THÈSES

DE

MÉCANIQUE ET D'ASTRONOMIE,

Par J. Vieille,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE, PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU COLLÉGE ROYAL DE TOULOUSE, PROFESSEUR-SUPPLÉANT DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

TOULOUSE,
IMPRIMERIE DE J.-B. PAYA,
HÔTEL CASTELLANE.

1840.

A MONSIEUR POUILLET,

Membre de l'Institut.

Témoignage de ma vive reconnaissance

pour

sa bienveillance et son amitié.

J. Vieille.

SOMMAIRE.

(Nos 1-4). *Introduction.* — Diverses circonstances du mouvement elliptique de la lune. — Ce qu'on nomme en astronomie libration en latitude, en longitude, de la lune. — Ces deux phénomènes sont purement optiques. — Lois de la libration astronomique de la lune. — De la libration réelle.

(5-16). *Recherche des équations différentielles du mouvement de la lune autour de son centre de gravité.* — On rapporte la position des différens points du sphéroïde lunaire aux trois axes principaux qui se coupent à son centre de gravité. — Pour développer les équations différentielles fournies par le principe de d'Alembert, on introduit dans le calcul les composantes p, q, r, de la vitesse de rotation de la lune autour de l'axe instantané de rotation. — Expression des seconds membres de ces équations au moyen des différences partielles d'une fonction Ω, représentant l'intégrale de la somme des forces perturbatrices multipliées chacune par l'élément de sa direction, prises relativement à trois angles φ, ψ, θ, qui font connaître à chaque instant la position des trois axes principaux par rapport à trois axes fixes. — Distinction entre les axes principaux de la lune. — L'axe principal autour duquel oscille l'axe instantané de rotation, se rapporte au plus grand moment d'inertie C. — Développement de la partie de la fonction Ω, due à l'attraction terrestre, en série ordonnée suivant les puissances négatives de la distance de la lune à la terre. — On néglige les termes d'un ordre supérieur au troisième, par rapport à cette distance. — Expression des coordonnés x, y, z, du centre de la terre en fonction de sa distance à la lune, et de son mouvement en longitude autour de cet astre. — Développement des différences partielles $\frac{d\Omega}{d\varphi}$, $\frac{d\Omega}{d\psi}$, $\frac{d\Omega}{d\theta}$ en négligeant le carré de l'inclinaison de l'équateur lunaire à l'écliptique et les termes du troisième ordre, par rapport à l'excentricité et à l'inclinaison de l'orbite.

(17-20). Examen de l'hypothèse où la lune est regardée comme un sphéroïde de révolution autour de son petit axe. — Première approximation des quantités p et q, en négligeant les quantités du deuxième ordre, par rapport aux forces perturbatrices.

(21-26). *Détermination de la libration en longitude.* — Il est nécessaire de tenir compte des quantités du deuxième ordre, par rapport aux forces perturbatrices, si l'on veut expliquer l'égalité qui existe entre les moyens mouvemens de rotation et de révolution, dans l'hypothèse très vraisemblable où il aurait existé à l'origine, une petite différence entre la vitesse de révolution, et la vitesse de rotation. — Expression de la libration en longitude. — Discussion des divers termes dont elle se compose. — Valeur approchée du rapport des momens d'inertie du grand axe et de l'axe moyen du sphéroïde lunaire, déduite de l'observation de l'inégalité dépendante de l'anomalie moyenne du soleil. — Lois du mouvement oscillatoire du premier axe principal de l'équateur lunaire. — La direction moyenne de cet axe et le rayon vecteur mené de la lune à la terre, sont toujours compris dans le même cercle de latitude. — Les données de l'observation sont satisfaites, en admettant qu'à l'origine les vitesses de rotation et de révolution aient peu différé l'une de l'autre, la différence étant d'ailleurs arbitraire. — Les inégalités séculaires qui affectent le mouvement de révolution de la lune affectent aussi le mouvement de rotation, en sorte que l'égalité entre ces moyens mouvemens persistera sans altération dans la suite des siècles. — Rapport de l'action du soleil sur le sphéroïde lunaire, à l'action de la terre; la première n'est pas la $\frac{6}{1000}$ partie de la seconde, et il est inutile d'en étudier les effets.

(27-38). *Détermination du mouvement des nœuds de l'équateur lunaire, et des variations de son inclinaison à l'écliptique.* — Transformation des variables p et q, en d'autres inconnues s et s', qui restent toujours fort petites et fassent connaître sans nouvelles intégrations les valeurs de θ et de φ. — L'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique mobile étant sensiblement invariable, on l'introduit dans les seconds membres des équations différentielles à la place de l'inclinaison sur l'écliptique fixe. — Développement des inégalités séculaires qui proviennent du déplacement de l'écliptique. — L'intégration donne pour les inconnues s et s', des valeurs dépendantes de ces inégalités; mais si on les rapporte à l'écliptique vraie, les termes qui représentent ces inégalités disparaissent, en sorte que le mouvement des points équinoxiaux de la lune et l'inclinaison de son équateur sur l'écliptique vraie sont indépendans des mouvemens séculaires de cette écliptique. — Conditions qui existent entre les momens d'inertie A, B, C, de la lune. — Examen du cas où les constantes arbitraires amenées par l'intégration sont supposées nulles. — Le nœud descendant de l'équateur lunaire coïncide alors rigoureusement avec le nœud ascendant de l'orbite, et l'inclinaison de l'équateur lunaire sur l'écliptique est constante. — Valeur approchée du rapport $\frac{C-A}{C}$ déduite de l'observation de cette inclinaison. — Examen du cas général où les constantes arbitraires ne sont plus regardées comme nulles, mais comme très petites. — Les nœuds de l'équateur lunaire exécutent, de part et d'autre des nœuds moyens de l'orbite, des oscillations dont l'amplitude est petite, en sorte que la position moyenne du nœud descendant de l'équateur lunaire, coïncide toujours avec le nœud ascendant moyen de l'orbite. — Il a pu exister à l'origine une différence arbitraire, mais très petite, entre la ligne des nœuds de l'équateur et la ligne des nœuds de l'orbite. — L'inclinaison moyenne de l'équateur lunaire à l'écliptique conserve une valeur constante. — Examen d'une petite inégalité qui affecte les quantités précédentes, et qui dépend de la différence en longitude du nœud et du périgée lunaire. — Seconde approximation des quantités p et q. — Leurs valeurs sont aussi indépendantes des déplacemens séculaires de l'écliptique. — Calcul du rayon du cercle que le pôle de rotation décrit à la surface de la lune. — Expression de la vitesse de rotation autour de l'axe instantané.

DU MOUVEMENT DE LA LUNE AUTOUR DE SON CENTRE DE GRAVITÉ.

INTRODUCTION.

(1). La lune se meut autour de la terre dans une orbite elliptique, inclinée à l'écliptique de 5°, 8′, 49″, et dont l'excentricité est 0,054844. Le temps qu'elle emploie pour accomplir sa révolution sidérale, ou le mois périodique, a été trouvé égal à 27 jours, 32166; mais cette durée n'est pas constante, et le moyen mouvement de la lune est soumis à une accélération séculaire périodique. Les nœuds de l'orbe lunaire ne sont pas fixes; ils ont sur l'écliptique un mouvement rétrograde, ou contraire au mouvement de la lune, en vertu duquel ils parcourent l'écliptique en 6793 jours, 39, environ 18 ans 6/10. — Le périgée lunaire a un mouvement direct ou de même sens que le mouvement de la lune, dont la période est de 3232 jours, 5753.

