutes les relations que nous avons trouvées ci-dessus auront de même lieu entre ces deux circonférences homologiques.

Remarquons que les points homologues, tels que m, m'' sont alors dans le même sens.

Dans la fig. 36 nous supposons le plan coupant le cône au-delà du sommet du cône, on conçoit qu'on obtiendra de même une circonférence qui sera la perspective des deux circonférences qui peuvent se superposer. Le rabattement, pour rendre ces figures homologiques, pourra se faire en deux sens opposés comme ci-dessus. Alors, dans le cas d'arrière en avant, les deux figures se présenteront comme dans la fig. 36 ; le point V sera entre les deux figures à l'intersection des deux tangentes intérieures. L'axe d'homologie sera toujours la droite TT, intersection des plans des deux figures ; il y aura deux droites II et JJ distinctes. Enfin, on voit que les points homologues iront dans le même sens. On aura aussi

$$\frac{Vo}{Vo_1} = \frac{R}{r}, \text{ etc.}$$

Le rabattement dans l'autre sens donnerait une position différente des deux circonférences, elles seraient encore homologiques. Le point V se trouverait en V_1 sur la corde ab, polaire du point V. La droite JJ ne changerait pas, mais celle II se trouverait à même distance que la première de la droite TT. On aurait ainsi

$$\frac{V_1 o}{V_1 o_1} = \frac{R}{r},$$

d'où

$$\frac{Vo}{Vo_1} = \frac{V_1 o}{V_1 o},$$

comme ci-dessus :

Dans le premier cas, les deux circonférences homologiques peuvent être regardées comme ayant l'axe d'homologie à l'infini, par les raisons indiquées déjà.

Ainsi, on voit qu'étant données deux circonférences daus un même plan, quelles que soient leurs positions relatives, elles peuvent toujours être regardées comme étant homologiques pour deux points de vue différents, situés sur la ligne des centres et formant avec ces centres un rapport harmonique.

On voit ainsi que les deux circonférences pourraient se couper ; alors la corde commune serait l'axe d'homologie et jouirait des propriétés que nous avons exposées pour cet axe.

Cette corde commune a fait donner le nom de cordes imaginaires à l'axe d'homologie, lorsque les deux circonférences ne se coupent pas. On lui donne aussi le nom d'axe de similitude, qui peut aussi être direct ou inverse, suivant le sens du rabattement. Conservons-lui le nom d'axe d'homologie.

Avec deux circonférences on a donc deux centres d'homologie et deux axes d'homologie différents.

COMPLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE

FONDÉS SUR LA PEPSPECTIVE

Formant suite à tous les Traités de Géométrie élémentaire

Par M. POUDRA

Des sections coniques engendrées par la perspective du cercle.

La perspective d'un cercle est la courbe qui résulte de l'intersection d'un cône perspectif par le plan du tableau ; on appelle, en conséquence, *sections coniques*, ou plus simplement *coniques,* les diverses courbes que l'on peut ainsi obtenir.

Nous nous proposons, dans ce chapitre, de déterminer les diverses formes de ces courbes et leurs propriétés les plus importantes.

Soit donc (fig. 37), sur le plan du dessin, une circonférence dont O est le centre et R son rayon. La trace du tableau sur ce plan sera une droite TT, qui peut avoir une position quelconque ; la direction de ce plan du tableau peut être aussi quelconque. Soit ensuite un point quelconque V de l'espace pris pour point de vue; par ce point on mène un plan parallèle à celui du tableau, soit J J, sa trace qui est nécessairement parallèle à celle TT, mais qui peut avoir sur ce plan trois positions différentes remarquables : 1° cette droite peut être extérieure à la circonférence; 2° lui être tangente; 3° enfin couper cette circonférence. Nous verrons qu'il en résulte, pour perspective de la circonférence, trois courbes d'espèces différentes. Examinons d'abord le premier cas (fig. 37). Rabattons ce plan sur celui du tableau, autour de sa trace JJ_1, dans ce mouvement le point V pourra tomber sur un point quelconque du plan. Nous supposons pareillement que le plan du tableau tourne autour de sa trace TT_1 pour se rabattre sur le même plan du tableau, de sorte que la perspective du cercle qu'on va obtenir se trouvera ainsi ramenée dans ce plan et formera, avec ce cercle, deux figures homologiquement placées.

Du centre O de la circonférence, abaissons sur JJ_1 la perpendiculaire Or. Déterminons sur cette droite le point P, qui est le pôle de la droite $J J_1$ relativement à cette circonférence et par lequel passe par conséquent les polaires de tous les points de cette droite ; déterminons de même les deux points Q et Q_1 par lesquels passent toutes les circonférences orthogonales au cercle donné et ayant ainsi leurs centres sur la droite JJ_1 : ce sont ces deux points que nous avons appelés les pôles circulaires de la droite JJ_1 ; chacune de ces circonférences coupe cette droite JJ_1 en deux points m et n qui sont tels, que l'angle mQn est toujours droit ; que la circonférence décrite du point m comme centre, avec la tangente mb pour rayon, passe par les points Q et Q_1, ainsi que celle décrite du point n comme centre, avec la tangente na pour rayon.

Il résulte de là que les divers triangles, tels que Pmn, sont des triangles polaires de la circonférence, c'est-à-dire, tels que chaque côté est la polaire du sommet opposé et réciproquement que chaque sommet est le pôle du côté opposé.

Dans le cas représenté par la fig. 37, le point P est fixe, puisqu'il est le pôle de la droite JJ_1, tandis que les points m et n sont variables sur cette droite JJ_1. Ces deux points, m et n, dans chacune de leurs positions, sont dits conjugués.

On voit, par suite, que le point Q est le sommet d'un angle droit variable, dont les côtés passent par deux points conjugués, ainsi, l'un de ces points étant donné, l'autre sera connu facilement.

Le point V ayant une position quelconque, joignons-le à deux points conjugués m et n, par les droites Vm, Vn; puis joignons un point quelconque tel que a de la circonférence à ces points m et n; la droite $m\,a$ rencontrera celle TT_1 en un point π, par lequel on trace la droite $m a'_1$ parallèle à m V; la droite $n\,a$ rencontrera la droite TT_1 en α par lequel on mène $\alpha a'$ parallèle à n V, le point a' d'intersection de ces deux droites, se trouvera sur le rayon V$a a'$ et sera la perspective du point a, et de même pour tous les autres points de la courbe et du plan ; il en résultera évidemment que la réunion des perspectives, ainsi déterminées de tous les points de la circonférence, sera une courbe appelée conique, mais qui dans l'exemple de la fig. 37 a reçu le nom d'Ellipse.

ELLIPSE.

L'ellipse jouit évidemment des propriétés suivantes :

1° Cette courbe est continue et du second degré.

2° Puisque tous les points de la droite JJ_1 passent à l'infini dans leurs perspectives, et que la circonférence donnée ne rencontre pas cette droite, il s'en suit que l'ellipse, ainsi engendrée, n'aura pas de points à l'infini, elle sera donc limitée.

3° Au point P du cercle, qui est le pôle de la droite JJ_1, correspondra dans l'ellipse un point p' qui sera le centre de cette courbe, c'est-à-dire que toute droite passant par ce point et terminée à la courbe, sera partagée en deux parties égales en ce point. Cela résulte évidemment de ce que toute droite passant par le pôle P dans le cercle, est coupée par la circonférence et la polaire et ce point suivant quatre points formant toujours un rapport harmonique ; or, un de ces quatre points, celui où elle rencontre la droite JJ_1 passe à l'infini dans le perspective, donc le pôle de cette droite JJ_1 partage en deux parties égales le segment forme par les deux autres.

4° Toute droite passant par le point P dans le cercle, devient par conséquent un diamètre de l'ellipse ; cette droite et ce diamètre se coupent en un point de la trace TT_1 du tableau ; et le diamètre tel que $\pi p'$ correspondant à la corde m P est toujours parallèle à la droite mV qui joint le point V au point m où la corde Pm rencontre la droite JJ.

5° Deux droites, tels que Pm, Pn qui joignent le pôle P à deux points conjugués m et n situés sur sa polaire, donnent en perspective deux diamètres $\pi p'$, $\pi_1 p'$ qui sont dits conjugués, ils jouissent de cette propriété, que chacun d'eux partage en deux parties égales toutes les cordes parallèles à l'autre, ce qui est évident, puisque toutes ces cordes sont les perspectives de cordes du cercle passant respectivement par les points m, n; que le triangle Pmn est un triangle polaire, et qu'ainsi, chacune de ces cordes est coupée par la circonférence et la polaire du point m ou n et ces points même m ou n en quatre points formant un rapport harmonique.

L'angle de ces deux diamètres conjugués $\pi p'$, $\pi_1 p'$ est égal à celui mVn formé par les deux directrices Vm, Vn qui joignent le point de vue V aux deux points conjugués m et n.

6° Si dans le cercle nous supposons tracés une série indéfinie de quadrilatères, ayant tous pour points de concours des côtés opposés, deux points conjugués tels que ceux m et n, tous ces quadrilatères deviendront, en perspective, des parallélogrammes inscrits dans l'ellipse, et dont les côtés seront respectivement parallèles aux diamètres conjugués $p'\pi$, $p'\pi_1$ et par conséquent aux directrices correspondantes Vm, Vn.

Si ces deux directrices sont à angle droit, tous les parallélogrammes seront donc des rectangles.

7° Si du point m on mène à la circonférence, les deux tangentes mcd, mc_1d_1 et du point n les deux tangentes nac, na_1c_1, on formera ainsi un quadrilatère dcd_1c_1 circonscrit à cette circonférence; les points de tangence b et b_1 des tangentes mcd, mc_1d_1 seront sur la droite bb_1n polaire du point m; de même celles ncd, nc_1d_1 seront tangentes aux points a, a_1 sur la droite maa_1 polaire du point n, de plus les diagonales cc_1, dd_1 de ce quadrilatère passeront par le point P. Or, en perspective, les tangentes à la circonférence deviendront des tangentes à l'ellipse, et chacune parallèle au diamètre conjugué correspondant, il en résulte que, dans l'ellipse, la tangente à l'extrémité d'un diamètre est parallèle à celui conjugué, et les quatre tangentes, ainsi déterminées, formeront un parallélogramme circonscrit à l'ellipse et dont les diagonales passeront par son centre. Il en résulte évidemment que, si dans une ellipse on joint les deux extrémités d'un diamètre quelconque avec un point de la courbe, ces deux cordes seront parallèles à deux diamètres conjugués de l'ellipse.

8° Nous avons vu qu'il y avait une infinité de points conjugués tels que m et n pour la circonférence donnée; l'ellipse a donc une infinité de couples de diamètres conjugués dont l'angle est égal à celui $m\mathrm{V}n$ formé par les directrices correspondantes.

Les couples de points conjugués m et n sont déterminés par les intersections de la droite $\mathrm{J}\,\mathrm{J}_1$ avec les côtés d'un angle droit ayant le point Q pour sommet, ils forment sur cette droite une involution; lorsque le point m est en r au pied de la perpendiculaire abaissée du point Q sur la droite $\mathrm{J}\,\mathrm{J}_1$, alors le point conjugué n est à l'infini; réciproquement lorsque le point n est en r, le point m est à l'infini, de sorte que le plus grand angle que peut avoir l'angle $m\mathrm{V}n$ est lorsque le point m est en r, alors cet angle est égal au supplément de l'angle $\mathrm{V}r\mathrm{J}_1$ et le plus petit est lorsque le point n est en r, et alors il est égal à celui $\mathrm{V}r\mathrm{J}$, supplément du précédent. Le plus grand et le plus petit angle de deux diamètres conjugués étant suppléments l'un de al'utre, il en résulte qu'entre ces deux limites il y a un angle droit. Lorsque deux diamètres conjugués d'une ellipse sont à angle droit, ce sont ce qu'on appelle alors les axes de la courbe.

Il est très-facile de déterminer les axes de l'ellipse qui résultent de la perspective de la circonférence pour un point de vue V donné, il s'agit en effet de déterminer les deux points conjugués m et n pour lesquels les deux angles $m\mathrm{Q}n$ et $m\mathrm{V}n$ seront en même temps droits, or, il résulte de cela que les deux points m et n seront sur une circonférence passant par les deux points Q et V et dont le centre serait sur la droite $\mathrm{J}\mathrm{J}_1$. Ainsi la droite QV est une corde de cette circonférence, dont le centre sera à l'intersection de la droite $\mathrm{J}\mathrm{J}_1$ et d'une perpendiculaire élevée sur le milieu de cette corde QV, donc les deux points m et n sont déterminés. Le parallélogramme circonscrit $c'd'c_1'd_1'$ qui deviendra alors un rectangle, déterminera la grandeur de ces axes. Ainsi, comme on le voit dans la figure, les axes de l'ellipse sont $a'a'_1$, $b'b'_1$.

On peut déterminer pareillement deux diamètres conjugués de l'ellipse, faisant entr'eux un angle donné, pourvu que cet angle soit compris entre les limites qu'il ne peut dépasser.

Le problème à résoudre est de trouver, sur la droite $\mathrm{J}\mathrm{J}_1$ deux points conjugués m et n tels que, l'angle $m\mathrm{Q}n$ étant droit, celui $m\mathrm{V}n$ soit égal à un angle donné.

Transportons (fig. 38) les données de la question afin de ne pas compliquer la fig. 37. Le point r étant le pied de la perpendiculaire Qr abaissée du sommet Q de l'angle droit, pour deux points conjugués quelconque m et n, on a toujours $\overline{Qr}^2 = mr.nr$. Or, pour les points m, n cherchés, il faut que l'angle $m\mathrm{V}n$ soit égal à l'angle donné, par conséquent ces deux points se trouvent sur une circonférence passant par les points m, n, V, et forment sur la corde commune mn un segment capable de l'angle donné. Si on joint le point V à celui r, cette droite Vr, prolongée, sera donc une corde de cette nouvelle circonférence et son autre, extrémité t, se trouvera à l'intersection de cette droite Vr et d'une circonférence décrite sur une des droites mn comme diamètre et passant, par conséquent, par le point Q, puisqu'on a alors $\overline{Qr}^2 = mr.nr = \mathrm{V}r.tr$. De sorte que, une perpendiculaire fg, élevée sur le milieu f de cette corde Vt contiendra les centres de toutes les circonférences qui, passant par les points V et t, coupent la droite JJ_1 en deux points m et n tels que l'angle $m\mathrm{Q}n$ est droit, puisqu'on aura toujours $rm.rn = rt.r\mathrm{V} = \overline{Qr}^2$. Cela étant, il faut, sur cette droite fg, trouver le centre u' d'une circonférence déterminant, sur la droite JJ_1, un segment capable de l'angle donné. Pour cela, en un point quelconque l de la droite JJ_1, on fait avec cette droite l'angle $J_1 ls$ égal à l'angle donné que nous représenterons par θ; en l élevant la perpendiculaire lu à ls, le point u d'intersection de cette perpendiculaire et de la droite des centres fg sera le centre d'une circonférence de rayon lu, déterminant sur la droite JJ_1 un segment capable de l'angle donné θ; cette circonférence couperait la droite Vh qui joint le point de vue V au point h ou la droite des centres fg rencontre celle JJ_1, de manière qu'on aura $ul = ul'$. Si maintenant par le point V on trace la droite Vu' parallèle à nl' et $u'm$ parallèle à ul, le point u' sera le centre de la circonférence cherchée, passant par les points m, n, V et tels, que l'angle mVn est égal à celui nms' formé par la droite JJ_1 et celle ms' parallèle à celle ls, par conséquent perpendiculaire à mu' parallèle à lu, ainsi cet angle est égal à l'angle donné θ; le problème est ainsi résolu.

On remarque que si la circonférence de centre u, de rayon lu, ne rencontrait pas la droite Vh, la solution serait impossible. On voit que la limite de l'angle θ sera, lorsque la perpendiculaire lu à ls sera tel, que la circonférence de centre u, de rayon lu, sera tangente à la droite Vh.

La droite tracée sl fait avec celle JJ_1 un angle θ ou $200°—\theta$. Or, la circonférence de centre u et de rayon lu, rencontrera la droite Vh en deux points l', l'', de sorte que le second point l'' correspondra à l'angle $200° - \theta$. On tracera dl'', et par le point V la parallèle Vu'' à dl'' qui déterminera, sur la ligne des centres fh, le point u'' pour le centre d'une circonférence, laquelle passant par le point de vue V, rencontrera la droite JJ_1 en deux nouveaux points conjugués m', n', de sorte que Vm', Vn' seront les diamètres conjugués faisant entr'eux l'angle $m'Vn' = 200° - \theta$.

Les directions de deux diamètres conjugués faisant un angle donné, étant trouvées, il sera facile de déterminer la grandeur de ces diamètres, en construisant le parallélogramme circonscrit $c'c'_1dd'_1$ qui est la perspective du quadrilatère homologue cc_1dd_1 circonscrit au cercle; mais on peut avoir besoin du rapport numérique de deux diamètres conjugués. Il est évident que leurs grandeurs absolues dépendront de la distance entre les deux plans parallèles TT_1 et JJ_1. La détermination de ce rapport nécessite quelques propriétés de la circonférence.

Soit (fig. 39) les mêmes données que fig. 37,

m et n étant deux points conjugués quelconques. Les deux tangentes $m\,b\,c\,d$, $m\,b\,c_1\,d_1$ et les deux autres droites mP, mn forment un faisceau harmonique de quatre droites, de même que celles ncd_1a_1, nc_1da, nP, nm, il s'en suit que la droite TT_1, parallèle à mn, coupe les trois autres droites de chaque faisceau, de manère que $\pi\beta = \pi\beta'$ et $\pi_1\alpha = \pi_1\alpha_1$ ainsi π et π_1 sont les milieux respectifs des segments $\beta\beta_1$, $\alpha\alpha_1$, qui peuvent être regardés comme les perspectives de la circonférence sur une droite TT_1, prise des points m et n. Si par le pôle P on mène une parallèle à mn, on aura, par la même raison, $PM = PM_1$ et $PN = PN_1$. Or, à cause du parallélisme des droites NM, TT_1 JJ_1, on a :

$$\frac{\pi\beta}{PM} = \frac{\pi m}{Pm} = \frac{qr}{Pr},$$

qui est constant pour toutes les positions du point m sur la droite TT.

On a de même :

$$\frac{\pi.\alpha}{PN} = \frac{\pi.n}{Pn} = \frac{qr}{Pr}.$$

donc

$$\frac{\beta\beta_1}{\alpha\alpha_1}=\frac{\pi_1\varphi}{\pi\alpha}=\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{PN}}.$$

Traçons les deux diagonales $d\mathrm{P}d_1k_1$ $c_1\mathrm{P}ck_1$ qui rencontrent la 3[e] diagonale mn aux points respectifs k, k_1, tels que :

$$\frac{km}{kn}=\frac{k_1m}{k_1n}.$$

On a :

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{N_1P}}=\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{NP}}=\frac{km}{kn}=\frac{k_1m}{h_1n}=\frac{\beta\beta_1}{\alpha\alpha_1}.$$

Les deux triangles semblables $b\mathrm{MP}$, bmn donnent :

$$\frac{\mathrm{MP}}{mn}=\frac{b\mathrm{P}}{b'n}.$$

Ceux $a_1\mathrm{PN}$, a_1mn qui sont aussi semblables, donnent :

$$\frac{\mathrm{NP}}{mn}=\frac{a_1\mathrm{P}}{a_1m};$$

divisant ces deux équations l'une par l'autre, on aura :

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{NP}}=\frac{b\mathrm{P}}{bn}\cdot\frac{a_1m}{a_1\mathrm{P}}.$$

On aura pareillement pour les points M_1, N_1, au lieu de M et N :

$$\frac{M_1 P}{N_1 P} = \frac{b_1 P}{b_1 n} \cdot \frac{a_1 m}{a_1 P};$$

multipliant ces deux équations terme par terme, et observant que $MP = M_1 P$, $NP = N_1 P$, on aura:

$$\frac{MP^2}{NP^2} = \frac{bP.\ b_1 P.\ am.\ a_1 m}{bn.\ b_1 n.\ aP.\ a_1 P}.$$

Mais $bP.\ b_1 P = aP.\ a_1 P$ et $bn.\ b_1 n = \overline{na}^2 = \overline{nQ}^2$ et $am.\ a_1 m = \overline{mb}^2 = \overline{mQ}^2$, on aura donc :

$$\frac{MP^2}{NP^2} = \frac{M.P^2}{N_1 P^2} = \frac{mQ^2}{nQ^2},$$

et comme :

$$\frac{\beta \beta_1}{\alpha \alpha_1} = \frac{MP}{NP},$$

on a donc :

$$\frac{\beta \beta_1}{\alpha \alpha_1} = \frac{mQ}{nQ}.$$

C'est-à-dire par conséquent que le rapport des deux perspectives $\beta \beta_1$, $\alpha \alpha_1$ *d'une circonférence, prise de* *deux points conjugués* m *et* n *sur une droite* TT_1 *de son plan est égal au rapport des distances* mQ, nQ *qui joignent ces deux points* m, n, *au pôle circulaire* Q *de la droite* mn.

Nous avons trouvé qu'on avait :

$$\frac{\beta\beta_1}{\alpha\alpha_1} = \frac{km}{kn} = \frac{k_1m}{k_1n},$$

donc on a :

$$\frac{mQ}{nQ} = \frac{km}{kn} = \frac{k_1m}{k_1n};$$

et comme l'angle mQn est droit, on a donc :

$$\frac{mQ^2}{nQ^2} = \frac{mr}{n.r},$$

donc on aura :

$$\frac{km^2}{kn^2} = \frac{mr}{nr},$$

qu'on peut exprimer par des théorèmes.

Puisqu'on a :

$$\frac{km}{kn}=\frac{mQ}{nQ};$$

il s'en suit que le point k est sur la bisectrice de l'angle mQn. Le point k_1 sera sur la bisectrice du supplément de cet angle.

Ces préliminaires établis, il est facile de trouver (fig. 37), le rapport des longueurs de deux diamètres conjugués déterminés par deux points conjugués m et n. On voit en effet que l'on a :

$$a'a'_1=\alpha.\alpha_1\frac{\sin.\,\mathrm{V}nm}{\sin.\,m\mathrm{V}n},$$

et :

$$b'b'_1=\beta\,\beta_1\frac{\sin.\,\mathrm{V}mn}{\sin.\,n\mathrm{V}m};$$

donc on a :

$$\frac{a'a'_1}{b'b'_1}=\frac{\sin.\,\mathrm{V}nm}{\sin.\,\mathrm{V}mn}\cdot\frac{\alpha\alpha_1}{\beta\beta_1},$$

or,

$$\frac{\sin\mathrm{V}nm}{\sin\mathrm{V}mn}=\frac{m\mathrm{V}}{n\mathrm{V}},$$

et :

$$\frac{\alpha\alpha_1}{\beta\beta_1} = \frac{nQ}{mQ};$$

donc,

$$\frac{a'a'_1}{b'b'_1} = \frac{mV}{nV} : \frac{mQ}{nQ};$$

ou bien encore :

$$\frac{a'a'_1}{b'b'_1} = \frac{mV}{nV} : \frac{Km}{Kn} = \frac{mV}{nV} : \left(\frac{mr}{nr}\right)^{1/2}.$$

Telles sont les diverses expressions du rapport des longueurs de deux diamètres conjugués correspondants à deux points conjugués m et n; ce sera celui des axes lorsque, comme dans la figure, la circonférence décrite sur mn, comme diamètre, passera par le point de vue V.

On voit maintenant que toute construction géométrique, relative à la circonférence, donnera une construction analogue pour l'ellipse, et par suite nous verrons qu'à une propriété quelconque de cette première courbe, en existera une correspondante dans la seconde.

DES DIVERSES POSITIONS DU POINT DE VUE V.

Le point de vue V rabattu sur le plan de la circonférence, peut occuper, dans ce plan, une position quelconque, il en résulte toujours une ellipse pour la perspective du cercle ; mais cette ellipse aura des formes différentes suivant cette position du point de vue et de plus ces diverses ellipses auront entre elles des relations importantes.

Supposons d'abord que le point de vue (fig. 37) varie de position sur une circonférence $m\,Q\,V\,n\,Q$, qui détermine les deux points conjugués m et n ; il en résultera d'abord que pour les diverses ellipses, l'angle $m\,V\,n$ restant le même, l'angle de deux diamètres conjugués, dans chaque ellipse, correspondant à ces deux points m et n, sera toujours aussi le même et égal à cet angle $m\,V\,n$; si cet angle est droit, ce seront les axes pour toutes ces courbes ; remarquons encore que tous ces couples de diamètres vont passer respectivement par les mêmes deux points $\pi_1\,\pi$. Sur la droite $T\,T_1$, il en sera de même pour deux autres diamètres conjugués quelconque, seulement pour ceux-là, il est évident que l'angle $m\,V\,n$ n'étant plus égal à celui $m V_1 n$, celui des diamètres correspondants ne seront pas tous égaux.

Lorsque le point V se rapproche en V_1 du point n (fig. 37), on voit que l'ellipse s'aplatit, c'est-à-dire qu'un de ses diamètres diminue, enfin quand ce point est infiniment près du point n, ce diamètre devient infiniment petit et ainsi à la limite, lorsque V est en V_2 sur n, l'ellipse devient une droite double, comprise entre les deux points α, α, représentant ainsi une ellipse infiniment aplatie. Si le point de vue V passe de l'autre côté de la droite JJ_1 aux positions successives V_3, V_4, etc., le diamètre ci-dessus augmente. La formule

$$\frac{a\,a_1}{b\,b_1} = \frac{m\,V}{n\,V} : \frac{mQ}{nQ},$$

qui donne le rapport des axes, rend bien compte de ces changements, puisqu'alors, pour toutes les ellipses, le rapport $\frac{mQ}{nQ}$ est constant, qu'ainsi le rapport des diamètres conjugués dépend seulement alors de celui $\frac{mV}{nV}$. Lorsque le point de vue vient en m, alors de nouveau l'ellipse se réduit à une droite double comprise entre β et β_1, mais ce sera alors l'autre diamètre qui sera devenu infiniment petit. Entre ces deux positions m et n du point de vue, il y en a une ou ces deux diamètres seront égaux. Lorsque le point de vue sera en Q ou Q_1, si l'angle mVn est droit, alors $\frac{mQ}{nQ}=\frac{mQ_1}{nQ_1}$ sera égal à $\frac{mV}{nV}$, et les axes de l'ellipse feront entre eux un angle droit, le rectangle circonscrit $c'c'_1 d'd'_1$ deviendra un carré et l'ellipse deviendra ainsi une circonférence. Les deux circonférences ainsi obtenues, sont évidemment égales et placées symétriquement par rapport à la droite TT.

Il résulte de ces considérations que la perspective d'un même cercle pour différentes positions du point de vue donne des ellipses, dont le rapport des axes peut être quelconque et parmi lesquelles se trouvent une infinité de droites doubles limitées, correspondantes à la position du point V sur JJ_1, et enfin deux cercles égaux.

Les grandeurs absolues des différentés figures ainsi obtenues, pour la perspective d'une même circonférence, dépendent évidemment de la distance existante entre les droites TT_1 et JJ_1 ; dans toutes les positions de ces deux droites parallèles, les figures respectives seront semblables, mais dans des dimensions diverses ; de sorte qu'on peut obtenir pour la perspective d'une même circonférence, non-seulement une série indéfinie d'ellipses ayant des aplatissements divers, mais encore dans une infinité de dimensions.

Comparons entre elles deux ellipses obtenues pour les perspectives de la circonférence, de deux points de vue V, V_1 différents. Quels que soient les deux points m, n pris sur JJ_1 pour points de vue auxiliaires de la construction de ces deux perspectives, il est évident qu'un point quelconque a de la circonférence donnera dans la première ellipse un point a' déterminé par l'intersection de deux droites, respectivement parallèles à celles mV, nV, et dans la seconde ellipse un point a'' déterminé, de même par deux droites, respectivement parallèles à mV_1, nV_1 ; de sorte que la droite VV_1, qui joint les deux points de vue sera parallèle à la droite $a'a''$ qui joint les deux points ; il en sera de même pour tout autre point de la circonférence et même du plan. Ainsi les deux figures seront projections l'une de l'autre pour cette direction

VV_1. Remarquons de plus qu'à chaque droite joignant deux points quelconques de la circonférence et remontant la droite JJ_1 en un point quelconque t, correspondra dans les deux figures deux droites passant par ce même point t; il en résulte donc que les deux figures ainsi obtenues pour la perspective d'une même circonférence, sont deux figures homologiques, ayant cette droite JJ_1 pour axe d'homologie et pour direction d'homologie celle VV_1 qui joint les points de vue correspondants, ou, ce qui revient au même, ces deux figures sont perspectives réciproques pour un point de vue à l'infini.

Il résulte de là évidemment que si les points m et n sont conjugés, alors deux aux diamètres conjugués parallèles à mV, nV, dans la première figure, correspondra dans la seconde des diamètres conjugués, parallèles à mV_1, nV_1, et cela pour toutes les positions des points conugués m et n. Si l'angle mVn est égal à celui mV_1n, les deux couples de diamètres conjugués feront le même angle ; par conséquent pour toutes les positions du point de vue V sur une même circonférence, passant par deux points conjugués m et n, toutes les ellipses qu'on peut obtenir auront toutes des diamètres conjugués, faisant entre eux ce même angle; ainsi on voit dans la fig. 37 que les points V, V_1, V_2, étant sur la même circonférence $m\,Q\,V$, déterminant les axes, toutes les ellipses ont leurs axes respectives homologues entre eux, de plus on voit que tous les points homologues de toutes ces figures seront sur une même circonférence, ainsi pour toutes les positions du point de vue sur cette circonférence $m\,Q\,V$. On voit que tous les centres de ces ellipses sont sur une circonférence, dont le centre est sur la droite $J\,J_1$ au milieu de la droite $\pi\,\pi_1$ milieux respectifs des segments $\alpha\,\alpha_1$, $\beta\,\beta_1$, points qui sont eux-mêmes des centres.

Dans la fig. 37 nous avons supposé que l'axe d'homologie $T\,T_1$ ne rencontrait pas la circonférence donnée; supposons maintenant (fig. 40) que cette droite, toujours parallèle à celle $J\,J$, vienne à couper cette circonférence en deux points $\delta\,\delta_1$ il est évident alors que ces deux points appartiennent à toutes les perspectives de cette circonférence, quelle que soit la position du point de vue; de plus, si la droite $T\,T_8$ venait à passer par le point P, pôle de la droite $J\,J_1$, alors toutes ces courbes auraient le point P pour centre commun.

Dans cette position, comme dans celles examinées précédemment, deux points conjugués m et n seront déterminés par l'intersection de la droite $J J_1$ par les deux côtés d'un angle droit ayant le pôle circulaire Q pour sommet. Ainsi la demi-circonférence ayant pour diamètre cette droite $J J_1$ et passant par les points Q et V, détermine les deux points m et n qui donnent les axes de la courbe pour toutes les positions du point de vue V sur cette circonférence.

Si le point V était en Q, la courbe, avons-nous vu, devient une circonférence qui aura aussi le point P pour centre; ainsi, l'ellipse obtenue pour le point V et le cercle obtenu pour le point Q seront homologiques et concentriques ; la direction d'homologie sera évidemment celle des tangentes communes à ces deux courbes, et l'axe d'homologie sera leur corde commune. Il est évident que cela aura lieu de même pour toute autre perspective de la même circonférence ; ainsi, on peut en conclure qu'une ellipse quelconque et une circonférence concentrique sont toujours deux figures homologiques pour un point à l'infini et ayant, pour axe d'homologie, la corde commune ; mais une circonférence concentrique à une ellipse la coupe toujours en quatre points placés deux à deux, symétriquement par rapport aux axes de cette courbe. Or, si on se rappelle qu'il y a toujours deux cercles parmi toutes les perspectives de la circonférence et que ce second cercle était symétriquement placé relativement à la droite TT_1, il en résulte, que dans le cas de la fig. 40, les deux cercles se confondent, mais alors la seconde corde commune sera l'axe d'homologie de ce second cercle et de l'ellipse ; la direction d'homologie étant alors celle des deux autres tangentes communes que l'on peut mener à ce cercle et à l'ellipse concentrique. Il résulte de là qu'un cercle et ellipse concentriques sont homologues de deux manières, suivant que l'on prend pour axe d'homologie l'une ou l'autre des cordes communes et pour direction d'homologie l'une ou l'autre des deux directions des tangentes communes.

Cette position d'un cercle concentrique à une ellipse formant deux courbes homologiques pour un point de vue à l'infini, va nous donner une méthode facile pour passer de toutes les proprietés connues du cercle à celles correspondantes de l'ellipse; en observant qu'alors, à des systèmes de droites parallèles dans le cercle, correspond dans l'ellipse des systèmes de droites parallèles, et que toutes les relations perspectives trouvées ci-dessus, s'appliquent également pour ce cas particulier.

Propriétés de l'ellipse qui se déduisent de celles d'un cercle concentrique.

Reprenons (fig. 41), une circonférence dont O est le centre et R le rayon. Soit TT_1 l'axe d'homologie passant par le centre O, ce sera la trace du tableau que nous supposons toujours rabattu sur le plan de la circonférence. Le centre O du cercle sera aussi celui de l'ellipse cherchée et les deux points $\lambda\lambda'$ ou ce cercle rencontre l'axe TT_1 lui appartiendront aussi. Soit en outre un point f' donné comme étant la perspective d'un point quelconque f de circonférence; de sorte que la direction ff' sera celle d'homologie. L'ellipse est maintenant déterminée et sa construction est simple.

Par le point f menons une droite quelconque fgn rencontrant l'axe TT_1 en un point n, la droite nf' sera l'homologue de celle nf; si la droite nf rencontre la circonférence en un point g, la droite gg' parallèle à ff' déterminera sur nf' le point g' homologue du point g. Si le point g est le milieu de nf, le point g' sera le milieu de nf' et de même pour tout autre rapport. On peut ainsi déterminer tous les points de la courbe.

Le triangle fnf' étant formé, on peut déterminer encore la perspective d'un point quelconque d de la manière suivante : par le point d on mène $d\alpha$ parallèle à fn et dd' parallèle à ff', puis par le point α ou la droite $d\alpha$ rencontre l'axe TT_1 on trace $\alpha d'$ parallèle à nf', le point d' d'intersections des droites dd', $\alpha d'$ sera l'homologue du point d.

On peut obtenir ainsi la perspective de tous les points de la circonférence, puis une série de triangles semblables à celui fnf', d'où il résultera que *les côtés et leurs divisions homologues seront proportionnels*.

Si sur une droite on a quatre points A, b, b_1, C, ceux homologues étant A', b', b'_1, C', on aura évidemment alors :

$$\frac{Ab.Ab_1}{Cb.Cb_1} = \frac{A'b'.A'b'_1}{C'b'.C'b'_1}.$$

C'est-à-dire que : *Le rapport entre les produits des* *distances des deux points* A *et* C *aux deux autres, ne change pas en perspective,* de même que le rapport anharmonique des quatre points.

Supposons maintenant un triangle ABC dont les côtés consécutifs AB, BC, CA sont coupés par une circonférence ou trois couples de points c, c_1; a, a_1; b, b_1, on a :

$$Ab.Ab_1 = Ac.Ac_1; \quad Bc.Bc_1 = Ba.Ba_1; \quad Ca.Ca_1 = Cb.Cb_1,$$

d'où :

$$Ab.Ab_1 \times Bc.Bc_1 \times Ca.Ca_1 = Ac.Ac_1 \times Ba.Ba_1 \times Cb.Cb_1;$$

d'où :

$$\frac{Ab.\,Ab_1}{Cb.\,Cb_1} \times \frac{Bc.\,Bc_1}{Ac.\,Ac_1} \times \frac{Ca.\,Ca_1}{Ba.\,Ba_1} = 1.$$

En perspective, la circonférence deviendra une conique coupant les côtés homologues du triangle en des couples de points, et il y aura entre les segments la relation ci-dessus, connue sous le nom de THÉORÈME DE CARNOT.

Le point n ayant été pris arbitrairement sur l'axe TT_0 il en résulte qu'on peut obtenir la perspective de la circonférence par des séries de triangles semblables à divers triangles et avoir ainsi entre les côtés fn, $f'n$ des relations diverses, qui seront les mêmes pour les divisions de droites homologues. Ainsi, par exemple, si le point n était en θ pour lequel $\theta f = \theta f'$, alors à des divisions dans le cercle, de droites parallèles à θF_1 correspondrait des divisions égales sur les droites homologues de l'ellipse.

A un triangle quelconque tel que mfn dont la base mn est sur l'axe TT_1 correspond évidemment au triangle homologue $mf'n$ qui aura même base mn; des deux triangles ayant même base mn, il s'en suit que leurs surfaces sont entre elles comme les distances des sommets ff' à la base mn; si la droite ff' est parallèle à celle TT_1, ces deux surfaces seront donc équivalentes. Il résulte de là évidemment qu'à la surface d'un polygone quelconque dans le cercle, correspondra dans l'ellipse un autre polygone dont la surface sera à celle du premier dans le rapport des distances à l'axe TT_1, de deux des points homologues. Si ce rapport est l'unité, ces deux surfaces seront équivalentes. On peut en conclure pareillement que ce rapport existe encore entre deux surfaces homologues terminées par des courbes.

Deux diamètres rectangulaires dans le cercle sont tels, que chacun d'eux partage en deux parties égales toutes les cordes parallèles à l'autre. Aux deux diamètres du cercle, correspond dans l'ellipse deux diamètres, dits conjugués ; ils sont tels que *l'un d'eux partage en deux parties égales toutes les cordes de l'ellipse parallèles à l'autre, et passe par conséquent par les points de tangence, des tangentes parallèles à l'autre.*

Si d'un point quelconque du cercle on mène deux cordes rectangulaires, par conséquent parallèles à deux diamètres rectangulaires, ils intercepteront dans le cercle une corde passant par le centre, c'est-à-dire un diamètre.

Donc :

Dans une ellipse, si d'un point quelconque de la courbe on mène deux cordes parallèles à deux diamètres conjugués, elles intercepteront dans l'ellipse un diamètre de la courbe.

A deux diamètres rectangulaires du cercle, il correspond dans l'ellipse, deux diamètres conjugués faisant entre eux un angle variable suivant la position de ces diamètres. Si cet angle était droit, les deux diamètres conjugués seront les axes de la courbe. Comme dans la figure le centre O est commun au cercle et à l'ellipse, pour déterminer les axes de cette courbe, il faudra se servir de la propriété ci-dessus, qu'à deux cordes rectangulaires du cercle correspond deux cordes parallèles à deux diamètres conjugués, par conséquent rectangulaires, si ces diamètres sont les axes de la courbe.

Soient donc $f_1 f'$ deux points quelconques homologues du cercle et de l'ellipse. Le point f peut être regardé comme le sommet d'un angle droit variable, dont les côtés détermineront sur l'axe TT_1 deux séries de points tels que m, n formant sur cette droite une involution ; de même le point f' de l'ellipse peut être regardé comme le sommet d'une série d'angles parallèles respectivement à deux diamètres conjugués, les côtés de ces angles détermineront de même sur l'axe TT_1 une série de couples de deux points formant une involution, et ces deux involutions seront identiques, puisque à chaque couple rectangulaire des cordes du cercle correspond un couple de cordes conjugués passant par les mêmes points de l'axe TT_1, d'où résultera que pour trouver la direction des axes de l'ellipse, le problème consistera à trouver sur l'axe TT_1, les deux points m et n qui sont tels que les angles $m\,fn$, $m\,f'n$ sont tous les deux droits ; élevant sur le milieu de ff' une perpendiculaire, son point θ d'intersection avec l'axe $\mathrm{T\,T_1}$ sera le centre d'une circonférence, laquelle, avec le rayon $\theta f = \theta f'$, déterminera sur l'axe $\mathrm{T\,T_1}$ les deux points m, n cherchés ; les diamètres $a\,a'$, $b\,b'$ respectivement parallèles aux cordes $m\,f'$, $n\,f'$ seront les axes de la courbe.

Nous remarquerons que les quatre points m, f', f', n étant sur une même circonférence, on a $\theta f' = of = om = on$, qu'ainsi les deux droites $\theta f'$, $o\,n$ sont également inclinées sur la droite $f'\,n$ ou $f'\,m$; mais $f'n$ et $f'\,m$ sont les directions des axes de l'ellipse, donc ces deux droites $\theta f'$, $o\,n$ sont également inclinés sur les axes; or l'une, $\theta\,n$, est une des cordes communes, dont l'autre, $o\,f'$ est la direction de l'autre corde commune. Ainsi, étant donnés une corde commune et deux points homologues b, b' quelconque, en élevant sur le milieu de bb' une perpendiculaire, elle rencontrera la corde commune donnée en un point θ, lequel, joint au point de l'ellipse, donnera la direction de la seconde corde commune ; si donc on connaît le centre de la courbe, cette corde est déterminée.

Nous utiliserons souvent cette manière de déterminer la seconde corde commune.

On déterminerait de même les deux diamètres conjugués de l'ellipse faisant entre eux un angle donné, pourvu que cet angle soit cependant compris entre les limites que nous avons déjà indiquées.

Les grandeurs de ces diamètres se détermineraient par la construction du parallélogramme circonscrit dont les côtés seraient parallèles à ces diamètres ; leurs expressions algébriques se concluraient facilement de celles déjà trouvées ci-dessus ; ainsi appelons A, B les longueurs des demi-axes de l'ellipse et A_1, B_1 celles de deux diamètres conjugués correspondants aux deux points conjugués m et n, on trouverait

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{mf^1}{mf} : \frac{nf'^1}{nf};$$

mais ces résultats sont évidents sur la figure, car le triangle $bb'O$ est semblable à celui $ff'm$, on a donc :

$$\frac{b'o}{bo} \text{ ou } \frac{B_1}{R} = \frac{nf'}{nf}.$$

Les deux triangles semblables $aa'O$ et $ff'r$ donnent aussi :

$$\frac{a'o}{ao} \text{ ou } \frac{A_1}{R} = \frac{mf'}{mf};$$

divisant ces deux expressions l'une par l'autre, on a le rapport ci-dessus des deux diamètres conjugués, rapport qui peut avoir ainsi une infinité de valeurs.

Supposons que la direction d'homologie $f'f'$ soit parallèle à l'axe TT_1 et que les points conjugués m, n sont ceux qui, dans la figure 41, déterminent les axes; alors les deux triangles mfn, $mf'n$ ne sont pas seulement équivalents, mais sont égaux, de sorte que

$nf = mf$ et $mf' = nf$, et alors on a

$$\frac{A}{R} = \frac{nf}{mf} \text{ et } \frac{B}{R} = \frac{mf}{nf},$$

d'où :

$$\frac{A}{B} = \frac{nf^2}{mf^2},$$

et comme le triangle mfn est rectangle en f, si o_1 est le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet f sur l'hypothénuse mn, on aurait :

$$\frac{nf^2}{mf^2} = \frac{no.}{mo_1}.$$

Si on suppose que la droite ff' est la tangente à la circonférence, alors le centre o sera le pied o_1 de la perpendiculaire fo_1 et on aura ainsi, pour le rapport des axes de l'ellipse,

$$\frac{A}{B}=\frac{no}{mo}.$$

Ce rapport peut prendre une infinité de valeurs, de sorte que, dans le cas où la direction d'homologie est parallèle à l'axe, on peut avoir, pour perspective du cercle, une infinité d'ellipses différentes; nous pouvons donc prendre à volonté cette direction pour établir des relations générales entre une ellipse et une circonférence. Seulement remarquons que nous avons trouvé

$$\frac{A}{R}=\frac{nf}{mf} \text{ et } \frac{B}{R}=\frac{mf}{nf},$$

d'où résulte, en multipliant ces deux égalités

$$A.B=R^2$$

c'est-à-dire que le rayon de la circonférence sera moyen entre les longueurs des demi-axes de l'ellipse ; nous l'appellerons, en conséquence, la circonférence moyenne de l'ellipse, et nous déduirons ainsi les propriétés de l'ellipse de celles de la circonférence moyenne.

Si le rayon R de la circonférence varie, la direction d'homologie ne changeant pas, ainsi que le rapport nouveau $\frac{of}{of'}$ de deux points homologues, on voit que l'ellipse qui sera la perspective de cette circonférence nouvelle, sera non-seulement concentrique à la précédente, mais le rapport des axes sera le même.

Dans un cercle, deux cordes quelconques se coupent respectivement en deux parties dont le produit est constant. Désignons par c, c_1 les deux segments d'une des cordes et d, d_1 ceux de l'autre. On a donc

$$c.c. = d_1\, d_1$$

Soient C, C_1, D, D_1 les segments respectivement homologues dans l'ellipse, et soient A_1 B_1 les demi-diamètres parallèles à ces cordes dans l'ellipse. Nous avons vu qu'à deux droites parallèles dans le cercle, correspondaient dans l'ellipse deux droites parallèles entre elles et que les segments formés sur les premiers étaient proportionnels à ceux homologues, sur les secondes.

Donc on a

$$\frac{c}{C} = \frac{R}{A_1}, \qquad \frac{c.}{C_1} = \frac{R}{A_1},$$

d'où :

$$\frac{c.c_1}{C.C_1} = \frac{R^2}{A_1{}^2};$$

on aurait pareillement :

$$\frac{d}{D} = \frac{R}{B_1}, \qquad \frac{d.}{D.} = \frac{R}{B};$$

d'où :

$$\frac{d.d_1}{D.D_1} = \frac{R^2}{B_1{}^2};$$

divisant l'une par l'autre, et observant que $c.c_1 = d.d_1$, on aura :

$$\frac{C.C_1}{D.D_1} = \frac{A^2}{B^2}.$$

Donc :

Dans une ellipse, deux cordes quelconques se coupent respectivement en deux segments dont le rapport des produits est égal à celui des carrés des diamètres parallèles.

D'où il suit que *ce rapport est le même pour deux autres cordes quelconques parallèles respectivement à ces mêmes diamètres.*

Si les diamètres A_1 et B_1 sont conjugués, chacun d'eux divisera en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre. Si on les prend pour les axes de coordonnées, et qu'on appelle x et y les demi-cordes parallèles à ces axes, on aura donc :

$$\frac{y^2}{(A+x)(A-x)} = \frac{B^2}{A^2},$$

ou :

$$A^2 y^2 + B^2 x^2 = A^2 . B^2,$$

qui est l'équation générale de l'ellipse.

Par la même méthode on en conclurait que :

Si d'un point extérieur à une ellipse, on mène deux sécantes, le produit des deux segments d'une sécante sera à celui de l'autre, comme le carré du rapport des diamètres parallèles.

On en déduit : 1° que si les deux sécantes deviennent des tangentes, *le rapport des deux tangentes est égal à celui des diamètres parallèles.* 2° Si une est tangente et l'autre sécante, on aura que *le carré de la tangente est au produit des deux* *segments de la sécante, comme le carré du rapport des diamètres parallèles à la tangente et à la sécante.*

Dans le cercle, tous les carrés circonscrits sont égaux, et leur surface est égale à $4R^2$. Donc :

Dans une ellipse, tous les parallélogrammes circonscrits parallèles à deux diamètres conjugués sont équivalents, et leur surface est égale à $4R' = 4.A.B$, *qui est le rectangle construit sur les axes.*

Dans le cercle, tous les carrés inscrits sont égaux, et ont pour mesure de leur surface $2R^2$. Un carré inscrit a ses sommets aux points de tangence d'un carré circonscrit, de sorte que ces deux diagonales sont parallèles aux côtés de celui circonscrit. Donc :

Dans une ellipse, si on forme le parallélogramme inscrit en joignant les points de tangence d'un circonscrit parallèle à deux diamètres conjugués, tous les parallélogrammes ainsi formés seront équivalents et auront pour mesure de leur surface $2.A.B$.

Tous les polygones réguliers inscrits dans le cercle, donneront dans l'ellipse des polygones inscrits dans l'ellipse, leurs divers côtés ne seront plus égaux, ils seront proportionnels aux diamètres respectivement parallèles, mais ils seront équivalents en surface. Ceux dont on connaît, dans le cercle, la valeur de la surface en fonction du rayon, auront la même valeur, dans laquelle il suffira de remplacer R^2 par A.B, ainsi le triangle correspondant au triangle équilatéral aura pour l'expression de sa surface :

$$\tfrac{3}{4}\sqrt{3}\,.\,A\,.\,B,$$

celle correspondant à l'hexagone sera :

$$\tfrac{3}{2}\sqrt{3}\,.\,A\,.\,B,$$

et ainsi de suite.

Dans le cercle, si on inscrit un polygone régulier d'un nombre quelconque de côté et qu'on joigne chaque sommet au centre, on partagera la surface du polygone en triangles égaux.

Dans l'ellipse, par la même opération sur le polygone homologue, on partagera sa surface en triangle équivalent entr'eux et à ceux du cercle.

En multipliant le nombre des côtés des polygones inscrits et circonscrits au cercle et à l'ellipse homologue, on obtiendra toujours des polygones respectivement équivalents; donc, à la limite, on arriverait à prouver que la surface de l'ellipse est équivalente à celle de son cercle moyen.

La surface du cercle est $\pi.R^2$, donc :

La surface de l'ellipse est égale à $\pi.A.B$, *ou bien à* $\pi.A_1.B_1 \sin\omega$, *si* A_1, B_1 *sont deux diamètres conjugués et que* ω *soit l'angle de ces deux diamètres.*

A tous les secteurs égaux dans le cercle, correspond dans l'ellipse des secteurs équivalents, on pourra donc partager très-facilement la surface de l'ellipse en parties égales ou proportionnelles.

En général, il faut remarquer que à une surface quelconque prise dans le plan du cercle, correspondra dans l'ellipse une surface homologue équivalente.

Si on suppose un mobile, partant d'un des points communs au cercle et à l'ellipse et parcourant le cercle d'un mouvement uniforme, le rayon joignant ce mobile au centre décrira des secteurs proportionnels au temps ; si maintenant un second mobile, partant du même point, en même temps que le premier, parcourt l'ellipse de manière que les deux mobiles soient toujours dans la même direction, le rayon joignant le centre à ce second mobile décrira des secteurs proportionnels au temps, ou réciproquement si le rayon décrit des secteurs proportionnels au temps, les deux mobiles seront toujours dans la même direction.

Ces deux mouvements peuvent donc être appelés mouvements homologues pour un point de vue à l'infini. On pourra par suite substituer au mouvement elliptique, celui circulaire et revenir de ce dernier à la position du mobile dans le premier.

On peut concevoir de même des mouvements homologues, où le centre d'homologie ne serait point à l'infini.

Si on circonscrit au cercle un polygone régulier, tous ses sommets seront sur une circonférence concentrique; aux deux circonférences correspondront homologiquement deux ellipses concentriques semblables et semblablement placées, on a donc les diverses propositions suivantes :

Dans une ellipse, tous les parallélogrammes circonscrits dont les côtés sont parallèles à deux diamètres conjugués, ont leurs sommets sur une autre ellipse concentrique, semblable et semblablement placée, et dont les axes seront $A\sqrt{2}$, $B\sqrt{2}$; *ainsi quel que soit le point d'où on commence à tracer le pa-*

rallélogramme inscrit à l'une et circonscrit à l'autre, ils seront tous équivalents.

Dans deux ellipses concentriques, semblables et semblablement placées, toute corde tangente à celle intérieure séparera dans l'autre des segments équivalents.

Dans ces deux ellipses, *si on joint les deux extrémités d'une corde de l'ellipse extérieure, et tangente à celle intérieure, avec le centre, tous les triangles ainsi formés seront équivalents.*

Il y aurait une infinité de problèmes sur les surfaces des ellipses que l'axe peut résoudre ainsi facilement.

Sur la figure (41) on voit facilement que si oa, ob sont deux diamètres rectangulaires du cercle, la somme des carrés des distances des deux extrémités a et b de ces diamètres à l'axe TT_1 est toujours égale à R^2. Donc, comme la distance du point a' homologue de a, à l'axe est la même que celle de a. de même pour b et b', il s'en suit :

Dans une ellipse, la somme des carrés des distances des extrémités de deux diamètres conjugués à l'axe d'homologie TT_1, *passant par les points d'intersection de cette courbe avec la circonférence moyenne, est égale au rectangle* AB *des deux axes.*

La circonférence de rayon R étant connue, ainsi que le triangle rectangle off', l'ellipse se trouve déterminée; on doit donc pouvoir exprimer toutes les parties de la figure au moyen des côtés de ce triangle, dont un côté of de l'angle droit est égal à R; désignons par D le côté donné ff', par m l'angle fof', il en résulte :

$$of'=\sqrt{R^2+D^2},\quad \sin.m=\frac{D}{\sqrt{R^2+D^2}},\quad \cos.m=\frac{D}{\sqrt{R^2+D^2}},\quad \text{tang}.m=\frac{D}{R}.$$

Soient a et a', deux points homologues, abaissons de ces deux points les deux perpendiculaires ap, $a'p'$, sur TT_1, elles sont par conséquent égales, et le triangle paa' est semblable au triangle off', et par suite les côtés sont proportionnels.

Désignons par n l'angle $a'O\alpha$ du diamètre Oa' avec l'axe TT_1, alors on aura :

$$a'p'=ap=oa'.\sin.n,\quad op'=oa'.\cos.n,$$

et si on désigne l'axe oa', par A_1, on aura donc :

$$ap=a'p'=A_1\sin.n,\quad op'=A_1\cos.n,$$

et par suite des deux triangles semblables paa', off', on aura :

$$\frac{aa'}{ff'} = \frac{R}{A\,\sin.n},$$

d'où :

$$aa' = ff'.\frac{R}{A.\sin.n} = \frac{D.R}{A.\sin.n};$$

de même :

$$pa' = of'.\frac{R}{A.\sin.n} = \sqrt{R^2 + D^2} . \frac{R}{A.\sin.n}.$$

On a en outre :

$$aa' = pp' = op' - op,$$

or,

$$op' = A.\cos.n.$$

Supposons de plus que ao' soit le grand axe de la courbe, alors les deux triangles rectangles $oa\alpha$, $oa'\alpha$ sont égaux, d'où il résulte que l'angle

$$a\alpha o = a'o\alpha = n;$$

on a alors :

$$op = R.\sin.oap = R.\sin.a\alpha o = R.\sin.n,$$

donc :

$$aa' = op' - op = \mathrm{A}.\cos.n - \mathrm{R}\sin.n;$$

mais dans le triangle paa', rectangle en a, on a :

$$aa' = ap.\operatorname{tang}.apa' = ap.\operatorname{tang}.m.$$

Donc :

$$ap.\operatorname{tang}.m = \mathrm{A}\cos.n - \mathrm{R}\sin.n;$$

mais,

$$ap = \mathrm{R}.\cos.n,$$

et dans le triangle rectangle $oa'\alpha$ on a :

$$oa' = \mathrm{A} \text{ et } a'\alpha = ao = \mathrm{R} \text{ et } \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{R}} = \frac{\cos n}{\sin n};$$

d'où :

$$\mathrm{A} = \mathrm{R}.\frac{\cos n}{\sin n};$$

donc on aura :

$$\mathrm{R}.\cos n.\operatorname{tang} m = \frac{\mathrm{R}\cos^2 n}{\sin.n} - \mathrm{R}\sin.n = \mathrm{R}\left(\frac{\cos^2.n - \sin^2 n}{\sin.n}\right),$$

ou bien :

$$\sin . n \cos . n . \operatorname{tang} . m = \cos .^2 n - \sin .^2 n,$$

ou :

$$\frac{1}{2} \sin . 2n . \operatorname{tang} . m = \cos . 2n,$$

et enfin :

$$\operatorname{tang} . 2n = \frac{2}{\operatorname{tang} . m} = \frac{2}{\operatorname{tang} . fof^2} = 2 \operatorname{tang} . f' o \alpha .$$

Relation qui nous donne de suite la direction du grand axe.

Du point f' donné, on abaisse sur TT_1 la perpendiculaire $tf'u$, qu'on prolonge d'une quantité $uf' = f't$, et alors l'angle uot donne $2 . \operatorname{tang} . f'o\alpha = \operatorname{tang} . 2n$, partageant en r l'axe uru' en deux parties égales, la direction or sera celle du grand axe de l'ellipse.

