RÉSUMÉS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

2e RÉSUMÉ.

ÉLÉMENTS D'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE,

PAR

le P. J. DELSAULX

de la Compagnie de Jésus,

Professeur de physique mathématique au Collége de la Paix.

BRUXELLES,

IMPRIMERIE DE CHARLES LELONG,

Rue du Commerce, 25.

1866.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

PRÉFACE VII

NOTIONS PRÉLIMINAIRES 1

CHAPITRE PREMIER.

DE LA RÉFLEXION DE LA LUMIÈRE.

Des miroirs plans. — Sextant 3

Des miroirs sphériques 7

Autre théorie des miroirs sphériques 12

Des caustiques par réflexion 15

Des caustiques secondaires 20

CHAPITRE DEUXIÈME.

DE LA RÉFRACTION DE LA LUMIÈRE.

Réfraction dans les milieux terminés par des surfaces planes. — Théorie générale de la déviation dans les prismes 22

Réfraction dans les milieux terminés par des surfaces sphériques. — Théorie des lentilles. 34

Des caustiques par réfraction 49

Des caustiques secondaires 51

CHAPITRE TROISIÈME.

DE LA DISPERSION DE LA LUMIÈRE.

De l'achromatisme. — Détermination du rapport des coefficients de dispersion. — Diasporamétre 53

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

Pages.

Théorie géométrique de l'arc-en-ciel. — Arc-en-ciel blanc. 58
Du phénomène des halos 68

CHAPITRE QUATRIÈME.

DE L'INTENSITÉ ET DE LA VITESSE DE PROPAGATION DE LA LUMIÈRE.

Intensité de la lumière. — Problèmes divers 71
Des photomètres 78
De la vitesse de propagation de la lumière 81

CHAPITRE CINQUIÈME.

DES INSTRUMENTS AUXILIAIRES DE LA VISION.

Des besicles. 88
Des microscopes 90
Des télescopes réfracteurs. — Oculaires de Ramsden et de Huyghens. 94
Des télescopes réflecteurs 115

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

PRÉFACE.

Ce traité fait suite à celui que nous avons publié dernièrement sur la théorie des phénomènes capillaires.

Voici le but que nous nous sommes proposé en le composant.

Nous avons tâché de réunir en un petit nombre de pages, dans l'intérêt de nos élèves, et pour la plus grande facilité de ceux qui désirent faire de cette partie de la physique mathématique une étude approfondie, toutes les questions que l'on a coutume de comprendre de nos jours sous le nom d'optique géométrique. Nous croyons que ce petit traité est plus complet que tous ceux qu'on a publiés jusqu'ici.

Une grande concision nous était imposée par la forme même de résumés adoptée, dès le principe, pour ces publications. Nous n'avons pas cru y déroger en nous étendant davantage sur les questions qui présentaient plus d'importance ou plus d'intérêt.

Outre les explications théoriques que l'on rencontre dans tous les traités de ce genre, on trouvera dans notre résumé une formule générale fort simple, donnant immédiatement le nombre des images, auxquelles un point lumineux placé entre deux miroirs inclinés l'un sur l'autre peut donner

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

naissance. De plus, on y rencontrera un exposé élémentaire de la théorie des caustiques; une théorie géométrique de l'arc-en-ciel, peu connue, et qui rend parfaitement raison de l'efficacité des rayons émergents parallèles et de l'inefficacité des rayons divergents. Nous avons cru pouvoir en tirer l'explication de l'arc-en-ciel blanc que l'on observe quelquefois sur les brouillards; celle des arcs supplémentaires; ainsi que la raison de l'absence habituelle de tout phénomène irisé, soit sur les brouillards ordinaires, soit sur les nuages sans pluie.

La théorie des lentilles a reçu tous les développements désirables. Certains points plus obscurs de la théorie des lunettes, notamment l'achromatisme, ont été élucidés, et les oculaires de Ramsden et de Huyghens sont traités avec des détails qui dépassent de beaucoup ceux que l'on rencontre généralement dans les ouvrages de physique.

Enfin, nous avons donné plus de rigueur aux principes de la photométrie.

Quant à la vitesse de la lumière, nous avons fait connaître sur ce sujet les belles méthodes de détermination physique de M. Fizeau et de M. Foucault.

Namur, 25 mars 1866.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

ÉLÉMENTS

D'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE.

Nous percevons les objets éloignés par une impression particulière que ces derniers, placés dans des conditions convenables, produisent sur l'organe de la vue.

L'agent immédiat de cette impression s'appelle *lumière*.

L'expérience a fait voir que la lumière se propage en ligne droite dans les milieux homogènes. Au point de vue exclusivement géométrique, la ligne droite ainsi parcourue se nomme *rayon de lumière*.

Quand un faisceau de rayons parallèles tombe sur une lame polie et transparente, il se décompose en plusieurs faisceaux partiels.

Un faisceau de rayons parallèles est réfléchi suivant une direction déterminée ; cette direction varie avec l'obliquité plus ou moins grande de la lumière incidente.

Un deuxième faisceau de rayons parallèles est réfracté suivant une direction également déterminée et qui varie aussi avec la direction du faisceau incident.

Enfin, il y a souvent production de deux faisceaux hémisphériques de rayons divergents, l'un de lumière réfléchie, l'autre de lumière réfractée.

On appelle *lumière réfléchie*, *lumière réfractée* et *lumière*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

diffuse, ces trois portions ou fractions de la lumière incidente.

C'est par la lumière diffuse que le point d'incidence devient visible.

L'*Optique géométrique* a pour objet l'étude des lois qui président à la réflexion, à la réfraction et à la diffusion de la lumière. Ces phénomènes, que leur simplicité rend impropres à la manifestation de la nature de l'agent lumineux, sont par cela même, indépendants de toute théorie sur la constitution de cet agent, et ne relèvent que de la géométrie pure.

L'étude de la diffusion de la lumière est trop peu avancée pour que nous nous en occupions dans ces éléments d'optique géométrique; nous ne parlerons dans ce traité que de la réflexion et de la réfraction.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

CHAPITRE PREMIER.

DE LA RÉFLEXION DE LA LUMIÈRE.

L'angle aigu qu'un rayon incident fait avec la normale à une surface réfléchissante au point d'incidence, s'appelle *angle d'incidence,* et le plan ainsi déterminé se nomme *plan d'incidence.* Les éléments analogues relatifs au rayon réfléchi s'appellent *angle de réflexion* et *plan de réflexion.*

L'expérience a montré que le phénomène de la réflexion de la lumière est soumis aux deux lois suivantes :

1re Loi. Le plan de réflexion coïncide avec le plan d'incidence.

2e Loi. L'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.

Ces deux lois fondamentales appliquées aux miroirs plans et aux mirois sphériques conduisent à un grand nombre de conséquences que nous allons exposer brièvement.

I.

DES MIROIRS PLANS.

1er Théorème. Les rayons émanés d'un point lumineux O et réfléchis régulièrement par un miroir plan, prennent, après la réflexion, des directions telles, que leurs prolongements vont tous concourir en un seul et même point O′, qu'on

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

appelle pour cette raison l'*image virtuelle du point* O. Ce point O′ est le symétrique de O par rapport au plan du miroir.

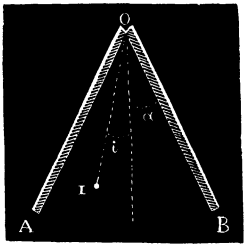
Ce théorème est une conséquence trop immédiate des lois de la réflexion pour qu'il soit besoin de le démontrer.

2e Théorème. Les rayons émanés des divers points d'un objet lumineux forment, derrière le miroir, un système d'images dont le lieu géométrique détermine ce qu'on appelle l'*image virtuelle de l'objet*. Cette image est, par rapport au plan du miroir, la surface symétrique de la portion de la surface de l'objet qui regarde le plan réfléchissant.

Ce théorème est un simple corollaire du théorème précédent.

3e Théorème. Un point lumineux situé entre deux miroirs dont les surfaces réfléchissantes sont inclinées l'une sur l'autre, donne naissance à un nombre limité d'images virtuelles. Ce nombre dépend à la fois de l'angle des miroirs et de la position du point (*).

En effet, représentons par 2α l'angle des miroirs, par i l'angle azimutal que la droite menée du point O au point limineux I fait avec la bissectrice de l'angle des miroirs ;



et convenons d'appeler images du premier ordre celles qui sont formées par une seule réflexio , images du second ordre celles qui sont le produit de deux réflexions, et ainsi de suite.

Les positions des images successives, déterminées par leurs angles azimutaux respectifs, comptés à partir du miroir

(*) De Sénarmont, *Résumé du cours de physique de l'École Polytechnique*, p. 294.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

sur lequel a eu lieu la dernière réflexion, sont consignées dans le tableau suivant :

ORDRE DES IMAGES.	POSITIONS AZIMUTALES DES IMAGES.	
1er ordre.	$\alpha - i$	$\alpha + i$
2e »	$3\alpha + i$	$3\alpha - i$
3e »	$5\alpha - i$	$5\alpha + i$
.....	.....	.....
ne »	$(2n - 1)\alpha \mp i$	$(2n - 1)\alpha \pm i$

L'angle azimutal d'une image ne pouvant être ni égal, ni supérieur à une demi-circonférence, il est évident que si on représente par n' et par n'' les valeurs maxima de n satisfaisant,

la première à l'inégalité

$$(2n - 1)\alpha - i < \pi,$$

la seconde à

$$(2n - 1)\alpha + i < \pi,$$

le nombre des images est déterminé en général par la somme

$$n' + n'',$$

n'' pouvant être égal à n', ou inférieur d'une unité.

Ce résultat justifie notre théorème.

Remarque. Quand n'' est égal à n', il y aura superposition des deux dernières images, si l'on a

$$(2n' - 1)\alpha - i + (2n' - 1)\alpha + i = 2\pi - 2\alpha,$$

ou

$$2n'.2\alpha = 2\pi,$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

ce qui exige que la circonférence soit un multiple pair de l'angle du miroir.

Le nombre des images est alors exprimé par

$$n' + n'' - 1.$$

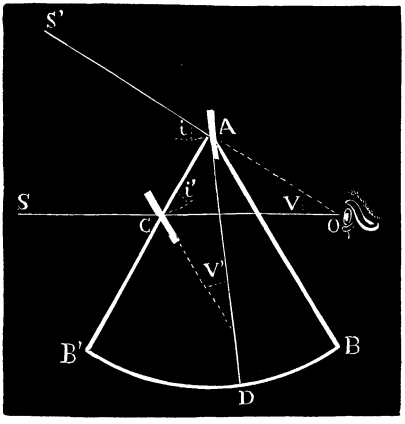
Réciproquement, il y a superposition toutes les fois que l'angle des miroirs est renfermé exactement un nombre pair de fois dans la circonférence ; car on a dans ce cas

$$n' = n'' = k,$$

$2k$ étant ce nombre pair, comme on peut le voir facilement.

Quand n'' est en différence d'une unité avec n', les deux dernières images susceptibles de superposition étant situées, l'une dans l'angle opposé à celui des miroirs et l'autre en dehors, la superposition devient impossible.

Sextant. Hadley fit connaître, en 1731, sous les noms de sextant et d'octant, un instrument fort ingénieux basé sur les lois de la réflexion, et destiné à mesurer en mer les distances angulaires des astres et les hauteurs du soleil au-dessus de l'horizon, nonobstant les plus forts mouvements du navire.



Soient, ABB' un secteur circulaire égal à la sixième ou à la huitième partie du cercle ; C un petit miroir de verre, mi-partie étamé, mi-partie transparent, dont le plan parallèle au rayon AB est fixé perpendiculairement au plan du secteur ; A un petit miroir faisant corps avec l'alidade mobile AD et implanté normale-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

ment sur celle-ci de façon que son plan passe toujours par l'extrémité D.

Pour mesurer, à l'aide de cet instrument, la distance angulaire V de deux points éloignés S et S', on regarde simultanément ces deux points; le point S à travers la partie non étamée du miroir C, et le point S' par double réflexion. Puis on fait mouvoir l'alidade mobile de B en B' jusqu'à ce que le rayon deux fois réfléchi S'ACO coïncide en direction avec le rayon direct SO, ce qui a lieu lorsque les deux points lumineux sont confondus en un seul.

On a, en effet, alors

$$2\,i = 2\,i' + V$$

et

$$\frac{\pi}{2} - i' = V' + \frac{\pi}{2} - i$$

ou

$$i = i' + V';$$

d'où on tire

$$V = 2\,V'.$$

Ce résultat montre que la distance angulaire cherchée est double de l'angle décrit par l'alidade.

II.

DES MIROIRS SPHÉRIQUES.

La ligne qui joint le milieu d'un miroir sphérique au centre de la sphère à laquelle ce miroir appartient, se nomme l'*axe principal* du miroir.

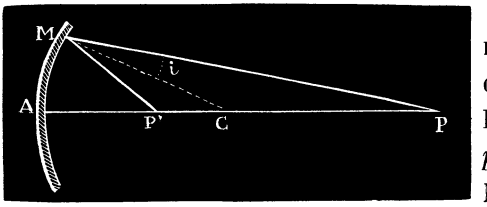
Toute autre ligne passant par le centre de la sphère et aboutissant au miroir s'appelle *axe secondaire*.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

Deux axes secondaires, situés dans un même plan méridien et aboutissant aux extrémités de la surface du miroir, déterminent ce qu'on appelle l'*ouverture du miroir*.

Vu la simplicité plus grande que cette restriction introduit dans les formules, nous ne parlerons dans cet article que des miroirs de petite ouverture.

1er Théorème. Les rayons émanés d'un point lumineux P et réfléchis par un miroir concave, vont tous après la réflexion concourir sensiblement en un seul et même point P′ situé sur l'axe, soit principal, soit secondaire, qui passe par le point lumineux.



En effet, si on représente les distances PA, P′A, CA par p, p', r et les angles MPA, MP′A et MCA par P, P′, C, on a

$$P = C - i \qquad \text{et} \qquad P' = C + i$$

et, par conséquent,

$$P + P' = 2C$$

ou, en remplaçant les angles par les tangentes

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{2}{r}.$$

Or, il est évident que ce résultat est indépendant de la position particulière du point d'incidence.

Le point P′ où les rayons émanés du point P vont converger après avoir été réfléchis par le miroir, s'appelle le *foyer conjugué* de ce point lumineux.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

Le foyer conjugué d'un point lumineux est dit *réel*, lorsque les rayons réfléchis y passent réellement; on l'appelle *virtuel*, lorsqu'il n'est que le point de concours de leurs directions prolongées.

Corollaire 1er. Lorsque les rayons incidents sont parallèles à l'axe, la position du foyer conjugué que l'on désigne alors sous le nom de *foyer principal*, est déterminée par l'équation

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{r}.$$

Cette équation montre que le foyer principal est toujours situé au milieu du rayon.

Corollaire 2e. Toutes les fois que le foyer principal est entre le miroir et le point lumineux P, le foyer conjugué P′ est réel, et l'équation qui détermine la position de ce foyer, est

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}.$$

Corollaire 3e. Toutes les fois que le point lumineux P est situé entre le foyer principal et le miroir, le foyer conjugué P′ est virtuel, et l'équation qui détermine la position de ce foyer, est

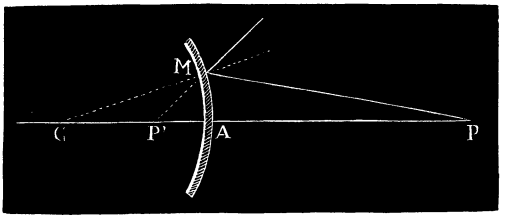
$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}.$$

On démontre cette égalité par un raisonnement analogue à celui qui a été fait plus haut; il est trop simple pour que nous nous y arrêtions.

2e Théorème. Les rayons émanés d'un point lumineux P et réfléchis par un miroir convexe vont tous, après la réflexion, concourir sensiblement en un seul et même point P′ situé sur

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

l'axe, soit principal, soit secondaire, qui passe par le point lumineux.



On a, en effet, en conservant les notations du théorème précédent,

$$P = i - C \qquad \text{et} \qquad P' = i + C,$$

et, par conséquent,

$$P' - P = 2\,C.$$

Par suite, on a

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{2}{r}.$$

Ce résultat est indépendant de la position particulière du point d'incidence.

Corollaire. Dans les miroirs convexes les foyers sont toujours virtuels, et la position du foyer principal y est encore déterminée par l'égalité

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{r};$$

ce qui permet d'écrire l'équation générale qui précède sous la forme

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f}.$$

3e Théorème. L'image d'un objet situé au-delà du centre de la surface sphérique à laquelle appartient un miroir concave est toujours réelle, renversée et plus petite que l'objet.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

Pour établir la dernière partie du théorème, qui seule a besoin d'être démontrée, il suffit de remarquer que l'on a

$$h_i = h_o \frac{r - p'}{p - r},$$

en représentant par h_i et h_o la grandeur de l'image et celle de l'objet.

D'un autre côté, sachant que l'on a

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{p},$$

il est facile de voir que l'on a aussi

$$\frac{r - p'}{p - r} = \frac{p'}{p} = \frac{r}{2p - r} = \frac{r}{r + 2e}$$

en représentant par e l'excentricité de l'objet, c'est-à-dire sa distance au centre du miroir.

On a donc finalement

$$h_i = h_o \frac{r}{r + 2e}.$$

4e Théorème. L'image d'un objet situé entre le centre de la surface sphérique à laquelle appartient un miroir concave et le foyer principal, est toujours réelle, renversée et plus grande que l'objet.

On a, en effet, dans ce cas

$$h_i = h_o \frac{r}{r - 2e},$$

$2e$ étant plus petit que r.

5e Théorème. L'image d'un objet situé entre un miroir concave et le foyer principal, est toujours virtuelle, droite et plus grande que l'objet.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

On a, en effet, alors

$$h_i = h_o \frac{r}{2e - r},$$

$2e$ étant plus grand que r et plus petit que $2r$.

6e Théorème. Dans un miroir convexe l'image d'un objet est toujours virtuelle, droite et plus petite que l'objet.

Car on a, dans ce cas,

$$h_i = h_o \frac{r}{2e - r}.$$

$2e$ étant plus grand que $2r$.

III.

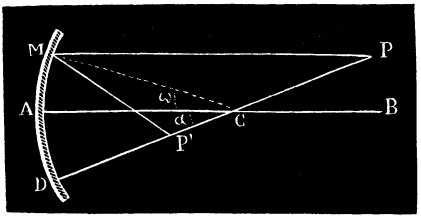
AUTRE THÉORIE DES MIROIRS SPHÉRIQUES.

On peut, ainsi que nous allons le faire dans cet article, envisager la théorie des miroirs sphériques à un point de vue plus rigoureux (*).

1er Théorème. Le point P′, où un rayon émané d'un point lumineux P et réfléchi par un miroir concave va rencontrer l'axe secondaire correspondant, dépend à la fois de la position du point d'incidence et de l'inclinaison de l'axe secondaire sur l'axe principal.

(*) *Nouvelles annales de mathématiques*, t. XIV, p. 156. — P. Desains, *Leçons de physique*, t. II, pp. 172 et suiv.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66



En effet, en conservant les notations déjà adoptées, et en représentant en outre l'angle MCA par ω, l'angle ACD par α et les distances PC et P'C par $\overline{\omega}$ et $\overline{\omega}'$; on a

$$P = C - i \qquad \text{et} \qquad P' = C + i$$

et, par conséquent,

$$\sin P' - \sin P = 2 \sin i \cos C.$$

D'où

$$\frac{\sin P'}{\sin i} - \frac{\sin P}{\sin i} = \cos C$$

et

$$\frac{1}{\overline{\omega}'} - \frac{1}{\overline{\omega}} = \frac{2}{r} \cos C.$$

Remarque. Cette formule est applicable au cas où le point lumineux est situé au-delà du centre C.

Lorsqu'il est situé entre le centre et le miroir, plus près du centre que $\frac{r}{2 \cos C}$, on a

$$\frac{1}{\overline{\omega}} - \frac{1}{\overline{\omega}'} = \frac{2}{r} \cos C.$$

Lorsque le point P' est virtuel, c'est-à-dire lorsque le point lumineux situé entre le centre et le miroir est à une distance du centre plus grande que $\frac{r}{2 \cos C}$, on a

$$\frac{1}{\overline{\omega}} + \frac{1}{\overline{\omega}'} = \frac{2}{r} \cos C.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

Corollaire. Lorsque le miroir concave a une faible ouverture, la position du point P′ ne dépend plus, pour un point lumineux donné, que de l'inclinaison de l'axe secondaire sur l'axe principal.