(2). L'observation attentive des taches que la lune offre à sa surface, a montré que cet astre nous présente toujours le même hémisphère; or, le fait seul de son mouvement de translation autour de la terre, devrait découvrir successivement à nos yeux tous les points de sa surface : donc, puisqu'il n'en est pas ainsi, il faut qu'en même temps qu'elle accomplit sa révolution autour de la terre, elle ait un mouvement de rotation sur elle-même, lequel ait la même durée que le mouvement de translation, et ramène constamment vers nous le même hémisphère. Cependant les taches éprouvent quelques déplacemens apparens sur le disque lunaire; elles semblent tour-à-tour s'élever ou s'abaisser, dans le cours de chaque mois, relativement au plan de l'orbite, comme si le globe de la lune avait un balancement autour du

2

rayon vecteur, mené de son centre au centre de la terre. Ce phénomène, découvert par Galilée, s'appelle *libration en latitude.* Plus tard Riccioli reconnut l'apparence d'un autre balancement, par lequel la lune découvre et cache alternativement, sur son bord oriental et occidental, quelques points de sa surface. C'est la *libration en longitude.*

Ces deux librations sont purement optiques, et la lune n'a pas réellement ces mouvemens oscillatoires. On explique aisément ces apparences en regardant la lune comme tournant uniformément autour d'un axe incliné au plan de son orbite, tandis qu'elle se meut non uniformément autour de la terre. Les observations de Dominique Cassini complétèrent la théorie astronomique de la libration lunaire : il découvrit que l'axe de rotation de la lune est incliné à l'écliptique, et que la trace du plan de l'équateur lunaire sur l'écliptique, est constamment parallèle à la ligne des nœuds moyens de l'orbite; en sorte que, si par le centre de la lune on imagine trois plans, savoir : l'équateur lunaire, l'écliptique et le plan de l'orbe lunaire, ces trois plans se couperont suivant la même droite, le plan de l'écliptique étant compris entre les deux autres.

De nouvelles observations ont été entreprises par Tobie Mayer (1748), puis par Lalande (1764), dans le but de vérifier les faits annoncés par Cassini, et de déterminer avec la plus grande précision l'inclinaison du plan de l'équateur lunaire sur l'écliptique. Cette inclinaison a été trouvée égale à 1°, 29′. Plus tard M. Nicollet a trouvé par la comparaison de 174 observations, l'inclinaison de l'équateur lunaire égale à 1°, 28′, 45″, ce qui ne diffère que de 15″ du résultat précédent.

(3). Ainsi les lois qui président à la libration astronomique de la lune, sont les suivantes : 1° la lune tourne uniformément d'occident en orient autour d'un axe incliné à l'écliptique, de manière que le plan de son équateur forme avec l'écliptique un angle de 1°, 28′, 45″; 2° la durée de cette rotation est égale à celle du mouvement de révolution de la lune dans son orbite, ou de 27 $^{\text{jours}}$, 32166; en sorte que chaque point de l'équateur lunaire revient au point équinoxial lunaire, dans un temps précisément égal à celui qu'emploie la lune pour revenir au nœud par son mouvement moyen; 3° la ligne des nœuds de l'équateur lunaire est constamment parallèle à la ligne des nœuds moyens de l'orbite.

(4). Si nous continuons à regarder le mouvement de rotation de la lune comme parfaitement uniforme, une difficulté sérieuse se présente : en effet, nous sommes alors obligés d'admettre que la vitesse de rotation primitivement imprimée à cette planète, était rigoureusement égale à sa vitesse moyenne angulaire de révolution : autrement, s'il existait à l'origine une petite inégalité entre ces deux vitesses, l'angle décrit par le rayon vecteur de la lune autour de la terre, différerait bientôt notablement de l'angle décrit par un point de l'équateur lunaire autour de son axe ; et, cette différence s'augmentant avec le temps, tous les points de l'équateur lunaire finiraient par se découvrir à nos yeux. Or, il est infiniment peu probable qu'à l'origine, cette égalité rigoureuse entre les vitesses angulaires de rotation et de révolution, ait eu lieu.

La difficulté disparaît lorsqu'on a égard aux inégalités que doit apporter dans le mouvement de rotation de la lune l'attraction de la terre sur la partie non sphérique de cet astre. En effet, l'attraction terrestre combinée avec la force centrifuge produite par le mouvement de rotation, a dû donner au sphéroïde lunaire la forme d'un ellipsoïde, dont l'axe de rotation est le plus petit axe, tandis que le plus grand axe est dirigé vers la terre. Cela posé, pour expliquer ce fait que la lune nous présente toujours le même hémisphère, il n'est pas nécessaire de supposer qu'à l'origine il y ait eu coïncidence parfaite entre la vitesse angulaire de l'axe équatorial du sphéroïde lunaire, et celle du rayon mobile qui joint le centre de la lune au centre de la terre ; mais il suffit que la vitesse de rotation, primitivement imprimée à notre satellite, ait été peu différente de la vitesse moyenne de translation, la différence étant d'ailleurs arbitraire : car alors l'attraction terrestre, qui tend sans cesse à ramener le grand axe du sphéroïde en coïncidence avec le rayon vecteur, aura empêché que ces lignes ne s'écartent au-delà d'un certain terme, et atténué de plus en plus l'effet de cette petite différence.

Il résulte de là que l'axe lunaire oscillera sous l'influence de l'attraction terrestre, de part et d'autre du rayon vecteur de l'orbite, à la manière d'un pendule soumis à l'action de la gravité. C'est ce mouvement oscillatoire qui constitue principalement la *libration réelle de la lune en longitude*, libration qui ne doit pas être confondue avec la libration *purement optique* dont nous avons parlé plus haut, et que les astronomes ont reconnue par l'observation.

Chercher les lois de cette libration réelle, étudier les variations qui peuvent affecter l'inclinaison de l'équateur lunaire, et le mouvement des nœuds de cet équateur, tel est le but que nous allons nous proposer.

Nous prendrons pour guides les beaux travaux de Lagrange qui ont été insérés dans la collection des prix de l'académie des sciences (année 1764), et dans les mémoires de l'académie de Berlin (année 1780). La solution rigoureuse du problème n'étant pas possible dans l'état actuel de la science, on est obligé de recourir aux méthodes d'approximation, et nous nous attacherons à embrasser dans ces approximations non-seulement tous les élémens dont l'influence a déjà été reconnue, mais encore ceux dont l'influence pourra être appréciée plus tard, lorsque les moyens d'observation auront été perfectionnés.

Recherche des équations différentielles du mouvement de la lune autour de son centre de gravité.

(5). Pour étudier les lois du mouvement d'un corps dans l'espace, on décompose ce mouvement en deux autres, l'un de translation commun à tous ses points, l'autre de rotation autour de l'un deux. L'étude de ce dernier mouvement exigerait en général que l'on connût la force accélératrice qui sollicite le point choisi pour centre de rotation; mais le problème se simplifie lorsque l'on adopte pour centre le centre de gravité du corps : on trouve alors que le mouvement de rotation autour de ce point est le même à chaque instant que s'il était fixe, et que les forces appliquées aux différens points du corps ne fussent pas changées. En même temps le centre de gravité a un mouvement de translation qui est le même à chaque instant, que si la masse du mobile y était concentrée, et que les forces motrices y fussent transportées parallèlement à elles-mêmes.