L'angle $ro\alpha$ étant égal à celui rou, et la droite $o\alpha$ passant par les deux points λ, λ' d'intersections de la circonférence et de la courbe, celle ou passera nécessairement par les deux autres points γ, γ' d'intersection de ces deux courbes; et on aura pour déterminer cette droite $o\gamma u$:

$$\text{tang. } \gamma o \alpha = 2\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{D}}.$$

Il s'agit de déterminer maintenant la longueur de ces axes.

Nous avons trouvé :

$$\mathrm{A}.\sin.n = \mathrm{R}\cos.n,$$

on aurait pareillement :

$$\mathrm{B}\cos.n = \mathrm{R}\sin.n,$$

donc :

$$\mathrm{A} = \mathrm{R}.\cot.n, \quad \mathrm{B} = \mathrm{R}.\text{tang}.n,$$

d'où :

$$\mathrm{A}.\mathrm{B} = \mathrm{R}^2;$$

on tire de là :

$$\mathrm{A}+\mathrm{B} = \mathrm{R}(\cot.n - \text{tang}.n) = \mathrm{R}\left(\frac{\cos.n}{\sin.n} + \frac{\sin.n}{\cos.n}\right) = \frac{\mathrm{R}}{\sin.\alpha\cos.\alpha} = \frac{2\mathrm{R}}{\sin 2n},$$

$$\mathrm{A}-\mathrm{B} = \mathrm{R}(\cot.n - \text{tang}.n) = \mathrm{R}\left(\frac{\cos.n}{\sin.n} - \frac{\sin.n}{\cos.n}\right) = \frac{2\mathrm{R}\cos.2n}{\sin.2n} = 2\,\mathrm{R}\cot.2n.$$

Or, dans le triangle uot, on a :

$$uo = \frac{ut}{\sin.2n} = \frac{2.tf}{\sin.2n} = \frac{2.\mathrm{R}}{\sin.2n},$$

et :

$$to = ut.\frac{\cos.n}{\sin.n} = 2.\,R.\cot.n,$$

donc :

$$A + B = uo$$

et :

$$A - B = to,$$

et ainsi on a :

$$A = \frac{uo + to}{2}, \qquad B = \frac{uo - to}{2};$$

or, on a :

$$A + B = uo = \sqrt{4R^2 + D^2}, \quad A - B = to = D,$$

donc on a .

$$A = \frac{\sqrt{4R^2 + D^2} + D}{2}, \qquad B = \frac{\sqrt{4R^2 + D^2} - D}{2}.$$

Longueur des demi-axes en fonction des données R et D, mais $2R$ est le diamètre ff_1 du cercle, donc $\sqrt{4R^2 + D^2}$ est l'hypothenuse $f'f_1$ du triangle rectangle $ff'f_1$, et alors on voit que le grand axe de l'ellipse est égal à la moitié de la somme de l'hypothénuse ff_1 et du côté $ff'=\mathrm{D}$; et le petit axe à la moitié de la différence des mêmes côtés de ce triangle $ff'f_1$.

Le triangle $ff'f_1$ est égal à celui uot et a ses côtés parallèles, de sorte que le côté ff_1 est égal et parallèle à celui ou, et puisque l'angle $f'ff_1$ est droit, le côté $f'f_1$ passera par le point θ déterminé ci-dessus, et qui est tel que $of'=of$. Nous avons déjà prouvé que la droite $\theta f'$ était parallèle à la la seconde corde commune, et cela se vérifie encore ici, puisqu'elle est parallèle à la droite ou, qui passe par les deux points d'intersection de l'ellipse et du cercle.

Lorsque le point a' est l'extrémité du grand axe, les deux triangles $ao\alpha$, $a'o\alpha$ sont égaux, de sorte que l'angle $a'o\alpha$ est égal à celui $a\alpha o$ ou complément de celui $ao\alpha$; mais l'angle foa est aussi complément de celui $ao\alpha$, donc l'angle $a'o\alpha$ que fait le grand axe de la conique avec l'axe d'homologie $o\alpha$ est égal à celui foa, et de même l'angle $ao\alpha$ est égal à celui foa'.

Dans le triangle $oa'\alpha$ rectangle en a', on a :

$$\text{tang.}\, a'o\alpha = \frac{a'\alpha}{a'o} = \frac{ao}{a'o} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{A}} = \frac{\overline{\mathrm{A.B}}}{\mathrm{A}} = \frac{\sqrt{\mathrm{B}}}{\sqrt{\mathrm{A}}}\,,$$

$$\text{tang.}\, a'\alpha o = \text{tang.}\, ao\alpha = \frac{ao}{a\alpha} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{A.B}}} = \frac{\sqrt{\mathrm{A}}}{\sqrt{\mathrm{B}}}.$$

Il en résulte que :

$$\text{tang.}\, aoa' = \text{tang.}\,(ao\alpha - a'o\alpha =) \frac{\text{tang.}\, ao\alpha - \text{tang.}\, a'o\alpha}{1 + \text{tang.}\, ao\alpha . \text{tang.}\, a'o\alpha} =$$

$$\frac{\frac{\sqrt{\mathrm{A}}}{\sqrt{\mathrm{B}}} - \frac{\sqrt{\mathrm{B}}}{\sqrt{\mathrm{A}}}}{1 + \frac{\sqrt{\mathrm{B}}}{\sqrt{\mathrm{A}}} . \frac{\sqrt{\mathrm{A}}}{\sqrt{\mathrm{B}}}} = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{A} - \mathrm{B}}{\sqrt{\mathrm{A.B}}} = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{R}};$$

mais dans le triangle off' on a :

$$\text{tang.}\, fof' = \frac{ff'}{fo} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{R}} = \text{tang.}\, m;$$

donc,

$$\text{tang.}\, aoa' = \frac{1}{2} \text{tang}\, fof';$$

La tangente de l'angle fof' est ff', dans le cercle de rayon R, donc celle de l'angle aoa', dans le même cercle; sera la moitié de ff'.

On a trouvé :

$$\text{tang.}\, \gamma o\alpha = 2 . \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{D}},$$

et comme :

$$\text{tang}\, aoa' = \frac{2.R}{D},$$

il s'en suit que :

$$\text{tang.}\, aoa'.\, \text{tang.}\, \gamma o \alpha = 1;$$

c'est-à-dire que ces deux angles $a o a'$ et $\gamma o \alpha$ sont compléments l'un de l'autre.

Considérons maintenant (fig. 42), un point quelconque g de la circonférence et son point homologue g'; de sorte que le rayon $o g$ du cercle aura pour homologue le demi-diamètre $o g'$ de l'ellipse. Désignons par α l'angle variable des deux rayons $o f$, $o g$. Au rayon $o g$ correspond le rayon $o g_1$, qui lui est perpendiculaire et qui a pour homologue celui $o g'_1$, de sorte que $o g'$ et $o g'_1$ sont deux diamètres conjugués de l'ellipse correspondants aux rayons rectangulaires $o g$, $o g_1$, il en résulte évidemment qu'on a :

$$op = \text{R}\sin.\beta, \quad gp = g'p' = \text{R}\cos.\alpha,$$

$$gg' = ff' \cos.\alpha = \text{D}.\cos.\alpha.$$

En changeant α en $100^\circ + \alpha$, on aura pour les points g_1, g'_1 :

$$op_1 = \text{R}\cos\alpha, \quad g_1p_1 = g'_1p'_1 = \text{R}\sin\alpha, \quad g_1g'_1 = \text{D}\sin\alpha.$$

Elevant chacune de ces égalités au carré et ajoutant, on aura :

$$\overline{op}^2+\overline{op_1}^2=R^2,\quad \overline{gp}^2+\overline{g_1p_1}^2=R^2,$$
$$\overline{gg'}^2+\overline{g_1g_1'}^2=D^2.$$

Les deux triangles gop, g_1op_1 sont égaux, donc :

$$op=g_1p_1,\quad gp=g'p'=op_1;$$

on a :

$$\overline{og'}^2=\overline{g'p'}^2+\overline{op'}^2,$$

ou :

$$A_1^2=R^2\sin.^2\beta+(op+gg')^2,$$

ou :

$$A_1^2=R^2\cos.^2\beta+(R\sin.\alpha+D\cos.\alpha)^2=R^2+$$
$$+D^2\cos.^2\alpha+2.RD\sin.\alpha\cos.\alpha=R^2+$$
$$+D^2\cos.^2\alpha+R.D.\sin.2\alpha;$$

on a de même :

$$\overline{og'_1}^2=\overline{g'_1p'_1}^2+\overline{op'_1}^2=R^2\cos.^2\alpha+$$
$$+(g_1q'_1-op_1)^2=R^2\cos.^2\alpha+(D\sin.\alpha-R\cos.\alpha)^2;$$

ou :

$$\overline{B_1}^2=R^2+D^2\sin.^2\alpha-2R.D\sin.\alpha\cos.\alpha=$$
$$=R^2+D^2\sin.^2\alpha-R.D.\sin.2\alpha;$$

ajoutant, on aura donc :

$$\overline{A_1}^2 + B_1^2 = 2R^2 + D^2 = \text{constante} = A^2 + B^2,$$

c'est-à-dire que dans une ellipse :

La somme des carrés de deux demi-diamètres conjugués quelconques est constante, et est égale à la somme des carrés des demi-axes, et a pour expression de cette constante $2R^2 + D^2$.

La projection du diamètre og' sur TT_1 est égale à op', celle du diamètre conjuguée op'_1 sur la même droite est op'_1, or, on a :

$$\overline{op'}^2 = \overline{og'}^3 - \overline{g'p'}^2 = A_1^2 - R^2 \cos.^2 \alpha,$$

$$\overline{op'_1}^2 = \overline{og'_1}^2 - \overline{g'_1 p'}^2 = B_1^2 - R^2 \sin.^2 \alpha;$$

ajoutant, on aura :

$$\overline{op'}^2 + op'^2_1 = A_1^2 + B_1^2 - R^2 = 2R^2 + \\ + D^2 - R^2 = R^2 + D^2.$$

Donc :

La somme des carrés des projections de deux demi-diamètres conjugués, sur l'axe d'homologie est une constante égale à la somme $R^2 + D^2 = of'^2$.

Soient gs la tangente à la circonférence en ce point g et $g's$, la tangente homologue à l'ellipse au point g'; ces deux tangentes se rencontrant nécessairement en un même point s de l'axe d'homologie. Nous allons chercher le rapport qui existe entre les longueurs gs, $g's$ et par suite, non-seulement entre deux parties homologues de ces droites, mais encore entre deux segments homologues respectivement parallèles.

Dans le triangle gsp on a :

$$gs = gp \frac{1}{\sin.\alpha} = \mathrm{R}\frac{\cos.\alpha}{\sin.\alpha} = \mathrm{R}\cot.\alpha.$$

Dans le triangle $g'sp'$ on a :

$$\overline{g's}^2 = \overline{g'p'}^2 + \overline{sp'}^2 = \overline{gp}^2 + (pp' - ps)^2;$$

mais :

$$gp = \mathrm{R}.\cos.\alpha, \quad pp' = gg' = \mathrm{D}.\cos.\alpha,$$
$$ps = gp.\cot.\alpha = \mathrm{R}\cos.\alpha\cot.\alpha;$$

donc,

$$\overline{gs}^2 = \mathrm{R}^2\cos.^2\alpha + (\mathrm{D}\cot.\alpha - \mathrm{R}\cos.\alpha\cot.\alpha)^2 =$$
$$= \mathrm{R}^2\cot.^2\alpha\left(1 + \left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{R}}\right)^2\sin.^2\alpha - \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{R}}\sin.2\alpha\right),$$

et par suite on a :

$$\frac{\overline{g's}^2}{\overline{gs}^2}=1+\left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{R}}\right)^2\sin.^2\alpha-\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{R}}\sin.2\alpha,$$

d'où :

$$\frac{g's}{gs}=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{R}}\right)^2\sin.^2\alpha-\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{R}}\sin.2\alpha}.$$

Telle est donc la relation qui existe, non-seulement entre les deux droites gs, $g's$, mais entre deux segments homologues quelconques. Ainsi un segment quelconque étant donné, on abaissera, du centre O du cercle, une perpendiculaire og sur la direction de ce segment, elle déterminera le point g de la circonférence, et par suite l'angle $\alpha=fog$ et la relation ci-dessus donnera la longueur du segment homologue.

gs, $g's$ étant des tangentes, la relation ci-dessus existera entre deux parties quelconques homologues de ces deux droites, elle existera donc pour les éléments infiniment petits de ces deux droites communs en g et g' avec chacune des courbes. L'élément de la circonférence en g est proportionnel à la variation infiniment petite de l'angle α, désignons-la par $d.a$; l'élément de l'ellipse en g'

est celle d'un arc infiniment petit de l'ellipse, en le désignant par $d.s$, on aura :

$$\frac{d.S}{d.\alpha} = \sqrt{1 + \left(\frac{D}{R}\right)^2 \sin.^2\alpha - \frac{D}{R}\sin.2\alpha}.$$

L'intégration de cette différentielle donnerait le rapport existant entre un arc du cercle et celui homologue de l'ellipse.

Le rapport :

$$\frac{\overline{g's'}^2}{\overline{sg}^2} = 1 + \left(\frac{D}{R}\right)^2 \sin^2.\alpha - \frac{D}{R}\sin.2\alpha$$

est celui des carrés des longueurs de deux droites homologues quelconques, dont celle gs fait avec l'angle d'homologie un angle égal à $100° - \alpha$. On aurait donc pour une autre longueur kt, faisant avec le même axe l'angle $100 - 6$, et son homologue $k't'$,

$$\frac{\overline{k't'}^2}{\overline{kt}^2} = 1 + \left(\frac{D}{R}\right)^2 \sin.^2\varphi - \frac{D}{R}\sin.2\alpha;$$

mais si $\varphi = 100° + \alpha$, alors on aura :

$$\frac{\overline{k't'}^2}{\overline{kt}^2} = 1 + \frac{D}{R}\cos.^2\alpha + \frac{D}{R}\sin.2\alpha;$$

ajoutant ce résultat avec le premier, on aura :

$$\frac{\overline{g's'}^2}{\overline{sg}^2}+\frac{\overline{k't'}^2}{\overline{kt}^2}=\frac{2\,R^2+D^2}{R^2}=\text{constante},$$

c'est-à-dire que *la somme des carrés des rapports de deux systèmes de droites homologues, dont l'une* gs *est perpendiculaire à* kt, *est constante.*

On peut avoir la valeur de l'angle entre deux droites homologues ; dans le triangle gog', on a en effet :

$$\sin.\,gog'=\sin.\,g'go.\,\frac{gg'}{og'}=\cos.^2\alpha.\,\frac{D}{A_1}\,.$$

Si on change α en $100''+\alpha$, on aura pareillement :

$$\sin.\,g_1og_1'=\sin.\,gsg'=\sin^2\alpha\,\frac{D}{B_1}\,;$$

on a donc simultanément :

$$A_1\sin.\,gog'=D\cos.^2\alpha\,;$$

$$B_1\sin.\,g_1og'_1=D.\sin.^2\alpha\,;$$

d'où :

$$A.\sin.\,gog'+B\sin.\,g_1og'_1=D\,;$$

or :

$A.\sin.gog'$ est la distance de l'extrémité g' d'un diamètre, au rayon homologue og; $g_1og'_1$ est de même la distance de l'extrémité g'_1 de l'autre diamètre, au rayon homologue og_1 qui est perpendiculaire à celui og'. Donc, la somme de ces distances est constante, quels que soient les deux diamètres conjugués et égale à D.

Nous avons trouvé pour la longueur de deux diamètres conjugués :

$$\overline{A_1}^2 = R^2 + D^2 \cos.^2\alpha + R.D.\sin.2\alpha,$$

$$\overline{B_1}^2 = R^2 + D^2 \sin.^2\alpha - R.D.\sin.2\alpha.$$

Ces deux diamètres conjugués seront égaux lorsqu'on aura :

$$R^2 + D^2.\cos.^2\alpha + R.D.\sin.2\alpha = R^2 + D.^2\sin.^2\alpha -$$
$$- R.D.\sin.2\alpha;$$

ou :

$$D.\cos.2\alpha = -2R.\sin.2\alpha;$$

d'où :

$$\text{tang}.2\alpha = -\frac{D}{2R}.$$

Ce qui permettra de construire, *à priori*, ces deux diamètres égaux, puisque $ff' = D$ et que le diamètre $ff_1 = 2R$, il s'en suit que tang. $2\alpha = \frac{ff'}{ff_1}$ la moitié de cet angle sera α et comme *tang.* α est négatif, en faisant l'angle foh égal à cet angle α, le rayon oh sera l'homologue du $^1/_2$ diamètre oa_1; le rayon oh_1 perpendiculaire à celui oh, sera l'homologue du $^1/_2$ diamètre ob_1 conjugué et égal à celui oa_1.

Pour l'angle $g'og'_1$ de deux diamètres conjugués on a :

$$g'og'_1 = g'op' + p'og'_1,$$

mais :

$$g'op' = gop' - gog',$$

et :

$$p'og'_1 = p'og_1 + g_1og'_1;$$

donc :

$$g'og'_1 = 100° + g_1og'_1 - gog',$$

et comme les angles $g_1og'_1$, gog' sont déterminés, on connaîtra celui $g'og'_1$.

Si, sur la fig. 42 nous supposons tracée une circonférence concentrique à la première, en supposant que le rapport de ff' à fo soit toujours le même, sa perspective sera une ellipse concentrique avec la première, semblable et semblablement placée. Or, toutes les cordes du grand cercle qui seront tangentes au petit seront toutes égales. Soient c et c_1 deux de ces cordes, c', c'_1 celles homologues et d, d_1 les diamètres parallèles, respectivement à c', c'_1, on aura donc :

$$\frac{c}{R}=\frac{c'}{d} \text{ et } \frac{c_1}{R}=\frac{c'_1}{d_1};$$

donc :

$$\frac{c'}{d}=\frac{c'_1}{d_1}.$$

C'est-à-dire que :

Le rapport de ces cordes sera égal à celui des diamètres respectivement parallèles.

Si on suppose les deux cordes c, c_1 rectangulaires, on aura :

$$\frac{c^2}{R^2}+\frac{c'^2}{R^2}=2.\frac{c^2}{R^2}=\frac{c'^2}{d^2}+\frac{\overline{c'_1}^2}{d_1^2}.$$

C'est-à-dire que :

la somme des carrés de ces rapports est constante *pour deux cordes parallèles à deux diamètres conjugués.*

Dans une circonférence, si aux extrémités d'un diamètre quel conque aa_1, on mène les deux tangentes ab, a_1b_1 terminées à une autre tangente, aussi quelconque, on a toujours $ab.\,a_1b_1 = R^2$, mettant des accents pour les points homologues et appelant d le $^1/_2$ diamètre homologue au rayon du cercle parallèle à ces tangentes ab, a_1b_1, on aura :

$$\frac{ab}{R} = \frac{a'b'}{d},$$

et :

$$\frac{a_1b_1}{R} = \frac{a'_1b'_1}{d};$$

multipliant l'une par l'autre, on aura :

$$\frac{ab.\,a_1b_1}{R^2} = \frac{a'b'.\,a'_1b'_1}{d^2};$$

mais dans le cercle on a toujours :

$$ab.\,a_1b_1 = R^2;$$

donc :

$$a'b'.\,a'_1b'_1 = d^2.$$

C'est-à-dire que :

Dans une ellipse, si on mène aux extrémités d'un diamètre deux tangentes terminées à une autre tan-

gente quelconque; le produit de ces deux tangentes est égal au carré du demi-diamètre, parallèle aux tangentes ou conjugué à celui qui joint les deux points de tangence.

Soit O le centre d'un cercle de rayon $=$ R, aa_1, bb_1 deux diamètres rectangulaires et mm_1 un troisième diamètre. Abaissons sur mn les perpendiculaires ap, bq, on a évidemment :

$$\overline{ap}^2 + \overline{bq}^2 = R^2,$$

et :

$$\overline{op}^2 + oq^2 = R^2;$$

ou bien :

$$\left(\frac{ap}{R}\right)^2 + \left(\frac{bq}{R}\right)^2 = 1,$$

et :

$$\left(\frac{op}{R}\right)^2 + \left(\frac{oq}{R}\right)^2 = 1.$$

Si on représente par d, d_1 les diamètres conjugués homologues respectifs aux rayons parallèles à ap, bq et op, oq, on a :

$$\frac{ap}{R} = \frac{a'p'}{d}, \quad \frac{bp}{R} = \frac{b'q'}{d}; \quad \frac{op}{R} = \frac{op'}{d_1}, \quad \frac{oq}{R} = \frac{oq'}{d_1}.$$

Donc on a, en substituant :

$$\overline{\left(\frac{a'p'}{d}\right)}^2 + \left(\frac{b'q'}{d}\right)^2 = 1,$$

et :

$$\left(\frac{op'}{d_1}\right)^2 + \left(\frac{oq'}{d_1}\right)^2 = 1.$$

d'où :

$$\overline{a'p'}^2 + \overline{b'q'}^2 = d^2,$$

et :

$$\overline{op'}^2 + \overline{oq'}^2 = d_1^2.$$

La première égalité indique que :

Dans une ellipse, si des deux extrémités a′ *et* b′ *de deux diamètres conjugués, on mène deux cordes* a′p′, b′q′ *parallèles à un autre diamètre* d, *la somme des carrés des parties de ces cordes, interceptées entre la courbe et le diamètre conjugué à* d, *est égale au carré de ce demi-diamètre* d.

La seconde indique que :

Dans une ellipse la somme des carrés des projections de deux demi-diamètres conjugués, sur un autre diamètre quelconque et faite parallèlement au conjugué de ce diamètre, est égale au carré du demi-diamètre sur lequel se fait la projection. Si ce diamètre était un axe de la courbe les projections se feraient parallèles à l'autre axe, et alors :

La somme des carrés des projections de deux demi-diamètres conjugués, sur un des axes est égal au carré de ce demi-axe.

Dans une circonférence (fig. 43), de centre *o*, de rayon R, soient aa_1, bb_1 deux diamètres rectangulaires, m un point quelconque de la circonférence; si on mène, en ce point m, la tangente mc, rencontrant le diamètre bb_1 en c, et les perpendiculaires mp, mq sur aa_1, bb_1, on a les deux triangles semblables ocm, omp qui donnent :

$$\frac{oc}{om} = \frac{om}{mp},$$

d'où :

$$oc.mp = oc.oq = \overline{om}^2 = R^2 = \overline{ob}^2;$$

on a donc :

$$\frac{oc}{R} \cdot \frac{oq}{R} = 1 = \frac{oc}{ob} \cdot \frac{ob}{oq}.$$

Dans l'ellipse perspective du cercle, on aura donc :

$$\frac{o'c'}{o'b'} \cdot \frac{o'b'}{o'q'} = 1,$$

d'où :

$$o'c'.o'q' = \overline{o'b'}^2.$$

C'est-à-dire que :

Dans une ellipse le carré d'un demi-diamètre quelconque o′b′ *est égal au produit de l'ordonnée* o′q′ = m′p′ *d'un point* m *quelconque de la courbe,* *par la distance* o′c′ *du centre* o *au point* c, *ou la tangente en* m *rencontre ce diamètre.*

A un point m de l'ellipse, menons la normale $m'e$ et abaissons du centre o la perpendiculaire od sur la tangente, et supposons que $a'a'_1$, $b'b'_1$ soient les axes de la courbe, alors le triangle $o'd'c'$ est semblable à celui $p'm'e'$, donc on a :

$$\frac{m'p'}{me} = \frac{od}{o'c'},$$

ou :

$$\frac{oq'}{m'e} = \frac{od}{oc};$$

d'où :

$$oq'.oc' = me.od;$$

mais :

$$oq'.oc' = \overline{ob'}^2;$$

donc :

$$me.od' = \overline{ob'}^2.$$

Donc :

Dans une ellipse, le produit de la perpendiculaire abaissée du centre sur une tangente, par la normale au point de tangence, est constant et égal au carré du petit axe.

Dans la circonférence (fig. 43), on joint un point quelconque m de la courbe avec les deux extrémités a, a_1 d'un diamètre, l'angle $a\,m\,a_1$ est toujours droit, on a donc :

$$\overline{ma}^2 + \overline{ma_1}^2 = 4\,R^2,$$

ou :

$$\left(\frac{ma}{R}\right)^2 + \left(\frac{ma_1}{R}\right)^2 = 4.$$

Dans l'ellipse on aura :

$$\frac{m'a'}{d} = \frac{ma}{R},$$

et :

$$\frac{m'a'_1}{d_1} = \frac{ma}{R},$$

d et d_1 étant les diamètres respectivement parallèles à $m'a', m'a'_1$, ainsi il vient :

$$\left(\frac{m'a'}{d}\right)^2 + \left(\frac{m'a'_1}{d_1}\right)^2 = 4.$$

C'est-à-dire que :

Dans une ellipse, si on joint un point de la courbe aux deux extrémités d'un diamètre quelconque, la somme des carrés du rapport des deux cordes divisées respectivement par le diamètre qui leur est parallèle, est constante et égale à 4.

Revenons à quelques constructions graphiques sur l'ellipse :

1° On demande de déterminer la tangente à une ellipse en un point g' donné de la courbe?

L'ellipse est donnée par son centre et ses axes, ou par deux diamètres conjugués, on a donc de suite le rayon du cercle moyen. Ce cercle étant tracé, on aura les deux cordes communes, l'une quelconque sera prise pour l'axe d'homologie et pour direction d'homologie. En menant la droite $g\,g'$ parallèle à cet axe, on déterminera sur la circonférence le point g homologue de celui g'. En ce point g on mène la tangente $g\,s$ qui rencontre l'axe d'homologie au point s, la droite sg' est la tangente cherchée.

2° On demande de mener par un point j' extérieur à une ellipse donnée, une tangente?

Par le point j on mène une parallèle à $o\,f'$ et par le point d'intersection de cette droite avec l'axe d'homologie, une parallèle à of, cette dernière droite rencontrera la droite $j\,j'$ menée par le point j' parallèle à l'axe, en un point j qui sera l'homologue de celui de j'. Par ce point j, on mène $j\,g\,s$ tangente à la circonférence, la droite sg' sera la tangente cherchée ; et si g est le point de tangence sur la circonférence, la droite gg' parallèle à l'axe d'homologie, déterminera le point g' de cette tangente.

3° On demande de mener à l'ellipse donnée une tangente parallèle à une droite donnée lk'?

On déterminera, comme ci dessus, le point k homologue d'un point quelconque k' de cette droite lk', on joint l à k, et on mène la tangente js parallèle à lk', et enfin sg' parallèle à lk' sera la tangente demandée.

On résoudra semblablement toute construction à exécuter sur l'ellipse, au moyen de sa circonférence moyenne. Ainsi, par exemple :

4° On demande de mener par un point quelconque k' une sécante qui partage la surface de l'ellipse en deux parties ayant un rapport donné?

On détermine le point k homologue de celui k', puis on construit la sécante qui, passant par le point k, partage le cercle en deux parties qui soient entre elles dans le rapport donné, la sécante homologue sera la droite cherchée.

Nous nous sommes servi du cercle moyen, mais on peut employer un autre cercle concentrique. Supposons, par exemple, (fig. 44), qu'on connaisse seulement deux diamètres conjugués aa_1, bb_1 d'une ellipse. Sur le diamètre $b\,b_1$ décrivons une circonférence concentrique, elle sera homologique avec l'ellipse pour un point de vue à l'infini. Les deux rayons $o\,a$, $o\,b'_1$ du cercle sont les homologues des demi-diamètres conjugués $o\,a'$, $o\,b'$, donc la droite $a\,a'$ est la direction d'homologie, et $b'\,b'_1$ est l'axe d'homologie, on peut donc de suite construire par points, l'ellipse dont on a deux diamètres conjugués, et obtenir les constructions ci-dessus sans même tracer cette courbe.

On peut de même obtenir les axes : 1° comme nous l'avons déjà fait en cherchant les points d'intersection de l'axe d'homologie $b\,b_1$ d'une circonférence passant par les deux points homologues a et a' et ayant son centre sur cet axe. Ces deux points, joints aux points a et a' donneront les cordes rectangulaires du cercle homologue de celles de l'ellipse; ou 2° en déterminant la deuxième corde $d\,d'$ commune au cercle et à l'ellipse; pour cela, remarquons que, pour une même direction d'homologie, le cercle et l'ellipse peuvent être homologiques de deux manières différentes, ainsi la droite $a\,c\,a'$ coupant la circonférence en un second point c, on peut regarder que le point a' est l'homologue de ce point c, mais alors le point b' de l'ellipse sera l'homologue du point b'' situé à l'intersection de la circonférence et de la droite $b'b''$ menée parallèle à la direction d'homologie aa', de sorte que la droite $b''c$ serait l'homologue de celle $b'a'$, et ces deux droites $b''c$, $b'a'$ se rencontreraient en d sur l'autre axe d'homologie; on déterminerait de même le second point d_1 et cette droite dod_1 passant par le centre o serait le nouvel axe d'homologie, par conséquent la seconde corde commune. Les deux cordes eb' eb'_1 rectangulaires, sont communes au cercle et à l'ellipse, donc elles sont parallèles aux axes qui divisent ainsi en deux parties égales l'angle et le supplément de l'angle eob'_1 des deux cordes communes. On trouvera la longueur de ces axes en déterminant les deux diamètres rectangulaires du cercle qui sont homologues aux directions trouvées des axes.

Propriétés de l'ellipse qui se déduisent de celles du cercle lorsque le point de vue, ou centre d'homologie, est au centre de ce cercle. Des foyers de l'ellipse.

Après avoir examiné les propriétés de l'ellipse qui se déduisent de celle d'un cercle concentrique, c'est-à-dire lorsque le point de vue est à l'infini, nous allons chercher celles qui peuvent résulter de la position du point de vue, ou centre d'homologie, au centre même de ce cercle.

Reprenons (fig. 45), les dispositions de la fig. 35 et plaçons le point de vue V au centre O de la circonférence, soient toujours TT_1 la trace du tableau ou axe d'homologie, JJ_1 la trace du plan mène par le point de vue et parallèle au tableau, cette droite JJ_1 est, comme on l'a vue, celle du plan du cercle, dont tous les points ont pour homologues, dans le plan du tableau, des points à l'infini; ajoutons à cette figure, la droite II_1 parallèle à celles TT_1, JJ_1 et à une distance de TT_1 égale à celle du point de vue à JJ_1, c'est-à-dire que cette droite est la trace rabattue d'un plan mené par le point de vue parallèlement au plan du cercle, avec le tableau; cette droite contient donc tous les points qui, dans le plan de l'ellipse, sont les homologues des points qui sont à l'infini, dans le plan du cercle; ainsi tout système de droites parallèles dans le plan du cercle deviennent en perspective un système de droites concourantes en un point de cette droite II_1, de même que réciproquement tout système de droites qui, dans le plan du cercle, ont leur point de concours sur la droite JJ_1, proviennent de droites parallèles dans le plan de l'ellipse, ou bien que tout système de droites parallèles dans le plan de l'ellipse provient d'un système de droites concourantes en un point de cette droite JJ_1.

Soient P le pôle linéaire de la droite JJ_1, relativement au cercle, et Q son pôle circulaire. Nous avons vu, que toute circonférence ayant son centre sur JJ_1 et passant par le point Q, détermine sur cette droite deux points conjugués m et n, qui joints au point de vue V, donnent les directions Vm, Vn de deux diamètres conjugués de l'ellipse. Nous avons vu aussi que pour que ces deux diamètres soient les axes de la courbe, il faut que la circonférence ci-dessus qui détermine les points conjugués m et n, passe aussi par le point Q, afin que les droites Qm, Qn soient aussi rectangulaires; mais dans le cas actuel, les points V et Q étant sur une perpendiculaire à la droite JJ_1, cela n'est possible que si le centre de la circonférence est à l'infini, de sorte qu'un des points m ou n sera le pied r de la perpendiculaire VQr, et l'autre n ou m sera à l'infini, il en résulte que l'un des axes de l'ellipse sera alors parallèle à la droite JJ_1 et l'autre lui sera perpendiculaire.

On peut construire, point par point, la perspective de tous les points du cercle, en se servant, comme nous l'avons fait, de deux points de vue auxiliaires m et n pris sur la droite JJ_1. On voit que la perspective du point P, pôle de la droite JJ_1 sera le point P′ centre de la courbe, et qu'ainsi les axes seront en direction, les droites VQr $b'P'b'$, homologues des cordes $aVOa_1r$ et bPb_1; par conséquent les perspectives des points a et a_1 seront les points a', a'_1, sommets de l'un des axes, et b', b'_1 perspectives des points b et b_1 seront les extrémités de l'autre axe.

Nous avons trouvé pour la fig. 35 que le rapport des axes de l'ellipse perspective du cercle était :

$$\frac{a'a'_1}{b'b'_1} = \frac{mV}{nV} : \frac{mQ}{nQ} = \frac{mV}{mQ} : \frac{nV}{nQ};$$

Or, dans l'hypothèse que le point V se confond avec O, le point m vient en r et le point n est à l'infini, donc :

$$\frac{nV}{nQ} = 1,$$

et alors :

$$\frac{a'a'_1}{b'b'_1} = \frac{mV}{mQ} = \frac{rV}{rQ};$$

or :

$$rQ = rb = \sqrt{\overline{\gamma V}^2 - \overline{ob}^2};$$

nous avons appelé h la distance $\mathrm{V}r$; $ob = \mathrm{R}$, donc on a :

$$\frac{a'a'_1}{b'b'_1} = \frac{h}{\sqrt{h^2 - \mathrm{R}^2}};$$

Ainsi le rapport des deux axes peut avoir une valeur quelconque, il suffit de modifier la distance h; si on veut que ce rapport soit égal à k, il faut avoir :

$$k^2 = \frac{h^2}{h^2 - \mathrm{R}^2},$$

ou :

$$k^2 h^2 - k^2 \mathrm{R}^2 = h^2,$$

d'où :

$$h = \frac{k.\mathrm{R}}{\sqrt{k^2 - 1}};$$

Ainsi avec le même cercle de rayon R, en mettant le point de vue au centre o, on peut obtenir pour la perspective de ce cercle, une ellipse, dont le rapport des axes soit donné, par conséquent quelconque. De plus, en faisant varier la distance qui sépare les droites TT, JJ, on obtiendra des ellipses semblables et de grandeurs variables, donc enfin on peut en conclure que pour cette position du point de vue, on peut obtenir une ellipse quelconque pour la perspective du cercle, et qu'ainsi les propriétés de l'ellipse que nous allons déduire de celles du cercle seront générales.

Nous avons dit que tout point à l'infini dans le cercle avait son homologue, dans le plan de l'ellipse, en un point situé sur la droite II_1, or, dans le cercle, toute transversale menée par le centre coupe la courbe en deux points à égale distance du centre, ou bien si on considère le point de cette transversale qui est à l'infini, on peut dire que le centre, les points d'intersections de la circonférence et le point à l'infini, forment un rapport harmonique entre les segments, donc (fig. 46).

Dans l'ellipse toute transversale menée par le point O *coupe la courbe et la droite* II_1 *en des points, lesquels avec ce centre forment des segments dont le rapport est harmonique.*

Dans la circonférence les tangentes aux extrémités d'un même diamètre, sont parallèles, donc : (fig. 46).

Dans l'ellipse les tangentes menées aux deux extrémitésd'une corde quelconque, passant par le point O, *se rencontrent sur la droite* II_1; *réciproquement lorsque deux tangentes à l'ellipse sont menées par un point de la droite* II_1, *la corde de tangence passe par le point* O.

Un système de cordes parallèles dans le cercle, donnera dans l'ellipse un système de cordes concourantes en un point de la droite II_1 situé à l'intersection de cette droite et de la corde parallèle passant par le point O; un autre système de cordes parallèles et perpendiculaires aux premières, donnera un autre système de droites concourantes au point où la corde parallèle passant par le point O, ira rencontrer cette droite II_1 Les deux diamètres rectangulaires qui passent par les points de contact des tangentes parallèles respectives, se confondent en direction avec les cordes de contact des deux systèmes de tangentes, menées de leur point de concours, donc :

Si d'un point quelconque m_1 de la droite II_1, on mène deux tangentes à l'ellipse, la corde $d'd'_1$ de contact sera perpendiculaire à la droite m O, qui joint ce point m_1 au point O, et elle ira rencontrer la droite II_1 en un point n_1 qui sera tel que si on mène deux tangentes à l'ellipse, la corde $c'c'_1$ de contact sera perpendiculaire à la droite qui joint ce nouveau point n_1 et le point O, et passera par le point m_1; les deux points m_1, n_1 sont dits conjugués, l'angle $n_1 o m_1$ étant toujours droit.

A toutes ces propriétés du point O, on reconnait qu'il est, par rapport à l'ellipse, le pôle de la droite II. Ce point a reçu le nom de **FOYER** de l'ellipse et la droite II_1, qui est sa polaire, est appelée la **DIRECTRICE**.

La courbe étant symétrique par rapport à ses deux axes, il y aura donc, sur ce grand axe, de l'autre côté et à égale distance du centre, un second foyer qui aura sa directrice correspondante. Nous désignerons à l'avenir ces deux points par les lettres F, F_1; sur la figure, l'un de ces points se confond avec celui désigné par V ou O.

Les foyers d'une ellipse jouissent de propriétés importantes dont nous allons nous occuper; pour cela nous reconstruisons fig. 46 la figure 45, en y supprimant les lignes inutiles.

Propriétés des foyers.

Soit donc (fig. 46), une ellipse construite comme nous l'avons indiqué ci-dessus, soient P′ son centre, $a\,a'_1$, $b'\,b'_1$ ses axes, F, F_1 ses foyers.

Du point F comme centre et avec un rayon quelconque, décrivons une circonférence, elle sera homologique avec l'ellipse, F sera leur centre commun d'homologie, de sorte que sur un rayon quelconque F c' c les points d'intersection de cette droite, avec l'ellipse et la circonférence, seront deux points homologues. D'après cela, prenons dans le cercle deux cordes parallèles, et joignons leurs extrémités au point F, par des droites, elles détermineront dans l'ellipse deux cordes homologues, qui se couperont en un point n_1, la droite $n_1 m_1$ perpendiculaire au grand axe, sera la droite désignée par II_1, qui contient les points homologues à ceux qui sont à l'infini dans le plan du cercle. Prenons pareillement dans l'ellipse deux cordes parallèles, elles détermineront dans le cercle deux cordes concourantes en un point de la droite J J, qui sera ainsi déterminée. Ainsi les deux tangentes $b'f$, $b'_1 f_1$ aux extrémités du petit axe $b' b'_1$, détermineront dans le cercle les deux tangentes bp, $b_1 p$, qui se rencontrent en un point r de cette droite JJ_1; deux cordes homologues quelconque du cercle et de l'ellipse se rencontreront en un point de l'axe d'homologie TT_1 qui sera ainsi déterminé. Enfin la droite ii parallèle à II_1 et à même distance du centre sera la directrice du second foyer.

On peut maintenant en déduire les propriétés suivantes :

La directrice est la polaire du foyer, ou le foyer est le pôle de la directrice. Si autour du foyer on fait tourner le sommet d'un angle droit, les côtés détermineront sur la directrice une série de couples de points m_1 et n_1 conjugués, c'est-à-dire qui seront tels que la corde du contact de deux tangentes, menée par un de ces points passe par l'autre; les triangles $m_1 F n_1$ ainsi formés, sont ce qu'on appelle des triangles polaires, ils sont tels que chaque sommet est le pôle du côté opposé, ou que chaque côté est la polaire du sommet opposé. Il en résulte que si d'un point quelconque m_1 de la directrice on mène une transversale, elle sera coupée par la courbe et la polaire de ce point, lesquels avec ce point m_1 forment un rapport harmonique. Si le point m_1 est à l'infini, son conjugué n_1 sera en s au point d'intersection de la directrice et de l'axe de la courbe.

Pour mener une tangente à l'ellipse en un point quelconque c' de cette courbe, on trace la droite $F c' m_1$ et sa perpendiculaire $F d' m$, la droite $n_1 c'$ qui joint ce point n_1 à celui c sera la tangente cherchée.

On aurait pu aussi déterminer le point c du cercle homologue, du point c' de l'ellipse, la tangente $c\,t$ au cercle rencontre l'axe d'homologie TT' en t par où doit passer la tangente $n\,c'\,t$ à l'ellipse au point c.

Pour mener une tangente à l'ellipse parallèlement à une droite donnée Fu, on prolonge cette droite Fu jusqu'à son intersection en u avec la droite JJ_1, de ce point on mène la tangente $u\,t\,c$ au cercle, cette tangente rencontre l'axe TT_1 en t, et alors tc parallèle à Fu sera la tangente cherchée. Cette tangente passera évidemment par le point n_1 intersection de la droite II_1 avec la droite Fn_1, menée par F parallèle à la tangente $u\,t\,c$ du cercle.

On trouverait facilement la tangente à l'ellipse par un point extérieur.

Le théorème 2 des relations métriques indique cette propriété de deux figures perspectives réciproques.

Le rapport des distances de deux points homologues c et c', au point de vue V est égal à la distance du point c à la droite JJ_1, divisée par la constante d, ou bien est égal à la constante h, divisée par la distance du point c' à la droite II_1. On se rappelle que nous avons désigné par d la distance $q\,r$, de la droite TT_1 à celle JJ_1, distance qui, sur la figure est égale à celle Fs du foyer F à sa directrice II_1; et que nous avons désigné par h la distance du point de vue V à la droite JJ_1 qui est égale à celle qui sépare les droites II_1 TT_1. Le point de vue est ici le foyer F.

Ce théorème appliqué à la figure donne donc :

$$\frac{Fc}{Fc'} = \frac{ce}{d},$$

ou :

$$\frac{Fc}{Fc'} = \frac{h}{c'k_1}.$$

La relation :

$$\frac{Fc}{Fc'} = \frac{h}{c'k},$$

nous donne :

$$\frac{Fc'}{c'k} = \frac{Fc}{h} = \frac{R}{h} = \text{constante}.$$

On a donc cet important théorème :

Dans une ellipse, le rapport des distances d'un point quelconque de la courbe, au foyer et à sa directrice, est constant, et nous ajouterons est égal au rapport $\frac{R}{h}$, *du rayon du cercle homologue, à la distance* Fr *du foyer à la droite* JJ_1.

Si le point c' de l'ellipse était en a' à l'extrémité a' du grand axe, on aurait de même :

$$\frac{a'\mathrm{F}}{a's}=\frac{\mathrm{R}}{h},$$

s'il était à l'autre extrémité a'_1 du grand axe, on aurait :

$$\frac{a'_1\mathrm{F}}{a'_1 s}=\frac{\mathrm{R}}{h};$$

on tire de là :

$$\frac{a'\mathrm{F}+a's}{a'\mathrm{F}}=\frac{h+\mathrm{R}}{\mathrm{R}}, \quad \frac{a'_1 s-a'_1\mathrm{F}}{a'_1\mathrm{F}}=\frac{h-\mathrm{R}}{\mathrm{R}};$$

ou bien :

$$\frac{a'\mathrm{F}+a's}{a's}=\frac{h+\mathrm{R}}{h}, \quad \frac{a'_1-a'_1\mathrm{F}}{a'_1 s}=\frac{h-\mathrm{R}}{h};$$

mais :

$$a'\mathrm{F}+a's=\mathrm{F}s=d, \quad a'_1 s-a'_1\mathrm{F}=d;$$

donc on a :

$$\frac{d}{a'\mathrm{F}}=\frac{h+r}{\mathrm{R}}, \ \frac{d}{a'_1\mathrm{F}}=\frac{h-\mathrm{R}}{\mathrm{R}}, \ \frac{d}{a's}=\frac{h+\mathrm{R}}{h}, \ \frac{d}{a'_1 s}=\frac{h-\mathrm{R}}{h};$$

d'où on tire :

$$\mathrm{F}a'=\frac{d.\mathrm{R}}{h+\mathrm{R}}, \ \mathrm{F}a'_1=\frac{d.\mathrm{R}}{h-\mathrm{R}}, \ a's=\frac{h.d}{h+\mathrm{R}}, \ a'_1 s=\frac{h.d}{h-\mathrm{R}};$$

expressions des distances des extrémités du grand axe à un foyer et à sa directrice.

Le grand axe $a\,a_1$ de l'ellipse étant désigné par 2 A, on a :

$$A = \frac{a'_1 s - a's}{2} = \frac{h.d}{h-R} - \frac{h.d}{h+R} = \frac{h.d.R}{h^2-R^2}.$$

La distance du centre de la courbe à la directrice sera :

$$Ps = Pa' + a's = A + a's = \frac{h.d.R}{h^2-R^2} + \frac{h.d}{h+R} = \frac{d.h^2}{h^2-R^2};$$

Celle du centre au foyer sera :

$$PF = Pa' - Fa' = A - Fa' = \frac{h.d.R}{h^2-R^2} - \frac{d.R}{h+R} = \frac{d.R^2}{h^2-R^2}.$$

La distance du foyer à l'extrémité b'_1 du petit axe sera :

$$Fb = Ps.\frac{R}{h} = \frac{d.h^2}{h^2-R^2}.\frac{R}{h} = \frac{d.h.R}{h^2-R^2} = A =$$

égale au demi grand axe.

La grandeur P b du petit axe sera donc :

$$Pb = \sqrt{\overline{Fb}^2 - \overline{PF}^2} = \frac{d.R}{\sqrt{h^2-R^2}}. = B.$$

d'où :

$$\overline{PF}^2 = A^2 - B^2.$$

La droite $c'e$ parallèle au grand axe rencontre la courbe en un second point d' et on a alors pour ces points c' et d' :

$$\frac{Fc'}{c'e} = \frac{R}{h},$$

et :

$$\frac{Fd'}{d'e} = \frac{R}{h};$$

d'où :

$$\frac{Fc'}{c'e} = \frac{Fd'}{d'e};$$

d'où on tire :

$$\frac{Fc'}{Fd'} = \frac{c'e}{d'e},$$

et par suite :

$$\frac{Fc' + Fd'}{Fc'} = \frac{c'e + d'e}{c'e};$$

d'où :

$$\frac{Fc + Fd'}{c'e + d'e} = \frac{Fc'}{c'e} = \frac{R}{h}.$$

Mais la distance du point c' à la directrice II_1 est évidemment égale à celle du point d' à l'autre directrice ii. De sorte que :

$$c'e + d'e = ss_1 = 2.Ps = 2.\frac{d.h^2}{h^2 - R^2},$$

donc :

$$Fc' + Fd' = Fc' + F_1c' = 2.\frac{d.h^2}{h^2 - R^2}.\frac{R}{h} = 2.\frac{h.d.R}{h^2 - R^2} = 2.A.$$

On a donc ce théorème principal.

Dans une ellipse, la somme des distances d'un point quelconque de la courbe aux deux foyers est constante et égale au grand axe. Ce qui donne un moyen de construire cette courbe, par points, ou d'un mouvement continu. On voit aussi que ;

La somme des distances d'un foyer aux deux extrémités d'un diamètre est égale au grand axe.

Si le point c' de la courbe était situé sur une perpendiculaire élevée en F sur le grand axe, alors la distance $c'e$ de ce point à la directrice deviendrait égale à celle $Fs = d$ du foyer à la directrice ; on aurait donc dans ce cas :

$$Fc' = \frac{d.R}{h}.$$

Fc' est alors ce qu'on appelle le *paramètre* de la courbe, c'est l'ordonnée du foyer.

Nous avons trouvé :

$$A = \frac{h.d.R}{h^2 - R^2},$$

et :

$$B = \frac{d.R}{\sqrt{h^2 - R^2}};$$

on en tire :

$$\frac{A}{B} = \frac{h}{\sqrt{h^2 - R^2}},$$

et :

$$\frac{B^2}{A} = \frac{d.R}{h} = \text{paramètre.}$$

Donc le paramètre trouvé ci-dessus est égal au carré du $1/2$ petit axe, divisé par la moitié du grand.

Nous avons trouvé :

$$Fa' = \frac{d.R}{h+R}, \quad Fa'_1 = \frac{d.R}{h-R}.$$

En faisant le produit on aura :

$$Fa'.Fa'_1 = \frac{d^2.R^2}{h^2 - R^2} = B^2;$$

donc :

Dans une ellipse le produit des distances d'un sommet de la courbe aux deux foyers est égal au carré du $^1/_2$ *petit axe.*

Si sur le grand axe comme diamètre on décrit une circonférence, le carré de la perpendiculaire élevée en un des foyers jusqu'à cette circonférence sera égal au carré du petit axe.

En divisant on a :

$$\frac{Fa'}{Fa'_1} = \frac{h - R}{h + R} = \frac{ra_1}{ra} .$$

C'est-à-dire que :

Dans une ellipse le rapport des distances d'un foyer de la courbe aux deux sommets a', a'_1 *est égal à celui des distances du point* r *où le grand axe rencontre la droite* JJ_1 *aux deux extrémités* a_1, a *du diamètre du cercle homologue au grand axe de l'ellipse.*

Le rapport des distances d'un foyer de la courbe aux deux sommets a'_1 a'_1 *est égal à celui des distances du point* P *pôle de* $J J_1$, *aux deux extrémités* a_1, a *du diamètre du cercle homologue au grand axe de l'ellipse.*

Le théorème 2 nous a donné :

$$\frac{Fc}{Fc'} = \frac{ce}{d};$$

d'où :

$$Fc'.ce = Fc.d = R.d = \text{const}.$$

c'est-à-dire que :

Dans une ellipse, le produit des distances d'un point quelconque de la courbe, à son foyer, par la distance du point homologue de la circonférence à la droite J J, *est une constante* R. d.

Si le point c' était en a' ou a'_1, on aurait :

$$Fa'.a'r = R.d = Fa'_1.a'_1 r.$$

Si le point c' était en b' à l'extrémité du petit axe, on aurait :

$$Fb.P'r = R.d;$$

mais on a déjà trouvé :

$$Fb = P's.\frac{R}{h},$$

donc on a :

$$P's.Pr = d.h.$$

c'est-à-dire que :

Dans l'ellipse le produit des distances du centre de la courbe à la droite JJ_1, *par celle à* II_1, *est égal à* d. h.

Pour une corde $c'Fc_1$ passant par le foyer on a :

$$Fc' = \frac{R.d}{ce}, \quad Fc'_1 = \frac{R.d}{c_1e_1},$$

donc :

$$Fc'.Fc'_1 = \frac{R^2.d^2}{ce.c_1e_1};$$

on aurait de même pour une autre corde $d'Fd'_1$ passant par le même foyer :

$$Fd'.Fd'_1 = \frac{R^2.d^2}{dg.d_1g_1},$$

donc :

$$\frac{Fc'.Fc'_1}{Fd_1Fd_1} = \frac{dg.d_1g_1}{ce.c_1e_1}.$$

On aurait pareillement :

$$Fc' + Fc'_1 = R.d\left(\frac{1}{ce} + \frac{1}{c_1e_1}\right),$$

et :

$$Fd'_1Fd'_1 = R.d.\left(\frac{1}{dg} + \frac{1}{d_1g_1}\right);$$

donc :

$$\frac{Fc' + Fc'_1}{Fd + Fd_1} = \left(\frac{1}{ce} + \frac{1}{c_1e_1}\right) : \left(\frac{1}{dg} + \frac{1}{d_1g_1}\right) = \frac{dg + d_1g_1}{ce + c_1e_1} \cdot \frac{ce + c_1e_1}{dg + d_1g_1};$$

mais :

$$ce + c_1 e_1 = dg + d_1 g_1 = 2.\,\mathrm{F}r,$$

donc on a :

$$\frac{\mathrm{F}c'.\,\mathrm{F}c'_1}{\mathrm{F}d'.\,\mathrm{F}d'_1} = \frac{\mathrm{F}c' + \mathrm{F}c'_1}{\mathrm{F}d' + \mathrm{F}d'_1};$$

si on appelle A_1, B_1 les diamètres de l'ellipse, parallèles aux cordes $c'\mathrm{F}c'_1$, $d'\mathrm{F}d_1$, on a déjà trouvé que :

$$\frac{\mathrm{F}c'.\,\mathrm{F}c'_1}{\mathrm{F}d.\,\mathrm{F}d'_1} = \frac{A_1{}^2}{B^1{}_2},$$

donc :

$$\frac{\mathrm{F}c' + \mathrm{F}c'_1}{\mathrm{F}d + \mathrm{F}d'_1} = \frac{c'c'_1}{d'd'_1} = \frac{A_1{}^2}{B^2}.$$

On a ainsi le théorème :

Dans une ellipse, les cordes qui passent par un foyer sont proportionnelles aux carrés des diamètres qui leur sont parallèles.

Deux cordes qui se coupent au foyer de la conique sont telles que le rapport des deux produits des deux segments sur chaque corde déterminée par ce foyer est égal à celui des deux sommes des mêmes segments.

or :

$$\frac{\mathrm{F}c' + \mathrm{F}c'_1}{\mathrm{F}c'.\,\mathrm{F}c'_1} = \frac{\mathrm{F}d' + \mathrm{F}d'_1}{\mathrm{F}d'.\,\mathrm{F}d'_1},$$

peut se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{Fc'}+\frac{1}{Fc'_1}=\frac{1}{Fd'}+\frac{1}{Fd'_1}.$$

Donc on peut dire :

Si autour d'un foyer on fait tourner une droite qui rencontrera la courbe en deux points, la somme des valeurs inverses des distances de ces points au foyer est constante.

Des angles dont le sommet est au foyer d'une ellipse.

Supposons (fig. 47) un rectangle quelconque *cdef* inscrit dans la circonférence, les diagonales se coupent en parties égales, au centre O; menons les tangentes à la circonférence aux sommets de ce rectangle, nous formerons le parallélogramme *ghij*, qui sera un losange, ses diagonales se couperont de même au centre, en parties égales, les deux diagonales seront parallèles respectivement aux côtés du rectangle inscrit, elles seront donc rectangulaires entr'elles, et elles diviseront en parties égales les angles formés par les diagonales du rectangle inscrit, ainsi que les angles formés par les côtés du losange circonscrit.

Si nous construisons le quadrilatère inscrit et celui circonscrit à l'ellipse et homologues à ceux de la circonférence, on aura deux quadrilatères, dont les diagonales seront, en direction, celle du rectangle inscrit et du losange circonscrit. On peut donc en tirer cette suite de propositions.

Si, dans une ellipse, on a un quadrilatère inscrit tel que les diagonales se coupent en un des foyers et si on forme le quadrilatère circonscrit aux sommets du premier, on aura :

Les côtés opposés du parallélogramme inscrit auront leurs points de concours sur les diagonales du parallélogramme circonscrit, aux points d'intersection de ces derniers et de la directrice II_1. *Ces deux diagonales seront rectangulaires. — Elles diviseront en deux parties égales, les angles* c'Od', c'Of' *formés par les diagonales du quadrilatère inscrit, angles qui comprennent entr'eux les côtés de ce quadrilatère. Elles diviseront également en parties égales les angles formés par les droites* FI_1 FI_1 *qui joignent le foyer* F *aux points de concours* I_1 I_1 *des côtés opposés du quadrilatère circonscrit. — Les* *points de concours* k, k_1 l, l_1 *sont tous situés sur la directrice* $I\,I_1$.

Il suit de là évidemment que :

Si, dans une ellipse, on a une corde quelconque c'f' *inscrite, et qu'on forme l'angle* c'j'f' *circonscrit aux extrémités de cette corde, les droites* Fk, Fj'k$_1$ *qui joignent le foyer* F *au point* k, *ou la corde* c'f' *rencontre la directrice et au point* j' *sommet de l'angle circonscrit, se couperont toujours à angle droit et diviseront en deux parties égales l'angle et le supplément de l'angle* c'Ff'.

Si un angle est circonscrit à une ellipse, la droite qui joint son sommet au foyer divise en deux parties égales l'angle formé par les rayons menés du foyer aux deux points de contact.

On sait que si, à une circonférence, on a deux tangentes fixes, la partie d'une 3^{e} tangente quelconque, comprise entre les côtés de l'angle circonscrit, soustend au centre un angle constant; ce résultat est applicable à l'ellipse, on a donc :

L'angle sous lequel on voit de l'un des foyers la partie d'une tangente mobile, interceptée entre deux tangentes fixes, est constant pour toutes les positions de cette tangente mobile.

