Série A, n° 394
N° d'Ordre
1065



# THÈSES

PRÉSENTÉES

## A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES



PAR

**Adolphe BUHL**



1re Thèse. — **Sur les équations différentielles simultanées et la forme aux dérivées partielles adjointe.**

2e Thèse. — **Propositions données par la Faculté.**

*Soutenues le 14 juin 1901 devant la commission d'examen.*

| | | |
|---|---|---|
| MM. | **DARBOUX.** | Président |
| | **APPELL** | Examinateurs |
| | **POINCARÉ** | Examinateurs |

Buhl
Bruileau
Galy-Aché
Bernstein

PARIS
ANCne LIBrie G. CARRÉ ET C. NAUD
C. NAUD, ÉDITEUR
3, RUE RACINE, 3

1901

# FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

| | MM. | |
|---|---|---|
| *Doyen* . . . . . . . | Gaston DARBOUX *Prof*r | Géométrie supérieure. |
| *Professeur honoraire.* | Louis TROOST. . . . | — |
| *Professeurs.* . . . . | DE LACAZE-DUTHIERS . | Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée. |
| | LIPPMANN. . . . . . | Physique. |
| | HAUTEFEUILLE . . . . | Minéralogie. |
| | BOUTY . . . . . . . | Physique. |
| | APPELL. . . . . . . | Mécanique rationnelle. |
| | DUCLAUX . . . . . . | Chimie biologique. |
| | BOUSSINESQ . . . . . | Physique mathématique et Calcul des probabilités. |
| | PICARD . . . . . . . | Analyse supérieure et Algèbre supérieure. |
| | H. POINCARÉ . . . . | Astronomie mathématique et Mécanique céleste. |
| | Yves DELAGE . . . . | Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée. |
| | Gaston BONNIER . . | Botanique. |
| | DASTRE. . . . . . . | Physiologie. |
| | DITTE . . . . . . . | Chimie. |
| | MUNIER-CHALMAS . . | Géologie. |
| | GIARD . . . . . . . | Zoologie, Évolution des êtres organisés. |
| | WOLF . . . . . . . | Astronomie physique. |
| | KŒNIGS. . . . . . . | Mécanique physique et expérimentale. |
| | VÉLAIN. . . . . . . | Géographie physique. |
| | GOURSAT . . . . . . | Calcul différentiel et Calcul intégral. |
| | CHATIN. . . . . . . | Histologie. |
| | PELLAT. . . . . . . | Physique. |
| | HALLER. . . . . . . | Chimie organique. |
| | H. MOISSAN. . . . . | Chimie. |
| *Professeurs adjoints.* | PUISEUX . . . . . . | Mécanique et Astronomie. |
| | RIBAN . . . . . . . | Chimie analytique. |
| | RAFFY . . . . . . . | Analyse et Mécanique. |
| | LEDUC . . . . . . . | Physique. |
| | MATRUCHOT . . . . . | Botanique. |
| | HAUG. . . . . . . . | Géologie. |
| | HADAMARD . . . . . | Calcul différentiel et Calcul intégral. |
| | P. JANET . . . . . . | Physique (enseignement P. C. N.). |
| *Secrétaire* . . . . . | FOUSSEREAU. . . . . | |

A

MM. Paul APPELL et Lucien LÉVY

# PREMIÈRE THÈSE

SUR LES

# ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

## SIMULTANÉES

### ET LA FORME AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ADJOINTE

## PRÉFACE

Le présent mémoire n'a trait au fond qu'à l'étude des deux propositions suivantes :

I. *Etant donné un système d'équations différentielles simultanées tel que*

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_r}{X_r},$$

*il existe, au moins théoriquement, une forme linéaire aux dérivées partielles telle que*

$$Y_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + Y_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \dots + Y_r \frac{\partial \Phi}{\partial x_r}$$

*laquelle est une intégrale du système considéré si* $\Phi$ *en est une.*

II. *A tout système que l'on sait intégrer tel que*

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_r}{X_r}$$

*correspond une infinité d'autres systèmes de même forme tels que, si* $\Phi$ *est une intégrale de l'un d'eux, la forme linéaire aux dérivées partielles*

$$X_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \ldots + X_r \frac{\partial \Phi}{\partial x_r}$$

*en est une autre.*

Faisant toutes réserves pour des observations possibles à venir il me semble néanmoins à l'heure actuelle que la seconde des deux propositions précédentes est nouvelle ; quoi qu'il en soit, je n'en puis absolument rien dire au point de vue historique.

Il n'en est pas de même de la première qui comprend comme cas particulier le célèbre théorème de Poisson. Ce géomètre a établi en effet que le système d'équations canoniques

$$dt = \frac{dx_1}{\frac{\partial R}{\partial x_{n+1}}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial R}{\partial x_{n+2}}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial R}{\partial x_{2n}}} = \frac{dx_{n+1}}{-\frac{\partial R}{\partial x_1}} = \ldots = \frac{dx_{2n}}{-\frac{\partial R}{\partial x_n}}$$

admet, en même temps que les intégrales $\alpha$ et $\beta$, l'intégrale

$$(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{i=n} \left( \frac{\partial \beta}{\partial x_{n+i}} \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} - \frac{\partial \beta}{\partial x_i} \frac{\partial \alpha}{\partial x_{n+i}} \right).$$

Si l'on considère que cette forme aux dérivées partielles est linéaire par rapport aux dérivées de $\alpha$ considérées seules et aussi par rapport à celles de $\beta$, on voit que la forme linéaire aux dérivées partielles

$$Y_0 \frac{\partial \alpha}{\partial t} + Y_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} + Y_2 \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} + \ldots + Y_{2n} \frac{\partial \alpha}{\partial x_{2n}}$$

qui, d'après la proposition I, doit être une intégrale du système canonique si $\alpha$ en est une, a des coefficients faciles à former dans ce cas, ces coefficients étant

$$Y_0 = 0, Y_1 = \frac{\partial \beta}{\partial x_{n+1}}, \ldots, Y_n = \frac{\partial \beta}{\partial x_{2n}},$$

$$Y_{n+1} = -\frac{\partial \beta}{\partial x_1}, \ldots, Y_{2n} = -\frac{\partial \beta}{\partial x_n}$$

et s'obtenant, comme on voit, en remplaçant simplement, dans les dérivées partielles figurant dans le système canonique donné, la fonction caractéristique R par une intégrale $\beta$ dudit système.

Considéré de cette manière nouvelle le théorème de Poisson se démontre facilement comme on le verra au chapitre v de ce mémoire, mais ne semble alors qu'une solution particulière aux équations canoniques du problème général qui consiste à rechercher les *fonctions adjointes* $Y_1, Y_2, \ldots Y_r$ d'un système quelconque

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_r}{X_r}.$$

Ce dernier problème paraît, en général, hérissé de difficultés à peu près insurmontables si l'on se propose d'abord d'obtenir des fonctions adjointes pour intégrer ensuite plus commodément le système proposé. Mais si ledit système est complètement intégré on peut ensuite obtenir facilement une infinité de fonctions adjointes qui, bien entendu, ne servent plus à rien quant à une intégration complètement terminée auparavant.

Une difficulté pareille n'est pas une chose sans précédent. Ainsi que me le faisait tout dernièrement remarquer M. J. Hadamard, on en rencontre une analogue dans la recherche du facteur intégrant d'une équation différentielle $Pdx + Qdy = 0$. Si l'on veut obtenir ce facteur intégrant pour intégrer l'équation en question il faut faire usage d'artifices qui ne réussissent que dans des cas particuliers, sans quoi la méthode générale conduit à intégrer d'abord l'équation proposée. Si on peut le faire on a facilement ensuite une infinité de facteurs intégrants alors qu'on n'en a plus besoin.

La proposition I serait donc un théorème stérile si la proposition II ne montrait pas le moyen d'obtenir une infinité de systèmes d'équations dont on connaîtra immédiatement un système de fonctions adjointes.

Les fonctions adjointes ainsi connues présenteront une analogie de propriétés remarquable avec celles des systèmes canoniques.

Par exemple les théorèmes généraux de Joseph Bertrand énoncés dans son article du *Journal de Mathématiques : Sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique* (t. XVII, 1852, p. 393), s'appliquent presque sans généralisation aux formes adjointes de tout système d'équations. L'illustre géomètre ne parlait pas de fonctions adjointes et songeait d'ailleurs à autre chose qu'à la présente théorie générale, mais sa façon de considérer des parenthèses de Poisson telles que $(\alpha, \beta)$ dans lesquelles, au cours de ses raisonnements, il ne modifie jamais la première fonction $\alpha$ montre qu'il se donne ainsi implicitement des coefficients jouant le rôle, dans la forme adjointe $(\alpha, \beta)$ développée, des coefficients $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ dans la forme adjointe relative à un système quelconque.

Il m'est encore utile avant d'aller plus loin d'emprunter à Joseph Bertrand quelques lignes par lesquelles son article commence.

« Peu de mois après la mort de Poisson, dit-il, Jacobi écrivait à l'Académie des Sciences pour lui signaler la plus profonde découverte du géomètre qu'elle venait de perdre.

« Cette découverte, disait Jacobi, n'a, je crois, été bien comprise ni par Lagrange ni par les nombreux géomètres qui l'ont citée, ni par son auteur lui-même. Le théorème dont je parle me semble le plus important de la mécanique et de cette partie du calcul intégral qui s'attache à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires. Toutefois on ne le trouve ni dans les Traités de Calcul intégral ni dans la *Mécanique analytique*. Comme ce théorème ne servait qu'à établir une autre proposition dont Lagrange avait donné une démonstration plus simple, celui-ci n'en parle dans sa *Mécanique* que comme preuve d'une grande force analytique sans trouver nécessaire de le faire entrer dans son ouvrage et depuis, tout le monde le regardant comme un théorème remarquable par la difficulté de le prouver et personne ne l'examinant en lui-même, ce théorème prodigieux et jusqu'ici sans exemple, est resté à la fois découvert et caché. »

Il faut remarquer, et Joseph Bertrand le démontrait précisément dans l'article cité, que le théorème de Poisson pouvait donner des résultats illusoires. La parenthèse $(\alpha, \beta)$ restait bien toujours constante en vertu du système d'équations canoniques considéré si les fonctions $\alpha$ et $\beta$ restaient constantes en vertu du même système, c'est-à-dire en étaient des intégrales, mais il arrivait souvent, beaucoup plus souvent même que n'arrivait le contraire, qu'elle était constante *identiquement*. Et alors à quoi servait d'obtenir des relations telles que $1 = 1$ ou $0 = 0$?

Le théorème de Poisson s'applique uniquement aux équations canoniques. Liouville, dans un courte note de son *Journal de Mathématiques* indique la possibilité de ramener un système quelconque d'équations à la forme canonique.

M. H. Laurent après avoir mentionné la méthode de Liouville dans son *Traité d'Analyse* (t. VI, p. 96) ajoute qu'elle ne lui semble guère avantageuse, ce qui est aussi mon avis, car elle consiste à introduire des variables parasites. Plus récemment M. G. Kœnigs a repris la chose par une méthode beaucoup plus profonde et en a même fait une application élégante de la théorie des invariants intégraux due à M. Poincaré (G. Kœnigs. *Application* *des invariants intégraux à la réduction au type canonique d'un système quelconque d'équations différentielles. Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1895, 2e semestre, p. 875) (P. Appell. *Traité de Mécanique rationnelle*, t. II, p. 453). L'énoncé seul de ces résultats donne évidemment à penser que si tous les systèmes peuvent se ramener à la forme canonique, certaines propriétés considérées d'abord comme appartenant exclusivement aux systèmes canoniques doivent, convenablement généralisées, appartenir à des systèmes quelconques d'équations différentielles. J'ai pensé que le théorème de Poisson est de celles-là et j'ai réussi à trouver un énoncé simple et général s'appliquant à un système quelconque.