Appliquons à la lune ces principes généraux du mouvement.

Sous l'influence de l'attraction terrestre combinée avec l'attraction du soleil et des planètes, le centre de gravité de notre satellite prendra un mouvement elliptique de translation qui sera soumis à diverses perturbations, et en même temps la lune tournera autour de ce centre de gravité sans qu'il soit rien changé aux forces qui agissent sur elle. Ces deux mouvemens de translation et de rotation sont indépendans l'un de l'autre à l'origine, et peuvent être traités séparément; mais pour qu'il en fût de même à toutes les époques du mouvement, il faudrait que la lune fût composée de couches parfaitement sphériques; car les attractions que la terre, le soleil et les planètes exercent sur la lune, étant égales et contraires à la réaction de la lune sur chacun de ces astres, on voit que, dans l'hypothèse d'une sphéricité parfaite, ces attractions seraient les mêmes que si la masse de la lune était concentrée à son centre de gravité, et par conséquent ces forces ne sauraient avoir d'influence sur le mouvement de la lune autour de ce point. Ce mouvement de rotation serait donc indépendant des variations que ces forces éprouvent par suite du déplacement du centre de gravité, et uniquement produit par les percussions initiales. Il aurait lieu uniformément autour d'un même diamètre, comme si le centre de gravité était en repos, et que la lune ne fût sollicitée par aucune force.

Il n'en est plus de même quand on a égard à la non-sphéricité des couches de la lune; car la résultante des attractions de la terre et du soleil n'est plus appliquée toute entière au centre de gravité, et une partie très petite de ces forces agit pour troubler le mouvement de rotation qui se trouve ainsi dépendant du mouvement de translation.

(6). Pour établir les équations différentielles du mouvement de rotation, nous rapporterons la position des différens points du sphéroïde lunaire aux trois axes principaux qui se coupent à son centre de gravité. Ces trois axes sont fixes dans l'intérieur du corps, mais mobiles avec lui; et lorsque leur direction sera connue à chaque instant, la position du mobile sera complètement déterminée. La direction de ces trois axes principaux, à une époque quelconque, dépend de trois angles que nous allons définir.

Menons par le centre de gravité un plan xoy (fig. 1) parallèle au plan d'une écliptique fixe correspondant à une époque donnée, et soit, au bout d'un temps quelconque t, θ l'inclinaison du plan des deux axes principaux ox_1 oy_1 avec le plan fixe, ψ l'angle que fait l'intersection ON de ces deux plans avec une droite fixe ox, tracée dans le plan xoy, et φ l'angle compris entre cette intersection et l'axe ox_1; ces trois angles seront des fonctions du temps. Les deux premiers ψ, θ, détermineront la position du plan des x_1 y_1; le troisième angle φ, fera connaître ensuite la position de l'axe des x_1 dans ce plan. Pour lever toute ambiguïté, on devra convenir du sens dans lequel ces angles seront comptés.

(7). Désignons par x_1 y_1 z_1 les trois coordonnés d'un élément quelconque dm rapportées aux trois axes principaux menés par le centre de gravité supposé immobile. Au bout du temps t quelconque, soient $X_1\, dm$, $Y_1\, dm$, $Z_1\, dm$, les composantes, parallèles à ces axes, de la force motrice qui agit sur cet élément; si on désigne par $X_2\, dm$, $Y_2\, dm$, $Z_2\, dm$, les composantes de la force motrice, à laquelle sont dus les accroissemens infiniment petits de vitesse qui ont lieu à chaque instant:

$$(X_1 - X_2)\, dm,\ (Y_1 - Y_2)\, dm,\ (Z_1 - Z_2)\, dm$$

seront les composantes de la force perdue pendant l'instant dt par l'élément dm: l'équilibre devra avoir lieu en supposant tous les élémens du corps animés par des forces semblables, et comme le centre de gravité est regardé comme fixe, il faudra que la somme des momens des forces, par rapport aux trois axes ox_1 oy_1 oz_1 soit égale à zéro, ce qui donne

$$\left.\begin{aligned}
\int (x_1 Y_2 - y_1 X_2)\, dm &= \int (x_1 Y_1 - y_1 X_1)\, dm \\
\int (z_1 X_2 - x_1 Z_2)\, dm &= \int (z_1 X_1 - x_1 Z_1)\, dm \\
\int (y_1 Z_2 - z_1 Y_2)\, dm &= \int (y_1 Z_1 - z_1 Y_1)\, dm
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

les intégrales $\int$ s'étendant à la masse entière de la lune.

Pour développer ces équations, on représente par p, q, r les composantes relatives aux trois axes principaux de la vitesse de rotation de la lune autour de l'axe instantané de rotation; p, q, r sont des fonctions du temps, et l'on a entre ces nouvelles inconnues et les inconnues φ, ψ, θ les trois équations :

$$\left.\begin{aligned} pdt &= \sin\theta \sin\varphi\, d\psi - \cos\varphi\, d\theta. \\ qdt &= \sin\theta \cos\varphi\, d\psi + \sin\varphi\, d\theta. \\ rdt &= d\varphi - \cos\theta\, d\psi, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

qui reposent sur l'invariabilité des distances qui séparent les différens points du mobile.

On démontre dans la théorie du mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, que les forces X_2, Y_2, Z_2 sont liées aux quantités p, q, r par les équations :

$$X_2 = z_1 \frac{dq}{dt} - y_1 \frac{dr}{dt} + (py_1 - qx_1)\, q + (pz_1 - rx_1)\, r,$$

$$Y_2 = x_1 \frac{dr}{dt} - z_1 \frac{dp}{dt} + (qz_1 - ry_1)\, r + (qx_1 - py_1)\, p,$$

$$Z_2 = y_1 \frac{dp}{dt} - x_1 \frac{dq}{dt} + (rx_1 - pz_1)\, p + (ry_1 - qz_1)\, q.$$

On substituera ces valeurs dans les premiers membres des équations (1), et comme p, q, r sont des quantités communes à tous les points du mobile, on les fera passer en dehors du signe $\int$; tous les termes qui renferment les intégrales $\int x_1 y_1\, dm$, $\int y_1 z_1\, dm$, $\int x_1 z_1\, dm$, disparaîtront, puisque ces intégrales sont nulles d'elles-mêmes, d'après la définition des axes principaux. Si l'on désigne par A, B, C les trois momens d'inertie principaux, de sorte que :

$$\left.\begin{aligned}\int (x_1^2+y_1^2)\,dm &= C\\ \int (z_1^2+x_1^2)\,dm &= B\\ \int (y_1^2+z_1^2)\,dm &= A\end{aligned}\right\}\text{ d'où : }\left\{\begin{aligned}2\int (x_1^2-y_1^2)\,dm &= B-A\\ \int (z_1^2-x_1^2)\,dm &= A-C\\ \int (y_1^2-z_1^2)\,dm &= C-B\end{aligned}\right.$$

les trois équations (1) deviendront :

$$\left.\begin{aligned}Cdr+(B-A)\,pqdt &= \int [(x_1\,Y_1-y_1\,X_1)\,dm]\,dt\\ Bdq+(A-C)\,prdt &= \int [(z_1\,X_1-x_1\,Z_1)\,dm]\,dt\\ Adp+(C-B)\,qrdt &= \int [(y_1\,Z_1-z_1\,Y_1)\,dm]\,dt\end{aligned}\right\}\ (3)$$

les trois intégrales que renferment les seconds membres de ces équations dépendent des forces perturbatrices qu'on suppose agir sur la lune. Dans la question présente, les seules forces qui puissent influer d'une manière sensible, sont : l'attraction du soleil, à cause de la grandeur de sa masse, et l'attraction de la terre, à cause de sa proximité de la lune.