La tangente mobile peut prendre la position de l'un ou de l'autre côté de l'angle circonscrit, on peut donc ajouter à la proposition ci-dessus que : *l'angle soustendu par la partie interceptée de la tangente mobile est égal à ceux soustendus par les parties des tangentes fixes comprises entre le sommet de l'angle circonscrit et le point de tangence de la tangente fixe considérée.*

On peut donc avoir par suite une infinité de positions de la tangente mobile, lorsqu'on a déjà deux tangentes à la courbe et un de ses foyers. Il suffit de tracer un angle, qui ait son sommet à ce foyer et qui soit égal à celui soustendu à ce foyer par les deux rayons qui le joignent au sommet de l'angle circonscrit et à l'un des points de tangence; cet angle rencontrera les deux côtés de l'angle circonscrit en deux points; la droite qui joindra ces deux points sera une tangente à la courbe.

On peut en conclure que :

Si dans un plan on a un angle fixe et qu'autour d'un point quelconque du plan on fasse tourner les côtés d'un angle mobile, mais de grandeur constante, un côté de l'angle mobile rencontrera un des côtés de l'angle fixe et l'autre rencontrera l'autre, et la droite qui joindra les deux points dans toutes les positions, sera tangente à une même conique ayant *le sommet de l'angle mobile pour foyer et les côtés de l'angle fixe pour tangentes; les points de tangence seront déterminés lorsqu'un des côtés de l'angle mobile passera par le sommet de l'angle fixe.*

Désignons par m,n les deux extrémités de la partie de la tangente mobile interceptée par les deux tangentes fixes; l'angle $m\mathrm{F}n$ est donc constant pour le foyer F; mais si on change de foyer, il est évident que l'angle $m\mathrm{F}_1n$ dont le sommet est en F_1 est aussi constant, seulement entre ces deux angles $m\mathrm{F}n$, $m\mathrm{F}_1n$ il y a une relation; en effet : si le point n est sur la droite FF_1 qui joint les deux foyers, les deux rayons vecteurs $\mathrm{F}n$, F_1n auront même direction; et alors, quelle que soit la position correspondante du point m sur l'autre tangente, entre les angles $m\mathrm{FF}_1$ et $m\mathrm{F}_1\mathrm{F}$ il y aura la relation :

$$\frac{\sin. m\mathrm{FF}_1}{\sin. m\mathrm{F}_1\mathrm{F}} = \frac{m\mathrm{F}_1}{m\mathrm{F}};$$

rapport qui doit être celui des deux angles $m\mathrm{F}n$, $m\mathrm{F}_1n$, puisque ces deux angles sont constants.

On peut en conclure les divers théorèmes suivants :

Si, dans un plan, on a une droite et deux points fixes F *et* F_1 *et qu'on joigne un point quelconque* m *de la droite fixe avec ces deux points, on déterminera ainsi deux angles* mFF_1, mF_1F ; *et si on suppose maintenant que ces deux angles tournent autour de leur sommet respectif* F, F_1 *de manière que les deux côtés* mF, mF_1 *de ces angles se coupent toujours sur la droite fixe, les deux autres se couperont en un point* n *d'une seconde droite.*

Les droites mn *qui joindront les positions correspondantes des couples* de points *m* et *n seront des* tangentes *à une ellipse, dont les points* F_1 F_1 seront les foyers, *et qui sera tangente à la droite fixe et à celle décrite par le point* n.

Si entre les deux angles il n'y avait aucune relation, nous verrons plus loin qu'alors, le point *n* décrirait une conique.

Reprenons la proposition que : la partie d'une tangente mobile interceptée par deux tangentes fixes, est toujours vue de chacun des foyers sous un angle constant. Supposons (fig. 48) que les deux tangentes fixes soient parallèles, les points de tangence seront donc aux extrémités du diamètre conjugué à la direction des tangentes fixes, et le théorème ci-dessus a toujours lieu; soit, par exemple, mn la portion de cette tangente mobile interceptée entre les deux tangentes parallèles mm_1, nn_1; il s'en suivra que l'angle mFn sera constant ainsi que celui mF_1n, quelle que soit la direction de la tangente mobile; lorsque le point m sera en m_1 au point de tangence m_1, alors le point n sera le point r_1 d'intersection des deux tangentes, il se trouvera donc à l'infini, de sorte que l'angle mFn deviendra l'angle du rayon vecteur Fm_1 et de la droite Fr, parallèles aux deux tangentes, ou au diamètre conjugué à leur direction; de même l'angle mF_1n sera égal à l'angle $m_1F_1r_1$ formé par le rayon vecteur F_1m_1 et la parallèle F_1r_1 à ce même diamètre conjugué; or du parallélisme des deux tangentes, il résulte évidemment que l'angle Fm_1F_1 formé, au point de tangence m_1, par les deux rayons vecteurs Fm_1, F_1m_1 est la différence des deux angles ci-dessus m_1Fr, $m_1F_1r_1$ et comme l'angle m_1Fr est toujours égal à celui mFn, que l'angle $m_1F_1r_1$ est égal à celui mF_1n, il en résultera que : (*dans toutes les positions de la tangente mobile, la différence des angles, sous lesquels des foyers* F,F_1 *est vue la partie interceptée de cette tangente, est constante et égale à l'angle* F m F_1 *sous le-*

quel est vue, du point de tangence m_1, *la distance* FF_1 *entre les deux foyers.*

Si les tangentes fixes sont des tangentes aux extrémités a, a_1 du grand axe, et que m_2n_2 soit une tangente mobile, les angles m_2Fn_2, $m_2F_1n_2$ seront droits; on aura donc ce théorème :

Dans une ellipse, la partie d'une tangente mobile comprise entre les tangentes aux extrémités de son grand axe, est vue de chacun des foyers sous un angle droit.

On peut en conclure que :

Si dans une ellipse on connaît la partie d'une de ses tangentes, interceptée entre les deux tangentes aux extrémités de son grand axe, en décrivant une circonférence sur cette partie m_2n_2 *comme diamètre, elle passera par les deux foyers.*

Ce qui peut servir à les déterminer.

Si les tangentes fixes sont des tangentes aux extrémités du petit axe, la différence des angles sous lesquels des foyers on voit la partie d'une tangente quelconque, interceptée entre ces deux tangentes parallèles, est égale à l'angle des deux rayons vecteurs menés à l'un des sommets du petit axe.

Considérons (fig. 48) une tangente quelconque m_2n_2, soit c son point de tangence, cette droite étant prolongée, rencontre les deux directrices en des points d, d_1 et les tangentes aux sommets du grand axe, aux points m_2, n_2, soit gcg_1 la perpendiculaire aux directrices, menées du point de tangence c; nous avons démontré que dans une ellipse la distance d'un point de la courbe au foyer divisée par celle du même point à la directrice, est une constante, on a donc :

$$\frac{cF}{cg} = \text{constante} = \frac{cF_1}{cg_1},$$

d'où :

$$\frac{cF}{cF_1} = \frac{cg}{cg_1};$$

mais les deux triangles cdg, cd_1g_1 sont semblables, donc :

$$\frac{cg}{cg_1} = \frac{cd}{cd_1} = \frac{cF}{cF_1} = \frac{dg}{d_1g_1}.$$

Ainsi on a :

Dans une ellipse, la partie d'une tangente interceptée entre les deux directrices est divisée au point de tangence en deux segments, dont le rapport est égal à celui des deux rayons vecteurs menés au point de tangence.

Les deux triangles cFd, cF_1d_1 sont rectangles,

les deux côtés cd, cF sont proportionnels aux deux côtés cd_1, cF$_1$, donc ils sont semblables et alors l'angle $\mathrm{F}cd = \mathrm{F}_1cd_1$ et celui $\mathrm{F}dc = \mathrm{F}_1d_1c$. Donc :

Dans une ellipse, les rayons vecteurs au point de tangence, font de chaque côté, des angles égaux avec cette tangente.

Les deux rayons menés des foyers aux points respectifs d'intersection d'une tangente avec les directrices, font des angles égaux avec cette tangente.

Le rapport de ces deux rayons est égal à celui des rayons vecteurs au point de tangence.

D'où il résulte que *les angles* hcF, hcF$_1$ *de la normale* hc *au point de tangence, avec les rayons vecteurs* cF, cF$_1$ *sont égaux respectivement aux angles* cdF, cd$_1$F$_1$, *que font avec la tangente, les rayons* Fd, F$_1$d$_1$ *menés aux points* d, d_1 *où la tangente rencontre les directrices.*

Des foyers F, F$_1$, abaissons sur la tangente les perpendiculaires $\mathrm{F}p$, $\mathrm{F}p_1$, elles sont aussi proportionnelles aux rayons vecteurs $\mathrm{F}c$, F_1c, donc :

Les perpendiculaires abaissées d'un foyer sur des tangentes, sont entr'elles comme les rayons vecteurs du point de tangence.

Les angles $d\mathrm{F}c$, $m_2\mathrm{F}n_2$ étant droits, il en résulte que les quatre points d, m_2, c, n_2 forment une involution ; le point p, pied de la perpendiculaire Fp, est le centre de cette involution, de sorte qu'on a :

$$\overline{Fp}^2 = \overline{pd}.\overline{pc} = \overline{pm_2}.\overline{pn_2};$$

trois de ces points d, m_2, c, n_2 étant connus, le quatrième sera alors déterminé.

Si l'on prolonge la perpendiculaire Fp jusqu'à son intersection en f avec le rayon vecteur F_1c, alors l'angle :

$$pcf = p_1cF_1 = pcF,$$

donc on a :

$$pF = pf,$$

et :

$$cF = cF_1;$$

ce qui donne le moyen de mener une tangente en un point donné de la courbe.

On trace les deux rayons vecteurs Fc, F_1c, on prolonge l'un d'eux d'une longueur égale à l'autre, on joint l'extrémité f ainsi obtenue à l'autre foyer; la tangente sera la perpendiculaire pc mené du point c sur cette droite fF.

Si on joint le point p milieu de fF, au centre P de la courbe, qui est le milieu de la distance FF_1 entre les foyers, cette longueur Pp sera moitié de :

$$F_1 cf = Fc + cF = 2.A,$$

et par conséquent égale au $1/2$ grand axe A. Il en sera de même de celle Pp_1, donc :

Dans une ellipse, les pieds des perpendiculaires abaissées des deux fogers sur les tangentes à la courbe, sont tous situés sur une circonférence décrite sur le grand axe aa_1 *de la courbe comme diamètre; il en est de même pour les pieds des obliques également inclinées dans le même sens sur les tangentes.*

La droite menée du centre de la courbe au pied d'une de ces perpendiculaires est parallèle au rayon vecteur mené de l'autre foyer au point de tangence.

Prolongeons les perpendiculaires Fp, F_1p_1 jusqu'à leurs intersections avec la circonférence décrite sur le grand axe en q et q_1, il est évident que la figure $pp_1\ qq_1$ sera un rectangle inscrit à la circonférence, dont les côtés opposés pp_1, qq_1 seront des tangentes à l'ellipse, parallèles aux extrémités du diamètre cc_1 et que les deux autres côtés opposés et parallèles passeront toujours par les foyers F, F_1 ; on voit en outre que le grand axe aa_1 partagera les deux côtés opposés pq, p_1q_1 en deux parties qui seront telles que $Fp = F_1q_1$ et $Fq = F_1p_1$; or les deux droites aa_1, pq étant considérées comme deux cordes de la circonférence, on a :

$$Fp.Fq = Fa.Fa_1 = (Pa - PF)(Pa_1 + PF) =$$
$$= \left(A - \sqrt{A^2 - B^2}\right)\left(A + \sqrt{A^2 - B^2}\right) = B^2\,;$$

mais :

$$Fq = F_1p_1,$$

donc :

$$Fp.\,F_1p_1 = B^2.$$

Le produit des perpendiculaires abaissées des foyers sur une tangente est égal au carré du demi petit axe.

On peut déduire de la proposition ci-dessus :

Si dans une circonférence, on a un angle droit dont le sommet se meut sur une circonférence et dont un des côtés passe toujours par un point intérieur à la circonférence, le deuxième côté sera *toujours tangent à une ellipse ayant le point fixe pour foyer et pour grand axe le diamètre de la circonférence qui passe par ce point. Il y aura nécessairement un second triangle correspondant à une même tangente et dont le deuxième côté passera par le second foyer.*

Ce théorème peut servir à décrire une ellipse par l'enveloppe de ses tangentes; connaissant le grand axe et un foyer. On obtiendra le point de tangence d'une tangente, en menant par le point fixe, ou foyer, une parallèle au diamètre qui joint les points d'intersection de la circonférence et des côtés de l'angle droit, un de ces points étant le pied de la perpendiculaire abaissée du second foyer sur la tangente considérée.

Soient (fig. 49) Fc, F_1c les deux rayons vecteurs menés des foyers au point de tangence c de la tangente cd, menons par le centre P de la courbe une parallèle hPh_1 à la tangente cd, elle rencontre les deux rayons vecteurs Fc, F_1c aux points h, h_1. Par le foyer F menons Fi parallèle à la tangente cd, elle rencontre l'autre rayon vecteur F_1c au point i. Les deux triangles hch_1 Fci sont isocèles, de sorte qu'on a $Fh = ih_1$; mais puisque P est le milieu de FF_1 on a aussi $ih_1 = h_1F_1$ et alors :

$Fc + F_1c = 2.A = ch - Fh + ch_1 + F_1h_1 = 2.ch.$

Donc :

Dans une ellipse, la partie du rayon vecteur mené d'un foyer à un point c *de tangence, comprise entre ce point* c *et le diamètre* hPh_1 *parallèle à la tangente, est égale au demi grand axe de la courbe.*

Soient (fig 49), dc, dc_1 deux tangentes menées à une ellipse par un point extérieur d. La droite Fd qui joint le foyer F au point d d'intersection des deux tangentes, partage en deux parties égales, l'angle cFc_1 des rayons vecteurs menés du foyer F aux deux points de tangence c et c_1; de même F_1d partage en deux parties égales l'angle cF_1c_1; ce qui donne le moyen d'obtenir le point de concours des tangentes en deux points donnés sur la courbe.

On a de plus entre les angles :

$$gcF = cFd + cdF, \quad gcF_1 = cF_1d + cdF_1,$$

ajoutant :

$$gcF + gcF_1 = 200^g = (cFd + cF_1d) + (cdF + cdF_1);$$

on aurait de même :

$$200^g = (c_1Fd + c_1F_1d) + (c_1dF + c_1dF_1);$$

mais :

$$cFd = c_1Fd, \quad c_1F_1d = cF_1d,$$

donc :

$$cdF + cdF_1 = c_1dF + c_1dF_1.$$

Retranchant l'angle commun FdF_1, il restera :

$$cdF = c_1dF_1.$$

On en conclut donc :

Les droites qui joignent le sommet d'un angle circonscrit à une ellipse, aux deux foyers, forment des angles égaux avec les tangentes, et par conséquent avec les droites qui divisent en parties égales, l'angle ou le supplément de l'angle des deux tangentes.

La tangente, la normale et les deux rayons vecteurs menés des foyers à un point quelconque c de la courbe, forment un faisceau harmonique de quatre droites; *toute transversale coupe donc ces quatre droites en quatre points formant un rapport harmonique entre les segments.*

On peut en tirer plusieurs conséquences; ainsi on voit que toute transversale parallèle à une de ces quatre droites, est divisée par les trois autres en deux segments égaux; ainsi si par le centre P de la courbe on mène une parallèle à une tangente, la partie de cette parallèle comprise entre les deux rayons vecteurs du point de tangence, sera partagée en deux parties égales par la normale; ou bien si par un des foyers on mène une parallèle au rayon vecteur mené de l'autre foyer au point de tangence, le segment, sur cette parallèle comprise entre la tangente et la normale, sera divisé en deux parties égales en ce premier foyer, etc.

Soit g le point d'intersection d'une tangente cg à la courbe avec le grand axe aa_1 et g_1 celui de la normale cg_1 avec ce même axe; puisque les quatre droites cg, cg_1, $c\mathrm{F}$, $c\mathrm{F}_1$ forment un faisceau harmonique, il en résulte que les quatre points g, g_1, F, F_1 forment aussi des segments harmoniques, on a donc :

$$\frac{g\mathrm{F}}{g\mathrm{F}_1}=\frac{g_1\mathrm{F}}{g_1\mathrm{F}_1},$$

ou :

$$g\mathrm{F}.g_1\mathrm{F}_1=g\mathrm{F}_1.g_1\mathrm{F};$$

mais :

$$g\mathrm{F}=g\mathrm{P}-\mathrm{PF},\ \ g\mathrm{F}_1=g\mathrm{P}+\mathrm{PF},$$

$$g_1\mathrm{F}=\mathrm{PF}-\mathrm{P}g_1,\ \ g_1\mathrm{F}_1=\mathrm{PF}+\mathrm{P}g_1.$$

Donc :

$$(g\text{P}-\text{PF})(\text{PF}+\text{P}g_1)=(g\text{P}+\text{PF})(\text{PF}-\text{P}g_1);$$

d'où on tire :

$$\overline{\text{PF}}^2=\text{P}g\,.\text{P}g_1\,.$$

Pour un autre point quelconque de la courbe on aurait deux autres points g, g_1 mais pour lesquels, le produit de leurs distances serait toujours égal à $\overline{\text{PF}}^2$; à ce caractère on reconnaît que les divers couples de points g, g_1 pour les divers points de la courbe, forment une involution dont les points F, F_1 sont les points doubles :

On a donc ce théorème :

Dans une ellipse, les points d'intersection avec le grand axe, de la tangente et de la normale aux divers points de la courbe, forment une involution, dont le centre est le centre même de la courbe, et le deux foyers sont les points doubles.

Ce théorème va nous permettre de résoudre le problème de déterminer, *à priori*, sur le cercle, les points qui, en perspective, deviennent les foyers.

Reprenons (fig. 50) les dispositions de la figure 35 qui nous donne le tracé de l'ellipse pour un point de vue V. Le théorème dit que la tangente et la normale en chaque point de l'ellipse, déterminent sur le grand axe une involution dont les foyers sont les points doubles; si nous joignons tous les points de cette involution avec le point de vue V, nous aurons un faisceau en involution, dans lequel les droites qui joignent ce point V aux foyers seront les rayons doubles; or, un faisceau en involution est coupé par une transversale en des points formant sur cette droite une involution, dont les points doubles seront de même donnés par l'intersection de cette droite et des rayons doubles du faisceau. Le grand axe $a'a'_1$ de l'ellipse a pour homologue dans le cercle la droite $ma\mathrm{P}a_1$ que nous avons appris à déterminer au moyen des points m,n, ils se trouvent aux points d'intersection de la droite TT_1 avec une demi-circonférence passant par les points V et O'', donc le faisceau en involution coupera cette droite $ma\mathrm{P}a_1$ en des points homologues à ceux qui sont sur l'axe de l'ellipse, et formeront sur cette droite une involution de points, dont les points doubles seront les homologues des points doubles de l'axe, c'est-à-dire des foyers. Il s'agit de construire, *à priori*, cette involution sur cette droite $maPa_1$ pour avoir les points doubles homologues des foyers.

Si on décrit une série de circonférences ayant leur centre sur la droite JJ_1 et passant par le point V, chacune d'elle détermine sur cette droite deux points m_1, n_1, qui seront tels que les deux systèmes de droites appartenant à la circonférence et qui ont ces deux points de concours, deviendront, dans l'ellipse, deux systèmes de droites parallèles à Vm_1 Vn_1, donc ces deux systèmes seront rectangulaires, ainsi, par exemple, par le point m_1 menons à la circonférence la tangente m_1c, joignons son point de tangence c avec le point conjugué n_1, alors les droites homologues $c'e$, $c'e_1$ seront rectangulaires, l'une sera la tangente à l'ellipse et l'autre la normale, et elles rencontreront le grand axe aa_1 de cette courbe en des points g', g'_1 qui seront les homologues de ceux g, g_1 ou les deux droites cm_1, cn_1 du cercle rencontre la transversale $maPa_1$ homologue de cet axe. On voit donc comment on peut obtenir une série de couples de points en involution sur cette droite. Les points P et m sont déjà connus ; ils correspondent aux points m, n déterminés par la circonférence qui passe par les deux points V et O″; ainsi cette involution étant connue par les quatre points g, g_1 P, m; on sait déterminer le centre de cette involution et ensuite les points doubles F, F_1 qui seront les homologues cherchés des foyers.

Nous remarquerons que les segments gg_1; Pm, etc., n'empiètent pas les uns sur les autres, de sorte que les points doubles sont réels; mais si par la même construction on avait pris l'involution sur la droite bb_1 homologue du petit axe de l'ellipse, on aurait trouvé des segments empiétant les uns sur les autres, de sorte que les deux points doubles seraient imaginaires; c'est ce qui peut justifier cet énoncé, que l'ellipse a 4 foyers dont deux, sur le petit axe, sont imaginaires.

Cette proposition a été donnée en premier par Desargues (voir ses ouvrages et un article des *Annales de Mathématiques*, *année* 1864, *page* 202, où j'ai cherché à exposer ses démonstrations bien longues).

(Je m'aperçois, en relisant cet article, p. 216-217, qu'il peut induire en erreur; il doit y être bien entendu que c'est la tangente et la normale qui divisent en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs, et non les rayons vecteurs qui divisent en parties égales l'angle droit de la tangente et de la normale.)

POINT DE VUE AU PÔLE.

Les données étant les mêmes que dans les fig. 45 et 46, nous supposons que le point de vue V se trouve (fig. 51) au pôle P de la droite JJ_1.

La construction de l'ellipse, qui sera la perspective du cercle pour cette position du point de vue, s'exécutera comme la précédente. Le point Q étant déterminé, toute circonférence ayant son centre sur la droite $J J_1$ et qui passera par ce point Q, déterminera sur cette droite $J J_1$ deux points conjugués m et n; on voit que, puisque le point P se confond avec celui V, toute corde du cercle passant par le point P devient un diamètre de l'ellipse, dont ce point P est le centre ; ces diamètres se confondront en direction avec les cordes respectives; à une corde passant par le point m, correspondra un diamètre passant aussi par ce point et il sera conjugué au diamètre passant par le point n conjugué de celui m. Comme dans le cas examiné précédemment, les points V et Q étant sur une même perpendiculaire à la droite $J J_1$, il s'en suit que la circonférence, dont le centre est sur JJ_1 qui doit passer par ces deux points P, Q, se réduit à la perpendiculaire O Q P r, de sorte que le point r est un des points m ou n et l'autre est sur cette droite à l'infini; d'où résulte que la direction des deux axes de l'ellipse seront, en direction, pour l'un, la perpendiculaire O Q P r et pour l'autre, la droite b P b_1 perpendiculaire à la première; les points a, a_1 seront donc les homologues de ceux a', a'_1 extrémités d'un des axes, et b, b_1 ceux homologues des extrémités b', b'_1 de l'autre; il sera donc facile de les déterminer comme on le voit sur la figure.

Le rapport des axes sera $\frac{rV}{rQ}$. Or lorsque le point de vue était au centre du cercle, rV était plus grand que rQ, de sorte que $a' a'_1$ était le grand axe de la courbe et $b' b'_1$ le petit, mais, dans le cas actuel, rV est plus petit que rQ, de sorte que $a' a'_1$ est le petit axe et $b' b'_1$ le grand.

On peut trouver facilement les grandeurs absolues de ces axes. Désignons par D la distance Or du centre de la circonférence à la droite J J_1, et par d la distance qr entre les droites TT' et J J_1. Les deux triangles semblables bPr, Obr donnent

$$\frac{rV}{br} = \frac{br}{or};$$

d'où :

$$rV = \frac{\overline{br}^2}{or} = \frac{\overline{or}^2 - \overline{ob}^2}{or} = \frac{D^2 - R^2}{D};$$

on a ensuite :

$$rQ = rb = \sqrt{D^2 - R^2}.$$

Donc :

$$\frac{rV}{rQ} = \frac{aa_1}{bb_1} = \frac{\sqrt{D^2 - R^2}}{D} \text{ Rapport des axes.}$$

Maintenant les deux triangles semblables, βqr, bVr donnent :

$$\frac{\beta q}{qr} = \frac{bV}{rV};$$

mais :

$$\beta q = b'V = \frac{1}{2} b' b'_1;$$

donc :

$$b'b'_1 = 2 . qr . \frac{bV}{rV};$$

or les deux triangles semblables bVr, Obr donnent :

$$\frac{bV}{rb} = \frac{ob}{or} = \frac{R}{D},$$

donc :

$$bV = \frac{R}{D} \cdot \sqrt{D^1 - R^2},$$

et par suite on a :

$$b'b'_1 = 2 . d . \frac{R}{\sqrt{D^2 - R^2}},$$

et comme on a :

$$\frac{a'a'_1}{b'b'_1} = \frac{\sqrt{D^1 - R^2}}{D},$$

on obtient :

$$a'a'_1 = b'b'_1 . \frac{\sqrt{D^2 - R^2}}{D} = d . \frac{R}{D} .$$

Ainsi on voit que, par des valeurs convenables données à D et d, on peut obtenir pour perspective du cercle une ellipse quelconque.

Entre la circonférence et une quelconque des ellipses que l'on peut ainsi obtenir pour sa perspective, il y aurait aussi des relations qu'on obtiendrait par les applications des principes élémentaires donnés, mais nous ne chercherons pas ces résultats qui nous entraîneraient trop loin, et qui sont peu importants.

POINT DE VUE EN UN POINT DE LA COURBE, CERCLE OSCULATEUR.

Supposons maintenant (fig. 52), que le point de vue soit placé en un point quelconque V de la circonférence génératrice ; les droites JJ_1, TT_1, II étant les mêmes que dans les cas précédents, la perspective du cercle s'obtiendra comme ci-dessus, en décrivant la circonférence $mQVn$ qui passe par les points Q et V et dont le centre est sur la droite JJ_1 on déterminera les points m et n qui serviront à déterminer les axes de la courbe ; cette courbe sera une ellipse tant que la droite JJ_1 sera extérieure à la circonférence, mais, dans le cas considéré, cette ellipse passera non-seulement par le point V lui-même, mais de plus sera tangente à la circonférence, en ce point V ; en effet : la tangente Vts à la circonférence au point V coupe l'axe d'homologie TT_1 au point t par lequel doit passer la tangente homologue à celle Vts, et de plus elle doit lui être parallèle, donc ces deux tangentes se confondent, ainsi l'ellipse et la circonférence ont, en ce point V, une tangente commune, donc elles sont tangentes l'une à l'autre, elles ont, en ce point, deux points communs. Remarquons que lorsque l'axe d'homologie est, comme dans la fig. 52, extérieure à la circonférence, l'ellipse est intérieure à la circonférence quand cette droite TT_1 se trouve entre cette courbe et la droite JJ_1 et si cette droite TT_1 était au-dessus de la circonférence, ce serait la circonférence qui serait comprise entièrement dans l'ellipse mais enfin dans ces deux positions de l'axe TT_1, la circonférence et l'ellipse n'ont de commun que les deux points de tangence en V, mais si l'axe d'homologie coupait la circonférence en deux points e, e_1 comme cela se voit fig. 53, il est évident que ces deux points seraient communs à l'ellipse et à la circonférence, qui auraient ainsi 4 points communs, dont deux réunis au point de tangence et deux séparés.

Si l'axe d'homologie, fig. 54, était tangente à la circonférence, les deux points e, e_1 se réuniraient en un seul et alors l'ellipse qui doit contenir ces deux points, se trouverait tangente à la circonférence en un second point e, elle lui serait donc bitangente.

Si cet axe d'homologie passait par le point V, comme dans la fig. 55, alors un des points e_1 se réunirait avec les deux qui sont en V communs aux deux courbes, l'autre point e resterait séparé et alors l'ellipse aurait en V trois points communs avec la circonférence, on dit alors que ces deux courbes sont osculatrices réciproques du premier ordre.

Si enfin, comme dans la fig. 56, l'axe d'homologie était tangent à la circonférence, au point de vue V, alors, en ce point, il y aurait de commun entre les deux courbes, non-seulement les deux points de tangence, mais aussi les deux points e, e_1, de sorte que les deux courbes auraient en ce point 4 points communs; elles sont alors dites osculatrices du deuxième ordre.

Si l'axe est comme dans la fig. 56, l'ellipse sera intérieur à la circonférence et le point de contact sera l'extrémité de son petit axe; si au contraire cet axe était comme dans la fig. 57, l'ellipse serait extérieure à la circonférence, et serait tangente à l'extrémité du grand axe. On voit ainsi que l'ellipse ne peut avoir une circonférence osculatrice du second ordre, qu'aux extrémités de ces axes.

Une circonférence et une ellipse ne peuvent avoir plus de quatre points communs sans se confondre, il n'y a donc pas d'osculation d'un ordre plus élevé.

Une circonférence a une courbure uniforme dans tous ses points, de plus cette courbure est en sens inverse de son rayon, de sorte qu'une circonférence est très-propre à déterminer la courbure d'une autre courbe en chacun de ses points; il suffit de déterminer pour chacun de ces points le cercle osculateur, et alors la courbure de la courbe sera en chacun de ces points, en raison inverse de ce rayon qu'on appelle pour cela le rayon de courbure.

Nous verrons, ci-après, comment on peut déterminer, en chaque point d'une ellipse, son rayon de courbure, et par conséquent la courbure de la courbe.

Quelle que soit la position de l'axe d'homologie TT_1 entre les deux courbes perspectives réciproques, il y aura entre elles toutes les relations trouvées :

Le rapport des axes de l'ellipse sera toujours donné par la relation :

$$\frac{mV}{nV} : \frac{mQ}{nQ}.$$

Rapport qui peut, par conséquent, être quelconque, on peut donc en conclure :

Une ellipse et une circonférence tangentes réciproques sont deux figures perspectives, ayant le point de tangence pour point de vue, et dont l'axe d'homologie est facile à déterminer, puisqu'il contient les points d'intersection de deux droites homologues quelconques.

Soit cOc_1 un diamètre quelconque de la circonférence et $c'c'_1$ les points homologues des extrémités c, c_1 de ce diamètre on a trouvé que :

$$\frac{Vc}{Vc'} = \frac{cq}{d},$$

et :

$$\frac{Vc.}{Vc'.} = \frac{c'.q.}{d};$$

donc en ajoutant :

$$\frac{Vc}{Vc'} + \frac{Vc.}{Vc'.} = \frac{cq + c'q,}{d} = 2.\frac{or}{d} = \text{constante}.$$

C'est-à-dire que :

Dans cette ellipse et le cercle tangent, la somme des rapports des distances du point de tangence aux extrémités d'un diamètre quelconque de la circonférence, divisée par sa distance au point homologue de l'ellipse, est constante.

On aurait un théorème analogue pour les sommets d'un diamètre de l'ellipse.

La tangente Vts commence à l'ellipse et à la circonférence (fig. 53), rencontre l'axe d'homologie en un point t, et on a $t\mathrm{V}^2 = te.te_1$; or, on a trouvé que, dans une ellipse, le rapport de $t\mathrm{V}^2$ à $te.te_1$ est égal à celui du carré des diamètres parallèles; donc, dans le cas actuel, ces deux diamètres parallèles doivent être égaux.

De même pour la figure 54, où on a $te = t\mathrm{V}$.

Étant donné une ellipse, il est facile de déterminer son rayon de courbure en un point quelconque de cette courbe. Soit V, fig. 55, le point donné sur cette courbe. On voit que ce point donné est sur l'axe d'homologie de l'ellipse et du cercle osculateur cherché; le point V étant sur cet axe, il en résulte qu'il est à égale distance des droites JJ_1 et II_1, c'est-à-dire qu'on a $h = d$. Menons à l'ellipse sa tangente au point V, qui rencontre en s et s_1 ces droites JJ_1 II, et on a par conséquent $Vs = Vs_1$.

Si au point V on élève la perpendiculaire VO à cette tangente sVs_1, il est évident que ce sera la normale à la courbe, et qu'elle contiendra par conséquent le centre du cercle de courbure en ce point V. Cette normale Vc'_1c rencontre l'ellipse en c' et rencontrerait, s'il était connu, le cercle de courbure en un point c homologue de celui c'; la tangente en c à ce cercle serait une parallèle à celle sVs_1, puisque ce sont deux tangentes à l'extrémité d'un même diamètre; donc, les deux tangentes homologues aux points c' et V, à l'ellipse, doivent se rencontrer au point s_1, sur la droite II_1. Ce point s_1 étant connu portant $Vs = Vs_1$, on aura un point s de la droite JJ_1.

De même, si on joint le point V au centre P de la conique, cette droite $VPdd'$ rencontrera le cercle en d et l'ellipse en un point d' homologue de d; la tangente à l'ellipse en d' est parallèle à celle s_1Vs comme étant deux tangentes aux extrémités d'un même diamètre de l'ellipse; donc les deux tangentes homologues au point d et V du cercle se couperont en un point s de la droite JJ_1; par conséquent Vd est la polaire du point s dans le cercle; donc la distance connue sV est égale à celle inconnue sd;

ainsi le point d du cercle est déterminé. Vd étant une corde, la perpendiculaire so, abaissée du point s sur cette corde, passera par le centre O du cercle osculateur; ce cercle sera donc déterminé.

Soient, fig. 55, gg' deux points homologues sur le rayon $Vg'g_1$, gq est la distance du point g à la droite JJ_1, et $g'r$ est celle du point g' à la droite II. On a donc :

$$\frac{Vg}{Vg'}=\frac{gq}{d},$$

et :

$$\frac{Vg'}{Vg}=\frac{g'r}{h};$$

or, lorsque le cercle est celui osculateur, on a : $h=d$; multipliant ces deux égalités l'une par l'autre, on aura :

$$\frac{Vg.Vg'}{Vg'.Vg}=1.=\frac{gq.g'r}{d.h}=\frac{gq.g'r}{d^2};$$

d'où :

$$gq.g'r=d^2,$$

c'est-à-dire pour le cas du cercle osculateur:

Le produit des distances respectives de deux points homologues aux droites JJ_1, II_1 *est constant et égal au carré de la distance du point* V *à l'une de ces droites.*

Si on divise les deux égalités ci-dessus, on aura :

$$\frac{\overline{Vg}^2}{\overline{Vg'}^2} = \frac{gq}{g'r}.$$

C'est-à-dire que :

Le carré du rapport des distances de deux points homologues, au point de vue V, *est égal au rapport des distances respectives de chacun de ces points aux droites* JJ_1, II_1.

On pourrait encore tirer un grand nombre d'autres rapports de cette disposition du point de vue sur la circonférence.

La circonférence donnée (fig. 53) et celle mVn sont rectangulaires, c'est-à-dire qu'au point V d'intersection les tangentes Vs, VO sont rectangulaires, l'une Vs est la tangente en V à la circonférence donnée, et VO est tangente en ce même point V à la circonférence mVn; il s'ensuit que cette tangente Vs passe par le centre s de cette circonférence mVn, de sorte qu'on a $sV = sm$, et par suite l'angle Vms est égal à celui mVs. De même celui $Vsn = nVs$. Or, Vm Vn sont parallèles aux axes de l'ellipse; donc :

Dans l'ellipse et le cercle tangent, chaque axe fait des angles égaux avec la tangente Vs *et la corde commune* ee_1 *qui est parallèle à* mn.

Étant donnés les deux points ee_1 sur une conique, on peut alors mener un cercle tangent à cette conique.

Si on donnait le point e_1 et le point de content V, on déterminerait la corde commune ee_1 en menant par le point e_1 donné une droite ee_1 faisant, avec le grand axe et la tangente en V, deux angles égaux.

Si le point e (fig. 55) était réuni au point V, on déterminerait pareillement la droite ee_1, qui couperait l'ellipse en un point e_1, et les trois points e, e_1 V appartiendraient au cercle osculateur au point V.

Le point de vue étant toujours en un point quelconque V (fig. 58) de la circonférence, supposons que l'axe d'homologie soit à l'infini; c'est le cas où le plan du tableau est parallèle à celui de la circonférence, et par conséquent celui où la section par ce plan du tableau est toujours une circonférence, ou plus généralement sera une figure semblable à celle donnée. Dans ce cas, les trois droites que nous avons désignées par JJ_1, II_1, TT_1, sont à l'infini et par conséquent se confondent, et les trois points O, Q, P sont réunis au point O centre du cercle.

Le sommet du cône perspectif est en un point donné de la perpendiculaire élevée au point V au plan de la circonférence donnée. Considérons alors le plan vertical dont aOV serait la trace, et rabattons ce plan sur celui de la circonférence en le faisant tourner autour de cette trace; alors le point V viendra en un point quelconque V sur la tangente à la circonférence au point V; on peut supposer que les droites tt_1 ii soient les traces sur ce plan rabattu, du plan du tableau et de celui mené par le point V parallèle à celui de la circonférence; il est alors facile de construire la perspective sur ce plan du tableau, la perspective de la circonférence donnée. Vαa rencontre la droite tt_1 en α, alors l'horizontale $a^1\alpha$ déterminera sur Va le point a' homologue de celui a; de même on trouvera p' pour l'homologue de celui P, par conséquent ce sera le centre de la courbe, $a'a$V sera un des axes et $b'b'_1$ sera l'autre, dont les extrémités b', b'_1 seront déterminées par les rayons V$b'b$, V$b_1b'_1$. Il est facile de voir sur la figure que ces deux axes seront égaux, et que, par conséquent, la courbe est un cercle tangent au point V à la circonférence donnée. On arriverait au même résultat en examinant ce que devient l'expression

$$\frac{a'a'_1}{b'b'_1} = \frac{m\mathrm{V}}{n\mathrm{V}} : \frac{m\mathrm{Q}}{n\mathrm{Q}},$$

qui donne le rapport des axes. Il est évident qu'elle donne l'unité pour résultat, lorque les points m et n sont à l'infini. En faisant varier ensuite la distance du plan du tableau à celle de la circonférence donnée, on aura une série de circonférences toutes homologiques entr'elles et à sa proposée, et ayant au point V une tangente commune. Ainsi on peut en conclure

Une série de circonférences ayant en un point une tangente commune, seront toutes homologiques entre elles, le point de tangence sera le centre d'homologie, et l'axe d'homologie sera à l'infini.

Il en résulte que si du point V, fig. 58, on mène deux rayons Vaa',Vbb', les cordes ab, $a'b'$ homologues seront toutes parallèles.

Cette observation va nous fournir un autre moyen de déterminer le rayon de courbure en un point de l'ellipse. Soit fig. 55 une ellipse tracée et un point V de cette courbe; soit Vc la normale en ce point V. D'un point O_1 quelconque de cette normale, comme centre avec la distance O_1V pour rayon, on décrit une circonférence qui est par conséquent tangente à la tangente sVs_1; elle est donc homologique avec le cercle osculateur. Par le point V menons deux rayons quelconques $Vc'Vg'$ qui coupent cette circonférence aux points c_1, g_1 déterminant la corde c_1g_1 qui, d'après l'observation, est parallèle à celle cg qui joindrait les points d'intersection de ces deux droites avec le cercle osculateur cherché, cette corde aurait pour homologue celle c^1g^1 qui joint les points d'intersection $c'g'$ de ces droites et de l'ellipse; par le point V menons la droite Vu parallèle à la corde c_1g_1 et par conséquent à celle cg inconnue; les droites cg, Vu, étant parallèles, ont pour homologues des droites concourantes en un point de la droite II_1; or, une de ces droites homologues est c^1g^1u; l'autre, homologue de celle Vu, est la même droite Vu; donc le point u est aussi déterminé; on aurait pareillement un second point tel que celui u, appartenant à cette droite II_1, donc elle est déterminée; par suite la droite Ve, parallèle à celle II_1, ira passer par le point e d'intersection du cercle osculateur et de l'ellipse; une perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde Ve passera par le centre o de ce cercle; il est donc déterminé.

L'AXE D'HOMOLOGIE TANGENT A LA CIRCONFÉRENCE ET LE POINT DE VUE V SUR CET AXE.

Soit (fig. 59) cette disposition, ou la droite TT_1, est tangente au cercle et où le point de vue est en V. La droite JJ_1 étant extérieure à l'ellipse, on aura, par les mêmes constructions, pour la perspective du cercle, une ellipse tangente au point e à l'axe TT_1 et par conséquent au cercle.

La circonférence $mQvn$ passant par les points Q et V, déterminera, sur la droite TT_1 qui en est le diamètre, les deux points m, n servant à déterminer les axes, qui seront donc parallèles à Vm et Vn.

La courbe étant tracée, on voit qu'elle est tangente au cercle au point e; mais elle doit être tangente au rayon Vaa' au point a' homologue de celui a; donc, après avoir été tangente intérieurement à la circonférence, il faut qu'elle la coupe en deux autres points. Si l'un de ces deux points se trouve réuni au point de tangence e, le cercle et l'ellipse auront donc en ce point trois points communs; elles seront osculatrices et alors ces deux courbes n'ont plus qu'un autre point commun.

Lorsque l'ellipse est comme fig. 54 tangente au cercle en deux points V et *e*, on voit que ces deux courbes peuvent être perspectives réciproques ou homologiques de trois manières différentes :

1° Le point V est le point de vue, et la tangente *et* est l'axe d'homologie.

2° Le point *e* est le point de vue, et la tangente V*t* est l'axe d'homologie.

3° Le point *t* d'intersection des deux tangentes est le point de vue, et la corde commune V*e* seront l'axe d'homologie.

On voit ainsi qu'un cercle et une ellipse qui ont une tangente commune, sont homologiques généralement de deux manières différentes : 1° Le point de vue est le point de tangence, et l'axe d'homologie est déterminé. 2° La tangente commune est l'axe d'homologie, et le point de vue est sur cette droite au point où elle est coupée par une 2ᵉ tangente commune aux deux courbes. Nous reviendrons sur ce sujet.

PARABOLE.

Reprenons, sur le plan du dessin considéré comme horizontal, une circonférence de centre O, de rayon R. Soit, TT_1 la trace sur ce même plan, de celui du tableau, trace qu'on peut appeler la ligne de terre, et que nous désignons sous le nom d'*axe d'homologie ;* c'est sur cette droite que se rencontrent les lignes homologues des deux figures perspectives réciproques. Soit V un point quelconque de l'espace pris pour point de vue, de sorte qu'il doit être regardé comme le sommet d'un cône perspectif ayant pour base la circonférence donnée.

Par le point de vue V, on mène un plan parallèle à celui du tableau ; il coupe le plan du sol suivant une droite JJ_1 parallèle à TT_1, mais nous supposerons ici que cette trace JJ_1 est tangente en m à la circonférence donnée ; il en résulte que le plan du tableau est parallèle à la génératrice Vm du cône ; qu'ainsi ce plan ne coupera cette génératrice qu'à l'infini.

On demande de construire la perspective de la circonférence pour cette disposition de la figure ?

Rabattons les plans T et J, sur celui de la circonférence, en les faisant tourner autour de leurs traces, de sorte que le point de vue V tombera en un point quelconque V de ce plan et la perspective contenue sur le plan T deviendra une courbe tracée sur le plan de la circonférence donnée. La trace TT_1 peut couper, ou non, la circonférence donnée, dans le cas de la figure, cette droite coupant la circonférence aux points c, c_1, il en résultera nécessairement que ces deux points c, c_1 appartiendront à toutes les perspectives de cette circonférence, pour divers points de vue de l'espace.

Rappelons que cette droite JJ_1 est celle qui dans le plan du cercle, contient tous les points dont ceux homologues dans la perspective sont à l'infini. En traçant une droite II_1 parallèle à celles TT_1, JJ_1 et à une distance de TT_1 égale à celle qui sépare le point de vue V et la droite JJ_1, on aura la droite qui, dans la perspective, contiendra les points homologues de ceux à l'infini dans le plan du cercle.

Pour construire la perspective de la circonférence, nous prendrons sur JJ_1 deux points de vue auxiliaires m, n, nous joignons ces points m et n à celui V, nous faisons du point m la perspective de tous les points de la circonférence sur la droite TT_1 et par chaque point d'intersection de cette droite et d'un rayon perspectif, nous menons des droites parallèles à celles mV.

Nous faisons de même la perspective de la circonférence sur la même droite TT_1, du point n, et par chaque intersection d'un rayon perspectif et de cette droite TT_1, nous menons des parallèles à celle nV, les points d'intersections des droites correspondantes, nous donnerons des points de la courbe cherchée.

Remarquons qu'on peut prendre pour ces points m, n deux points quelconques de la droite JJ_1; mais il est préférable de les prendre conjugués, c'est-à-dire tels que la polaire de l'un passe par l'autre.

La droite JJ_1 étant, dans la figure 60, tangente à la circonférence, son pôle linéaire P se confond avec le point m de tangence; il en est de même du pôle circulaire Q, de sorte que le point m est alors la réunion des points P et Q. La polaire d'un point quelconque n de la droite JJ_1 est une droite am passant toujours par le point m, quel que soit sur la droite JJ_1 la position du point n; d'où résulte que deux points conjugués se composeront de ce point m commun et d'un point n quelconque de cette droite JJ_1.

Décrivons sur la droite JJ_1, comme direction d'un diamètre, une circonférence passant par les points m et V, elle déterminera sur cette droite JJ_1

le point n qui sera conjugué de celui m, mais qui sera tel, que les deux droites mV, nV étant rectangulaires, chaque point de la courbe cherchée sera déterminé par deux droites rectangulaires parallèles à mV, nV. Ainsi la droite ma qui est la corde des points de tangence des deux tangentes na, nm, coupe la droite TT_1 au point α par lequel on mène $\alpha a'$ parallèle à mV; la droite na coupe cette même droite TT_1 au point α_1; par ce point α_1 on mène $\alpha_1 a'$ parallèle à nV, elle coupe celle $\alpha a'$ au point a' qui sera la perspective du point a de la circonférence; de plus na étant une tangente en a à la circonférence, la droite $\alpha_1 a'$ sera une tangente à la courbe cherchée au point a'.

Une transversale nbb_1 coupant la courbe aux deux points b, b_1 et la droite TT_1 au point β', la droite $\beta' b' b'_1$ parallèle à nV contiendra les perspectives b', b'_1 des deux points b, b_1. La droite mb qui rencontre celle TT_1 en β donnera la droite $\beta b'$ parallèle à mV qui passera par le point b', de même la droite $n\beta_1 b_1$ qui rencontre TT_1 en β_1 donnera celle $\beta_1 b'_1$ qui déterminera le poini b'_1 perspective de celui b_1. La transversale nbb_1 coupe sa polaire ma au point d et les quatre points b, d, b_1, n forment un rapport harmonique; les quatre points

b, d, b_1, n deviendront en perspective les quatre points b', d', b'_1 et le point à l'infini homologue du point n, ces quatre points formant aussi un rapport harmonique, il faut que le segment $b'd'$ soit égal à celui $d'b'_1$ comme ce résultat aura lieu pour toute transversale, telle que celle $n b b_1$, il en résulte que toutes les cordes telles que $b'b'_1$ parallèles à nV seront coupées en deux parties égales par la droite αa et cela quelle que soit la position du point n sur la droite TT_1. On en conclut donc que αa est un diamètre de la courbe coupant en deux parties égales toutes les cordes parallèles à la tangente à cette courbe au point d'intersection de cette courbe et de ce diamètre. Si le point n est pris tel que mV, nV soient rectangulaires, cette droite $\alpha a'$ sera le grand axe de la courbe.

On aperçoit que lorsque le point de vue V est donné, quelle que soit la position du point n, la droite mV, qui est parallèle à chaque diamètre, est toujours la même, d'où résulte donc que tous les diamètres de la courbe sont parallèles.

Lorsque la transversale ci-dessus $n b b_1$ prendra la direction nm, il est évident que les deux points de tangence en m seront en perspective deux points à l'infini; donc la courbe aura un point à l'infini, mais, de plus que la tangente en ce point, sera aussi à l'infini.

Nous avons vu que, lorsque la polaire de JJ_1 est un point P, la perspective de ce point P devient le centre de la courbe; dans le cas actuel, le point P se confond avec le point *m*, donc le centre de la courbe est à l'infini, et par conséquent tous les diamètres, qui sont des droites, passant par ce centre, sont parallèles.

La courbe qui résulte de cette construction a reçu le nom de *parabole;* ainsi, on peut dire que :

La parabole est une ellipse dont le centre est à l'infini, et dont, par conséquent, tous les diamètres sont parallèles.

On peut donc déduire les propriétés de la parabole de celles de l'ellipse en y introduisant ces considérations; ainsi, on voit que toutes celles qui ne touchent pas à ces points seront les mêmes; les autres seront plus ou moins modifiées, mais il sera toujours facile de les en déduire. On peut aussi les tirer directement de la figure 60.

La parabole qu'on obtient pour la perspective de la circonférence variera pour différentes positions du point de vue; ainsi, pour le point V (fig. 60) nous avons une première parabole, qui est, comme on le voit, comprise entre les tangentes menées du point V à la circonférence; ces deux courbes sont homologiques entre elles, ce point V est le centre d'homologie, et l'axe d'homologie est la droite TT_1. Supposons que le point V varie de position dans le plan, mais qu'il reste sur la circonférence mVn qui a servi à déterminer le point n, il en résultera que l'angle mVn sera droit pour toutes les positions du point de vue; qu'ainsi les points α, α_1, β, β_1 sur TT_1 seront toujours les mêmes; qu'ainsi les diamètres, ou les cordes que ces points servent à déterminer, passeront respectivement par ces mêmes points; de plus, si pour un point V le point a de la circonférence donne pour perspective le point a', et que pour un autre point de vue V_3 la perspective du même point soit a'_3 par la construction, il en résultera que la droite $a'a'_3$ sera nécessairement parallèle à celle VV_3 qui joint les deux points de vue; d'où résulte, que les deux paraboles, qui sont la perspective de cette même circonférence, auront leurs points deux à deux homologues sur des droites parallèles, et que les cordes homologues se coupent toujours sur la droite TT_1; donc ces deux courbes sont homologiques entre elles pour un point de vue à l'infini, et l'axe d'homologie est la même droite TT_1.

Ainsi on voit que, comme pour les ellipses, les différentes paraboles qu'on peut obtenir pour différentes positions du point de vue, sont deux à deux homologiques entre elles pour un point de vue à l'infini.

On voit, sur la fig. 60, que si le point V se rapproche de la droite JJ_1 vers le point n, la parabole s'aplatit; que si ce point V se trouve être sur le point n, la parabole sera infiniment aplatie et se réduira à une droite double couchée sur la droite TT_1, commençant au point α et s'étendant indéfiniment vers la gauche. Si le point de vue est en V_6 sur la circonférence, la parabole sera tangente en ce point à la circonférence. Si le point de vue était en V_5 intérieurement à la circonférence, la parabole résultante s'ouvre en passant toujours par les points $c'c_1$ communs à toutes ces courbes. Enfin, quand le point de vue tombe en m, la parabole s'ouvre tout à fait et se réduit à une simple droite couchée sur TT_1 et s'étendant dans les deux sens, et le point α doit être considéré comme le sommet de cette courbe. Pour le point V_3, situé de l'autre côté de JJ_1, on obtiendrait pareillement d'autres paraboles, mais qui tourneraient leur convexité vers cette droite. Enfin, il est évident que tous les sommets a' de toutes ces courbes seront sur une même circonférence.

Si le point de vue, en variant, reste sur la circonférence $m\mathrm{V}n$, on voit que l'axe d'une des courbes sera conjugué avec l'axe d'une autre; il n'en serait pas de même si le point de vue sortait de cette circonférence; à un axe dans l'une correspondrait un diamètre dans l'autre, mais qui ne serait plus l'axe de la courbe.

Par suite, le point V étant toujours sur la circonférence $m\mathrm{V}n$, l'angle d'un diamètre et de ses cordes conjuguées ne sera pas le même dans les deux courbes.

Remarquons que l'angle d'un diamètre et de ses cordes conjuguées étant égal à l'angle $m\mathrm{V}n$, n étant dans une position quelconque sur JJ_1, il en résulte que cet angle peut, pour une parabole, avoir toutes les valeurs possibles, ce qui n'a pas lieu pour l'ellipse.

En résumant, nous pouvons conclure que la perspective d'une circonférence sera une parabole plus ou moins aplatie, plus ou moins ouverte, et peut, à la limite, être une droite double à partir d'un point, ou une droite simple.

Que deux de ces paraboles sont homologiques entr'elles pour un point de vue à l'infini.

Que, puisque parmi ces paraboles il y a une droite double et une droite simple, on peut en conclure que cette droite double ou simple est homologique avec une quelconque des autres paraboles ; qu'ainsi on doit pouvoir construire une parabole au moyen de la droite simple ou de la droite double. Ainsi, fig. 60, on voit que le point β' d'intersection de la transversale nbb_1, avec la parabole infiniment aplatie $\alpha_1\beta'$, correspond aux deux points $b'b_1$ de la parabole construite pour le point V, tandis que le point β, qui est l'intersection du rayon perspectif mb avec la parabole infiniment ouverte $c\alpha c$, correspond à un seul point b, etc.

Les diamètres de la parabole étant infiniment grands, il n'y a pas lieu de déterminer les rapports de leurs grandeurs ; mais on peut avoir le rapport entre la longueur d'une corde et celle comprise sur le diamètre conjugué entre cette corde et l'extrémité du diamètre ; ainsi, fig. 60, on demande le rapport qui existe, par exemple, entre la demi-corde $b'd'$ et la distance $a'd'$? Les triangles semblables $b'\beta\beta'$ $a'\alpha\alpha'$ $m\mathrm{V}n$ donnent :

$$\frac{a'd'}{\alpha'\beta'} = \frac{a'\alpha}{\alpha\alpha^1} = \frac{m\mathrm{V}}{mn},$$

et :

$$\frac{b'd'}{\beta\alpha} = \frac{b'\beta'}{\beta\beta'} = \frac{n\mathrm{V}}{mn}.$$

Donc, en divisant l'une par l'autre, on a

$$\frac{a'd'}{b'd'} = \frac{m\mathrm{V}}{n\mathrm{V}} : \frac{\alpha\beta}{\alpha'\beta'},$$

et cela, quel que soit le diamètre considéré.

Si on considère deux paraboles obtenues pour deux points de vue différents V et V_1, on voit que les segments $\alpha\beta$ $\alpha^1\beta'$ sont communs, et qu'ainsi le rapport entre une corde et sa distance au sommet coulée sur le diamètre conjugué, sera au même rapport, dans une seconde courbe, comme :

$$\frac{m\mathrm{V}}{n\mathrm{V}} : \frac{m\mathrm{V}_1}{n\mathrm{V}_1}.$$

Des propriétés de l'ellipse, on peut en déduire facilement celles de la parabole; ainsi, par exemple, nous avons démontré que dans l'ellipse, deux cordes quelconques se coupent mutuellement en deux parties, dont le rapport des produits est égal à celui du carré des diamètres respectivement parallèles; dans la parabole, les diamètres sont infiniment grands; on ne peut donc pas comparer le rapport ci-dessus à celui du carré des diamètres; il n'en résulte pas moins que pour la parabole on a ce théorème :

Deux cordes quelconques se coupent mutuellement en deux parties dont le rapport des produits est constant pour tous les systèmes de deux cordes respectivement parallèles aux deux premières.

Si une des premières cordes est parallèle à un diamètre, un des segments est infini; mais, dans l'autre produit, il y aura de même un segment infini; le rapport de ces deux quantités infinies disparaîtra; on aura donc ce théorème :

Dans une parabole, si une corde quelconque est coupée en deux parties par un diamètre, le produit des deux segments de la corde, divisé par le segment du diamètre compris entre la corde et la courbe, est constant pour une autre corde et un autre diamètre respectivement parallèles aux premiers.

Si la corde est conjuguée au diamètre, c'est-à-dire parallèle à la tangente à la courbe à son extrémité, alors le diamètre partage la corde en deux parties égales; il en est de même pour toute corde parallèle à la première. Donc, si on appelle y la demi-corde et x la distance de cette corde au sommet de la courbe situé sur ce diamètre, on aura :

$$\frac{y^2}{x} = \text{constante};$$

Cette constante se désigne ordinairement par p, de sorte qu'on a $y^2 = px$, qui est ce qu'on appelle l'équation de la parabole rapportée à un diamètre.

Le rapport des produits des segments de deux cordes a également lieu, lorsque le point d'intersection des deux cordes est extérieur à la courbe; il en résulte :

Dans une parabole, si par un point extérieur à la courbe on mène deux transversales, le produit des distances de ce point aux deux points d'intersection de l'une des transversales, divisé par le produit des distances du même point aux deux points d'intersection de l'autre transversale, est constant pour le rapport des produits pareils, pour deux autres transversales parallèles aux deux premières.