Les formules précédentes deviennent, en effet, dans ce cas, l'angle ω disparaissant,

$$\frac{1}{\varpi'} - \frac{1}{\varpi} = \frac{2}{r} \cos \alpha$$

$$\frac{1}{\varpi} - \frac{1}{\varpi'} = \frac{2}{r} \cos \alpha$$

$$\frac{1}{\varpi} + \frac{1}{\varpi'} = \frac{2}{r} \cos \alpha.$$

Le point P′ est alors un véritable foyer conjugué.

2e Théorème. Le point P′, où un rayon émané d'un point lumineux P et réfléchi par un miroir convexe va rencontrer l'axe secondaire correspondant, dépend aussi de la position du point d'incidence et de l'inclinaison de l'axe secondaire sur l'axe principal.

On a, en effet, dans ce cas

$$\frac{1}{\varpi} + \frac{1}{\varpi'} = \frac{2}{r} \cos C.$$

Corollaire. L'orsque le miroir est de petite ouverture, on a

$$\frac{1}{\varpi} + \frac{1}{\varpi'} = \frac{2}{r} \cos \alpha,$$

et le point P′ est alors un foyer conjugué véritable mais virtuel.

3e Théorème. Une droite perpendiculaire à l'axe principal d'un miroir de petite ouverture a pour image une autre droite, et cette droite est aussi perpendiculaire à l'axe.

En effet, entre un point quelconque de la droite lumineuse

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

et le foyer conjugué de ce point, on a nécessairement une des trois relations suivantes :

$$\frac{\overline{\omega}'}{\overline{\omega}} = \frac{r}{r + 2\,\overline{\omega}\cos\alpha}$$

$$\frac{\overline{\omega}'}{\overline{\omega}} = \frac{r}{r - 2\,\overline{\omega}\cos\alpha}$$

$$\frac{\overline{\omega}'}{\overline{\omega}} = \frac{r}{2\,\overline{\omega}\cos\alpha - r}$$

Or, ces équations montrent que le rapport $\frac{\overline{\omega}'}{\overline{\omega}}$ est constant pour tous les points de la droite lumineuse; le lieu géométrique de leurs foyers conjugués est donc une droite perpendiculaire à l'axe principal.

Corollaire. En adoptant des notations connues, on a donc aussi suivant le cas, soit

$$h_i = h_o \frac{r}{r + 2e},$$

soit

$$h_i = h_o \frac{r}{r - 2e},$$

soit

$$h_i = h_o \frac{r}{2e - r}.$$

Ces résultats sont les mêmes que ceux que nous avons obtenus précédemment par une autre méthode.

IV.

DES CAUSTIQUES PAR RÉFLEXION.

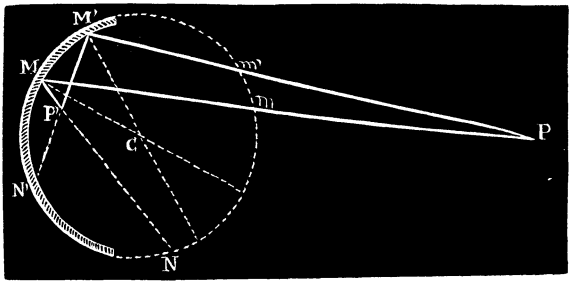
Les rayons émanés d'un point de l'axe d'une surface de révolution et compris dans un même plan méridien, se cou-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

pent généralement deux à deux après la réflexion, et forment ainsi, par leurs intersections successives, une courbe plane qu'on appelle *caustique*. Le lieu géométrique des lignes caustiques est une nouvelle surface de révolution appelée *surface caustique*.

On nomme encore caustique le lieu géométrique des intersections successives des rayons émanés d'un point lumineux et réfléchis par une courbe plane quelconque.

Construction de la caustique dans les miroirs sphériques. Nous allons faire connaître d'abord une méthode très-simple qui permet de construire par points la caustique d'un point lumineux dans les miroirs spériques (*).



Soient, P un point lumineux, PM et PM' deux rayons incidents infiniment voisins, MN et M'N' les rayons réfléchis correspondants, P' leur point de concours, i et $i + \Delta i$ les angles d'incidence aux points M et M'.

On a

$$2\,\Delta i = \frac{NN' + mm'}{2\,r}$$

et

$$\Delta i = \frac{NN' - MM'}{2\,r}.$$

(*) *Correspondance sur l'École impériale polytechnique*, t. II, p. 354.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

Par suite

$$2\,\mathrm{MM'} = \mathrm{NN'} - mm'.$$

Or, en posant $\mathrm{PM} = p$, $\mathrm{P'M} = p'$, $\mathrm{M}m = 4a$, on a par la similitude des triangles infinitésimaux PMM' et Pmm', P'MM' et P'NN',

$$mm' = \mathrm{MM'}\,\frac{p - 4a}{p}$$

et

$$\mathrm{NN'} = \mathrm{MM'}\,\frac{4a - p'}{a'}\ ;$$

de là

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{a}.$$

Dans le cas d'un miroir convexe, on obtiendrait :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{a}.$$

Ces formules permettent de déterminer par une construction géométrique le point où un rayon réfléchi quelconque est tangent à la caustique méridienne.

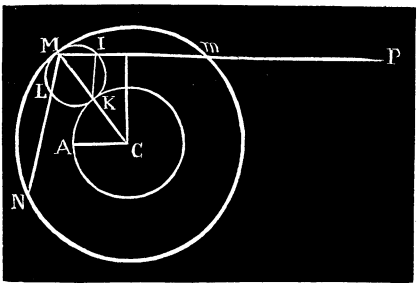
Théorème de l'Hôpital (*). Lorsque le point lumineux est situé à l'infini, c'est-à-dire lorsque le faisceau incident est un faisceau de rayons parallèles, on a par la formule précédente,

$$p' = a,$$

et la caustique, ainsi que le marquis de l'Hôpital l'a montré le premier, est dans ce cas, une épicycloïde.

(*) *Analyse des infiniment petits*, section VI, proposition I, exemple II.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66



Soient, en effet, PM un rayon incident; MN le rayon réfléchi correspondant, K le point milieu du rayon MC, et KI une perpendiculaire abaissée du point K sur le rayon incident.

Décrivons deux circonférences : une du point C comme centre avec un rayon égal à $\frac{r}{2}$, l'autre sur MK comme diamètre.

Il est évident que cette dernière, dont le rayon est égal à $\frac{r}{4}$, passera par le point I et qu'elle déterminera, par son intersection avec le rayon réfléchi MN, le point L où celui-ci est tangent à la caustique méridienne, car on a

$$ML = MI = a.$$

Or, il est facile de voir que l'égalité des angles ACK et KML entraîne celle des arcs AK et KL.

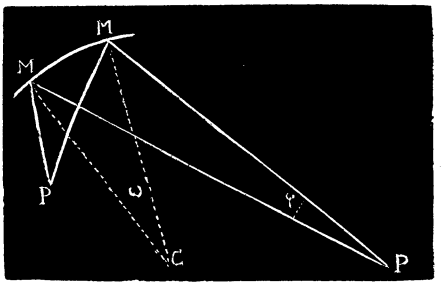
La caustique coïncide donc avec une épicycloïde, savoir, celle que la circonférence, dont le rayon est égal à $\frac{r}{4}$, décrit en roulant sur la circonférence qui a le point C pour centre et $\frac{r}{2}$ pour rayon. Le point L est le point décrivant; à l'origine du mouvement, il coïncide avec le point A.

De la gaustique en général. Nous allons maintenant étendre la construction qui a été donnée plus haut pour les miroirs sphériques, au cas plus général d'une ligne plane réfléchissante et d'un point lumineux situé d'une manière quelconque dans son plan (*).

(*) Serret (Paul), *Des méthodes en géométrie*, p. 76.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

Nous considérerons d'abord une ligne concave.



Outre les notations déjà employées, représentons l'angle MPM′ par φ, l'angle MP′M′ par φ', l'angle MCM′ par ω, le rayon de courbure MC par ρ, et l'arc MM′ par Δs.

Il est facile de voir que l'on a, lorsque le point P′ est réel,

$$\Delta i = \omega - \varphi' = \varphi - \omega,$$

et, par conséquent,

$$\varphi + \varphi' = 2\omega.$$

Mais

$$\varphi = \frac{\Delta s.\cos i}{p}, \qquad \omega = \frac{\Delta s}{\rho}, \qquad \varphi' = \frac{\Delta s.\cos i}{p'};$$

on a donc

$$\cos i\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}\right) = \frac{2}{\rho}.$$

Lorsque le point P′ est virtuel, on a

$$\varphi - \varphi' = 2\omega$$

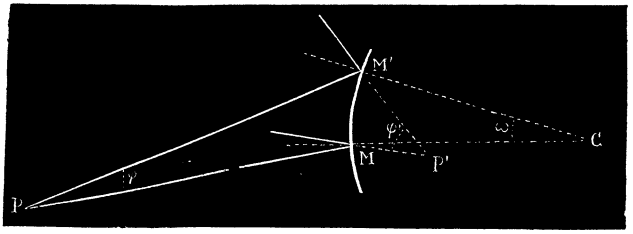
et

$$\cos i\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\right) = \frac{2}{\rho}.$$

Ces formules permettent de déterminer p', quand p, ρ, i sont connus.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

Dans le cas d'une ligne convexe, on a de même



$$\Delta i = \varphi + \omega = \varphi' - \omega$$

et, par suite,

$$\varphi' - \varphi = 2\,\omega.$$

De là,

$$\cos i \left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p}\right) = \frac{2}{\rho}.$$

Cette dernière formule permet également de déterminer p', quand p, ρ, i sont connus.

De la caustique secondaire. M. Quetelet considère les caustiques par réflexion comme des développées. Ces développées ont pour développante la courbe enveloppe formée par les positions successives d'une circonférence variable, dont le centre coïnciderait successivement avec les divers points de la courbe réfléchissante et dont le rayon serait constamment égal à la distance du centre au point lumineux (*).

Il est évident, en effet, que le point de la courbe enveloppe qui correspond au point M de la courbe réfléchissante, n'est pas autre que le point symétrique du point lumineux P par

(*) *Correspondance mathématique et physique*, t. I, p. 14. — Serret Paul, *Des méthodes en géométrie*, p. 78.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

rapport à la tangente à la courbe réfléchissante au point M. Le rayon réfléchi MP′ passe par ce point et y est normal à l'enveloppée correspondante, et par suite, à l'enveloppe; puisque toute normale à l'enveloppée est aussi normale à l'enveloppe au point commun. Le rayon réfléchi est donc en même temps tangent à la caustique et normal à l'enveloppe; la caustique par réflexion peut donc être considérée comme une développée dont cette courbe enveloppe est la développante. M. Quetelet appelle pour cette raison la courbe enveloppe la *caustique secondaire*, et la caustique par réflexion la *caustique principale*.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

CHAPITRE DEUXIÈME.

DE LA RÉFRACTION DE LA LUMIÈRE.

L'angle que le rayon réfracté fait au point d'incidence avec la normale de la surface de séparation des deux milieux s'appelle *angle de réfraction,* et le plan correspondant, *plan de réfraction.*

L'expérience a fait voir que le phénomène de la réfraction ordinaire est soumis aux deux lois suivantes :

1re Loi. Le plan de réfraction coïncide avec le plan d'incidence.

2e Loi. Le rapport du sinus de l'angle d'incidence au sinus de l'angle de réfraction a une valeur constante qui ne dépend, pour un même rayon, que de la nature des milieux.

Lorsque ce rapport constant, qu'on appelle *indice de réfraction,* est plus grand que l'unité, le second milieu est dit plus réfringent que le premier; le contraire à lieu lorsque ce rapport est plus petit que l'unité.

Les deux lois qui précèdent sont appelées *lois de Descartes.*

I.

RÉFRACTION DANS LES MILIEUX TERMINÉS PAR DES SURFACES PLANES.

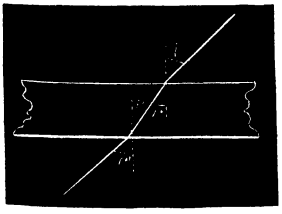
Lorsqu'un rayon lumineux se propage à travers un milieu réfringent à faces parallèles, ou à travers un système de

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

pareils milieux superposés, l'expérience montre que le rayon émergent est parallèle au rayon incident. On remarque, en effet, que l'interposition d'un semblable système entre l'œil et un objet éloigné, une étoile, par exemple, ne déplace pas l'image de cet objet. Toutefois le rayon émergent n'est pas sur le prolongement du rayon incident; la distance de ces deux rayons parallèles dépend à la fois de l'angle d'incidence et de l'épaisseur du milieu traversé, ainsi qu'il est facile de s'en convaincre.

1er Théorème. L'indice de réfraction relatif au passage d'un rayon lumineux du vide dans un milieu transparent étant représenté par n, celui qui correspond au passage du rayon lumineux du milieu dans le vide est nécessairement égal à $\frac{1}{n}$.

On a, en effet,



$$\sin i = n \sin r$$

et

$$\sin i' = x \sin r',$$

et, par conséquent,

$$\sin i . \sin i' = n\, x \sin r . \sin r'.$$

Mais

$$i = r' \qquad \text{et} \qquad r = i';$$

donc

$$nx = 1,$$

et, par suite,

$$x = \frac{1}{n}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

On voit par cette propriété que la coïncidence géométrique de deux rayons de lumière homogène marchant en sens inverse dans un milieu, entraîne la même coïncidence dans le vide adjacent, et réciproquement.

L'indice de réfraction relatif au passage d'un rayon lumineux du vide dans un milieu s'appelle l'*indice principal* de ce milieu.

Corollaire. Dans le passage d'un rayon lumineux d'un milieu transparent dans le vide, on a donc

$$\sin i = \frac{\sin r}{n}.$$

Cette équation montre que le passage est impossible quand on a

$$\sin i > \frac{1}{n} :$$

c'est alors que se produit le phénomène dit de la *réflexion totale.*

L'angle i déterminé par l'équation

$$\sin i = \frac{1}{n}$$

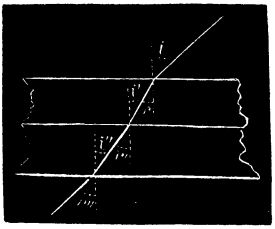
s'appelle l'*angle limite.*

2e Théorème. L'indice de réfraction relatif au passage d'un rayon lumineux d'un premier milieu transparent dans un second milieu, également transparent, est égal au rapport de l'indice principal du second milieu à l'indice principal du premier (*).

(*) De Sénarmont, *Résumé du cours de physique de l'École Polytechnique*, p. 301.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

On a, en effet,



$$\sin i = n_1 \sin r$$

$$\sin i' = x \sin r'$$

$$\sin i'' = \frac{1}{n_2} \sin r'',$$

et, par conséquent,

$$\sin i . \sin i' . \sin i'' = \frac{n_1 x}{n_2} \sin r . \sin r' . \sin r''.$$

Mais

$$i = r'', \qquad r = i', \qquad r' = i'';$$

on a donc

$$\frac{n_1 x}{n_2} = 1,$$

et, partant,

$$x = \frac{n_2}{n_1}.$$

Corollaire. Dans le passage d'un rayon lumineux d'un milieu transparent en un autre milieu transparent, on a donc

$$\sin i = \frac{n_2}{n_1} \sin r.$$

Cette équation montre que le passage est impossible quand on a

$$\sin i > \frac{n_2}{n_1};$$

il y a alors réflexion totale.

Scholie. Un des plus beaux phénomènes atmosphériques, le mirage, est le résultat de la réflexion totale. Pour que ce phénomène se produise, il faut que la densité des couches atmosphériques échauffées par le sol brûlant du désert avec lequel elles sont en contact, croisse rapidement à partir de

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

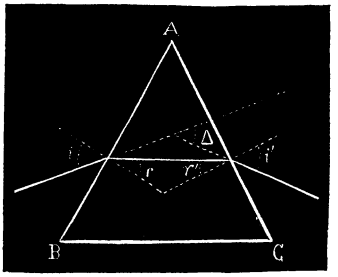
la surface du sol ; alors les rayons lumineux inférieurs émanés de l'objet, venant après une suite continue de réfractions successives, raser les couches atmosphériques les plus basses et partant les plus dilatées, subissent la réflexion totale et arrivent à l'œil de l'observateur comme s'ils émanaient d'un objet identique à celui qui est vu directement, mais inférieur et renversé. Ce phénomène s'observe non-seulement sur terre, mais aussi, dans des circonstances analogues, sur mer et jusque dans les régions polaires.

3e Théorème. Lorsque les faces du milieu réfringent sont inclinées l'une sur l'autre et que la réfraction se fait dans la section droite, c'est-à-dire dans le plan perpendiculaire à l'arête des deux faces, la direction du rayon émergent fait avec celle du rayon incident un angle, appelé *angle de déviation*, dont la valeur est donnée par la formule

$$\Delta = \pm (i + i' - A),$$

i étant l'angle d'incidence, i' l'angle d'émergence et A l'angle des deux faces ou l'angle réfringent du prisme.

On a, en effet, lorsque la masse prismatique est plus réfringente que le milieu ambiant,



$$\Delta = (i - r) + (i' - r')$$

et

$$A = r + r',$$

et, par conséquent,

$$\Delta = i + i' - A.$$

Lorsque le milieu prismatique est moins réfringent que le milieu ambiant, on a,

$$\Delta = A - (i + i').$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

L'angle de déviation est donc une fonction de l'angle i, puisque i' est lié à i par les équations

$$\sin i' = n \sin r'$$
$$A = r + r'$$
$$\sin i = n \sin r.$$

Corollaire. Lorsque le rayon incident tombe normalement sur la face AB d'une masse prismatique plus réfringente que le milieu ambiant, on a

$$i = 0, \qquad r = 0, \qquad r' = A, \qquad i' = arc \sin (n \sin A),$$

et

$$\Delta = arc \sin (n \sin A) - A.$$

Par suite, on a aussi

$$n \sin A = \sin (\Delta + A) ;$$

cette égalité permet de déterminer n quand on connaît Δ et A.

4e Théorème. Dans les circonstances énoncées au théorème précédent, la déviation passe par une valeur *minimum*, lorsque l'angle d'incidence devient égal à l'angle d'émergence.

En effet, pour que la fonction Δ passe par un *minimum*, il suffit que l'on ait simultanément pour une certaine valeur de la variable indépendante

$$\frac{d\Delta}{di} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2\Delta}{di^2} > 0.$$

La première équation de condition, savoir

$$1 + \frac{di'}{di} = 0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

combinée avec les égalités

$$\frac{di'}{di}\cos i' = n\cos r'\frac{dr'}{di}$$

$$\frac{dr'}{di} = -\frac{dr}{di}$$

$$\cos i = n\cos r\frac{dr}{di},$$

devient

$$\frac{\cos i}{\cos i'} = \frac{\cos r}{\cos r'}.$$

La relation exprimée par cette dernière équation entraîne les suivantes :

$$\frac{\cos^2 i}{\cos^2 i'} = \frac{\cos^2 r}{\cos^2 r'} = \frac{1 - n^2\sin^2 r}{1 - n^2\sin^2 r'} = \frac{n^2 - n^2\sin^2 r}{n^2 - n^2\sin^2 r'} = \frac{n^2 - 1}{n^2 - 1} = 1.$$

La première équation de condition exige donc que l'on ait

$$\cos i = \cos i'$$

et partant,

$$i = i'.$$

Quant à la seconde équation de condition, elle demande que l'on ait, pour i égal à i',

$$\frac{d^2 i'}{di^2} \gtrless 0$$

suivant que

$$n \gtrless 1.$$

Or, on a généralement

$$\cos i'\frac{d^2 i'}{di^2} - \sin i'\frac{di'^2}{di^2} = n\cos r'\frac{d^2 r'}{di^2} - n\sin r'\frac{dr'^2}{di^2}$$

$$\frac{d^2 r'}{di^2} = -\frac{d^2 r}{di^2}$$

$$\sin i = n\sin r\frac{dr^2}{di^2} - n\cos r\frac{d^2 r}{di^2}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

Lorsque $i = i'$ et $r = r'$, on a donc

$$\cos i \frac{d^2 i'}{di^2} - \sin i = - n \cos r \frac{d^2 r}{di^2} - n \sin r \frac{dr^2}{di^2}$$

$$\sin i = n \sin r \frac{dr^2}{di^2} - n \cos r \frac{d^2 r}{di^2},$$

et, par suite,

$$\cos i \frac{d^2 i'}{di^2} - 2 \sin i = - 2 n \sin r \frac{dr^2}{di^2} = - 2 \sin i \frac{dr^2}{di^2},$$

ou

$$\frac{d^2 i'}{di^2} = 2\, tg\, i \left(1 - \frac{dr^2}{di^2}\right) = 2\, tg\, i \frac{n^2 \cos^2 r - \cos^2 i}{n^2 \cos^2 r} = 2\, tg\, i \frac{n^2 - 1}{n^2 \cos^2 r}.$$

La seconde équation de condition, qui devient

$$2\, tg\, i \frac{n^2 - 1}{n^2 \cos^2 r} \gtrless 0$$

suivant que

$$n \gtrless 1,$$

est donc satisfaite en même temps que la première, pour

$$i = i' \qquad \text{et} \qquad r = r',$$

c'est-à-dire, par le système des valeurs particulières des angles d'incidence et de réfraction,

$$R = \frac{A}{2}$$

et

$$\sin I = n \sin \frac{A}{2}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

Corollaire. En représentant par Δ_0 la valeur minimum de l'angle de déviation, on a

$$\Delta_0 = 2\,I - A$$

quand n est plus grand que l'unité, et

$$\Delta_0 = A - 2\,I$$

lorsqu'il est plus pet t.