(8) Considérons d'abord l'action de la terre.

Soit T la masse de l'astre attirant qu'il sera permis de regarder comme réduit à son centre de gravité; α, β, γ les coordonnées de ce point, rapportées aux axes mobiles ox_1, oy_1, oz_1; u sa distance à un élément quelconque dm du sphéroïde lunaire, dont les coordonnées sont x_1, y_1, z_1, on aura :

$$u=\sqrt{(x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2+(z_1-\gamma)^2},$$

L'attraction exercée par l'astre T sur l'élément dm sera représentee par $\frac{f\mathrm{T}dm}{u^2}$, f étant l'intensité du pouvoir attractif qui répond à l'unité de masse et de distance, et les composantes de cette force, parallèlement aux axes principaux, seront :

$$X_1\, dm = \frac{fT(\alpha - x_1)\, dm}{u^3}, \qquad Y_1\, dm = \frac{fT(\beta - y_1)\, dm}{u^3},$$

$$Z_1\, dm = \frac{fT(\gamma - z_1)\, dm}{u^3},$$

par conséquent :

$$(x_1 Y_1 - y_1 X_1)\, dm = \frac{fT dm}{u^3}(\beta x_1 - \alpha y_1)$$

et $$\int (x_1 Y_1 - y_1 X_1)\, dm = fT\left[\beta \int \frac{x_1\, dm}{u^3} - \alpha \int \frac{y_1\, dm}{u^3}\right]$$

posons :

$$\Omega = fT \int \frac{dm}{u} = fT \int \frac{dm}{\sqrt{(x_1-\alpha)^2 + (y_1-\beta)^2 + (z_1-\gamma)^2}}$$

comme les limites de cette intégrale sont indépendantes des coordonnées α, β, γ de la planète perturbatrice, on aura :

$$\frac{d\Omega}{d\alpha} = fT \int \frac{(x_1-\alpha)\, dm}{u^3}, \qquad \frac{d\Omega}{d\beta} = fT \int \frac{(y_1-\beta)\, dm}{u^3}$$

d'où $$\beta \frac{d\Omega}{d\alpha} - \alpha \frac{d\Omega}{d\beta} = fT\left[\beta \int \frac{x_1\, dm}{u^3} - \alpha \int \frac{y_1\, dm}{u^3}\right]$$

donc : $$\int (x_1 Y_1 - y_1 X_1)\, dm = \beta \frac{d\Omega}{d\alpha} - \alpha \frac{d\Omega}{d\beta}$$

On démontrera de même que

$$\int (z_1 X_1 - x_1 Z_1)\, dm = \alpha \frac{d\Omega}{d\gamma} - \gamma \frac{d\Omega}{d\alpha}$$

$$\int (y_1 Z_1 - z_1 Y_1)\, dm = \gamma \frac{d\Omega}{d\beta} - \beta \frac{d\Omega}{d\gamma}$$

Par suite, les équations (3) prennent la forme :

$$\left.\begin{aligned}
Cdr + (B - A)\,pqdt &= \left(\beta \frac{d\Omega}{d\alpha} - \alpha \frac{d\Omega}{d\beta}\right) dt.\\
Bdq + (A - C)\,prdt &= \left(\alpha \frac{d\Omega}{d\gamma} - \gamma \frac{d\Omega}{d\alpha}\right) dt.\\
Adp + (C - B)\,qrdt &= \left(\gamma \frac{d\Omega}{d\beta} - \beta \frac{d\Omega}{d\gamma}\right) dt.
\end{aligned}\right\} \quad (4).$$

(9) Pour faire usage de ces équations, il faut remplacer les coordonnées α, β, γ de l'astre T, qui sont rapportées à des axes mobiles ox_1 oy_1 oz_1 par d'autres coordonnées relatives aux axes fixes ox, oy, oz, dont les deux premiers sont dans le plan de l'écliptique fixe, et le troisième perpendiculaire à ce plan.

A cet effet on a les formules :

$$\alpha = x\,(\sin\varphi \sin\psi \cos\theta + \cos\varphi \cos\psi) + y\,(\sin\varphi \cos\psi \cos\theta - \cos\varphi \sin\psi)$$
$$- z \sin\theta \sin\varphi.$$
$$\beta = x\,(\cos\varphi \sin\psi \cos\theta - \sin\varphi \cos\psi) + y\,(\cos\varphi \cos\psi \cos\theta + \sin\varphi \sin\psi)$$
$$- z \sin\theta \cos\varphi.$$
$$\gamma = x \sin\theta \sin\psi + y \sin\theta \cos\psi + z \cos\theta.$$

Telles sont les valeurs qui devront remplacer α, β, γ dans les équations (4). Mais sans effectuer ces substitutions, on peut exprimer d'une manière très simple les seconds membres de ces équations, au moyen des différences partielles de la fonction Ω, relatives aux angles φ, ψ, θ. En effet, si l'on différentie Ω par rapport à φ, en y regardant α, β comme des fonctions de cette variable, déterminées par les formules précédentes, on aura :

$$\frac{d\Omega}{d\varphi} = \frac{d\Omega}{d\alpha}\frac{d\alpha}{d\varphi} + \frac{d\Omega}{d\beta}\frac{d\beta}{d\varphi}.$$

or on trouve : $$\frac{d\alpha}{d\varphi} = \beta \quad \frac{d\beta}{d\varphi} = -\alpha,$$

donc :

$$\frac{d\Omega}{d\varphi} = \beta \frac{d\Omega}{d\alpha} - \alpha \frac{d\Omega}{d\beta}$$

conséquemment le deuxième membre de la première équation (4) n'est autre chose que $\frac{d\Omega}{d\varphi}$.