Ce premier mémoire n'a rien de définitif. Loin d'épuiser la question il ne fait qu'en donner un aperçu. J'y suis resté sur le terrain des méthodes élémentaires bien qu'y côtoyant la théorie des groupes de Lie et me rendant parfaitement compte que je pourrais établir les propositions fondamentales que j'énonce en faisant intervenir les transformations infinitésimales qui ont déjà permis d'établir le théorème de Poisson par une voie nouvelle comme l'a montré M. H. Poincaré.

De plus il serait aisé de transporter les nouveaux résultats obtenus pour des équations différentielles ordinaires aux équations aux dérivées partielles.

J'espère fermement revenir sur la question à ces divers points de vue dans des mémoires ultérieurs.

Qu'il me soit permis, avant de terminer ces lignes, d'assurer de mon immense reconnaissance M. P. Appell, professeur à la Faculté des Sciences, et M. L. Lévy, examinateur à l'Ecole Polytechnique, auxquels je suis profondément heureux de pouvoir dédier ce travail.

J'adresse également mes plus sincères remerciements à M. C. Naud qui, avec la plus grande obligeance, a bien voulu accueillir et imprimer mon manuscrit.

A. Buhl.

Paris, le 31 mars 1901.

# INTRODUCTION

Je rappelle ici quelques généralités concernant le système d'équations simultanées

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_r}{X_r}, \tag{1}$$

uniquement pour éviter des redites dans le courant du présent mémoire.

Une intégrale du système (1) est une fonction qui reste constante en vertu des équations de ce système. Si $\Phi$ est une telle fonction nous avons donc $d\Phi = 0$ ou

$$\sum_{i=1}^{i=r} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i = 0.$$

D'après les équations (1) cette dernière relation peut s'écrire

$$\sum_r X_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0. \tag{2}$$

Telle est la condition à laquelle doit satisfaire une fonction $\Phi(x_1, x_2, \ldots x_r)$ pour être une intégrale du système (1). On voit alors que la définition adoptée pour l'intégrale fait jouer le rôle d'intégrale à toutes les constantes et en particulier à la constante zéro. Il ne faudra donc pas s'étonner si une méthode quelconque propre à la recherche d'intégrales définies comme il vient de l'être donne parfois des expressions identiquement constantes.

Les équations (1) ne sauraient admettre plus de $r - 1$ intégrales distinctes

$$(3) \quad \Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_r), \quad \Phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_r), \ldots, \quad \Phi_{r-1}(x_1, x_2, \ldots, x_r).$$

S'il y en avait $r$ on pourrait exprimer $x_1, x_2, \ldots x_r$ en fonction de constantes, c'est-à-dire que ces variables deviendraient des constantes.

Toute fonction de ces intégrales (3) est évidemment une intégrale du même système si bien que le type général d'une intégrale sera

$$(4) \qquad \Psi(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{r-1})$$

la fonction $\Psi$ étant arbitraire. Nous dirons que $r - 1$ intégrales distinctes telles que (3) forment un *système complet* d'intégrales. L'intégrale (4) sera *l'intégrale générale* du système considéré (1).

Cette intégrale générale sera susceptible de $r - 1$ formes distinctes formant un nouveau système complet et comme on pourra raisonner sur ce dernier comme sur le système complet primitif (3) on voit en continuant ainsi qu'il y a une infinité de systèmes complets qui peuvent tous se déduire de la connaissance de l'un d'eux.

Inversement si une fonction arbitraire

$$(5) \qquad \Psi(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k)$$

de $k$ fonctions est une intégrale du système (1), il en est de même de chacune des fonctions composantes $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_k$ car l'expression considérée peut se décomposer en $k$ expressions distinctes qui égalées à des constantes donnent bien des valeurs constantes pour $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k$. Si $k$ était plus grand que $r - 1$ il y aurait $k - r + 1$ des fonctions $\Phi$ non distinctes des autres.

Toute dérivée partielle de $\Psi$ par rapport à l'une des fonctions $\Phi$ est aussi une intégrale car il n'y a là au fond qu'un moyen particulier de former une fonction de $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_k$

*Si l'on connaît une intégrale du système* (1) *telle que*

$$\Phi\,(x_1, x_2, \ldots, x_r\,;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$$

*contenant $k$ constantes arbitraires distinctes, toutes les dérivées partielles telles que*

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_h}, \frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha_h\,\partial\alpha_i}, \frac{\partial^3\Phi}{\partial\alpha_h\,\partial\alpha_i\,\partial\alpha_j}, \ldots\ (h, i, j = 1, 2, \ldots, k)$$

*peuvent être des intégrales nouvelles.*

En effet, on a par hypothèse

$$\sum X_i \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} = 0.$$

Dérivant par rapport à $\alpha_h$, en remarquant que les X ne contiennent pas cette constante, on a

$$\sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_h}\right) = 0$$

ce qui démontre le théorème, la nouvelle intégrale pouvant être traitée comme $\Phi$ et ainsi de suite.

*Si les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_r$ ne contiennent pas toutes les variables $x_1, x_2, \ldots x_r$ mais que quelques-unes d'entre elles telles que $x_j, x_m, \ldots x_p$ manquent et que l'on connaisse une intégrale du système telle que*

$$\Phi\,(x_1, x_2, \ldots, x_r),$$

*les dérivées partielles telles que*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_m}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_p}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_m}, \ldots, \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_j \partial x_m \partial x_p}, \ldots$$

*peuvent être de nouvelles intégrales.*

En effet de

$$\sum X_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0$$

on déduit en dérivant par rapport à $x_j$ et observant que, par hypothèse, $X_i$ ne contient pas cette variable

$$\sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right) = 0.$$

Donc $\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}$ est une intégrale. Même démonstration pour $\frac{\partial \Phi}{\partial x_m}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_p}$. On peut ensuite raisonner sur ces intégrales comme sur l'intégrale $\Phi$, ce qui achève de démontrer le théorème.

On rencontre souvent en pratique des systèmes d'équations tels que

$$dt = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_r}{X_r},$$

dans lesquels les fonctions X ne contiennent pas la variable $t$. D'après le théorème précédent si $\Phi$ est une intégrale de ces équations contenant $t$ les dérivées partielles

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^3}, \ldots$$

pourront en être d'autres.

Ce théorème s'applique notamment aux équations canoniques de la dynamique toutes les fois que la fonction caractéristique ne contient pas $t$. Il n'est donc pas nécessaire de faire dépendre sa démonstration de celle du théorème de Poisson. On trouvera une application dans le *Traité de Mécanique rationnelle* de M. P. Appell (t. II, p. 423).

# CHAPITRE PREMIER

## FONCTIONS ADJOINTES ET FORME ADJOINTE D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

**1. Théorème.** — *Etant donné un système d'équations simultanées, tel que*

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_r}{X_r}, \tag{1}$$

*où les* X *sont des fonctions quelconques des* $x$, *il existe* $r$ *fonctions*

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_r \tag{2}$$

*des variables* $x$ *telles que si* $\Phi$ *est une intégrale du système en question, la forme linéaire aux dérivées partielles de* $\Phi$

$$\sum_j Y_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = Y_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + Y_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \dots + Y_r \frac{\partial \Phi}{\partial x_r} \tag{3}$$

*en est une autre.*

Pour démontrer ce théorème observons que si $\Phi$ et la forme (3) sont des intégrales de (1) on doit avoir

$$\sum_j X_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0, \quad \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j Y_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right) = 0. \tag{4}$$

Dérivant la première de ces égalités par rapport à $x_i$, multipliant par $Y_i$ et additionnant les égalités ainsi obtenues pour toutes les valeurs de $i$, il vient

$$\sum_i \sum_j \left( Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + Y_i X_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \right) = 0$$

La seconde égalité (4) peut s'écrire

$$\sum_i \sum_j \left( X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + X_i Y_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \right) = 0$$

et si l'on retranche ces deux dernières équations en observant que la différence

$$\sum_i \sum_j (Y_i X_j - X_i Y_j) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_i}$$

est identiquement nulle, il vient

$$\sum_i \sum_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \left( X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) = 0$$

ou

$$\sum_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \left( X_1 \frac{\partial Y_j}{\partial x_1} - Y_1 \frac{\partial X_j}{\partial x_1} + \ldots + X_r \frac{\partial Y_j}{\partial x_r} - Y_r \frac{\partial X_j}{\partial x_r} \right) = 0.$$

On peut satisfaire identiquement à cette dernière équation, et cela d'une manière complètement indépendante du choix de l'intégrale $\Phi$, en posant

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 \dfrac{\partial Y_j}{\partial x_1} + \ldots + X_r \dfrac{\partial Y_j}{\partial x_r} = Y_1 \dfrac{\partial X_j}{\partial x_1} + \ldots + Y_r \dfrac{\partial X_j}{\partial x_r}, \\ \qquad\qquad (j = 1, 2, \ldots, r). \end{array} \right.$$

On a ainsi un système de $r$ équations aux dérivées partielles à $r$ fonctions inconnues $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$. Il est propre à définir ces fonctions, ce qui établit le théorème énoncé.

Je dirai que les fonctions $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ ainsi définies sont les

**FONCTIONS ADJOINTES** des fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_r$ ou du système (1).

Il est utile, pour la suite, de donner aussi une définition précise des fonctions adjointes où n'intervienne pas explicitement la considération d'intégrales du système (1). Si l'on remarque que le système (1) étant donné, on peut immédiatement écrire le système d'équations aux dérivées partielles (5) on peut dire que ce dernier définit les fonctions Y comme *fonctions adjointes* des fonctions X. Si l'on peut intégrer complètement le système (5) et obtenir les fonctions Y les plus générales lesquelles, nous le verrons plus loin, dépendent dans leur ensemble de $r$ fonctions arbitraires, nous dirons que ce sont des **FONCTIONS ADJOINTES GÉNÉRALES**. Dans le cas contraire, et ce sera de beaucoup le plus fréquent, on ne pourra pratiquement tirer du système (5) que des fonctions Y y satisfaisant comme solutions particulières : nous les dirons **FONCTIONS ADJOINTES DÉGÉNÉRÉES**.

Enfin d'après ces définitions et la symétrie des équations (5) il est impossible de ne pas remarquer immédiatement que si $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ sont fonctions adjointes de $X_1, X_2, \ldots X_r$, réciproquement $X_1, X_2, \ldots, X_r$ sont fonctions adjointes de $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$. C'est là un théorème fondamental auquel sera consacré un chapitre spécial.

**2.** — Nous allons nous occuper maintenant de l'intégration du système (5).

Nous considérons le système plus général

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 \dfrac{\partial Y_j}{\partial x_1} + \ldots + X_r \dfrac{\partial Y_j}{\partial x_r} = F_j \, (x_1, x_2, \ldots, x_r; Y_1, Y_2, \ldots, Y_r) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (j = 1, 2, \ldots, r) \end{array} \right.$$

qui aura l'avantage de comprendre comme cas particulier, non seulement le système (5) mais d'autres que nous rencontrerons au cours de ce travail. Ce système (6) a été considéré par Jacobi; on l'intègre facilement à l'aide de la méthode générale qu'employait primitivement Lagrange pour traiter les équations linéaires aux dérivées partielles (H. Laurent. *Traité d'Analyse*, t. VI, p. 198).