Par suite, on a aussi

$$n = \frac{\sin \frac{A + \Delta_0}{2}}{\sin \frac{A}{2}}.$$

Cette relation fournit un moyen nouveau de déterminer les indices de réfraction.

5e Théorème. Les angles que le rayon incident et le rayon émergent font avec la section droite de part et d'autre de celle-ci, lorsqu'ils ne sont pas compris dans son plan, sont toujours égaux entre eux (*).

En effet, en représentant par P et par P', les angles que les plans d'incidence et d'émergence font avec la section droite ; par p_i, p_r, p_i', et p_r', les angles de projection sur le plan de la section dro te, du rayon incident, des rayons réfractés et du rayon émergent, on a

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\frac{\sin p_i}{\sin P}}{\frac{\sin p_r}{\sin P}} = \frac{\sin p_i}{\sin p_r} = n$$

(*) De Sénarmont, *Résumé du cours de physique de l'École Polytechnique*, p. 493.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

et

$$\frac{\sin i'}{\sin r'} = \frac{\dfrac{\sin p_i'}{\sin P'}}{\dfrac{\sin p_r'}{\sin P'}} = \frac{\sin p_i'}{\sin p_r'} = n.$$

Or, on a

$$p_r = p_r';$$

on a donc aussi

$$p_i = p_i'$$

6e Théorème. Lorsque la distance angulaire du rayon incident au plan de la section droite reste constante, les projections du rayon incident et du rayon réfracté sur le plan de cette section sont soumises à la loi de Descartes (*).

En effet, en conservant les notations adoptées dans le théorème précédent et en représentant en outre par a_i et par a_r les angles azimutaux que les projections du rayon incident et du rayon réfracté sur le plan de la section droite font avec la normale au point d'incidence, on a,

$$\frac{\sin a_i}{\sin a_r} = \frac{\dfrac{tg\, p_i}{tg\, P}}{\dfrac{tg\, p_r}{tg\, P}} = \frac{\sin p_i}{\sin p_r}\,\frac{\cos p_r}{\cos p_i}$$

et, par suite,

$$\frac{\sin a_i}{\sin a_r} = n\,\frac{\cos p_r}{\cos p_i} = n\sqrt{\frac{1-\sin^2 p_r}{\cos^2 p_i}} = \sqrt{n^2 + (n^2-1)\,tg^2 p_r},$$

valeur constante.

(*) De Sénarmont, *Résumé du cours de physique de l'École Polytechnique*, ibid.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

On a également au point d'émergence

$$\frac{\sin a_i'}{\sin a_r'} = \sqrt{n^2 + (n^2 - 1)\, tg^2 p_i}\,.$$

Corollaire 1er. La déviation de la projection du rayon émergent sur le plan de la section droite par rapport à la projection du rayon incident sur le même plan, est donnée par la formule

$$\delta = \pm (a_i + a_i' - A),$$

et le minimum de cette déviation pour une valeur constante de p_i, par l'égalité

$$\sin \frac{A}{2} \sqrt{n^2 + (n^2 - 1)\, tg^2 p_i} = \sin \frac{A \pm \delta_0}{2}.$$

Dans le cas du minimum, a_r étant égal a_r', le rayon réfracté est nécessairement dans un plan normal à la bissectrice de l'angle du prisme.

Corollaire 2e. La déviation δ étant la projection sur le plan de la section droite de la déviation Δ du rayon émergent par rapport au rayon incident, il est facile de voir que l'on a,

$$\cos \frac{\Delta}{2} = \cos \frac{\delta}{2} \cos p_i\,.$$

Cette égalité montre que le minimum de la déviation Δ a lieu en même temps que celui de la déviation δ pour chaque valeur de p_i; il en résulte que la déviation Δ est minimum lorsque le rayon réfracté est perpendiculaire à la bissectrice de l'angle réfringent du prisme.

Cette même égalité fait voir en outre, comme il est facile de s'en convaincre, que le *minimum minimornm* a lieu, lorsque, la condition précédente étant vérifiée, on a de plus p_i

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

égal à o, c'est-à-dire, lorsque le rayon incident et le rayon émergent se trouvent l'un et l'autre dans le plan de la section droite du prisme.

7e Théorème. Un rayon lumineux peut toujours pénétrer dans un prisme plus réfringent que le milieu ambiant ; mais il ne peut pas toujours en sortir, du moins, par la face de l'angle réfringent adjacente à la face d'incidence. Il faut, pour que l'émergence soit possible, que le rayon réfracté soit intérieur à la surface conique qui a le point d'incidence pour sommet, la perpendiculaire abaissée de ce point sur la face d'émergence pour axe, et pour angle au sommet, le double de l'angle limite de la masse prismatique par rapport au milieu ambiant (*).

En effet, tous les rayons réfractés intérieurs à cette surface conique se présenteront nécessairement à la face d'émergence en faisant avec la normale à cette face un angle d'incidence moindre que l'angle limite : ils pourront donc émerger. Les rayons extérieurs, au contraire, rencontreront la face d'émergence en faisant un angle d'incidence plus grand que l'angle limite, et subiront pour cette raison la réflexion totale.

Corollaire. Lorsque l'angle réfringent du prisme est plus grand que le double de l'angle limite, aucun rayon incident ne peut sortir par la face adjacente à la face d'incidence.

En effet, dans ce cas, la surface conique décrite autour de la normale à la face d'entrée au point d'incidence avec l'angle limite, surface qui n'est autre chose que le lieu géométrique des positions extrêmes des rayons réfractés, ne peut pas rencontrer la surface conique dont il s'agit dans le théorème

(*) Desains, *Leçons de physique*, t. II, p. 199.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

précédent; aucun rayon réfracté ne se trouve, par conséquent, dans les conditions requises pour l'émergence.

II.

RÉFRACTION DANS LES MILIEUX TERMINÉS PAR DES SURFACES SPHÉRIQUES.

Nous allons étudier, dans cet article, la réfraction de la lumière dans les masses réfringentes terminées par des zones sphériques à une base et de petite ouverture. Dans ce cas, les angles d'incidence étant généralement fort petits, il nous sera permis de substituer à la loi rigoureuse

$$\sin i = n \sin r,$$

la loi approximative

$$i = nr.$$

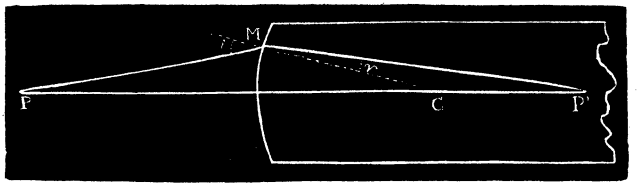
Cette substitution, qui a l'avantage de simplifier beaucoup les calculs, ne nous éloigne pas trop des conditions d'une bonne exécution pratique.

1er Théorème. Lors du passage de la lumière d'un milieu ambiant moins réfringent dans une masse indéfinie plus réfringente terminée par une zone spérique convexe, le foyer conjugué d'un point lumineux est tantôt réel, et tantôt virtuel; il est situé dans les deux cas sur l'axe qui passe par le point lumineux, et sa position sur cet axe est déterminée par la formule

$$\frac{1}{p} \pm \frac{n}{p'} = \frac{n-1}{r}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

On a, en effet, en conservant des notations connues,



$$i = P + C \qquad \text{et} \qquad r = C - P';$$

par suite,

$$P + C = n\,(C - P'),$$

ou

$$P + nP' = (n - 1)\,C,$$

ou encore, en substituant les tangentes aux angles,

$$\frac{1}{p} + \frac{n}{p'} = \frac{n-1}{r}.$$

Cette dernière relation fait voir que tous les rayons émanés du point P, vont rencontrer après la réfraction, l'axe PC au même point P'; elle suppose toutefois que l'on ait

$$\frac{1}{p} < \frac{n-1}{r},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$p > \frac{r}{n-1}.$$

Quand on a

$$p < \frac{r}{n-1},$$

le foyer conjugué P', au lieu d'être réel, devient virtuel, et

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

la relation trouvée se transforme en la suivante :

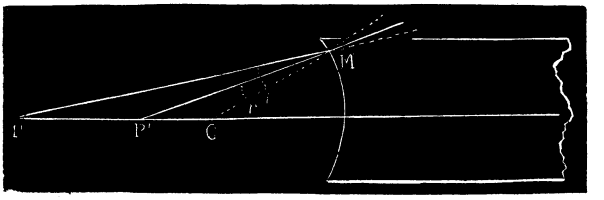
$$\frac{1}{p} - \frac{n}{p'} = \frac{n-1}{r},$$

comme l'examen de ce cas le ferait voir facilement.

2e Théorème. Lors du passage de la lumière d'un milieu ambiant moins réfringent dans une masse indéfinie plus réfringente terminée par une zone sphérique concave, le foyer conjugué d'un point lumineux est toujours virtuel ; il est situé sur l'axe correspondant, et sa position sur cet axe est déterminée par la formule

$$\frac{n}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{n-1}{r}.$$

On a, en effet, dans ce cas



$$i = C - P \qquad \text{et} \qquad r = C - P',$$

et, par conséquent,

$$C - P = n\,(C - P'),$$

ou

$$nP' - P = (n-1)\,C,$$

ou enfin,

$$\frac{n}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{n-1}{r}.$$

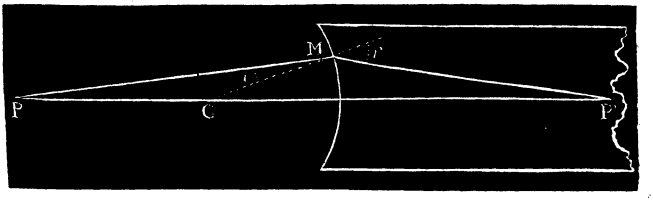
3e Théorème. Lors du passage de la lumière d'un milieu ambiant plus réfringent dans une masse indéfinie moins

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

réfringente terminée par une zone sphérique concave, le foyer conjugué d'un point lumineux est tantôt réel et tantôt virtuel; il est situé dans les deux cas sur l'axe correspondant, et sa position sur cet axe est déterminée par la formule

$$\frac{1}{p} + \frac{n}{p'} = \frac{1-n}{r}.$$

On a, en effet,



$$i = C - P \qquad \text{et} \qquad r = C + P';$$

par suite,

$$C - P = n\,(C + P'),$$

ou

$$P + nP' = (1 - n)\,C,$$

ou enfin,

$$\frac{1}{p} + \frac{n}{p'} = \frac{1-n}{r}.$$

Cette formule suppose toutefois que l'inégalité

$$p > \frac{r}{1-n}$$

soit satisfaite.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

Lorsqu'on a

$$p < \frac{r}{1-n},$$

le foyer conjugué devient virtuel, et la relation précédente se change en la suivante :

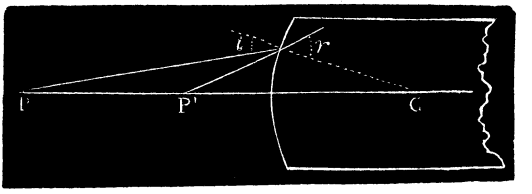
$$\frac{1}{p} - \frac{n}{p'} = \frac{1-n}{r},$$

ainsi qu'il est facile de le voir par l'examen de ce cas.

4e Théorème. Lors du passage de la lumière d'un milieu ambiant plus réfringent dans une masse indéfinie moins réfringente terminée par une zone sphérique convexe, le foyer conjugué d'un point lumineux est toujours virtuel; il est situé sur l'axe correspondant, et sa position sur cet axe est déterminée par la formule

$$\frac{n}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1-n}{r}.$$

Car on a, dans ce cas,



$$i = P + C \qquad \text{et} \qquad r = P' + C,$$

et, par conséquent,

$$P + C = n(P' + C),$$

ou

$$nP' - P = (1-n)C,$$

ou enfin,

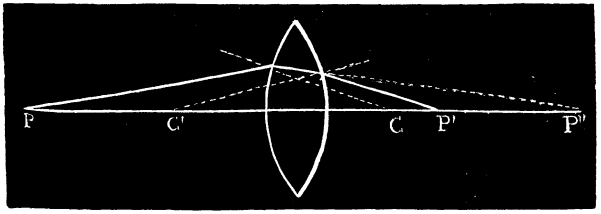
$$\frac{n}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1-n}{r}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

5e Théorème. Lors du passage de la lumière à travers une lentille biconvexe plus réfringente que le milieu ambiant, le foyer conjugué d'un point lumineux placé sur l'axe de figure de la lentille est situé sur le même axe; il est tantôt réel et tantôt virtuel, et sa position sur l'axe est déterminée par la formule

$$\frac{1}{p} \pm \frac{1}{p'} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right).$$

Si on admet, en effet, que l'épaisseur de la lentille soit assez faible pour pouvoir être négligée dans l'estimation des distances, on a, en continuant le système de notations employé jusqu'ici,



$$\frac{1}{p} + \frac{n}{p''} = \frac{n-1}{r},$$

pourvu que la lentille soit située entre les points P et P'', et

$$\frac{1}{p} - \frac{n}{p''} = \frac{n-1}{r}$$

dans le cas contraire.

Lorsque le point P' est réel, on a de plus,

$$\frac{1}{p'} - \frac{n}{p''} = \frac{n-1}{r'},$$

dans le premier cas, et

$$\frac{1}{p'} + \frac{n}{p''} = \frac{n-1}{r'}$$

dans le second.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

La formule qui détermine la position des foyers conjugués réels situés sur l'axe de figure dans les lentilles biconvexes est donc

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=(n-1)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right).$$

Scholie. Lorsque p est infini, les rayons incidents sont parallèles à l'axe de figure, et la position du foyer conjugué, qui prend dans ce cas le nom de *foyer principal*, est déterminée par l'égalité

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right),$$

ce qui permet d'écrire la formule générale sous la forme

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}.$$

Corollaire. Le foyer conjugué est réel, tant que l'on a

$$p>f.$$

Lorsque p est plus petit que f, le foyer conjugué est virtuel et sa position sur l'axe est déterminée par la formule

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}$$

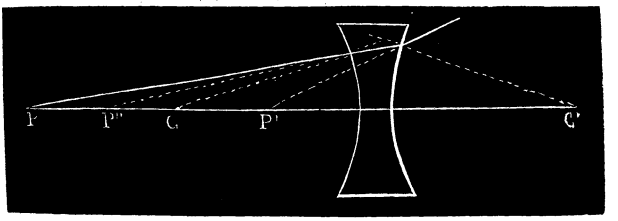
comme il est facile de le voir.

6e Théorème. Dans le passage de la lumière à travers une lentille biconcave plus réfringente que le milieu ambiant, le foyer conjugué d'un point lumineux placé sur l'axe de figure est situé sur le même axe; il est toujours virtuel, et sa position est déterminée par la formule

$$\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}=(n-1)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right).$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

On a, en effet, dans ce cas,



$$\frac{n}{p''} - \frac{1}{p} = \frac{n-1}{r},$$

et

$$\frac{\frac{1}{n}}{p'} - \frac{1}{p''} = \frac{1-\frac{1}{n}}{r'},$$

ou

$$\frac{1}{p'} - \frac{n}{p''} = \frac{n-1}{r'},$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)$$

Scholie. Lorsque p est infini, les rayons incidents sont parallèles à l'axe de figure, et la position du foyer correspondant ou *foyer principal* est donnée par l'égalité

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right);$$

ce qui permet d'écrire la formule générale sous la forme

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f}.$$

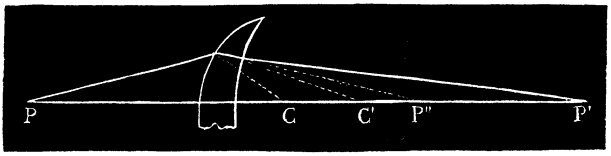
7e Théorème. Lors du passage de la lumière à travers une lentille concave-convexe plus épaisse au centre que sur les

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

bords et plus réfringente que le milieu ambiant, le foyer conjugué d'un point lumineux placé sur l'axe de figure de la lentille est situé sur le même axe; il est tantôt réel et tantôt virtuel, et sa position est déterminée par la formule

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right).$$

On a, en effet,



$$\frac{1}{p} + \frac{n}{p''} = \frac{n-1}{r}$$

et

$$\frac{n}{p''} - \frac{1}{p'} = \frac{n-1}{r'},$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right).$$

Scholie. Le foyer principal est déterminé par la formule

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right),$$

ce qui permet de mettre la relation générale qui précède sous la forme

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}.$$

Corollaire. Lorsque le point P'' est situé du même côté de la lentille que le point lumineux, ou plus généralement, lorsque p est plus petit que f, le point P' est virtuel.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

On a, dans ce cas,

$$\frac{1}{p} + \frac{n}{p''} = \frac{n-1}{r}$$

et

$$\frac{\frac{1}{n}}{p'} + \frac{1}{p''} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{r'},$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)$$

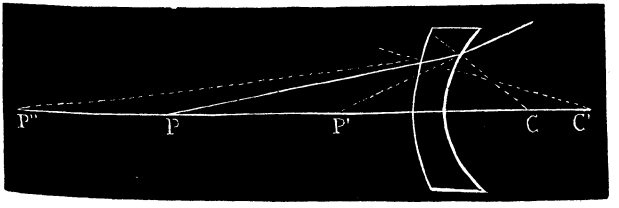
ou

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}.$$

8e Théorème. Lors du passage de la lumière à travers une lentille concave-convexe moins épaisse au centre que sur les bords et plus réfringente que le milieu ambiant, le foyer conjugué d'un point lumineux situé sur l'axe de figure de la lentille se trouve sur le même axe; il est toujours virtuel, et sa position est déterminée par la formule

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right).$$

On a, dans ce cas,



$$\frac{1}{p} - \frac{n}{p''} = \frac{n-1}{r'}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

et

$$\frac{1}{p'} - \frac{n}{p''} = \frac{n-1}{r},$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right).$$

Il peut arriver que le point P″ ne soit pas du même côté de la lentille que le point P; dans ce cas, on a

$$\frac{1}{p} + \frac{n}{p''} = \frac{n-1}{r'},$$

et, par suite,

$$p'' > \frac{n}{n-1} r'.$$

Cette dernière relation fait voir que le point P′ ne peut pas être alors du même côté de la lentille que le point P″, puisque, pour cela, il faudrait que l'on eût

$$\frac{n}{p''} - \frac{1}{p'} = \frac{n-1}{r},$$

et partant

$$p'' < \frac{n}{n-1} r,$$

et, à plus forte raison,

$$p'' < \frac{n}{n-1} r';$$

il faut donc que l'on ait

$$\frac{1}{p'} + \frac{n}{p''} = \frac{n-1}{r},$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right).$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

Scholie. Le foyer principal est déterminé par la formule

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right),$$

ce qui permet d'écrire la relation générale sous la forme

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f}.$$

Remarque générale. On appelle *lentilles convergentes* celles dont le foyer principal est réel, et *lentilles divergentes* celles dont le foyer principal est virtuel.

Les lentilles biconvexes, les lentilles plans-convexes et les lentilles concaves-convexes qui sont plus épaisses au centre que sur les bords, sont des lentilles convergentes. Les lentilles biconcaves, les lentilles plans-concaves et les lentilles concaves-convexes qui sont moins épaisses au centre que sur les bords, sont des lentilles divergentes.

Lemme. Les droites qui joignent deux à deux les points des zones sphériques opposées d'une lentille où les plans tangents sont parallèles, ont un point d'intersection commun situé sur l'axe de figure de la lentille.

En effet, il est évident que le parallélisme des plans tangents entraîne celui des rayons correspondants, et que l'on a, par conséquent, en désignant par A le point où une quelconque de ces droites rencontre l'axe de figure,

$$\frac{CA}{r} = \frac{C'A}{r'} = \frac{CA + C'A}{r + r'} = \frac{C'A - CA}{r' - r}.$$

De là, pour les lentilles biconvexes et pour les lentilles biconcaves,

$$CA = CC' \frac{r}{r + r'},$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

et, pour les lentilles concaves-convexes,

$$CA = CC' \frac{r}{r' - r},$$

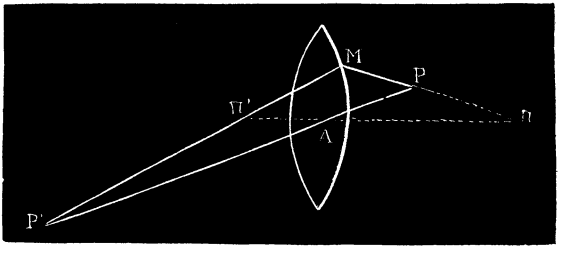
résultats indépendants de la position particulière attribuée à la droite considérée.