Une des transversales peut se trouver parallèle à un diamètre, auquel cas il y aura une seconde transversale aussi parallèle ; alors le résultat se modifiera comme ci-dessus.

On voit pareillement, que les deux premières cordes peuvent être des tangentes à la courbe, ou l'une tangente et l'autre sécante.

Il est d'autres propriétés de la parabole qui sont évidentes sur la figure; ainsi, par exemple, soit n un point quelconque de la droite JJ_1, sa polaire dans le cercle sera une droite $mdaf$ qui passe par le point m, et la perspective de cette corde sera un diamètre $f'a'd'$. Si on mène, par ce point n, une transversale quelconque nbb_1d coupant la circonférence aux points b, b_1, les tangentes fb, fb_1 à cette circonférence, en ces points b et b_1, iront se rencontrer en un point f de la polaire $mdaf$ du point n; la polaire de ce point f sera donc la droite bdb_1n passant par le point n, d'où résulte que les quatre points f, a, d, m forment une division harmonique sur cette polaire $fadm$; et par conséquent que les quatre points homologues f', a', d', et le point à l'infini qui est l'homologue de celui m, forment aussi sur le diamètre $f'a'd'$ une division harmonique dont un des points est à l'infini ; donc il en résulte que $a'd' = a'f'$. Le point f' est l'intersection du diamètre et des deux tangentes à la parabole aux points b' et b'_1 ; $d'f'$ est ce qu'on appelle la sous-tangente des points b', b_1; ainsi on a ce théorème :

Dans une parabole, la sous-tangente est divisée en deux parties égales par le point d'intersection de la courbe et du diamètre conjugué à la corde $b'b'_1$.

Il en résulte une méthode très-simple de mener une tangente à une parabole en un point b donné. On trace la corde $b'b'_1$ quelconque, puis une seconde corde parallèle, la droite qui joindra le milieu de ces deux cordes sera leur diamètre conjugué coupant la courbe en un point a', portant $a'f' = a'd'$ on aura le point f' qui, joint au point b', sera la tangente cherchée.

Si par le point f' on mène une transversale quelconque coupant la parabole en deux points, et que par ces deux points on mène deux cordes parallèles et conjuguées du diamètre $f'a'$ coupant la courbe en deux autres points, la droite qui les joindra ira passer par ce point f'.

Le point de vue V restant fixe (fig. 61), supposons une suite de circonférences tangentes, au point m, à la droite JJ_1; elles seront ainsi tangentes entr'elles en ce point. Toutes ces circonférences seront perspectives l'une de l'autre pour le point de vue m, et l'axe d'homologie sera une droite à l'infini ; en effet, menons un rayon mbb_1b_2... puisque bf est perpendiculaire à mb, on voit que les distances mb, mb_1, mb_2... sont proportionnelles aux diamètres respectifs des circonférences, et par conséquent à leurs rayons, d'où il suit que les rayons ob, ob_1, ob_2... qui joignent ces points b, b_1, b_2... à leur centre respectif sont tous parallèles, et qu'ainsi toutes les tangentes à ces points b, b_1, b_2... sont parallèles et se rencontrent à l'infini.

Maintenant faisons la perspective de toutes ces circonférences pour le point V avec TT_1 pour axe d'homologie. La droite II_1 menée à une distance de TT_1 égale à celle du point V à JJ_1 est la droite qui contient les points homologues de ceux à l'infini dans le plan de ces circonférences, tandis que la droite JJ_1 dans le plan du cercle, représente tous les points qui sont à l'infini dans le plan des paraboles. Il en résulte donc :

1° Les perspectives des différents cercles seront des paraboles ayant toutes une tangente commune à l'infini, tangente qui sera elle-même la perspective du cercle de rayon infiniment grand, c'est-à-dire, par conséquent, de la droite JJ_1.

2° Parmi ces paraboles, il y aura aussi un point à l'infini sur la tangente ci-dessus et qui représente la perspective de la circonférence de rayon infiniment petit, se réduisant au point m.

3° Toutes ces paraboles auront leurs divers diamètres parallèles à la même droite mV, les cordes conjuguées à ces diamètres seront toutes respectivement parallèles.

4° Toutes ces paraboles seront ainsi perspectives réciproques pour un point de vue à l'infini, la direction d'homologie sera la droite mV et l'axe d'homologie une tangente commune à l'infini.

5° La droite $db'b'_1b'_2\ldots$, qui est la perspective de la transversale quelconque $mbb_1b_2\ldots$ menée par le point m, rencontre la droite II_1 au point d et les courbes aux points successifs b', b'_1, b'_2, etc., et les distances db', db'_1, $db'_2\ldots$ sont inversement proportionnelles aux rayons des cercles générateurs.

Ainsi soient b', b'_2 les perspectives des points b, b_2. Dans le plan des circonférences les quatre points m, b_2, b et celui à l'infini forment un rapport anharmonique qui se réduit au rapport $\frac{mb_2}{mb}$; les quatre points homologues sont l'infini correspondant au point m, puis b'_2, b' correspondants aux points b_2, b et enfin le point d qui est l'homologue de celui à l'infini ; de sorte que le rapport anharmonique de ces quatre derniers, qui doit être égal à celui des quatre homologues, se réduit au rapport $\frac{db'}{db'_2}$.

donc on a :

$$\frac{mb_2}{mb} = \frac{db'}{db'_2},$$

et comme :

mb_2, mb sont proportionnelles aux rayons des cercles, il en résulte que de même le rapport inverse $\frac{db'}{db'_2}$ est proportionnel à ces mêmes rayons.

6° Il résulte de la proposition précédente que la surface comprise entre les deux parallèles db', ea', la droite de et la première parabole qui passe par les points b', a', est à celles comprises entre les droites db'_2, da_2, de et la troisième courbe qui passe par les points b'_2, a'_2, sont inversement proportionnelles aux rayons des cercles générateurs, et de même pour les autres.

Il est à remarquer que tous les diamètres de ces paraboles sont parallèles, mais ne tombent pas l'une sur l'autre; ainsi l'axe de la première est $\alpha a'$, tandis que celui des autres serait $\alpha_1 a'_1$ etc.

Du foyer et de la directrice dans la parabole.

Nous allons, comme pour l'ellipse, placer le point de vue V dans diverses positions importantes. Commençons par le placer au centre O du cercle; nous avons vu que pour l'ellipse, ce point O devient le foyer de la courbe; il en sera de même pour la parabole, et on pourrait déduire toutes les propriétés de ce point dans la parabole de celles du foyer dans l'ellipse; nous préférons les déduire directement de la figure.

Les données étant les mêmes fig. 62 que dans la fig. 60, à l'exception que le point V est en O au centre du cercle; il en résultera que le point conjugué à celui de tangence m et qui doit donner le grand axe de la courbe, se trouve à l'infini, puisqu'il doit être à l'intersection de la droite JJ_1 et de la demi-circonférence passant par les points m et V qui sont sur une même perpendiculaire à cette droite JJ_1, de sorte que cette verticale Vm sera la direction du grand axe; pour tracer la courbe par points, nous prendrons un point arbitraire n qui sera conjugué de celui de tangence, mais relativement à un autre diamètre de la courbe.

Les deux droites mV, nV, ou mO, nO seront celles qui vont nous servir pour la construction. Il est évident que le point a sur la verticale mVa doit être l'homologue du sommet de la courbe. La droite na rencontre l'axe d'homologie TT_1 en un point α par lequel, menant $\alpha a'$ parallèle à nO, le point a' d'intersection de cette droite et de la verticale mVa sera le sommet de la courbe; pour avoir d'autres points, traçons une transversale quelconque nbb_1 rencontrant la circonférence aux points b et b_1 et l'axe TT_1 en β', par ce point β' on mène $\beta'b'b'_1$ parallèle à nO. On trace ensuite les rayons $mb\beta$, $mb_1\beta_1$ qui rencontrent l'axe TT_1 en β, β_1; par ces deux points on mène les verticales $\beta b'$, $\beta_1 b'_1$ ou parallèles à mV et les points b', b'_1 d'intersections respectifs de ces deux systèmes de parallèles détermineront les points b', b'_1 de la courbe, et de même pour les autres; la courbe sera donc déterminée, elle passera en outre par les deux points c, c_1 d'intersection de la circonférence et de l'axe TT_1 d'homologie.

En faisant varier cet axe TT_1 parallèlement à lui-même, on voit les diverses courbes que l'on peut obtenir par la même construction ; on remarquera que tant que l'axe d'homologie sera au-dessus du point m, coupant ainsi la circonférence, la parabole s'aplatit, son sommet est toujours au-dessus du point O, et lorsqu'enfin l'axe TT_1 se confond avec la droite JJ_1 alors la courbe devient une droite double représentant une parabole, ayant son sommet et son foyer au point central O et s'étendant à l'infini en dessous de la droite JJ_1. Si l'axe d'homologie était au-dessous de JJ_1 alors la parabole change son ouverture, qui devient en dessus comme on le voit sur la figure, conservant cependant toujours le même foyer O. Si l'axe d'homologie TT_1 s'élève au-dessus du point central O, la parabole qu'on obtient, ayant son ouverture tournée en bas, s'ouvre de plus en plus à mesure que cette droite TT_1 s'élève, et enfin si on la suppose à l'infini, la courbe deviendra une droite simple représentant une parabole infiniment ouverte.

Ainsi on peut avoir par cette construction, une infinité de paraboles ayant toutes un foyer commun.

Or, d'après la construction, il résulte que dans toutes ces courbes, les directions des diamètres et de leurs cordes respectivement conjuguées seront toutes parallèles, puisqu'elles le seront à mV, nV quelle que soit la position du point n; de plus il est évident que les longueurs respectives de ces cordes seront toutes proportionnelles, puisque leurs grandeurs dépendent de segments proportionnels déterminés sur une suite d'axes d'homologie parallèles; on peut donc en conclure :

Toutes les paraboles sont des figures semblables et dans la fig. 61, *semblablement placées.*

Remarquons que la droite nO partage le diamètre ma de la circonférence en deux parties égales au point O, or la droite $\alpha a'$ qui détermine le sommet a' de la courbe, est parallèle à celle nO; de plus les triangles $a\alpha_1\alpha$, $a'\alpha_1\alpha$ sont semblables à ceux anm, Onm, donc on a aussi $a'a = a'\alpha$, c'est-à-dire :

Dans une parabole, une circonférence ayant son centre O *au foyer de la courbe, coupe le grand axe en un point* a, *et la parabole en deux points* c, c_1 *et le sommet* a' *de cette courbe partage en deux parties égales la distance* aα *entre le point* a *et l'axe d'homologie.*

Ce théorème donne le moyen de déterminer de suite ce foyer; lorsqu'on connaît le grand axe de la courbe, on prend une corde quelconque cc_1 pour axe d'homologie, on porte la distance $a'\alpha$ de a' en a, le centre de la circonférence qui passe par les trois points c, c_1, a sera ce foyer :

Revenons aux propriétés du foyer de la parabole que nous pourrions déduire, comme nous l'avons dit, de celles de l'ellipse.

Soit fig. 63, une des paraboles construites fig. 62, sur laquelle est tracée les trois droites JJ_1, TT_1, II_1.

Rappelons que nous avons désigné par h la hauteur du point de vue au-dessus du plan de la circonférence qui est, sur la figure, égale à Vm, c'est-à-dire au rayon R de la circonférence, que nous avons désigné par d la distance entre les droites TT_1 et JJ_1, et qu'il en résulte que la distance entre II et TT_1 est ainsi égale à h.

Soient maintenant d et d' deux points homologues se trouvant par conséquent sur un rayon respectif $Vd'd$. D'après le théorème 2 des principes de perspective, on a pour le point désigné par **V**, ou **F** :

$$\frac{Fd}{Fd'} = \frac{ce}{d},$$

ou :

$$\frac{Fd}{Fd'} = \frac{h}{d'k};$$

mais puisque le point F est le centre O de la circonférence, on a donc toujours $Fd = R = h$, de la 2^e relation; on en tire donc :

$$\frac{Fd'}{d'k} = \frac{Fd}{h} = \frac{R}{h} = 1;$$

On a donc :

Dans une parabole, la distance d'un point de la courbe au point F *qu'on appelle son foyer, est égale à la distance de ce même point à la droite* II, *qui prend alors le nom de sa directrice.*

Dans la parabole, il n'y a nécessairement qu'un foyer, ou le 2^e serait à l'infini.

Si le point d était celui a, auquel cas celui d' serait a', on aura :

$$a'F = a'a,$$

C'est-à-dire que :

Le sommet de la parabole est à moitié entre la distance du foyer à la directrice.

Puisque pour la parabole on a toujours $Vd' = d'k$ et que la distance kg entre les droites II, TT_1 est égal à $Vm = om = R = Vd$, il en résulte $d'd = d'g$; c'est-à-dire :

Dans une parabole, la distance d'un point quelconque de la courbe à l'axe d'homologie est égal à la distance d'd *de ce point à la circonférence, distance comptée sur le rayon perspectif* Vd'd.

Puisqu'on a $d'd = d'g$ et $d'k = d'F$ et que $dF = Fm = R$, il en résulte que les points d, g, m, sont en ligne droite parallèle à celle Fk, et que la perpendiculaire abaissée du point d' sur dm sera la tangente à la courbe en ce point d', elle ira par conséquent rencontrer l'axe d'homologie TT_1 au même point que la tangente en d à la circonférence.

Prenons le rayon perspectif Vbb' parallèle à l'axe TT_1, alors on aura évidemment Vb' égal à Vs, mais $Vs = qs - qV$ et $qs = Vm = R$, donc $Vs = qm = d$. La corde $b'b'_1$ qui passe par le foyer s'appelle souvent le paramètre de la courbe.

Ainsi :

Dans une parabole, le demi-paramètre est égal à la distance d *comprise entre les droites* TT_1 *et* JJ_1.

Dans la fig. 62, toutes les paraboles qu'on peut construire en faisant varier la distance entre ces deux droites TT_1 et JJ_1 ont donc même foyer et diffèrent par la grandeur du demi-paramètre qui est égal à la distance entre ces deux droites.

La droite II_1 contient la perspective de tous les points du plan de la circonférence qui sont à l'infini, or les tangentes aux extrémités d'un même diamètre de la circonférence, donc les tangentes homologues à la parabole auront leur point de concours sur cette droite II_1, donc le point F est le pôle de II_1, ou II_1 est la pôlaire de ce point F.

Dans une parabole, la directrice est la pôlaire du foyer ; toute transversale menée par ce foyer coupe la courbe en deux points, lesquels, avec ce point et celui d'intersection de la transversale et de la directrice, forment un rapport harmonique.

Soit dd_1 un diamètre quelconque du cercle, les tangentes en d et d_1 à cette circonférence sont parallèles, alors les tangentes $d'f$, d'_1f à la parabole, aux deux points homologues $d'd'_1$ auront leur point de concours f sur la droite II_1. Une perpendiculaire Ff élevée au point F au diamètre dd_1 sera donc parallèle aux tangentes à ses extrémités, donc son homologue dans la parabole aura le même point de concours f et passera par le point F, donc elle restera perpendiculaire au diamètre $d\,d_1$.

Alors :

Si de chaque point de la directrice on mène deux tangentes à la parabole, la corde de contact passera par le foyer de la courbe et la droite qui joint le point de la directrice au foyer sera perpendiculaire à la corde de contact.

Des points de tangence d', d'_1 abaissons sur la droite II_1 les perpendiculaires $d'k$, $d'_1 k_1$, on aura par conséquent $d'\mathrm{F} = d'k$, $d'_1\mathrm{F} = d'_1 k_1$, d'où résulte que les deux triangles rectangles dfk, $d'_1 f\mathrm{F}$ sont égaux, ainsi que les deux triangles $d'_1 f k_1$, $d'_1 f\mathrm{F}$ et par suite l'angle $kfd' = d'f\mathrm{F}$ et celui $kd'f = fd'\mathrm{F}$; de même l'angle $k_1 f d'_1 = d'_1 f\mathrm{F}$ et celui $k_1 d'_1 f = f d'_1 \mathrm{F}$, de sorte que une circonférence décrite sur $d'f$ comme diamètre passerait par les points F et k, et de même pour le quadrilatère $k_1 f \mathrm{F} d'_1$. De ces considérations on peut en tirer diverses conséquences.

Ainsi on a, entre les 4 angles de sommet f

$$kfd' + k_1 f d'_1 = d'f\mathrm{F} + d'_1 f\mathrm{F} = 100°.$$

Donc :

Si par un point de la directrice d'une parabole on lui mène deux tangentes, elles seront rectangulaires.

La tangente d'f *partage en deux parties égales l'angle formé par le rayon* fF *et la droite* II_1.

L'angle du rayon vecteur mené au point de tangence est égal à celui que fait la tangente avec une parallèle à l'axe; cette parallèle représente, comme on le voit, le second rayon vecteur dans l'ellipse.

Les deux diagonales $d'f$, Fk sont rectangulaires et comme $or = rk$, il s'en suit qu'on a

$$\overline{Fr}^2 = rf.rd';$$

c'est-à dire :

La perpendiculaire abaissée du foyer sur une tangente divise la partie de cette tangente comprise entre le point de tangence et la directrice, en deux parties dont le produit est égal au carré de cette perpendiculaire.

Puisque fF est perpendiculaire à la corde $d'd'_1$ et que l'angle $d'fd'_1$ est droit, il s'en suit qu'on a

$$\overline{Ff}^2 = Fd'.Fd'_1,$$

et

$$\overline{d'f}^2 : \overline{d'f_1}^2 = \mathrm{F}d' : \mathrm{F}d'_1 ;$$

c'est-à-dire :

Le foyer divise toute corde telle que d' d'$_1$ *en deux parties dont le produit est égal au carré de la partie* fF *de la perpendiculaire élevée en ce point* F *à la corde, comprise entre ce point et la directrice.*

Les longueurs fd', fd', *des deux tangentes menées d'un point de la directrice sont proportionnelles aux racines carrées des deux segments* F d', F d'$_1$ *de la corde de contact.*

Le pied r de la perpendiculaire Fr sur la tangente est la moitié de Fk; de même r' est le milieu de Fk_1, de plus le sommet a' de la courbe est le milieu de Fs, donc la droite $ra'r'$ sera parallèle à la directrice II$_1$.

Ainsi on a ce théorème :

Dans la parabole, tous les pieds des perpendiculaires abaissées du foyer sur les tangentes à la courbe, sont sur une même droite parallèle à la directrice et passant par le sommet de la courbe.

Cette droite est ce que devient, dans l'ellipse, le cercle décrit sur le grand axe de la courbe comme diamètre, et qui contient le pied de toutes les perpendiculaires abaissées des foyers sur les tangentes, lorsque dans l'ellipse on suppose un des foyers à l'infini.

Le quadrilatère $frFr'$ étant un rectangle, les deux diagonales se coupent chacune en deux parties égales; ainsi on aura $ir = ir_1$, $iF = if$; et comme l'angle ror_1 est droit, il en résulte qu'on a $a\mathrm{F}^2 = ar . ar_1$. Ainsi :

Si d'un point de la directrice on mène deux tangentes à la parabole: 1° *Ces deux droites seront rectangulaires.* 2° *Elles couperont la parallèle à la directrice menée par le sommet de la courbe aux deux points* r, r_1 *qui sont les pieds des perpendiculaires abaissées du foyer sur ces deux tangentes.* 3° *La droite qui joint le point de la directrice au foyer est perpendiculaire à la corde de contact et divise en deux parties égales la partie* $\mathrm{r}\mathrm{r}_1$ *de cette parallèle à la directrice comprise entre les deux tangentes.* 4° *Le sommet de la courbe partage cette même partie* $\mathrm{r}\mathrm{r}_1$ *en deux segments dont le produit est constant et égal au carré de la distance du sommet de la courbe au foyer, ou à la directrice.*

Au lieu de mener deux tangentes à la parabole d'un point f de la directrice, supposons que les deux tangentes hd'' et hd' soient menées d'un point h quelconque, mais extérieur à la parabole, soit hF la droite qui joint ce point h au foyer F; en considérant la parabole comme une ellipse dont le second foyer est à l'infini, on aura donc pour le foyer F, angle $h\mathrm{F}d_{\prime\prime}=h\mathrm{F}d'$.

Les deux tangentes $hd_{\prime\prime}$, hd', menées du point h à la parabole, rencontrent la parallèle à la directrice menée par le sommet a' en deux points $r_{\prime\prime}$ et r; une troisième tangente à la courbe comprendra entre ces deux tangentes un segment qui sera vu du foyer sous un angle constant, qui par conséquent est égal à celui $r_{\prime\prime}\mathrm{F}r$ sous-tendu par la corde $r_{\prime\prime}r$ qui est aussi une de ces tangentes.

Les deux points $r_{\prime\prime}$ et r sont les pieds des perpendiculaires abaissées du foyer sur les deux tangentes $hd_{\prime\prime}$, hd'; donc, l'angle $r_{\prime\prime}\mathrm{F}r$ est supplément de celui des deux tangentes.

Une circonférence décrite sur la distance hF passera par ces deux points $r_{\prime\prime}$, r. Elle coupera donc la droite $r_{\prime\prime}ar$ en ces deux points, ce qui donne un moyen de mener les deux tangentes à une parabole par un point extérieur.

Il résulte de là que si le point h est sur la directrice, l'angle sous lequel on voit du foyer la partie d'une tangente interceptée entre les deux tangentes menées de ce point, est toujours droit.

Des considérations développées plus haut, il résulte divers moyens de mener une tangente à un point donné d'une parabole.

La normale en un point d'une parabole étant la perpendiculaire à la tangente, elle divise en deux parties égales l'angle du rayon vecteur au point de tangence et du diamètre qui passe par ce point et qui représente le second rayon vecteur; il en résulte que ce diamètre, le rayon vecteur, la tangente et la normale forment un faisceau harmonique; tous les diamètres étant parallèles à une des quatre droites de ce faisceau, il s'ensuit, fig. 62, que $Ft = Ft_1$; ainsi :

1° *Dans une parabole, le foyer divise en deux parties égales la distance comprise entre les points d'intersection du grand axe et de la tangente et de la normale.*

2° *La partie d'un diamètre quelconque comprise entre une tangente et une normale en un point de la parabole, est divisée en deux parties égales par le rayon vecteur du point de tangence.*

Si par le foyer on mène une droite Fuu_1 parallèle à une tangente quelconque fd_1, elle rencontrera le diamètre du point de tangence en un point u_1, et la normale au point u, et on aura alors $uu_1 = u\mathrm{F}$, donc $d_1\mathrm{F} = d_1u_1$, or $d_1\mathrm{F} = d_1k_1$, donc $d_1u_1 = d_1k$; ainsi, le point de tangence d_1 est le milieu de la distance entre la directrice et le point où le diamètre du point de tangence est rencontrée par une parallèle à la tangente, menée du foyer.

Il en résulte que pour mener au point d_1 une tangente à la courbe, il suffit, sur le diamètre de ce point, de porter $d_1u_1 = dk$, joindre le point u_1 au foyer, et de mener, par le point d donné, une parallèle à cette droite; ce sera la tangente cherchée.

POINT DE VUE SUR LA COURBE, RAYON DE COURBURE.

Plaçons le point de vue en un point V de la courbe, fig. 64, il est évident que, comme pour l'ellipse, la tangente à la circonférence en ce point, sera aussi la tangente à la parabole; les deux courbes ayant en ce point une tangente commune, sont donc tangentes entr'elles.

Cette tangente sera un axe d'homologie de ces deux courbes, le point de vue étant à l'infini et la direction d'homologie étant celle des diamètres.

Il existe généralement un autre axe d'homologie JJ_1 qui est donné, de sorte que la parabole doit passer par les deux points c, c_1 d'intersection de cette droite et de la circonférence ; ces deux points peuvent être imaginaires, et toutes les paraboles qu'on peut construire alors pour ce même point de vue seront toutes tangentes à cette tangente Vs.

Les deux tangentes sm, sV font des angles égaux avec la corde mV de tangence, or mV est parallèle aux divers diamètres de la parabole, sm est parallèle à l'axe d'homologie TT_1, et sV est le second axe d'homologie ; on voit ici que, comme dans l'ellipse,

La direction des diamètres dans une parabole fait des les égaux avec les deux axes d'homologie.

Entre la circonférence et la parabole ainsi placées, on trouverait des propriétés semblables à celes démontrées pour l'ellipse ; il n'est donc pas nécessaire de les exposer de nouveau.

Supposons maintenant, fig. 65, que l'axe d'homologie JJ_1 passe par le point V pris sur la courbe, l y aura alors évidemment en V trois points communs entre les deux courbes ; la circonférence sera donc osculatrice à la parabole.

On trouvera facilement, comme pour l'ellipse, fig. 55, le centre et le rayon de ce cercle osculateur.

La parabole étant tracée au point donné V sur cette courbe, on mène la tangente sVs_1 et la normale Vo qui doit contenir le centre du cercle osculateur en ce point V, on trace le diamètre Vm de la courbe qui aboutit à ce point V; la droite TT_1, menée par V et faisant avec le diamètre Vm un angle égal à celui de ce diamètre et de la tangente, sera l'axe d'homologie; cette droite coupe la parabole en deux points, l'un c_1 qui se confond avec celui V, et l'autre en c. Il est évident, alors, que la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette corde cc_1 passera par le centre O du cercle osculateur.

Ou bien encore, comme fig. 55, du point s où la tangente rencontre la droite TT_1, on abaisse sO perpendiculaire sur la direction Vm d'un diamètre; cette droite sO passe de même par le centre O, qui est déterminé, puisqu'il doit se trouver aussi sur la normale VO.

Si on suppose maintenant que l'axe d'homologie TT_1, fig. 66, soit tangent au cercle en V, alors on voit que la parabole aura en ce point quatre points de commun avec la circonférence, c'est-à-dire qu'alors le cercle sera osculateur du 3e ordre avec la parabole.

DE L'HYPERBOLE.

Nous allons maintenant chercher à déterminer la courbe qui est la perspective d'une circonférence, dans le cas où la droite JJ_1 coupe cette circonférence (fig. 67).

Puisque la droite JJ_1 est celle qui contient les points homologues de ceux qui sont à l'infini dans la perspective, on voit déjà que la courbe résultante de la perspective de la circonférence aura deux points à l'infini, qui seront les homologues de ceux d, d_1 où cette droite JJ_1 coupe la circonférence.

La droite TT_1, qui représente la trace du plan du tableau sur le plan de la circonférence, et qui est parallèle à celle JJ_1, peut couper ou ne pas couper cette circonférence; dans la fig. 67, nous admettrons qu'elle la coupe en deux points c, c_1, d'où résultera que, quelle que soit la position du point de vue V, la perspective de la circonférence passera toujours par ces deux points c, c_1, qui sont leur propre perspective.

Soit maintenant V un point quelconque du plan, pris pour le rabattement du point de vue.

Pour obtenir la perspective de la circonférence, nous emploierons toujours la même méthode que pour l'ellipse et pour la parabole, c'est-à-dire que nous prendrons sur JJ_1 deux points de vue auxiliaires m et n, nous joignons le point V à ces deux points par des droites mV, nV. Nous joignons ensuite un point quelconque a de la circonférence avec ces deux points ; par le point π d'intersection de la première droite ma, nous menons $\pi a'$ parallèle à mV; puis, par le point α intersection de la seconde droite na, nous menons $\alpha a'$ parallèle à nV et le point a' d'intersection de $\pi a'$, $\alpha a'$ donnant le point a' pour perspective du point a, de sorte que les points homologues a, a' seront sur le même rayon perspectif Vaa'.

On voit déjà que, si le point a était en d_1 ou d, les droites ma, na deviendraient celles md, nd parallèles à TT_1, et par conséquent ne rencontrant cette droite qu'à l'infini, de sorte que l'homologue du point d ou d_1 serait à l'infini.

On voit aussi que si na est une tangente à la circonférence, son point d'intersection α sera une limite des rayons perspectifs menés de ce point n, de sorte que la droite $\alpha a'$, parallèle à nV, sera une tangente à la courbe, et à partir de ce point elle s'étendra indéfiniment vers la gauche jusqu'aux points homologues à ceux d et d_1 qui sont à l'infini. De même si $n a_1$ est l'autre tangente à la circonférence, menée du point n, elle coupera la droite TT_1 en un point α_1 qui sera une limite; de sorte que la droite $\alpha_1 a'_1$, parallèle à nV, sera une seconde tangente en a'_1 à la courbe, qui s'étendra alors, vers la droite, à l'infini jusqu'aux mêmes points homologues à ceux d, d_1. Il en résulte donc qu'entre ces deux tangentes $\alpha a'$, $\alpha'_1 a'_1$, il n'y aura pas de points de la courbe, tandis qu'au-delà il y aura deux parties de courbe séparées, mais qu'on doit regarder comme se continuant par l'infini.

Si aux points d, d_1 on mène les tangentes dP, d_1P à la circonférence, ces deux droites se rencontreront en un point P qui sera le pôle de la droite dd_1, de sorte qu'une transversale quelconque P$a_1 ma$, menée par le point P, rencontre la circonférence en deux points a, a_1, et la polaire de ce point P en un point m, et les quatre points P, a_1, m, a forment un rapport harmonique ; ainsi on a :

$$\frac{\mathrm{P}a}{\mathrm{P}a_1} = \frac{ma}{ma_1},$$

et cela quelle que soit la transversale menée par le point P_1.

Si aux deux points a, a_1, où une de ces transversales rencontre la circonférence, on mène les tangentes na, na_1, elles se rencontreront nécessairement en un point n situé sur la polaire dd_1 du point P, et de même toute transversale menée par le point n sera coupée par la circonférence et par cette droite Paa_1, qui est la polaire de ce point n, en trois points, lesquels, avec ce point n, formeront aussi un rapport harmonique. Il résulte encore que dans tout quadrilatère inscrit dans la circonférence, et dont les points de concours des côtés opposés seront ceux P et n, les diagonales se couperont au point m. Les trois points P, m, n forment donc un triangle polaire relativement à la circonférence, c'est-à-dire un triangle tel, que chaque sommet est le pôle du côté opposé; les points m et n sont donc conjugués.

Il y a, comme on le voit, une infinité de deux points conjugués m et n situés sur la droite JJ_1, et tous ont pour points homologues sur la courbe des points à l'infini.

D'après cela, prenons pour points de vue auxiliaires m et n, deux de ces points conjugués.

La perspective de la droite Pa_1ma, qui rencontre celle TT_1 au point π, sera une droite $\pi a'p a'_1$ parallèle à mV et passant par le point π; elle contiendra par conséquent les points homologues de ceux a, a_1, m, P. Ceux a', a'_1 sont déjà déterminés, l'homologue du point m sera à l'infini, il ne s'agit plus que de déterminer l'homologue du point P. Or, la tangente Pd rencontre la droite TT_1 au point δ, de sorte que la droite $\delta p'$, parallèle à celle dV, sera la perspective de la tangente Pd, de même celle $\delta_1 p'$ sera la perspective de celle Pd_1, d'où résulte que le point p' d'intersection de ces deux droites sera l'homologue du point P. Remarquons de plus que ces droites $\delta p'$, $\delta_1 p'$ sont des tangentes à la courbe, aux points homologues à ceux d, d_1 qui sont à l'infini, de sorte que ce sont deux tangentes à la courbe à des points à l'infini, et qui comprenaient entr'elles, dans deux angles opposés par le sommet, la courbe entière divisée en deux parties par le point p'. Ces droites ont reçu le nom d'asymptotes de la courbe.

Les quatre points a', p'_1, a'_1 et l'infini, qui sont les homologues de ceux a, P, a_1 et m, doivent former un rapport harmonique, et, comme l'un de ces points est à l'infini, il en résulte que le point p' est le milieu du segment $a'a'_1$.

Pour deux autres points conjugués m_1, n_1, on aurait toujours le même point p' divisant en deux parties égales le segment $a'a'_1$ formé par les deux autres; donc le point p' est le centre de la courbe, il divise en deux parties égales toute droite terminée à la courbe et passant par ce point.

Ainsi toute transversale, telle que Pa_1ma, qui passe par le point P, devient en perspective un diamètre de la courbe. Or, comme toute transversale menée par n coupe la circonférence et sa polaire en des points qui, avec celui n, forment un rapport harmonique, et de plus que ce point n passe à l'infini dans la perspective, et que toutes ces transversales deviennent des parallèles à nV ou π_1p', il s'ensuit que le diamètre correspondant à la droite Pa_1ma coupe en deux parties égales toutes les cordes parallèles à π_1p'.

De même, toute transversale menée par le point m rencontrera la courbe en deux points, et la polaire de ce point m, qui est la droite Pn, en un point, lesquels, avec ce point m, forment un rapport harmonique; et, comme ce point m passe en perspective à l'infini, il en résulte donc que la droite π_1p', qui est la perspective de celle $\mathrm{P}n\pi_1$, coupera en deux parties égales toutes les cordes parallèles au diamètre $a'p'a'_1$. Ces deux droites indéfinies $a'p'a'_1$ et $\pi p'$ sont donc ce qu'on appelle les diamètres conjugués de cette courbe qui a reçu le nom d'*hyperbole*.

L'hyperbole est donc une courbe qui a, comme l'ellipse, une infinité de couple de diamètres conjugués jouissant des mêmes propriétés; ainsi, on trouverait pareillement que, dans l'hyperbole, deux cordes menées d'un point de la courbe aux extrémités d'un même diamètre sont parallèles à deux diamètres conjugués.

Les tangentes aux extrémités d'un même diamètre sont parallèles au diamètre conjugué à ce diamètre.

L'angle, de deux diamètres conjugués de l'hyperbole correspondants à deux points conjugués m, n, est égal à l'angle $m\mathrm{V}n$. Or, les quatre points d, m, d_1, n forment toujours un rapport harmonique. Lorsque le point m se rapproche du point d_1, celui n se rapproche aussi de ce même point; alors l'angle des deux diamètres conjugués, égal à $m\mathrm{V}n$, diminue; quand m est en d_1, alors n se confond aussi avec ce point, de sorte que l'angle des deux diamètres conjugués correspondants est nul; le point d_1 est donc un point double; les deux diamètres se confondent alors avec l'asymptote parallèle à Vd_1. Lorsque le point m se rapproche du point r milieu de dd_1, le point n s'éloigne, et enfin il est à l'infini lorsque m est en r, et l'angle des deux diamètres conjugués correspondants est égal à celui que fait la droite rV avec l'axe dd_1; enfin, quand le point m se rapproche de l'autre point d, le point n passe de l'autre côté de ce point d, avec lequel il se confond lorsque ce point m est en ce point d; alors l'angle des deux diamètres conjugués augmente jusqu'à devenir égal à 200°, et ainsi ces deux diamètres de nouveau se réunissent avec l'autre asymptote. On voit donc que la série des points m, n forment sur la droite JJ_1 une involution, dont les points dd_1 sont les points doubles, et r le centre de cette involution.

Si, sur dd_1 comme diamètre, on décrit une circonférence, toute tangente menée à cette circonférence rencontrera la droite JJ_1 en un point qui, pris pour centre d'une circonférence ayant pour rayon la distance eutre ce centre et le point de tangence, coupera cette droite JJ_1 en deux des points conjugués m, n; car on a :

$$rm.rn = \overline{rd}^2$$

Les quatre droites Vd, Vm, Vd_1, Vn forment toujours un faisceau harmonique, et, si l'angle mVn est droit, alors nécessairement les droites Vm, Vn divisent en deux parties égales les angles des droites Vd, Vd_1; l'angle des deux diamètres conjugués correspondants à ces deux bisectrices est donc droit; ainsi :

Dans toute hyperbole, il y a une série de couples de diamètres conjugués formant des angles de 0° *à* 200° *parmi lesquels il y en a deux de rectangulaires, qui sont les axes de la courbe. L'un de ces diamètres, coupant la courbe en deux points réels et son conjugué, ne la rencontre pas.*

La série des couples de diamètres conjugués forment un faisceau en involution, dont les rayons doubles sont les asymptotes.

Dans le cas des axes, l'angle mVn étant droit, la circonférence décrite sur mn comme diamètre passe nécessairement par le point V, et cette circonférence est orthogonale avec celle décrite sur dd_1 comme diamètre, c'est-à-dire que les tangentes à ces deux circonférences, en leurs deux points communs, sont rectangulaires.

Si le point de vue V était en V_2 ou V_3, alors (fig. 68) les deux asymptotes sont rectangulaires;

la courbe résultante prend dans ce cas le nom d'hyperbole équilatère. Ainsi :

Une hyperbole équilatère est celle dont les asymptotes sont rectangulaires.

Les deux asymptotes et deux diamètres conjugués quelconques forment toujours un faisceau harmonique ; si on le coupe par une transversale parallèle à une de ces quatre droites, la conjuguée à cette droite partagera en deux parties égales le segment formé par les deux autres. Donc :

Dans une hyperbole, la partie d'une tangente comprise entre les deux asymptotes et divisée, au point de tangence, en deux parties égales.

Les parties d'une corde comprises entre la courbe et les asymptotes sont égales.

Les deux tangentes Pd, Pd_1, fig. 67, et celles na, na_1, forment un quadrilatère circonscrit à la courbe aux points a, a_1, d, d_1, et les diagonales ee_1 et ff_1 passent par le point m conjugué de celni n: A ce quadrilatère correspond un autre quadrilatère $e'e'_1f'f'_1$ circonscrit à l'hyperbole aux points homologues a', a'_1 et à l'infini qui est l'homologue à la fois des points d, d_1 ; il en résulte que les deux droites $f'f'_1$ et $e'e'_1$ seront des droites parallèles au diamètre $a'a'_1$, et que les droites $f'e'$, f'_1e_1 deviendront les diagonales de ce quadrilatère, tandis que les droites $f'e'_1$, $f'e'$, homologues des tangentes na_1, na seront deux parallèles au diamètre conjugué à celui $a'a'_1$; il s'ensuit donc que ce quadrilatère deviendra un parallélogramme, dont les côtés seront parallèles et égaux à deux diamètres conjugués; la partie $a'a'_1$ est la longueur de ce diamètre, et, quoique le diamètre conjugué ne rencontre pas la courbe, on dit que la longueur $b'b'_1$, comprise entre les deux autres côtés, est celle de ce diamètre.

Si les diamètres conjugués sont rectangulaires, ce sont les longueurs des axes de la courbe.

On voit que ces points $b'b'_1$ extrémités du diamètre, sont les homologues des points b, b_1 où les deux diagonales ff_1, ee_1 rencontrent la droite Pn polaire du point m.

Etant donnés une hyperbole et deux diamètres, on aura les asymptotes en construisant le parallélogramme formé par ces deux diamètres, les diagonales seront les asymptotes.

Ou bien, connaissant les asymptotes, on aura, par le même parallélogramme, la longueur de ces diamètres.

Si l'hyperbole est équilatère, auquel cas les asymptotes sont rectangulaires, alors le parallélogramme sera un losange; d'où il suit que :

Dans une hyperbole équilatère, deux diamètres conjugués sont toujours égaux.

Dans l'hyperbole équilatère construite fig. 68, les droites Vd, Vd_1 parallèles respectives aux asymptotes sont rectangulaires, donc, comme avec deux rayons conjugués quelconques Vm, Vn elles forment un rapport harmonique, il en résulte que chacune de ces droites Vd, Vd_1 divise en deux parties égales les angles des droites Vm, Vn parallèles à deux diamètres conjugués. D'où résulte :

Dans une hyperbole équilatère, deux diamètres conjugués font des angles égaux avec un asymptote, ou mieux chaque asymptote divise en deux parties égales l'angle de deux diamètres conjugués quelconques.

Deux diamètres quelconques font entre eux un angle égal à celui formé par les deux diamètres conjugués.

Soit α l'angle de deux diamètres et β celui de deux autres (supposons $\alpha > \beta$); alors $\frac{\alpha - \beta}{2}$ est donc l'angle de deux diamètres et qui est égal à celui des deux autres; il en résulte que $\frac{\alpha - \beta}{2}$ et $\varphi + \frac{\alpha - \beta}{2}$

sont les angles que font les deux derniers diamètres avec un des premiers diamètres, or la somme de ces angles est égale à α. Donc :

Dans une hyperbole équilatère, la somme des angles que font deux diamètres conjugués avec un troisième diamètre est égale à l'angle que fait ce troisième diamètre avec son conjugué. Les angles étant coulés dans le même sens; s'ils étaient considérés tournant en sens opposés, *la différence de ces angles serait égale au supplément de l'angle ci-dessus du troisième diamètre et de son conjugué.*

Si dans une hyperbole équilatère on joint un point quelconque de la courbe, aux deux extrémités d'un diamètre quelconque, le triangle formé par ces deux droites qui sont toujours parallèles à deux diamètres conjugués, et la longueur de ce diamètre, considérée comme base de ce triangle est tel, que la somme des angles à la base, tournés dans le même sens est égale à l'angle de son diamètre et de son conjugué, ou que la différence des angles intérieurs avec cette même base est égale au supplément de cet angle.

Si la base est le grand axe de la courbe, observant que les cordes qui joignent un point de la courbe aux extrémités d'un diamètre sont toujours parallèles à deux diamètres conjugués, on aura :

Dans une hyperbole équilatère, si on joint un point de la courbe aux extrémités du graud axe, ces droites feront, avec le grand axe, des angles qui, contés dans le même sens, auront leur somme égale à un angle droit, ou la différence des angles, dirigés en sens inverse, c'est-à-dire intérieur au triangle, sera aussi égale à un droit.

On sait que, dans le cercle, c'est la somme des angles que font deux cordes passant par les extrémités d'un même diamètre, qui est égale à un droit, analogie qui fournit un procédé simple de construire une hyperbole équilatère sur une droite prise pour son grand axe.

Les droites Vm, Vn, fig. 67, étant parallèles à deux diamètres conjugués $a'a'_1$, $b'b'_1$, il est facile d'avoir le rapport des longueurs de ces diamètres. En effet on a :

$$\frac{a'a'_1}{\alpha\alpha_1} = \frac{Vm}{mn},$$

et :

$$\frac{b'b'_1}{\beta\beta_1} = \frac{Vn}{mn};$$

donc en divisant :

$$\frac{a'a'_1}{b'b'_1} = \frac{Vm}{Vn} \cdot \frac{\alpha\alpha_1}{\beta\beta_1}.$$

Soient aa_1, bb_1 deux diamètres conjugués quelconques, fig. 68, d'une hyperbole équilatère, soit γ l'angle de ces deux diamètres conjugués. Joignons un point quelconque h de la courbe avec les deux extrémités a et a_1 du diamètre réel aa_1 ; soit hg une parallèle au diamètre conjugué de celui aa_1, elle coupe ce diamètre au point g. Désignons par δ l'angle ga_1h, et par δ_1 l'angle gah, on aura :

$$hg = ga_1 \frac{\sin. \delta}{\sin. (\gamma - \delta)},$$

et :

$$hg = ga \frac{\sin. \delta_1}{\sin. (\gamma - \delta_1)};$$

mais nous avons démontré que dans l'hyperbole équilatère on a :

$$\delta + \delta_1 = \gamma,$$

d'où :

$$\delta_1 = \gamma - \delta;$$

ainsi on a

$$hg = ga_1 \frac{\sin. \delta}{\sin. (\gamma - \delta)},$$

et :

$$hg = ga\,\frac{\sin.(\gamma - \delta)}{\sin.\delta}\,;$$

et multipliant l'une par l'autre on obtient :

$$\overline{hg}^2 = ga.ga_1\,;$$

or hg et gp sont ce qu'on appelle les coordonnées du point quelconque h de la courbe ; hg se désigne ordinairement par y et gp par x ; de plus, en désignant par A le demi-diamètre pa'_1 de la courbe, on a :

$$ga_1 = pg - pa_1 = x - \mathrm{A}\,,$$

et :

$$ga = pg + \mathrm{A} = x + \mathrm{A}\,;$$

ainsi on aura :

$$y^2 = (x - \mathrm{A})\,(x + \mathrm{A}) = x^2 - \mathrm{A}\,;$$

ou :

$$x^2 - y^2 = \mathrm{A}^2.$$

qui est alors l'équation de l'hyperbole équilatère, quels que soient les diamètres conjugués auxquels elle est rapportée ; ainsi on a ces théorèmes :

Dans l'hyperbole équilatère, la différencc des carrés des coordonnées d'un point quelconque de la courbe est constante et égale au carré du demi-diamètre réel.

Une corde quelconque est coupée par le diamètre conjugué en deux parties égales, dont le produit est égal à celui des distances de son point milieu g *aux deux extrémités* a, a_1 *de ce diamètre.*

Il en résulte que :

Dans une hyperbole équilatère, deux cordes parallèles respectivement à deux diamètres conjugués se coupent réciproquement en deux parties dont le produit est le même, c'est-à-dire que le produit des distances des extrémités d'une corde à son point d'intersection avec l'autre est égal au produit des distances des extrémités de l'autre corde au même point.

En effet : soient hh_1, ii_1 deux cordes parallèles aux diamètres respectifs bb_1, aa_1, et se coupant au point j, on a évidemment

$$hj = hg - gj, \quad h_1j = hg + gj;$$

donc

$$hj.h_1j = \overline{hg}^2 - \overline{gj}^2 = y^2 - \overline{gj}^2$$

mais puisque pour tous les points de la courbe on a

$$x^2 = A^2 + y^2,$$

pour les points i, i_1 d'intersection de la corde jii_1 pour lesquels $y = gj$, on a donc

$$x^2 = \overline{ki}^2 = A^2 + \overline{gj}^2,$$

ou :

$$ki = \pm\sqrt{A^2 + \overline{gj}^2},$$

or :

$$ij = kj - ki \text{ et } i_1 j = kj + ki;$$

d'où :

$$ji . ji_1 = \overline{kj}^2 - \overline{ki}^2 = x^2 - A^2 - gj^2$$

et comme :

$$hj . h_1 j = y^2 - \overline{qj}^2,$$

et que :

$$x^2 - A^2 - \overline{gj}^2 = y^2 - \overline{qj}^2;$$

on a donc :

$$hj.h_1j = ji.ji_1$$

DES DIVERSES POSITIONS DU POINT DE VUE.

Le point de vue rabattu sur le plan de la circonférence, peut y occuper, comme pour l'ellipse, une position quelconque; tant que la droite JJ_1 coupera la circonférence, il en résultera, pour la perspective de cette circonférence, une hyperbole; admettons que cette droite JJ_1 et la circonférence soient fixes, ainsi que celle TT_1 qui est la trace du tableau, alors toutes les hyperboles qu'on peut obtenir pour diverses positions du point V passeront toutes par les deux points c, c_1 ou cette droite TT_1 coupe la circonférence, mais, comme pour l'ellipse, deux quelconques de ces courbes seront homologiques, car toutes les droites correspondantes dans ces deux courbes se coupent sur la droite TT_1 qui sera leur axe d'homologie, de plus deux points correspondants seront toujours sur une droite parallèle à celle VV_1 qui joint les deux points de vue; donc les deux figures seront homologiques pour un point de vue à l'infini, et auront la droite TT_1 pour axe d'homologie; il en résultera, qu'à des droites parallèles dépendantes de l'une de ces courbes, correspondra dans l'autre des droites aussi parallèles. Qu'à des divisions sur une droite correspondra des divisions sur la droite homologue formant des segments proportionnels à ceux formés sur la première droite. A deux points conjugués m et n, correspondra, dans chacune des courbes, deux diamètres conjugués dont l'angle sera égal à celui $m\mathrm{V}n$ formé par les droites $\mathrm{V}m$, $\mathrm{V}n$ qui joignent les points m, n au point de vue de la courbe considérée; de sorte que si cet angle est droit, ce seront les axes de la courbe, il en résulte que si le point de vue V, en variant, reste toujours sur la même circonférence passant par les points m, n, V, les diamètres conjugués correspondant dans chacune des courbes qu'on peut alors obtenir, font le même angle.

Si l'angle $m\mathrm{V}n$ est droit, pour toutes les positions du point de vue sur cette circonférence $m\mathrm{V}n$, les axes de ces courbes seront homologiques. De plus, on voit que les centres de toutes ces courbes seront sur une même circonférence; il en sera de même pour les sommets de la courbe et autres points homologues. On voit encore que le rapport des axes dans deux de ces courbes sera égal à celui de $\frac{Vm}{Vn}$ à $\frac{V_1 m}{V_1 n}$, V et V_1 étant les points de vue de ces deux courbes.

Il résulte encore de la construction qu'à une surface formée dans la première par des droites ou des courbes, correspondra dans l'autre une seconde surface formée par les droites ou courbes homologues, et ces deux surfaces seront entre elles comme les distances des points V, V_1 de la droite $J J_1$, ou comme les distances de deux points homologues à l'axe d'homologie TT_1. Cela résulte de la considération de triangles semblables employés dans les constructions.

Parmi les diverses courbes qu'on peut obtenir pour diverses positions du point de vue, on voit que si le point V se rapproche de la droite $J J_1$ la courbe s'aplatit et qu'enfin si ce point est sur cette droite, elle devient une droite double allant à l'infini, mais interrompue; ainsi, supposons que le point V soit en n, la courbe se composera de deux droites doubles sur celle $T T_1$, l'une commençant en α et s'étendant à gauche jusqu'à l'infini, et l'autre commençant à α_1 et s'étendant indéfiniment à droite, de sorte que la partie intermédiaire $\alpha\alpha_1$ est le grand axe de cette courbe.

Si le point V était en m, la courbe deviendrait la droite double TT_1 indéfinie dans les deux sens.

Enfin, lorsque le point de vue vient en V_2 ou V_3 à l'intersection de la circonférence mVn et de celle dVd_1, les deux hyperboles sont équilatères.

Ainsi on voit que parmi toutes les hyperboles qu'on peut obtenir pour diverses positions du point de vue sur la même circonférence mVn, et qui sont toutes homologues pour un point à l'infini, il y a : 1° une droite entièrement double et infinie dans les deux sens ; 2° une droite double interrompue ; 3° deux hyperboles équilatères.

Et enfin une quantité d'hyperboles ayant des rapports infinis différents, pour les axes.

Si maintenant nous supposons que l'axe TT_1 s'éloigne ou se rapproche de la droite JJ_1, on aura des courbes semblables aux précédentes, mais plus grandes ou plus petites, de sorte qu'on peut obtenir toutes sortes d'hyperboles pour la perspective du cercle.

Remarquons qu'à mesure que l'axe TT_1 se rapproche de JJ_1, la droite $\alpha\alpha_1$ et par suite le grand axe $a'a'_1$ diminue, de sorte que ses sommets a', a'_1 se rapprochent du centre p; à la limite, lorsque ces deux droites se confondent, alors la courbe se réduit aux deux asymptotes; on voit en effet que, dans ce cas, le cône perspectif est coupé par le plan du tableau suivant deux droites, puisque, dans ce cas, ce plan passe par le sommet même du cône.

Ainsi, parmi les variétés d'hyperboles qu'on peut obtenir pour perspective d'une circonférence il faut ajouter deux droites se coupant suivant un certain angle. Il y a lieu d'observer que, si ces deux droites sont considérées comme une conique, il faut remarquer qu'elle diffère des autres en ce qu'elle a un seul point double; celles qui se réduisent à une droite double en ont une infinité, et les autres n'en ont pas.

DE L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE, CONCENTRIQUE ET HOMOLOGIQUE A UNE HYPERBOLE QUELCONQUE.

Puisqu'il y a dans le plan de la circonférence une infinité d'hyperboles équilatères et une infinité d'autres, et que deux à deux elles sont homologiques pour un point de vue à l'infini, c'est-à-dire que deux points homologues quelconques sont toujours sur une même droite parallèle, considérons alors une hyperbole équilatère et un autre hyperbole; en les rapprochant, elles ne ces-seront pas d'être homologiques ; enfin, on peut faire coïncider les deux centres, et on aura ainsi le cas que nous allons considérer ici de deux hyperboles concentriques dont l'une est équilatère ; entre ces deux courbes il y aura des relations analogues à celles que nous avons établies pour une ellipse et un cercle concentriques, et qui ont servi à établir des propriétés de l'ellipse au moyen de ce cercle concentrique.

Soit donc, fig. 69, aa_1 le grand axe d'une hyperbole équilatère, ce qui suffit pour la construire par points, au moyen de cette propriété démontrée, que si on joint un point quelconque de la courbe avec les deux extrémités du grand axe, ces deux droites feront avec cet axe un triangle dont la différence des angles avec cet axe est un angle droit.

Les asymptotes de cette courbe seront des diamètres inclinés de 50° sur les axes. Les deux perpendiculaires ac, a_1c_1, aux extrémités du grand axe, seront des tangentes à la courbe qui serviront à déterminer le rectangle cc_1dd_1 dont les asymptotes sont les diagonales, de sorte que le petit axe sera bb_1 égal au côté de carré.

Soit f un point quelconque de cette hyperbole équilatère, et f' celui homologue dans l'hyperbole qu'il s'agit de construire. La direction d'homologie sera donc celle de la droite ff'; cette direction peut être quelconque, ainsi que la distance entre ces points f et f', de sorte qu'on peut avoir une infinité d'hyperboles différentes. Nous prenons pour axe d'homologie le grand axe aa_1, mais on pourrait prendre toute autre droite; de plus, sur la figure 69, nous supposons la droite ff' parallèle à l'axe d'homologie aa_1.

Les points a, a_1, où l'axe d'homologie coupe l'hyperbole équilatère, appartiennent aussi à la courbe cherchée.

Si on joint le point f à ces points a et a_1, les droites fa, fa_1 auront pour homologues les droites $f'a$, $f'a_1$, qui joignent le point f', homologues de celui f, à ces mêmes points. En général, si par le point f on mène une droite quelconque $f\alpha$ rencontrant l'axe d'homologie en α, cette droite $f\alpha$ aura pour homologue celle $f'\alpha$. Rappelons maintenant que des droites parallèles, dans l'une des figures, doivent avoir pour homologues des droites parallèles entr'elles et dont la direction est connue; ainsi, par un point quelconque tel que g, si on mène la droite $g\beta$, parallèle à $f\alpha$, l'homologue de $g\beta$ sera parallèle à $f\alpha$; donc, si du point β où cette droite $g\beta$ rencontre l'axe d'homologie, on mène $\beta g'$ parallèle à $f\alpha$, le point g' homologue de celui g, doit être sur cette droite; mais, comme il doit être sur une parallèle gg' à la direction ff' d'homologie, il sera donc en g' intersection de ces deux droites.

Nous remarquerons que ce point g' sera d'autan mieux déterminé, que les directions ff' et celle arbitraire $f'\alpha$ se rapprocheront d'être rectangulaires entr'elles.

En continuant de la même manière pour tous les points dépendants de l'hyperbole équilatère, on aura ceux homologues de l'hyperbole cherchée.

Les asymptotes de l'une des courbes seront respectivement homologues de celles de l'autre; or, le point g appartenant à l'asymptote de la première courbe, le point g' appartiendra à l'asymptote homologue de la seconde, et comme le centre o est un point d'intersection de ces deux asymptotes, il s'ensuivra que og' sera une des asymptotes; on trouvera pareillement la seconde.

Les asymptotes de l'hyperbole cherchée étant déterminées, les bisectrices nous donneront les directions des axes; ainsi, l'hyperbole cherchée est déterminée.

On peut maintenant passer des propriétés de l'hyperbole équilatère à celles d'une hyperbole quelconque, comme nous l'avons fait de celles du cercle à celles d'une ellipse, en observant qu'à des droites parallèles dans l'une, correspondent des droites parallèles dans l'autre; que ces droites sont divisées en parties proportionnelles par les points homologues dans l'autre; enfin, qu'une surface quelconque dépendante de l'hyperbole, est équivalente à la surface homologue.

Ainsi, par exemple, deux cordes parallèles à deux diamètres conjugués, dans l'hyperbole équilatère, se coupent réciproquement en deux parties dont le produit est le même.

Donc, dans une hyperbole :

Deux cordes parallèles à deux diamètres conjugués se coupent en deux parties dont le rapport des produits est égal à celui des carrés des diamètres respectivement parallèles.

Si une de ces cordes est un diamètre, la seconde corde parallèle au diamètre conjugué sera divisée par ce diamètre en deux parties égales; désignons par y une de ses parties, par A et B les grandeurs des diamètres conjugués, on aura donc d'après le théorème :

$$\frac{y^2}{(x+A)(x-A)}=\frac{B^2}{A^2},$$

d'où :

$$A^2y^2-B^2x^2=A^2B^2,$$

qui est l'équation connue de l'hyperbole rapportée à deux diamètres conjugués.