Posons pour simplifier l'écriture $\frac{\partial Y_j}{\partial x_i} = p_{ji}$ ; le système deviendra

$$X_1 p_{j1} + X_2 p_{j2} + \ldots + X_r p_{jr} = F_j \,, \qquad (j = 1, 2, \ldots, r).$$

Si l'on tire $p_{11}, p_{21}, \ldots, p_{r1}$ des identités

$$dY_j = p_{j1} dx_1 + p_{j2} dx_2 + \ldots + p_{jr} dx_r \,, \qquad (j = 1, 2, \ldots r)$$

pour les porter dans les expressions précédentes, celles-ci deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 (dY_j - p_{j2} dx_2 - \ldots - p_{jr} dx_r) \\ \qquad\qquad + (X_2 p_{j2} + \ldots + X_r p_{jr} - F_j) \, dx_1 = 0 \\ \qquad\qquad (j = 1, 2, \ldots, r) \end{array} \right.$$

et, en vertu de cette dernière égalité, si l'on annule les coefficients des $p_{ji}$, c'est-à-dire si l'on pose

$$X_1 dx_2 = X_2 dx_1, \qquad X_1 dx_3 = X_3 dx_1, \ \ldots, \qquad X_1 dx_r = X_r \, dx_1,$$

il vient aussi

$$X_1 dY_j = F_j \, dx_1, \qquad (j = 1, 2, \ldots, r).$$

Donc les fonctions $Y_j$ cherchées satisfont à ces dernières équations si les précédentes sont satisfaites, c'est-à-dire au système

$$(7) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_r}{X_r} = \frac{dY_1}{F_1} = \frac{dY_2}{F_2} = \ldots = \frac{dY_r}{F_r} \,.$$

Soient $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_{r-1}$ les intégrales du système formé par les $r$ premiers membres, lesquelles sont fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_r$ seulement, et

$$\Psi_1 (x_1, x_2, \ldots, x_r ; Y_1, Y_2 \ldots, Y_r), \qquad \Psi_2, \ldots, \Psi_r$$

2

les $r$ autres. Toute fonction de ces $2r-1$ intégrales sera aussi une intégrale du système (7), mais pour que l'on puisse déterminer les fonctions $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ les relations arbitraires distinctes à établir entre les intégrales ci-dessus doivent être au nombre de $r$ et de $r$ seulement.

**3.** — Ces considérations générales étant établies, abordons le cas particulier de l'intégration du système (5). Les équations différentielles ordinaires (7) deviennent dans ce cas

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_r}{X_r}\\ &=\frac{dY_1}{Y_1\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+Y_2\frac{\partial X_1}{\partial x_2}+\ldots+Y_r\frac{\partial X_1}{\partial x_r}}\\ &=\frac{dY_2}{Y_1\frac{\partial X_2}{\partial x_1}+Y_2\frac{\partial X_2}{\partial x_2}+\ldots+Y_r\frac{\partial X_2}{\partial x_r}}\\ &=\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &=\frac{dY_r}{Y_1\frac{\partial X_r}{\partial x_1}+Y_2\frac{\partial X_r}{\partial x_2}+\ldots+Y_r\frac{\partial X_r}{\partial x_r}}. \end{aligned}\right.$$

On remarquera tout d'abord que les équations de la première ligne de ce système ne sont autres que les équations (1) ce qui, au premier abord, paraît rendre absolument illusoires tous les résultats que l'on se proposait de tirer de la théorie. La connaissance des fonctions adjointes d'un système d'équations semble, au début, éminemment utile à son intégration mais comme le système (8) semble indiquer que l'on ne connaîtra ces fonctions que lorsque le système proposé sera complètement intégré on ne leur voit plus alors la moindre utilité. Ce raisonnement est assez juste lorsqu'il s'agit de *fonctions adjointes générales* qu'on ne pourra trouver, la plupart du temps, qu'en intégrant rigoureusement le système (8), mais nous verrons que l'on pourra souvent trouver des *fonctions adjointes dégénérées* sans effectuer cette intégration. Nous établirons de plus que rechercher les fonctions adjointes générales d'un système alors que le système est complètement intégré n'est pas, en général, une opération inutile ; cela conduit, comme nous le verrons plus loin, à la considération d'une infinité d'autres systèmes d'équations différentielles dont un système de fonctions adjointes dégénérées est immédiatement connu.

Nous allons voir maintenant que si l'on connaît un système complet d'intégrales du système (1), on connaît immédiatement $r-1$ intégrales du système (8) contenant $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$.

Soient $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{r-1}$ les intégrales supposées connues de (1). Je dis que les $r-1$ expressions

$$\sum Y_i \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i}, \quad \sum Y_i \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_i}, \ldots, \quad \sum Y_i \frac{\partial \Phi_{r-1}}{\partial x_i}$$

sont des intégrales de (8). Il faut démontrer que l'on a

$$d \sum_i Y_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i} = 0$$

en vertu des équations du système (8) et cela quel que soit $j$.

Effectuant la différentiation indiquée on a

$$\sum_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i} dY_i + \sum_i \sum_k Y_i \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x_i \, \partial x_k} dx_k = 0$$

ou, en remplaçant les $dY_i$ et les $dx_k$ par les expressions qui, d'après les équations (8), leur sont proportionnelles

$$\sum_i \sum_k Y_k \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i} + \sum_i \sum_k X_k Y_i \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x_i \, \partial x_k} = 0.$$

D'autre part, on a

$$\sum_i X_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i} = 0$$

d'où, en dérivant par rapport à $x_k$, multipliant par $Y_k$ et faisant la somme de toutes les valeurs ainsi obtenues pour tous les indices $k$,

$$\sum_i \sum_k Y_k \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i} + \sum_i \sum_k Y_k X_i \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x_i \partial x_k} = 0.$$

Retranchant de l'égalité précédente, il vient

$$\sum_i \sum_k (Y_i X_k - Y_k X_i) \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x_i \partial x_k} = 0,$$

ce qui est une identité.

Nous sommes donc maintenant en possession de $2r - 2$ intégrales du système (8). Il en reste à trouver une et une seulement par un calcul direct; soit $\Psi(x_1, x_2, \dots, x_r; Y_1, Y_2, \dots, Y_r)$ cette dernière intégrale. Entre les $2r - 1$ intégrales ainsi connues il reste à établir $r$ relations arbitraires desquelles on pourra tirer les Y.

On peut supposer que ces relations soient résolues par rapport aux $r$ intégrales qui seules contiennent les Y et elles s'écrivent alors

$$(9) \begin{cases} Y_1 \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + Y_2 \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} + \dots + Y_r \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_r} = \Theta_1(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{r-1}), \\ Y_1 \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} + Y_2 \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} + \dots + Y_r \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x_r} = \Theta_2(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{r-1}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_1 \dfrac{\partial \Phi_{r-1}}{\partial x_1} + Y_2 \dfrac{\partial \Phi_{r-1}}{\partial x_2} + \dots + Y_r \dfrac{\partial \Phi_{r-1}}{\partial x_r} = \Theta_{r-1}(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{r-1}), \\ \Psi(x_1, x_2, \dots, x_r; Y_1, Y_2, \dots, Y_r) = \Theta_r(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{r-1}), \end{cases}$$

$\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{r-1}, \Theta_r$ désignant des fonctions arbitraires.

Les $r - 1$ premières de ces relations étaient évidemment à prévoir. Elles ne font en effet qu'exprimer que la forme

$$Y_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + Y_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \dots + Y_r \frac{\partial \Phi}{\partial x_r}$$

que dorénavant nous nommerons *la forme adjointe* du système (1), reste une intégrale de ce système si $\Phi$ en est une.

On voit, en résumé, que les relations (9) permettent de calculer les fonctions adjointes générales du système (1) lorsqu'on connaît les intégrales $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{r-1}$ de ce système et en outre une seule intégrale $\Psi(x_1, x_2, \dots, x_r; Y_1, Y_2, \dots, Y_r)$, du système (8). Il faut faire attention bien entendu à ce que cette dernière soit distincte des intégrales linéaires en $Y_1, Y_2, \dots, Y_r$ qui forment les premiers membres des $r - 1$ premières équations (9).

# CHAPITRE II

## ÉTUDE DE LA FORME ADJOINTE

**4.** — Suivant que les fonctions adjointes du système

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_r}{X_r} \tag{1}$$

sont des fonctions adjointes générales ou des fonctions dégénérées, la forme adjointe

$$Y_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + Y_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \ldots + Y_r \frac{\partial \Phi}{\partial x_r} \tag{2}$$

présente des propriétés différentes quant à son expression en fonction des intégrales du système (1). Nous passerons d'abord en revue quelques propriétés générales qui restent les mêmes alors que les fonctions adjointes sont indifféremment générales ou dégénérées.

Nous savons que si dans la forme (2) on remplace $\Phi$ par l'une des intégrales $\Phi_1$ $\Phi_2, \ldots, \Phi_{r-1}$ considérées au chapitre précédent cette forme reste une fonction de ces intégrales. Si l'on faisait usage de toute autre intégrale du système (1), laquelle ne pourrait être qu'une fonction $\Psi$ $(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{r-1})$ des précédentes, il en serait de même, car on a

$$\sum_i Y_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} = \frac{\partial \Psi}{\partial \Phi_1} \sum Y_i \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \Psi}{\partial \Phi_2} \sum Y_i \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_i} + \ldots$$
$$+ \frac{\partial \Psi}{\partial \Phi_{r-1}} \sum Y_i \frac{\partial \Phi_{r-1}}{\partial x_i};$$

tous les $\sum$ qui figurent dans le second membre de cette égalité ne sont autres que les formes adjointes correspondant aux intégrales $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{r-1}$ et leurs coefficients sont manifestement aussi fonctions de ces dernières intégrales.

Si au lieu du système complet d'intégrales $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{r-1}$, on en considère un autre $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{r-1}$, toutes les formes adjointes

$$\sum \mathrm{Y}_i \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_i}, \sum \mathrm{Y}_i \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_i}, \ldots, \sum \mathrm{Y}_i \frac{\partial \Psi_{r-1}}{\partial x_i}$$

s'exprimant en fonction des intégrales $\Phi$ et ces dernières pouvant évidemment s'exprimer au moyen des $\Psi$, on voit que la forme adjointe (2) se comporte de même vis-à-vis de tous les systèmes complets d'intégrales des équations (1) (¹).

Réciproquement si l'on fait usage dans le système (9) du chapitre précédent de systèmes complets différents d'intégrales $\Phi$ pour le calcul des fonctions adjointes générales cela n'y peut changer autre chose que la forme des fonctions arbitraires qui y figurent.

D'ailleurs supposer qu'il en soit autrement serait admettre que le système d'équations aux dérivées partielles (5) § 1 admet plusieurs intégrales générales différant dans leur forme autrement que par les fonctions arbitraires, ce qui est absurde.

**5. Théorème.** — *Si* $\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2, \ldots, \mathrm{Y}_r$ *sont des fonctions adjointes générales ou dégénérées, il est possible, en général, de former un*

---

(¹) On voit sans peine l'analogie de ces considérations avec celles qui servent de base à la théorie des groupes de Lie. (Voir E. Goursat. *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, p. 306 et suivantes.) Par rapport à la forme adjointe (2) les intégrales du système (1) se comportent jusqu'ici comme des fonctions formant un groupe. On sait en effet que toute fonction de fonctions formant un groupe appartient aussi à ce groupe.