Corollaire. Un rayon ne peut sortir d'une lentille, parallèlement à la direction qu'il avait avant d'y entrer, sans passer réellement ou virtuellement par le point A, et réciproquement. Le point A s'appelle le *centre optique* de la lentille.

Scholie. Tous les rayons qui ont passé par le centre optique d'une lentille, ayant, ainsi qu'il vient d'être dit, des directions parallèles à l'incidence et à l'émergence, peuvent être considérés comme se confondant sensiblement en une seule et même ligne droite : il suffit, pour cela, de négliger l'épaisseur de la lentille. A ce point de vue approximatif, un rayon quelconque passant par le centre optique, traverse la lentille sans éprouver de déviation, et constitue ce que nous appellerons un *axe secondaire*.

9e Théorème. Le foyer conjugué d'un point lumineux placé sur un axe secondaire est situé sur le même axe, et sa position sur cet axe est déterminée par les mêmes formules que celles qui déterminent la position des foyers conjugués situés sur l'axe de figure.

En effet :



soient, P le point lumineux, PAP' l'axe secondaire corres-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

pondant; PM un rayon incident, P'M le rayon réfracté dont nous négligeons la déviation à l'intérieur de la lentille.

Les points de rencontre π et π' du rayon incident et du rayon réfracté avec l'axe de figure étant des foyers conjugués, on a,

$$\frac{1}{\varpi} + \frac{1}{\varpi'} = \frac{1}{f} ;$$

d'un autre côté, le théorème de Carnot, appliqué au triangle $\pi M \pi'$ et à la transversale PP', donne

$$A\pi . PM . P'\pi' = \pi P . MP' . \pi' A$$

c'est-à-dire,

$$\varpi p (p' - \varpi') = \varpi' p' (\varpi - p).$$

On a donc

$$\frac{1}{\varpi'} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\varpi}$$

ou

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{\varpi} + \frac{1}{\varpi'}$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f}.$$

Il serait facile d'étendre cette démonstration à tous les autres cas et à une lentille quelconque.

10e Théorème. Les images produites par les lentilles convergentes sont réelles et partant renversées, lorsque l'objet est placé à une distance de la lentille plus grande que la distance focale principale; elles sont plus petites que l'objet lorsque cette distance est en même temps plus grande que le

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

double de la distance focale, et plus grandes que l'objet dans le cas contraire.

On a, en effet,

$$h_i = h_o \frac{p'}{p}$$

et

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f},$$

et, par suite,

$$h_i = h_o \frac{f}{p - f}.$$

11e Théorème. Les images produites par les lentilles convergentes sont virtuelles, droites et plus grandes que l'objet, lorsque ce dernier est placé à une distance de la lentille moindre que la distance focale principale.

Car on a, dans ce cas,

$$h_i = h_o \frac{p'}{p}$$

et

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{f},$$

et, par conséquent,

$$h_i = h_o \frac{f}{f - p}.$$

12e Théorème. Les images produites par les lentilles divergentes sont toujours vituelles, droites et plus petites que l'objet.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

Car on a alors

$$h_i = h_o \frac{p'}{p}$$

et

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f},$$

et, par conséquent,

$$h_i = h_o \frac{f}{f+p}.$$

Remarque. Les théorèmes qui précèdent ne sont applicables qu'aux lentilles dont l'ouverture et l'épaisseur sont très-petites. Les résultats auxquels ils conduisent présentent toutefois au point de vue pratique et dans la plupart des cas une approximation convenable. Biot et Gauss ont traité la théorie des lentilles d'une manière plus complète, le premier dans son *Astronomie physique*, le second dans les *Annales de chimie et de physique*.

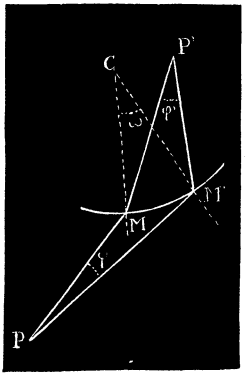
III.

DES CAUSTIQUES PAR RÉFRACTION.

La définition des caustiques par réfraction peut se déduire facilement de celle des caustiques par réflexion donnée au chapitre précédent.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

Construction des caustiques par réfraction (*). Dans le cas d'une masse indéfinie plus réfringente que le milieu ambiant et terminée par une courbe convexe de séparation, on a



$$\Delta i = \varphi + \omega$$

et

$$\Delta r = \omega - \varphi'.$$

On a aussi

$$\varphi = \frac{\Delta s . \cos i}{p}, \quad \omega = \frac{\Delta s}{\rho}, \quad \varphi' = \frac{\Delta s . \cos r}{p'}.$$

Par suite, la relation

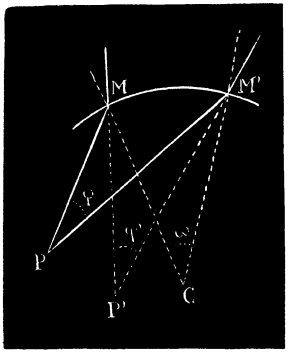
$$\cos i . \Delta i = n \cos r . \Delta r$$

donne

$$\cos i \left(\frac{1}{\rho} + \frac{\cos i}{p}\right) = n \cos r \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\cos r}{p'}\right).$$

Si le point P' est virtuel, cette relation se transforme en la suivante :

$$\cos i \left(\frac{1}{\rho} + \frac{\cos i}{p}\right) = n \cos r \left(\frac{1}{\rho} + \frac{\cos r}{p'}\right).$$



Dans le cas d'une masse indéfinie plus réfringente que le milieu ambiant et terminée par une ligne convave de séparation, on a

$$\Delta i = \varphi - \omega$$

et

$$\Delta r = \varphi' - \omega,$$

et, par conséquent,

$$\cos i \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\cos i}{p}\right) = n \cos r \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\cos r}{p'}\right).$$

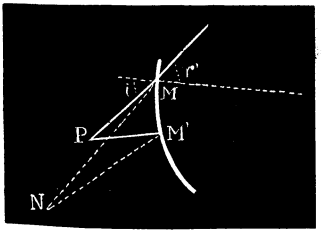
(*) Serret (Paul), *Des méthodes en géométrie*, pp. 76 et 77.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

Ces diverses relations permettent de déterminer p', lorsque p, ρ, i et n sont connus.

Des caustiques secondaires (*). M. Quetelet considère les caustiques par réfraction comme des développées ayant pour développante la courbe enveloppe des positions d'une circonférence variable dont le centre coïnciderait successivement avec les divers points de la courbe de réfraction, et dont le rayon serait constamment à la distance qui sépare le point lumineux du centre de cette circonférence dans le rapport constant de 1 à n.

Il est évident, en effet, que si N est l'intersection des deux circonférences décrites des points M et M' avec les rayons



$$MN = \frac{PM}{n} \quad \text{et} \quad M'N = \frac{PM'}{n},$$

on a,

$$\frac{PM}{MN} = \frac{PM'}{M'N} = \frac{PM - PM'}{MN - M'N} = n.$$

Mais, en représentant par r' l'angle que la droite MN fait avec la normale à la courbe de réfraction au point M, on a aussi,

$$PM - PM' = MM' \sin i \qquad \text{et} \qquad MN - M'N = MM' \sin r';$$

on a donc à la limite

$$\frac{\sin i}{\sin r'} = n$$

et par suite,

$$r' = r.$$

(*) *Correspondance mathématique et physique*, t. I, p. 14.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

Il en résulte que la droite MN normale à l'enveloppe, coïncide en même temps avec le rayon réfracté. Cette propriété constitue précisément le théorème dont il s'agit. M. Quetelet appelle l'enveloppe développante, *caustique secondaire*, et la caustique développée, *caustique principale*.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

CHAPITRE TROISIÈME.

DE LA DISPERSION DE LA LUMIÈRE.

Les phénomènes de coloration produits par les prismes transparents, ont montré depuis longtemps que la lumière blanche du soleil est la superposition d'une infinité de rayons de couleur et de réfrangibilité différentes. Ces rayons passent par des gradations insensibles du rouge-sombre, qui est la teinte la moins réfrangible, c'est-à-dire, celle dont l'indice de réfraction est le plus faible, au violet-pâle dont l'indice de réfraction est le plus fort.

On a distingué dans cette suite de colorations différentes, sept teintes principales, qui sont :

Violet, indigo, bleu, vert, jaune, orangé, rouge.

I.

DE L'ACHROMATISME.

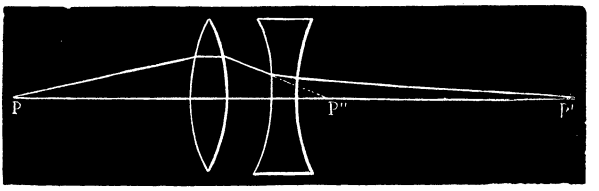
La diversité des indices de réfraction des différentes couleurs dont la lumière solaire est composée, fait que les lentilles ont autant de foyers principaux qu'il y a de teintes. Le foyer principal de la teinte violette est le plus rapproché de la lentille, et celui de la teinte rouge en est le plus éloigné.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

Par suite, une image réelle du soleil sera généralement blanche au centre et irisée sur les bords : elle sera terminée par un anneau de teinte violette, si l'écran sur lequel on la reçoit se trouve dans le voisinage du foyer principal des rayons rouges, et par un anneau de teinte rouge, si l'écran est placé dans le voisinage du foyer des rayons violets. C'est cette irisation des images que l'on a pour but, si pas de faire disparaître entièrement, du moins d'amoindrir autant que possible par l'achromatisme.

Achromatisme des lentilles. En associant deux lentilles très-minces, l'une convergente et l'autre divergente, on peut parvenir très-facilement à faire coïncider les foyers principaux de deux teintes différentes. On choisit d'ordinaire soit les teintes extrêmes, soit les teintes bleu et orangé.

En effet, dans un tel système de lentilles



on a,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p''} = \frac{1}{f}$$

et

$$\frac{1}{p''} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{f'},$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{f'}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

Les foyers conjugués des teintes extrêmes étant déterminés par les égalités

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'_r}=\frac{1}{f_r}-\frac{1}{f'_r}$$

et

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'_v}=\frac{1}{f_v}-\frac{1}{f'_v},$$

la condition d'achromatisme se réduit à

$$\frac{1}{f_v}-\frac{1}{f_r}=\frac{1}{f'_v}-\frac{1}{f'_r}$$

ou

$$(n_v-n_r)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)=(n'_v-n'_r)\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}\right).$$

La différence $(n_v - n_r)$ est ce qu'on nomme le *coefficient de dispersion* d'une substance transparente.

La détermination des coefficients de dispersion $(n_v - n_r)$ et $(n'_v - n'_r)$, se fait assez facilement, si on a égard aux conditions d'achromatisme des prismes à angle réfringent très-petit.

Achromatisme des prismes. Dans un prisme dont l'angle réfringent est très-petit, on a, pour des angles d'incidence et d'émergence de faible ouverture

$$i=nr \qquad \text{et} \qquad i'=nr',$$

et, par conséquent,

$$\Delta=i+i'-(r+r')=(n-1)(r+r')=(n-1)\,A.$$

Dans un système de deux prismes de cette nature, opposés l'un à l'autre, la déviation totale est égale à

$$(n-1)\,A-(n'-1)\,A';$$

de sorte que la condition d'achromatisme, c'est-à-dire la condition nécessaire et suffisante pour que les rayons de deux teintes différentes, des teintes extrêmes, par exemple,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

soient parallèles à l'émergence, est

$$(n_v - n_r)\,A = (n'_v - n'_r)\,A'$$

ou

$$\frac{A}{A'} = \frac{n'_v - n'_r}{n_v - n_r}.$$

Cette condition de l'achromatisme ne fait pas disparaître la déviation, comme le pensait Newton ; car on a pour la déviation totale des rayons rouges

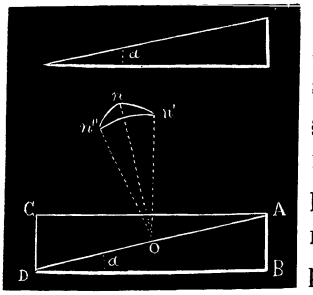
$$A\left\{(n_r - 1) - \frac{n_v - n_r}{n'_v - n'_r}\,(n'_r - 1)\right\}.$$

Cette expression ne devient nulle que dans le cas exceptionnel où

$$\frac{n_v - n_r}{n'_v - n'_r} = \frac{n_r - 1}{n'_r - 1}:$$

hors ce cas, elle conserve pour tous les systèmes de prismes une valeur finie.

Détermination du rapport des coefficients de dispersion. Rochon a imaginé un instrument, appelé *diasporamètre,* à l'aide duquel on peut déterminer très-facilement le rapport des coefficients de dispersion de deux substances transparentes.



Il suffit pour cela de construire un prisme de la première substance dont l'angle réfringent a, soit très-petit, et de former avec la seconde, deux prismes rectangulaires à angles réfringents α, également très-petits, et de plus, égaux entre eux; l'on accole ensuite ces deux prismes l'un a l'autre, en les opposant, de manière à former le parallélipipède ABCD. Cela fait, on regarde un objet quelconque à travers le sys-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

tème du prisme a et du parallélipipède. Cet objet sera nécessairement irisé sur les bords. Si alors, à l'aide d'un mécanisme qu'il est aisé de se figurer, on tourne le prisme ACD, de manière à lui faire décrire autour de la normale On à la face commune AD, un angle de rotation ω, le parallélipipède se changera en un prisme variable dont l'angle réfringent pourra passer d'une manière continue de o à 2α, et l'on ne tardera pas à voir disparaître, pour une position convenable du prisme mobile, toute trace de coloration.

Le prisme a est alors achromatisé et l'on a, entre l'angle réfringent de ce prisme et l'angle réfringent a' du prisme variable, la relation

$$\frac{a}{a'} = \frac{n'_v - n'_r}{n_v - n_r}$$

Pour connaître le rapport des coefficients de dispersion, il suffira donc de déterminer a'; ce qui peut se faire très-facilement.

En effet, On' et On'' étant des normales élevées au point O, la première à la position initiale du plan mobile AC, la seconde à la position finale du même plan, on a dans le triangle sphérique $nn'n''$

$$nOn' = \alpha = nOn'' \qquad \text{et} \qquad n'On'' = a' ;$$

en même temps, le dièdre $n'nn''$ est égal à ω.

Par suite

$$\cos a' = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \cos \omega ,$$

ou

$$1 - \cos a' = \sin^2\alpha\,(1 - \cos \omega) ,$$

ou enfin,

$$\sin \frac{a'}{2} = \sin \alpha \sin \frac{\omega}{2}$$

C'est cette relation qui fera connaître a'.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

II.

THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DE L'ARC-EN-CIEL (*).

Le système des ondes rend seul parfaitement raison de toutes les particularités du phénomène de l'arc-en-ciel. La théorie géométrique que nous allons en donner ici, doit donc être regardée comme une première approximation.

1er THÉORÈME. Un rayon sortant d'une goutte sphérique après y avoir été réfléchi intérieurement, a éprouvé successivement, et toujours dans le même sens, les déviations suivantes :

Une déviation à l'entrée, égale à $(i - r)$; une déviation à chaque réflexion intérieure, égale à $(\pi - 2r)$, et une déviation à la sortie, égale aussi à $(i - r)$.

Cet énoncé n'a pas besoin de démonstration.

COROLLAIRE 1er. La déviation totale est après m réflexions intérieures

$$D_i = m\pi - 2(m+1)r + 2i$$

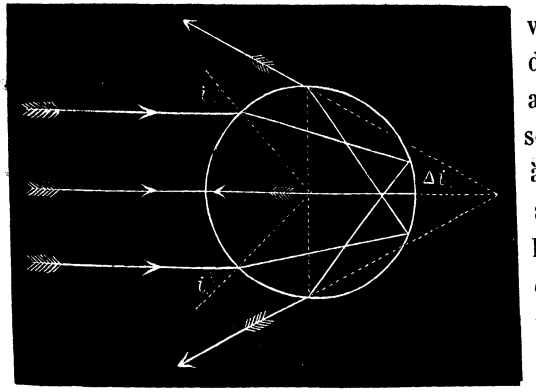
COROLLAIRE 2e. Si on représente par Δ_i la différence $(D_o - D_i)$, c'est-à-dire l'angle formé à la sortie de la goutte, après m réflexions intérieures, par le rayon émergent qui a pénétré sous l'incidence i, et par le rayon émergent qui a pénétré sous l'incidence o, on a

$$\Delta_i = 2(m+1)r - 2i.$$

(*) De Sénarmont, *Résumé du cours de physique de l'École Polytechnique*, pp. 363 et suiv.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

Scholie. Les rayons solaires qui rencontrent une goutte sphérique sous l'incidence i, forment à l'incidence une surface cylindrique, et à l'émergence une surface conique. Ces deux surfaces de révolution ont pour axe commun la droite qui



va du centre de la goutte au centre du soleil. Quant à l'angle au sommet de la surface conique, il peut être aigu, obtus et même plus grand que la circonférence entière. Sa valeur est

$$2\Delta_i,$$

et la distance du sommet au centre de la goutte est représentée par

$$R\frac{\sin i}{\sin \Delta_i}.$$

Cette distance est du même ordre de grandeur que le rayon de la goutte, et peut être négligée. Par suite, on peut considérer le centre de la goutte comme le sommet commun de toutes les surfaces coniques émergentes qui correspondent aux différentes surfaces cylindriques incidentes.

2e Théorème. L'angle Δ_i passe par une valeur *maximum* pour une valeur de l'angle d'incidence comprise entre o et $\frac{\pi}{2}$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

On a, en effet, en égalant la dérivée $\frac{d\Delta_i}{di}$ à o,

$$(m+1)\frac{dr}{di}=1,$$

ou

$$\frac{m+1}{n}\frac{\cos i}{\cos r}=1,$$

et, par conséquent,

$$\frac{\cos^2 i}{n^2}=\frac{\cos^2 r}{(m+1)^2}=\frac{n^2-\sin^2 i}{n^2(m+1)^2}=\frac{n^2-1+\cos^2 i}{n^2(m+1)^2}=\frac{n^2-1}{n^2\{(m+1)^2-1\}}.$$

De là

$$\cos^2 i=\frac{n^2-1}{(m+1)^2-1},$$

et par suite,

$$1+tg^2 i=\frac{(m+1)^2-1}{n^2-1},$$

ou

$$tg^2 i=\frac{(m+1)^2-n^2}{n^2-1}.$$

Pour la valeur de l'angle i qui rend nulle la dérivée de Δ_i, on a

$$(m+1)\,tg\,r=tg\,i\,;$$

on a, partant, dans les mêmes circonstances

$$tg^2 r=\frac{(m+1)^2-n^2}{(m+1)^2(n^2-1)}.$$

Les valeurs de i et de r déterminées par ces équations rendent Δ_i maximum, attendu que la valeur correspondante de la dérivée seconde $\frac{d^2\Delta_i}{di^2}$ est négative.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

Corollaire. Le maximum de Δ_i disparaît, lorsqu'on a, soit

$$m = 0,$$

soit

$$n > m + i.$$

Cette dernière relation aurait lieu pour des sphères de diamant, dans le cas d'une réflexion intérieure, puisque l'indice de réfraction du diamant est 2,44.

Scholie 1er. Le cylindre formé par les rayons solaires qui tombent sur une goutte sphérique, donne naissance à un nombre infini de cônes émergents, de même axe et de même sommet. L'axe commun de ces cônes coïncide avec l'axe du cylindre incident, et leur sommet commun est le centre même de la goutte liquide. Quant à leur ouverture, elle est donnée par le double des valeurs maximum de Δ_i qui correspondent à

$$m = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots,$$

jusqu'à l'infini,

Scholie 2e. Le maximum de Δ_i variant avec n, il en résulte que chacun des cônes émergents dont il est ici question, est à proprement parler, la superposition de sept cônes colorés principaux, de même axe, de même sommet, mais d'ouvertures différentes.

Scholie 3e. Les cônes colorés émergents ont une *densité lumineuse* beaucoup plus considérable à la surface que dans les autres couches, par cela qu'une fonction varie beaucoup moins rapidement dans le voisinage d'un maximum que partout ailleurs.

Lorsqu'on néglige l'absorption de la goutte liquide, ainsi que les diverses réflexions ou réfractions perturbatrices, la

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

densité maximum I est égale à la masse lumineuse incidente, divisée par le produit que l'on obtient en multipliant l'ouverture de la couche conique infinitésimale correspondante par le carré de la distance D de la sphère aqueuse à l'œil de l'observateur.