On a pareillement :

$$\frac{d\Omega}{d\theta} = \frac{d\Omega}{d\alpha}\frac{d\alpha}{d\theta} + \frac{d\Omega}{d\beta}\frac{d\beta}{d\theta} + \frac{d\Omega}{d\gamma}\frac{d\gamma}{d\theta}$$

Et on trouve :

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = -\gamma \sin\varphi, \quad \frac{d\beta}{d\theta} = -\gamma \cos\varphi.$$

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = x \cos\theta \sin\psi + y \cos\theta \cos\psi - z \sin\theta$$

Donc

$$\frac{d\Omega}{d\theta} = -\gamma \sin\varphi \frac{d\Omega}{d\alpha} - \gamma \cos\varphi \frac{d\Omega}{d\beta} + (x \cos\theta \sin\psi + y \cos\theta \cos\psi - z \sin\theta)\frac{d\Omega}{d\gamma}$$

Ajoutant et retranchant $\alpha \frac{d\Omega}{d\gamma} \sin\varphi$, il vient :

$$\frac{d\Omega}{d\theta} = \sin\varphi \left(\alpha \frac{d\Omega}{d\gamma} - \gamma \frac{d\Omega}{d\alpha}\right) + \cos\varphi \left(\beta \frac{d\Omega}{d\gamma} - \gamma \frac{d\Omega}{d\beta}\right)$$

Par un calcul semblable, on trouve après quelques réductions :

$$\frac{d\Omega}{d\psi} = \sin\theta \cos\varphi \left(\alpha \frac{d\Omega}{d\gamma} - \gamma \frac{d\Omega}{d\alpha}\right) + \sin\theta \sin\varphi \left(\gamma \frac{d\Omega}{d\beta} - \beta \frac{d\Omega}{d\gamma}\right) + \cos\theta \left(\alpha \frac{d\Omega}{d\beta} - \beta \frac{d\Omega}{d\alpha}\right)$$

Si l'on remplace dans cette dernière, $\alpha\frac{d\Omega}{d\beta}-\beta\frac{d\Omega}{d\alpha}$ par $-\frac{d\Omega}{d\varphi}$, on tirera les valeurs des seconds membres des deux dernières équations (4), savoir :

$$\alpha\frac{d\Omega}{d\gamma}-\gamma\frac{d\Omega}{d\alpha}=\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\left(\frac{d\Omega}{d\psi}+\frac{d\Omega}{d\varphi}\cos\theta\right)+\frac{d\Omega}{d\theta}\sin\varphi.$$

$$\gamma\frac{d\Omega}{d\beta}-\beta\frac{d\Omega}{d\gamma}=\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\left(\frac{d\Omega}{d\psi}+\frac{d\Omega}{d\varphi}\cos\theta\right)-\frac{d\Omega}{d\theta}\cos\varphi.$$

Les trois équations (4) deviendront enfin :

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{C}dr+(\mathrm{B\text{-}A})\,pqdt &= \frac{d\Omega}{d\varphi}dt\\
\mathrm{B}dq+(\mathrm{A\text{-}C})\,prdt &= \left(\frac{d\Omega}{d\psi}+\frac{d\Omega}{d\varphi}\cos\theta\right)\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}dt+\frac{d\Omega}{d\theta}\sin\varphi\,dt.\\
\mathrm{A}dp+(\mathrm{C\text{-}B})\,qrdt &= \left(\frac{d\Omega}{d\psi}+\frac{d\Omega}{d\varphi}\cos\theta\right)\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}dt-\frac{d\Omega}{d\theta}\cos\varphi\,dt.
\end{aligned}\right\}\ (5)\ (*)$$

(10). Nous n'avons eu égard jusqu'ici qu'à l'action de la terre sur la lune. Si l'on veut maintenant considérer l'action du soleil, il faudra ajouter à la fonction Ω le terme

$$f\mathrm{S}\int\frac{dm}{\sqrt{(x_1-\alpha')^2+(y_1-\beta')^2+(z_1-\gamma')^2}}$$

S désignant la masse du soleil et, α', β', γ', les coordonnées de cet astre, rapportées aux axes mobiles en sorte, que la valeur complète de la fonction Ω deviendra :

$$\Omega=f\mathrm{T}\int\frac{dm}{\sqrt{(x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2+(z_1-\gamma)^2}}$$
$$+f\mathrm{S}\int\frac{dm}{\sqrt{(x_1-\alpha')^2+(y_1-\beta')^2+(z_1-\gamma')^2}}$$

* Mémoire de M. Poisson, sur la rotation de la terre. — 15me cahier du Journal de l'Ecole Polytechnique, page 200.

les intégrales s'étendant à la masse entière de la lune; si l'on opère sur le second terme de Ω comme on a fait sur le premier, on remplacera les coordonnées x', y', z' par leurs valeurs en fonctions des trois angles φ, ψ, θ, et prenant les différences partielles relatives à chacune de ces inconnues, on voit que les équations (5) conserveront la même forme.

Ainsi, ces équations serviront à déterminer, de la manière la plus générale, le mouvement de rotation de la lune sollicitée par les attractions de la terre et du soleil. En leur associant les trois équations (2), on aura un système de six équations différentielles du premier ordre, entre les six inconnues p, q, r, φ, ψ, θ, et la variable t. Il s'agira d'en déduire, par l'intégration, les valeurs de ces six inconnues en fonction du temps t, et d'un pareil nombre de constantes arbitraires : la détermination des angles φ, ψ, θ, fera connaître, à chaque instant, la position de la lune autour de son centre de gravité, et la détermination des quantités p, q, r, fera connaître à chaque instant la position de l'axe instantané de rotation dans l'intérieur du mobile, et la vitesse angulaire de rotation autour de cet axe ; car les cosinus des angles λ, μ, ν, que l'axe instantané fait avec les axes principaux ox_1 oy_1 oz_1 sont respectivement :

$$\cos\lambda = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} \quad \cos\mu = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} \quad \cos\nu = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

et la vitesse de rotation autour de l'axe est :

$$\omega = \sqrt{p^2+q^2+r^2}.$$

On n'est point parvenu à résoudre rigoureusement ce système d'équations différentielles : à défaut d'une solution générale, on a recours à des méthodes d'approximation fondées sur la petitesse des forces perturbatrices qui agissent sur la lune.

(11) Avant d'aller plus loin, il faut établir une distinction entre les axes principaux de la lune fondée sur la grandeur des momens d'inertie qui s'y rapportent.

A l'origine du mouvement de la lune, l'axe instantané de rotation a pu ne pas coïncider exactement avec l'un des axes principaux qui se coupent à son centre de gravité, pourvu qu'il s'en écartât très peu; alors cet axe aura oscillé de part et d'autre de l'axe principal; mais pour que ces oscillations soient demeurées très-petites pendant toute la durée du mouvement, c'est-à-dire, pour que le mouvement de rotation de la lune soit demeuré stable autour de l'axe principal dont il s'agit, la théorie apprend qu'il faut que cet axe soit relatif au plus grand ou au plus petit moment d'inertie. Or, la lune est nécessairement plus applatie dans le sens de ses pôles de rotation que dans tout autre sens; conséquemment l'axe principal, autour duquel a oscillé l'axe instantané, se rapportera au plus grand moment d'inertie. Cela posé, les observations actuelles ne signalent aucun déplacement sensible, dans la position des pôles de rotation de la surface à la lune; nous devons conclure de là, que les oscillations de l'axe instantané, autour de l'axe principal relatif au plus grand moment d'inertie, sont aujourd'hui devenues insensibles; en sorte que la direction de l'axe de rotation de la lune n'éprouve plus que des perturbations provenant des actions permanentes de la terre et du soleil sur sa partie non sphérique.