*système de $r - 2$ intégrales $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{r-2}$ telles que toutes les formes adjointes*

$$\sum Y_i \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_i}, \sum Y_i \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_i}, \ldots, \sum Y_i \frac{\partial \Psi_{r-2}}{\partial x_i}$$

*soient égales à une intégrale donnée à l'avance.*

Soient $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{r-1}$ des intégrales des équations (1) formant un système complet. Nous avons comme on l'a vu

$$(3) \begin{cases} Y_1 \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + Y_2 \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} + \ldots + Y_r \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_r} = \Theta_1(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{r-1}), \\ Y_1 \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} + Y_2 \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} + \ldots + Y_r \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x_r} = \Theta_2(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{r-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_1 \dfrac{\partial \Phi_{r-1}}{\partial x_1} + Y_2 \dfrac{\partial \Phi_{r-1}}{\partial x_2} + \ldots + Y_r \dfrac{\partial \Phi_{r-1}}{\partial x_r} = \Theta_{r-1}(\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_{r-1}). \end{cases}$$

Dans ces relations les seconds membres ont des significations différentes suivant qu'il s'agit de fonctions adjointes générales ou dégénérées. Dans le premier cas $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_{r-1}$ sont, comme nous savons, des fonctions arbitraires contenant bien réellement $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{r-1}$ ; dans le second elles peuvent n'avoir plus rien d'arbitraire et même se réduire à de simples constantes non nulles ou nulles.

Soit $\Psi$ une autre intégrale des équations (1), indéterminée pour l'instant mais qui est forcément de la forme $\Psi(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{r-1})$.

Nous avons, comme au paragraphe précédent,

$$\sum Y_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} = \Theta_1 \frac{\partial \Psi}{\partial \Phi_1} + \Theta_2 \frac{\partial \Psi}{\partial \Phi_2} + \ldots + \Theta_{r-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \Phi_{r-1}}.$$

Or si l'on égale cette expression à une intégrale arbitraire on a l'équation aux dérivées partielles

$$\Theta_1 \frac{\partial \Psi}{\partial \Phi_1} + \Theta_2 \frac{\partial \Psi}{\partial \Phi_2} + \ldots + \Theta_{r-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \Phi_{r-1}} = F(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{r-1})$$

qui définit une fonction $\Psi$ dépendant d'une fonction arbitraire de $r-2$ fonctions ou $r-2$ fonctions de $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_{r-1}$ qui sont distinctes et forment le système de $r-2$ intégrales dont l'existence justifie le théorème énoncé.

On voit maintenant que ce théorème est en défaut dans le cas très particulier où l'on aurait des fonctions $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_{r-1}$ toutes nulles. Les mots « en général » qu'il contient dans son énoncé visent ce cas. La fonction F est alors toujours nulle aussi. Donc : *S'il existe un système d'intégrales* $\Phi_1^0, \Phi_2^0, \ldots, \Phi_{r-1}^0$ *telles que les formes adjointes correspondantes soient nulles, toute intégrale fonction de celles-ci conduit aussi à une forme adjointe nulle* [1].

On sait qu'il existe une forme adjointe qui est toujours nulle quelle que soit l'intégrale considérée. C'est la forme

$$X_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \ldots + X_r \frac{\partial \Phi}{\partial x_r}.$$

En effet les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_r$ se correspondent à elles-mêmes comme de véritables fonctions adjointes car le système d'équations (5) du chapitre précédent est bien satisfait pour

$$Y_j = X_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, r),$$

mais la dégénérescence de ces fonctions est telle que la forme ci-dessus ne reste jamais constante autrement qu'en étant identiquement nulle.

**6.** — Si l'on fait $F(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{r-1}) = 1$, on a un corollaire important du théorème précédent.

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ étant un système quelconque de fonctions adjointes, on peut former un système de $r-2$ intégrales $\Phi_1^1$, $\Phi_2^1, \ldots, \Phi_{r-2}^1$ tel que

$$\sum Y_i \frac{\partial \Phi_1^1}{\partial x_i} = \sum Y_i \frac{\partial \Phi_2^1}{\partial x_i} = \ldots = \sum Y_i \frac{\partial \Phi_{r-2}^1}{\partial x_i} = 1.$$

---

[1] Il y a encore ici une analogie avec les *groupes* dits *en involution*.

Ces intégrales ont cette propriété de pouvoir être combinées entre elles ou avec une dernière intégrale $\Phi_{r-1}$ tout comme les intégrales d'un système complet quelconque de façon à donner une intégrale $\Psi$ à laquelle correspond une forme adjointe égale à une fonction donnée F $(\Phi_1^1, \Phi_2^1, \ldots, \Phi_{r-1})$. En effet $\Psi$ est donnée par l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\Phi_1^1}+\frac{\partial\Psi}{\partial\Phi_2^1}+\ldots+\frac{\partial\Psi}{\partial\Phi_{r-1}}=\mathrm{F}\,(\Phi_1^1, \Phi_2^1, \ldots, \Phi_{r-1}).$$

L'équation

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\Phi_1^1}+\frac{\partial\Psi}{\partial\Phi_2^1}+\ldots+\frac{\partial\Psi}{\partial\Phi_{r-1}}=1$$

donnera les combinaisons d'intégrales $\Phi_1^1, \Phi_2^1, \ldots, \Phi_{r-1}$ auxquelles correspondent aussi des formes adjointes égales à 1. Celles-ci sont de la forme

$$\Phi_{r-1}+f(\Phi_1^1-\Phi_{r-1}, \Phi_2^1-\Phi_{r-1}, \ldots, \Phi_{r-2}^1-\Phi_{r-1}),$$

la fonction $f$ étant arbitraire.

Si l'on fait F $(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{r-1})=0$ on a un second corollaire de même importance que le précédent.

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ étant un système quelconque de fonctions adjointes, on peut former un système de $r-2$ intégrales $\Phi_1^0$, $\Phi_2^0, \ldots, \Phi_{r-2}^0$ tel que

$$\sum Y_i\,\frac{\partial\Phi_1^0}{\partial x_i}=\sum Y_i\,\frac{\partial\Phi_2^0}{\partial x_i}=\ldots=\sum Y_i\,\frac{\partial\Phi_{r-2}^0}{\partial x_i}=0.$$

7. — Des deux corollaires précédents on déduit immédiatement que, pour des fonctions adjointes données, le système *complet* d'intégrales auxquelles correspondent les formes adjointes égales, tout calcul fait, aux expressions *les plus simples* peut se former en prenant les $r-2$ intégrales $\Phi_1^0, \Phi_2^0, \ldots, \Phi_{r-2}^0$ auxquelles correspondent des formes adjointes égales à 0 puis, pour

la $(r-1)^e$, une quelconque des intégrales $\Phi_1^1, \Phi_2^1, \ldots, \Phi_{r-2}^1$. On aura ainsi un système complet d'intégrales

$$\Phi^1, \Phi_1^0, \Phi_2^0, \ldots, \Phi_{r-2}^0 \tag{4}$$

auxquelles correspondent $r-1$ formes adjointes dont l'une est égale à 1, toutes les autres étant égales à zéro.

On remarquera encore l'analogie qu'il y a entre l'obtention d'un système d'intégrales tel que (4) et la réduction à la forme *canonique* de fonctions formant un groupe de Lie.

Les conclusions précédentes sont d'ailleurs entièrement semblables à celles obtenues par Joseph Bertrand dans le cas particulier des équations canoniques (*Journal de Mathématiques*, 1852, t. XVII, p. 393) (*Œuvres complètes de Lagrange. Mécanique analytique.* Note de J. Bertrand).

Dans le chapitre consacré plus loin aux équations canoniques nous retrouverons immédiatement le théorème de J. Bertrand comme cas particulier du résultat ci-dessus énoncé.

8. — Nous allons voir, pour terminer ce chapitre, en quoi diffèrent les propriétés de la forme adjointe suivant que les fonctions $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ sont générales ou dégénérées.

Il est clair tout d'abord que si l'on connaissait les fonctions adjointes générales d'un système (1) on pourrait toujours *à coup sûr* déduire une intégrale nouvelle d'une intégrale primitivement connue.

Même dans le cas où l'on aurait une intégrale telle que $\Psi^1$ ou $\Psi^0$ à laquelle, pour une forme momentanée des fonctions arbitraires contenues dans les fonctions adjointes, ne correspondrait pas d'intégrale nouvelle, on en ferait immédiatement correspondre une tout de même, en changeant convenablement la forme des fonctions arbitraires en question.

Ainsi imaginons que les seconds membres des équations (3) soient des fonctions générales et arbitraires auxquelles on attribuerait momentanément une forme telle que la forme adjointe correspondant à une intégrale $\Psi$,

$$\sum Y_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} = \Theta_1 \frac{\partial \Psi}{\partial \Phi_1} + \Theta_2 \frac{\partial \Psi}{\partial \Phi_2} + \ldots + \Theta_{r-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \Phi_{r-1}},$$

soit égale à zéro, ou à une autre constante, ou, d'une manière générale, à une intégrale considérée comme inutile. Il y aura toujours moyen de détruire une telle égalité en changeant la forme momentanément adoptée pour les fonctions arbitraires figurant dans $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_{r-1}$ et de faire donner une autre intégrale à l'expression ci-dessus.

En pratique, comme il a déjà été dit, ces considérations sont absolument illusoires. Les fonctions adjointes générales d'un système ne se peuvent connaître que lorsque ce système est complètement intégré, c'est-à-dire lorsque tout raisonnement subséquent ayant pour but de trouver de nouvelles intégrales est inutile.

Mais les explications précédentes éclaireront ce qui va se passer dans le cas de fonctions adjointes dégénérées. Ces dernières comme nous le verrons bientôt peuvent jouer un rôle pratique dans le cas de nombreux systèmes d'équations.

Tout d'abord des fonctions adjointes dégénérées ne contiendront en général rien d'arbitraire. Si donc à une intégrale connue correspond une forme adjointe qui n'est pas une intégrale nouvelle, il n'y aura aucun moyen, analogue au moyen théorique proposé tout à l'heure pour les fonctions adjointes générales, de remédier à cet inconvénient.

Les fonctions adjointes dégénérées satisfont évidemment à un système d'équations tel que (3) mais dans lequel les seconds membres ont perdu une partie plus ou moins grande (très grande dans beaucoup de cas) de leur généralité.

Les combinaisons des intégrales qui correspondent à ces valeurs desdits seconds membres peuvent donc ne conduire qu'à d'autres restant toujours dans la même catégorie.

Pour prendre un exemple supposons que dans le système (3) les seconds membres soient des fonctions déterminées de $\Phi_1$ et $\Phi_2$ seulement. Des intégrales $\Phi_1$ et $\Phi_2$ supposées connues et de toutes leurs combinaisons on ne pourra conclure une forme adjointe qui sera une intégrale nouvelle. Par contre si l'on ne connaissait pas ces intégrales mais une autre $\Phi_3$ on pourrait parfaitement trouver $\Phi_1$ et $\Phi_2$.

Les résultats à attendre de l'usage des fonctions adjointes dégénérées semblent donc d'une nature assez capricieuse.

Telle forme adjointe qui ne donne aucun résultat utile avec telle intégrale en donnera un avec telle autre.

Un exemple particulier de ces considérations générales est connu depuis longtemps et constitue le célèbre théorème de Poisson. On sait qu'un système d'équations *canoniques* est un système d'équations de la forme

$$dt = \frac{dx_1}{\frac{\partial R}{\partial x_{n+1}}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial R}{\partial x_{2n}}} = \frac{dx_{n+1}}{-\frac{\partial R}{\partial x_1}} = \ldots = \frac{dx_{2n}}{-\frac{\partial R}{\partial x_n}}.$$

Nous verrons plus loin que si $\alpha$ est une intégrale de ce système, il admet les fonctions adjointes évidemment dégénérées

$$0, \frac{\partial \alpha}{\partial x_{n+1}}, \frac{\partial \alpha}{\partial x_{n+2}}, \ldots, \frac{\partial \alpha}{\partial x_{2n}}, -\frac{\partial \alpha}{\partial x_1}, -\frac{\partial \alpha}{\partial x_2}, \ldots, -\frac{\partial \alpha}{\partial x_n},$$

si bien que, si $\Phi$ en est une autre intégrale, la forme adjointe

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_{n+1}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_{n+2}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial \alpha}{\partial x_{2n}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}$$
$$- \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n+1}} - \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n+2}} - \ldots - \frac{\partial \alpha}{\partial x_n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{2n}}$$

que Poisson représente symboliquement par $(\Phi, \alpha)$ peut en être une troisième. Malheureusement on sait que, plutôt que d'être une intégrale nouvelle utile, la forme adjointe $(\Phi, \alpha)$

se réduit plus souvent à une constante ou à une fonction d'intégrales déjà connues. Pour n'importe quel système d'équations différentielles il faudra s'attendre à des résultats de même nature du moment que l'on fera usage de fonctions adjointes dégénérées.