Ce que nous avons exposé pour les propriétés de l'ellipse de celles du cercle, nous dispensera d'exposer toutes les propriétés analogues de l'hyperbole, en les déduisant de celles de l'hyperbole équilatère.

DU POINT DE VUE PLACÉ AU CENTRE DE LA CIRCONFÉRENCE. PROPRIÉTÉS DES FOYERS.

Le point de vue V étant placé, fig. 70, au centre O de la circonférence, nous obtenons pour sa perspective l'hyperbole représentée fig. 70. Le centre de cette circonférence est donc le centre d'homologie, et TT_1 l'axe d'homologie. Le centre p de cette hyperbole sera situé sur l'axe orP perpendiculaire à TT_1, ainsi que son axe $a'a_1'$; ces points a', a'_1 étant les perspectives respectives des points a, a_1 situés sur cette même perpendiculaire.

Soit maintenant tracée la droite II_1, a une distance de TT_1 égale à celle du point V à JJ_1; cette droite sera l'homologue de celle à l'infini dans le plan de la circonférence, de même que celle JJ_1 est l'homologue, dans le plan de la circonférence, de celle qui est à l'infini dans le plan de l'hyperbole.

Abaissons du point k, sur la droite JJ_1, la perpendiculaire kl, et du point k' sur II_1 celle $k'l_1$. Les points k, k^1 étant homologues, on a d'après un théorème de perspective :

$$\frac{Fk}{Fk_1} = \frac{kl}{d.},$$

et :

$$\frac{Fk'}{Fk} = \frac{k'l_1}{h};$$

d'où :

$$\frac{k'F}{k'l_1} = \frac{Fk}{h} = \frac{R}{h}.$$

Le point de vue V devient ce qu'on appelle un des foyers de l'hyperbole, la droite II_1 est la directrice correspondante à ce foyer. Comme la courbe est symétrique par rapport à ses deux axes, il y a donc un second foyer de la courbe, situé symétriquement sur le grand axe de la courbe, avec sa directrice. Ainsi :

Dans une hyperbole, il y a deux foyers et deux directrices tels que le rapport des distances de chaque point de la courbe à un des foyers et à sa directrice est constant et égal au rapport du rayon de la circonférence à la distance de ce foyer à la droite JJ_1.

Si le point k' était en a', une des extrémites du grand axe, on aurait :

$$\frac{a'F}{a's}=\frac{R}{h},$$

et à l'autre extrémité a'_1 :

$$\frac{a'_1F}{a'_1s}=\frac{R}{h};$$

on tire de ces deux égalités :

$$\frac{a'F-a's}{a's}=\frac{R-h}{h}=\frac{Fs}{a's}=\frac{d}{a's},$$

et :

$$\frac{a'_1F+a'_1s}{a'_1s}=\frac{h+R}{h}=\frac{Fs}{a's}=\frac{d}{a'\ s};$$

ou bien :

$$\frac{a'F-a's}{a'F}=\frac{R-h}{R}=\frac{Fs}{a'\ F}=\frac{d}{d'F},$$

et :

$$\frac{a'_1F+a'_1s}{a'_1F}=\frac{h+R}{R}=\frac{Fs}{a'_1F}=\frac{d}{a'_1F};$$

d'où on tire :

$$a's=\frac{d.h}{R-h},\ a'F=\frac{d.R}{R-h},$$

et :

$$a'_1s=\frac{d.h}{R+h},\ a'_1F=\frac{d.R}{R+h};$$

expressions des distances des extrémités du grand axe à un foyer et à sa directrice.

On en conclurait, comme pour l'ellipse :

$$\frac{a's}{a'F}=\frac{a'_1s}{a'_1F}=\frac{h}{R},$$

c'est-à-dire que les quatres points a', a'_1, s, F forment des segments en rapport harmonique.

On a aussi :

$$a'F : a'_1F = R+h : R-h = ar : a_1r;$$

c'est-à-dire que : *le rapport des distances d'un foyer à un sommet de la courbe est égal au rapport des distances* ra, ra_1 *de la droite* JJ_1 *aux deux extrémités* a, a_1 *du diamètre* aa_1.

En désignant le grand axe par $2A$, on a :

$$A = \frac{a's + a'_1 s}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{d.R}{R-h} + \frac{h.d}{R+h}\right) = \frac{d.h.R}{R^2 - h^2}.$$

Le triangle pa'_1e et celui Fdr sont semblables, on a donc :

$$\frac{a'_1 e}{a'_1 p} = \frac{dr}{Fd},$$

ou :

$$\frac{B}{A} = \frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{h};$$

d'où on tire :

$$B = \frac{A}{h}\sqrt{R^2 - h^2} = \frac{d.R}{\sqrt{R^2 - h^2}};$$

il en résulte :

$$\frac{A}{B} = \frac{h}{\sqrt{R^2 - h^2}},$$

et :

$$\frac{A}{B^2} = \frac{h}{d.R},$$

et :

$$A^2 + B^2 = \frac{d.^2 R^4}{(R^2 - h^2)^2}.$$

Puisqu'il y a un second foyer F_1 placé sur le grand axe à même distance que le premier, on a donc :

$$FF = a'F + a'F_1 = a'F + a'_1F =$$

$$\frac{d.R}{R-h} + \frac{d.R}{R+h} = \frac{2.\ d_1 R^2}{R^2 - h^2},$$

par conséquent, la moitié ou :

$$pF = \frac{d.\ R^2}{R^2 - h^2} = \sqrt{A^2 + B^2} = pe.$$

Donc, dans une hyperbole :

La distance du centre de la courbe aux deux foyers est égale à la racine carrée de la somme des carrés des axes.

Si du centre de la courbe avec pe $= \sqrt{A^2 + B^2}$, *on décrit une circonférence, elle passera par les deux foyers et par les quatre sommets du rectangle construit sur les axes.*

On a évidemment :

$$k'F_1 - k'F = k_1F - k'F,$$

or :

$$k'F = \frac{R}{h} . k'l,$$

et :

$$k_1F = \frac{R}{h} k_1 l.$$

Donc :

$$k'F_1 - k'F = \frac{R}{h}(k_1 l_2 - k' l_1) = \frac{R}{h} . l_1 l_2 = \frac{R}{h}(a'_1 s - a's);$$

Mais nous avons trouvé :

$$a'_1 s = \frac{d.h}{R+h}, \quad a's = \frac{d.h}{R-h};$$

d'où :

$$a'_1 s - a's = \frac{2\,d.h^2}{R^2 - h^2} = 2\,A.$$

Donc :

La différence des rayons vecteurs menés des foyers *à un même point d'une hyperbole, est constante et égale au grand axe.*

On a trouvé :

$$a'F = \frac{d.R}{R-h},$$

t :

$$a'_1F = \frac{d.R}{R+h};$$

donc :

$$a'F.a'_1F = \frac{d^2R^2}{R^2-h^2} = B^2.$$

C'est-à-dire :

Le produit des distances d'un foyer aux sommets de la courbe est égal au carré du petit axe.

Comme $a'_1F = a'F_1$ on a donc $a'F.a'F_1 = B^2$. C'est-à-dire :

Le produit des distances d'un sommet aux deux foyers est égal au carré du petit axe.

Donc :

Si sur la distance des deux foyers comme diamètre, on décrit une circonférence, la perpendiculaire élevée au sommet a *de la courbe jusqu'à cette circonférence sera le demi-petit axe.*

Si sur le grand axe comme diamètre on décrit une circonférence, la longueur de la tangente menée d'un foyer à cette circonférence est égale au petit axe.

Si le point k' était en g sur la droite Fg menée par le foyer perpendiculairement au grand axe, alors on aurait :

$$\frac{Fg}{R} = \frac{d}{h},$$

d'où :

$$Fg = \frac{d.R}{h} = \frac{B^2}{A}.$$

Fg est ce qu'on appelle le paramètre de la courbe, donc :

Dans l'hyperbole, le paramètre est égal au carr du petit axe, divisé par le grand.

Si on suppose, comme pour l'ellipse, un rectangle inscrit dans la circonférence génératrice, et qu'on mène aux quatre sommets les tangentes, on formera un parallélogramme circonscrit dont les diagonales se couperont à angle droit au centre de la courbe en parties égales, et respectivement parallèles aux côtés du rectangle inscrit, et diviseront en parties égales les angles formés par les diagonales de ce quadrilatère.

Les droites homologues formeront un quadrilatère inscrit à l'hyperbole, tel que ses diagonales se couperont à angle droit et en parties égales, et si on forme le quadrilatère circonscrit par les sommets du premier, on aura, comme pour l'ellipse, une suite de théorèmes analogues dont nous citerons les plus importants.

Si un angle est circonscrit à une hyperbole, la droite qui joint le sommet de cet angle à l'un des foyers, divise en parties égales l'angle formé par les deux rayons vecteurs menés du même foyer aux deux points de tangence.

L'angle sous lequel on voit, de l'un des foyers, la partie d'une tangente mobile interceptée entre deux tangentes fixes, est constant pour toutes les positions de cette tangente.

Dans l'hyperbole, les asymptotes sont deux tangentes ; donc :

La partie d'une tangente quelconque interceptée par les deux asymptotes est toujours vue, d'un des foyers, sous le même angle.

L'angle sous lequel, d'un foyer, on voit la partie d'une tangente mobile comprise entre deux tangentes fixes, est égal à celui formé par la droite qui joint ce foyer au point de tangence de l'une des angentes fixes, avec la droite qui joint ce même foyer au point d'intersection de ces deux tangentes fixes.

Si les deux tangentes fixes sont les asymptotes, cet angle sera égal à celui de l'axe et d'un des deux asymptotes.

Si l'hyperbole est équilatère, cet angle sera donc de 50° ou 150°.

Si les deux tangentes fixes sont celles aux sommets a, a_1 de la courbe, cet angle sera droit. Donc :

Si sur la partie d'une tangente quelconque, comprise entre les deux tangentes aux sommets, comme diamètre on décrit une circonférence, elle passera par les deux foyers.

Si par le foyer on mène une transversale quelconque, le pôle de cette transversale sera sur la directrice de ce foyer, et la droite qui joint le foyer à ce pôle est perpendiculaire à la transversale.

Les deux rayons vecteurs menés au point de tangence d'une tangente, font des angles égaux avec cette tangente.

Les longueurs des perpendiculaires abaissées des *foyers sur une tangente, sont entr'elles comme celles des rayons vecteurs.*

Les pieds des perpendiculaires abaissées des foyers sur les tangentes, sont tous situés sur la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre.

Le produit des perpendiculaires abaissées des foyers sur une tangente est constant et égal au carré du petit axe.

La partie d'un rayon recteur comprise entre le point de tangence et un diamètre parallèle à la tangente, est constante et égale à la moitié du grand axe.

Si l'on joint par des droites le sommet d'un angle circonscrit à une hyperbole avec les deux foyers, ces deux droites formeront, avec les tangentes partant de ce point, des angles égaux, et par conséquent forment des angles égaux avec les droites qui divisent en deux parties égales les angles.

POINT DE VUE EN UN POINT DE LA CIRCONFÉRENCE.

Dans cette position du point de vue, fig. 70, l'hyperbole a en ce point V une tangente commune avec le cercle, de sorte que les deux courbes ont deux points communs; elles se coupent donc, comme on le voit fig. 70, en deux autres points c et c_1 situés sur l'axe d'homologie TT_1.

Il peut arriver qu'un des points c ou c_1 se trouve aussi réuni en V, de sorte qu'alors les deux courbes ont en ce point trois points de communs, alors le cercle est dit osculateur de l'hyperbole en ce point, et cette osculation est du 2e ordre, puisque les deux courbes n'ont que trois points communs.

La détermination de ce cercle, dont le rayon est le rayon de courbure en ce point, se fera comme pour l'ellipse; elle donnera naissance aux mêmes théorèmes; nous nous dispenserons donc de les rapporter.

Enfin, les deux points c et c_1 peuvent être réunis au point de vue V, de sorte que les deux courbes auront en ce point quatre points communs; alors l'osculation des deux courbes sera du 3e ordre. Les points où cette osculation est possible sont les sommets de la courbe.

DES PROPRIÉTÉS COMMUNES A TOUTES LES CONIQUES.

Après avoir fait connaître la génération de toutes les coniques par les perspectives d'une circonférence, et les diverses propriétés de ces courbes, nous allons les considérer d'une manière générale, c'est-à-dire chercher leurs propriétés communes.

Pour cela, nous n'aurons qu'à faire observer que toute section conique étant la perspective d'une circonférence, toute propriété de cette courbe qui ne change pas par la perspective, appartiendra par conséquent à toute section conique, de sorte qu'il suffit de constater cette propriété perspective dans la circonférence.

Parmi les propriétés perspectives, nous rappellerons les suivantes :

1° A un point, une droite, correspondent toujours en perspective un point, une droite.

2° A quatre points sur une droite, correspondent quatre points sur la droite homologue, et qui sont tels que le rapport anharmonique des quatre premiers est égal à celui des quatre autres.

3° A un faisceau de quatre droites correspond un autre faisceau de quatre droites, et le rapport anharmonique du premier faisceau est égal à celui du second.

4° A un faisceau d'un nombre quelconque de droites correspond un autre faisceau d'un même nombre de droites se correspondant chacune à chacune, et le rapport anharmonique de quatre quelconques des droites du premier faisceau est égal à celui des quatre droites correspondantes du second. Ces deux faisceaux sont dits homographiques, ou se correspondent homographiquement.

Le rapport anharmonique est donc essentiellement une relation perspective.

Soient donc, fig. 72, a, b, c, d, quatre points d'une circonférence, joignons ces points à un cinquième point O de cette courbe par les droites Oa, Ob, Oc, Od, il est évident que ces droites font entr'elles des angles qui seront toujours les mêmes, quelle que soit la position du point O sur la circonférence, par conséquent le rapport anharmonique des quatre droites Oa, Ob, Oc, Od est constant pour tous les points de la circonférence. Nous désignerons à l'avenir ce rapport anharmonique par O (a, b, c, d). Et ainsi :

Dans toute section conique, le rapport anharmonique de quatre droites, joignant quatre points de cette courbe à un cinquième, est constant quelle que soit la position du cinquième point sur cette courbe.

Si le point O était en a, c'est-à-dire se confondait avec ce point, alors la droite Oa deviendrait la tangente at en ce point, et le rapport anharmonique a (t, b, c, d).

Si ce rapport anharmonique est donné, nous dirons que la conique qui passe par les quatre points a, b, c, d est *capable* de ce rapport anharmonique, par analogie à l'expression de segment de cercle *capable* d'un angle donné.

On peut exprimer le théorème ci-dessus d'une autre manière; a, b, c, d étant quatre points de la courbe, et O, O_1 deux autres points de cette courbe, que :

Le rapport anharmonique O (a, b, c, d) *est égal à celui O_1* (a, b, c, d).

Sous cet énoncé, il présente une construction de la courbe par points, lorsqu'on connaît cinq points de cette courbe. Soient a, b, c, O, O_1 les cinq points donnés, regardons les points O et O_1 comme les sommets de deux faisceaux de quatre droites $O\,(a, b, c, d)$, $O_1\,(a, b, c, d)$ dans lesquels le rayon Od a été pris arbitrairement, et le rayon O_1d tel que le rapport anharmonique $O_1\,(a, b, c, d)$ soit égal à celui $O\,(a, b, c, d)$, alors les deux rayons Od, O_1d se couperont en un point d de la courbe. En faisant varier le rayon Od, et prenant pour celui O_1d correspondant celui qui rend les deux rapports anharmoniques ci-dessus égaux, on aura une suite de points de la courbe.

On remarque que si le point d est en O_1, alors le rayon correspondant à celui OO_1 est la tangente en O_1; de même, s'il est en O, le rayon O_1O aura pour homologue la tangente au point O.

Pour exécuter la construction de la courbe par point, il faut savoir trouver le quatrième rayon d'un faisceau dont le rapport anharmonique est donné; parmi les diverses méthodes, en voici un très-simple donnée sur la figure.

Les quatre rayons O (a, b, c, d) coupent une diagonale ad aux points $a, i_1 j_1 d$; les quatre rayons O_1 (a, b, c, d) coupent la diagonale Od, qui a le point d commun avec la première, aux points l, i, j, d; or, comme le rapport anharmonique O (a, b, c, d) est égal à celui O_1 (a, b, c, d), donc le rapport anharmonique formé sur la première diagonale ad par les points a, i, j, d doit être égal à celui formé sur la diagonale Od par les points homologues $l, i_1 j_1, d$; mais ces deux rapports ont un point d commun, donc les droites alO_1, ii_1, jj_1 doivent concourir en un même point k. Connaissant ce point k, on mène par ce point une transversale quelconque kmm_1 qui rencontre la diagonale ad à un point m et celle Od à un point m_1, les deux droites Om, O_1m se couperont en un point e de la courbe.

Il suffit, pour exécuter cette construction, de cinq points connus; soient en effet, fig. 73, a, b, c, d, e les cinq points donnés. Considérons les points a et d comme remplaçant les deux sommets O, O_1 des deux faisceaux. Au point a on aura les quatre rayons a (b, c, d, e), au point d ceux correspondants seront db, dc, la tangente dt correspondra au rayon ad, et enfin de. Les rayons a (b, c, d, e) rencontrent la diagonale eb aux points respectifs b, g, f, e; ceux correspondants d (b, c, t, e) rencontrent la diagonale ec aux points i, c, t, e, donc les droites bi, gc, ft se rencontrent en un même point h.

Par le point h ainsi déterminé, menant une transversale quelconque, elle rencontrera, comme ci-dessus, une des diagonales eb en un point m, et l'autre diagonale ec en un autre point m_1; alors les droites am, dm_1 se couperont, comme fig. 72, en un point de la courbe.

Remarquons que le point t de la tangente td est déterminé par l'intersection des deux droites ect et fht qui sont connues; car ec est une diagonale du pentagone $abcde$ formé par les cinq points donnés; f est l'intersection des deux diagonales ad, eb, et le point h est l'intersection des deux diagonales db, ac. Donc la tangente en un des points d est ainsi déterminée.

Menons dans le pentagone $abcde$ toutes les diagonales, elles formeront entr'elles un autre pentagone $fghij$ qui sera tel, que le point d'intersection d'un de ses côtés, tel que gh avec la diagonale fi, qui ne passe pas par les points g ou h, détermine la tangente à un des sommets du pentagone; faisant de même pour les autres, on aura immédiatement les cinq points t, t_1, t_2, t_3, t_4 qui déterminent les cinq tangentes aux sommets du pentagone.

Il résulte du théorème ci-dessus, que si sur une conique on prend une suite de points et qu'on les joigne à deux points quelconques de la même courbe, les deux faisceaux seront tels, que quatre droites quelconques de l'un formeront un rapport anharmonique qui sera égal à celui formé par les droites respectivement correspondantes; on dit alors que ces deux faisceaux sont homographiques ou se correspondent homographiquement.

La construction de la courbe donnée par les figures 72 et 73, nous fait voir que le triangle emm_1, dont le sommet e décrit la courbe, est tel, que ses trois côtés passent toujours par trois points fixes qui, pour la fig. 72, sont O, O_1, k, et pour la fig. 73 sont a, d et k. De plus, les sommets m, m_1 sont sur deux droites fixes; on peut donc en déduire ce théorème :

Quand les trois côtés d'un triangle mobile, de forme variable, sont assujettis à tourner autour de trois points fixes, et que deux des sommets du triangle parcourent deux droites fixes, le troisième sommet engendre une conique qui passe par les deux points autour desquels tournent les deux côtés qui déterminent ce point.

Soient, fig. 74, o, o_1, k les trois points fixes, am, am_1 les deux droites fixes sur lesquelles sont deux des sommets du triangle mobile;

Il est évident que le point b, intersection des droites ko_1 et ma est un point satisfaisant à la proposition; ce sera le cas où le triangle mobile se réduirait à ce point b par lequel passe la droite bb_1 représentant deux des côtés du triangle, le troisième étant la droite ob; les deux sommets b, b_1 sont en effet sur les droites ma, m_1a, et les trois côtés passent par les trois points respectifs k, o_1, o. Le point c sera de même un cinquième point de la courbe, qui est ainsi déterminée par ces cinq points o, o_1, a, b, c.

Par un des points fixes k, menons une transversale quelconque mkm_1 rencontrant les droites fixes ma, m_1a aux points m, m_1; joignons le point m à celui o, et celui m_1 à o_1, ces deux droites mo, m_1o se rencontreront en un point e de la courbe, le triangle mem_1 satisfait bien à ces conditions : 1° d'avoir deux de ses sommets m, m_1 sur ma, m_1a; 2° le côté me passe par le point o, celui m_1e par le point o_1, et le 3e côté mn par le point k.

En menant par le point k d'autres transversales, on aura, par la même opération, une suite de points de la courbe.

Remarquons que les cinq points o, o_1, a, b, c, et un point e ainsi déterminé, forment un hexagone inscrit dans la conique; les deux côtés opposés eo, ab se rencontrent en un point m, les deux côtés opposés oc, ob au point k, et enfin ceux eo_1, ca au point m_1, et ces trois points m, k, m_1 sont en ligne droite. Donc :

Tout hexagone inscrit dans une section conique est tel, que les côtés opposés se rencontrent deux à deux en trois points qui sont en ligne droite.

On voit en effet, fig. 74, que les deux rapports anharmoniques $o\,(e, c, a, b)$, $o_1\,(e, c, a, b)$ étant égaux, les points m, c, a, b d'intersection du premier faisceau avec la droite ma, et ceux m_1, c, a, b d'intersection du second faisceau avec la droite m_1a, forment deux rapports anharmoniques égaux, et comme ils ont le point a commun, il en résulte que les droites mm_1, cc_1, bb_1, qui joignent les points correspondants, doivent passer par un même point k.

Ce théorème est connu sous le nom d'hexagramme de Pascal, et peut se démontrer de diverses manières.

On peut supposer que deux des sommets, tels que b et o, de l'hexagone, se réunissent en un seul, fig. 75; alors le côté kbo deviendra la tangente en ce point (bo), ce qui donne un autre moyen de trouver la tangente en un point d'une conique, dont on connait quatre autres points.

Aux sommets de l'hexagone inscrit, fig. 74, menons les tangentes, elles formeront entr'elles un hexagone circonscrit 1, 2, 3, 4, 5, 6; le sommet 1 de l'hexagone a pour polaire le côté oe de l'hexagone inscrit passant par les deux points de tangence o et e; mais le côté opposé mab rencontre cette polaire oe au point m, donc réciproquement la polaire du point m passe par les points 1 et 4, et, de plus, cette polaire passe nécessairement par le pôle P de la droite *mkn;* il en est de même pour deux autres sommets opposés. Donc :

Tout hexagone circonscrit est tel que les trois diagonales qui joignent deux sommets opposés se coupent en un même point, qui est le pôle de la droite qui passe par les points de concours des côtés opposés de l'hexagone inscrit.

Ce théorème fournit le moyen de déterminer une infinité de tangentes à une conique, lorsqu'on en connaît déjà cinq. Supposons par exemple, fig. 74, que les tangentes 16, 65, 54, 43, 32 soient connues, la diagonale 63 est par conséquent déterminée; elle doit passer par le pôle P. Prenons arbitrairement ce point P sur cette droite et joignons-le aux points 4 et 5 par les droites 4P, 5P, la première rencontrant la tangente 16 au point 1, et la seconde, celle 23, au point 2; la droite 12 est une des tangentes cherchées.

Supposons, fig. 76, que deux côtés voisins de l'hexagone circonscrit se réunissent en un seul, alors le point de tangence peut être considéré comme le 6e sommet d'un hexagone; ainsi, fig. 76, le point de tangence *e* peut être regardé comme le point d'intersection des deux côtés 1*e*, 5*e* qui se confondent. Dans l'hexagone circonscrit, les trois diagonales 14, 25 et 36 se coupent en un même point j; mais ce point i est connu, puisqu'il est l'intersection de deux des diagonales du pentagone donné; donc la troisième $3j$ déterminera le point de tangence e du côté 15; de même pour les autres.

Ainsi étant donné un pentagone circonscrit à une conique, les points de tangence de tous les côtés se trouvent ainsi déterminés.

Nous avons démontré que le rapport anharmonique de quatre droites joignant un point quelconque pris sur une conique à quatre autres points fixes de cette courbe, est constant. Cette propriété nous permet de résoudre divers problèmes.

1° Étant donnés quatre points, décrire une conique qui passe par ces quatre points et qui soit *capable* d'un rapport anharmonique donné.

Soient a, b, c, d, fig. 72, les quatre points donnés, on mène par un de ces points, celui a par exemple, la droite at telle que les quatre droites $a(b, c_1, d_1, t)$ forment un rapport anharmonique égal à celui donné, alors les rapports anharmoniques $a(b, c, d, t)$ et $d(b, c, d, a)$ sont égaux; regardant alors les trois droites $a(b, c, t)$ comme fixes, ainsi que celles correspondantes $d(b, c, a)$, on mènera par le point a un rayon quelconque ao, et par le point d celui do tel que le rapport anharmonique d (b, c, a, o) soit égal à celui a (b, c, t, o), et le point o d'intersection des deux rayons ao, do sera un point de la courbe. En effet, le rapport anharmonique o (b, c, d, a) est égal à celui a (b, c, d, t) qui est celui donné.

2° Étant donnés deux systèmes de quatre points a, b, c, d et a', b', c', d' dans un même plan, trouver les points de ce plan, qui sont tels que, joints aux quatre premiers par des droites, elles fassent entr'elles un rapport anharmonique donné et joint aux quatre autres formant un autre rapport anharmonique donné, ces deux rapports anharmoniques pouvant être égaux ou inégaux?

Les points cherchés seront par conséquent à l'intersection de ces deux coniques capables respectivement à ces deux rapports. Il y aura donc généralement quatre points qui satisferont à la question. Deux ou quatre de ces points peuvent être imaginaires.

3° Étant donné un faisceau o (a, b, c, d, e) de cinq droites et cinq points a', b', c', d', e' correspondant chacun à une des droites, on demande de trouver un point o_1 tel, que les cinq droites o_1 $(a', b',$

c', d', e') soient homographiques aux cinq premières.

Sur les quatre premiers points a', b', c', d' on décrit une conique *capable* du rapport anharmonique $o\,(a, b, c, d)$, sur les quatre points $o\,(a', b', c', e')$ on décrit une conique *capable* du rapport anharmonique $o\,(a, b, c, e)$. Ces deux coniques ayant en commun les trois points a, b, c, se couperont encore sur un quatrième point toujours réel et qui satisfera à la question.

Soit $abcd$ un quadrilatère quelconque inscrit dans une conique, coupons cette conique et le quadrilatère par une transversale, rencontrant les deux côtés opposés ad, eb en e, e_1; ceux ab, ed en f, f_1; les deux diagonales db, ae en g, g_1; et enfin la conique aux points h, h_1.

Le rapport anharmonique $a\,(e, f, h, h_1)$ est égal à celui $c\,(f_1, e_1, h, h_1)$ qui est égal à celui $c\,(e_1, f_1, h_1, h)$. Donc le rapport anharmonique des quatre points e, f, h, h_1 est égal à celui des quatre points e_1, f_1, h_1, h, donc les six points e, e_1, f, f_1, h, h_1, de même les six points e, e_1, g, g_1, h, h_1 seraient en involution, donc :

Toute transversale rencontre une conique, les couples de côtés opposés et les deux diagonales d'un qua-

drilatère inscrit à la conique, en des couples de points formant une involution.

Si, sur les segments ee_1, ff_1, gg_1, hh_1 comme diamètre, on décrit des circonférences, elles passeront toutes par un même point i; la perpendiculaire io sur la transversale, déterminera le point o qui sera le centre de l'involution; de sorte qu'on aura :

$$Oe.\, oe_1 = of.\, of_1 = og.\, og_1 = oh.\, oh_1.$$

Les points doubles de cette involution sont, dans le cas de la figure, imaginaires, puisque les segments empiètent l'un sur l'autre.

Par les quatre sommets a, b, c, d du quadrilatère, on peut faire passer une infinité de coniques; elles seront toutes coupées par la transversale en des couples de points de la même involution, et, comme cette involution est connue par les intersections de la transversale et des côtés et diagonales du quadrilatère, on peut dire :

Tout faisceau de coniques, c'est-à-dire de coniques passant par quatre mêmes points, est coupé par chaque conique en deux points formant une involution.

Deux côtés opposés du quadrilatère, ou ses deux diagonales, doivent donc être regardés comme formant une des coniques du faisceau.

Soient, fig. 78, un quadrilatère *abcd* inscrit dans une conique, o et o_1 deux autres points quelconques de la courbe, joignons par des droites les points o et o_1 avec les sommets a, b, c, d de ce quadrilatère; nous formons ainsi quatre triangles *boa*, *boc*, *doa*, *doc* ayant même sommet o, et quatre autres triangles bo_1a, bo_1c, do_1a, do_1c ayant même base que les précédents, et ayant le sommet o_1 commun.

La surface du triangle $boa = oa.ob.\sin.boa$;

Celle du triangle $boc = oc.ob.\sin.boc$.

On a donc :

$$\text{S}.boa : \text{S}.boc = \frac{oa}{oc}\,\frac{\sin.\,boa}{\sin.\,boc};$$

on aura de même :

$$\text{S}.doa : \text{S}.doc = \frac{oa}{oc}\cdot\frac{\sin.\,doa}{\sin.\,doc}.$$

Donc :

$$\frac{\text{S. } boa}{\text{S. } boc} : \frac{\text{S. } doa}{\text{S. } doc} = \frac{\sin.\, boa}{\sin.\, boc} : \frac{\sin.\, doa}{\sin.\, doc};$$

mais pour le point o, on aurait également :

$$\frac{\text{S. } bo_1a}{\text{S. } bo_1c} : \frac{\text{S. } do_1a}{\text{S. } do_1c} = \frac{\sin.\, bo_1a}{\sin.\, bo_1c} : \frac{\sin.\, do_1a}{\sin.\, do_1c};$$

or les rapports auharmoniques $o\,(a, b.\, c, d)$ et $o_1\,(a, b.\, c, d,)$ sont égaux.

Donc :

$$\frac{\text{S. } boa}{\text{S. } boc} : \frac{\text{S. } doa}{\text{S. } doc} = \frac{\text{S. } bo_1a}{\text{S. } bo_1c} : \frac{\text{S. } do_1a}{\text{S. } do_1c}:$$

ce qu'on peut traduire par ce théorème :

Le double rapport, ou rapport anharmonique de quatre triangles formés en joignant un point quelconque d'une conique aux sommets d'un quadrilatère inscrit, est constant quel que soit le point de la courbe pris pour sommet commun de ces quatre triangles.

Chaque triangle a pour mesure le produit de la base par la hauteur; les bases seront les mêmes pour chaque position du point o; on peut alors remplacer la surface d'un triangle par la hauteur, c'est-à-dire la distance du sommet commun à chacune des bases; on aura donc :

Le rapport anharmonique entre les longueurs des perpendiculaires abaissées d'un point de la courbe sur les quatre côtés d'un quadrilatère inscrit, est constant quelle que soit la position de ce point sur la courbe.

On exprime ordinairement ce théorème de la manière suivante :

Le produit des perpendiculaires abaissées d'un point de la courbe sur les deux côtés opposés d'un quadrilatère inscrit, est à celui des perpendiculaires abaissées sur les deux autres, dans un rapport constant, quel que soit le point de la courbe.

On peut, dans ce théorème, remplacer les perpendiculaires par des obliques également inclinées sur les perpendiculaires, et le théorème aura lieu entre ces obliques.

On peut tirer de ces théorèmes une infinité de conséquences importantes pour la théorie des coniques. Il suffit de supposer que le quadrilatère devient successivement un parallélogramme, un rectangle, un triangle et la tangente en un des sommets, qu'il se réduit à une corde double et les tangentes aux deux extrémités; comme nous sommes déjà arrivé aux mêmes résultats, nous nous dispensons de les exposer de nouveau.

Nous avons fait voir qu'une circonférence pouvait toujours être considérée comme composée de deux circonférences superposées et perspectives réciproques pour un point quelconque du plan, qu'il soit extérieur ou intérieur à la circonférence; et que, si par ce point on mène une suite de transversales, chacune d'elles coupera la courbe en deux points qui seront perspectives réciproques l'un de l'autre. En joignant deux de ces points par une droite, ainsi que les deux homologues, ces deux droites se rencontreront en un point qui nécessairement sera sur la ligne de terre, de sorte que cette droite, qu'on appelle aussi axe d'homologie des deux courbes, est ainsi déterminée. Nous avons trouvé que toutes ces transversales issues du point de vue, sont, à partir de ce point, divisées par la courbe et cet axe en quatre points harmoniques; enfin, nous en avons tiré plusieurs propriétés de la circonférence, déduites des théorèmes de la perspective. Nous avons fait voir enfin que la théorie des pôles et polaires n'est autre chose que cette application de la perspective.

Nous avons vu, en outre, qu'à un point quelconque du plan, considéré comme un *point de vue,* ou *centre d'homologie,* ou *pôle,* correspondait toujours, dans la circonférence, une droite qui est *la ligne de terre,* ou *axe d'homologie*, ou *polaire*, qu'ainsi, à une figure quelconque dans le plan de la circonférence, correspondait une autre figure qui est telle, qu'à un point quelconque de la première, correspond une droite dans la seconde, et réciproquement; qu'à une droite correspondait un point; qu'ainsi, aux quatre points en lignes droites, correspondaient quatre droites passant par un même point, qui est par conséquent le point correspondant à la droite sur laquelle se trouvent ces quatre points; et, de plus, que le rapport anharmonique des quatre points est égal à celui des quatre droites correspondantes; et, réciproquement, le rapport anharmonique de quatre droites passant par un même point, est égal à celui des quatre points correspondants. C'est, comme on le sait, la théorie des polaires réciproques de M. le général Poncelet.

Il suffit d'avoir rappelé ces propriétés de la circonférence pour voir qu'elles s'appliquent à une conique quelconque qu'on peut toujours considérer comme la perspective d'un cercle.

Nous regarderons donc comme démontrées toutes ces propriétés des pôles et polaires, et nous nous en servirons pour en déduire quelques autres qui n'ont pas été encore exposées.

Soit, par exemple, fig. 79, une conique quelconque *abcdef*..., *m* un point du plan ; en menant par ce point une suite de transversales *maa'*, *mbb'*, *mcc'*, etc., les droites homologues *ab*, *a'b'*, *ac*, *a'c'*... se coupent suivant une droite *ef* qui passe par les points de tangence *e*, *f*, dans le cas où le point *m* est extérieur à la courbe. On peut aussi déterminer cette droite *ef* en prenant le 4^e^ harmonique des séries de trois points *m*, *a*, *a'*; *m*, *b*, *b'*; *m*, *c*, *c'*; etc.

Si d'un point *n* de cette droite *efn* on mène de même une suite de transversales sur chacune desquelles on prend le quatrième point harmonique, on déterminera une droite *gg'* passant par le point *m*; la droite *efn* est dite la polaire du point *m*, et celle *gg'n* est celle du point *n*; leur point d'intersection P est le pôle de la droite *mn*; les points *m*, *n* sur *mn* sont des points conjugués; le triangle P*mn* est dit un triangle polaire de la courbe; il jouit de cette propriété, que chaque sommet est le pôle du côté opposé, et, réciproquement, que chaque côté est la polaire du sommet opposé. Sur un des côtés mn, il y a une infinité de couples de points conjugués, et qui forment sur cette droite une involution; par conséquent, toute circonférence décrite sur le segment compris entre deux points conjugués comme diamètre, passe par un même point Q. Si ce point Q est considéré comme le sommet d'un angle droit tournant autour de ce point, les deux côtés de cet angle, dans chacune de ses positions, détermineront sur mn deux des points de cette involution.

Par le point m menons les quatre droites $ma'a$, $mb'b$, $mc'c$, $md'd$ rencontrant la conique aux points homologues $a, a'; b, b'; c, c'; d, d'$; considérons un autre point g quelconque de la courbe, la droite mg déterminera le point g' homologue de celui g; par conséquent, les couples de droites ga', $g'a$; gb', $g'b$; gc', $g'c$; gd', $g'd$ étant homologues, se coupent mutuellement en des points α, β, γ, δ situés sur la droite efn. Donc le rapport anharmonique $g\,(a', b', c', d')$ est égal à celui $g'\,(a, b, c, d)$. Or, le rapport anharmonique $g\,(a', b', c', d')$ ne change pas, quelle que soit la position du point g sur la courbe; de même, celui $g'\,(a, b, c, d)$ ne varie pas, quelle que soit la position du point g' sur la courbe. On peut donc en conclure :

Si un faisceau de quatre droites rencontre une conique en des couples de points a, a'; b, b'; c, c'; d, d', *le rapport anharmonique, formé par les quatre droites qui joignent un point de la courbe aux quatre points* a, b, c, d, *est égal à celui formé par les droites qui joignent un autre point quelconque de la courbe aux points* a', b', c', d'.

De même, au lieu de mener par le point m quatre droites seulement, on en trace un nombre quelconque; on en concluera que :

Dans une conique, les deux faisceaux qui joignent deux points de la courbe, l'un aux points a, b, c, *etc.*, *et l'autre aux points* a', b', c', *se correspondent homographiquement.*

Si les deux faisceaux ont même sommet g sur la courbe, alors nous aurons en ce point le sommet d'une série de couples de deux droites ga, ga'; gb, gb'; gc, gc'; etc., or, il est évident que le rapport anharmonique de quatre droites telles que $g\,(a, b, c, a')$ sera égal à celui $g\,(a', b', c', a)$; donc les deux faisceaux sont en involution. Donc :

Quand plusieurs cordes d'une conique passent par un même point, les couples de droites, menées d'un *point de la courbe aux extrémités de chaque corde, sont en involution.*

Réciproquement : *Quand des angles qui ont leur sommet commun en un point de la courbe sont en involution, il résulte de la proposition directe, que les cordes qu'ils interceptent dans la courbe passent par un même point.* Donc :

Les droites menées du point pris sur la courbe aux points e, f de contact des tangentes qui passent par le sommet m du faisceau de cordes, sont les rayons doubles de cette involution. Donc :

Lorsqu'un angle est circonscrit à une conique, si par son sommet on mène une transversale qui coupe la courbe en deux points, les droites menées d'un point quelconque de la courbe à ces points sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux droites menées du même point aux points de contact des deux côtés de l'angle.

Si autour d'un point d'une conique comme sommet on fait tourner un angle droit, la corde que ses côtés interceptent dans la courbe, passe toujours par un même point.

Si par un point d'une conique on mène deux droites quelconques également inclinées sur un axe fixe, *la corde comprise dans la conique entre ces deux droites passe par un point fixe.*

Si dans le théorème ci-dessus on suppose que la corde mcc_1 passe par le point g pris sur la courbe, alors la droite gc' deviendra gm, et celle gc deviendra la tangente à la conique au point g. Donc :

Si par un point d'une conique on mène des droites aux extrémités de deux cordes, une droite aux points de rencontre de ces deux cordes et la tangente à la courbe, ces six droites seront en involution.

Ou, en d'autres termes :

Quand un quadrilatère est inscrit dans une conique, si par un point de la courbe on mène deux couples de droites à ses sommets opposés, la tangente en ce point est la droite qui aboutit au point de rencontre des deux diagonales ; ces six droites sont en involution.

Quand des cordes d'une conique passent par un même point m, *les couples de droites, menées d'un point quelconque* n *de la polaire du point* m *aux extrémités de ces cordes, sont en involution.*

Car chaque couple de droites menées aux extrémités d'une même corde est conjuguée harmonique, par rapport à deux droites fixes, l'une la polaire du point m, et l'autre celle qui joint le point n à celui m.

La propriété anharmonique de quatre points sur une conique conduit, comme on le voit, à une infinité de propriétés de ces courbes. Elle est donc une des plus importantes dans la théorie de ces courbes, et peut être regardée, ainsi que le fait M. Chasles, comme la base fondamentale de cette théorie.

De cette propriété anharmonique de quatre points d'une conique, en résulte une autre correspondante entre quatre tangentes.

Soient aa', bb', cc', dd' quatre tangentes à une conique représentée, fig. 80, par une circonférence; soient a, b, c, d les points de tangence; soit maintenant une cinquième tangente à la courbe en un point quelconque m. Joignons ce point m aux points a, b, c, d par des droites. La cinquième tangente rencontre les quatre autres aux points a', b', c', d'. Joignons ces quatre points au centre o de la circonférence; la droite oa' est perpendiculaire à la corde ma, la droite ob' est perpendiculaire sur mb, et ainsi de suite; donc les angles formés au point o par les quatre droites oa', ob', oc', od' prises deux à deux, sont égaux à ceux correspondants formés au point m par les droites ma, mb, mc, md;

donc le rapport anharmonique des quatre premières est égal à celui des quatre autres. Or, ce premier rapport est égal à celui des quatre points a', b', c', d' formés sur cette cinquième tangente par ses intersections avec les quatre autres ; donc :

Dans une conique, une tangente quelconque à cette courbe, rencontre quatre autres tangentes en quatre points dont le rapport anharmonique est égal à celui des quatre points de tangence, par conséquent est constant.

Il en résulte que :

Deux tangentes à une conique sont divisées par quatre autres, chacune en quatre points dont le rapport anharmonique est le même.

Si on regarde comme fixes deux tangentes, on peut dire que toutes les autres tangentes à la conique détermineront sur ces deux droites deux séries de points se correspondant anharmoniquement ; et, réciproquement, si deux droites sont divisées homographiquement, les droites qui joignent deux points homologues, seront toutes tangentes à une même conique, tangente elle-même aux deux droites

Connaissant cinq tangentes à une conique, il est donc facile d'en déterminer une infinité d'autres.

Cette propriété des tangentes d'une conique donnerait lieu aussi à une infinité de propositions sur ces courbes et correspondantes à celles trouvées pour celle des points ; cela résulte évidemment de ce que cette proposition sur les tangentes, est celle sur les points obtenus par une transformation polaire; ainsi, par la théorie des polaires réciproques, à chaque point d'une conique correspond une droite, et à chaque droite un point. A quatre points en lignes droites dans l'une, correspondra quatre droites passant par un même point et formant un faisceau dont le rapport anharmonique est égal à celui des quatre points, et, réciproquement, le rapport anharmonique d'un faisceau de quatre droites sera égal à celui des quatre points correspondants à ces quatre droites et qui seront sur une même droite correspondante au sommet.

D'après cela, il est évident qu'à tous les points d'une conique, correspondront des tangentes à une seconde conique qui sera la transformée de la première, et qu'à tous les points de tangence à cette nouvelle conique correspondra dans l'autre les tangentes.

Il résulte de cette correspondance, qu'à toutes les propriétés dépendantes du rapport anharmonique de quatre points, correspondra une autre propriété dépendante du rapport anharmonique des quatre droites correspondantes. On peut donc conclure les propriétés les unes des autres, sans avoir besoin d'autres démonstrations.

Toutes les propriétés qu'on peut obtenir, soit directement, soit par une transformation polaire, s'appliquent généralement à toutes les espèces de coniques, modifiées quelquefois par la considération des points de la courbe qui peuvent être à l'infini.

On trouvera ainsi les propriétés que nous avons déjà démontrées en donnant la génération des diverses espèces de coniques. C'est ainsi que plusieurs géomètres ont établi d'abord la théorie générale des coniques, en modifiant ensuite les propriétés obtenues suivant les diverses espèces de courbes.

DES DIFFÉRENTES MANIÈRES DONT UNE CIRCONFÉRENCE ET UNE CONIQUE SITUÉES DANS UN MÊME PLAN, PEUVENT ÊTRE CONSIDÉRÉES COMME PERSPECTIVES RÉCIPROQUES L'UNE DE L'AUTRE.

Supposons d'abord, fig. 81, que les deux courbes sont extérieures l'une à l'autre, c'est-à-dire par conséquent qu'on peut leur mener, au moins, deux tangentes communes.

Soient donc Vc, Vc_1 ces deux tangentes communes se rencontrant en un point V; je dis que ces deux courbes sont perspectives réciproques l'une de l'autre pour ce point de vue V; il s'agit de trouver l'axe d'homologie. Concevons une transversale V$aa_1a'a_1'$ rencontrant la circonférence aux deux points a, a_1, et la conique aux deux points homologues a', a_1'; mais cette homologie peut s'établir de deux manières différentes : on peut supposer d'abord que le point a' est l'homologue de celui a, et par suite a_1' sera l'homologue de a_1; ou bien que c'est le point a_1' qui est l'homologue de celui a, auquel cas alors a' est homologue de a_1. Prenons d'abord le premier cas : si les deux courbes sont perspectives réciproques, il faut nécessairement que la tangente au point a' à la conique, soit l'homologue de celle au point a du cercle; ces deux tangentes af, $a'f$ étant homologues, se rencontrent en un point f qui est, par conséquent, sur l'axe d'homologie; il en sera de même des tangentes homologues a_1f', a_1f_1 qui se rencontrent en un point f_1 sur ce même axe; de plus, la corde cc_1, qui est la polaire du point V dans le cercle, est l'homologue de celle $c'c'_1$ qui est la polaire de ce point V dans la conique; donc leur point q d'intersection est encore un point de cet axe d'homologie qui est alors bien déterminé. Il est évident maintenant que, si on cherchait la perspective de la circonférence pour ce point de vue V et pour cette droite ff_1 considérée comme axe d'homologie, on obtiendrait la conique donnée; car on voit que cette courbe aurait six points de communs avec cette conique; d'abord le point c sur la tangente Vc à la circonférence, doit compter pour deux; ils ont pour homologues, dans la conique, les deux points en c' qui sont situés sur la même tangente; il en sera de même de ceux en c_1 et c_1'; de plus, les points a', a_1' sont homologues de ceux a, a_1; donc ces deux courbes doivent se confondre.

Considérons le second cas, dans lequel le point a'_1

est pris pour perspective de celui a, et, par suite, celui a' est perspectif de a_1; dans ce cas, la tangente afe au point a de la circonférence, sera l'homologue de celle $a'_1 f_1 e$; ces deux droites se rencontrent en un point e d'un second axe d'homologie. De même les deux tangentes $a_1 e_1 f_1$, $a' e_1 f$, qui sont homologues, se rencontrent en un point e de ce même axe. Remarquons, en outre; que la corde cc_1 de la circonférence est toujours l'homologue de celle $c'c'_1$, quelle que soit la disposition d'homologie des points a, a_1 et a', a'_1; de sorte que leur point q d'intersection appartient par conséquent à ces deux axes d'homologie. Ainsi on a donc, pour le même point de vue V, deux axes d'homologie : l'un qui appartient au cas où les points homologues sont situés sur des points où les courbes ont leur courbure dans le même sens, et qu'en conséquence on peut appeler *perspective directe;* et l'autre quand ces courbures sont en sens inverse, et qu'ainsi on appelle *perspective inverse.* Ainsi, on peut en conclure déjà que :

Une circonférence et une conique extérieurement situées sont perspectives réciproques de deux manières différentes, pour un même point de vue, et avec deux axes différents d'homologie.

Remarquons que les quatre tangentes afe, a'_1f_1e, $a_1e_1f_1$, $a'e_1f$, qui ont servi à déterminer les deux axes d'homologie, forment un quadrilatère fef_1e_1 dont les diagonales ff_1, ee_1 sont ces axes d'homologie. De plus, que les deux tangentes afe, $a_1e_1f_1$ à la circonférence se rencontrent en un point i sur la polaire cc_1 du point V; de même les deux tangentes $a'e_1f$, a'_1f_1e à la conique se rencontrent en un point i_1 sur la polaire $c'c'_1$ de ce point V par rapport à la conique; ces deux points i, i_1 sont homologues dans les deux cas; ces points i, i_1 sont les points de concours des côtés opposés du quadrilatère fef_1e_1 ci-dessus, et la droite Vii' est celle qui joint ces points de concours; par suite des propriétés d'un quadrilatère, il en résulte que les deux diagonales ee_1, ff_1 divisent la droite ii'_1 qui joint les points de concours des côtés opposés en rapport harmonique. Donc :

Dans une conique et une circonférence homologiques, les polaires $\mathrm{qcc_1i}$, $\mathrm{qc'c'_1i_1}$ *et les deux axes d'homologie* $\mathrm{qff_1}$, $\mathrm{qee_1}$ *forment un faisceau harmonique.*

Connaissant le point de vue V et l'axe d'homologie fTf_1T_1, il est facile, comme nous l'avons vu, de déterminer l'axe jj_1 du cercle qui correspond aux points à l'infini de la conique, et réciproquement l'axe II_1 de l'ellipse qui correspond aux points à l'infini dans le cercle. Pareillement on déterminerait les deux droites analogues pour l'autre axe qee_1T_2 d'homologie.

Connaissant la droite jj_1, nous avons vu que, pour avoir la direction des axes de la conique, il fallait, sur cette droite comme diamètre, décrire une circonférence passant à la fois par le point V et par celui Q que nous avons appelé pôle circulaire de la droite jj_1 relativement à la circonférence; de sorte que Vm, Vn sont les directions des axes de la conique.

La droite VO, qui joint le point V au centre O du cercle, est perpendiculaire à la polaire cc_1 de ce point V; donc, si Vo_1h est le diamètre passant par le point V de la circonférence mVn, cette polaire cc_1 ira passer par l'extrémité h de ce diamètre, et le point g d'intersection du rayon VO et de la polaire cc_1 sera sur cette circonférence mVn.

Considérons maintenant sur le diamètre Vo_1h un point quelconque o_1. Par ce point o_1 menons une transversale o_1ba rencontrant la circonférence aux points a et b; joignons a et b avec le point V par les rayons $Vaa_1a'a'$, $Vbb_1b'b'_1$, ils détermineront dans la conique la corde ab, qui sera l'homologue de celle ab et qu'elle rencontre en un point k de l'axe d'homologie. Ces mêmes rayons Va, Vb déterminent dans la circonférence une seconde corde a_1b_1 coupant celle ab en un point d situé sur la polaire cc_1; de plus, le côté ab_1 rencontrera celui a_1b en un point d_1 de cette même polaire cc_1; ainsi on aura un quadrilatère ab_1ba_1 inscrit dans la circonférence, dont deux côtés opposés iront passer toujours par le point V, quelle que soit la position du point o_1, et le point d d'intersection des diagonales, et le point d_1 d'intersection de deux côtés opposés, seront toujours sur la polaire cc_1; il résulte de la propriété du quadrilatère, que les deux diagonales ab, a_1b_1 et les droites dV, dd_1h qui joignent le point d aux points de concours des côtés opposés, forment un faisceau harmonique, lesquelles droites de faisceau rencontrent la droite Vo_1h en quatre points harmoniques; or, les deux points V et h sont fixes; donc, si le point o_1, d'où on a mené la transversale o_1ab, est fixe, le point où l'autre diagonale a_1b_1 ira rencontrer cette droite Vo_1h, sera fixe, puisque ces quatre points V, o, h et ce dernier forment toujours un rapport harmonique.

On peut en conclure que, si du point o_1o on mène d'autres transversales, la deuxième diagonale déterminée comme ci-dessus passera toujours par un point fixe situé sur la droite Vo_1oh et formant un rapport harmonique avec ceux h, o_1, V.

Si le point o_1 est pris au milieu de la distance Vh, son point conjugué sera à l'infini. Donc la 2e diagonale ab sera parallèle à Vh.

Ces propositions sont ici appliquées à la circonférence ; mais, par la perspective, elles ne changent pas. On peut donc en conclure :

Si dans le plan d'une conique on prend deux points fixes V, o_1 *que par l'un d'eux on mène une transversale coupant la conique en deux points, en joignant ces deux points avec le second point fixe par des droites, on détermine une seconde corde qui ira passer par un point fixe situé sur la droite qui joint les deux points fixes donnés ; lequel, avec ces deux points et celui où la polaire rencontre cette même droite, formeront un rapport harmonique.*

Sur la figure, le point o_1 est le centre de la circonférence mVn, de sorte que le point o_1 est le milieu du diamètre Vh ; alors la 2e corde a_1b_1 se trouve parallèle à ce diamètre Vh.

La corde $okba$ devient en perspective la droite

ka'_1a' parallèle à la droite o_1V qui joint ce point o_1 au point de vue, dans le cas où la perspective est directe; mais, dans la perspective inverse, ce n'est plus le point a qui sera l'homologue de celui a', mais bien le point a_1 situé sur le même rayon $Vaa_1a'a'_1$; de même ce sera b_1 qui sera l'homologue de b', donc ce sera alors la corde a_1b_1 qui, pour cette perspective inverse, sera la perspective de celle $a'b'$; mais $a'b'$ et a_1b_1 sont parallèles à la droite o_1V, donc a_1b_1 est parallèle et homologue à $a'b'$, ce qui exige par conséquent que cette direction soit celle du second axe d'homologie.

Puisque le point o_1 est le centre de la circonférence, il s'ensuit qu'on a $o_1V = o_1m = o_1n$; donc la droite Vm, qui est la direction d'un des axes de la courbe, est également inclinée sur la droite o_1V et sur celle o_1m qui sont les directions des deux axes d'homologie. Donc :

Les deux axes d'homologie d'un cercle et d'une conique font des angles égaux avec un axe de la conique.

Considérons maintenant les deux tangentes intérieures se coupant en un point V_1; on démontrerait, comme pour le point V, que ce point V_1 est le point de vue pour les deux courbes, et on trouverait pareillement qu'à ce point V_1 correspondent deux axes d'homologie ; de sorte que l'ellipse et le cercle seraient perspectives réciproques de deux nouvelles manières.

Entre ces deux points de vue V, V_1 et les axes d'homologie, il y a des relations à établir.

L'axe d'homologie est la trace, sur le plan de la circonférence, du plan de la conique.

Par cette trace et le point de vue V faisons passer un autre plan, et dans ce plan prenons une droite quelconque Vq rencontrant l'axe TT_1 en q. Par cette droite Vq menons deux plans tangents au cône de l'espace, ayant le point V pour sommet, et pour base la circonférence, il est évident que ces deux plans tangents auront pour traces sur le plan de la circonférence les deux tangentes qa, qa_1 menées de ce point q à la circonférence, et détermineront, sur la surface du cône, deux tangentes Va, Va_1 passant par les points de tangence a et a; le plan passant par ces deux droites sera dit par analogie le plan polaire de la droite Vq, sa trace aa_1 passera nécessairement par le pôle p de la droite TT_1 relativement à cette circonférence, et rencontrera cet axe en un point r conjugué du point q, de sorte que la droite Vr, qui joint ce point r au point V, sera conjuguée de celle Vu.

Comme il y a une infinité de couples de points conjugués sur TT_1, tels que ceux q, r, il y aura donc pareillement une infinité de couples de droites conjuguées telles que Vq, Vr, et tous les plans tangents au cône, menés par chacune de ces droites, détermineront sur le cône deux arêtes de tangence dont le plan passera toujours par la même droite Vp, qui joint le point de vue V au point p pôle de la droite TT_1; cette droite Vp est dite la polaire du plan VTT_1, qui est alors le plan polaire de la droite Vp.

Ces droites et ces plans polaires jouiront relativement, au cône, de toutes les propriétés connues des points et droites polaires.

Reprenons maintenant la droite TT_1 comme la trace du plan de la conique ; il est évident alors que la droite Vp percera le plan en un point p' qui sera l'homologue du point p, et qui, par conséquent, sera le pôle de la droite TT_1 relativement à la conique. Ainsi, si du point q on mène deux tangentes à la conique, elles seront les traces, sur ce plan, des deux plans tangents au cône menés par la droite Vq; de sorte que la droite $a'a'_1$, qui joint les points de tangence, passera par ce point p' et sera la trace du plan passant par les deux arêtes de tangence Va, Va_1; ainsi, le point a' sera la perspective du point a et a'_1 celui de a_1.

Si on trace pareillement une droite quelconque ps passant par le point p et rencontrant l'axe TT_1 en un point s, cette droite ps étant considérée comme la trace d'un plan passant par la droite Vp, il est évident que sp' sera la trace du même plan sur celui de la conique; la droite sp rencontre la circonférence aux points b et c, celle sp' rencontrera la conique aux points b' c', homologues respectifs de ceux b et c.