(12) Nous appellerons C le plus grand moment d'inertie, relatif à l'axe des z_1; en sorte, que oz_1 sera l'axe autour duquel la lune tournerait sans les actions du soleil et de la terre : x_1oy_1 sera le plan de l'équateur lunaire; il résulte des considérations précédentes, que l'axe instantané de rotation s'écarte très peu de l'axe oz_1, et comme le sinus de l'angle que font entr'elles ces deux droites est égal à

$$\sqrt{1-\cos^2\nu}=\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

p et q seront deux fractions très petites de r, et du même ordre que les forces perturbatrices, puisque ce sinus et conséquemment les quantités p et q, deviennent nulles lorsqu'on suppose ces forces nulles. Nous adoptons pour plan fixe, passant par le centre de gravité de la lune, un plan parallèle au plan d'une écliptique fixe qui répond à une époque donnée : de cette manière θ représentera l'inclinaison du plan de l'équateur lunaire sur cette écliptique, quantité dont les astronomes ont trouvé, comme nous l'avons dit, la valeur moyenne fort petite; ψ sera la longitude du nœud ascendant de l'équateur lunaire, lequel est en même temps le nœud descendant de l'écliptique par rapport au même équateur, c'est-à-dire l'équinoxe d'automne de la lune. Cet angle ψ représenté (fig. 2) par NLx; est vu du centre de la lune, et compté à partir de la ligne fixe Lx, en sens contraire du mouvement de rotation de la lune. Enfin, φ est la distance angulaire du point de l'équateur lunaire par lequel passe l'axe pricipal ox_1 au nœud ascendant; cet angle est compté dans le sens de la rotation, il est représenté par NLx_1 (les flèches indiquent les sens dans lesquels sont comptés les deux angles ψ et φ).

(13) Pour résoudre approximativement les équations (5), nous allons développer la fonction Ω; nous ne considérerons d'abord que le terme dépendant de l'attraction terrestre, c'est-à-dire :

$$fT\int\frac{dm}{\sqrt{(x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2+(z_1-\gamma)^2}}.$$

car nous verrons bientôt que l'action du soleil sur la lune n'a qu'une influence insensible sur les mouvemens de l'équateur lunaire, par rapport à l'action de la terre.— Si l'on désigne par δ la distance de la terre au centre de gravité de la lune, en sorte que:

$$\delta^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$

et qu'on développe la quantité $\dfrac{1}{\sqrt{(x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2+(z_1-\gamma)^2}}$ suivant les puissances négatives de δ, on aura, en négligeant les termes de l'ordre supérieur à $\dfrac{1}{\delta^3}$,

$$\Omega=\frac{fTm}{\delta}-\frac{fTm}{2\delta^3}(x_1^2+y_1^2+z_1^2)dm+\frac{3fT}{2\delta^5}\Big[\alpha^2\int x_1^2\,dm$$
$$+\beta^2\int y_1^2\,dm+\gamma^2\int z_1^2\,dm\Big]$$

remplaçant γ^2 par $\delta^2 - \alpha^2 - \beta^2$, et ayant égard aux relations

$$\int (x_1{}^2 - z_1{}^2)\, dm = \mathrm{C} - \mathrm{A} \quad \int (y_1{}^2 - z_1{}^2)\, dm = \mathrm{C} - \mathrm{B}$$

on aura :

$$\Omega = \frac{f\mathrm{T}\,m}{\delta} - \frac{f\mathrm{T}\,(2\,\mathrm{C} - \mathrm{A} - \mathrm{B})}{2\,\delta^3} + \frac{3f\mathrm{T}}{2\,\delta^5}\left[(\mathrm{C} - \mathrm{A})\,\alpha^2 + (\mathrm{C} - \mathrm{B})\,\beta^2\right]$$

Comme les équations (5) ne renferment que les différences partielles de Ω, relatives à φ, ψ, θ, il est inutile de conserver les deux premiers termes de Ω qui sont indépendans de ces variables. — Remarquons de plus, que la force accélératrice qui sollicite chaque point de la lune vers la terre, est représentée par

$$f\,(\mathrm{T} + \mathrm{L})$$

à l'unité de distance, T et L étant les masses de la terre et de la lune, et cette même force a aussi pour expression, en vertu des lois de Kepler, $\rho^3 m^2$, en désignant par ρ la distance moyenne de la lune à la terre et par m la vîtesse moyenne angulaire de ce satellite, on a donc :

$$\rho^3 m^2 = f(\mathrm{T} + \mathrm{L})$$

La masse de la lune, conclue de son action pour soulever les eaux de la mer, a été trouvée $\frac{1}{75}$ de celle de la terre. On en conclut :

$$f\mathrm{T} = \frac{75}{76}\,\rho^3 m^2.$$

Si on néglige la fraction $\frac{m^2}{76}$ on pourra regarder $f\mathrm{T}$ comme égal, à fort peu près à $\rho^3\, m^2$, et d'après ces considérations l'expression de Ω se réduira, dans la question présente, à la forme suivante :

$$\Omega = \frac{3m^2}{2}\,\frac{\rho^3}{\delta^3}\left((\mathrm{C} - \mathrm{A})\,\frac{\alpha^2}{\delta^2} + (\mathrm{C} - \mathrm{B})\,\frac{\beta^2}{\delta^2}\right)$$

(14) Il reste à y remplacer α^2 et 6^2 par leurs valeurs en fonction des angles φ, ψ, θ, et des coordonnées x, y, z, relatives aux axes fixes dont deux Lx, Ly, sont dans le plan de l'écliptique fixe, et le troisième Lz dirigé vers le pôle boréal de l'écliptique. Mais auparavant, nous exprimerons x, y, z, au moyen de la distance de la terre à la lune, et du mouvement vrai en longitude de la terre vu de la lune.

Soit LP (fig. 3) la projection du rayon vecteur mené de la lune à la terre, sur le plan fixe xLy; ν l'angle PLx qui représente le mouvement vrai en longitude de la terre vu de la lune; l la longitude NLx du nœud ascendant de l'orbite, ces deux angles ν et l étant comptés dans le sens de la rotation de la lune, on aura :

$$x = LQ = LP \cos \nu = \frac{\delta}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 TLP}} \cos \nu.$$

$$y = PQ = LP \sin \nu = \frac{\delta}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 TLP}} \sin \nu.$$

$$z = TP = \frac{\delta \operatorname{tang} TLP}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 TLP}}$$

Or, si l'on conçoit une sphère décrite du centre L qui coupe les trois plans TLP, PLN, TLN, suivant les arcs ab, ac, bc, il en résultera un triangle sphérique rectangle, dans lequel le côté bc sera égal à $\nu - l$ et l'angle opposé au côté ab sera l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique, que nous désignons par λ; on aura conséquemment :

$$\operatorname{tang} TLP = \operatorname{tang} \lambda \sin (\nu - l)$$

posons pour abréger :

$$[1 + \operatorname{tang}^2 \lambda \sin^2 (\nu - l)]^{-\frac{1}{2}} = U$$

Les valeurs exactes de x, y, z seront :

$$x = U\delta \cos \nu, \quad y = U\delta \sin \nu, \quad z = U\delta \operatorname{tang} \lambda \sin (\nu - l)$$

Par suite, les valeurs de α et de 6 deviendront :

$$\alpha = U\delta\,[\sin(\nu + \psi)\cos\theta\sin\varphi + \cos(\nu + \psi)\cos\varphi - \operatorname{tang}\lambda\sin(\nu - l)\sin\theta\sin\varphi]$$

$$6 = U\delta\,[\sin(\nu + \psi)\cos\theta\cos\varphi - \cos(\nu + \psi)\sin\varphi - \operatorname{tang}\lambda\sin(\nu - l)\sin\theta\cos\varphi]$$