## CHAPITRE III

### RÉCIPROCITÉ DES FONCTIONS $X_1, X_2, \ldots, X_r$ ET $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$

**9. Théorème.** — *Si le système d'équations*

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_r}{X_r}$$

*admet des fonctions adjointes* $Y_1, Y_2, \ldots Y_r$, *réciproquement le système*

$$(2) \qquad \frac{dx_1}{Y_1} = \frac{dx_2}{Y_2} = \ldots = \frac{dx_r}{Y_r}$$

*admet les fonctions adjointes* $X_1, X_2, \ldots, X_r$.

Ce théorème, ainsi que nous l'avons déjà brièvement remarqué au chapitre I, est tout démontré à la simple considération des équations (5) dudit chapitre, lesquelles d'après leur symétrie définissent aussi bien les Y comme fonctions adjointes des X que les X comme fonctions adjointes des Y.

Il donne une portée nouvelle et très grande à la théorie des fonctions adjointes. Supposons en effet qu'après avoir intégré complètement le système (1) on détermine ses fonctions adjointes générales $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ et que l'on écrive le système (2).

Ce dernier admettra la forme adjointe

$$(3) \qquad X_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \ldots. + X_r \frac{\partial \Phi}{\partial x_r}$$

et si l'on remarque que dans le système (2) les fonctions Y dépendent de $r$ fonctions arbitraires on conçoit qu'il peut être le type d'un grand nombre de systèmes particuliers dont l'intégration pourra être notablement simplifiée par la connaissance immédiate des fonctions adjointes $X_1$, $X_2, \ldots, X_r$.

Il ne faudra pas oublier pourtant que ces dernières seront toujours des fonctions adjointes *dégénérées* du système (2).

Par suite, de la connaissance d'une intégrale $\Phi$ de ce système, on ne pourra pas conclure à coup sûr que la forme adjointe (3) en est une autre utile ; elle pourra se réduire à une simple constante non nulle ou nulle ou à une fonction d'intégrales déjà connues.

Ceci dit nous allons entrer dans des applications qui éclairciront tout ce qui précède.

**10.** — Considérons le système d'équations

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_r}{X_r}$$

dans lequel $X_1$ est fonction de $x_1$ seulement, $X_2$ fonction de $x_2$ seulement et généralement $X_j$ fonction de $x_j$ seulement. Ses intégrales sont

$$\Phi_1 = \int\left(\frac{dx_1}{X_1} - \frac{dx_r}{X_r}\right), \quad \Phi_2 = \int\left(\frac{dx_2}{X_2} - \frac{dx_r}{X_r}\right), \ldots,$$

$$\Phi_{r-1} = \int\left(\frac{dx_{r-1}}{X_{r-1}} - \frac{dx_r}{X_r}\right)$$

et, pour en calculer les fonctions adjointes, il nous faut encore trouver une intégrale du système (8) du chapitre I, lequel s'écrit ici

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_r}{X_r} = \frac{dY_1}{Y_1 \frac{dX_1}{dx_1}} = \frac{dY_2}{Y_2 \frac{dX_2}{dx_2}} = \ldots = \frac{dY_r}{Y_r \frac{dX_r}{dx_r}}.$$

Pour la seule intégrale qu'il est nécessaire d'en avoir, considérons l'égalité

$$\frac{dx_r}{X_r} = \frac{dY_r}{Y_r \dfrac{dX_r}{dx_r}},$$

ou

$$\frac{dX_r}{X_r} = \frac{dY_r}{Y_r}.$$

On a immédiatement l'intégrale $\frac{Y}{X_r}$. Cela fait il n'y a plus aucune intégration à effectuer et le système (9) du chapitre I nous donne pour déterminer les fonctions $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ les relations

$$\begin{aligned}
\frac{Y_1}{X_1} - \frac{Y_r}{X_r} &= \Theta_1(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{r-1}), \\
\frac{Y_2}{X_2} - \frac{Y_r}{X_r} &= \Theta_2(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{r-1}), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{Y_{r-1}}{X_{r-1}} - \frac{Y_r}{X_r} &= \Theta_{r-1}(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{r-1}), \\
\frac{Y_r}{X_r} &= \Theta_r(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{r-1}).
\end{aligned}$$

On en conclut

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_j = X_j F_j(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{r-1}) \\ \qquad (j = 1, 2, \ldots, r), \end{array} \right.$$

les fonctions $F_1, F_2, \ldots F_r$ étant des fonctions arbitraires de $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{r-1}$.

Donc le système d'équations

$$\left\{ \ldots = \frac{dx_j}{X_j F_j \left[ \int \left( \frac{dx_1}{X_1} - \frac{dx_r}{X_r} \right), \int \left( \frac{dx_2}{X_2} - \frac{dx_r}{X_r} \right), \ldots, \int_r \left( \frac{dx_{r-1}}{X_{r-1}} - \frac{dx_r}{X_r} \right) \right]} = \ldots \right.$$
$$(j = 1, 2, \ldots, r)$$

admet pour forme adjointe :

$$X_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \ldots + X_r \frac{\partial \Phi}{\partial x_r}.$$

On peut simplifier un peu l'écriture en posant

$$X_j = \frac{1}{f'_j(x_j)}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

et dire alors que le système

$$(4)\left\{ \ldots = \frac{f'_j(x_j)\,dx_j}{F^j\left[f_1(x_1)-f_r(x_r), f_2(x_2)-f_r(x_r), \ldots f_{r-1}(x_{r-1})-f_r(x_r)\right]} = \ldots \quad (j = 1.2, \ldots, r) \right.$$

admet pour forme adjointe

$$(5) \qquad \frac{1}{f'_1(x_1)} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{1}{f'_2(x_2)} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \ldots + \frac{1}{f'_r(x_r)} \frac{\partial \Phi}{\partial x_r}.$$

Le système (4) en comprend évidemment beaucoup d'autres comme cas particuliers. Nous allons voir quelques exemples.

**11.** — Soit d'abord

$$f_j(x_j) = \frac{x_j}{m_j}, (j = 1, 2, \ldots, r)$$

$m_1, m_2, \ldots, m_r$ étant des constantes. Le système (4) devient

$$(6)\left\{ \ldots = \frac{dx_j}{m_j F_j\left[\left(\frac{x_1}{m_1} - \frac{x_r}{m_r}\right), \left(\frac{x_2}{m_2} - \frac{x_r}{m_r}\right), \ldots, \left(\frac{x_{r-1}}{m_{r-1}} - \frac{x_r}{m_r}\right)\right]} = \ldots \quad (j = 1, 2, \ldots, r) \right.$$

et admet pour forme adjointe

$$(7) \qquad m_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + m_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \ldots + m_r \frac{\partial \Phi}{\partial x_r}.$$

Le système (6) en comprendra un qui est particulièrement intéressant. Posons

$$F_j = \frac{1}{m_j}\left[\alpha_j\left(\frac{x_1}{m_1} - \frac{x_r}{m_r}\right) + \beta_j\left(\frac{x_2}{m_2} - \frac{x_r}{m_r}\right) + \ldots\right.$$
$$\left. + \lambda_j\left(\frac{x_{r-1}}{m_{r-1}} - \frac{x_r}{m_r}\right)\right]$$

et essayons d'identifier cette expression avec la suivante

$$\frac{1}{m_j}\left[a_j x_1 + b_j x_2 + \ldots + k_j x_{r-1} + l_j x_r\right].$$

Il vient les relations

$$\alpha_j = m_1 a_j, \quad \beta_j = m_2 b_j, \; \ldots, \; \lambda_j = m_{r-1} k_j,$$
$$-\frac{1}{m_r}(\alpha_j + \beta_j + \ldots + \lambda_j) = l_j,$$

dont la dernière peut se remplacer par

$$m_1 a_j + m_2 b_j + \ldots + m_{r-1} k_j + m_r l_j = 0.$$

On voit donc que le système

$$\left\{\begin{array}{c} \ldots = \dfrac{dx_j}{a_j x_1 + b_j x_2 + \ldots + l_j x_r} = \ldots \\ (j = 1, 2, \ldots r) \end{array}\right.$$

admet la forme adjointe (7), où $m_1, m_2, \ldots, m_r$ sont des constantes, de même que $a_j, b_j, \ldots, l_j$, pour toutes les valeurs de $j$, si l'on peut définir ces constantes $m$ par les équations linéaires

$$\left\{\begin{array}{c} m_1 a_j + m_2 b_j + \ldots, + m_r l_j = 0 \\ (j = 1, 2, \ldots, r). \end{array}\right.$$

Il faut pour cela que l'on ait

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \ldots & l_2 \\ . & . & . & . \\ a_r & b_r & \ldots & l_r \end{vmatrix} = 0.$$

Soit comme application numérique le système

$$\frac{dx}{y-z}=\frac{dy}{z-x}=\frac{dz}{x-y}$$

pour lequel on a facilement $m_1=m_2=m_3$ et qui admet par suite la forme adjointe

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}.$$

Il admet deux intégrales distinctes

$$\Phi_1=x^2+y^2+z^2\ ,\ \Phi_2=x+y+z,$$

et l'on voit facilement que

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}=2\,\Phi_2.$$

On a aussi

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}=3,$$

résultat inutile cette fois et qui provient de l'usage de fonctions adjointes dégénérées. Il ne faudrait pas croire cependant qu'il faudra toujours connaître une intégrale d'une certaine complication pour en déduire une simple alors qu'en pratique c'est précisément le contraire qui est à souhaiter.

Si au lieu de connaître l'une des intégrales les plus simples d'un système on en connaissait une qui soit une combinaison de ces dernières, l'usage de la forme adjointe pourrait permettre d'en effectuer la séparation. Ainsi dans le cas du système précédent supposons que l'on connaisse seulement l'intégrale

$$\Phi_3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2).$$

On a

$$\frac{\partial\Phi_3}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_3}{\partial y}+\frac{\partial\Phi_3}{\partial z}=2\,(x+y+z)^2+3\,(x^2+y^2+z^2)$$

et l'on peut alors immédiatement conclure que $x^2+y^2+z^2$ et $x+y+z$ sont des intégrales distinctes du système considéré.

Il est sinon utile du moins intéressant de chercher comme vérification des théories du chapitre précédent, quel est le système complet canonique d'intégrales $\Phi^1$ et $\Phi^0$ qui rendent la forme adjointe égale d'abord à 1 et ensuite à 0. $\Phi^1$ est évidemment égale au tiers de $x+y+z$. $\Phi^0$ satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$2\Phi_2 \frac{\partial \Psi}{\partial \Phi_1} + 3 \frac{\partial \Psi}{\partial \Phi_2} = 0.$$

et est égale à $3\,\Phi_1 - \Phi_2^2$. On a donc

$$\Phi^1 = \frac{1}{3}(x+y+z)\ ,\ \Phi^0 = x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz$$

et l'on vérifie facilement.