Or, la masse lumineuse incidente a pour expression

$$\pi R^2 \left\{ \sin^2 (i + di) - \sin^2 (i - di) \right\} \rho.$$

ou

$$4 \pi R^2 \rho \sin i \cos i \, di$$

ou

$$4 \pi R^2 \rho \frac{\sqrt{(n^2 - 1) \left\{ (m + 1)^2 - n^2 \right\}}}{m (m + 2)} di$$

ρ étant la densité de la lumière solaire, dans la région de la goutte et pour la couleur considérée.

De plus, le produit de la distance D par l'ouverture de la couche conique infinitésimale est évidemment égal au diamètre p de la pupille.

On a donc

$$I = \frac{4 \pi R^2 \rho}{p D} \cdot \frac{\sqrt{(n^2 - 1) \left\{ (m + 1)^2 - n^2 \right\}}}{m (m + 2)} di .$$

Dans le phénomène dont il s'agit ici, di est déterminé par la relation

$$p = - D . d\Delta_i = - D (m + 1) \frac{d^2 r}{di^2} di^2.$$

Pour la valeur de i qui rend la fonction Δ_i maximum, on a

$$\frac{d^2 r}{di^2} = \frac{n \sin r \frac{dr^2}{di^2} - \sin i}{n \cos r} = tgr \left(\frac{dr^2}{di^2} - 1 \right)$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

c'est-à-dire

$$\frac{d^2r}{di^2} = -\frac{m(m+2)}{(m+1)^3}\sqrt{\frac{(m+1)^2-n^2}{n^2-1}}.$$

De là

$$p = \mathrm{D}\,\frac{m(m+2)}{(m+1)^2}\sqrt{\frac{(m+1)^2-n^2}{n^2-1}}\,di^2$$

Cette égalité donne l'expression de di et fontion de p et des autres données de la question.

Les valeurs trouvées pour I et di font voir que la densité lumineuse diminue rapidement lorsque le rayon des sphères liquides décroît, ou que le nombre des réflexions intérieures augmente.

Cette remarque rend assez bien compte de l'absence habituelle de l'arc irisé sur les brouillards et sur les nuages sans pluie, où suivant toutes les apparences, les diamètres des gouttes sont d'une ténuité extrême. De plus, elle explique également, pour autant du moins qu'une première approximation du phénomène peut le permettre, l'apparition très-rare d'ailleurs, de l'arc-en-ciel blanc ou faiblement coloré, dans les mêmes circonstances.

3e Théorème. Les valeurs maximum de Δ_i qui correspondent à un même nombre de réflexions intérieures, différentes, comme on vient de le dire, pour les différentes couleurs dont le cylindre incident est composé, vont en diminuant du rouge au violet.

En effet, comme les valeurs de i et de r qui donnent à la fonction Δ_i sa valeur maximum, dépendent pour un même nombre de réflections intérieures, de l'indice de réfraction n, aussi bien que le maximum Δ_m lui même, on a

$$\frac{d\Delta_m}{dn} = 2(m+1)\frac{dr}{dn} - 2\frac{di}{dn}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

Mais on a aussi,

$$\cos i \frac{di}{dn} = \frac{\sin i}{n} + n \cos r \frac{dr}{dn}$$

et

$$(m+1) \cos i = n \cos r ,$$

et par suite,

$$\cos i \left\{ (m+1) \frac{dr}{dn} - \frac{di}{dn} \right\} = - \frac{\sin i}{n} .$$

On a donc finalement

$$\frac{d\Delta_m}{dn} = - \frac{2}{n} tg\, i .$$

dn étant positif quand on passe des rayons rouges aux rayons violets, il en résulte que la variation du maximum Δ_m est négative dans les mêmes circonstances.

Corollaire. On a en nombres

$$n_r = \frac{108}{81}, \qquad n_v = \frac{109}{81}, \qquad \frac{dn}{n} = \frac{1}{108},$$

et par suite,

$$d\Delta_m = - \frac{tg\, i}{54}$$

quand on passe du rouge au violet.

Cette dernière relation permet de construire le tableau suivant, qu'il serait facile d'étendre ultérieurement :

m	i	r	Δ_m	$d\Delta_m$
1	59°,23′	40°,12′	42°,1′	1°,48′
2	71°,53′	45°,27′	129°,2′	3°,14′
3	76°,50′	46°,55′	221°,40′	4°,32′

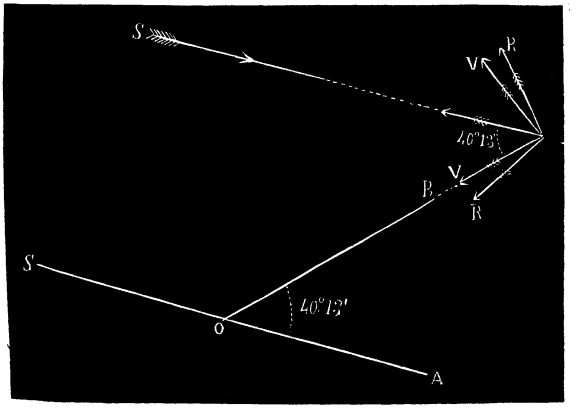
Scholie. Les cônes colorés émergents ayant une densité lumineuse beaucoup plus grande à la surface que partout

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

ailleurs, donnent naissance par leur superposition à un cône émergent blanc au centre et irisé des sept couleurs du spectre à la surface.

4e Théorème. L'arc-en-ciel intérieur est produit par les cônes émergents qui correspondent à une réflexion intérieure, et l'arc-en-ciel extérieur par ceux qui correspondent à deux réflexions.

Tous les cônes émergents rouges, correspondant à une seule réflexion intérieure, ont 42°1′ de demi-ouverture, et les cônes violets 40°13′. Supposons donc que l'on fasse mouvoir autour de la droite SOA, passant par le centre de l'œil de l'observateur et par le centre du soleil, une droite mobile OB assujétie à faire constamment avec la première un angle égal à 40°13′. Il est évident que cette droite rencontrera dans son mouvement toutes les nappes violettes

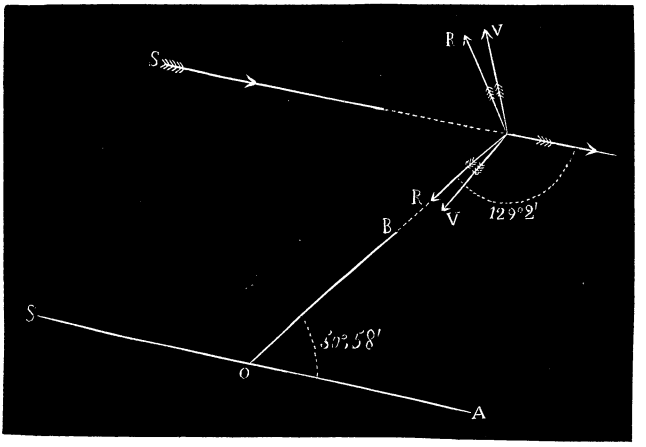


capables d'envoyer quelques rayons de cette teinte dans l'œil de l'observateur.

La droite mobile OB rencontrerait de la même manière les nappes rouges pouvant envoyer à l'œil quelques-uns de

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

leurs pinceaux lumineux, si on la faisait mouvoir autour de la droite OA avec une ouverture angulaire de 42°1′.



Les cônes émergents rouges qui correspondent à deux réflexions intérieures, ont 129° 2′ de demi-ouverture et les cônes violets correspondants, 125° 48′.

Donc, si la droite mobile OB, faisant avec OA un angle constant de (180° — 129°2′), ou 50°58′, se meut autour de cette dernière, elle ira rencontrer dans son mouvement toutes les nappes rouges formées par deux réflexions intérieures et capables d'envoyer à l'œil de l'observateur quelques rayons de cette couleur.

Pour que la droite mobile rencontrât les nappes violettes correspondantes, il faudrait la faire mouvoir autour de OA sous un angle constant égal à (180° — 125°48′), ou 54°12′. Nous pouvons donc considérer comme démontrées les propositions suivantes :

1° Les deux arcs sont circulaires et concentriques ;

2° Le violet est intérieur au premier des deux arcs, et extérieur au second;

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

3° La grandeur angulaire du rayon intérieur est de 40°12′ pour le premier arc, et de 50°58′ pour le second;

4° La largeur du premier arc est de 2°18′, en tenant compte du diamètre du soleil, et celle du second est de 3°44′;

5° La distance des deux arcs est de 8°27′.

L'expérience a vérifié depuis longtemps toutes ces conclusions.

Corollaire. Ces conséquences ne sont pas les seules.

Si la théorie géométrique que nous venons d'exposer est une approximation suffisante de la réalité, il faudra que le rouge extrême tant de l'arc intérieur que de l'arc extérieur soit pur de toute superposition de rayons diversement colorés provenant d'une ou de deux réflexions. Il faudra de plus que la partie du ciel intérieure au premier arc, soit illuminée par de la lumière blanche provenant de la recomposition des rayons des diverses teintes une fois réfléchis; tandis que la partie comprise entre les deux arcs sera éclairée par de la lumière blanche provenant de la recomposition de rayons ayant subi au moins trois réflexions. La première partie du ciel devra donc paraître beaucoup plus éclatante que la seconde. L'expérience a encore confirmé pleinement toutes ces conclusions.

Scholie 1er. Les deux arcs dont nous venons de parler sont les seuls que l'on puisse voir. Le troisième arc, dont la distance au soleil n'est que de 41°40′, se trouve noyé dans la lumière solaire, et les autres sont trop affaiblis par les réflexions successives et par la diminution d'intensité, dont il a été question plus haut, pour être aperçus.

Scholie 2e. Le phénomène de l'arc-en-ciel ne se manifeste pas seulement sur la voûte nuageuse du ciel; parfois il se montre aussi à la surface des champs couverts de gouttes de

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

pluie ou de rosée. Dans ce cas, l'arc se trouve à la fois sur le plan de l'horizon et sur la surface d'un cône; il devient une section conique. Sa forme est elliptique, parabolique ou hyperbolique, suivant que la hauteur du soleil au-dessus de l'horizon est plus grande, égale ou plus petite que le demi-angle au sommet de la surface conique sur laquelle il se trouve.

Remarque. Il nous reste une dernière observation à faire. On aperçoit souvent au dedans de l'arc intérieur et au dehors de l'arc extérieur des bandes colorées alternativement rouges, vertes et violettes. Ces arcs appelés *arcs supplémentaires,* doivent leur origine à l'interférence des rayons de même teinte qui pénètrent dans la goutte en faisant avec la normale, les uns, un angle d'incidence plus grand que l'angle d'incidence de la déviation maximum, les autres, un angle plus petit, et qui sortent néanmoins les uns et les autres dans des directions parallèles, après avoir parcouru dans la sphère liquide des chemins inégaux.

III.

DU PHÉNOMÈNE DES HALOS.

Le *petit halo* ou *halo intérieur* est un cercle concentrique au soleil de 22° à 23° de rayon, et dont les couleurs, fort peu accentuées d'ailleurs, ne sont visibles que vers les bords. Il est rouge-pâle en dedans et bleuâtre, ou même tout-à-fait blanc au dehors. L'intérieur de ce halo a une teinte sombre

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

qui tranche nettement sur le fond plus éclairé de la partie extérieure de l'atmosphère.

Le *grand halo* ou *halo extérieur* ne diffère du petit que par son rayon qui est de 46°.

Formation du petit halo. On peut, avec Mariotte, rattacher la formation du petit halo au passage des rayons solaires à travers les aiguilles prismatiques de glace dont les cirrus sont parfois formés.

En effet, dans la forme prismatique à base d'hexagone régulier qui domine dans les cristaux de glace, deux faces latérales consécutives forment entre elles un angle de 120°; un rayon lumineux qui a pénétré dans le prisme par une face latérale, ne peut donc, dans aucun cas, sortir par la face qui suit immédiatement. Mais deux faces latérales, séparées l'une de l'autre par une troisième, forment entre elles un angle de 60°. La déviation minimum des rayons rouges est donnée, dans un tel prisme, par la formule

$$\sin \frac{\Delta + A}{2} = n \sin \frac{A}{2},$$

où A doit être remplacé par 60°, et l'indice général n, par l'indice de la glace 1,31. Cette déviation est égale à 21°50′2″, ou à très-peu près, à 22°.

Ce résultat fournit l'explication théorique la plus naturelle du petit halo.

La portion de l'atmosphère extérieure au petit halo étant éclairée par de la lumière blanche recomposée, tandis que la partie intérieure n'envoie à l'œil de l'observateur aucune portion de lumière directe réfractée, une obscurité relative doit régner dans la partie centrale. L'observation confirme de tous points ce résultat.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

Formation du grand halo. Cavendish a fait remarquer que les aiguilles prismatiques de glace nettement formées, sont terminées aux deux bases par des faces hexagonales perpendiculaires à la direction des arètes; de sorte que ces aiguilles présentent aux deux bases douze prismes à angle réfringent de 90°. L'angle de déviation minimum pour les rayons rouges, est égal dans ces circonstances à 45°4′, ou à très-peu près, à 46°. C'est donc au passage des rayons solaires à travers ces prismes que l'on doit rattacher la formation du grand halo. Ce halo exigeant pour sa formation une forme régulière assez rare, son apparition sera beaucoup moins fréquente que celle du halo intérieur.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

CHAPITRE QUATRIÈME.

DE L'INTENSITÉ ET DE LA VITESSE DE PROPAGATION DE LA LUMIÈRE.

Nous allons donner dans ce chapitre une indication rapide des procédés aujourd'hui en usage dans la détermination des intensités lumineuses. Nous exposerons également les recherches récentes des physiciens au sujet de la vitesse de propagation de la lumière. Inutile d'ajouter que nous traiterons ces deux questions sans rien préjuger sur la nature de l'agent lumineux : nous n'aborderons cette étude que dans la seconde partie de l'optique, ou *optique physique*.

I.

INTENSITÉ DE LA LUMIÈRE.

1re Définition. La quantité absolue de lumière répandue sur l'élément de surface ω en un point d'un corps lumineux, peut se représenter par $q\omega$, q étant ce qu'on appelle l'*éclat intrinsèque réel* du corps en ce point. L'éclat intrinsèque réel d'un corps lumineux en un point de sa surface, est donc la limite du rapport de la quantité absolue de lumière

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

répandue sur l'élément infinitésimal passant par ce point, à la surface de l'élément.

Corollaire. L'*éclat total réel* d'un corps lumineux ou la quantité absolue de lumière répandue sur sa surface, est égal à la somme des produits des éléments dont cette surface est composée par l'éclat intrinsèque réel qui correspond à chacun d'eux.

Scholie. On mesure l'éclat intrinsèque réel d'un corps lumineux en un point de sa surface, par l'éclairement que ce point lumineux produirait à l'unité de distance sur un élément, tout à la fois parallèle à la surface et normal à la direction du rayon lumineux qu'il reçoit.

2e Définition. On entend par *illumination intrinsèque* d'un corps éclairé, la quantité de lumière reçue en chaque point, et par *illumination totale,* la somme des produits des éléments éclairés par l'illumination intrinsèque qui leur correspond.

1er Théorème. Il suit de là que l'illumination intrinsèque d'un élément exposé normalement à la radiation d'un point lumineux, varie en raison inverse du carré de la distance.

En effet, en représentant par q et par q', les valeurs de l'illumination intrinsèque aux distances r et r', et par s et s', les surfaces sphériques correspondantes, on a

$$qs = q's',$$

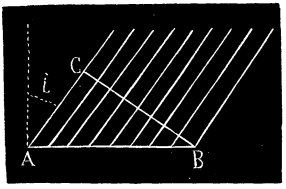
et, par conséquent,

$$\frac{q}{q'} = \frac{s'}{s} = \frac{r'^2}{r^2}.$$

2e Théorème. L'illumination intrinsèque d'un élément éclairé par un faisceau de lumière parallèle, est proportionnelle au cosinus de l'angle d'incidence.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

En effet, si on représente par s la surface AB, par ω la surface BC, par q l'illumination intrinsèque de la surface s, par q' l'illumination intrinsèque de la surface ω, et par i l'angle d'incidence, on a



$$qs = q'\omega = q's \cos i\,,$$

et, par conséquent,

$$q = q' \cos i\,.$$

L'illumination intrinsèque d'une sphère plongée dans un faisceau de rayons parallèles varie donc de o à q', et celle d'un cône éclairé parallèlement à l'axe, est constante.

3e Définition. La quantité absolue de lumière que la radiation d'un élément lumineux émet dans une direction déterminée, s'appelle le *pouvoir émissif* de l'élément dans la direction dont il s'agit.

3e Théorème. Le pouvoir émissif d'un élément lumineux est proportionnel au cosinus de l'angle d'émission.

En effet, l'expérience a montré qu'un boulet chauffé au rouge perd son apparence sphérique et produit la sensation d'une surface plane.

Il résulte de ce fait, qu'en représentant par q le pouvoir émissif de l'élément Δs,

par q' l'éclat intrinsèque constant de la projection lumineuse de la surface sphérique incandescente,

par $\Delta\omega$ la projection lumineuse de l'élément Δs, et par i l'angle d'émission, on a

$$q\,\Delta s = q'\,\Delta\omega = q'\,\Delta s \cos i\,,$$

et par suite,

$$q = q' \cos i\,.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

4e Définition. On entend par *surface de vision*, la surface de la sphère qui a l'œil pour centre et l'unité pour rayon.

5e Définition. La *grandeur apparente* d'un objet est la portion de la surface de vision renfermée dans le cône qui a le contour de l'objet pour base, et l'œil de l'observateur pour sommet.

6e Définition. L'illumination totale et l'illumination intrinsèque de l'image d'un objet sur la rétine, portent plus spécialement le nom d'*éclat total apparent* et d'*éclat intrinsèque apparent* de l'objet.

Corollaire. L'éclat intrinsèque apparent d'un élément lumineux ne diffère en rien, quelle que soit sa direction, de celui qu'aurait la grandeur apparente de cet élément, si elle était élevée au même éclat intrinsèque réel.

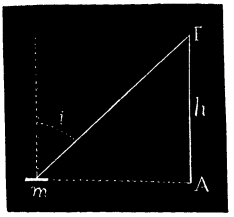
Scholie. Il en résulte que l'éclat intrinsèque apparent d'un élément lumineux est égal à celui que posséderait la portion de la sphère céleste renfermée dans le cône qui détermine la grandeur apparente de cet élément, si cette portion de la voûte céleste était élevée au même éclat intrinsèque réel.

Les problèmes suivants éclaireront ces notions.

1er Problème. Un petit disque horizontal m est éclairé par un foyer lumineux F mobile le long d'une tige verticale dont le pied est fixé à une distance constante du centre du disque. On demande à quelle hauteur il faut placer le foyer lumineux pour produire sur le petit disque le maximum d'éclairement (*).

(*) Cournot, *des Fonctions et du Calcul infinitésimal*, t. I, pp. 162 et suiv.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66



Pour résoudre ce problème dont le côté pratique est évident, représentons la distance constante Am par a, la hauteur variable AF par h, et l'éclat intrinsèque du foyer lumineux par E.

L'illumination intrinsèque du petit disque est égale à

$$E \frac{\cos i}{a^2 + h^2},$$

ou, ce qui est la même chose, à

$$E \frac{h}{(a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Lors du maximum d'éclairement, on aura donc

$$d. \frac{h}{(a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{(a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}} - 3h^2 (a^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2 + h^2)^3} = 0,$$

ou

$$\frac{a^2 - 2h^2}{(a^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} = 0.$$

Les deux racines de cette équation sont :

$$h' = \infty$$

et

$$h'' = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

La première de ces racines correspond à un minimum

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

d'éclairement; la seconde donne le maximum cherché qui est égal à

$$\frac{2}{3\sqrt{3}}\,\frac{E}{a^2}.$$

2e Problème. On demande le degré d'illumination d'un petit disque horizontal éclairé par un luminaire de forme, de grandeur et de position déterminées. On sait que l'éclat intrinsèque réel de ce luminaire est constant (*).

Appelons a l'azimut et z la distance zénithale des points du luminaire.

Il est évident que l'on a pour l'illumination cherchée

$$I = E \iint \sin z . \cos z . dz . da ,$$

les limites de cette intégrale étant celles de la grandeur apparente du luminaire.

Appliquons ceci à quelques exemples.

Exemple 1. On demande le pouvoir éclairant de l'hémisphère céleste d'un lieu.

On a, dans ce cas,

$$I = E \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin z \cos z \, dz \, da$$

ou

$$I = \pi E$$

Exemple 2. On demande le pouvoir éclairant d'une zone sphérique ayant le zénith pour sommet, et un petit cercle de la voûte céleste parallèle à l'horizon pour base.