Elevant au carré multipliant par C :

$$C(\alpha^2 + 6^2) = CU^2\delta^2 \left\{ \cos^2(\nu + \psi) + \left[\sin(\nu + \psi)\cos\theta - \operatorname{tang}\lambda \sin(\nu - l)\sin\theta\right]^2 \right\}$$

Réunissant ensuite les termes $A\alpha^2 + B6^2$ il vient :

$$\begin{aligned} A\alpha^2 + B6^2 = {} & \frac{(A+B)}{2} U^2\delta^2 \left\{ \cos^2(\nu + \psi) + [\sin(\nu + \psi)\cos\theta - \operatorname{tang}\lambda\sin(\nu - l)\sin\theta]^2 \right\} \\ & + \frac{(A-B)}{2} U^2\delta^2 \left\{ \cos^2(\nu + \psi) - [\sin(\nu + \psi)\cos\theta - \operatorname{tang}\lambda\sin(\nu - l)\sin\theta]^2 \right\} \cos 2\varphi \\ & + \frac{(A-B)}{2} U^2\delta^2 \cos(\nu + \psi)[\sin(\nu + \psi)\cos\theta - \operatorname{tang}\lambda\sin(\nu - l)\sin\theta]\sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans l'expression précédente de Ω, on aura :

$$\begin{aligned} \Omega = {} & \frac{3m^2}{4}\frac{\rho^3}{\delta^3} U^2(2C - A - B) \left\{ \cos^2(\nu + \psi) + [\sin(\nu + \psi)\cos\theta - \operatorname{tang}\lambda\sin(\nu - l)\sin\theta]^2 \right\} \\ & + \frac{3m^2}{4}\frac{\rho^3}{\delta^3}(B - A)U^2 \Big\{ \big[\cos^2(\nu + \psi) - [\sin(\nu + \psi)\cos\theta - \operatorname{tang}\lambda\sin(\nu - l)\sin\theta]^2\big]\cos 2\varphi \\ & + 2\cos(\nu + \psi)[\sin(\nu + \psi)\cos\theta - \operatorname{tang}\lambda\sin(\nu - l)\sin\theta]\sin 2\varphi \Big\} \end{aligned}$$

(15) Actuellement on prendra les différences partielles de Ω relatives à φ, ψ, θ. La différentiation relative à φ fera disparaître le premier terme de Ω, on aura :

$$\frac{d\Omega}{d\varphi}=\frac{3m^2}{2}\,\frac{\rho^3}{\delta^3}\,(\mathrm{B}-\mathrm{A})\,\mathrm{U}^2\Big\{\Big[[\sin(\nu+\psi)\cos\theta-\operatorname{tang}\lambda\sin(\nu-l)\sin\theta]^2-\cos^2(\nu+\psi)\Big]\sin 2\varphi$$
$$+2\cos(\nu+\psi)\,[\sin(\nu+\psi)\cos\theta-\operatorname{tang}\lambda\sin(\nu-l)\sin\theta]\cos 2\varphi\Big\}$$

$$\frac{d\Omega}{d\theta}=\frac{3m^2}{2}\,\frac{\rho^3}{\delta^3}\,(\mathrm{B}-\mathrm{A})\,\mathrm{U}^2\Big\{[\sin(\nu+\psi)\cos\theta-\operatorname{tang}\lambda\sin(\nu-l)\sin\theta]$$
$$[\sin(\nu+\psi)\sin\theta+\operatorname{tang}\lambda\sin(\nu-l)\cos\theta]\cos 2\varphi$$
$$-\cos(\nu+\psi)[\sin(\nu+\psi)\sin\theta+\operatorname{tang}\lambda\sin(\nu-l)\cos\theta]\sin 2\varphi\Big\}$$
$$-\frac{3m^2}{2}\,\frac{\rho^3}{\delta^3}(2\mathrm{C}-\mathrm{A}-\mathrm{B})\,\mathrm{U}^2\,[\sin(\nu+\psi)\cos\theta-\operatorname{tang}\lambda\sin(\nu-l)\sin\theta]$$
$$[\sin(\nu+\psi)\sin\theta+\operatorname{tang}\lambda\sin(\nu-l)\cos\theta]$$

$$\frac{d\Omega}{d\psi}=\frac{3m^2}{2}\,\frac{\rho^3}{\delta^3}\,(\mathrm{B}-\mathrm{A})\,\mathrm{U}^2\Big\{[\cos 2(\nu+\psi)\cos\theta$$
$$+\sin(\nu+\psi)\operatorname{tang}\lambda\sin(\nu-l)\sin\theta]\sin 2\varphi-\Big[\cos(\nu+\psi)\sin(\nu+\psi)$$
$$+[\sin(\nu+\psi)\cos\theta-\operatorname{tang}\lambda\sin(\nu-l)\sin\theta]\cos(\nu+\psi)\cos\theta\Big]\cos 2\varphi\Big\}$$
$$+\frac{3m^2}{2}\,\frac{\rho^3}{\delta^3}\,(2\mathrm{C}-\mathrm{A}-\mathrm{B})\,\mathrm{U}^2\Big[-\sin(\nu+\psi)\cos(\nu+\psi)$$
$$-[\sin(\nu+\psi)\cos\theta-\operatorname{tang}\lambda\sin(\nu-l)\sin\theta]\cos(\nu+\psi)\cos\theta\Big]$$

(16) On substituera ces différences partielles dans les seconds membres des équations (5), et l'on aura après plusieurs réductions faciles à apercevoir :

$$\left(\frac{d\Omega}{d\psi}+\frac{d\Omega}{d\varphi}\cos\theta\right)\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}+\frac{d\Omega}{d\theta}\sin\varphi$$
$$=3m^2\,(\mathrm{A}-\mathrm{C})\,\mathrm{U}^2\,\frac{\rho^3}{\delta^3}\Big\{[\sin(\nu+\psi)\cos\theta-\operatorname{tang}\lambda\sin(\nu-l)\sin\theta)]$$
$$[\sin(\nu+\psi)\sin\theta+\operatorname{tang}\lambda\sin(\nu-l)\cos\theta]\sin\varphi$$
$$+[\sin(\nu+\psi)\sin\theta+\operatorname{tang}\lambda\sin(\nu-l)\cos\theta]\cos\varphi\Big\}$$

$$\left(\frac{d\Omega}{d\psi}+\frac{d\Omega}{d\varphi}\cos\theta\right)\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}-\frac{d\Omega}{d\theta}\cos\varphi$$

$$=3m^2(\mathrm{C}-\mathrm{B})\,\mathrm{U}^2\frac{\rho^3}{\delta^3}\Big\{[\sin(\nu+\psi)\cos\theta-\tang\lambda\sin(\nu-l)\sin\theta)]$$

$$[\sin(\nu+\psi)\sin\theta+\tang\lambda\sin(\nu-l)\cos\theta]\cos\varphi$$

$$+[\sin(\nu+\psi)\sin\theta+\tang\lambda\sin(\nu-l)\cos\theta]\sin\varphi\Big\}$$

Désignons par π la longitude du périgée lunaire, et par e l'excentricité de l'orbite, les formules du mouvement elliptique donnent

$$\frac{\rho}{\delta}=1+e\cos(mt-\pi)+e^2\cos 2(mt-\pi)$$

En négligeant le cube et les puissances supérieures de l'excentricité, on en déduit au même degré d'approximation :

$$\frac{\rho^3}{\delta^3}=1+\frac{3}{2}e^2+3e\cos(mt-\pi)+\frac{9e^2}{2}\cos 2(mt-\pi)$$