**12.** — Comme second exemple de particularisation du système (4), soit

$$f_j(x_j) = \log x_j \quad (j = 1, 2, \ldots r).$$

Le terme général dudit système devient

$$\frac{dx_j}{x_j\,\mathrm{F}_j\left(\log \frac{x_1}{x_r},\ \log \frac{x_2}{x_r}, \ldots, \log \frac{x_{r-1}}{x_r}\right)}$$

et, comme la fonction $\mathrm{F}_j$ est arbitraire, rien n'empêche de remplacer les symboles *log* qui y figurent par $e^{log}$ d'où le système

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \ldots = \dfrac{dx_j}{x_j\,\mathrm{F}_j\left(\dfrac{x_1}{x_r}, \dfrac{x_2}{x_r}, \ldots, \dfrac{x_{r-1}}{x_r}\right)} = \ldots \\ \qquad (j = 1, 2, \ldots, r) \end{array} \right.$$

que nous savons admettre la forme adjointe

$$(9) \qquad x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \ldots + x_r \frac{\partial \Phi}{\partial x_r}.$$

La considération de celle-ci conduit immédiatement à cette remarque assez curieuse que si une intégrale $\Phi$ du système (8) est une fonction *homogène*, on ne peut pas espérer que la forme adjointe (9) soit une intégrale nouvelle.

En effet, si $\Phi$ est une fonction homogène d'ordre $m$, nous avons la relation élémentaire bien connue

$$x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \ldots + x_r \frac{\partial \Phi}{\partial x_r} = m\Phi$$

qui, on le voit, fait retomber sur l'intégrale $\Phi$.

Le système (8) comprend des cas particuliers intéressants.

Soit par exemple

$$F_j = a_j \frac{x_1}{x_r} + b_j \frac{x_2}{x_r} + \ldots + k_j \frac{x_{r-1}}{x_r} + l_j,$$

$a_j, b_j, \ldots, k_j, l_j$ étant des constantes pour $j = 1, 2, \ldots, r$.

On a alors le système

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} \ldots = \dfrac{dx_j}{x_j\,(a_j\, x_1 + b_j\, x_2 + \ldots + k_j\, x_{r-1} + l_j\, x_r)} = \ldots \\ \qquad\qquad (j = 1, 2, \ldots, r) \end{array} \right.$$

dont la forme adjointe est (9).

Soit comme application numérique le système

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{yx} = \frac{dz}{zy}$$

qui admet les deux intégrales distinctes

$$\Phi_1 = \frac{y}{x}, \qquad \Phi_2 = \frac{y}{x} \log x - \log z.$$

La première est une fonction homogène de degré zéro. Par suite la forme adjointe correspondante est nulle, ce que l'on vérifie facilement par un calcul direct. Mais on a

$$x\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}+y\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}+z\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}=\Phi_1-1.$$

On remarquerait comme dans l'exemple du paragraphe précédent que l'usage de la forme adjointe peut séparer deux intégrales combinées en une seule que l'on connaît sans pourtant que la chose soit en évidence. Cherchons encore le système complet d'intégrales $\Phi^1$ et $\Phi^0$ qui rendent la forme adjointe égale à 1 puis à 0. $\Phi^0$ est connue et n'est autre que $\Phi_1$.

$\Phi^1$ satisfait à l'équation

$$(\Phi_1-1)\frac{\partial \Psi}{\partial \Phi_2}=1$$

et est égal à $\dfrac{\Phi_2}{\Phi_1-1}$. Donc :

$$\Phi^1=\frac{y\log x-x\log z}{y-x},\qquad \Phi^0=\frac{y}{x}.$$

On vérifie aisément que

$$x\frac{\partial \Phi^1}{\partial x}+y\frac{\partial \Phi^1}{\partial y}+z\frac{\partial \Phi^1}{\partial z}=1.$$

**13.** — Il est inutile de multiplier davantage les exemples. On voit que l'on peut trouver une infinité de systèmes dont les fonctions adjointes seront immédiatement connues.

Le problème qui consiste à déterminer les systèmes d'équations ayant des fonctions adjointes $X_1$, $X_2$, ..., $X_r$ données à l'avance est identiquement celui qui vient d'être résolu. On écrira le système (1) et le système correspondant (2) sera le plus général répondant à la question.

Lorsque l'on connaît un système de fonctions adjointes dégénérées d'un système d'équations on peut tirer parti des théorèmes du chapitre précédent pour en découvrir une première intégrale.

Soit le système

$$\frac{dx_1}{Y_1} = \frac{dx_2}{Y_2} = \dots = \frac{dx_r}{Y_r}$$

admettant pour fonctions adjointes dégénérées $X_1, X_2, \dots, X_r$.

Une intégrale $\Phi$ de ce système satisfait d'abord à la relation

$$(11) \qquad Y_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + Y_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \dots + Y_r \frac{\partial \Phi}{\partial x_r} = 0$$

et nous savons de plus qu'il admet des intégrales $\Phi^1$ et $\Phi^0$ satisfaisant respectivement aux équations

$$(12) \qquad \begin{cases} X_1 \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} + X_2 \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \dots + X_r \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_r} = 1, \\ X_1 \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} + X_2 \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \dots + X_r \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_r} = 0. \end{cases}$$

Si donc on prend l'équation (11) et l'une des équations (12) on a un système de deux équations simultanées aux dérivées partielles dont l'intégrale commune peut être plus facile à trouver qu'une intégrale de l'équation (11) considérée seule. Seulement par le fait même qu'elle satisfait à l'une des équations (12) l'intégrale ainsi trouvée ne donnera jamais une forme adjointe égale à une nouvelle intégrale utile.

Il y a là une généralisation du procédé longuement développé par Joseph Bertrand dans son article déjà cité du *Journal de Mathématiques* (1852, t. XVII, p. 393).

Ce géomètre montre que connaissant une intégrale d'un système canonique on peut en trouver une seconde. Cela revient à dire que l'on connaît un système de fonctions adjointes dégénérées de ces équations ; le raisonnement précédent est alors exactement calqué sur celui de J. Bertrand.

# CHAPITRE IV

## CHANGEMENT DE VARIABLES. — INVARIANCE DE LA FORME ADJOINTE

**14.** — Le problème que nous allons traiter dans ce chapitre est le suivant :

*Etant donné le système d'équations*

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_r}{X_r} \tag{1}$$

*dont on connaît les fonctions adjointes* $Y_1, Y_2, \dots, Y_r$, *on substitue aux variables* $x_1, x_2, \dots, x_r$ *de nouvelles variables* $u_1, u_2, \dots u_r$, *ce qui transforme le système proposé en*

$$\frac{du_1}{U_1} = \frac{du_2}{U_2} = \dots = \frac{du_r}{U_r}, \tag{2}$$

*et l'on propose de déterminer les fonctions adjointes* $V_1, V_2, \dots, V_r$ *qui lui correspondent de même que* $Y_1, Y_2, \dots, Y_r$ *correspondaient au système* (1)

Rappelons d'abord comment le système (1) se transforme dans le système (2). Soit $dt$ la valeur commune de ses membres ; nous pouvons l'écrire

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \; . \qquad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Or on a facilement

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = \sum X_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

d'où

$$\text{(3)} \qquad U_i = \sum X_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

les fonctions $U_i$ déterminées par cette relation devant, bien entendu, être exprimées finalement au moyen des variables $u_1$, $u_2$, ..., $u_r$. Je rappelle encore que toute intégrale $\Phi$ de (1) dans laquelle on remplace les $x_i$ par les $u_i$ se transforme en une intégrale de (2).

Considérons en effet l'expression

$$\sum X_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}$$

qui s'annule si $\Phi$ est une intégrale de (1). On a

$$\sum_j X_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = \sum_j X_j \left(\sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$

$$= \sum_j \sum_i X_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = \sum_i U_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}.$$

On voit que l'expression en question est une forme invariante. Si elle est nulle on aura de même

$$\sum_i U_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = 0$$

et $\Phi$ sera encore une intégrale du système (2). (Voir P. Appell. *Traité de Mécanique rationnelle*, t. II, p. 441.)

Considérons maintenant les fonctions adjointes $Y_1$, $Y_2$, ..., $Y_r$. En raisonnant comme ci-dessus nous avons

$$\sum_j Y_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = \sum_j Y_j \left(\sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \sum_j \sum_i Y_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}$$

si bien que si l'on pose

$$(4) \qquad V_i = \sum Y_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

on a l'égalité

$$\sum Y_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = \sum V^i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}.$$

Or si $\Phi$ est une intégrale du système (1), c'est-à-dire une fonction qui reste constante en vertu dudit système d'équations, il en est de même du premier membre de notre dernière égalité et par suite du second, d'où l'on conclut que les fonctions $V_i$ sont des fonctions adjointes du système (2).

En résumé, si le système (1) admet les fonctions adjointes $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ et qu'aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$ on en substitue $r$ nouvelles $u_1, u_2, \ldots, u_r$ le système transformé qui est

$$(2) \qquad \frac{du_1}{U_1} = \frac{du_2}{U_2} = \ldots = \frac{du_r}{U_r}$$

avec

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} U_1 = X_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + X_2 \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \ldots + X_r \dfrac{\partial u_1}{\partial x_r}, \\ U_2 = X_1 \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + X_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \ldots + X_r \dfrac{\partial u_2}{\partial x_r}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_r = X_1 \dfrac{\partial u_r}{\partial x_1} + X_2 \dfrac{\partial u_r}{\partial x_2} + \ldots + X_r \dfrac{\partial u_r}{\partial x_r}, \end{array} \right.$$

admettra les fonctions adjointes

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} V_1 = Y_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + Y_2 \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \ldots + Y_r \dfrac{\partial u_1}{\partial x_r}, \\ V_2 = Y_1 \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + Y_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \ldots + Y_r \dfrac{\partial u_2}{\partial x_r}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_r = Y_1 \dfrac{\partial u_r}{\partial x_1} + Y_2 \dfrac{\partial u_r}{\partial x_2} + \ldots + Y_r \dfrac{\partial u_r}{\partial x_r}. \end{array} \right.$$

On voit que le système (6) ne diffère du système (5) qu'en ce que les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_r$ sont respectivement remplacées par $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ et ceci est très important pour la suite.

**15.** — Des formules du paragraphe précédent découlent deux résultats importants. On peut d'abord prouver que

*Etant donné un système d'équations différentielles tel que* (1), *il y a une infinité de manières de substituer à ses variables* $x_1, x_2, \ldots, x_r$ *de nouvelles variables* $u_1, u_2, \ldots, u_r$ *en nombre égal de telle façon que le système transformé ait une forme donnée à l'avance.*

En effet, dans le système transformé (2), $U_1, U_2, \ldots, U_r$ dépendent des relations (5) où les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_r$ sont connues. Si l'on prend arbitrairement $U_1, U_2, \ldots, U_r$ on a un système de $r$ équations aux dérivées partielles à $r$ fonctions inconnues $u_1, u_2, \ldots, u_r$ qui est de la forme générale (6) du chapitre I.

Ce système définit $u_1, u_2, \ldots, u_r$ avec $r$ fonctions arbitraires.

De même

*Etant donné un système d'équations différentielles tel que* (1) *dont on connaît un système quelconque de fonctions adjointes* $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$, *il y a une infinité de manières de substituer à ses variables* $x_1, x_2, \ldots, x_r$ *de nouvelles variables* $u_1, u_2, \ldots, u_r$ *en nombre égal, de telle façon que le système transformé admette un système de fonctions adjointes données à l'avance.*

Même démonstration que pour la proposition précédente en considérant cette fois les relations (6).

# CHAPITRE V

## ÉQUATIONS CANONIQUES

**16.** — Nous étudierons dans ce chapitre les équations canoniques en les considérant comme des cas particuliers des équations générales étudiées précédemment. On pourra retrouver ainsi toutes les propriétés de ces équations particulières comme cas particuliers de plus générales que nous connaissons maintenant.