Dans ce plan Vps il y a donc un quadrilatère $bb'cc'$ formé par les deux arêtes opposées $Vb'b$, $Vc'c$ se rencontrant au point V et par deux autres arêtes opposées bc, $b'c'$ passant par le point s. Or, par suite des propriétés d'un quadrilatère, il en résultera que les diagonales bc', cb' se couperont en un point V_1 sur une droite Vp rencontrant bcs en un point p tel que les quatre points b, p, c, s forment un rapport harmonique, ce qui est la propriété du point p trouvé comme étant le pôle de la droite TT_1. De plus, ce point V_1 formera, avec les trois points p, p' et V, un rapport harmonique.

Si on considère toute autre droite que sp, passant par le point p, on aura les mêmes résultats, et comme la droite Vpp' est commune et que les trois points V, p, p_1 sont fixes, il en résultera que toutes les intersections de ces couples de diagonales oubliés passeront par le même point V_1 qui sera alors le sommet d'un second cône passant par la circonférence et la conique par lesquelles passent le premier *cône*. Donc, les deux courbes sont perspectives réciproques pour ce nouveau point de vue, mais avec le même axe d'homologie TT_1.

On prouverait pareillement, en prenant le second axe d'homologie, que les deux courbes sont encore perspectives réciproques pour ce même point de vue V_1 et pour ce second axe. Donc :

Une circonférence et une conique, situées dans un même plan et extérieures l'une à l'autre, sont perspectives réciproques de quatre manières différentes, avec deux points de vue et deux axes d'homologie.

Les deux points de vue V *et* V_1 *partagent harmoniquement le segment* pp' *de la droite* Vpp' *qui joint les deux pôles* p *et* p' *de l'axe d'homologie correspondant. Il en sera de même de la droite* $p_1V_1p'_1$ *qui joint les pôles* p_1, p'_1 *du second axe.*

Les deux segments pp', $p_1p'_1$ étant divisés harmoniquement par les points V et V_1, il en résulte que chacun de ces points formera, avec les deux couples pp', $p_1p'_1$, une involution dans laquelle ce point sera lui-même son conjugué.

La droite Vpp', qui contient les pôles des deux axes d'homologie, rencontre en r un de ces axes. Son point conjugué q sur cet axe sera donc tel que les tangentes qa, qa_1, menées de ce point q à la circonférence, auront pour points de tangence les points a, a_1 où cette droite Vpp' rencontre la circonférence; de sorte que la droite aa_1 sera la polaire de ce point q; de même les deux tangentes qa', qa'_1 à la conique auront pour points de tangence les points a', a'_1 d'intersection de cette même droite et de la conique, et la corde $a'a'_1$ sera donc la polaire de ce même point q relativement à la conique. Or, de quelque manière qu'on considère l'homologie des deux tangentes qa, qa_1 de la circonférence avec celles qa', qa'_1, leur point q d'intersection étant toujours le même, il en résulte que ce point q est le point commun aux deux axes d'homologie. Donc :

Le point d'intersection des deux axes d'homologie a la même polaire dans les deux courbes.

La transversale, sp qui joint un point quelconque s de la droite TT_1 au pôle p de cette droite, rencontre la circonférence aux points b et c homologues de ceux b', c' où la droite sp' coupe la conique. Les tangentes aux quatre points b, c et b', c' vont se couper en un point conjugué de celui s sur l'axe TT_1 ; on en conclut donc :

Si d'un point quelconque d'un des axes d'homologie on mène deux tangentes à la circonférence et deux tangentes à la conique, les droites qui joindront deux à deux les quatre points de tangence, iront passer par l'un des deux points V ou V_1.

Dans le plan $Vaa'a_1a'_1$ il y a un quadrilatère $aa_1a'a'_1$ formé par les deux arêtes Va, Va_1 et par deux autres côtés aa_1, $a'a'_1$, dont les diagonales aa'_1, a_1a' se coupent en V_1 ; ces droites forment donc un second quadrilatère $Va'V_1a'_1$ dont les sommets sont V, a', V_1, a'_1 et dont les points de concours des côtés opposés sont les points a', a_1; il en résulte que les trois couples de droites qV, qV_1 ; qa', qa'_1; qa, qa_1, qui joignent le point q, a, ces six points forment un faisceau en involution. Donc :

Si par le point q *d'intersection des deux axes d'homologie, a qui par conséquent la même polaire* *dans les deux courbes, on mène les tangentes à ces deux courbes, ces couples de tangence et les deux axes d'homologie forment une involution.*

Si, au lieu de prendre le quadrilatère $Va'V_1a'_1$, on considérait celui $aa_1a'a'_1$, les couples de sommets opposés seraient a, a'_1; a_1, a' et les points V et r seraient alors les points de cours des côtés opposés ; il y aurait donc encore involution entre les couples de points V, r; a, a'_1; a_1, a'_1, résultat indépendant du point de vue V_1.

Les six points a, a_1; a', a'_1; V, V_1 formant une involution, si on décrit sur les trois segments aa_1, $a'a'_1$, VV_1 trois circonférences passant en outre par un même point α, elles se couperont en un second point α_1, et la corde commune $\alpha\alpha_1$ à ces trois circonférences rencontrera en un point o la droite Vaa'; ce sera le centre de l'involution. De ce point o comme centre, avec la longueur d'une tangente menée de ce point o à une quelconque des trois circonférences, on décrit une circonférence; on déterminera les points q_1 et q_2 qui seront les points doubles de cette involution.

Les points doubles d'une involution jouissent de la propriété de diviser harmoniquement chaque segment, de sorte qu'on a :

$$\frac{q_1a}{q_1a_1}=\frac{q_2a}{q_2a_1},$$

et :

$$\frac{q_1a'}{q_1a'_1}=\frac{q_2a'}{q_2a'_1}.$$

Donc la polaire du point q_1, relativement à la conique, passe par le point q_2, et, comme elle doit passer par q, il s'ensuit que cette polaire est la droite qq_2, et de même qq_1 est la polaire du point q_2 relativement à la circonférence, il en résulte que le triangle qq_1q_2 est un triangle polaire commun aux deux courbes.

Dans une conique et une circonférence, et par suite dans deux coniques, il existe en général trois points dont chacun a la même polaire dans les deux courbes.

Les deux points de vue V, V_1 sont sur un des trois côtés de ce triangle.

Considérons maintenant (fig. 83) une circonférence et une conique se coupant en quatre points i_1, i_2, i_3, i_4 formant un quadrilatère inscrit dans les deux courbes. Soient q, q_1, q_2 les points de concours des côtés opposés et des deux diagonales, ils forment un triangle dit polaire, qui, par rapport à la circonférence et au quadrilatère inscrit, jouit de propriétés importantes. Ainsi, chacun des côtés est la polaire du sommet opposé, et, réciproquement, chaque côté est le pôle du côté opposé ; d'où il suit que, si du point q on mène deux tangentes à la circonférence, la corde de contact, qui sera la polaire de ce point q, passera par les points q_1 et q_2, et, par suite, si d'un point quelconque V_1 de cette polaire on mène deux tangentes à la circonférence, la corde de contact ira passer par le point q_2 conjugué de celui q; de même pour le point q_2 et sa polaire qq_1. Par le point q_1 on ne peut pas mener deux tangentes réelles à la circonférence, mais sa polaire jouit aussi de cette propriété, que si d'un point quelconque V_5 de cette droite, on mène deux tangentes à la circonférence, la corde de contact passera par le point q.

A ces deux courbes qui ont quatre points communs on peut mener quatre tangentes communes; chacune de ces tangentes rencontre les trois autres en trois points qui donnent les six points V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6 qui peuvent être pris pour points de vue de ces deux courbes.

Les actes d'homologie seront évidemment, deux par deux, les cordes communes données par les côtés et diagonales du quadrilatère inscrit dans les deux courbes.

Considérons la tangente commune $V_1\, a'\, a\, V_2$, elle rencontre en V_1 et V_4 les polaires $q\, q_1\, V_1$ du point q_2 et celle $V_4\, V_2\, q_1 q_2$ du point q.

Pour le point de vue V_1 le point a est un point double du cercle, qui a pour perspective le point double a' de la conique. Si on joint le point a à celui q_2 par la droite abq_2, elle coupera la circonférence en un second point b qui sera le point de tangence de la tangente $V_1 b$ à la circonférence, mais cette tangente $V_1 b$ sera par conséquent une tangente à la conique en un point b' qui sera la perspective du point b. Les deux cordes de contact $a\, b$, $a'\, b'$ seront donc homologues et doivent ainsi se rencontrer en un même point q_2 appartenant aux deux axes d'homologie ; or ces deux axes d'homologie ne peuvent être que les droites $i_1\, i_2$ et $i_3 i_4$ qui se rencontrent en ce point q_2.

Les deux tangentes menées du point q_2 à la circonférence ont pour corde de contact la polaire de ce point q, polaire passant par les points V_1 et V_3 ; ces deux tangentes ont pour homologues les deux tangentes à la conique menées de ce même point q_2, la droite de contact, ou polaire du point q_2 relativement à la conique se confondra donc avec la précédente $q\,V_3\,q_1\,V_1$. Il en sera de même pour les autres; donc le triangle polaire $q\,q_1\,q_2$ dans la circonférence, sera aussi un triangle polaire relativement à toutes les coniques qui passeront par les quatre mêmes sommets $i_1\,i_2\,i_3\,i_4$ du quadrilatère inscrit dans toutes ces courbes. On peut en conclure que :

Une circonférence et une conique qui ont quatre points communs, peuvent être regardées comme perspectives réciproques l'une de l'autre pour six points de vue différents, ayant pour chacun de ces points deux axes d'homologie différents, ce qui donne douze manières de les considérer comme perspectives réciproques; il n'y a cependant que six axes d'homologie qui appartiennent aux couples de côtés opposés du quadrilatère inscrit et à ses deux diagonales.

On voit que chaque couple de côtés opposés sont axes d'homologie pour deux points de vue différents.

On peut en conclure que les mêmes résultats ont lieu pour deux coniques quelconques se coupant en quatre points.

Toutes les coniques qui ont quatre points com-

muns ou qui n'en ont pas du tout, ont un triangle polaire commun.

Il en résulte *que chaque couple de côtés opposés de ce quadrilatère et les deux diagonales font l'office de coniques passant par les quatre sommets du quadrilatère.*

Un quadrilatère inscrit dans une circonférence est tel qu'une transversalle quelconque coupe cette circonférence, et les couples de côtés opposés du quadrilatère et les deux diagonales en des couples de points formant une involution. Donc, comme les six points d'intersection de cette transversale et des couples de côtés opposés, et les diagonales du quadrilatère suffisent pour déterminer cette involution, il en résulte :

Une série de coniques passant par quatre mêmes points sont coupées par une droite en des couples de points en involution.

Si la transversale est tangente à deux coniques, alors les points de contact sont conjugués harmoniques par rapport aux deux points de section de cette transversale par deux côtés opposés du quadrilatère.

Nous avons vu que les axes d'une conique perspective d'une circonférence sont parallèles aux deux bisectrices des angles des deux axes d'homologie. Ceci a également lieu lorsque les deux courbes se rencontrent ou ne se rencontrent pas. Nous pouvons donc en conclure :

Que les trois systèmes de bisectrices des côtés opposés ou des diagonales du quadrilatère sont parallèles à deux axes rectangulaires qui sont les directions des axes de la conique.

On peut déterminer immédiatement le centre de la conique : il suffit de joindre chaque point de vue au point milieu de la corde de tangence des deux tangentes menées du point à la conique. Toutes ces droites doivent passer par le centre par lequel deux parallèles à la direction des axes donnera ces axes eux-mêmes.

On peut en conclure que :

Toutes les coniques qui passent par les quatre mêmes sommets d'un quadrilatère inscriptible à une circonférence, ont leurs axes parallèles.

Si le quadrilatère n'est point inscriptible à une circonférence, il en résultera que toutes les coniques auront un système de diamètres conjugués passant par deux mêmes points communs.

Une série de coniques passant par quatre mêmes points sont coupées par une transversale en des couples de points en involution; il s'en suit qu'il y a deux points doubles qui divisent harmoniquement chaque segment, ces points sont réels ou imaginaires et sont ainsi conjugués par rapport à chaque conique. Donc :

Quand plusieurs coniques ont quatre points communs, il existe sur une transversale quelconque deux points (réels ou imaginaires) conjugués par rapport à toutes les coniques.

Si la transversale est située à l'infini, les points conjugués communs à toutes les coniques seront les extrémités de deux diamètres conjugés de chacune d'elle. Donc : toutes les coniques qui passent par quatre points, ont un système de diamètres conjugués parallèles entre eux, lequel système peut être imaginaire.

Deux points conjugués d'une conique sont deux points tels que la polaire de l'une passe par l'autre. Donc : si on prend les polaires d'un point P par rapport à deux coniques, elles se couperont au point P_1 et ces deux points P_1 P_1, seront conjugués par rapport aux deux coniques; mais alors ils le seront pareillement par rapport à toutes les coniques qui passeront par les quatre points d'intersection des deux premières. Donc :

Quand plusieurs coniques ont quatre points communs, les polaires d'un autre point quelconque, relatives à ces courbes, passent toutes par un même point.

Si le point P est à l'infini sur une droite L, ses polaires seront les diamètres des courbes, conjugués à la direction de cette droite. Donc :

Quand plusieurs coniques passent par quatre mêmes points, les diamètres de ces courbes, conjugués à une même droite, passent tous par un même point.

Soient deux coniques A et B se coupant en quatre points. Soient L une droite quelconque du plan et p_1 p_1, les pôles de cette droite dans les deux coniques. La polaire d'un point quelconque P de cette droite L relativement à la conique A passera par le point p et celle du même point relativement à la conique B passera par le point p_1. Si P prend diverses positions sur cette droite L, les diverses polaires de ces points relativement à ces deux courbes passeront les unes par le point p et les autres par celui p' ; elles formeront deux faisceaux de droites de sommets p et p_1 et qui se correspondront anharmoniquement, car le rapport anharmonique de quatre quelconques des droites de l'un des faisceaux et celui des quatre droites correspondantes du second, sont égaux à celui des quatre points sur la droite L, donc les droites correspondantes de ces deux faisceaux se couperont sur une conique qui passera par les points p et p_1, sommets des deux faisceaux.

Maintenant, supposons plusieurs autres coniques passant par les quatre mêmes points d'intersection de celles A et B; puisque les polaires d'un point quelconque relatives à toutes ces coniques passent par un même point, il s'ensuit que la conique trouvée ci-dessus sera la même pour toutes ces courbes, et de plus qu'elle passera par tous les pôles de cette droite relativement à toutes ces coniques qui passent par les quatre mêmes points. Donc :

Tous les pôles d'une droite L relativement à plusieurs coniques qui ont quatre points communs, se trouvent sur une conique sur laquelle se trouvent aussi les points de concours des polaires des divers points de cette droite relativement à toutes ces coniques.

Si on considère le quadrilatère passant par les quatre points communs comme formant trois coniques composées de deux droites, la conique ci-dessus doit passer par les points de concours des côtés opposés et le point d'intersection des deux diagonales, car le point d'intersection de deux droites est le pôle de toute droite, puisque toutes les polaires des divers points d'une droite relativement à deux droites, passent toutes par ce point; si la droite L est à l'infini, tous les pôles de cette droite sont les divers centres de ces courbes. Donc :

Toutes les coniques qui passent par quatre points donnés ont leurs centres sur une conique.

Cette conique passe par le milieu de chaque côté ou diagonales du quadrilatère qui passe par ces quatre points.

Car si on distingue par a, b, c, d ces quatre sommets, on peut faire passer une conique qui passe par les trois sommets a, b, c et dont le centre soit au milieu de ad; cette conique passera nécessairement par le point d. Donc le milieu de chaque côté ou diagonale du quadrilatère est le centre d'une conique passant par les quatre sommets du quadrilatère; donc tous ces points milieux sont sur la conique lieu des centres.

On connaît donc 9 points de cette courbe avant de tracer une des coniques du faisceau; ce sont les 6 points milieux des côtés et les 3 points d'intersections des côtés opposés et des diagonales.

Le centre de cette courbe est le point de croisement des droites qui joignent les points milieux des côtés opposés du quadrilatère.

Car ces droites qui joignent les points milieux se coupent en leur milieu.

Les polaires d'un point quelconque P par rapport à plusieurs coniques ayant quatre points communs passent par un même point P_1, de même les polaires d'un autre point quelconque q relativement à ces mêmes coniques passent par un même point q_1; de sorte que les polaires du point P forment un faisceau de droites au sommet P_1, et celles du point q un autre faisceau de sommet q_1. Or, les deux polaires des points P et q relativement à une même conique passent par le pôle de la droite Pq relativement à cette conique, et nous savons que tous ces pôles forment une conique passant par les points P_1, q_1; donc les deux faisceaux de droites se correspondent anharmoniquement, comme il en est de même pour deux points quelconques du plan. On peut en conclure :

Le rapport anharmonique de quatre quelconques des polaires d'un point du plan relativement à quatre *coniques qui passent par quatre mêmes points est constant, quel que soit ce point.*

On peut supposer que ce point est un des points d'intersection des coniques, alors les polaires seront les diverses tangentes en ce point. Donc :

Le rapport anharmonique des quatre tangentes sera le même pour chacun des quatre points d'intersection des coniques.

L'angle de deux coniques en un de leurs points d'intersection est celui des deux tangentes en ce point. Ainsi on voit que si ces angles ne sont pas égaux pour les quatre points d'intersection, s'il y a quatre coniques passant par ces mêmes points, le rapport anharmonique entre le sinus des angles sera constant pour les quatre points. Ce rapport est dit celui des quatre coniques.

Aux théorèmes précédents concernant des coniques passant par quatre mêmes points correspondent des théorèmes relatifs à des coniques tangentes à quatre mêmes droites ; comme les démonstrations sont tout à fait semblables, il suffit de les énoncer.

Quand deux coniques sont inscrites dans un quadrilatère, si d'un point quelconque on mène des tangentes aux deux courbes et deux droites aboutissant *à deux sommets opposés du quadrilatère, ces trois couples de droites sont en involution.*

Si le point par lequel on mène les tangentes aux deux coniques est un de leurs points d'intersection, les deux tangentes à chaque courbe se confondront en une seule, qui sera l'un des rayons doubles de l'involution ; il s'en suit que :

Quand deux coniques sont inscrites dans un quadrilatère, les tangentes en un de leurs points d'intersection forment un faisceau harmonique avec les deux droites menées de ce point à deux sommets opposés du quadrilatère.

Ou bien :

Les tangentes aux deux coniques en un de leurs points d'intersection divisent harmoniquement chacune des diagonales du quadrilatère circonscrit.

Quand trois coniques sont inscrites dans un quadrilatère, les tangentes menées à ces trois courbes forment trois couples de droites en involution.

De ce théorème résulte la solution du problème suivant :

Etant données deux coniques et une droite, décrire une conique qui soit inscrite dans le quadrilatère circonscrit aux deux proposées, et tangente à la droite.

Par chaque point de la droite on mène des tangentes aux deux coniques et une droite faisant avec la droite donnée un troisième couple en involution avec les deux couples de tangentes; cette droite et celle donnée seront tangentes à la conique cherchée.

Si la droite donnée passe par un des sommets du quadrilatère circonscrit aux deux coniques, toutes les droites construites comme tangentes à la conique cherchée passeront par le sommet opposé, de sorte que la conique qui satisfait à la question est infiniment aplatie et qu'elle est représentée par la diagonale du quadrilatère qui joint ces deux sommets.

Il en résulte que quand on connaît le point de concours de deux tangentes communes à deux coniques, on détermine immédiatement le point de concours de deux autres tangentes communes.

Quand trois coniques sont inscrites dans un quadrilatère, la tangente en un point de l'une est un des rayons doubles de l'involution déterminée par les deux couples de tangentes menées par ce point aux deux autres courbes.

De là résulte la solution de ce problème :

Etant données deux coniques et un point, décrire *une conique qui soit inscrite dans le quadrilatère circonscrit aux deux proposées et qui passe par le point donné.*

Pour cela on mène les tangentes aux deux coniques : chacun des rayons doubles de l'involution déterminée par ces deux couples de droites sera une tangente à une conique satisfaisant à la question, qui admet deux solutions.

Quand trois coniques sont inscrites dans un quadrilatère, les tangentes menées à deux de ces courbes par un de leurs points d'intersection sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux tangentes menées du même point à la troisième conique.

Quand plusieurs coniques sont inscrites dans un même quadrilatère, les couples de tangence à ces courbes menées d'un même point sont en involution. Donc :

Par chaque point du plan on peut mener deux droites conjuguées par rapport à toutes les coniques; ce sont les rayons doubles.

Quand plusieurs coniques sont inscrites dans le même quadrilatère, les pôles d'une droite quelconque sont situés en ligne droite.

Si la droite dont on prend les pôles est à l'infini, on en conclut que :

Toutes les coniques inscrites dans un quadrilatère ont leurs centres sur une même droite.

Quand plusieurs coniques sont inscrites dans un quadrilatère, si autour d'un point fixe on fait tourner une transversale, la droite, lieu des pôles de cette transversale, enveloppe une conique.

Cette courbe est aussi l'enveloppe de toutes les polaires du point fixe relatives aux coniques proposées.

Elle est tangente aux deux diagonales et à la droite qui joint le point de concours des côtés opposés du quadrilatère circonscrit aux coniques.

Quand quatre coniques sont inscrites dans un quadrilatère, les pôles d'une droite quelconque, lesquels sont en ligne droite, ont leur rapport anharmonique constant.

Il résulte de ce théorème que : *Le rapport anharmonique des points de contact des quatre coniques avec un des côtés du quadrilatère circonscrit a toujours la même valeur, quel que soit ce côté, est égal au rapport anharmonique des pôles d'une droite.*

Une partie de ces théorèmes sur le quadrilatère circonscrit à des coniques peuvent se déduire de ceux sur le quadrilatère inscrit par transformation polaire, comme l'a fait M. Poncelet, ou être démontrés directement *.

Revenons aux diverses manières dont une conique et une circonférence peuvent être perspectives réciproques l'une de l'autre, recherches dont nous avons été écartés par les propriétés si importantes des coniques inscrites ou circonscrites à un même quadrilatère.

Il résulte de ce que nous avons établi jusqu'à présent qu'une circonférence et une conique extérieure ne se rencontrant pas, ont deux points de vue différents, pour chacun desquels il y a deux mêmes axes d'homologie; que si, au contraire, la conique et la circonférence se rencontrent en quatre points, il y avait six points de vue différents, chaque couple opposé de deux de ces points de vue ayant deux mêmes axes d'homologie, ces axes d'homologie sont dans ce cas les six cordes communes aux deux courbes; mais leurs propriétés pour deux de ces couples d'axe appartenant à deux points de vue différents, tiennent à ce qu'ils

* Ces théorèmes sur les coniques inscrites et circonscrites à un quadrilatère sont extraites du traité des coniques de M. Chasles.

sont *axes d'homologie*, et c'est de là qu'on en a tiré les propriétés des cordes communes à deux coniques ; mais alors on a été obligé de distinguer le cas où elles sont cordes communes *réelles* et où elles sont *imaginaires* ou *idéales;* tandis qu'en les considérant comme des axes d'homologie, il est indifférent qu'elles soient cordes communes réelles ou imaginaires, d'autant plus que ce sont des droites aussi bien réelles dans un cas que dans l'autre.

Ainsi : *Une transversale coupe deux coniques et leurs deux axes d'homologie en trois couples de points en involution*, que ces axex soient des cordes *réelles* ou *non*.

Entre les positions d'une circonférence et d'une conique qui ne se coupent pas ou se coupent en quatre points réels, il y a des positions intermédiaires à examiner. D'après les résultats obtenus, il sera facile de trouver de même pour ces différents cas le nombre et la position des divers points de vue et les directions correspondantes des axes d'homologie.

Remarquons, en effet, que nous supposons la circonférence et la conique sur un cône dont le sommet est le point de vue et dont l'intersection des plans des deux courbes est la droite désignée par axe d'homologie ; or, tant que le cône et la conique ne changent pas, on peut rapprocher ou éloigner le plan de la circonférence du sommet parallèlement à lui-même. Dans toutes ces diverses positions, son intersection avec le plan de la conique sera toujours une droite parallèle, qui deviendra une corde commune, sans changer cette direction.

Supposons, fig. 84, que la circonférence et la conique soient tangentes extérieurement, il en résultera un premier point de vue V, déterminé par les deux tangentes extérieures communes Vc, Vc_1 auquel correspondra un premier axe d'homologie TT_1 passant par le point q d'intersection des deux axes, de sorte que ce second axe est la tangente qV_1T_2. Le second point de vue sera le point V_1 de tangence, qui aura les mêmes axes d'homologie correspondants que ceux du point V.

Prenons maintenant le cas, fig. 85, où la conique et la circonférence se coupent seulement en deux points : il y aura ainsi une corde commune dd_1 qui sera un axe d'homologie et sur lequel se trouvera le point q d'intersection des deux axes d'homologie, de sorte qu'il sera facile de déterminer l'autre axe d'homologie.

Il faut maintenant déterminer le second point de vue V_1; il sera d'abord sur la droite Vaa' polaire du point q dans les deux courbes. De plus, les couples de points a, a', a_1, a'_1, V, V_1, sont en involution, décrivant sur aa', $a_1a''_1$ des demi-circonférences; elles se couperont en deux points e, e_1; alors une demi-circonférence, passant par V et par e, e_1, donnera le point V_1 pour le second point de vue.

On peut encore mener aux deux courbes des tangentes d'un point commun pris sur l'axe d'homologie connu, les quatre points de tengence étant joints deux à deux, ces droites iront passer les unes par V et les autres par V_1.

Admettons que la conique soit tangente intérieurement à la circonférence; dans cette position elle peut encore couper la circonférence, comme fig. 86, en deux points d, d_1; alors les deux courbes ont trois tangentes communes, mais celle au point V_1 de tengence des deux courbes, doit compter pour deux, ayant ce point V_1 pour intersection; de sorte qu'il y a quatre points de vue V_1, V_2, V_3, V_4. Les axes seront ici les quatre cordes communes Vd, Vd, dd, et la tangente au point V_1 qui fait le quatrième sommet du quadrilatère $V_1 dd_1$; au point V_1 correspondront les axes d'homologie dd_1 et la tangente en ce point V_1; au point de vue opposé V_3 correspondront les mêmes axes d'homologie ; aux points V_2 et V_4 correspondront les axes d'homologie Vd, $V_1 d$.

La circonférence peut être osculatrice de la conique en ce point V_1, alors elles n'ont plus qu'un autre point d'intersection ; les deux courbes ont une autre tangente commune qui rencontrera celle en V_1 en un point V_2 qui sera un point de vue ; ainsi que le point de tangence V_1 qui représente les trois points communs à la conique et à la circonférence; les deux axes d'homologie seront la droite $V_1 d$ qui joint le point V_1 à celui d et la tangente V_1, V_2.

La conique peut avoir un double contact, comme dans la fig. 88; alors on voit qu'il y a trois points de vue, V_1, V_2, V_3, déterminés par les deux tangentes, mais chacune de ces tangentes pouvant être regardée comme double, il en résulte que leur point V_2 d'intersection peut être regardé comme un point de vue double qui aura pour axes d'homologie la droite double V_1, V_3 qui joint les points de contact. Les points de tangence V_1,

V_3, sont des points de vue dont les axes d'homologie sont les tangentes en ces points.

La conique peut être tangente à la circonférence et ne plus la rencontrer, comme fig. 89. Alors le point V de tangence est un point de vue et la tangente en ce point est un des axes. Pour avoir le second axe, on trace une droite $V a a'$; les points a et a' sont donc homologues, donc les tangentes $d a$, $d a'$ en ces points se rencontreront en un point d appartenant à ce second axe, il est donc connu. Le point q d'intersection des deux axes d'homologie a même polaire dans les deux courbes; cette polaire $V b b'$ contiendra donc le second point de vue V_1. Pour avoir ce point V_1, on mène aux deux courbes, d'un point quelconque d de l'axe d'homologie $d q$, les tangentes $V a$, $V c$ à la circonférence, et celles $V a'$, $V c'$ à la conique; les droites $a a'$, $c c'$ vont passer par le point V et celles $a c'$, $a' c$ par V_1. Le point V_1 d'intersection de ces deux derniers est donc le point cherché qui doit se trouver sur la polaire $V b b'$ du point q.

Maintenant la circonférence peut être tangente à la conique extérieurement comme dans la fig. 90, ou intérieurement comme fig. 91, et avoir en ce point de tangence un contact de troisième ordre, c'est-à-dire quatre points de communs en ce point de tangence. Alors on voit que les deux points de vue de la fig. 89 se réduisent en un seul qui est le point de tangence, et les deux axes d'homologie se confondent en la tangente en ce point; il en résulte donc que si, d'un point quelconque d de cette tangence, on mène les tangentes $d\,a$, $d\,a'$ aux deux courbes, la droite $a\,a'$ qui joint les points de tangence passera toujours par le point de tangence **V**.

Remarquons que cela n'a lieu dans la fig. 89 que pour le point q.

Réciproquement si les deux courbes tangentes sont telles que la droite qui joint deux points de tangence $a\,a'$ de deux tangentes menées d'un même point de leur tangente commune, passent toujours par un même point, c'est que les deux courbes ont un contact de troisième ordre.

Examinons le cas où la circonférence et la conique sont comprises l'une dans l'autre, fig. 92.

Ici il n'y a plus de tangente réelle commune. Pour trouver les points de vue et les axes d'homologie, il faut déterminer un des trois points q, q_1, q_2 conjugués, c'est-à-dire qui sont tels que chacun a même polaire dans les deux courbes, et nous savons que deux des points de vue sont situés sur chacune de ces polaires. Comme il y a trois points à déterminer en même temps, on ne peut trouver la solution de ce problème que par l'emploi de coniques.

On mène dans le plan une droite quelconque que nous désignons par L, on prend les polaires de chacun de ses points relativement aux deux courbes, elles se couperont deux à deux suivant une conique M.

On trace une seconde droite L_1 ; à cette droite correspond de même une seconde conique M_1. Ces deux courbes se coupent généralement en quatre points. Un de ces quatre points est le point d'intersection des polaires du point de rencontre des deux droites L, L_1. Donc elles ont trois autres points communs dont l'un est nécessairement réel; or il résulte de la construction que chacun de ces trois points a la même polaire dans les deux courbes, puisque les deux polaires d'un de ces points, par rapport aux deux courbes, doivent se couper et sur la droite L et sur a droite L_1, donc elles se confondent.

Soit donc q un de ces trois points, dont la polaire commune est la droite $a\,a_1\,a'\,a'_1$ qui doit contenir deux des points de vue ; ce point q est le point d'intersection des deux axes d'homologie qu'il s'agit de déterminer.

Les deux axes d'homologie sont également inclinés sur le grand axe de la conique, donc une perpendiculaire abaissée du point q sur la direction du grand axe sera une bisectrice de l'angle des deux axes cherchés. Or les couples de tangentes $q\,a$, $q\,a_1$; $q\,a'$, $q\,a'_1$ et les deux axes $q\,T$, $q\,T_2$ sont en involution, dont l'axe de la conique ou toute autre droite qui lui serait parallèle doit couper ces trois couples de droite en trois couples de points en involution; on connaît les deux segments correspondants aux couples de droites, $q\,a$, $q\,a_1$; $q\,a'$, $q\,a'_1$ et le milieu du segment correspondant aux deux axes; il est facile alors de déterminer les deux extrémités de ce segment; il suffit, sur les deux premiers segments, de décrire deux circonférences se coupant en deux points, la corde commune détermine le centre de l'involution; sur le milieu de cette corde, on élève une perpendiculaire; toute circonférence ayant son centre sur cette perpendiculaire et passant par les deux extrémités de cette corde, détermine sur la transversale deux points de l'involution; si donc sur le milieu connu du troisième segment on élève une perpendiculaire, elle rencontrera celle élevée sur le milieu de la corde commune, en un point qui sera le centre d'un cercle passant par les extrémités de la corde commune et déterminant sur la transversale deux points qui seront à égale distance du point milieu ; ces deux points appartiendront aux deux axes cherchés, qui sont ainsi déterminés.

Connaissant les deux axes $q\,T$, $q\,T_2$, d'un point d quelconque d'un de ces axes on mène les tangentes $d\,b$, $d\,c$ à la circonférence, et celles $d\,b'$, $d\,c'$ à la conique ; soient b, c, b', c' les points de tangence ; alors en joignant deux à deux ces points par des droites, les droites $b\,b'$, $c\,c'$ passeront par un des points de vue V et celles $b'\,c$, $b\,c'$ passeront par le second point de vue V_1. Ces deux points, qui doivent en même temps se trouver sur la polaire $a\,a$, $a'\,a'_1$ du point q sont donc déterminés.

On peut encore déterminer les axes d'homologie de la manière suivante, qui s'applique à deux coniques perspectives réciproques l'une de l'autre.

On prend les deux polaires d'un point o quelconque du plan relativement aux deux coniques ; elles se rencontrent en un point o' par où passent toutes les polaires du même point relativement à toutes les coniques qui passent par les quatre mêmes points d'intersection On détermine de même les deux polaires d'un second point o_1 qui se rencontrent en un point o'_1. Les deux axes d'homologie peuvent être regardés comme une de ses sections coniques qui passent par les mêmes quatre points d'intersection; si donc on prenait les polaires des points o et o_1 relativement à ces deux droites, l'une passerait par le point o' et l'autre par le point o'_1, mais elles passeront aussi toutes les deux par le point q d'intersection de ces deux axes d'homologie; donc ces deux polaires seront les droites $q\ o'$, $q\ o'_1$; or on sait que les polaires d'un point o relativement à deux droites est la conjuguée harmonique de la droite $o\,q$ qui joint ce point o au sommet q de l'angle des deux droites; il en résulte que les deux couples de droite $q\,o$, $q\,o'$; $q\,o_1$, $q\,o'_1$ forment entr'eux des angles qui sont divisés harmoniquement par les deux axes d'homologie. Ces deux axes sont donc les rayons doubles d'un faisceau en involution formé par ces droites, donc elles sont déterminées.

Il existe encore une infinité de propositions sur les coniques, nous croyons avoir donné les plus importantes; celles que nous ne donnons pas ne peuvent trouver place que dans un traité spécial sur les coniques.

DÉTERMINATION DES AXES D'UNE SECTION CONIQUE CONNUE PAR CINQ CONDITIONS.

Nous avons fait voir comment on pouvait obtenir une section conique quelconque par la perspective d'un cercle, et nous en avons déduit de nombreuses propriétés de ces courbes.

Nous avons ensuite montré comment une conique et une circonférence, tracées dans un même plan, peuvent être considérées comme perspectives réciproques l'une de l'autre, de sorte que toute construction à faire sur la conique peut se remplacer par une autre sur la circonférence; il suffit de retrouver les différents points de vue et les axes d'homologie.

Nous avons supposé la conique tracée, et alors nous avons fait voir de combien de manières une circonférence pouvait en être la perspective. Nous allons maintenant chercher à donner le tracé d'une conique connue par cinq conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle soit déterminée.

On peut résoudre ce problème de plusieurs manières : celle employée jusqu'ici consiste, au moyen des cinq conditions données, à trouver successivement des points ou des tangentes de la courbe.

Nous nous proposons de substituer à cette méthode une autre plus générale et qui rentre dans notre manière de regarder la conique comme perspective immédiate d'une circonférence.

Nous allons, pour cela, chercher à trouver de suite les axes de la conique satisfaisant à cinq conditions.

Il suffit, pour résoudre ce problème, de savoir trouver une circonférence, perspective de la conique cherchée et connue par les cinq conditions.

Le nombre de ces problèmes est considérable, car on peut établir de bien des manières cinq conditions qui déterminent une conique. Nous ne donnons que les cas les plus importants.

Nous ne pourrons même pas détailler chaque construction, cela nous entraînerait trop loin; nous donnerons, le plus succinctement possible, la construction la plus simple, qui conduit à trouver les axes de la conique, cette construction s'appuyant toujours sur les principes établis dans le cours de l'ouvrage.

Pour établir de l'uniformité dans les divers cas qui vont se présenter, nous adoptons les conditions suivantes :

1° a, b, c, d, e désigneront des points de la courbe.

2° A, B, C, D, E, des tangentes aux points respectifs a, b, c, d, e.

3° O désignera toujours le centre de la courbe.

4° F, F_1 les foyers.

5° (A), (A.) les extrémités du grand axe.

6° (B), (B.) les extrémités du petit axe.

7° (D), (D.) les longueurs de deux diamètres conjugués.

8° α l'angle de deux diamètres conjugués.

Premier cas. — (Fig. 92 *bis*.)

Les données sont les cinq points *a, b, c, d. e.*

1° On forme avec quatre quelconque des points donnés le quadrilatère *a b c d*, soient *f* et *g* les points de concours des côtés opposés, *fg* la droite qui joint ces points.

2° On joint le cinquième point *e* aux points a, b, c, d par les droites *ea*, *eb*, *ec*, *ed* qui remontent la droite *fg*, aux points respectifs j, i, k, h.

3° Sur les trois segments *hi*, *jk*, *fg*, on décrit trois demi-circonférences, qui se coupent en un même point V.

4° On trace la droite TT_1, parallèle à la droite *fg*, à une distance arbitraire. La droite *fg* est celle désignée II_1.

5° On trace la droite JJ_1 parallèle à TT_1 et II_1 et à une distance du point V égale à celle de TT_1 à JJ_1.

6° Par les points *l*, *m* d'intersection de la droite TT_1 et des côtés du quadrilatère a b c d, ou même des parallèles à la droite Vg, et par ceux *n*, *o* des parallèles a Vf, ces parallèles se coupent en des points a', b', c', d', formant le rectangle *a' b' c' d'*, homologue de celui *a b c d*.

7° La circonférence payant par ces quatre points a', b', c', d' est perspective de la conique cherchée.

8° On détermine le pôle P de la droite JJ_1 par rapport à cette circonférence, ainsi que le pôle circulaire Q.

9° Sur la droite JJ_1 on décrit comme diamètre une circonférence passant par les points V et Q, soient q et r les extrémités du diamètre; les droites Vq, Vr sont les parallèles aux axes cherchés.

10° La droite qPg, qui joint le point q au pôle P, rencontre celle TT_1 en un point y, par lequel on mène une parallèle yo, et on a un des axes de la courbe; de même la droite rPx rencontre TT_1 en x, par lequel on mène xo, et on a l'autre axe de la courbe.

11° Par le point q on mène à la circonférence les deux tangentes qs, qt, qui rencontrent TT_1 en s et t, et par ces deux points s et t on mène des parallèles à la droite Vq; elles déterminent les extrémités (A), (A.) du grand axe.

12° Par le point r on mène de même les deux tangentes ru, rv qui rencontrent TT_1 en u et v, par lesquels on mène des parallèles à Vr; elles déterminent les extrémités (B), (B.) du petit axe.

Même cas. — (Fig. 93.) *Hyperbole.*

Les données sont comme (fig. 92) les cinq points a, b, c, d, e.

Même construction que dans la (fig. 92,) jusqu'au n° 7. On voit qu'ici, d'après les données, la droite JJ_1 coupe la circonférence en deux points α, β.

Le pôle P de la droite JJ_1 est extérieur à la circonférence, et le point Q n'existe pas. Le point r est intérieur à la circonférence et le point q est extérieur.

Vq, Vr sont les directions des axes, et $V\alpha$, $V\beta$ sont celles des asymptoles; Vq, Vr sont les bissectrices des angles des asymptoles.

qs et qt sont les tangentes à la circonférence; menées du point q, elles rencontrent la droite TT_1 aux points s et t, par lesquels on mène les parallèles à Vq, qui déterminent les extrémités (A), (A.) du grand axe de l'hyperbole.

Comme du point r intérieur à la circonférence on ne peut mener de tangentes à la circonférence, il en resulte que les sommets du second axe sont imaginaires.

Le centre de la courbe est la perspective du pôle P. Par ce point menant des parallèles à $V\alpha$, $V\beta$, on aura les asymptoles de l'hyperbole.

Même cas. — (Fig. 94, 94 *bis*, 95). *Parabole.*

Les données sont a, b, c, d et une tangente E à l'infini.

Il faut d'abord déterminer la direction de l'axe.

1° Les quatre points a, b, c, d forment le quadrilatère *a b c d*, dont f et g sont les points de concours des côtés opposés; *ac, bd* les diagonales se coupant en O.

2° Par un point quelconque *g* (fig. 94 *bis*) on mène les quatre droites g a, g b, g c, g d, parallèles aux côtés respectifs du quadrilatère, lesquelles déterminent sur une transversale quelconque les points a, b, c, d.

3° Sur les segments *ab, cd* on décrit deux circonférences, se coupant en deux points i, i_1 et déterminant ainsi la corde commune ii_1 *o* qui rencontre la transversale au point *o*, centre d'une involution.

4° Du point o comme centre, avec un rayon ok égal à la partie de la tangente menée du centre *o* à l'une ou l'autre circonférence, on décrit un cercle qui détermine sur la transversale les point δ, γ, extrémité du diamètre.

5° Les droites $g\delta$, $g\gamma$ sont les directions possibles de l'axe.

Il y a donc deux paraboles passant par les quatre points.

Autrement (fig. 94) :

1° Sur le segment *bd* on décrit une demi-circonférence, et au point o on élève sur le diamètre la perpendiculaire om.

2° Sur le segment ac on décrit une demi-circonférence, et du point o on élève sur le diamètre la perpendiculaire on.

3° On forme le triangle-rectangle cna, sur le côté na duquel on prend $n\alpha = \mathrm{om}$.

4° Par le point α on trace $\alpha\beta$, parallèle à ac, et on porte le côté $n\alpha$ sur la droite bd, à partir du point o et de chaque côté.

5. On détermine ainsi les points δ et γ, et les droites $c\delta$, $c\gamma$ sont les deux directions possibles de l'axe.

Soit de même (fig. 95) $abcd$ le quadrilatère formé par les quatre points donnés, et aj la direction d'un axe.

1° Par les quatre sommets a, b, c, d du quadrilatère, on mène les quatre droites aj, ah, ak, ai, parallèles à la direction de l'axe; elles rencontrent la droite fg, qui joint les points de concours des côtés opposés aux points j, h, k, i.

2° Sur jk, hi on décrit deux demi-circonférences, lesquelles se coupent en un point V qui sera le point de vue.

3° En se donnant à volonté, comme pour l'ellipse et l'hyperbole, un axe d'homologie TT_1 parallèle à la droite fg qui est celle divisée par II_1 on déterminera le rectangle $a' b' c' d'$ perspective de celui $abca$ pour le point V.

4° On trace la circonférence, qui passe par les quatre points $a' b' c' d'$, et qui sera la perspective de la parabole.

5° La tangente à cette circonférence, et parallèle à TT_1 sera la droite désignée par JJ_1. Le point de la tangente P est la réunion des points P,Q.

6° On décrit sur JJ_1 comme diamètre, une demi-circonférence passant par V et P. Soit q l'extrémité du diamètre. Vp, Vq seront les directions des axes.

7° Du point q_1 on mène à la circonférence une tangente qs qui remonte l'axe d'homologie TT_1 en s ; la corde de conctact, ou pôle du point q, rencontre ce même axe en x.

8° Par le point x on mène x (A) parallèle à la droite V P, et par celui s une parallèle à la droite Vq; la droite x (A) est le grand axe et le point (A) est le sommet de la courbe.

On déterminera la seconde parabole par une construction semblable, relativement à l'autre direction trouvée.

Deuxième cas. — (Fig. 96.)

Les données sont les quatre points a, b, c, d, et une tangente E en un point inconnu *e*.

1° Les quatre points *a, b, c, d* forment un quadrilatère *a b c d* dont les côtés opposés déterminent sur la tangente donnée E les deux segments *mn*, *st*.

2° Sur les segments *mn*, *st* on décrit deux circonférences se coupant en *f* et *g*, et déterminant la corde commune *fg* qui rencontre la tangente E au point *h*, centre d'involution.

3° Du point *h* comme centre, avec le rayon $hi = hj$ qui est la distance du point *h* aux points de tangence *i* ou *j*, on décrit une circonférence qui rencontre la tangente E en deux points *e* et ee_1 qui appartiennent à deux coniques passant par les quatre points, l'une tangente en *e* et l'autre en ee_1. Il y a donc deux solutions.

Connaissant les cinq points a, b, c, d, e de la courbe, le problème revient au précédent.

Troisième cas. — (Fig. 97.)

Les données sont les trois points a, b, c et les deux tangentes D et E.

1° On décrit, avec un rayon arbitraire, une circonférence tangente aux deux droites D et E.

2° Les droites Va, Vb, Vc déterminent sur la circonférence les couples de points a', a'_1; b', b'_1; c', c'_1. Au triangle abc formé par les trois points donnés, il correspond homologiquement et indifféremment les quatre couples de triangles :

$$\begin{cases} a'b'c' \\ a'_1b_1c'_1 \end{cases} \quad \begin{cases} a'b'c'' \\ a'_1b'_1c \end{cases} \quad \begin{cases} a'b'_1c' \\ a'_1b'c'_1 \end{cases} \quad \begin{matrix} a'b'_1c'_1 \\ a'_1b'c' \end{matrix}$$

Prenons d'abord le triangle $a'b'c'$ comme l'homologue de celui abc.

3° Les droites ab, $a'b'$ se rencontrent en un point l; celles ac, $a'c'$ en m; celles bc, $b'c'$ en n; la droite qui passe par ces trois points l, m, n est l'axe d'homologue TT$_1$.

4° La droite Vh, parallèle à ab, rencontre $a'b'$ en h; celle Vi, parallèle à ac rencontre $a'c'$ en i; celle Vj, parallèle à bc, rencontre $b'c'$ en j. La droite qui passe par ces trois points h, i, j est celle désignée par II$_1$.

5° On détermine le pôle P de la droite II_1 et celui circulaire Q, et par les points Q et V on fait passer une circonférence dont le centre est sur la droite II_1, soient q et r les extrémités du diamètre. Les droites Vq, Vr sont les directions des axes.

6° La droite Pr coupe celle TT_1 en x par lequel point on mène x (A) parallèle à Vr, on a le grand axe. La droite Pq rencontre TT_1 en y, par lequel on mène y (B) parallèle à Vq, on a le petit axe.

7° Par le point r on mène à la circonférence les tangentes qui rencontrent l'axe d'homologie TT_1 aux points v et u, par lesquels on mène les parallèles r(B), u(B) qui déterminent les extrémités du petit axe.

8° Par le point u on mène les tangentes à la circonférence; elles rencontrent TT_1 aux points s et t, par lesquels on mène les parallèles t(A), s(A), qui déterminent les extrémités du grand axe.

La corde de contact $e'd'$ rencontre les droites II_1, TT_1 en k, k_1; alors la droite k_1ed, parallèle à celle kV, déterminera les deux points e et d de tangence des tangentes données E D.

Le problème est ainsi résolu.

Si on avait pris le triangle $a'_1b'_1c'_1$ comme l'homologue, on obtiendrait les mêmes axes et par conséquent la même conique, mais avec un axe d'homologie différent. Il en serait de même si on prenait pour homologue de celui abc deux autres triangles d'un même couple; mais pour chaque couple les axes et la courbe correspondante seront différents. Donc le problème admet quatre solutions, qu'on obtiendra de la même manière.

Nous avons supposé que les trois points donnés a, b, c étaient tous compris dans le même angle formé par les tangentes données D et F. Ils peuvent être aussi dans les deux angles opposés par le sommet, les solutions seront réelles; mais si ces trois points n'étaient pas dans le même angle, le problème serait impossible.

Quatrième cas. — (Fig. 98.)

Les données sont deux points a et b et trois tangentes C, D, E.

1° On décrit une circonférence, de rayon arbitraire, tangente à deux des tangentes données, telles que C et F.

2° Les droites Va, Vb déterminent dans la circonférence les couples de points a', a'_1; b', b'_1; de sorte que la droite ab peut être l'homologue des couples de droites $a'b'$, $a'_1b'_1$; $a'b'_1$, a'_1b'. Prenons d'abord $a'b'$ comme l'homologue de ab.

3° Les droites ab, $a'b'$ se rencontrent en un point n appartenant à l'axe d'homologie TT_1.

4° La droite ab prolongée rencontre la troisième tangente donnée en un point f, lequel a pour homologue le point f' à l'intersection de la droite Vff' et de celle $a'b'$.

5° Si du point f' on mène à la circonférence la tangente $f'd'$, elle sera l'homologue de celle D passant par le point f. Ces deux tangentes se rencontreront en un point m appartenant à l'axe TT_1; donc cet axe est déterminé.

Nous remarquerons que du point f' on peut mener deux tangentes à la circonférence, de sorte qu'il y aura deux axes différents d'homologie, passant tous les deux par n.

6° La droite Vd', qui joint le point V au point de tangence d', coupe la tangente donnée D en son point de tangence d. On aurait un autre point de tangence sur cette droite, si on prenait la droite Vd'_1 à l'autre point de tangence d'_1.

7° Vh, parallèle à D, rencontre en h la tangente $mf'd'$, qui est un point de la droite II_1 de sorte que II_1 menée parallèle à TT_1 par ce point h, est la droite II_1.

8° Connaissant les droites TT_1, II_1, la construction s'achèvera comme dans les cas précédents.

En prenant $a'b'$ pour homologues de ab, on aura deux coniques satisfaisant à la question.

En prenant $a'_1b'_1$ pour homologues de ab, on aurait la même conique avec un autre axe d'homologie.

En prenant $a'b'_1$ ou a'_1b' pour homologues de ab, on trouverait encore deux nouvelles coniques satisfaisant à la question; donc le problème admet quatre solutions.

On voit que le problème n'admet pas de solutions si les deux points donnés ne sont pas dans le triangle formé par les trois tangentes ou tous les deux extérieurs au triangle, et alors situés dans un des trois angles, ou l'un dans un angle et l'autre dans celui opposé au sommet.

Cinquième cas. — (Fig. 99.)

Les données sont un point a et les quatre tangentes B, C, D, E.

Les quatre tangentes B, C, D, E forment un quadrilatère dont les diagonales sont mn et pq.

1° On joint le point a donné aux extrémités m et n d'une des diagonales, les droites am, an rencontrent l'autre diagonale pq en r et s.

2° Sur les deux segments rs, pq on décrit deux circonférences se coupant en f et g; la corde commune fg rencontre la diagonale pq au point h.

3° De ce point h, comme centre, avec un rayon égal à la distance hi du point h au point de tangence à l'une ou l'autre circonférence, on décrit un cercle qui coupe la droite pq aux points x et y; xa, ya seront la tangente en a; il y a donc deux solutions.

On obtiendra ensuite les axes par les méthodes précédentes.

Sixième cas. — (Fig. 100.)

Les données sont les cinq tangentes A, B, C, D, E.

Les cinq tangentes données forment un pentagone.

1° On joint tous les sommets deux à deux par des diagonales; on forme alors un autre pentagone $oklmn$.

2° Les droites ik, jl, fm, gn, ho, qui joignent les sommets du premier aux sommets respectifs opposés de l'autre, comme l'indique la figure, rencontrent les côtés opposés aux points a, b, c, d, e, qui sont les points de tangence de la conique avec les tangentes données.

Le problème se ramène alors au premier cas, où l'on donne cinq points.

Il pourrait se résoudre aussi comme le cinquième et sixième cas, en prenant une circonférence auxiliaire tangente à deux des tangentes données.

Septième cas. — (Fig. 101.)

Les données sont un point a, les deux tangentes B et C, et leurs points de tangence b et c.

1° On trace une circonférence tangente aux deux tangentes B et C. Soient b' et c' les points de tangence de cette circonférence et des deux droites B et C.

Le point b' est ainsi homologue de b et a' de a.

2° La droite Va rencontre la circonférence aux deux points a', a'_1. Prenons a' pour l'homologue de a.

3° Les droites homologues ab, $a'b'$ se coupent en l; celles ac, $a'c'$ en u; la corde de contact bc rencontre celle $b'c'$ en m; les trois points l, m, n en ligne droite déterminent l'axe d'homologie TT.

4° La droite Vh, parallèle à celle bc, rencontre $b'c'$ en h, et la parallèle à TT_1 menée de ce point h détermine la droite II.

Connaissant les droites TT_1 et II, la construction s'achèvera comme ci-dessus.

Si on avait pris a'_1 comme homologue de a, on aurait eu la même courbe, mais avec un autre axe d'homologie.

Huitième cas. — (Fig. 102.)

Les données sont les trois tangentes A, B, C et deux des points b et c de tangence.

1° Les droites nb, Vc, qui joignent les sommets n et B du triangle au point de tangence du côté opposé, se rencontrent en un point g.

2° La droite mg, qui joint ce point g au sommet m, rencontre la tangente A dans son point de tangence a.

Le problème se ramène alors au précédent.

Neuvième cas. — (Fig. 103.)

Les données sont les trois points a, b, c, une tangente D et son point de tangence d.

1° On trace avec un rayon arbitraire une circonférence tangente au point donné d, à la tangente D.

2° On joint ce point d aux trois autres a, b, c par des droites da, db, dc qui rencontrent la circonférence aux points respectifs a', b', c'.

Les droites homologues ab, $a'b'$; ac, $a'c'$; bc, $b'c'$ se rencontrent aux points respectifs l, m, n, qui déterminent l'axe d'homologie TT_1.

3° La droite dg, parallèle à ac, rencontre $a'c'$ en g; df, parallèle à bc, rencontre $b'c'$ en f, etc.

Ces points de rencontre se trouvent sur la droite II_1 parallèle à celle TT_1; elle est ainsi déterminée.

On détermine les pôles P, Q de la droite II_1, une circonférence passant par Q et d et ayant son centre sur la droite II déterminera les deux points q et r extrémités du diamètre.

dq, dr seront les directions des axes.

On terminerait la construction comme ci-dessus.

Dixième cas. — (Fig. 104.)

Les données sont un point a, trois tangentes B, C, D, et le point d de tangence de cette dernière.

1° On trace une circonférence tangente à B et C.

2° La droite Va détermine sur la circonférence les deux points a', a'_1; de même la droite Vd détermine sur la circonférence les deux points d', d'_1; de sorte que à la droite ad correspondent les deux couples de droites homologues $\begin{cases} a'd' \\ a'_1d'_1 \end{cases}$ $\begin{cases} a'd'_1 \\ a'_1d' \end{cases}$. Admettons $a'd'$ homologues de ad.

3° La droite ad coupe son homologue $a'd'$ en n. La tangente à la circonférence au point d' est l'homologue de la tangente D, qu'elle rencontre en m; la droite mn, qui passe par ces deux points, est l'axe TT_1.

4° La droite Vi, parallèle à D, rencontre la tangente homologue à D, c'est-à-dire md' au point i appartenant à la droite II_1; de même Vk, parallèle à ad, coupe $a'd'$ en k de la même droite II_1; cette droite doit de plus être parallèle à TT_1, donc elle est déterminée.

5° Si par V on mène Vj parallèle à md', elle rencontrera en j la tangente D, et ce point appartiendra à la droite JJ_1.

La droite Vl, parallèle à $a'd'$, coupe celle ad au point l appartenant à cette même droite JJ_1, qui doit être en outre parallèle à TT_1 et II_1, et est ainsi déterminée.

Connaissant ces droites, le reste comme ci-dessus.

On voit que le problème comporte deux solutions. Il faut prendre pour homologue de ad une des deux droites $a'd'_1$ ou a'_1d'.

Onzième cas. — (Fig. 105.)

Les données sont deux points a, b, deux tangentes C et D, et le point d de tangence de D.

1° On trace une circonférence tangente à C et à D au point d.

2° Les droites Va, Vb déterminent sur la circonférence les doubles points homologues $a'a'_1$; $b'b'_1$, de sorte que la droite ab peut avoir pour homologues les couples de droites $a'b'$, $a'_1b'_1$ et $a'b'_1$, a'_1b'. Prenons $a'b'$ pour homologues de ab.

3° La droite ab coupe celle homologue $a'b'$ au point n appartenant à l'axe TT_1 ; mais le point d est commun aux deux nombres, donc c'est encore un des points de TT_1 qui est ainsi déterminé.

4° La droite Vk parallèle à ab, rencontre $a'b'$ en k sur II et Vt parallèle a $a'b'$ rencontre ab en l sur JJ_1, et comme ces deux droites II_1 JJ_1 doivent être parallèles à TT_1 elles sont déterminées.