(*) J. Herschel, *Traité de la lumière*, pp. 26 et suiv.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

On a

$$I = E \int_0^z \int_0^{2\pi} \sin z \cos z \, dz \, da.$$

c'est-à-dire

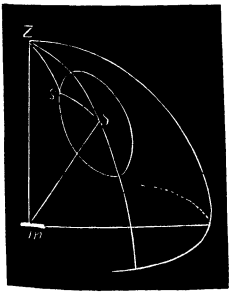
$$I = \frac{\pi}{2} (1 - \cos 2z) E$$

ou

$$I = \pi E \sin^2 z .$$

On peut conclure de là, que le pouvoir éclairant d'une source lumineuse à contour circulaire dont l'éclat intrinsèque réel est constant et dont le zénith occupe le centre, est, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnel au carré du sinus de la moitié de sa grandeur angulaire.

Exemple 3. On demande en général, le pouvoir éclairant d'une portion de la voûte céleste ayant la forme d'une zone sphérique à une base.



Représentons ZS par Z, Zs par z, Ss par x, et l'angle ZSs par θ.

Il est évident que l'on a

$$I = E \iint \sin x \, d\theta . \, dx . \cos z,$$

l'intégrale du second membre étant étendue à toute la zone sphérique.

Mais

$$\cos z = \cos Z \cos x + \sin Z \sin x \cos \theta ;$$

de là :

$$I = E \int_0^{2\pi} \int_0^X (\cos Z \cos x + \sin Z \sin x \cos \theta) \sin x \, d\theta \, dx .$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

En effectuant séparément les intégrations des deux termes, on a

$$\cos Z \int_0^{2\pi}\int_0^{X} \sin x \cos x \, d\theta \, dx = 2\pi \cos Z \int_0^{X} \frac{\sin 2x}{2} \, dx = \pi \cos Z \, \sin^2 X ,$$

et

$$\sin Z \int_0^{2\pi}\int_0^{X} \sin^2 x \cos \theta \, d\theta \, dx = 0 .$$

Par conséquent

$$I = \pi E \cos Z \sin^2 X ,$$

ou, en appelant I_0 le pouvoir éclairant que la zone sphérique posséderait si son centre était au zénith,

$$I = I_0 \cos Z .$$

Ce dernier résultat est fort remarquable.

II.

Photomètres. (*)

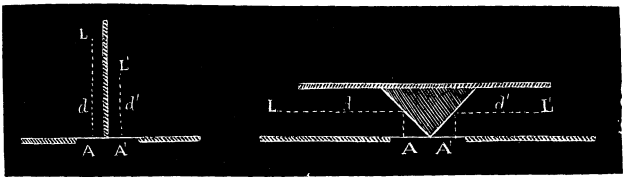
On appelle *photomètres* les instruments destinés à déterminer le rapport des éclats intrinsèques, réels et constants de deux luminaires.

Photomètre de Bouguer. Dans le photomètre de Bouguer on juge de l'égalité des pouvoirs éclairants de deux lumi-

(*) De Sénarmont, *Résumé du cours de Physique*, p. 292.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

naires L et L', par l'égalité d'éclairement de deux petits écrans de papier mince A et A', vus par transparence.



En représentant les grandeurs apparentes des deux luminaires par S et par S', leur éclat intrinsèque par I et par I', leur distance à l'écran par d et d', on a

$$\frac{SI}{d^2} = \frac{S'I'}{d'^2},$$

et par suite,

$$\frac{I}{I'} = \frac{S'}{S}\frac{d^2}{d'^2}.$$

Lorsqu'on ne connaît pas le rapport des grandeurs apparentes des deux luminaires, on interpose entre eux et les écrans photométriques deux écrans opaques percés d'ouvertures égales. Dans ce cas, on a

$$S = S',$$

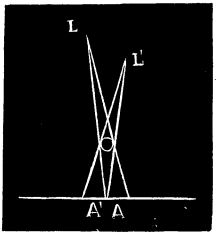
et, par conséquent,

$$\frac{I}{I'} = \frac{d^2}{d'^2}.$$

Photomètre de Rumford. Dans le photomètre de Rumford on juge de l'égalité des pouvoirs éclairants de deux lumières par l'égalité de teinte des ombres qu'une tige cylindrique opaque projette sur un écran translucide. Il faut avoir soin

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

de placer les deux lumières de telle sorte que les ombres portées soient éclairées par des rayons de même incidence de part et d'autre.



Dans ce cas, on a comme précédemment,

$$\frac{I}{I'} = \frac{S'}{S}\frac{d^2}{d'^2},$$

ou, par le moyen d'écrans opaques percés d'ouvertures égales,

$$\frac{I}{I'} = \frac{d^2}{d'^2}.$$

Photomètre de Bunsen. Dans le photomètre de Bunsen, on apprécie l'égalité des pouvoirs éclairants de deux foyers lumineux, au moyen d'un écran de papier homogène rendu translucide en son milieu par une goutte de matière grasse. La feuille de papier est placée entre les deux lumières, de telle sorte, que le centre de la tache et les centres des foyers lumineux soient sur une seule et même ligne droite normale à l'écran, et que les deux faces de la tache soient également éclairées.

Pour juger plus facilement de cette égalité d'éclairement, on fait coïncider l'écran translucide avec le plan bissecteur de l'angle dièdre de deux miroirs inclinés l'un sur l'autre de 90°. De cette manière, on regarde par réflexion dans les miroirs les faces opposées de la tache; ce qui permet de les voir simultanément.

En prenant l'éclat intrinsèque d'une des deux lumières pour unité de mesure, et ayant soin de fixer invariablement celle-ci à la distance a de l'écran translucide, on a pour

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

l'intensité du second luminaire dont la distance à l'écran peut être représentée par $(a + x)$,

$$I = \frac{S'}{S} \frac{(a + x)^2}{a^2} ;$$

ou, en supposant S égal à S', ce qui est toujours possible,

$$I = \left(1 + \frac{x}{a}\right)^2 .$$

La règle divisée de l'instrument porte d'ordinaire deux graduations superposées : l'une donnant les distances, c'est-à-dire les valeurs de $(a + x)$; l'autre faisant connaître les intensités. Les valeurs de I sont placées au-dessous des valeurs de x correspondantes, comptées sur l'échelle des distances.

Remarque. Les photomètres de Bouguer, de Rumford et de Bunsen peuvent être employés très-commodément pour étudier la diminution que le pouvoir éclairant d'une lumière éprouve, lorsque les rayons lumineux sont assujétis à traverser une longueur donnée d'un milieu absorbant, ou, lorsqu'ils sont obligés de se réfléchir sur un miroir de nature déterminée. Le lecteur imaginera facilement pour chaque photomètre un mode d'expérimentation adapté à cette étude.

III.

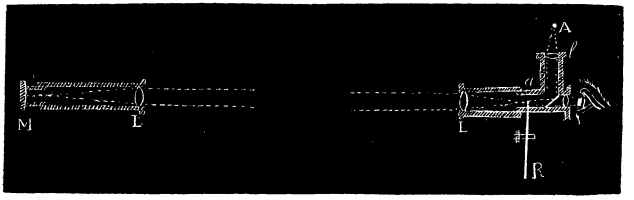
DE LA VITESSE DE PROPAGATION DE LA LUMIÈRE.

On a d'abord déterminé la vitesse de propagation de la lumière par l'observation des phénomènes célestes.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

Nous n'exposerons ici que les deux méthodes de détermination dont les principes ont été exclusivement empruntés à la physique. Nous suivrons dans cette exposition l'ordre des dates.

Méthode de M. Fizeau (*). Pour déterminer la vitesse de propagation de la lumière dans l'air, M. Fizeau a imaginé une méthode susceptible d'une très-grande précision.



Voici en quoi elle consiste :

A est un point lumineux; L, L', *l* sont trois lentilles. M est un miroir plan métallique situé dans le plan focal principal de la lentille L', et *m* un miroir trasparent incliné à 45° sur l'axe de figure du système des lentilles L et L'.

Les rayons émis par le foyer lumineux A et réfractés par la lentille *l*, sont ensuite réfléchis par le miroir transparent *m*, et vont, après cette réflexion, concourir au foyer conjugué *a*. Ce point coïncide avec le foyer principal de la lentille L.

De *a* les rayons se dirigent en divergeant, sur la lentille L qu'ils traversent, et d'où ils sortent en faisceau cylindrique parallèle à l'axe. Réfractés ensuite par la lentille L', puis réfléchis dans le plan focal principal par le miroir métallique M, ils suivent une seconde fois, mais en sens inverse,

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXIX, pp. 90 et suiv.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

le chemin déjà parcouru, et vont former finalement une image du point lumineux A au point de départ *a*. C'est de là, qu'après avoir traversé le miroir transparent *m*, ils pénètrent dans l'œil de l'observateur.

Nous représenterons par D, le trajet de *a* en M.

Une roue dentée à laquelle on peut communiquer un mouvement de rotation plus ou moins rapide est disposée dans le plan focal *a*. Les dents de cette roue sont, de plus, assujéties à passer par le point *a*, de façon à barrer périodiquement le passage, tant aux rayons lumineux qui s'éloignent de ce point, qu'à ceux qui y reviennent.

Cela posé, l'observateur placé derrière le miroir transparent *m* pendant que la roue R est en rotation, voit se produire les phénomènes suivants:

La roue tourne d'abord assez lentement et les apparitions successives du point lumineux produisent une sensation discontinue.

Avec une vitesse un peu plus grande la sensation devient continue.

La vitesse de la rotation continuant à croître, l'intensité lumineuse de la sensation diminue, et enfin, disparaît entièrement. C'est l'instant où la roue se déplace de la grandeur angulaire d'une dent, pendant le temps que la lumière emploie à aller de *a* en M et à revenir de M en *a*, trajet que nous sommes convenus de représenter par 2D.

Mais l'éclipse ne dure qu'un instant; la vitesse de la rotation croît, et l'impression lumineuse se fait de nouveau sentir.

Bientôt l'accélération de la vitesse de rotation produit une deuxième éclipse, suivie immédiatement d'une deuxième réapparition de la lumière; puis une troisième éclipse, et ainsi de suite.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

L'instant de la deuxième éclipse est celui où le mouvement de rotation imprimé à la roue déplace celle-ci de la grandeur angulaire de trois dents, pendant le temps que la lumière met à parcourir la distance 2D. La troisième éclipse a lieu lorsque la roue se déplace pendant le même temps, de la grandeur angulaire de cinq dents, et ainsi de suite. De sorte que l'éclipse de rang n a lieu lorsque le déplacement de la roue est égal à la grandeur angulaire de $(2n - 1)$ dents.

En représentant par $N^{(n)}$ le nombre de tours que la roue exécute en une seconde, à l'époque de la $n^{\text{ième}}$ éclipse, par p le nombre des dents pleines de la roue et par V la vitesse de la lumière, on a donc

$$\frac{1}{N^{(n)}} = \frac{2p}{2n-1} \cdot \frac{2D}{V}$$

et, par suite,

$$\frac{V}{4pD} = \frac{N'}{1} = \frac{N''}{3} = \frac{N'''}{5} \cdots\cdots \qquad = \frac{N^{(n)}}{2n-1}.$$

Ces égalités permettent de déterminer V, en prenant la moyenne d'un grand nombre d'observations.

Dans la détermination faite par M. Fizeau, la distance D était de 8633 mètres; la roue avait 720 dents pleines. La première éclipse eut lieu pour une vitesse de rotation de 12,6 tours par seconde.

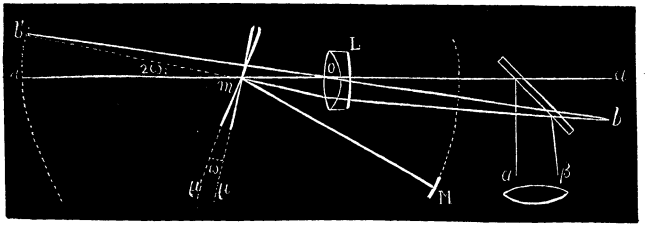
La moyenne de 28 observations donna à ce savant, pour la vitesse de propagation de la lumière, 78800 lieues de 4000 mètres par seconde.

Méthode de M. Foucault *. Le procédé que M. Foucault a

(*) *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XLI, pp. 144 et suiv,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

employé pour déterminer la vitesse de propagation de la lumière est tout différent de celui que nous venons d'exposer.



a est un point lumineux, et *a'* en est le foyer conjugué par rapport à la lentille achromatique L. *m* est un petit miroir plan qui peut tourner avec une très-grande vitesse et qui est placé sur le trajet du faisceau réfracté L*a'*, de manière à le réfléchir. L'image du point *a*, au lieu de se former au foyer conjugué *a'*, va donc se former, à chaque révolution du petit miroir *m*, en un point M de la circonférence décrite du centre de rotation du miroir mobile avec le rayon *ma'*. On a disposé en M un miroir concave, dont le centre de courbure coïncide avec le centre de rotation du petit miroir plan. Ce miroir concave donne naissance par sa réflexion à un faisceau identique, de tous points, au faisceau incident. Ce faisceau réfléchi à son tour par le petit miroir plan, puis réfracté par la lentille L, irait former une image réelle du point lumineux *a* précisément au même point que l'objet, si, pendant que la lumière a fait deux fois le trajet *m*M, le miroir *m* n'avait pas tourné d'un angle ω, et passé ainsi de la position μ à la position μ'. Par cette rotation ω, le faisceau réfléchi dont il est ici question, se trouve, en entrant dans la lentille L, absolument dans les mêmes conditions que s'il émanait du point *b'*, symétrique du point M par rapport à la position μ' du petit miroir plan; il va donc former son image

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

en b, sur l'axe secondaire Ob', à une distance Ob sensiblement égale à Oa.

Pour observer plus commodément les images a et b, on place dans leur voisinage un miroir transparent incliné de 45° sur l'axe aOa'; ce miroir a pour but de rejeter ces images en α et en β, où un micromètre divisé permet d'en mesurer l'écart d.

En représentant les distances Oa, Mm, Om, par r, l et l'; par n, le nombre de tours que le petit miroir tournant fait en une seconde, et par V la vitesse de la lumière, il est facile de voir que l'on a

$$d = a'b' \frac{r}{l + l'},$$

$$a'b' = 2\omega l,$$

$$\omega = 2n\pi \frac{2l}{V},$$

et, par suite,

$$\frac{d(l + l')}{r} = 8n\pi \frac{l^2}{V}.$$

ou

$$V = \frac{8n\pi l^2 r}{d(l + l')}.$$

M. Foucault a pu communiquer au miroir m, à l'aide d'une turbine, une vitesse de rotation de 800 tours à la seconde; et en opérant sur une longueur l égale à 20 mètres, il a trouvé pour la vitesse de la lumière, 74500 lieues de 4000 mètres. Ce savant croit pouvoir affirmer que la correction possible de cette détermination, soit en plus, soit en moins, ne s'élève pas au-dessus de 125 lieues.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

Remarque. Pour déterminer la vitesse de la lumière dans un milieu quelconque, il suffirait d'interposer sur le trajet mM, un cylindre formé par ce milieu et de longueur connue Λ; on opérerait ensuite comme il a été dit.

On aurait alors comme précédemment,

$$d = a'b' \frac{r}{l + l'},$$

$$a'b' = 2\omega l;$$

mais ω serait donné par la formule

$$\omega = 2n\pi \left\{ \frac{2\Lambda}{V'} + \frac{2(l - \Lambda)}{V} \right\}$$

V' étant la vitesse de la lumière dans le nouveau milieu.

On aurait ainsi

$$\frac{(l + l')d}{r} = 8n\pi l \left\{ \frac{\Lambda}{V'} + \frac{l - \Lambda}{V} \right\}$$

relation qui permet de déterminer V' en fonction de V.

M. Foucault a trouvé de la sorte que la lumière se meut plus vite dans l'air que dans l'eau. Ce résultat est inconciliable, comme nous le montrerons dans l'optique physique, avec le système de l'émission.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

CHAPITRE CINQUIÈME.

DES INSTRUMENTS AUXILIAIRES DE LA VISION.

Les instruments dont on se sert pour venir en aide à la vision, peuvent se diviser en trois classes, suivant le triple but de leur emploi.

On peut, en effet, se proposer d'aider à la vision, soit des objets ordinaires, soit des objets très-petits, soit enfin des objets très-éloignés.

I.

DES BESICLES.

Pour que la vision ordinaire soit distincte, il faut que l'image des objets se forme sur la rétine d'une manière très-nette et avec des contours parfaitement accusés. Cette netteté de l'image exige que chaque point géométrique de l'objet ait son foyer conjugué sur la rétine, et y soit ainsi représenté par un point géométrique, et non par une petite surface circulaire qui, empiétant sur les petites surfaces circulaires voisines, produirait une image du point confuse et mal définie.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

L'œil, comme on sait, a la propriété de s'adapter à la distance, mais seulement entre certaines limites; il est démontré aujourd'hui que c'est à la déformation du cristallin qu'il doit cette propriété.

Il y a néanmoins pour chaque œil une distance moyenne où la vision distincte se fait plus naturellement, et qu'on appelle pour cette raison *distance moyenne de la vision distincte*. Cette distance moyenne est pour l'œil normal de 25 à 30 centimètres; pour l'œil myope de 5 à 10 centimètres et pour l'œil presbyte de 50 à 60 centimètres.

Le but des *besicles* est de reporter à la distance moyenne de la vision distincte des myopes ou des presbytes, Δ_m ou Δ_p, l'image d'un objet placé à la distance normale Δ.

Il est nécessaire d'employer, à cet effet, pour les myopes, une lentille divergente qui satisfasse à la relation

$$\frac{1}{\Delta_m} - \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{f},$$

et dont, par suite, la distance focale principale soit donnée par l'égalité

$$f = \Delta \frac{\Delta_m}{\Delta - \Delta_m}.$$

Pour les presbytes, la lentille doit être convergente et satifaire à la relation

$$\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta_p} = \frac{1}{f};$$

ce qui donne pour la distance focale

$$f = \Delta \frac{\Delta_p}{\Delta_p - \Delta}.$$

La distance Δ_m ou Δ_p, se détermine pour chaque individu au moyen des *optomètres*.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

II.

DES MICROSCOPES.

La plupart des objets très-petits, ne peuvent pas être vus à l'œil nu, par la raison que placés à la distance de la vision distincte, ils envoient à l'œil trop peu de lumière, et que la portion de la rétine impressionnée est de trop faible étendue pour pouvoir donner naissance à une sensation nette et distincte.

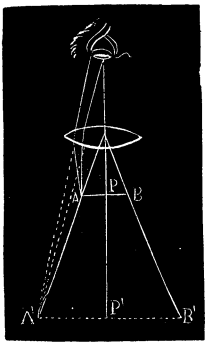
On emploie les *microscopes* pour remédier à ce double inconvénient.

On distingue deux sortes de microscopes : le *microscope simple* et le *microscope composé*.

Nous allons parler successivement de l'un et de l'autre.

Loupe ou microscope simple. Pour augmenter la quantité de lumière reçue par la rétine et agrandir l'image d'un objet très-petit, il suffit évidemment d'approcher l'objet très-près de l'œil. Mais par ce moyen on n'évite un inconvénient que pour tomber dans un autre. La rétine, en effet, n'étant plus située au foyer conjugué de l'objet, l'image formée sur cette membrane est nécessairement confuse et mal terminée. Pour rétablir la netteté de l'image, on interpose une lentille convergente entre l'œil et l'objet, de telle sorte, que l'objet soit à une distance de la lentille moindre que la distance focale principale, et que l'image virtuelle se fasse à peu près à la distance de la vision distincte.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66



En conservant les notations déjà adoptées et en appelant x la distance de l'œil au centre de la lentille, on a pour l'expression du *grossissément*, c'est-à-dire pour la valeur du rapport de la grandeur angulaire sous laquelle on voit l'objet par le moyen de la lentille, à la grandeur angulaire sous laquelle on le verrait à l'œil nu et à la distance de la vision distincte

$$g = \frac{\frac{1}{\Delta}}{\frac{0}{\Delta}} = \frac{1}{0} = \frac{\Delta - x}{p}.$$

Mais, on a aussi

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{\Delta - x} = \frac{1}{f};$$

la valeur du grossissement devient donc

$$g = 1 + \frac{\Delta - x}{f}.$$

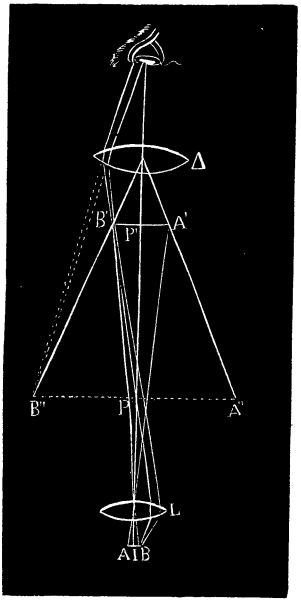
Cette expression montre que le grossissement est d'autant plus grand que la distance focale de la lentille est plus petite, que l'on place l'œil plus près de la lentille et que la distance de la vision distincte de l'observateur est plus grande.