Nous énoncerons d'abord le théorème suivant exactement équivalent à celui de Poisson.

**Théorème.** — *Si $\alpha$ est une intégrale du système d'équations canoniques*

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dt}{1} &= \frac{dx_1}{\frac{\partial R}{\partial x_{n+1}}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial R}{\partial x_{n+2}}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial R}{\partial x_{2n}}} \\ &= \frac{dx_{n+1}}{-\frac{\partial R}{\partial x_1}} = \frac{dx_{n+2}}{-\frac{\partial R}{\partial x_2}} = \ldots = \frac{dx_{2n}}{-\frac{\partial R}{\partial x_n}}, \end{aligned}\right.$$

*celui-ci admet un système de fonctions adjointes dégénérées égal à*

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &0, \frac{\partial\alpha}{\partial x_{n+1}}, \frac{\partial\alpha}{\partial x_{n+2}}, \ldots, \frac{\partial\alpha}{\partial x_{2n}}, \\ &-\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}, -\frac{\partial\alpha}{\partial x_2}, \ldots, -\frac{\partial\alpha}{\partial x_n}. \end{aligned}\right.$$

La première de ces fonctions adjointes est nulle. Les autres s'obtiennent en remplaçant simplement R par $\alpha$ dans les dénominateurs des membres du système (1).

Pour plus de simplicité dans la démonstration nous considérerons $t$ comme une variable $x_0$ et le dénominateur 1 de $dt$ comme une fonction $X_0$. De cette façon la symétrie des formules des chapitres précédents ne sera pas altérée. Les fonctions adjointes d'un système satisfont comme on sait aux équations aux dérivées partielles (5) du chapitre I, lesquelles s'écrivent ici

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{i=o}^{i=2n} X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} = \sum_{i=o}^{i=2n} Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i}, \\ &(j = 0, 1, 2, \ldots, 2n). \end{aligned}\right.$$

Comme nous avons $X_0 = 1$ et

$$X_j = \frac{\partial R}{\partial x_{n+j}} \text{ pour } j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$X_j = -\frac{\partial R}{\partial x_{j-n}} \text{ pour } j = n+1, \ldots, 2n$$

les équations en question deviennent

$$(3)\left\{\begin{aligned} &(j = 0, 1, 2, \ldots n), \frac{\partial Y_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial R}{\partial x_{i+n}}\frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - \frac{\partial R}{\partial x_i}\frac{\partial Y_j}{\partial x_{i+n}}\right) \\ &\qquad = Y_0 \frac{\partial^2 R}{\partial x_{n+j}\,\partial t} + \sum_{i=1}^{i=2n} Y_i \frac{\partial^2 R}{\partial x_{n+j}\,\partial x_i}, \\ &(j = n+1, \ldots, 2n), \frac{\partial Y_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial R}{\partial x_{i+n}}\frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - \frac{\partial R}{\partial x_i}\frac{\partial Y_j}{\partial x_{i+n}}\right) \\ &\qquad = -Y_0 \frac{\partial^2 R}{\partial x_{j-n}\,\partial t} - \sum_{i=1}^{i=2n} Y_i \frac{\partial^2 R}{\partial x_{j-n}\,\partial x_i}. \end{aligned}\right.$$

Soit maintenant $\alpha$ une intégrale des équations (1). Nous avons

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial R}{\partial x_{i+n}}-\frac{\partial\alpha}{\partial x_{i+n}}\frac{\partial R}{\partial x_i}\right)=0.$$

Dérivant cette identité par rapport à $x_{j+n}$ et par rapport à $x_{j-n}$, il vient deux autres identités qui peuvent s'écrire

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial t\,\partial x_{j+n}}+\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial R}{\partial x_{i+n}}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_i\,\partial x_{j+n}}-\frac{\partial R}{\partial x_i}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_{i+n}\,\partial x_{j+n}}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_{i+n}}\frac{\partial^2 R}{\partial x_i\,\partial x_{j+n}}-\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial^2 R}{\partial x_{i+n}\,\partial x_{j+n}}\right),$$

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial t\,\partial x_{j-n}}+\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial R}{\partial x_{i+n}}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_i\,\partial x_{j-n}}-\frac{\partial R}{\partial x_i}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_{i+n}\,\partial x_{j-n}}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_{i+n}}\frac{\partial^2 R}{\partial x_i\,\partial x_{j-n}}-\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial^2 R}{\partial x_{i+n}\,\partial x_{j-n}}\right).$$

La première a lieu pour les valeurs 0, 1, 2, ..., $n$ de $j$, la seconde pour les valeurs $n+1$, $n+2$, ..., $2n$ du même indice. Or les équations (3) se réduisent à ces identités, c'est-à-dire sont identiquement vérifiées si l'on pose $Y_0=0$ et

$$Y_j=\frac{\partial\alpha}{\partial x_{j+n}}\quad\text{pour } j=1,2,\ldots,n,$$

$$Y_j=-\frac{\partial\alpha}{\partial x_{j-n}}\quad\text{pour } j=n+1,\ldots,2n.$$

Le théorème est donc démontré.

On en conclut immédiatement que, si $\beta$ est une seconde intégrale des équations canoniques considérées, l'expression

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x_{n+1}}\frac{\partial\beta}{\partial x_1}+\frac{\partial\alpha}{\partial x_{n+2}}\frac{\partial\beta}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial\alpha}{\partial x_{2n}}\frac{\partial\beta}{\partial x_n}$$
$$-\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}\frac{\partial\beta}{\partial x_{n+1}}-\frac{\partial\alpha}{\partial x_2}\frac{\partial\beta}{\partial x_{n+2}}-\ldots-\frac{\partial\alpha}{\partial x_n}\frac{\partial\beta}{\partial x_{2n}}$$

peut en être une autre. Cette expression s'écrit d'une façon abrégée

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x_i}\frac{\partial\alpha}{\partial x_{n+i}}-\frac{\partial\beta}{\partial x_{n+i}}\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\right) \text{ ou } \sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial(\beta,\alpha)}{\partial(x_i, x_{n+i})}.$$

La plupart du temps on la réduit simplement à $(\beta,\alpha)$, d'où son nom de *parenthèse de Poisson*.

**17.** — Ainsi que je l'ai dit dans la préface de ce mémoire ce résultat semble être le seul connu qui dépende de la théorie générale des fonctions adjointes sans avoir pourtant jusqu'ici mis cette théorie générale en évidence.

Les fonctions adjointes (2) du système (1) sont évidemment dégénérées, d'où il faut conclure ce fait constaté depuis longtemps que le théorème de Poisson peut fort bien ne pas donner d'intégrale nouvelle utile, la parenthèse $(\alpha,\beta)$ pouvant être une fonction d'intégrales déjà connues telles que $\alpha$ et $\beta$ ou se réduire identiquement à une constante non nulle ou nulle.

C'est ici l'occasion de rappeler les théorèmes de Joseph Bertrand (*Journal de Mathématiques*, 1852, t. XVII, p. 393. *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique*) (*Œuvres complètes de Lagrange*, *Mécanique analytique*, Note de J. Bertrand).

Ils peuvent se résumer en celui-ci : *Etant donnée une inté-*

*grale* $\alpha$ *d'un système canonique, il en existe toujours* $2n - 1$ *autres* $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2n}$ *telles que les parenthèses*

$$(\alpha, \alpha_2), (\alpha, \alpha_3), \ldots, (\alpha, \alpha_{2n})$$

*soient toutes nulles, exception faite pour une seule qui est égale à* 1.

Ce théorème se démontre immédiatement comme cas particulier du résultat obtenu au paragraphe 7 du chapitre II.

Avec les dérivées partielles de $\alpha$ formons en effet un système de fonctions adjointes ; nous savons que nous pouvons trouver un système complet d'intégrales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$, tel que des formes adjointes $(\alpha, \alpha_1), (\alpha, \alpha_2), \ldots, (\alpha, \alpha_{2n})$ l'une soit égale à 1, toutes les autres étant égales à 0. Pour considérer seulement les $2n$ intégrales d'un système complet, posons par exemple $\alpha_1 = \alpha$. La parenthèse $(\alpha, \alpha)$ étant identiquement nulle et celle qui est égale à 1 étant supposée parmi les autres, le théorème de J. Bertrand est ainsi démontré.

On a rappelé (§ 13) que l'auteur applique son théorème à l'intégration des équations de plusieurs problèmes de dynamique et qu'il lui permet par exemple de trouver une nouvelle intégrale d'équations canoniques dont on n'en connaît qu'une. (Voir *Journal de Mathématiques, loc. cit.*)

**18.** — Il y a une remarque importante à faire sur l'intégrale R que les équations canoniques admettent, comme l'on sait, toutes les fois que ladite fonction R ne contient pas explicitement la variable $t$. L'équation

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + (\alpha, R) = 0$$

est identiquement vérifiée si $\alpha$ est une intégrale quelconque du système (1). Si R en est également une l'expression $(\alpha, R)$ est identiquement égale à

$$-\frac{\partial \alpha}{\partial t}.$$

Ce résultat est bien connu et je ne le rappelle que pour son utilité subséquente. Ce n'est d'ailleurs qu'un cas très particulier du théorème énoncé page 16 dans l'Introduction du présent mémoire. Il fait retrouver cette conclusion due encore à Joseph Bertrand (*loc. cit.*) que si, outre l'intégrale R, on n'en connaît qu'une autre $\alpha$ ne contenant pas la variable $t$ non plus on ne peut jamais conclure de là d'intégrale nouvelle. Il en est de même si l'intégrale $\alpha$ contient $t$ sous la forme linéaire, cette variable étant affectée d'un coefficient constant. (Voir aussi : P. Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. II, p. 420.)

**19.** — D'après le théorème réciproque dont l'étude fait l'objet du chapitre III nous pouvons conclure de la connaissance des fonctions adjointes (2) du système canonique (1) que le nouveau système

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dt}{0}=\frac{dx_1}{\dfrac{\partial\alpha}{\partial x_{n+1}}}=\frac{dx_2}{\dfrac{\partial\alpha}{\partial x_{n+2}}}=\ldots=\frac{dx_n}{\dfrac{\partial\alpha}{\partial x_{2n}}}\\ &=\frac{dx_{n+1}}{-\dfrac{\partial\alpha}{\partial x_1}}=\frac{dx_{n+2}}{-\dfrac{\partial\alpha}{\partial x_2}}=\ldots=\frac{dx_{2n}}{-\dfrac{\partial\alpha}{\partial x_n}},\end{aligned}\right.$$

où $\alpha$ est une intégrale du système (1), admet pour fonctions adjointes

$$(5)\quad 1,\ \frac{\partial R}{\partial x_{n+1}},\ \frac{\partial R}{\partial x_{n+2}},\ldots,\ \frac{\partial R}{\partial x_{2n}},\ -\frac{\partial R}{\partial x_1},\ -\frac{\partial R}{\partial x_2},\ldots,\ -\frac{\partial R}{\partial x_n}$$

si bien que si $\Phi$ est une intégrale de (4) l'expression

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{\partial R}{\partial x_{n+1}}\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial R}{\partial x_{2n}}\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}\\ -\frac{\partial R}{\partial x_1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_{n+1}}-\ldots-\frac{\partial R}{\partial x_n}\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}\end{aligned}$$

ou

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (\Phi, \mathrm{R})$$

peut en être une autre.