Le reste de la construction comme ci-dessus.

Le problème comporte deux solutions.

Dans la figure l'ellipse se trouve très-allongée, elle peut devenir une parabole.

Douzième cas. — (Fig. 106.)

Les données sont les quatre tangentes A, B, C, D et le point d de tangence de la tangente D.

Les quatre tangentes forment le quadrilatère $k\,l\,m\,n$; fg est la droite qui joint les points de concours des côtés opposés.

La diagonale kl coupe fg au point i, celle mn rencontre cette même droite au point h.

La droite id qui joint le point i au point d donné, rencontre la tangente A en son point de tangence a.

De même ha rencontre la tangente B en son point de tangence b, et ib rencontrera la tangente C en c.

Les trois points k, d, e sont en ligne droite.

Les quatre points a, b, c, d forment un quadrilatère $a\,b\,c\,d$ dont les diagonales passent par le point P d'intersection des deux diagonales $m\,n$, $k\,l$. (Connaissant quatre points et les tangentes en ces points, la construction s'achèvera par les méthodes ci-dessus données.)

Treizième cas. — (Fig. 107.)

Les données sont trois points a, b, c, et le foyer F. Le foyer compte pour deux données.

1° Du point F comme centre, avec un rayon arbitraire, on décrit une circonférence.

2° On trace les droites Fa, Fb, Fc qui déterminent sur la circonférence les couples de points a', a'_1; b', b'_1; c', c'_1; de sorte que le triangle $a\,b\,c$ peut avoir pour homologue un quelconque des triangles des quatre couples.

$$\begin{array}{cccc} a'b'c' & a'b'_1c' & a'b_1'c_1' & a'b'c'_1 \\ a'_1b'_1c'_1 & a'_1b'c_1 & a'_1b'c' & a'_1b'_1c' \end{array}.$$

Prenons $a'\,b'\,c'$ pour l'homologue de $a\,b\,c$.

3° La droite $a\,b$ rencontre son homologue $a'\,b'$ en l, celle $b\,c$ rencontre $b'\,c'$ en m et celle $a\,c$ rencontre $a' c'$ en n; ces trois points l, m, n, qui sont en ligne droite, déterminent l'axe d'homologie $T T_1$. Cette droite rencontre la circonférence en deux points f, f_1 qui appartiennent à la conique.

4° La tangente $r a'$, à la circonférence au point a', rencontre l'axe $T T_1$ en un point r, de sorte que $r a$ est la tangente à la conique. De même la tangente $c' s$ à la circonférence au point e' rencontre $T T_1$ en s, et $s c$ est la tangente à la conique. On déterminerait de même la tangente au point b.

5° On trace les deux rayons recteurs $F a$, $F c$, et on détermine les deux droites $F_1 a$, $F_1 c$ qui font avec la tangente le même angle ; ces deux droites $F_1 a$, $F_1 b$ se rencontrent au second foyer F_1.

On aura donc le centre, les directions des axes, les deux foyers, trois points et leurs tangentes, plus les deux points f, f'_1.

La longueur $O A$ du demi grand axe sera égale à $F a + F_1 a$; du foyer F comme centre, avec le demi grand axe pour rayon, on décrira une circonférence qui déterminera les deux extrémités (B) (B_1) du petit axe.

On voit que le problème comporte quatre solutions.

Quatorzième cas. — (Fig. 108.)

Les données sont deux points a, b, une tangente C et le foyer F.

1° Du point F comme centre, avec un rayon arbitraire, on décrit une circonférence.

2° Les droites Fa, F b déterminent sur cette circonférence les couples de points a', a'_1 ; b', b'_1 ; de sorte que la droite a b peut avoir pour homologues a' b', a'_1 b'_1 ; a' b'_1 a'_1 b'.

Prenons a' b' pour homologue de a b.

3° Les droites homologues a b, a' b' se rencontrent au point l sur l'axe T T_1. La tangente donnée C rencontre la droite en un point f et alors le rayon F f rencontre la droite a' b' au point f' homologue de celui f ; de sorte que f c' s, menée à la circonférence par ce point f', est l'homologue de celle C donnée.

Ces deux tangentes se rencontrent en un point s qui appartient aussi à T T_1, donc cet axe est déterminé par la droite l s.

4° Cette droite T T_1 coupe la circonférence en deux points k k_1 qui sont communs à la conique.

5° Le rayon Fc' rencontre la tangente C en son point de tangence c.

Le reste de la construction comme dans le cas précédent, il y a deux solutions de problème.

Quinzième cas. — (Fig. 109.)

Les données sont un point a, deux tangentes B, C et le foyer F.

1° Du point F comme centre, avec un rayon arbitraire, on décrit une circonférence.

2° La droite fa détermine sur la circonférence un couple de points a', a'_1.

Soit pris a' comme homologue de a.

3° On trace la droite apq, menée par le point a parallèlement à une des tangentes B; cette droite rencontre la seconde tangente donnée au point q et la droite mF qui joint le point m d'intersection des deux tangentes B et C au foyer F en p, ce qui donne les deux segments pq et aq.

4° Par le point a' on mène la droite $sa'tr$ perpendiculaire à celle mF qu'elle rencontre au point t.

5° Sur cette droite, on porte à droite et à gauche du point t, $tr = ts = \frac{a't}{ap}(pq + aq)$. On détermine ainsi les points r et s par lesquels on mène les deux tangentes rc', rb' à la circonférence, soient c' et b' les points de tangence. Ces deux tangentes $rc'm'$, $sb'm'$ se coupent en un point m' sur la droite m F.

6° La tangente sb' est homologue à celle B, elles se rencontrent au point g sur l'axe TT_1; de même les tangentes homologues rc' et B se rencontrent en un point h de la même droite.

Le rayon F b' coupe la tangente B au point b homologue de celui b'; de même F c' coupe C en c homologue de c'. Donc la corde $b'c'$ est homologue de celle bc; elle la rencontre en un point u sur la droite TT_1, donc cette droite est déterminée par ces trois points g, h, u.

7° Les points k, k_1 d'intersection de cet axe d'homologie TT_1 avec la circonférence sont communs à la conique.

8° La perpendiculaire menée du point F sur TT_1 sera le grand axe.

9° Du foyer F on abaisse sur la tangente C la perpendiculaire F il et on porte $il = i$ F; de même de F on abaisse F jn perpendiculaire sur la tangente B et on prend $jn = j$ F; les droites lc, nb passent par le second foyer F_1.

10° Si du point (O), milieu de FF_1, qui est par conséquent le centre de la conique, comme centre, on décrit une circonférence avec $Oi = Oj$ pour rayon, elle passera par les deux sommets (A), (A_1) du grand axe.

La circonférence décrite du foyer F comme centre avec le même rayon $Oi = Oj$ passera par les deux extrémités (B) (B_1) du petit axe.

Seizième cas. — (Fig. 110.)

Les données sont trois tangentes A, B, C et le foyer F.

1° Du point F on abaisse les trois perpendiculaires Ff, Fg, Fh, soient f, g, h, les pieds de ces perpendiculaires.

2° Le centre de la circonférence qui passe par ces trois points est le centre de la conique, et son diamètre est égal à celui du grand axe.

Ayant un foyer, le centre de la courbe est la longueur de l'axe, on a donc le grand axe et par suite le petit.

Dix-septième cas. — (Fig. 111.)

Les données sont un point a, une tangente B et son point de tangence b est le foyer F.

1° Du point F comme centre, et d'un rayon arbitraire, on décit une circonférence.

2° Les droites F a, F b déterminent sur la circonférence les couples de points a', a'' ; b', b'_1; de sorte que la droite $a\,b$ peut avoir pour homologues les couples de droite a' b', $a'_1\,b'_1$ ou $a'\,b'_1$, $a'_1\,b'$. Prenons $a'\,b'$ pour son homologue.

3° La droite $a\,b$ rencontre son homologue $a'\,b'$ en un point f de la droite T T.

La tangente B rencontre son homologue la tangente à la circonférence au point b', en g sur T T. Cette droite T T est donc déterminée en joignant les points f et g; elle coupe la circonférence en deux points f, f qui sont communs à la conique.

4° La tangente $a'\,h$ à la circonférence au point a' rencontre T T_1 en h, alors $h\,a$ est la tangente à la conique au point a.

5° Du foyer F on abaisse sur les tangentes A et B les perpendiculaires F i, Fj, soient i et j les pieds; la perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde ij passe par le centre (o) de la conique.

6° La perpendiculaire F O abaissée du foyer F sur l'axe d'homologie T T_1 est le grand centre sur lequel on aura le centre et les deux foyers.

7° Une circonférence décrite du point O comme centre, avec $oi = oj$ pour rayon, donnera les deux extrémités (A) (A_1) du grand axe.

8° Une circonférence décrite du point F comme centre, avec un rayon égal au demi grand axe, déterminera les deux extrémités (B) (B) du petit axe.

On aurait pu déterminer le 2e foyer F_1, en traçant la droite b F_1 faisant avec la tangente B le même angle que celle b F.

Le problème comporte deux solutions.

Dix-huitième cas.—(Fig. 112.)

Les données sont deux tangentes A et B, le point *b* de tangence de B et le foyer F.

1° On décrit une circonférence avec le point F pour centre et d'un rayon arbitraire.

2° La droite F *b* rencontre la circonférence en un couple de points b', b'_1. Prenons b'. La tangente $b'g$ à la circonférence en ce point b' rencontre son homologue B au point g sur TT.

3° La tangente b′ g rencontre en m′ la droite F m qui joint le foyer au point m d'intersection des deux tangentes A, B. De ce point m' on mène $ma'h$ tangente à la circonférence en un point a', alors Fa' déterminent sur la tangente A son point de tangence a; ces deux tangentes homologues $a'h$, A se rencontrent en un point h; la droite gh est l'axe d'homologie T T_1 qui coupe la circonférence en deux points f, f_1 de la conique.

Le reste de la construction comme dans les exemples ci-dessus.

Dix-neuvième cas. — (Fig. 113.)

Les données sont deux diamètres conjugués $a\,a_1$ $b\,b_1$ et l'angle δ qu'ils font entre eux.

On prend un des diamètres $a\,a_1$ pour l'axe d'homologie.

1° Sur $a\,a_1$ comme diamètre, on décrit une circonférence qui sera concentrique et homologique avec la conique. La droite $a\,a_1$ sera donc celle TT.

2° O b' perpendiculaire à $a\ a_1$, sera dans la circonférence le conjugué du diamètre $a a_1$ et comme $a a_1$ est son propre homologue dans la conique, il s'en suivra que O b' sera l'homologue de O b. Donc la droite $b\,b'$ sera la direction d'homologie.

3° Sur le milieu de $b\,b'$ on élève la perpendiculaire dn rencontre l'axe d'homologie en n, d'où il suit que $b\,n$ est l'homologue de $b'\,n$.

4° La droite c O c_1 parallèle à $n\,b$ sera la seconde corde commune à la conique et à la circonférence.

Elle rencontre en c, c_1 cette circonférence, ce sont des points communs à la conique.

5° Les bisectrices des angles des deux cordes communes seront les axes de la courbe.

6° On trace of parallèle à nb', on joint le point f aux extrémités a, a_1; l'angle afa_1 est droit.

7° On trace les deux diamètres rectangulaires ij, gh parallèles respectifs à fa, fa, ce sont les deux diamètres rectangulaires du cercle, homologues des axes de la conique.

8° Par les extrémités i et j on mène i (A), j (A_1) parallèle à la direction bb' d'homologie et on détermine les deux extrémités (A), (A_1) du grand axe. Par ceux g et h on mène deux parallèles à la même direction et on a les extrémités du petit.

Vingtième cas. — (Fig. 114.)

Les données sont un point a de la courbe, un diamètre bb_1 et l'angle δ de ce diamètre et de son conjugué.

On prend le diamètre donné bb_1 pour axe d'homologie.

1° On décrit sur le diamètre bb_1 une circonférence qui sera concentrique et homologique à la conique.

2° Par le point donné a on mène la droite an parallèle au diamètre conjugué $c\,c_1$, elle rencontre le diamètre $b\,b_1$ au point n et en ce point on élève la perpendiculaire $n\,a'$ à $b\,b_1$; la droite $a\,a'$ est alors la direction d'homologie par conséquent de deux tangentes communes.

3° Sur le milieu de $a\,a'$ on élève la perpendiculaire $g\,m$ qui rencontre l'axe d'homologie $b\,b_1$ en m et alors $m\,a$, $m\,a'$ sont deux droites homologues,

4° On trace le diamètre $o\,k$ parallèle à $m\,a'$ et par le centre on mène les deux diamètres $i\,i_1$, $h\,h_1$ parallèles aux deux cordes rectangulaires $b\,k$, $b'\,k$.

5° La droite $d\,O\,d'$ parallèle à $m\,a'$ est la seconde corde commune. Les bisectrices des deux cordes communes sont les axes.

6° Les parallèles i (A), i (A_1) à $a\,a'$ menées par les points i i_1 donneront les deux extrémités (A), (A_1) du grand axe; et celles menées de même par les points h, h_1 donneront les extrémités du petit axe.

Vingt-unième cas. — (Fig. 115.)

Les données sont une tangente A, un diamètre

$a\,a_1$ en grandeur et direction, et l'angle δ qu'il fait avec son conjugué.

On prend toujours le diamètre donné $a\,a_1$ pour l'axe d'homologie $T\,T_1$.

1° Sur $a\,a_1$ comme diamètre on décrit une circonférence, elle sera concentrique et homologique avec l'ellipse.

2° On prolonge la tangente donnée A jusqu'à son intersection en g avec l'axe $a\,a_1$, et du point g on mène $g\,k$ tangente en k à la circonférence.

3° Connaissant l'angle δ des deux diamètres conjugués, celui $b\,b_1$ est donc déterminé en direction. Il rencontre la tangente A au point b.

4° Une perpendiculaire $o\,b'$ élevée en centre O au diamètre $a\,a_1$ donne le point b' homologue de celui b, alors $b\,b_1$ est la direction d'homologie.

5° Le reste de la construction comme ci-dessus.

Vingt-deuxième cas. — (Fig. 116.)

Les données sont deux points a, b, le centre les directions de deux diamètres conjugués.

1° Du point O donné comme centre, on décrit une circonférence passant par le point a donné.

Le diamètre aa_1 du cercle sera commun avec celui de l'ellipse; nous le prenons pour axe d'homologie TT.

2° Du point b donné, on mène bf parallèle à la direction NN_1 donnée d'un diamètre; cette droite rencontre l'axe d'homologie aa_1 au point f. De même bg, parallèle à l'autre diamètre MM_1 donné, rencontre cette même droite aa_1 au point g.

3° Sur fg comme diamètre on décrit une circonférence qui rencontre la première en un point b'. La droite bb' est la direction d'homologie.

4° Sur le milieu de bb' on élève la perpendiculaire dn qui rencontre le diamètre aa_1 en n, et alors nb, nb' sont des droites homologues.

5° ij parallèle à nb est la seconde corde commune.

Le reste de la construction comme ci-dessus.

Vingt-troisième cas. — (Fig. 117.)

Les données sont un point a, une tangente B, le centre o et les directions OM, ON de deux diamètres conjugués.

1° Du point o, comme centre, on décrit une circonférence tangente à la tangente B donnée.

2° Puisqu'on connaît les directions OM, ON, de deux diamètres conjugués, il résulte que le point a donné a donne de suite les trois autres sommets b, c, d du quadrilatère $a\,b\,c\,d$ dont les côtés sont deux à deux parallèles aux diamètres donnés.

3° La tangente B est la direction d'homologie de la conique et de la circonférence; de sorte que, si par les quatre points a, b, c, d on mène des parallèles à cette tangente B, elles couperont la circonférence en des couples de points a, a'_1; b', b'_1; c', c'; d', d'_1. De sorte que la droite ab sera homologue aux couples de droite $\frac{a'b'}{a'_1b'_1}$ $\frac{a'b'_1}{a'_1b'_1}$ et de même pour les autres; prenons $a'b'$ pour homologue de ab, $a'd'$ de ad, et $b'c'$ de bc, et $d'c'$ de dc.

Les couples de droites homologues se montreront en quatre points j, k, l, m sur la même droite passant par le centre o. Ce sera l'axe TT_1 d'homologie.

4° La droite $f'a'$, qui joint les deux points f' et a du cercle, rencontre l'axe d'homologie TT_1 au point p; alors apf est une droite homologue de celle $a'pf'$. Si donc f^1 est le point de tangence de la circonférence et de la tangente B, le point f sera son homologue et sera le point de tangence de la tangente et de la conique.

5° f *et* f' étant deux points homologues quelconques, on élève sur le milieu de ff' une perpendiculaire qui rencontre l'axe d'homologie TT_1 au point n; nf, nf' sont deux droites homologues; hg parallèle à nf sera la seconde corde commune

6° Les axes sont les bisectrices des deux cordes communes.

7° On détermine comme précédemment les deux diamètres qr et st rectangulaires dans la circonférence, qui sont les homologues des axes de la conique.

8° Des parallèles à la tangente B, menées par les quatre points q, r, s, t, déterminent les extrémités des axes.

La figure 117 s'applique à une ellipse.

Il y a deux solutions.

Vingt-quatrième cas. — (Fig. 118.)

Les données sont les deux tangentes A et B, le centre O et les directions OM, ON de deux diamètres conjugués.

1° Une des tangentes A rencontre le diamètre donné OM en un point y, et l'autre ON en un point n'. En prenant $Ox = On'$ et $oq' = oy$, on forme le parallélogramme $xyn'q^1$ circonscrit à la conique.

2° La tangente donnée B forme avec les quatre autres un pentagone circonscrit.

On retombe sur le *sixième cas* (fig. 100) qui donne les cinq points de tangence.

Alors le problème revient à déterminer les axes d'une conique passant par cinq points.

Vingt-cinquième cas. — (Fig. 119.)

Les données sont une tangente A et son point *a* de tangence, le centre O, OM et ON les directions de deux diamètres conjugués.

Le point connu *a* donne immédiatement le point *c* diamétralement opposé. La droite *zcy*, parallèle à la tangente donnée A, sera la tangente à la conique au point *c*.

Ces deux tangentes A et *zcy* rencontrent les diamètres conjugués donnés aux points *x*, *u* et *z*, *y*; de sorte que les droites *xy*, *zu* sont deux tangentes à la conique.

Les droites *ab*, *cd*, menées par les points *a* et *c* parallèlement à la diagonale ON, donnent les deux points de tangence *b* et *d*. Celles de *cb*, *ad* parallèles à l'autre diamètre OM conjugué de celui ON, passeront de même par les points *b* et *d*.

On a donc les quatre tangentes ux, xy, yz, zu formant le quadrilatère circonscrit $uxyz$ et les quatre points de tangence.

La construction s'achèvera par les méthodes ci-dessus.

Vingt-sixième cas. — (Fig. 120.)

Les données sont les trois points a, b, c et le centre O de la circonférence.

1° Du point O comme centre avec le rayon Oa on décrit une circonférence. Le rayon Oa prolongé sera l'axe d'homologie TT_1.

2° Si on joint le centre O aux points f, g, h, milieu des côtés du triangle abc formé par les trois points donnés, on aura les trois diamètres Of, Og, Oh dont leurs conjugués respectifs seront les droites Of, Oj, Oi menées par le centre O parallèlement aux côtés ab, bc, ca du triangle.

3° Les trois couples de diamètres conjugués rencontrent un des côtés ab du triangle abc aux couples de points conjugués f, ∞ ; g', j' ; $h'i$ (le conjugué du point f est à l'infini). Sur les segments $f\infty$, $g'j$, $h'i$ on décrit des demi-circonférences qui se rencontrent en un point v.

4° Pour avoir le diamètre conjugué à celui Oa connu, on décrit une circonférence passant par les points a et v, et ayant son centre sur la droite ab; k étant l'extrémité du diamètre ak, ok sera ce diamètre conjugué à celui Ok.

On connaît de la conique le centre, quatre couples de diamètres conjugués et les trois points a, b, c. On aurait donc de suite un très-grand nombre d'autres points de cette courbe; pour déterminer les axes, il faut employer une des méthodes ci-dessus, par exemple celle 20 (fig. 114).

Vingt-septième cas. — (Fig. 121.)

Les données sont deux points a et b, le centre O, une tangente C.

1° Du point O comme centre on décrit une circonférence tangente à C.

2° Par les points donnés a et b on mène des parallèles à la tangente C qui est la direction d'homologie. On détermine sur la circonférence les couples de points homologues a', a'_1; b', b'_1; de sorte que la droite ab peut avoir pour homologues les couples de droites $a'b'$, $a'_1 b'_1$, et $a' b'$, $a'_1 b'$; il y aura donc deux solutions. Prenons $a'\,b'$ pour homologues de ab.

3° Les droites homologues ab, $a'\,b'$ se coupent en un point f appartenant à l'axe d'homologie TT_1. Cette droite passe en outre par le centre O; donc elle est déterminée.

4° Le point m' étant le point de la tangence de C et de la circonférence, si on joint les points m' et b', cette droite $m'\,b'$ renontrera au point g l'axe TT_1; alors gb sera l'homologue de qm' : donc si m' est le point de tengence sur le cercle, le point m où cette droite gb rencontrera C sera son point de tangence avec la conique.

5° Sur le milieu de la distance mm' de deux points homologues, on élève une perpendiculaire qui rencontre l'axe TT_1 au point n, alors ii_1, menée par le centre o parallèlement à la droite nm sera la seconde corde, et les points i, i_1 seront donc deux points de la courbe.

Les axes se détermineront ensuite comme ci-dessus.

Vingt-huitième cas. — (Fig. 122.)

Les données sont un point a, deux tangentes B, C et le centre O.

1° Du point O comme centre avec O*a* pour rayon on décrit une circonférence.

Le diamètre *Oa* sera l'axe d'homologie TT.

2° Les deux tangentes données B et C′ rencontrent cet axe aux points *f* et *g*; si de ces deux points on mène les tangentes *fb′*, *gi′* à la circonférence, elles se rencontrent au point *m′* qui sera l'homologue du point *m* intersection de deux tangentes données, de sorte que *mm′* sera la direction d'homologie.

3° Si *b′* et *c′* sont les points de tangence à la circonférence en menant *b′b* et *c′c′* parallèle à la direction *mm′* d'homologie, on aura les points *b* et *c* de tangence à la conique des tangentes B et C donnés.

Le reste de la construction comme ci-dessus.

Comme des points *f* et *g* on peut mener quatre tangentes, on aura quatre directions différentes d'homologie, dont deux appartiendront à une conique et deux à une autre.

Vingt-neuvième cas. — (Fig. 123.)

Les données sont trois tangentes A B C et le centre O.

Puisqu'on connaît le centre O de la courbe, deux tangentes telles que A et C détermineront le parallélogramme $x\,q\,n'\,q'$ circonscrit.

Ces quatre tangentes et la cinquième donnée B formeront un pentagone circonscrit avec lequel on déterminera les points de tangence des cinq côtés.

Le reste de la construction comme ci-dessus.

Trentième cas. — (Fig. 124.)

Les données sont un point a, une tangente B, son point de tangence b et centre O.

1° On trace une circonférence tangente à B, soit b' son point de tangence.

2° B étant la direction d'homologie, b' est l'homologue de b. Si du point donné a on mène aa' parallèle à B, on déterminera sur la circonférence un couple de points a', a'_1 pour l'homologure de celui a. Prenons a' pour homologue de a, alors ab, $a'b'$ seront homologues et se rencontreront en f sur l'axe d'homologie TT_1, de sorte que ofT sera cet axe.

3° Sur le milieu du segment bb' qui joint deux points homologues b et b', élevant une perpendicuaire, elle rencontrera l'axe TT_1 en un point *h*, et alors *gh* parallèle à *nb* sera la seconde corde commune.

Le reste de la construction comme dans les exemples ci-dessus.

Le second point *a'*, homologue de *a*, donnerait une seconde direction d'homologie, c'est-à-dire des tangentes communes aux deux courbes.

Trente-unième cas. — (Fig. 125.)

Les données sont le centre O, une tangente A, une seconde tangente B et son point de tangence *b*.

1° Du point O, comme centre, on décrit une circonférence tangente à B. Soit *b'* le point de tangence.

2° Puisqu'on connaît le centre O de la courbe, les deux tangentes données A et B déterminent le parallélogramme *fghi* circonscrit; les diagonales *fh* et *gi* sont deux diamètres conjugués de la courbe.

3° Un des points de tangence *b* étant connu, il servira à déterminer le parallélogramme *abcd* inscrit dont les côtés sont parallèles aux diamètres conjugués *fh*, *gi* dont les sommets *a*, *b*, *c*, *d* sont les points de tangence de la courbe aux côtés du parallélogramme circonscrit.

4° Les droites homologues *ab*, *a'b'*; *cd*, *c'd'* se coupent aux points *k* et *l* qui appartiennent à l'axe d'homologie TT_1 qui en outre passe par le centre O.

5° Une perpendiculaire, élevée sur le milieu de *bb'*, qui est la distance entre deux points homologues *b* et *b'*, détermine le point *n* par son intersection avec l'axe TT_1; alors *nb* est la direction de la seconde corde commune ce_1.

6° La détermination des axes se fait comme ci-dessus.

Trente-deuxième cas. — (Fig. 126.)

Les données sont le centre O, un foyer F et un point *a* dé la courbe ou une tangente A.

1° Connaissant le centre et un foyer, on a immédiatement le second foyer et la direction du grand axe.

2° Le grand axe sera la somme des deux rayons directeurs menés des deux foyers au point *a* donné.

3° Du point F comme centre avec le demi-grand axe pour rayon, on décrit une circonférence qui détermine les extrémités du petit axe.

Si, au lieu de donner *a*, on avait A, on déterminerait le point *a* en abaissant du foyer F la perpendiculaire *Fj*, puis, prenant sur son prolongement $fg = Vj$, on joint alors le point *f*, ainsi déterminé, avec le second foyer F; cette droite coupe la tangente au point *a*.

On déterminerait ensuite les axes comme ci-dessus. On peut encore déterminer le petit axe, en abaissant du point *a* la perpendiculaire *ag* que l'on prolonge jusqu'en *h* à la rencontre de la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre; on joint le point *h* au centre O de la courbe; cette droite O*h* coupe une parallèle *ai* au grand axe; on joint *i*, alors O*i* est la grandeur du petit axe.

On pourrait augmenter encore le nombre de ces problèmes en introduisant dans les données d'autres éléments, tels que les sommets de la courbe, des normales, des rayons de courbure en un point, etc.

Des Coniques tangentes à des coniques ou à des courbes d'ordre supérieur (1).

Cinq conditions sont nécessaires pour déterminer une conique; on sait tracer cette courbe, lorsque ces cinq conditions sont de passer par des points, et d'être tangentes à des droites. Il en résulte par suite le nombre de solutions dans chaque problème qu'on peut ainsi se proposer.

Nous nous proposons maintenant d'introduire, dans ces cinq conditions, d'être tangentes à des coniques et ensuites à des courbes de degrés plus élevés.

Commençons par les cas les plus simples, pour arriver aux plus composés.

1° Déterminer la conique qui passe par quatre points et doit être tangente à une autre conique U?

Lorsque deux coniques sont tangentes entr'elles, il

(1) Ce problème a été résolu par M. Chasles non-seulement pour des coniques tangentes, ou satisfaisant à d'autres conditions, mais encore pour des sytèmes de surfaces du second degré (*Comptes rendus* 1864).

Nous présentons ce sujet sous un point de vue légèrement différent et nous y ajoutons la construction des coniques tangentes à d'autres coniques.

est évident que le point de tangence à même polaire dans les deux courbes.

Pour deux coniques qui ne sont pas tangentes il y a, dans leur plan, trois points qui ont même polaire dans les deux courbes; en eflet : les deux coniques se coupent généralement en quatre points *a*, *b*, *c*, *d*, formant un quadrilatère inscrit à la fois dans les deux courbes, les points de concours des côtés opposés de ce quadrilatère *a b c d* et celui d'intersection des deux diagonales, sont les sommets d'un triangle polaire commun aux deux coniques, c'est-à-dire que chacun de ses sommets a pour polaire le côté opposé, par conséquent même polaire dans les deux coniques.

Toutes les coniques qui passent par quatre points forment ce qu'on appelle un faisceau de coniques parmi lesquelles se trouvent celles tangentes à la conique U.

Pour chacune de ces coniques du faisceau, il y a donc trois points qui ont même polaire dans cette conique et la conique U. Le lieu de tous ces points sera une courbe du 3e degré qui sera ainsi la courbe lieu des points qui ont même polaire dans la conique U et dans une des coniques du faisceau.

Cette courbe étant telle, qu'à chaque conique du faisceau, déterminée par un cinquième point, correspond trois points, doit être du 3e degré. Elle rencontre la conique en six points, chacun d'eux, avec les quatre points *a, b, c, d,* détermine une conique du faisceau tangente à la conique U en ce point.

Le degré de cette courbe résulte encore mieux du théoreme suivant donné par M. Chasles et qui s'applique non seulement à des coniques, mais à un système de courbes d'ordre quelconque. (Voir comptes rendus 1 février 1864.)

» *Lorsqu'on a un système de courbes de degré quelconque, déterminées toutes par* $\frac{r(r+3)}{2} - 1$ *conditions communes et dont* μ *de ces courbes passent par un autre point donné et* ν, *sont tangentes a une droite donné ; le lieu d'un point dont l'axe harmonique relatif à une courbe de degré* m, *coïncide avec l'axe harmonique de ce point, relatif à une courbe quelconque du système, est une courbe du degré* $\mu\,(m-1) + \nu$. »

D'où en conclut que :

« *Le nombre des courbes du système, qui touchent uue courbe d'ordre* m *est* $m\,(\mu\,(m-1) + \nu)$. »

Si dans cette formule générale on fait

$m = 2$, $\mu = 1$, $\nu = 2$, le résultat est égal à $1 . 2 . 3 = 6$. Ainsi on peut en conclure que :

Par quatre points donnés passe six coniques tangentes à une conique donnée U.

La courbe du 3e degré, qui par ses intersections avec la conique U donne les six points de tangence est facile à construire; il suffit de tracer trois coniques du faisceau, coupant la conique U en quatre points, le triangle polaire déterminé par chacune de ces coniques donne trois points de la courbe; les trois coniques en donneront ainsi 9, nombre suffisant pour déterminer cette courbe de 3e degré.

On peut prendre, pour ces trois coniques du système, les trois couples de droites passant par les quatre points communs à toutes les coniques du faisceau. On voit en conséquence que cette courbe doit passer par les sommets du triangle polaire, déterminé par les quatre points a, b, c, d, communs à toutes les coniques du faisceau.

Le 1er problème est donc entièrement résolu.

Si la conique U se réduisait à deux droites représentant toujours une conique, on trouverait que par quatre points, on peut mener six coniques tangentes à deux droites, tandis que ce nombre n'est que de quatre. Pour expliquer cette anomalie, il suffit de chercher directement le lieu des points qui ont même polaire dans les deux droites formant la conique U et a une courbe quelconque du faisceau, on trouve que cette courbe passe nécessairement par le point d'intersection des deux droites, qui doit alors conter comme un point double d'intersection, c'est-à-dire doit conter pour deux; alors l'anomalie disparait, on retrouve bien les six coniques ci-dessus, dont quatre sont de véritables tangentes aux deux droites et dont deux autres sont des coniques passant par deux points infiniment voisins sur la courbe.

Ainsi on peut en conclure, que le nombre des coniques tangentes a une conique et même a une courbe d'ordre supérieur est la même lorsque cette courbe est composée de droites, pourvu que dans ce nombre on compte pour deux, tous les points doubles formés par les intersections deux à deux de ces droites.

Réciproquement le nombre des coniques tangentes a une courbe de degré quelconque, pourra se déduire de celui ou elle serait composéede droites, ou même de courbes de degré inférieur, pourvu que dans ce nombre on compte pour deux, les coniques du système qui passent par chaqne point d'intersectipn des droites ou courbes prises deux à deux, coniques qui, pour ce cas particulier, ne sont pas de véritables coniques tangentes.

Ainsi nous admettrons en principe que :

Le nombre des coniques d'un système, assujetties à quatre conditions et à êtres tangentes à une courbe de degré quelconque, est égal à deux fois le nombre de ces coniques du système qui peuvent passer par un point, multiplié par le nombre des points double de la *courbe considérée comme composée de droites*, plus au nombre *des coniques du systèmes qui peuvent être tangentes à une droite, multiplié par le nombre de droites dont on peut supposer que* serait composée une courbe du même degré.

Nous pouvons vérifier l'exactitude de ce principe par la formule générale de M. Chasles donnée ci-dessus.

Proposons-nous par exemple, de déterminer le nombre de coniques assujetties à quatre conditions quelconques et à être tangentes à une courbe de degré m.

Soient μ est le nombre des coniques de ce système qui passent par un point et ν celui des coniques tangentes à une droite.

La courbe de degré m peut être composée de m droites donnant lieu à $\frac{m(m-1)}{2}$ points doubles résultant de l'intersection de ces m droites prises deux à deux; donc d'après le principe, le nombre des coniques tangentes a une courbe de degré m est

$$2 . \frac{m(m-1)}{2} \mu + m . \nu = m((m-1)\mu + \nu)$$

qui est la formule donnée par M. Charles.

On peut encore vérifier le principe en l'appliquant au cas ou la courbe de degré m serait considérée comme composée de deux courbes, l'une du degré n, l'autre du degré

p, tels que $n+p=m$, En effet : le nombre des points doubles est $n.p$. Le nombre des coniques du système, tangentes à la courbe de degré n est $((n-1)\,\mu+\gamma)$, celui des tangentes à la courbe de degré p est $p\,((p-1)\mu+\gamma)$ donc le nombre des coniques tangentes à la courbe $m=n+p$ est

$$2.n.p.\mu+n((n-1)\mu+\gamma)+p((p-1)\mu+\gamma)$$

$=(n+p)((n+p-1)\mu+\gamma)=m((m-1)\mu+\gamma)$. même formule

La considération du principe ci-dessus conduit toujours au même résultat que le théorème de M. Chasles, mais il me semble rendre compte clairement de l'importance des nombres désignés par μ et γ sur lesquels reposent toute cette théorie.

Revenons maintenant à la détermination des coniques tangentes à d'autres coniques.

2e. *Problème.*— Déterminer les coniques qui passent par trois points, sont tangentes à une droite et tangentes à une autre conique ?

Le nombre des coniques qui passent par trois points, sont tangentes à une droite et passent par un quatrième point, c'est-à-dire passant par 4 points et tangentes à une droite est 2.

Le nombre des coniques passant par trois points et tangentes à deux droites est 4.

Donc le nombre des coniques du système, tangentes à une autre conique sera $2.2.+2.4=12$.

Pour construire ces 12 coniques, Il faut déterminer, sur la conique U, les 12 points de tangence ; ils seront le résultat de l'intersection de cette conique U et d'une courbe du sixième degré qui est le lieux des points qui ont même polaire dans la conique U et dans une du système. Pour construire cette courbe du sixième degré, il faut tracer un certain nombre de coniques du système chacune coupera la conique U en quatre points, donnant lieu à un triangle polaire commun, dont les sommets appartiendront à la courbe cherchée ; cette courbe étant du sixième degré, il faut $3.9=27$ points pour la déterminer, ainsi 9 coniques du système sont nécessaires.

3e. *Problème.* — Déterminer les coniques qui passent par deux points, sont tangentes à deux droites et à une conique ?

Le nombre des coniques passant par deux points, tangentes à deux droites et passant par un autre point est égal à 4.

Le nombre des coniques passant par deux points, tangentes à trois droites, est aussi égal à 4. Donc le nombre des coniques du système tangente à la conique U sera.

$$2.4+2.4=16.$$

Pour construire ces coniques, il faut de même déterminer la courbe du 8me degré lieu des points qui ont même polaire, laquelle par son intersection avec la conique U donne les 16 points de tangence. Cette construction se fera par les mêmes procédés que ci-dessus.

On trouvera pareillement que le nombre de coniques passant par un point, tangentes à trois droites et à une conique est de 12. Enfin que le nombre des coniques tangentes à 4 droites et une conique, est de six.

Par les mêmes procédés que ci-dessus on construira ces coniques.

On observera que le nombre de ces coniques de deux systèmes différents est le même, lorsque le nombre des points dans l'un est égal au nombre des tangentes dans l'autre et réciproquement; cela résulte évidemment de ce que le nombre des coniques satisfaisant à cinq conditions ne change pas par une transformation polaire, dans laquelle à un point correspond une droite et à une droite un point.

4e *Problème.* — Déterminer les coniques passant par trois points et tangentes à deux coniques ?

On considère une des coniques comme composée de deux droites.

Le nombre des coniques passant par quatre point, et tangentes à une conique est de 6.

Le nombre de ces coniques passant par trois pointes tangentes à une conique et à une droite est de 12.

Donc le nombre des coniques du système tangentes à deux coniques est de $2.6+2.12=36$. Ainsi il y a 36 coniques satisfaisant à la question.

Pour déterminer ces 36 coniques il faut tracer la courbe du 18e degré, lieu des points qui ont même polaire dans la seconde conique et dans une du système, pour cela on détermine une des coniques passant par les trois points et tangente à la première conique, elle coupera la 2e conique en quatre points donnant lieu à un triangle polaire dont les trois sommets appartiendront à la courbe. Cette courbe étant du 18e degré est déterminée par $\frac{18.21}{2} = 189 = 3.63$, il faudra donc 63 de ces coniques pour déterminer ces 189 points.

5e *Problème.* — Déterminer les coniques passant par deux points, tangentes à une droite et à deux coniques ?

On trouvera que ce nombre est: $2.12+2.16=56$, et on les construira par le même procédé.

En continuant ainsi, on résoudra tous les cas qui peuvent se présenter de coniques tangentes à 2, 3, 4, 5 coniques.

Nous pouvons maintenant généraliser en passant à la détermination des coniques d'un système quelconque, qui doivent être tangentes à des courbes de degré, m, n, p, q, r.

1er *Problème.* — Déterminer les coniques qui passent pour quatre points et sont tangentes à une courbe du degré m?

Nous considérerons la courbe de degré m comme composée de m droites, donnant lieu à $m\left(\frac{m-1}{2}\right)$, points doubles ; d'où résultera, par le même principe, que le nombre des coniques qui passent par quatre points et tangentes a une courbe de degré m est

$$m(m-1)+2.m=m(m+1).$$

La courbe, lieu des points qui ont même axe harmonique dans la courbe de degré m, est dans une des coniques sera du degré $m+1$. Pour la déterminer par les mêmes procédés que ci-dessus, il faudrait tracer d'abord une conique quelconque du système, elle couperait la courbe de degré m en $2m$ points ; il faudrait ensuite déterminer les points qui ont même axe harmonique dans la courbe de degré m et dans cette conique, mais il faudrait que, par une même construction, on puisse obtenir un nombre considérable de points, ce qui exigerait l'emploi de courbes de degrés supérieurs.

Si ce problème était résolu, il suffirait de tracer un certain nombre de coniques du système, chacune fournirait un même nombre de points de la courbe cherchée, qui serait le lieu de tous les points ainsi déterminés : ensuite, l'intersection de cette courbe avec celle du degré m, donneraient les $m(m+1)$ points de tangence, donc chacun déterminerait une des coniques demandées.

2e *Problème.* — Déterminer le nombre des coniques passant par trois points, tangentes à une droite et à une courbe de degré m ?

Le nombre des coniques du système qui peuvent passer par un autre point donné est 2.

Le nombre des coniques du même système, tangentes à une autre droite est 4.

Donc, le nombre cherché sera

$$2.m(m-1)+4m=2m(m+1).$$

3e *Problème.* — Passer par deux points, tangentes à deux droites et à une courbe de degré m ?

Le résultat sera

$$4.m(m-1)+4m=4m^2.$$

et ainsi de suite, pour les cas où il n'y a qu'une courbe.

4e *Problème.* — Passer par trois points, tangentes à deux courbes, l'une du degré m, et l'autre du degré n ?

Considérons la courbe de degré n comme composée de n droites, donnant lieu à $n\left(\frac{n-1}{2}\right)$ points doubles.

Le nombre des coniques passant par quatre points et tangentes à une courbe de degré m est $m(m+1)$.

Le nombre des coniques du même système, c'est-à-dire passant par trois points, tangentes à une courbe de degré m et à une droite est $2m(m+1)$ donc le nombre de coniques du système, tangentes à ces deux courbes, sera

$$m(m+1)n.(n-1)+m(m+1)n=m.n(m+1)(n+1)$$
$$=m.n(m.n+m+n+1).$$

Si $m=n$, ce nombre se réduit à

$$m^2(m+1)^2=m^2(m^2+2m+1)$$

On trouverait pareillement que le nombre des coniques passant par deux points, taugeutes à une droite et à une courbe de degré m et à une du degré n est

$$2m(m.n+m+n-1).$$

De même celui des coniques passant par un point, tangentes à deux droites et a des courbes de degré m et n est :

$$2m.n(2m.n.-1).$$

Pour celles tangentes à trois droites et à ces deux courbes

$$m.n(4.m.n-2(m+n)+1)$$

Le même procédé va nous donner le nombre de coniques passant par deux points et tangentes à trois courbes de degrés m, n, p.

Le nombre des coniques du système passant par deux points, tangentes aux deux courbes m et n et un autre point, est

$$m.n\,(m.n+(m+n)+1)$$

Le nombre des coniques du même système, tangentes à une droite est

$$2\,m.n(m.n+m+n+1)$$

donc celui cherché sera

$$2.m.n(m.n+m+n+1)p.\left(\frac{p.-1}{2}\right)+2m.n.p.(m.n+m+n-1)$$

$$=m.n.p.(m.n.p+m.n+m.p+n.p+m+n+p-3)$$

$$=m.n.p\,(m.n.p+\Sigma_2+\Sigma_1-3).$$

En continuant, on arriverait ainsi aux formules donnant le nombre des coniques tangentes à 4 et à 5 courbes.

Le tableau suivant est un résumé de tous ces résultats.

Nombre des coniques passant par des points, tangentes à des droites et à des courbes de degré m. n. p. q. r.

POITNS.	DROITES	COURBES	NOMBRES.	M. 2	M 3
4	0	$1\ m$	$m(m+1)$	6	12
3	1	1	$2m(m+1)$	12	24
2	2	1	$4m^2$	16	36
1	3	1	$2m(2m-1)$	12	30
0	4	1	$m(2m-1)$	6	15
3	0	$2\ m$	$m^2(m+1)^2$	36	144
2	1	2	$2m^2(m^2+2m-1)$	56	252
1	2	2	$2m^2(2m^2-1)$	56	306
0	3	2	$m^2(2m-1)^2$	36	225
2	0	$3\ m$	$m^3(m^3+3m^2+3m-3)$	184	1620
1	1	3	$2m^3(m^3+3m^2-3m)$	224	2754
0	2	3	$m^3(4m^3-6m+3)$	184	2484
1	0	$4\ m$	$m^4(m^4+4m^3+6m^2-12m+3)$	816	17010
0	1	4	$m^4(2m^4+8m^3-12m^2+3)$	816	22114
0	0	$5\ m$	$m^5(m^5+5m^4+10m^3+30m^2+15m)$	3264	1253151
3	0	$m.n$	$m.n(m.n+m+n+1)$		
2	1	$m.n$	$2.m.n.(m.n+m+n-1)$		
1	2	$m.n$	$2.m.n.(2.m.n.-1)$		
0	3	$m.n$	$m.n(4m.n-2(m+n)+1)$		
2	0	$m.n.p$	$m.n.p(m.n.p+\Sigma^2+\Sigma^1-3)$		
1	1	$m.n.p$	$2.m.n.p(m.n.p.+\Sigma^2-\Sigma^1)$		
0	2	$m.n.p$	$m.n.p(4.m.n.p-2\Sigma^1+3)$		
1	0	$m.n.p.q$	$m.n.p.q(m.n.p.q+\Sigma^3+\Sigma^2-3\Sigma^1+3)$		
0	1	$m.n.p.q$	$m.n.p.q(2m.n.p.q+2\Sigma^3-2\Sigma^2+3)$		
0	0	$m.n.p.q.r.$	$m.n.p.q.r.(m.n.p.q.r.+5\Sigma^4+\Sigma^3-3\Sigma^2+3\Sigma.)$		

Fig. 1

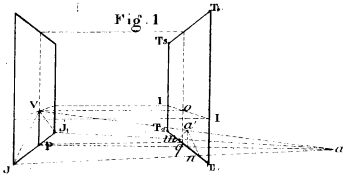


Fig. 2

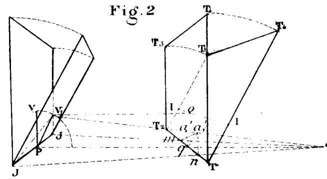


Fig. 3

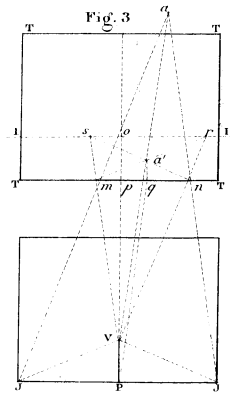


Fig. 4

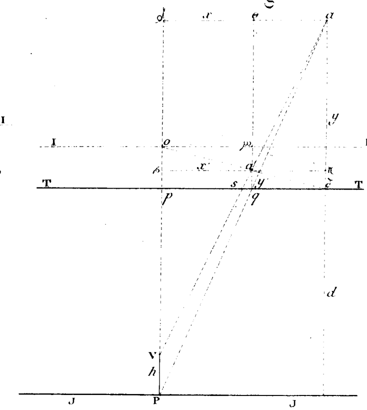


Fig. 5

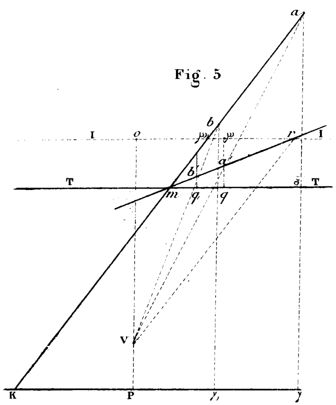


Fig. 6

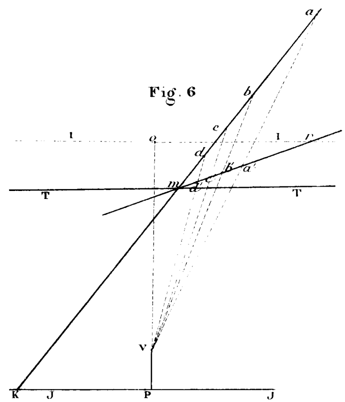


Fig. 7

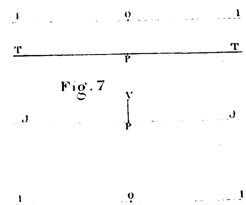


Fig. 8

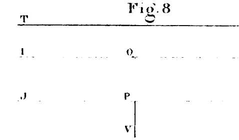


Fig. 9

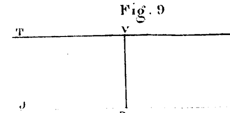


Fig. 10

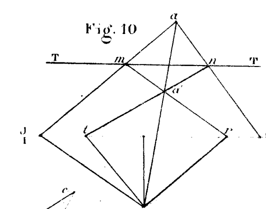


Fig. 11

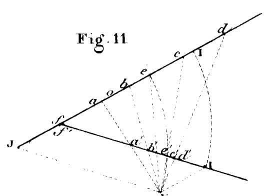


Fig. 12

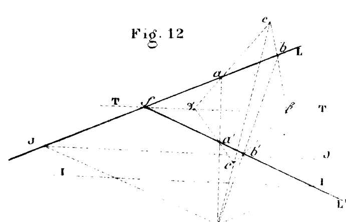
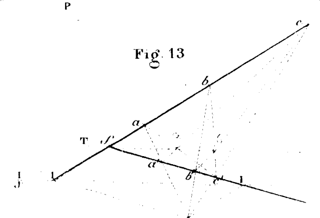


Fig. 13



Paris. Im Janson

Fig. 14

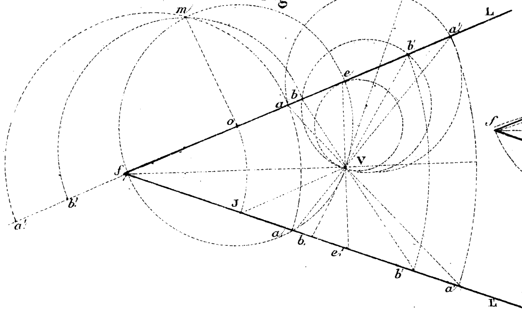


Fig. 15

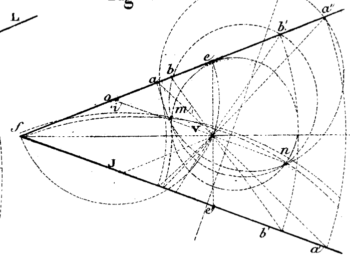


Fig. 16

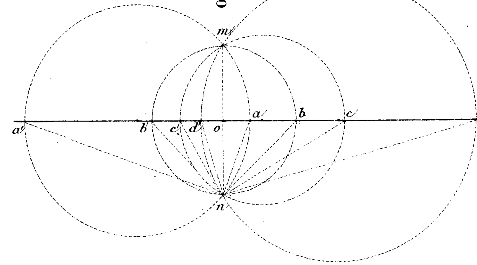


Fig. 17

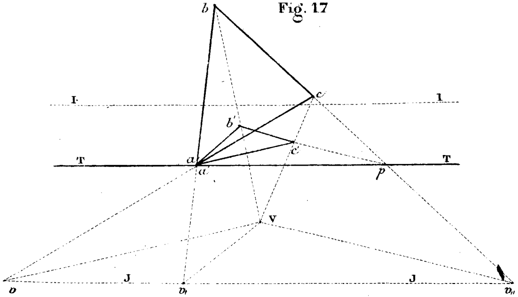


Fig. 18

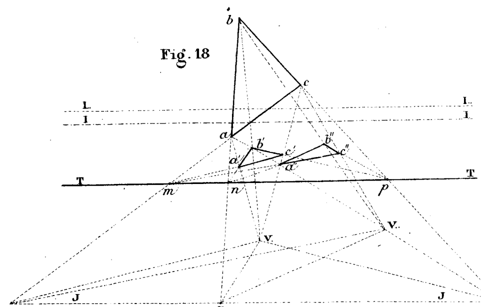


Fig. 21

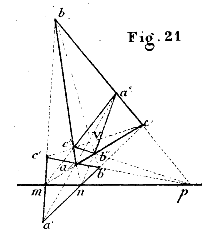


Fig. 20

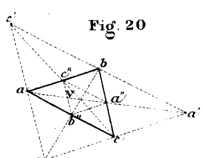


Fig. 22

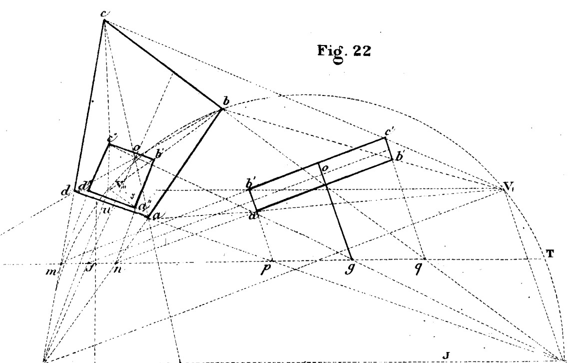
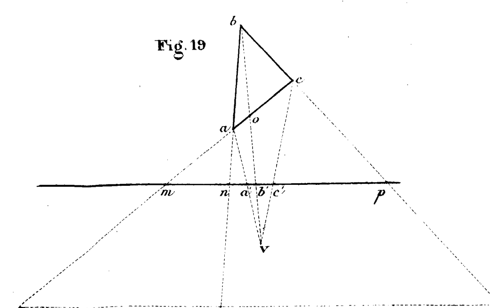