Microscope composé. Le microscope composé, réduit à ses éléments essentiels, est formé de deux lentilles convergentes. Une de ces lentilles est placée en face de l'objet, de manière à donner naissance à une image réelle et agrandie; on l'appelle la *lentille objective*. L'observateur se sert de la

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

seconde, appelée *lentille oculaire,* comme d'une loupe, pour regarder l'image réelle formée par la première.

En employant des notations dont les unes sont déjà connues, et dont les autres parleront assez d'elles-mêmes pour qu'il ne soit pas besoin de les définir, on a pour le grossissement de cet instrument,



$$g = \frac{I''}{O} = \frac{I''}{I'}\frac{I'}{O} = \frac{\Delta}{\omega}\frac{p'}{p}.$$

Mais on a aussi

$$\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\varphi}$$

et

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

et, par conséquent,

$$\frac{\Delta}{\omega} = 1 + \frac{\Delta}{\varphi},$$

et

$$\frac{p}{p'} = \frac{p}{f} - 1.$$

On a donc finalement pour l'expression du grossissement

$$g = \frac{\frac{\Delta}{\varphi} + 1}{\frac{p}{f} - 1}.$$

Cette formule fait voir qu'on peut obtenir, théoriquement parlant, un grossissement quelconque avec deux lentilles convergentes quelconques.

Toutefois, dans la pratique, pour augmenter autant que

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

possible la lumière portée, et partant la *clarté* de l'image, on ne se sert que d'objectifs à court foyer; et pour augmenter le *champ* de l'instrument déterminé par la surface conique qui a le centre optique de l'objectif pour sommet et le contour de l'oculaire pour base, on n'emploie que des oculaires à long foyer.

Notre intention étant d'insister plus spécialement sur la construction des télescopes, nous allons terminer ce rapide exposé de la théorie des microscopes par quelques remarques qui feront mieux ressortir la nature de ces instruments.

1re Remarque. L'image A″B″ est ordinairement confuse vers les bords. La raison en est dans les pinceaux lumineux qui concourent à la formation des points extrêmes de l'image virtuelle. Ces pinceaux, en effet, n'ont traversé la lentille oculaire que dans le voisinage du contour extérieur où les aberrations de sphéricité sont très-prononcées. Pour obvier à cet inconvénient, on place dans le plan focal de l'objectif, un diaphragme qui, en limitant le champ de l'instrument, écarte les pinceaux coniques dont les sommets virtuels seraient trop excentriques.

2e Remarque. Le diaphragme occupe une position invariable par rapport à l'oculaire. Pour mettre au point, on peut déplacer, soit l'objet, soit la lentille oculaire, soit aussi, mais plus rarement, l'ensemble de l'objectif et de l'oculaire.

3e Remarque. Pour déterminer expérimentalement le grossissement de l'instrument, on mesure l'ouverture l du diaphragme, et après avoir placé un micromètre divisé sur le porte-objet, on compte le nombre n des divisions renfermées dans le champ. Il est évident, en effet, que le grossissement g' de l'objectif doit satisfaire à la relation

$$l = ng',$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

et que l'on doit avoir par suite, d étant la distance du diaphragme à l'oculaire,

$$g = g' \frac{\Delta}{d} = \frac{l}{n} \frac{\Delta}{d}.$$

4e Remarque. L'objectif des microscopes est un objectif composé. Il est formé de plusieurs lentilles achromatiques placées bout-à-bout et à de très-petites distances l'une de l'autre. Des calculs trop longs pour trouver place ici, ont montré que l'on peut obtenir par cette disposition un minimum d'aberration de sphéricité et de réfrangibilité.

5e Remarque. L'oculaire des microscopes est également un oculaire composé. Il ne diffère pas de ceux qu'on applique aux lunettes télescopiques. Comme nous devons entrer plus bas dans quelques développements au sujet de ces oculaires, nous n'en dirons rien ici.

III.

DES TÉLESCOPES RÉFRACTEURS.

Les télescopes ont pour objet d'aider à la vision des objets éloignés. Il y a deux sortes de télescopes, les *télescopes réfracteurs* appelés aussi *lunettes télescopiques*, et les *télescopes réflecteurs* ou *télescopes* proprement dits. Nous traiterons successivement des uns et des autres.

La lunette télescopique se compose essentiellement de deux lentilles ou systèmes de lentilles : un objectif achroma-

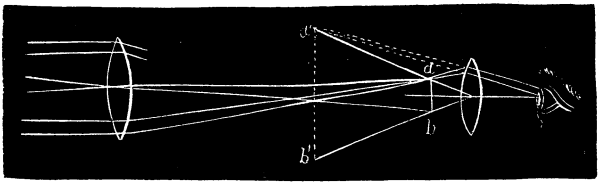
Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

tique de grande ouverture et de long foyer pour réunir beaucoup de lumière, et un oculaire.

L'oculaire de la lunette télescopique peut être simple ou composé, positif ou négatif. L'oculaire est *simple*, lorsqu'il n'est formé que d'une seule lentille; il est *composé*, lorsqu'il est formé par un assemblage de plusieurs lentilles. Lorsque l'oculaire ne s'oppose pas à la formation de l'image réelle de la lentille objective, il est dit *positif;* dans le cas contraire on l'appelle oculaire *négatif*. Nous parlerons d'abord de la lunette télescopique à oculaire simple et positif.

Lunette télescopique a oculaire simple et positif (*). Dans cette lunette, l'oculaire fait l'office de loupe, et l'image réelle de l'objectif remplace l'objet.

En représentant par F la distance focale de l'objectif, et par f celle de l'oculaire, on a évidemment pour le grossissement de l'instrument



$$g = \frac{\frac{I'}{\Delta}}{\frac{I}{F}} = \frac{F}{\Delta}\,\frac{I'}{I},$$

ou, en remplaçant le grossissement de la loupe par la valeur que nous lui avons trouvée,

$$g = \frac{F}{\Delta}\left(1 + \frac{\Delta - x}{f}\right) = \frac{F}{f}\left(1 + \frac{f - x}{\Delta}\right).$$

(*) De Sénarmont, *Résumé du cours de physique de l'École Polytechnique*, pp. 329 et suiv.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

L'œil doit être placé au point où les faisceaux extrêmes émanés de l'objet viennent se croiser derrière l'oculaire. Ce point coïncide avec le foyer conjugué du centre optique de l'objectif, par rapport à la lentille oculaire. On a donc pour déterminer x, la relation

$$\frac{1}{F+f}+\frac{1}{x}=\frac{1}{f},$$

ou

$$x=f\left(1+\frac{f}{F}\right).$$

De là

$$g=\frac{F}{f}\left(1-\frac{f^2}{\Delta F}\right),$$

ou, très-sensiblement,

$$g=\frac{F}{f}.$$

Cette valeur approximative du grossissement serait rigoureusement exacte pour un œil *infiniment presbyte*.

L'oculaire forme une image réelle de l'objectif au point où nous avons dit que l'œil de l'observateur doit être placé. Cette image s'appelle l'*anneau oculaire*.

En représentant par 2R le diamètre de l'objectif, et par 2R′ celui de l'anneau oculaire, on a

$$\frac{R}{R'}=\frac{F+f}{x}=\frac{F}{f}=g.$$

Cette relation permet de déterminer pratiquement le grossissement d'une lunette avec la plus grande facilité.

Tirage. Chaque observateur doit faire en sorte que l'image virtuelle I″ se fasse à la distance de sa vision distincte. Par

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

suite, la distance d de l'oculaire au plan focal de l'objectif doit satisfaire à la relation

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{\Delta - x} = \frac{1}{f},$$

ou sensiblement,

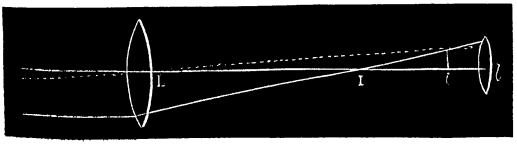
$$\frac{1}{d} - \frac{1}{\Delta - f} = \frac{1}{f}.$$

De là

$$d = f\left(1 - \frac{f}{\Delta}\right).$$

Cette formule montre qu'il faut éloigner l'oculaire de l'objectif pour les vues presbytes, et le rapprocher pour les vues myopes.

Diaphragme. Afin de donner plus de netteté aux images on place un diaphragme dans le plan focal de l'objectif, comme dans le microscope, dans le but d'écarter tous les pinceaux lumineux sortis de cette lentille qui ne pourraient pas être reçus intégralement par l'oculaire. Voici comment on détermine le diamètre de l'ouverture qu'il convient de donner au diaphragme.



2R étant le diamètre de l'objectif, $2r$ celui de l'oculaire et 2ρ celui du diaphragme, on a évidemment,

$$\frac{\rho}{Ii} = \frac{r}{Il} = \frac{R}{IL} = \frac{R + r}{F + f},$$

et, par conséquent,

$$\rho = Ii\,\frac{R + r}{F + f} = (Il - f)\,\frac{R + r}{F + f},$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

ou

$$\rho = \left(r \frac{F+f}{R+r} - f \right) \frac{R+r}{F+f} = \frac{rF - Rf}{F+f},$$

ou enfin,

$$\rho = \frac{\frac{r}{f} - \frac{R}{F}}{\frac{1}{f} + \frac{1}{F}}.$$

Quant à la grandeur angulaire du champ, 2A, elle est donnée par l'égalité

$$tg\, A = \frac{\rho}{F} = \frac{\frac{r}{f} - \frac{R}{F}}{1 + g}.$$

Le rapport du rayon d'ouverture à la distance focale d'une lentille s'appelle *raison d'ouverture* de la lentille.

L'égalité précédente montre donc qu'il y a une relation nécessaire entre le grossissement, le champ et les raisons d'ouverture de l'objectif et de l'oculaire d'une lunette.

Dans la lunette télescopique, le diaphragme fait corps avec l'oculaire et se déplace avec lui. On fait toujours en sorte que le diaphragme coïncide pour les vues normales avec le plan focal de l'objectif.

Quand on change l'oculaire pour faire varier le grossissement, le champ varie aussi, mais en sens inverse. En effet, l'expérience a montré que dans un bon oculaire la raison d'ouverture ne doit pas dépasser $\frac{1}{2}$.

On a donc sensiblement,

$$tg\, A = \frac{\frac{1}{2} - \frac{R}{F}}{1 + g}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

Cette égalité exprime précisément ce que nous avions avancé.

Clarté. L'intensité de la lumière portée par un objet à la distance où se trouve l'observateur étant représentée par K, la surface de la pupille par p^2 et celle de l'image formée sur la rétine par θ^2, on a pour l'expression de l'illumination totale de l'image dans la vision simple,

$$I_s = K p^2,$$

et pour celle de l'illumination intrinsèque dans les mêmes circonstances,

$$i_s = K \frac{p^2}{\theta^2}.$$

Si on représente la surface de l'objetif par A^2, et celle de l'anneau oculaire par a^2, on a pour l'illumination totale de cette dernière surface, en tenant compte des faisceaux lumineux écartés par le diaphragme,

$$I_o = K' A^2,$$

et pour l'illumination intrinsèque correspondante

$$i_o = K' \frac{A^2}{a^2} = K' g^2.$$

Dans la vision armée, lorsque la surface de la pupille est plus petite que celle de l'anneau oculaire, ce qui est le cas des faibles grossissements, on a pour l'illumination totale de l'image, dont la surface Θ^2 est évidemment égale à $g^2\theta^2$,

$$I_a = K' \frac{A^2}{a^2} p^2 = K' g^2 p^2,$$

et pour l'illumination intrinsèque

$$i_a = K' \frac{p^2}{\theta^2}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

Lorsque la surface de la pupille est plus grande que celle de l'anneau oculaire, ce qui ne peut arriver qu'avec les forts grossissements, on a pour l'illumination totale de l'image formée sur la rétine,

$$I_a = K'A^2 ,$$

et pour l'illumination intrinsèque

$$i_a = K' \frac{A^2}{g^2 \theta^2} .$$

En comparant la vision armée à la vision simple, on obtient donc avec les faibles grossissements

$$I_a = I_s \frac{K'}{K} g^2$$

et

$$i_a = i_s \frac{K'}{K} ;$$

tandis que l'on a avec les forts grossissements,

$$I_a = I_s \frac{K'}{K} \frac{A^2}{p^2}$$

et

$$i_a = i_s \frac{K'}{K} \frac{A^2}{p^2} \frac{1}{g^2} .$$

Il résulte de ces formules que dans la vision armée des objets qui ont un diamètre apparent, il y a de l'avantage à augmenter le grossissement, jusqu'à une certaine limite, puisque l'éclat intrinsèque de l'image reste constant pendant que la grandeur angulaire augmente. Au-delà de cette limite la diminution rapide de l'éclat intrinsèque fait disparaître

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

l'avantage qui résulte de l'augmentation de la grandeur angulaire.

Dans la vision armée des objets qui n'ont pas de diamètre apparent sensible, il y a également de l'avantage à augmenter le grossissement. Mais cet avantage cesse à partir d'une certaine limite, toutes les fois qu'il s'agit de la visibilité absolue de l'objet, ce qui est le cas, par exemple, des étoiles observées pendant la nuit sur le fond obscur du ciel. L'avantage croît au contraire sans limite, lorsqu'il s'agit de la visibilité relative de l'objet, comme dans le cas des étoiles observées en plein jour sur le fond éclairé de l'atmosphère. En effet, pendant que l'illumination totale de l'objet reste constante, l'éclat intrinsèque du fond lumineux diminue rapidement à mesure que le grossissement augmente.

Nous allons terminer ces détails sur la lunette télescopique à oculaire simple et positif, par quelques remarques.

1re Remarque. C'est Képler qui conçut le premier l'idée d'appliquer un oculaire convergent à la lunette télescopique; car jusque là on n'avait employé avec Galilée que l'oculaire divergent. Le P. Scheiner réalisa cette conception. On peut dire que les progrès de l'astronomie datent de l'introduction des lunettes télescopiques dans les instruments de précision. En effet, avant que l'on se servît des lunettes dans les mesures astronomiques, l'observateur ne pouvait répondre de l'exactitude de l'observation qu'à une demi-minute près, tout au plus; car on sait que l'œil désarmé ne peut distinguer l'un de l'autre deux rayons, lorsque ces derniers font entre eux un angle inférieur à une demi-minute. L'emploi des lunettes télescopiques, au contraire, permet de reculer cette limite proportionnellement au grossissement.

2e Remarque. La difficulté de construire de grands objec-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

tifs exempts de bulles et de stries, et l'impossibilité de donner à l'oculaire un court foyer sans augmenter considérablement les effets de l'aberration de sphéricité, ont empêché jusqu'ici de donner aux lunettes des grossissements au-delà d'une certaine limite. Les meilleures lunettes ne grossissent pas au-delà de 1000 à 1200 fois.

3e Remarque. Les lunettes appliquées aux instruments astronomiques servent surtout à déterminer les distances angulaires des astres. Elles sont munies, à cet effet, d'un *réticule*, c'est-à-dire de deux fils rectangulaires très-fins placés dans le plan focal de l'objectif. La ligne qui joint le centre optique de l'objectif au point de croisement des deux fils du réticule s'appelle l'*axe optique* de la lunette. Le déplacement de l'axe optique est accusé par la graduation de l'instrument. Pour mesurer la distance angulaire de deux points lumineux, on les amène successivement sur le point de croisement des fils du réticule, en imprimant à l'instrument un mouvement convenable. Si on veut éviter des effets trop considérables d'aberration de sphéricité, il faut faire coïncider l'axe optique avec l'axe de figure de l'instrument, c'est-à-dire avec l'axe de figure du système de lentilles employé. On arrive à cette coïncidence par tâtonnements successifs.

Lunette télescopique a oculaire simple et négatif. Ainsi que nous l'avons déjà dit, l'oculaire des premières lunettes télescopiques était une lentille divergente. Cette lentille était placée sur le trajet des pinceaux lumineux avant la formation de l'image réelle de l'objectif.

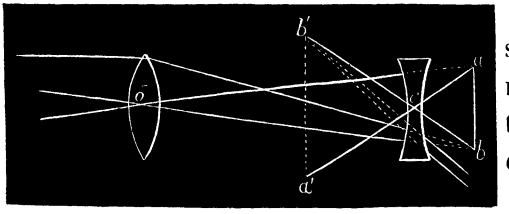
Il est facile de prouver qu'un faisceau lumineux convergent rencontrant une lentille biconcave dont le plan focal principal est situé entre la lentille et le point de convergence, donne toujours naissance, à l'émergence, à un faisceau diver-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

gent, et que la position du point de divergence P′ est liée à celle du point de convergence P, par la relation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}.$$

Ce principe rend raison de la manière dont l'oculaire fonctionne dans la lunette télescopique à oculaire simple et négatif, plus connue sous le nom de *lunette de Galilée*.



Dans cet instrument l'image est virtuelle, droite et agrandie.

La distance d des deux lentilles est donnée par la relation

$$\frac{1}{F - d} + \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{f}$$

ou

$$d = F - \frac{f}{1 - \frac{f}{\Delta}},$$

et le grossissement par l'égalité

$$g = \frac{F}{\Delta}\,\frac{I'}{I},$$

ou

$$g = \frac{F}{\Delta}\,\frac{\Delta}{F - d} = \frac{F}{f}\left(1 - \frac{f}{\Delta}\right),$$

ou sensiblement

$$g = \frac{F}{f}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

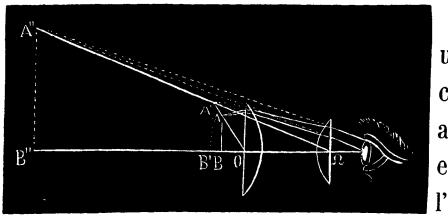
Le grossissement et la distance des lentilles sont donc plus considérables pour les vues presbytes que pour les vues myopes. Les presbytes doivent écarter l'oculaire de l'objectif; les myopes sont obligés de le rapprocher.

La lunette télescopique à oculaire simple et négatif ne donne naissance à aucune image réelle; elle ne comporte pas l'usage du réticule et ne peut servir aux mesures astronomiques.

Comme lunette terrestre elle a des avantages réels. Elle est très-courte et partant très-portative; elle n'absorbe que très-peu de lumière; elle donne, de plus, des images droites. C'est avec cette lunette que Galilée fit ses premières découvertes dans l'étude physique des astres.

LUNETTE TÉLESCOPIQUE A OCULAIRE COMPOSÉ ET POSITIF. L'oculaire positif de la lunette télescopique n'est plus jamais simple : c'est toujours un oculaire composé.

Nous parlerons de l'oculaire composé positif le plus employé ou *oculaire de Ramsden*.



Dans cet oculaire une première lentille convergente O, qu'on appelle *le collecteur*, est placée derrière l'image réelle AB de l'objectif, et donne naissance à une image virtuelle A'B'. Cette image vituelle joue le rôle d'un objet par rapport à une seconde lentille convergente Ω, qu'on appelle tout simplement *la lentille oculaire*, et derrière laquelle l'œil de l'observateur est appliqué.

La lentille oculaire produit ainsi une seconde image virtuelle A''B''.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

Grossissement. La détermination du grossissement ne présente aucune difficulté.

En représentant par D la distance du collecteur à la lentille oculaire, et par x celle de l'œil à la lentille Ω, on a

$$g = \frac{F}{\Delta}\frac{I''}{I} = \frac{F}{\Delta}\frac{I''}{I'}\frac{I'}{I} = \frac{F}{\Delta}\frac{\Delta - x}{p' + D}\frac{p'}{p}.$$

De plus

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

et

$$\frac{1}{p' + D} - \frac{1}{\Delta - x} = \frac{1}{\varphi}.$$

D'un autre côté, soit M le foyer conjugué réel du centre optique de l'objectif par rapport à la lentille O, foyer que nous supposons situé au-delà de la lentille Ω, et soit H un point qui ait le point M pour foyer conjugué virtuel par rapport à la lentille Ω. Il est évident que l'œil doit être placé en H, si on veut avoir le maximum du champ.