Supposons que $\alpha$ ne contienne pas $t$ ce qui permettra de faire abstraction du premier membre $\dfrac{dt}{0}$ du système (4). Nous aurons alors ce théorème :

*Si dans le système d'équations canoniques*

$$\frac{dx_1}{\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial x_{n+1}}} = \frac{dx_2}{\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial x_{n+2}}} = \ldots = \frac{dx_n}{\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial x_{2n}}}$$

$$= \frac{dx_{n+1}}{-\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial x_1}} = \frac{dx_{n+2}}{-\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial x_2}} = \ldots = \frac{dx_{2n}}{-\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial x_n}}$$

*dont* R *est une intégrale, on remplace celle-ci par une autre* S *on forme un nouveau système canonique tel que si* $\Phi$ *en est une intégrale l'expression* $(\Phi, \mathrm{R})$ *peut en être une autre.*

Voici d'abord pour éclaircir les choses une application extrêmement simple. Soit le système d'équations canoniques

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{x'^2 + y'^2}{2}\right), \qquad \frac{dx'}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x'^2 + y'^2}{2}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{x'^2 + y'^2}{2}\right), \qquad \frac{dy'}{dt} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x'^2 + y'^2}{2}\right)$$

qui est celui du mouvement d'un point matériel de masse égale à l'unité dans un plan $y\mathrm{O}x$ en l'absence de forces extérieures. Effectuant les dérivations indiquées et faisant pour le moment abstraction du temps on a simplement les équations

$$\frac{dx}{x'} = \frac{dy}{y'} = \frac{dx'}{0} = \frac{dy'}{0}$$

dont les intégrales sont

$$x',\ y',\ xy' - yx'.$$

Les deux premières indiquent que la vitesse du point est constante, la troisième est l'intégrale des aires. L'intégrale des forces vives $\frac{1}{2}\left(x'^2 + y'^2\right)$ n'est qu'une combinaison des deux premières. Si on la remplace dans les équations primitives par l'intégrale des aires, celles-ci deviennent

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial}{\partial x'}(xy' - yx'), \quad \frac{dx'}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x}(xy' - yx'),$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial}{\partial y'}(xy' - yx'), \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{\partial}{\partial y}(xy' - yx'),$$

ou réductions faites

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dx'}{-y'} = \frac{dy'}{x'}.$$

D'après le théorème énoncé ce système doit être tel que si $\Phi$ en est une intégrale l'expression

$$\left(\Phi, \frac{x'^2 + y'^2}{2}\right) = x' \frac{\partial \Phi}{\partial x} + y' \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

puisse en être une autre. Or on aperçoit immédiatement l'intégrale $x^2 + y^2$ qui substituée à $\Phi$ donne l'intégrale nouvelle $xx' + yy'$. Celle-ci substituée à son tour à $\Phi$ donne la troisième et dernière $x'^2 + y'^2$. L'intégrale $xy' - yx'$ n'est qu'une combinaison des précédentes.

Cette application montre simplement le théorème énoncé comme curieux, le paragraphe suivant va nous le montrer comme utile.

**20.** — Considérons l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(6) \qquad F_1(x_1, x_2 \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$$

qui peut être considérée comme générale bien qu'elle ne contienne pas explicitement la fonction inconnue. On sait en effet que cette dernière peut toujours disparaître par l'emploi d'un procédé d'une extrême simplicité. Pour intégrer l'équation en question nous avons d'abord à intégrer le système canonique

$$(7)\quad \frac{dx_1}{\frac{\partial F_1}{\partial p_1}}=\frac{dx_2}{\frac{\partial F_1}{\partial p_2}}=\dots=\frac{dx_n}{\frac{\partial F_1}{\partial p_n}}=\frac{dp_1}{-\frac{\partial F_1}{\partial x_1}}=\frac{dp_2}{-\frac{\partial F_1}{\partial x_2}}=\dots=\frac{dp_n}{-\frac{\partial F_1}{\partial x_n}}$$

dont $F_1$ est une intégrale. Il y en a évidemment $2n-2$ autres distinctes.

Or les $2n-1$ intégrales ainsi considérées égalées à zéro donnent les équations

$$(8)\quad \begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \dots x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ F_{2n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \end{cases}$$

qui peuvent toutes, comme la première, être considérées comme des équations aux dérivées partielles. Or le système canonique précédent qui correspond à la première équation étant intégré nous savons, ce qui est ici tout à fait remarquable, que les systèmes canoniques

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{\frac{\partial F_i}{\partial p_1}}=\dfrac{dx_2}{\frac{\partial F_i}{\partial p_2}}=\dots=\dfrac{dx_n}{\frac{\partial F_i}{\partial p_n}}=\dfrac{dp_1}{-\frac{\partial F_i}{\partial x_1}}=\dfrac{dp_2}{-\frac{\partial F_i}{\partial x_2}}=\dots=\dfrac{dp_n}{-\frac{\partial F_i}{\partial x_n}} \\ \qquad\qquad (i=2, 3, \dots 2n-1) \end{array} \right.$$

sont tous tels que si $\Phi$ est une intégrale de l'un d'eux, l'expression $(\Phi, F_1)$ peut en être une autre. Connaissant les intégrales (8) du système (7) l'expression la plus générale de toute intégrale de ce système est

$$(9)\qquad F(F_1, F_2, \dots, F_{2n-1}),$$

F désignant une fonction arbitraire. On voit donc que *si l'on sait intégrer le système canonique* (7) *qui correspond à l'équation aux dérivées partielles* (6) *on saura que l'équation aux dérivées partielles* $F = 0$ *est telle que si son système d'équations canoniques caractéristiques admet l'intégrale* $\Phi$, *il admet aussi l'intégrale* $(\Phi, F_1)$. L'équation $F = 0$ dont le premier membre est (9) est évidemment beaucoup plus générale que l'équation primitive $F_1 = 0$.

On pourrait faire des applications intéressantes à la théorie des surfaces. Posons comme à l'ordinaire $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Considérons par exemple l'équation $p^2 + q^2 = \text{const}^e$ qui s'intègre directement d'une façon bien simple et représente une surface dont le plan tangent fait un angle constant avec un plan fixe $yOx$, soit un hélicoïde développable dont l'hélice arête de rebroussement est tracée sur un cylindre quelconque de génératrices perpendiculaires au plan $yOx$.

Si l'on imagine toutefois que l'on écrive le système canonique caractéristique de l'équation aux dérivées partielles en question, on lui trouve immédiatement les trois intégrales distinctes $p$, $q$ et $py - qx$. D'après le théorème précédent nous savons alors que l'équation aux dérivées partielles

$$F(p, q, py - qx) = 0, \tag{10}$$

où F est une fonction arbitraire, est telle que son système caractéristique admet l'intégrale

$$(\Phi, p^2 + q^2) \equiv p \frac{\partial \Phi}{\partial x} + q \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

s'il admet l'intégrale $\Phi$.

On voit que l'on a un résultat remarquable concernant l'équation (10) laquelle comprend des surfaces beaucoup plus générales que celle d'où l'on est parti. Elle contient par exemple toutes les surfaces développables, les surfaces de révolution autour de l'axe $Oz$, etc...

**21.** — Pour terminer nous étudierons l'influence d'un changement de variables sur les fonctions adjointes d'un système canonique.

Supposons que dans un système canonique on substitue aux variables $t, x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ les suivantes $t, u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$, les $x$ étant liés aux $u$ par $2n$ relations où ne figure pas $t$ si bien que dans le système transformé, cette dernière variable aura exactement même signification que dans l'ancien. Pour effectuer la transformation tant dans le système lui-même que dans ses fonctions adjointes il suffit de se servir des formules générales (5) et (6) données au paragraphe 14 du chapitre IV en observant qu'il faut tenir compte d'une variable supplémentaire $x_0 = u_0 = t$ et d'une fonction $X_0 = 1$.

Cette précaution prise, on trouve immédiatement pour le système transformé

$$(1) \qquad \frac{dt}{1} = \frac{du_1}{(u_1, R)} = \frac{du_2}{(u_2, R)} = \ldots = \frac{du_{2n}}{(u_{2n}, R)}$$

et pour ses fonctions adjointes

$$(2) \qquad 0. \ (u_1, \Phi), (u_2, \Phi), \ldots, (u_{2n}, \Phi),$$

si $\Phi$ est une quelconque de ses intégrales. $\Psi$ étant par hypothèse une autre intégrale de (1), l'expression

$$(3) \qquad (u_1, \Phi)\frac{\partial \Psi}{\partial u_1} + (u_2, \Phi)\frac{\partial \Psi}{\partial u_2} + \ldots + (u_{2n}, \Phi)\frac{\partial \Psi}{\partial u_{2n}}$$

peut en être une nouvelle.

Si la fonction R ne contient pas $t$, c'est une intégrale du système primitif et par suite du système transformé (1), mais on ne peut faire jouer à cette intégrale le rôle de $\Phi$ ni celui de $\Psi$, dans la forme (3). Cette forme n'est au fond que la parenthèse $(\Phi, \Psi)$ écrite avec les nouvelles variables et comme les parenthèses $(R, \Psi)$ ou $(\Phi, R)$ sont nulles (§ 18), si les fonctions $\Psi$ ou $\Phi$ ne contiennent pas $t$ il en est de même après un changement de variables. Si l'une des intégrales $\Phi$ ou $\Psi$ contenait $t$ on sait que sa combinaison avec R donnerait comme nouvelle intégrale $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ ou $\frac{\partial\Psi}{\partial t}$. Il en sera encore de même dans le cas de la forme (3), ce résultat n'étant d'ailleurs qu'un cas particulier du théorème énoncé dans l'Introduction de ce mémoire et déjà rappelé au paragraphe 18. Au fond c'est la seule hypothèse de l'inexistence de $t$ dans les dénominateurs du système (1) qui fait que la dérivée partielle par rapport à $t$ de toute intégrale contenant cette variable est aussi une intégrale.

Remarquons enfin que si dans l'expression (3) on intervertit $\Phi$ et $\Psi$, cette expression change simplement de signe. C'est encore une propriété de la forme adjointe $(\Phi, \Psi)$ qui n'est pas altérée par le changement de variables.

Il est essentiel de remarquer que l'on obtient les fonctions adjointes du système (1) en remplaçant simplement R par $\Phi$ dans les dénominateurs qui y figurent. Le théorème du paragraphe 16 peut donc se généraliser de la façon suivante.

**Théorème.** — *Si $\alpha$ est une intégrale du système d'équations canoniques*

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{\frac{\partial R}{\partial x_{n+1}}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial R}{\partial x_{n+2}}} = \cdots = \frac{dx_n}{\frac{\partial R}{\partial x_{2n}}}$$

$$= \frac{dx_{n+1}}{-\frac{\partial R}{\partial x_1}} = \frac{dx_{n+2}}{-\frac{\partial R}{\partial x_2}} = \cdots = \frac{dx_{2n}}{-\frac{\partial R}{\partial x}}$$

*et par suite du système*

$$\frac{dt}{1} = \frac{du_1}{(u_1, R)} = \frac{du_2}{(u_2, R)} = \ldots = \frac{du_n}{(u_n, R)} = \frac{du_{n+1}}{(u_{n+1}, R)} = \ldots = \frac{du_{2n}}{(u_{2n}, R)}$$

*qui résulte de la substitution des variables* $u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$ *aux variables* $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$, *les fonctions adjointes tant du système primitif que du système transformé s'obtiennent par la substitution pure et simple de* $\alpha$ *à* R *dans les dénominateurs figurant dans ceux-ci.*

Bien entendu il s'agit toujours de fonctions adjointes dégénérées.

Vu et approuvé :

*Paris, le 29 avril 1901.*

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :

*Paris, le 29 avril 1901.*

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

GRÉARD.

# DEUXIÈME THÈSE

---

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

**Théorie de la Lune de Delaunay et ses récents perfectionnements**

Vu et approuvé :
*Paris, le 29 avril 1901.*
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
G. DARBOUX

Vu et permis d'imprimer :
*Paris, le 29 avril 1901.*
Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,
GRÉARD.