Fig. 19



Paris, Im. Janson

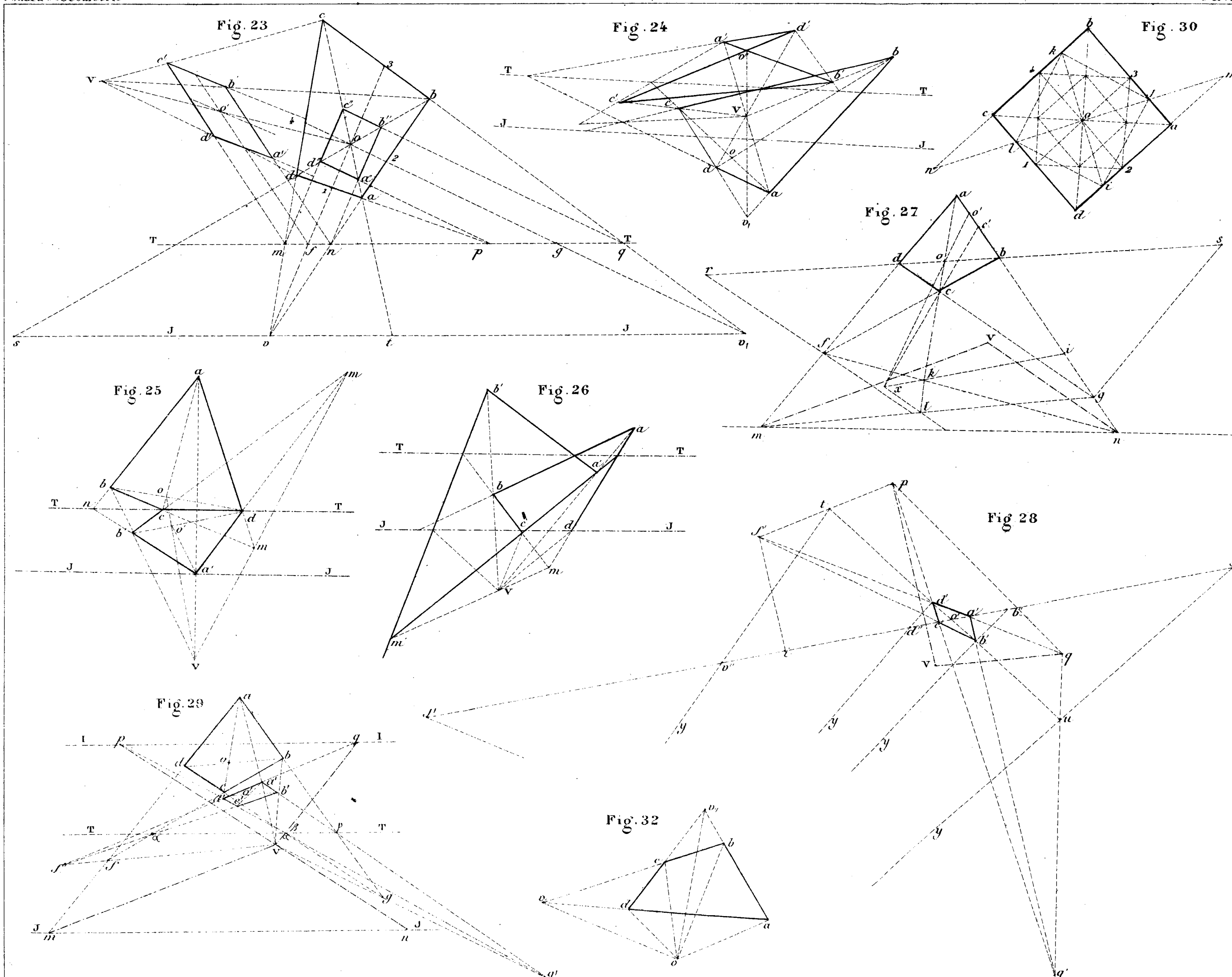


Fig. 23

Fig. 24

Fig. 30

Fig. 27

Fig. 25

Fig. 26

Fig. 28

Fig. 29

Fig. 32

Paris. Im. Janson

Fig. 36

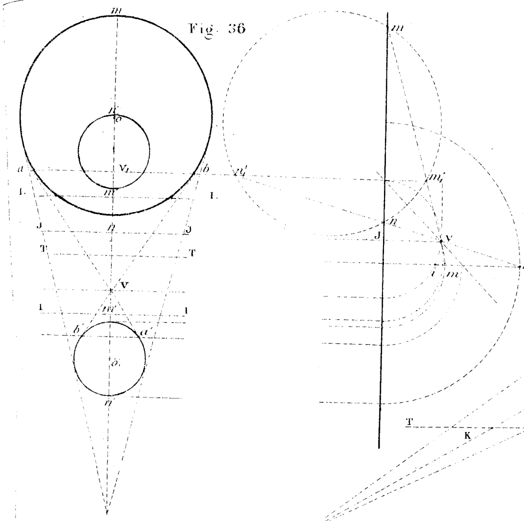


Fig. 31

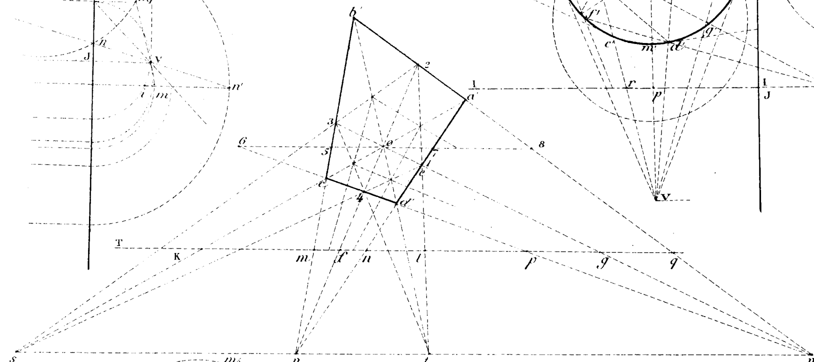


Fig. 33

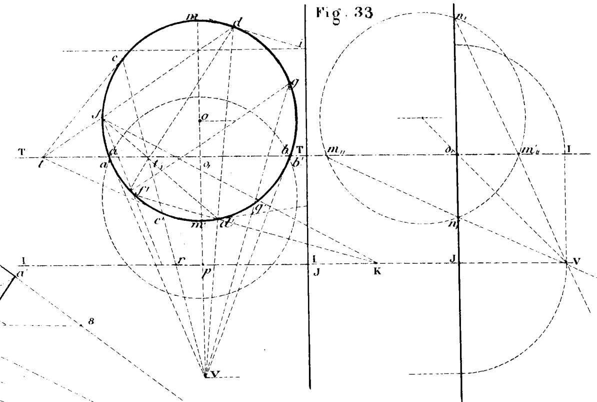


Fig. 35

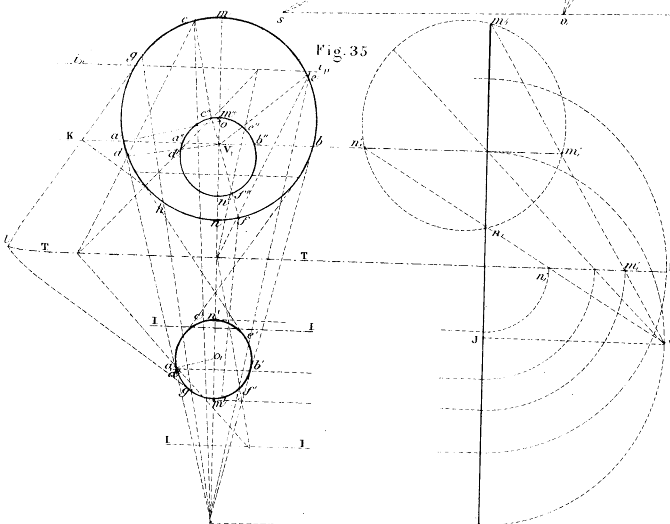
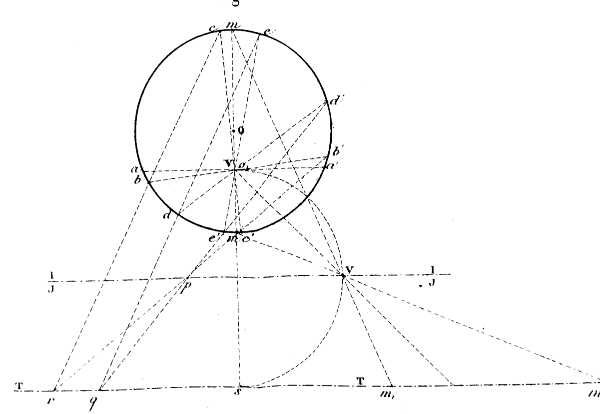
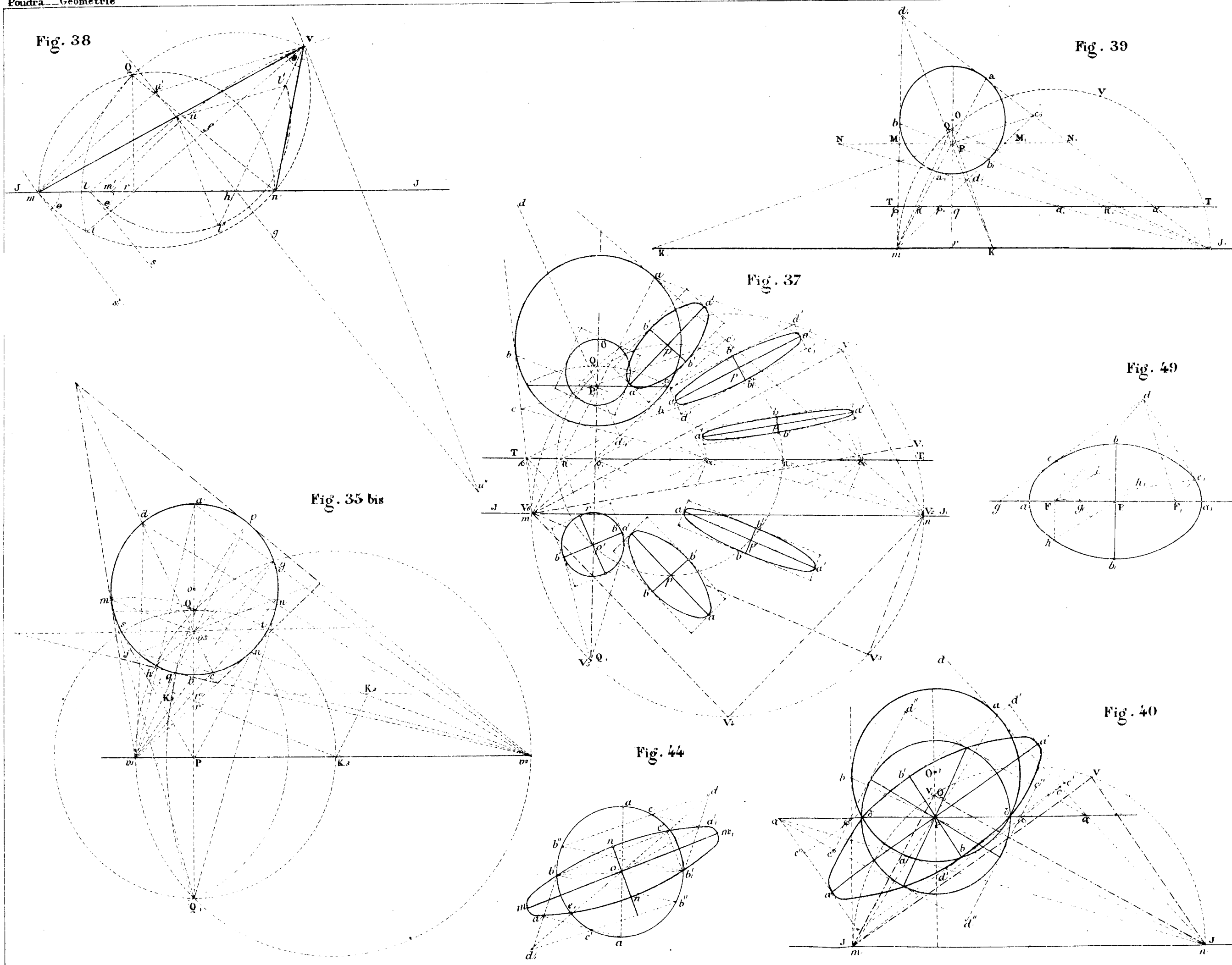


Fig. 43



Paris. Imp. Janson



Paris. Imp. Janson

Fig. 41

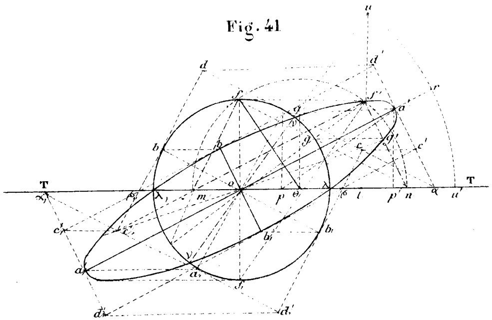


Fig. 42

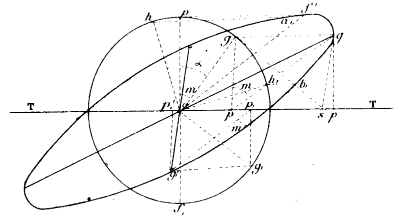


Fig. 45

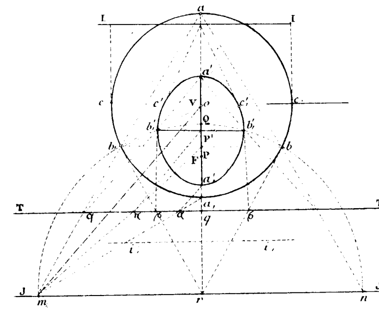


Fig. 43

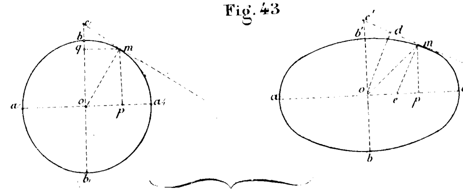


Fig. 46

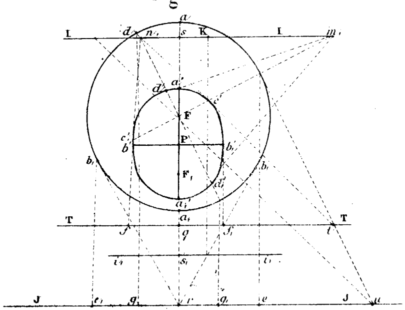


Fig. 48

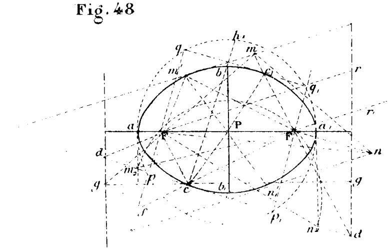


Fig. 47

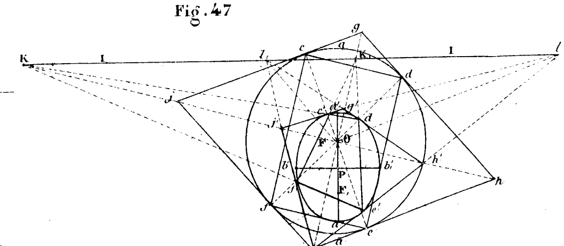


Fig. 50

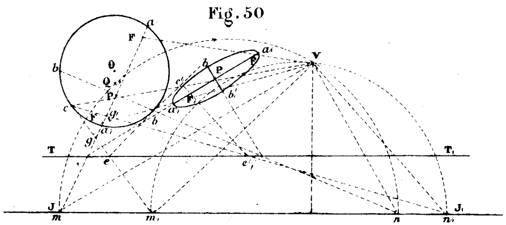
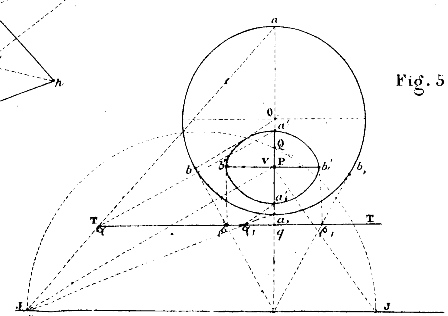
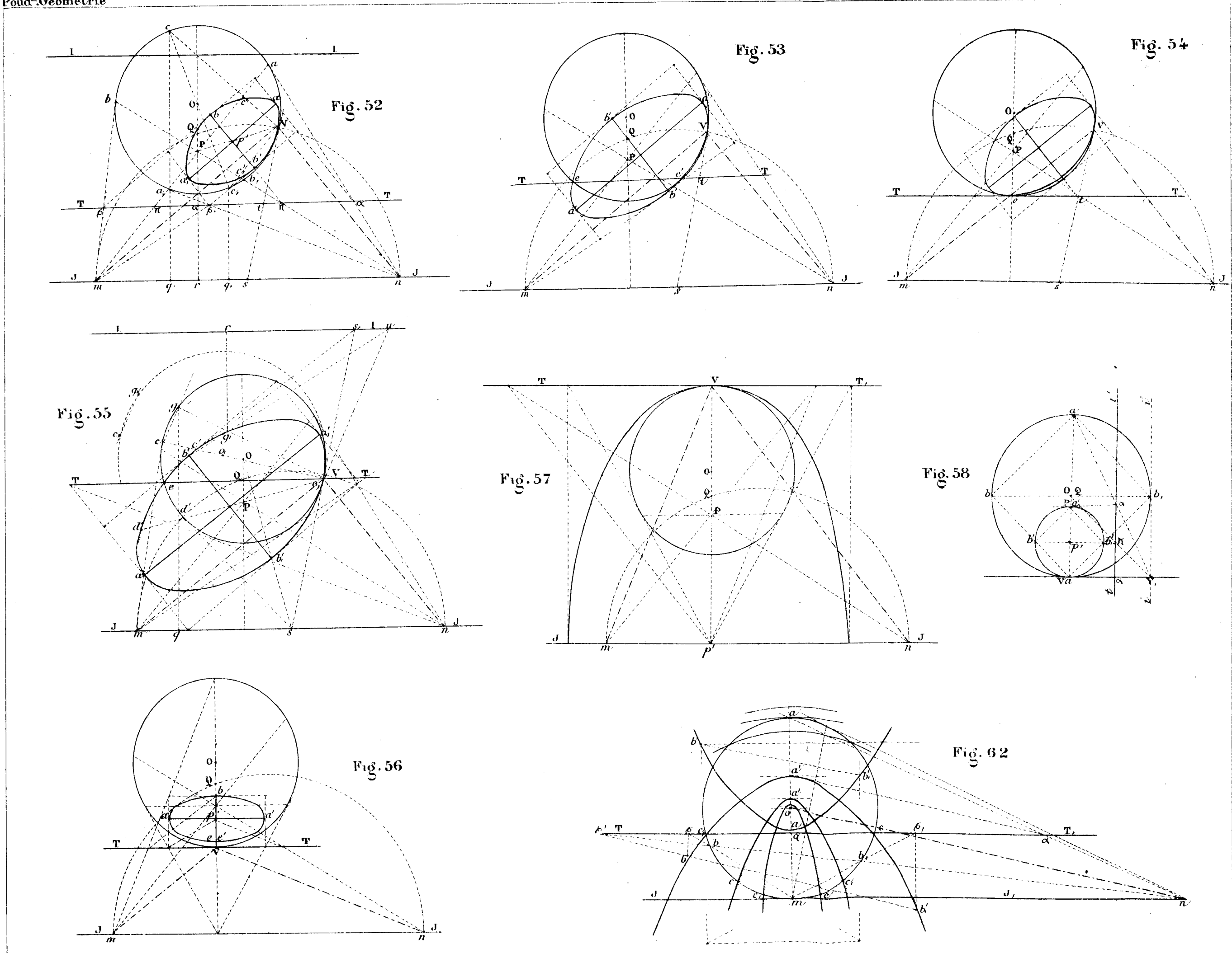


Fig. 51



Paris. Imp. Janson



Paris Imp. Janson

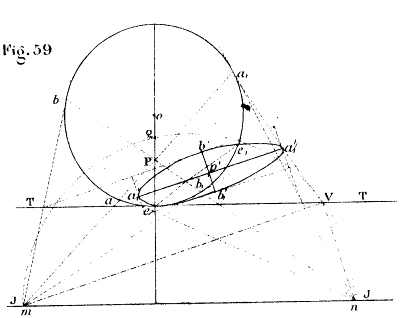


Fig. 59

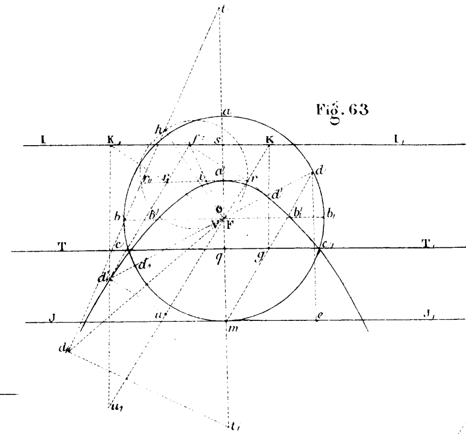


Fig. 63

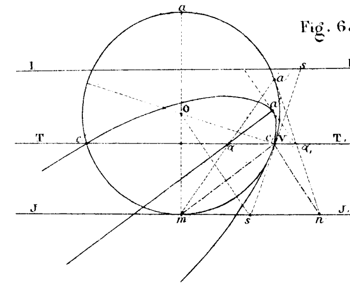


Fig. 65

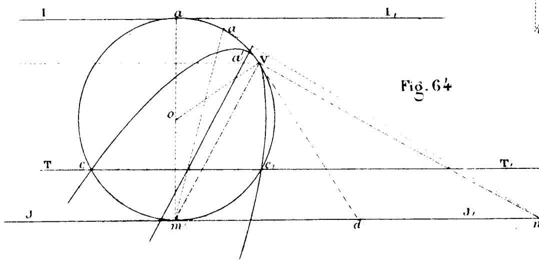


Fig. 64

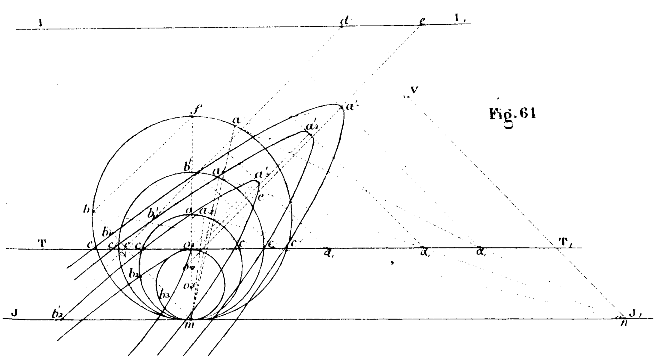


Fig. 61

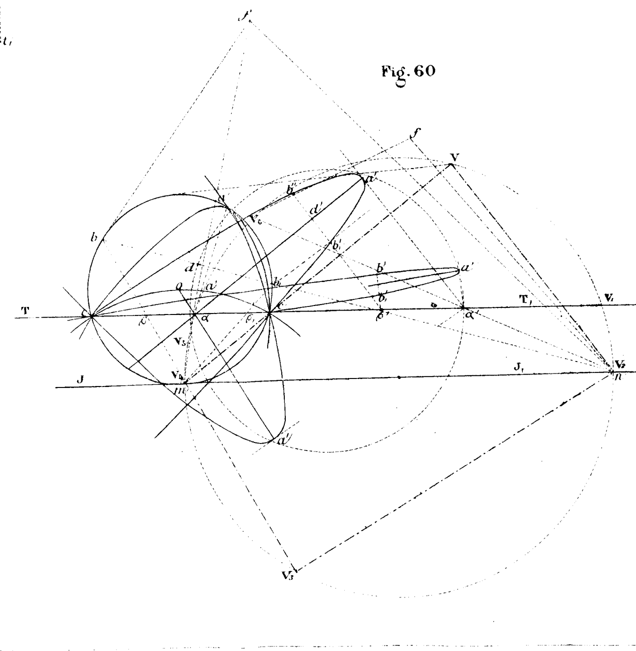


Fig. 60

Paris. Imp. Janson

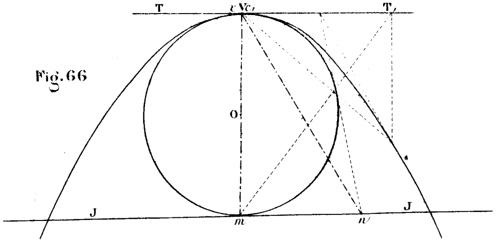


Fig. 66

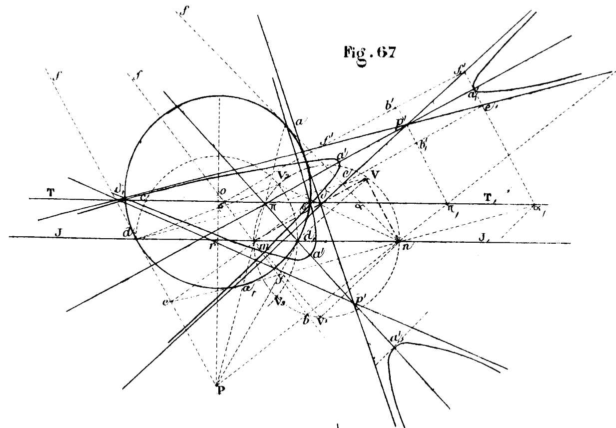


Fig. 67

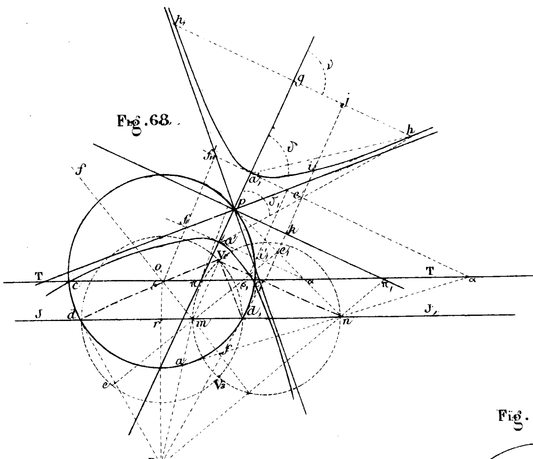


Fig. 68

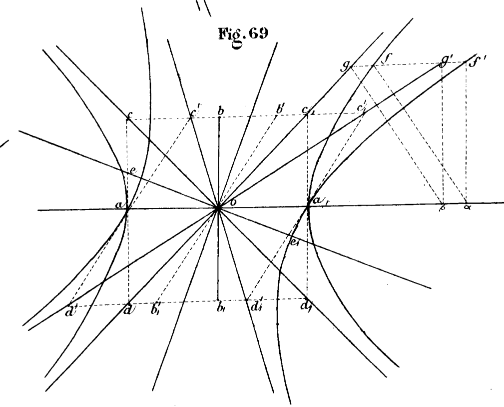


Fig. 69

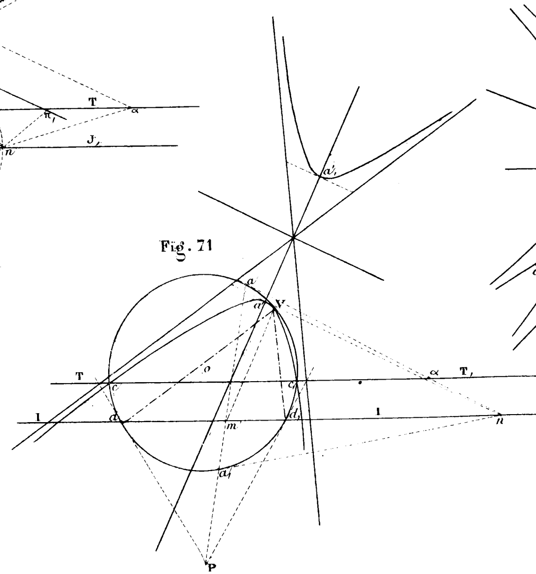


Fig. 71

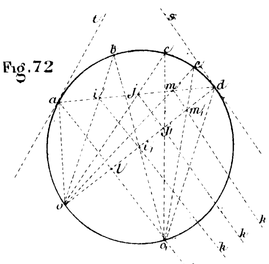


Fig. 72

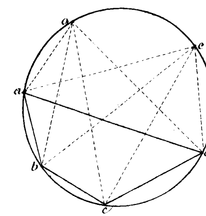


Fig. 78

Paris. Imp. Janson

Fig. 70

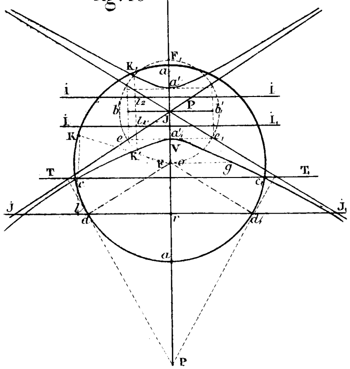


Fig. 73

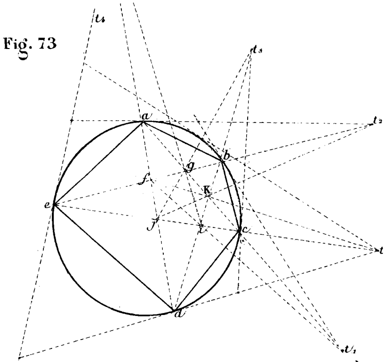


Fig. 80

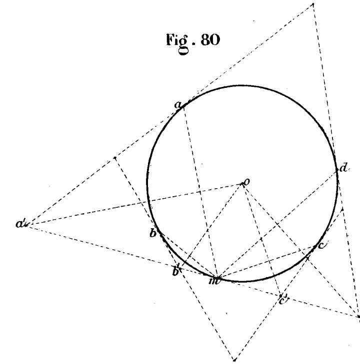


Fig. 74

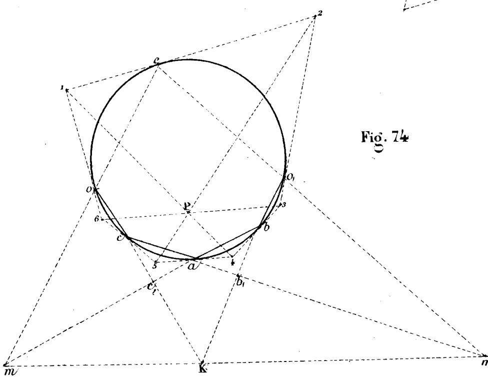


Fig. 75

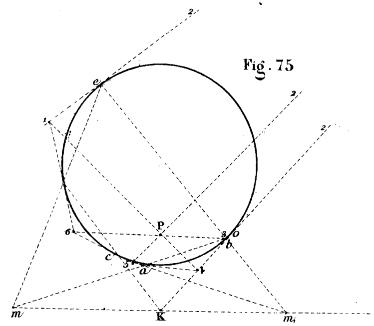


Fig. 79

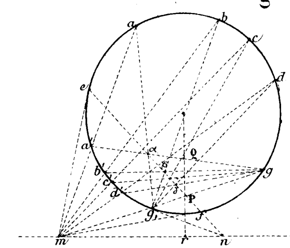


Fig. 76

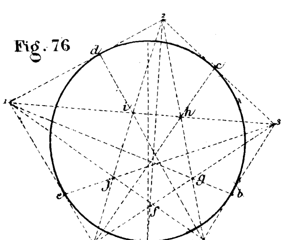


Fig. 77

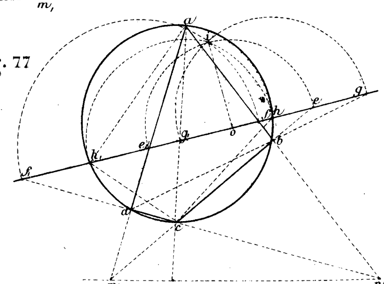
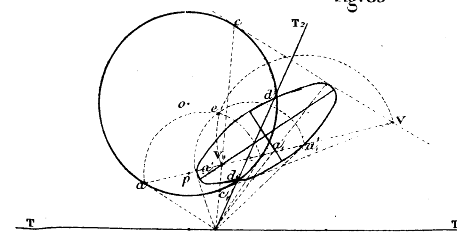


Fig. 85



Paris. Imp. Janson

Fig. 81

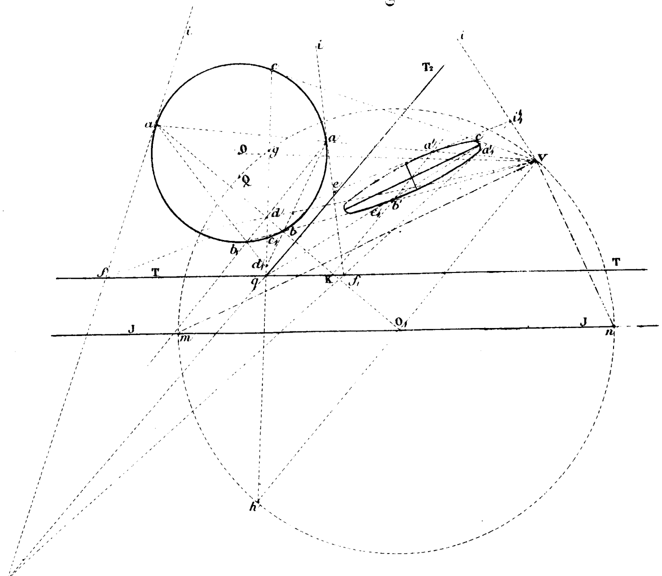


Fig. 83

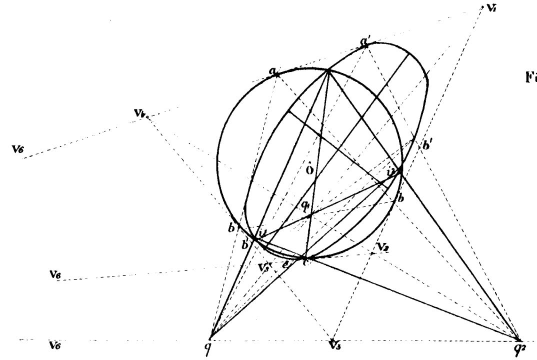


Fig. 84

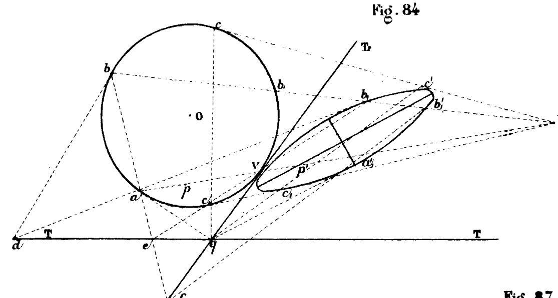


Fig. 82

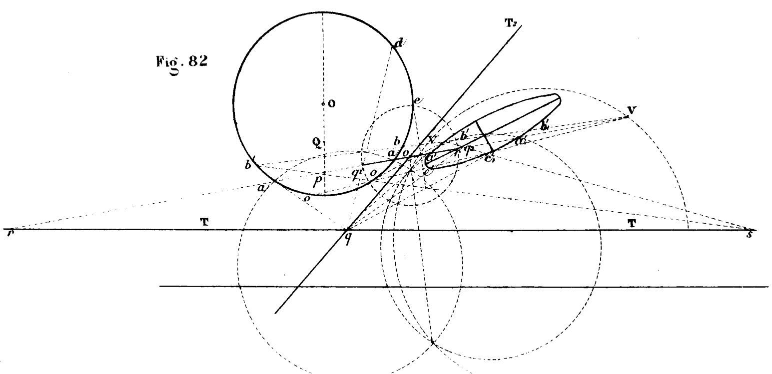


Fig. 86

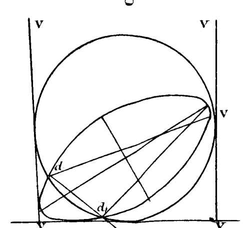
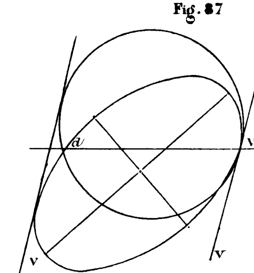


Fig. 87



Paris. Imp. Janson

Fig. 88

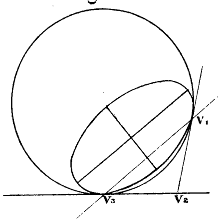


Fig. 89

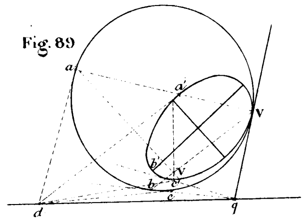


Fig. 92bis

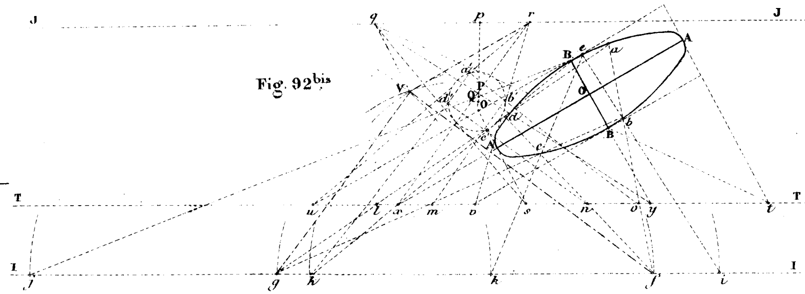


Fig. 90

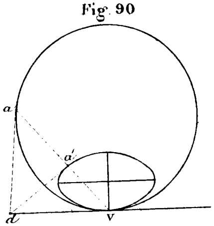


Fig. 91

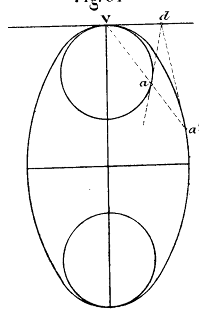


Fig. 93

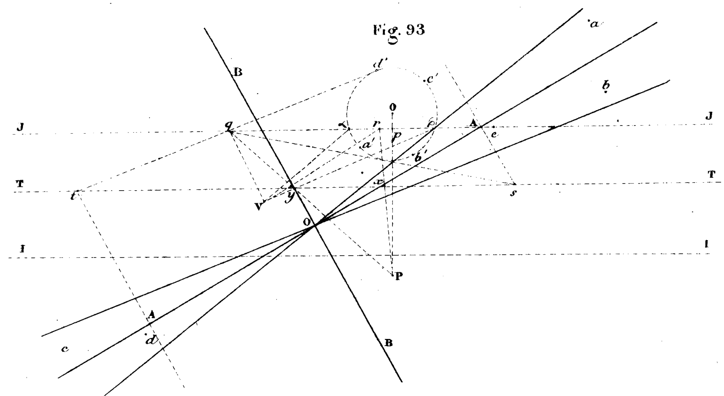


Fig. 92

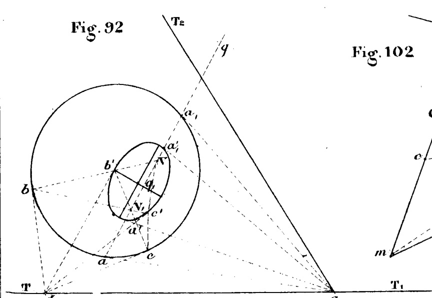


Fig. 102

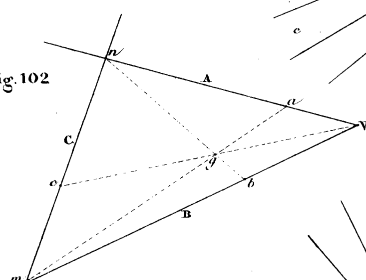


Fig. 94bis

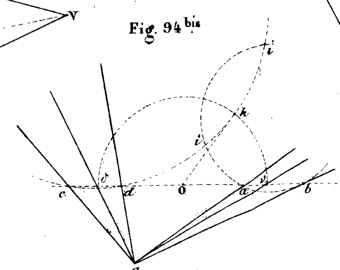
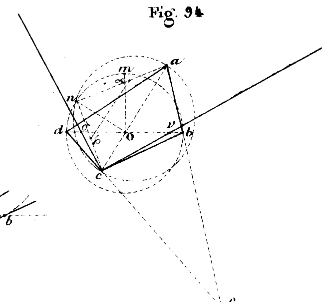


Fig. 94



Paris. Imp. Janson

Fig. 95

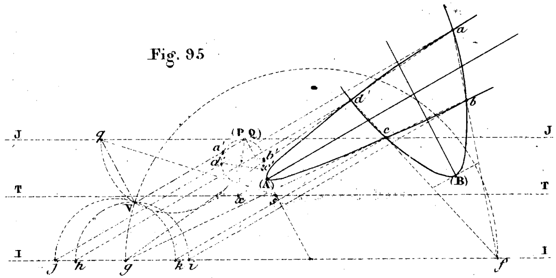


Fig. 98

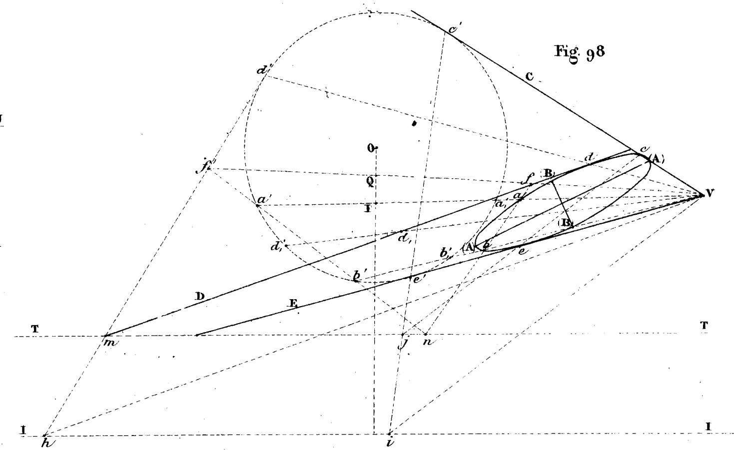


Fig. 97

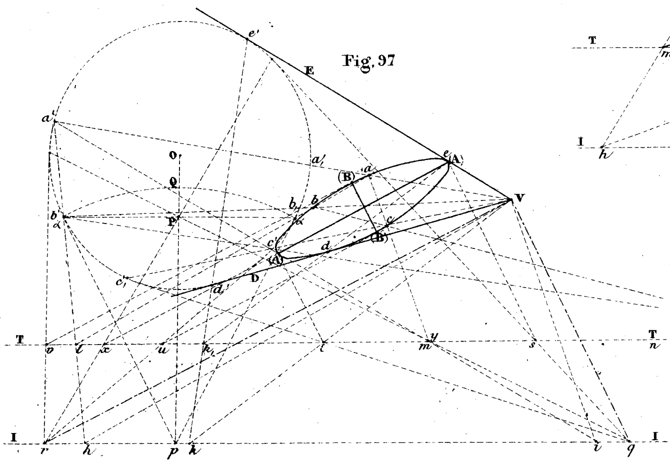


Fig. 101

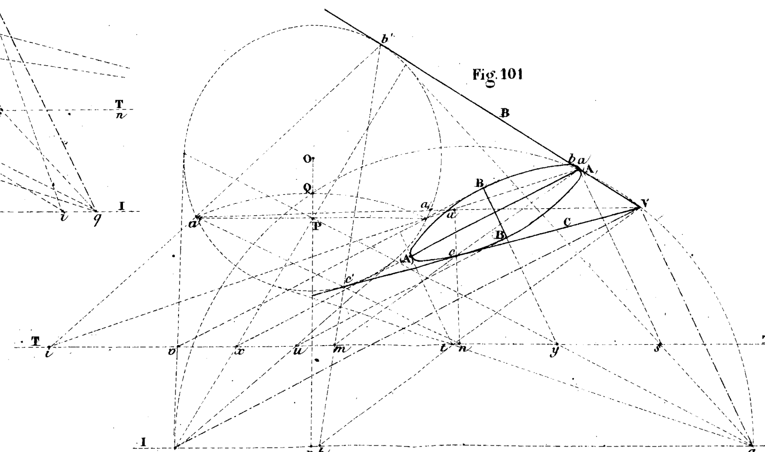
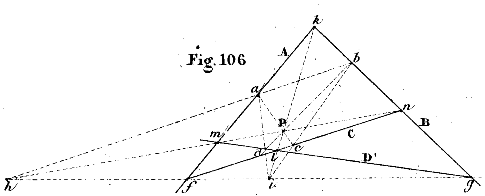


Fig. 106



Paris. Imp. Janson

Fig. 100

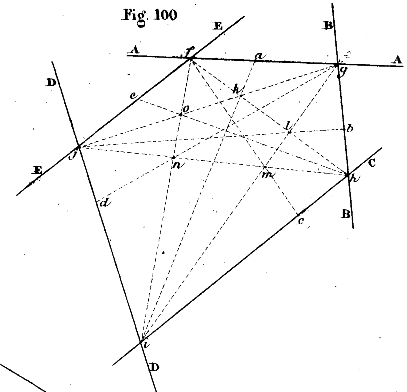


Fig. 96

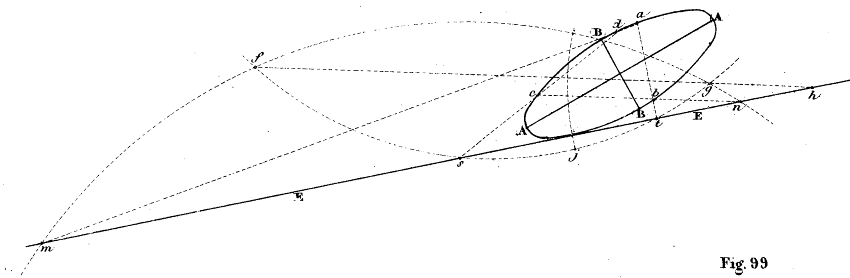


Fig. 99

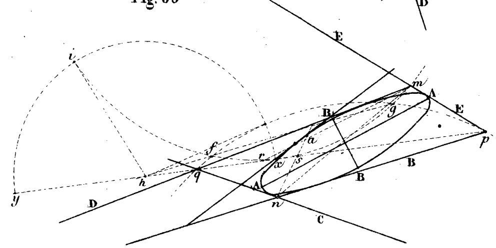


Fig. 107

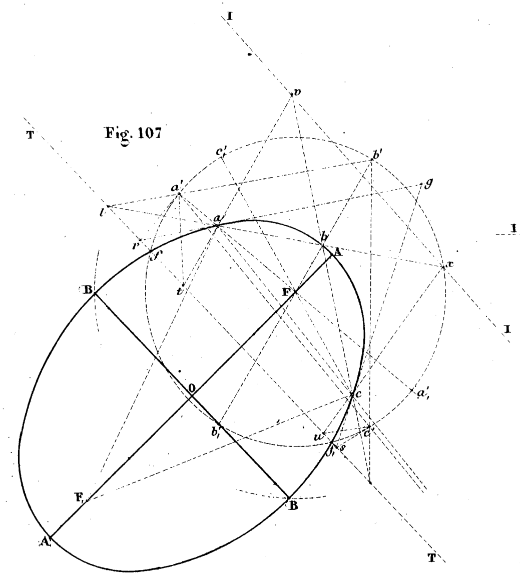
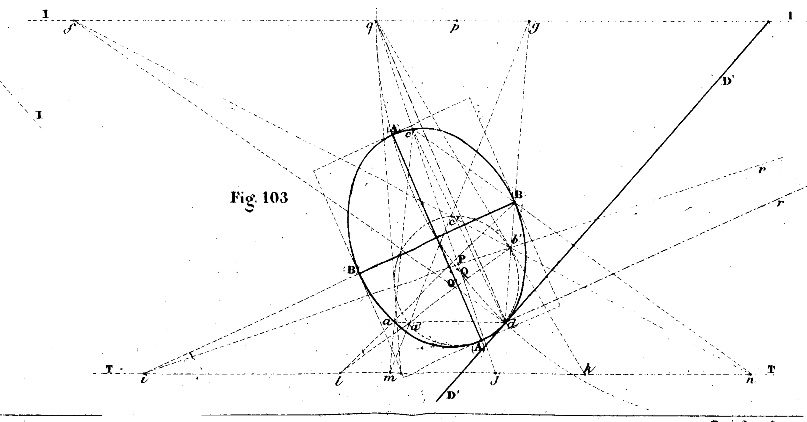


Fig. 103



Paris Imp. Janson.

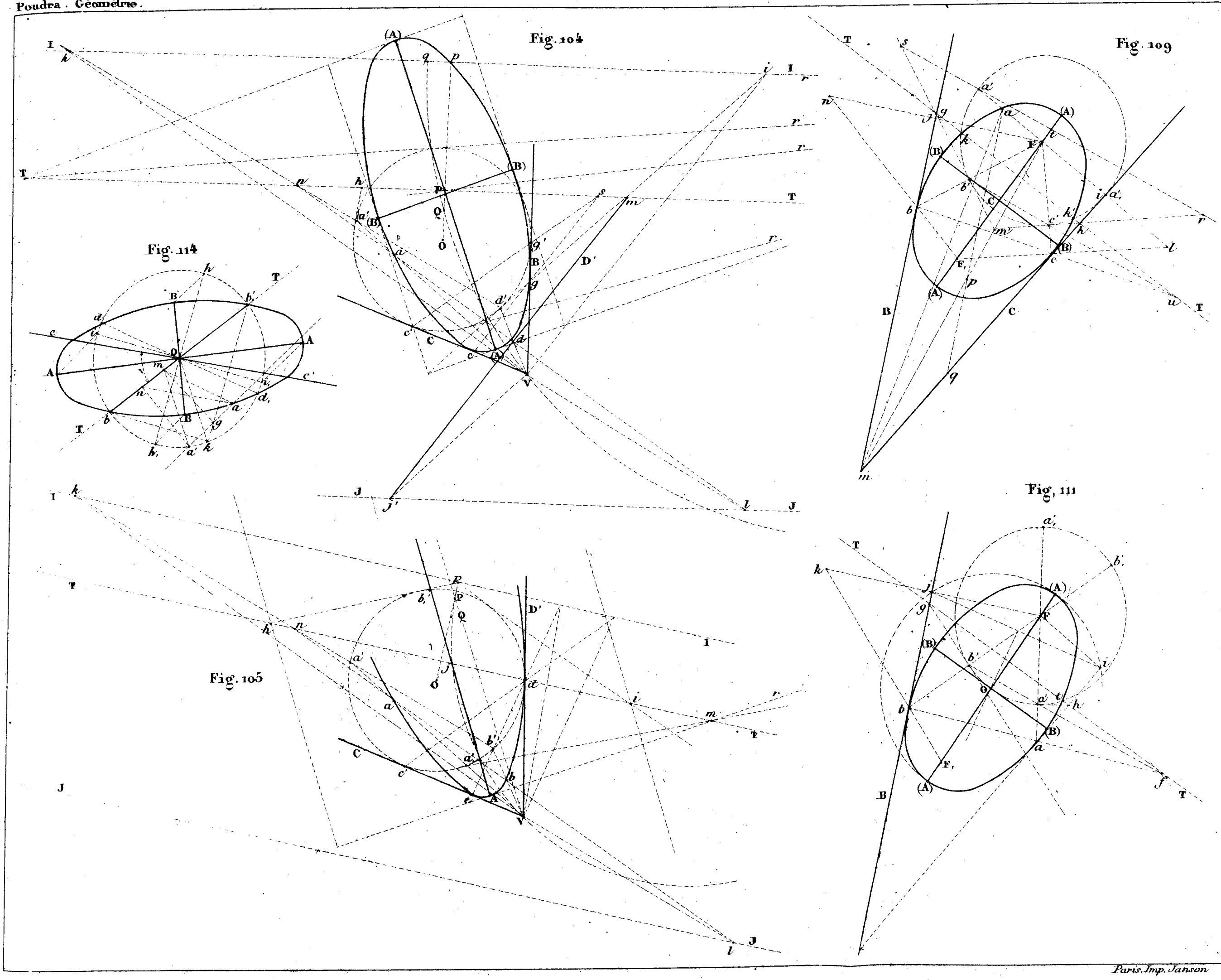


Fig. 104

Fig. 109

Fig. 114

Fig. 105

Fig. 111

Paris. Imp. Janson

Fig. 108

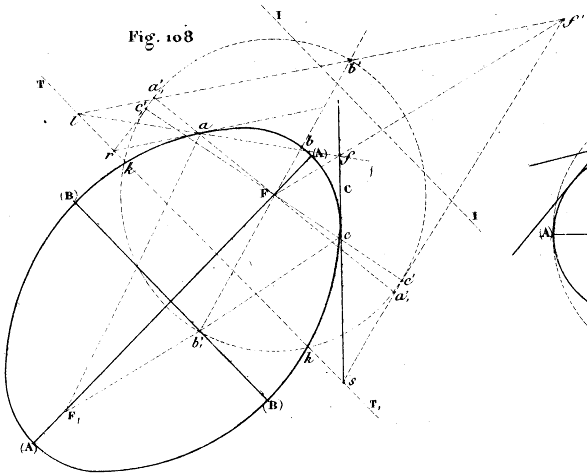


Fig. 110

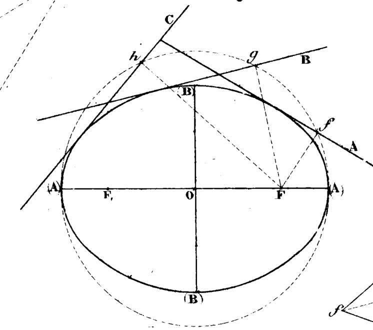


Fig. 125

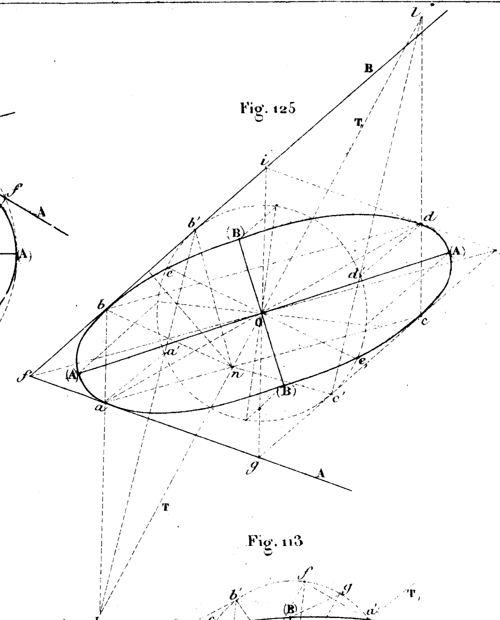


Fig. 115

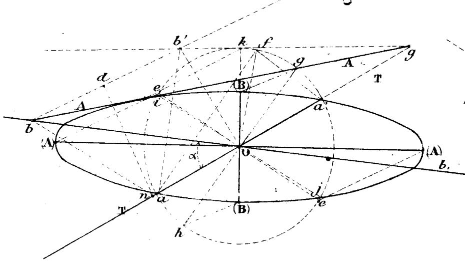


Fig. 112

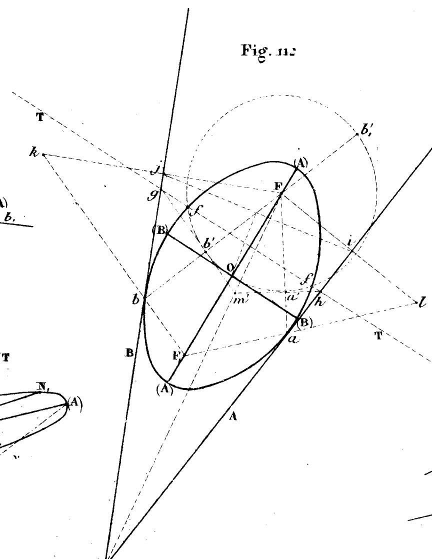


Fig. 113

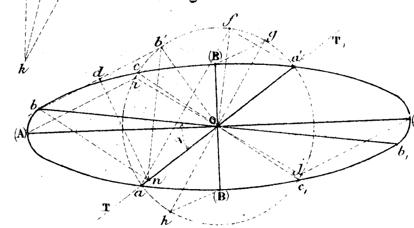


Fig. 116

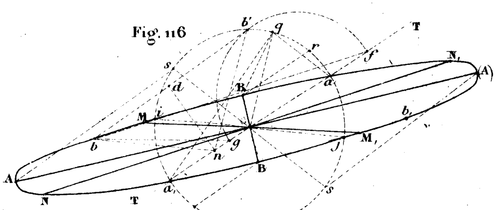
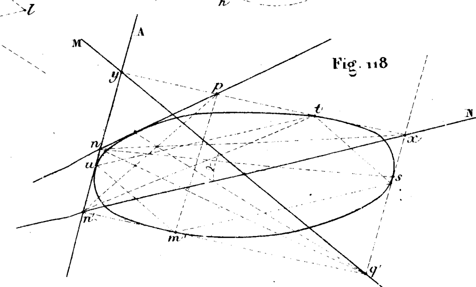
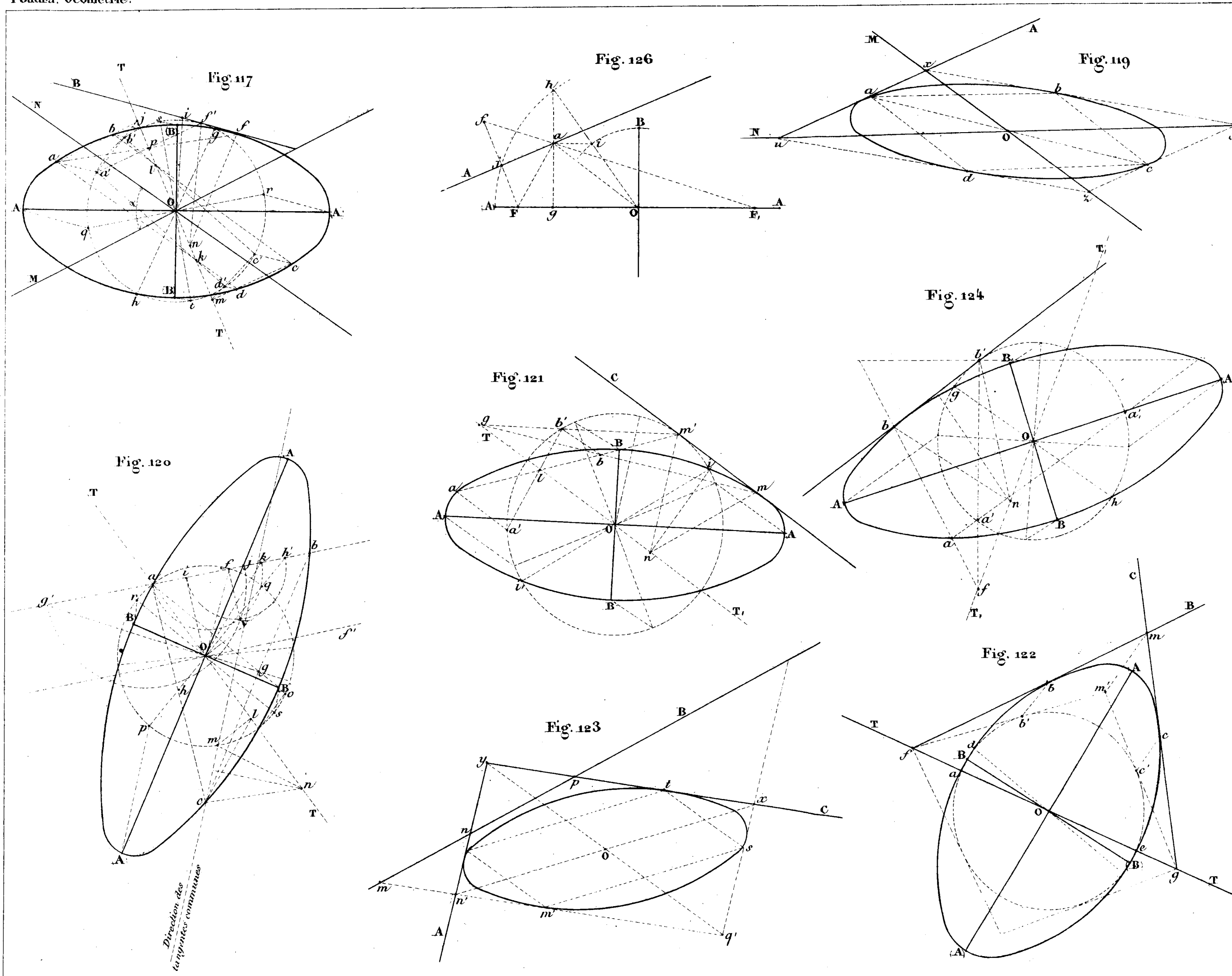


Fig. 118



Paris Imp. Janson



Paris I. Janson.