En représentant par u la distance OM, on a donc

$$\frac{1}{F + f} + \frac{1}{u} = \frac{1}{f}$$

et

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{u - D} = \frac{1}{\varphi};$$

ou sensiblement,

$$u = f,$$

et

$$x = \varphi\,\frac{f - D}{f + \varphi - D}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

De là,

$$\frac{\Delta - x}{p' + D} = \frac{\Delta - x}{\varphi} + 1 = \frac{\Delta}{\varphi} - \frac{f - D}{f + \varphi - D} + 1 = \frac{\Delta}{\varphi} + \frac{\varphi}{f + \varphi - D},$$

et

$$p' + D = \frac{\varphi (f - D)(\Delta - \varphi) + \Delta \varphi^2}{\Delta (f + \varphi - D) + \varphi^2}.$$

De là encore,

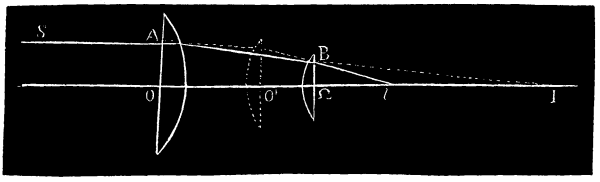
$$\frac{p'}{p} = \frac{p'}{f} + 1 = \frac{\varphi(f - D)(\Delta - \varphi) + \Delta\varphi^2}{\Delta f (f + \varphi - D) + f\varphi^2} - \frac{D}{f} + 1 = \frac{\Delta}{f} \frac{(f + \varphi - D)^2}{\Delta (f + \varphi - D) + \varphi^2}.$$

Par suite,

$$g = \frac{F}{f} \frac{f + \varphi - D}{\varphi} = F \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{\varphi} - \frac{D}{f\varphi} \right).$$

Lentille équivalente. Cette expression du grossissement peut se mettre sous une forme beaucoup plus simple qu'il ne sera pas inutile de faire connaître.

Imaginons, en effet, une lentille fictive capable de faire converger un faisceau de rayons parallèles à l'axe de la lunette, au même point et sous la même inclinaison que le ferait le système des deux lentilles de l'oculaire de Ramsden.



Il est évident que cette lentille fictive ne pourra produire l'effet dont il s'agit qu'à la condition d'être située dans le plan de concours des rayons incidents SA et des rayons émergents B*I*.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

On aura donc, φ_0 étant la distance focale principale de la lentille fictive O′, et x_0, la distrance ωl,

$$\frac{f}{f-D}=\frac{\varphi_0}{x_0}$$

$$\frac{1}{x_0}-\frac{1}{f-D}=\frac{1}{\varphi}$$

et par suite,

$$\frac{1}{\varphi_0}=\frac{f+\varphi-D}{f\varphi}=\frac{1}{f}+\frac{1}{\varphi}-\frac{D}{f\varphi}.$$

De là,

$$g=\frac{F}{\varphi_0}.$$

La lentille fictive O′ s'appelle *la lentille équivalente* des lentilles O et ω.

On voit par cette formule que l'emploi de l'oculaire composé positif permet d'augmenter le grossissement de la lunette.

Mais ce n'est pas dans ce but que l'on se sert de l'oculaire de Ramsden.

Achromatisme. On emploie surtout cet oculaire pour réduire au minimum, l'irisation de l'image virtuelle.

Il suffit pour cela de donner aux lentilles de l'oculaire des courbures et une disposition telles, que la différentielle du grossissement soit nulle quand on fait varier la couleur.

De là, l'équation de condition

$$\frac{df}{f^2}+\frac{d\varphi}{\varphi^2}=D\frac{fd\varphi+\varphi df}{f^2\varphi^2}.$$

Supposons que les deux lentilles oculaires aient un même

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

indice de réfraction, et que chacune d'elles soit terminée par des zones sphériques de même rayon.

Appelons n l'indice, r le rayon des zones de la première lentille et ρ celui des zones de la seconde.

On a

$$\frac{1}{f} = 2\,\frac{n-1}{r}, \qquad \frac{1}{\varphi} = 2\,\frac{n-1}{\rho},$$

et

$$\frac{df}{f^2} = -2\,\frac{dn}{r}, \qquad \frac{d\varphi}{\varphi^2} = -2\,\frac{dn}{\rho}.$$

L'équation de condition devient

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho} = 4\,(n-1)\,\frac{D}{r\rho}$$

ou

$$r + \rho = 4\,(n-1)\,D$$

ou encore,

$$f + \varphi = 2D.$$

Si au lieu de prendre des lentilles biconvexes de même rayon, on avait pris, comme on le fait communément, des lentilles plans-convexes, on aurait eu

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{r}, \qquad \frac{1}{\varphi} = \frac{n-1}{\rho},$$

et

$$\frac{df}{f^2} = -\frac{dn}{r}, \qquad \frac{d\varphi}{\varphi^2} = -\frac{dn}{\rho},$$

et, par suite, l'équation de condition serait devenue

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho} = 2\,(n-1)\,\frac{D}{r\rho}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

ou, comme précédemment,

$$f + \varphi = 2D$$

Rigoureusement parlant, il est impossible de satisfaire à cette condition en conservant les relations établies plus haut, puisque nous avons supposé

$$f > D \qquad \text{et} \qquad \varphi > D\,;$$

pour la vérifier, on devrait admettre

$$f < D \qquad \text{et} \qquad \varphi > D\,,$$

suppositions qui rendraient négative la valeur trouvée pour x, et placeraient le point oculaire H entre les deux lentilles oculaires.

On satisfait le mieux qu'il est possible à la condition d'achromatisme en posant

$$f = (1 - 2m)\,\varphi$$

et

$$D = (1 - m)\,\varphi\,,$$

et en prenant le rapport indéterminé m assez petit pour que le point oculaire H coïncide sensiblement avec le centre de la lentille Ω (*).

On a alors pour l'expression du grossissement

$$g = \frac{F}{2}\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{\varphi}\right)$$

ou

$$g = \frac{F}{f}\,(1 - m)\,,$$

(*) Biot, *Traité élémentaire d'Astronomie physique*, t. II, p. 159.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

ou encore,

$$g = \frac{F}{\varphi} \cdot \frac{1-m}{1-2m},$$

valeur qui ne diffère pas sensiblement de $\frac{F}{\varphi}$.

Il semble que les constructeurs d'instruments s'écartent assez notablement des conditions précédentes (*).

En effet, quand on passe de la couleur rouge à la teinte violette, la variation du grossissement est donnée par la formule

$$\Delta g = \frac{dg}{dn} dn + \frac{1}{2} \frac{d^2 g}{dn^2} dn^2,$$

dn étant égal à $\frac{1}{81}$.

Dans le cas d'un oculaire de Ramsden à lentilles plans-convexes, cette formule devient

$$\Delta g = F \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{\rho} - \frac{2(n-1)D}{r\rho} \right\} dn - \frac{FD}{r\rho} dn^2$$

ou

$$\Delta g = \frac{F}{n-1} \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{\varphi} - \frac{2D}{f\varphi} \right) dn - \frac{F}{(n-1)^2} \frac{D}{f\varphi} dn^2.$$

Au lieu de rendre nul le coefficient de dn, les constructeurs allemands posent

$$\frac{f}{9} = \frac{\varphi}{5} = \frac{D}{4} = \frac{f+\varphi-D}{10} = \frac{f+\varphi-2D}{6},$$

et par suite,

$$g = 2\frac{F}{f} = \frac{10}{9}\frac{F}{\varphi}$$

(*) Humáus, *Die Geometrischen instrumente*, p. 56.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

et, en négligent le terme en dn^2

$$\Delta g = \frac{6}{5}\frac{F}{f}\frac{1}{(n-1).81} = \frac{2}{3}\frac{F}{\varphi}\frac{1}{(n-1).81} = \frac{g}{135(n-1)}.$$

En France on fait au contraire

$$\frac{f}{3} = \frac{\varphi}{3} = \frac{D}{2} = \frac{f+\varphi-D}{4} = \frac{f+\varphi-2D}{2}$$

et, partant,

$$g = \frac{4}{3}\frac{F}{f}$$

et

$$\Delta g = \frac{2}{3}\frac{F}{f}\frac{1}{(n-1).8.} = \frac{g}{162(n-1)}.$$

Dans ces conditions l'achromatisme est loin d'être parfait. Mais il semble que l'on gagne alors par la réduction de l'aberration de sphéricité, ce que l'on perd par l'irisation.

L'oculaire de Ramsden permet l'usage du réticule ; il est employé dans les instruments des passages et dans les lunettes des cercles muraux.

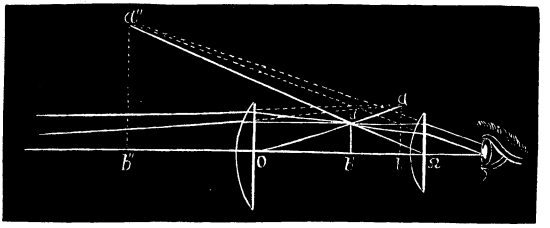
Remarque. Lorsqu'on se sert de la lunette télescopique pour observer les objets terrestres, on redresse l'image de l'objectif par le moyen d'un oculaire spécial appelé *oculaire terrestre.*

Cet oculaire est formé de deux lentilles et d'un oculaire positif ordinaire simple ou composé. Les deux lentilles sont fixées à une distance invariable l'une de l'autre, égale, ou un peu supérieure à la somme de leurs distances focales principales ; en outre, le foyer principal de la première coïncide avec le foyer de l'objectif. On a donc de la sorte une image redressée de l'objet.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

LUNETTE TÉLESCOPIQUE A OCULAIRE COMPOSÉ NÉGATIF (*).

Huyghens a imaginé un oculaire dont voici la disposition :



Les faisceaux lumineux émanés de l'objectif sont reçus un peu avant leur concours dans le plan focal *ab*, sur une lentille convergente O. Les rayons ainsi déviés vont former en *a'b'* une image réelle que l'on regarde avec l'oculaire Ω.

On a, dans ce cas, pour la mesure du grossissement,

$$g = \frac{F}{\Delta}\,\frac{I''}{I} = \frac{F}{\Delta}\,\frac{I''}{I'}\,\frac{I'}{I}$$

ou, en représentant par p et p' les distances Ob et Ob',

$$g = \frac{F}{\Delta}\,\frac{\Delta - x}{D - p'}\,\frac{p'}{p}.$$

On a aussi, comme dans l'oculaire de Ramsden,

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{D - p'} - \frac{1}{\Delta - x} = \frac{1}{\varphi}$$

$$\frac{1}{F + f} + \frac{1}{u} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{u - D} = \frac{1}{\varphi}$$

(*) Desains, *Leçons de physique*, pp 286 et suiv.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

et, par suite, sensiblement

$$u = f$$

$$x = \varphi \frac{f - D}{f + \varphi - D}$$

$$\frac{\Delta - x}{D - p'} = \frac{\Delta}{\varphi} + \frac{\varphi}{f + \varphi - D}$$

$$D - p' = \frac{\varphi (f - D)(\Delta - \varphi) + \Delta \varphi^2}{\Delta (f + \varphi - D) + \varphi^2}$$

$$\frac{p'}{p} = 1 - \frac{p'}{f} = \frac{\Delta}{f} \frac{(f + \varphi - D)^2}{\Delta (f + \varphi - D) + \varphi^2}$$

De là,

$$g = F \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{\varphi} - \frac{D}{f \varphi} \right) = \frac{F}{\varphi_0},$$

φ_0 étant la distance focale principale de la lentille équivalente de l'oculaire de Huyghens; et, pour l'achromatisme,

$$f + \varphi = 2D.$$

On a, de plus, en appelant r' et ρ' les rayons d'ouverture des deux lentilles oculaires,

$$\frac{r'}{u} = \frac{\rho'}{u - D}$$

et par suite,

$$r' \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{F + f} \right) = \rho' \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\varphi} \right),$$

ou

$$\frac{r'}{f} + \frac{\rho'}{\varphi} = \frac{r'}{F + f} + \frac{\rho'}{x};$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

c'est-à-dire, en représentant par 2Λ la grandeur angulaire du champ,

$$\frac{r'}{f} + \frac{\rho'}{\varphi} = (g+1)\, tg\, \Lambda\,.$$

On voit, par cette dernière relation, que pour avoir le maximum du champ, il faudra donner aux raisons d'ouverture le maximum des valeurs qu'elles peuvent recevoir dans la pratique, et poser

$$\frac{1}{2} = \frac{r'}{f} = \frac{\rho'}{\varphi}$$

et par suite,

$$\frac{f}{u} = \frac{\varphi}{u - \mathrm{D}}.$$

Puisqu'on a sensiblement

$$u = f\,,$$

on a aussi, au même degré d'approximation,

$$\varphi = f - \mathrm{D},$$

ou

$$\mathrm{D} = f - \varphi = \frac{f + \varphi}{2}\,,$$

et par suite,

$$f = 3\,\varphi = \frac{3}{2}\mathrm{D}\,;$$

ce qui réduit le grossissement à

$$g = 2\,\frac{\mathrm{F}}{f}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

Remarque. Dans l'oculaire de Huyghens le réticule est placé en $a'b'$; il fait corps avec l'oculaire et participe, par conséquent, à tous ses mouvements. Une telle disposition ne peut évidemment pas donner à l'axe optique une invariabilité absolue. Aussi l'oculaire de Ramsden, qui n'est pas sujet à cet inconvénient, est-il exclusivement employé dans les lunettes à réticule. L'oculaire de Huyghens a néanmoins un très-grand avantage sur l'oculaire de Ramsden, tel du moins qu'on construit d'ordinaire ce dernier : il achromatise plus parfaitement, en même temps qu'il produit un plus fort grossissement.

IV.

DES TÉLESCOPES RÉFLECTEURS.

Les télescopes furent imaginés par le P. Zucchi, vingt ans après l'invention des lunettes téléscopiques.

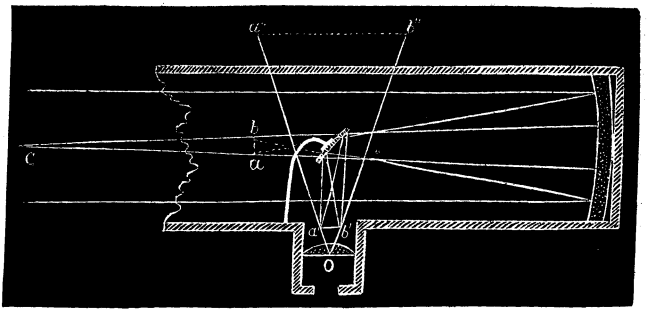
Dans ces instruments, la lentille objective de la lunette astronomique est remplacée par un miroir concave. C'est la seule différence essentielle.

Nous allons dire quelques mots des télescopes actuellement en usage.

Télescopes de Newton, d'Herschel et de M. Foucault. Pour obvier à la perte de lumière que l'interposition de la tête de l'observateur entre l'objet et le miroir réflecteur pro-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

duirait infailliblement, Newton déplace latéralement l'image focale *ab*.



Il emploie, à cet effet, un petit miroir plan faisant avec l'axe du grand miroir un angle de 45°. L'image du grand miroir se fait en *a'b'* au lieu de se faire en *ab* et l'observateur la regarde avec la lentille oculaire O.

Le grossissement est donné par l'égalité

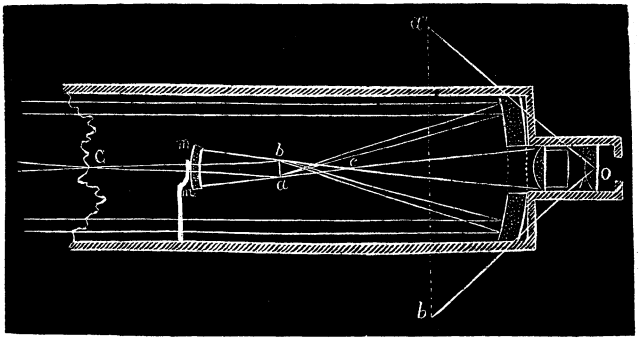
$$g = \frac{\frac{I''}{\Delta}}{\frac{I}{F}} = \frac{F}{\Delta}\frac{I''}{I'} = \frac{F}{\Delta}\frac{\Delta}{f} = \frac{F}{f}.$$

Herschel supprime le petit miroir plan, et incline le grand miroir de façon à amener le foyer principal dans le voisinage de la paroi du tube. Par cet artifice, il obtient le même effet que Newton, en perdant beaucoup moins de lumière.

M. Foucault substitue au miroir métallique de Newton, un miroir de verre argenté en dedans, et d'une forme sensiblement ellipsoïdale obtenue par des retouches successives de manière à faire disparaître en grande partie les aberrations de sphéricité. Son miroir absorbe trois fois moins de lumière que les miroirs métalliques ordinaires.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

Télescope de Grégory. Dans ce télescope, le grand miroir est percé à la partie centrale.



Cela n'empêche pas la production d'une image réelle dont les faisceaux coniques tombant sur un petit miroir sphérique concave *mm* donnent naissance à une seconde image, renversée par rapport à la première, mais droite par rapport à l'objet. L'observateur reçoit les rayons de cette image sur l'oculaire à travers l'ouverture centrale du grand miroir.

On a pour le grossissement de ce télescope

$$g = \frac{\frac{I''}{\Delta}}{\frac{I}{F}} = \frac{F}{\Delta}\frac{I''}{I}$$

Le grossissement du télescope de Grégory est donc égal au rapport $\frac{F}{\varphi_0}$ multiplié par le grossissement du petit miroir, φ_0 représentant, soit la distance focale principale de l'oculaire simple, soit celle de la lentille équivalente de l'oculaire composé.

De là, en représentant par φ_m la distance focale principale du miroir *mm*, on a

$$g = \frac{F}{\varphi_0}\frac{\varphi_m}{\varphi_m - e}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

ou, à cause de la relation

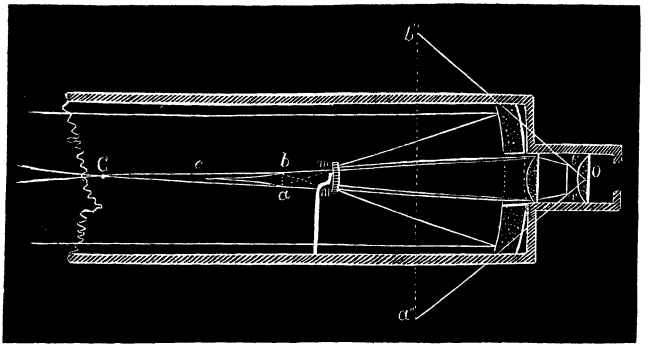
$$F + r - e = F + 2\varphi_m - e = D,$$

D étant la distance des deux miroirs, et r, le rayon du petit miroir;

$$g = \frac{F}{\varphi_o} \frac{\varphi_m}{D - F - \varphi_m}.$$

Le grossissement dépend donc de la distance des miroirs. Il est plus faible pour les vues presbytes et pour les vues normales, qu'il ne l'est pour les vues myopes.

Télescope de Cassegrain. Pour diminuer davantage les aberrations de sphéricité, Cassegrain substitua au petit miroir concave de Grégory, un petit miroir convexe placé entre le foyer principal et la surface du grand miroir.



Les rayons qui, sans l'interposition du petit miroir convexe, iraient concourir aux divers points de l'image *ab*, sont réfléchis et vont former en avant du petit miroir une image agrandie, mais renversée par rapport à l'objet. Ce sont les rayons de cette image que l'observateur reçoit sur l'oculaire à travers l'ouverture centrale du grand miroir.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

Ce système donne, comme plus haut, pour le grossissement,

$$g = \frac{\frac{I''}{\Delta}}{\frac{I}{F}} = \frac{F}{\Delta}\frac{I''}{I},$$

c'est-à-dire;

$$g = \frac{F}{\varphi_o}\frac{e - \varphi_m}{\varphi_m}.$$

Or, vu la relation

$$\frac{1}{F - D} - \frac{1}{e - 2\varphi_m} = \frac{1}{\varphi_m}$$

ou

$$\frac{\varphi_m}{e - 2\varphi_m} = \frac{\varphi_m + D - F}{F - D}$$

ou encore,

$$\frac{e - \varphi_m}{\varphi_m} = 1 + \frac{F - D}{\varphi_m + D - F} = \frac{\varphi_m}{\varphi_m + D - F};$$

on peut mettre l'expression du grossissement sous la forme

$$g = \frac{F}{\varphi_o}\frac{\varphi_m}{\varphi_m + D - F}.$$

Remarque. Les télescopes ont sur les lunettes des avantages réels.

D'abord on peut donner beaucoup plus facilement de grandes dimensions aux miroirs qu'aux lentilles. De plus, dans les miroirs l'image focale n'est pas soumise aux irisations provenant de l'aberration de réfrangibilité; et quant à

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66

l'aberration de sphéricité, on peut en atténuer indéfiniment les effets par la méthode des retouches successives.

Néanmoins tous ces avantages sont loin de compenser la perte énorme de lumière occasionnée par la réflexion, puisque les meilleurs miroirs métalliques ne réfléchissent que les soixante centièmes de la lumière incidente. Aussi préfère-t-on, dans les observatoires, les grands télescopes réfracteurs aux télescopes proprement dits.

FIN.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : 87 DEL 66