L'observation ayant donné pour θ une valeur fort petite (1° 28′ 45″) nous négligerons son carré dans les expressions précédentes, ce qui réduira $\cos\theta$ à l'unité, et $\sin\theta$ à θ. Enfin, nous négligerons pareillement les termes du troisième ordre par rapport à e, λ, et par conséquent on aura :

$$\mathrm{U}^2=1-\lambda^2\sin^2(\nu-l)$$

Les expressions précédentes se réduiront à :

$$\frac{d\Omega}{d\varphi}=\frac{3m^2}{2}(\mathrm{B}-\mathrm{A})\Big\{(1+\frac{3}{2}e^2-\frac{1}{2}\lambda^2)\sin 2(\nu+\psi-\varphi)$$

$$-2\lambda\theta\sin(\nu-l)\cos(\nu+\psi-\varphi)$$

$$+[3e\cos(mt-\pi)+\frac{9e^2}{2}\cos 2(mt-\pi)+\frac{\lambda^2}{2}\cos 2(\nu-l)]\sin 2(\nu+\psi-\varphi)\Big\}$$

$$\left(\frac{d\Omega}{d\psi}+\frac{d\Omega}{d\varphi}\cos\theta\right)\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}+\frac{d\Omega}{d\theta}\sin\varphi=3m^2(\mathrm{A}-\mathrm{C})[1+3e\cos(mt-\pi)]$$

$$[\theta\sin(\nu+\psi)+\lambda\sin(\nu-l)]\cos(\nu+\psi-\varphi),$$

$$\left(\frac{d\Omega}{d\psi}+\frac{d\Omega}{d\varphi}\cos\theta\right)\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}-\frac{d\Omega}{d\theta}\cos\varphi=3m^2(\mathrm{C}-\mathrm{B})\,[1+3e\cos(mt-\pi)]$$
$$[\theta\sin(\nu+\psi)+\lambda\sin(\nu-l)]\sin(\nu+\psi-\varphi)].$$

Enfin, on substituera ces valeurs dans les équations (5) et elles deviendront :

$$\left.\begin{aligned}
dr+\frac{\mathrm{B-A}}{\mathrm{C}}pqdt &= \frac{3m^2}{2}\left(\frac{\mathrm{B-A}}{\mathrm{C}}\right)dt\left\{(1+\frac{3}{2}e^2-\frac{1}{2}\lambda^2)\sin 2(\nu+\psi-\varphi)\right.\\
&\qquad -2\lambda\theta\sin(\nu-l)\cos(\nu+\psi-\varphi)+\\
&\left.[3e\cos(mt-\pi)+\frac{9e^2}{2}\cos 2(mt-\pi)+\frac{\lambda^2}{2}\cos 2(\nu-l)]\sin 2(\nu+\psi-\varphi)\right\}\\
dq-\frac{\mathrm{C-A}}{\mathrm{B}}prdt &= -3m^2\left(\frac{\mathrm{C-A}}{\mathrm{B}}\right)[1+3e\cos(mt-\pi)]\,[\theta\sin(\nu+\psi)\\
&\qquad +\lambda\sin(\nu-l)]\cos(\nu+\psi-\varphi)\,dt.\\
dp+\frac{\mathrm{C-B}}{\mathrm{A}}qrdt &= 3m^2\left(\frac{\mathrm{C-B}}{\mathrm{A}}\right)[1+3e\cos(mt-\pi)]\,[\theta\sin(\nu+\psi)\\
&\qquad +\lambda\sin(\nu-l)]\sin(\nu+\psi-\varphi)\,dt.
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

(17). Si la lune était composée de couches homogènes, terminées par des surfaces de révolution qui eussent toutes pour axe de figure l'axe de rotation, les momens d'inertie relatifs aux axes situés dans le plan de l'équateur seraient égaux, en sorte que l'on aurait $\mathrm{A}=\mathrm{B}$, et la première des équations (6) se réduirait à $dr=0$. Ainsi on aurait alors $r=n$; n étant une constante; en sorte que la vitesse de rotation de la lune autour de son axe de figure serait rigoureusement constante. Or, l'observation a montré que le moyen mouvement de rotation de la lune est égal à son moyen mouvement de révolution autour de la terre. La constante n serait donc égale à m; et l'on serait ainsi obligé d'admettre qu'à l'origine la vitesse de rotation de la lune a été rigoureusement égale à sa vitesse moyenne de révolution autour de la terre, résultat infiniment peu vraisemblable; en conséquence nous rejetterons l'hypothèse qui regarderait la lune comme un sphéroïde de révolution autour de son petit axe.

(18). En négligeant les quantités du premier ordre par rapport aux forces perturbatrices, p et q devront être regardés comme nuls, puisque ces quantités sont de l'ordre de ces forces (n° 12); la première des équations (6) se réduira donc encore à $dr = 0$, d'où l'on tire $r = n$, n étant une constante pour laquelle nous devrons prendre, comme dans le numéro précédent, la vitesse m du moyen mouvement, en sorte que $n = m$ et conséquemment $r = m$; dans cette hypothèse, les angles θ et ψ sont constans : car on tire des deux premières équations (2) (n° 7)

$$\left.\begin{aligned} d\theta &= (q \sin\varphi - p\cos\varphi)\, dt \\ \sin\theta\, d\psi &= (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\, dt \end{aligned}\right\} (7)$$

d'où l'on voit que les différentielles $d\theta$ et $d\psi$ sont de l'ordre des quantités p et q. Enfin la troisième équation (2) donne alors $d\varphi = mdt$, d'où il résulte :

$$\varphi = mt + \varepsilon,$$

ε étant une constante arbitraire.

(19). Actuellement si on néglige les quantités du second ordre par rapport aux forces perturbatrices, la seconde et la troisième des équations (6) deviennent, en y remplaçant r par m.

$$(q) \qquad dq - \frac{\text{C-A}}{\text{B}}\, pmdt = -3m^2\, \frac{(\text{C-A})}{\text{B}}\, [1 + 3e\cos(mt - \pi)]$$
$$[\theta\sin(\nu + \psi) + \lambda\sin(\nu - l)]\cos(\nu + \psi - \varphi)\, dt$$

$$(p) \qquad dp + \frac{\text{C-B}}{\text{A}}\, qmdt = 3m^2\, \frac{(\text{C-B})}{\text{A}}\, [1 + 3e\cos(mt - \pi)]$$
$$[\theta\sin(\nu + \psi) + \lambda\sin(\nu - l)]\sin(\nu + \psi - \varphi)\, dt$$

et dans leurs seconds membres, on devra regarder θ et ψ comme des constantes arbitraires. — Quant à l'angle $\nu + \psi - \varphi$, il est aisé de reconnaître qu'il reste toujours fort petit; car la troisième des équations (2) dans laquelle nous négligeons le carré de θ, donne en général

$$\varphi - \psi = \int r dt$$

et puisque nous considérons r comme constant, il en résulte $\varphi - \psi = mt$ (en fixant pour plus de simplicité l'origine de l'intégrale de manière que la constante soit nulle); or, la théorie du mouvement elliptique donne pour la quantité v l'expression suivante :

$$v = mt + 2e \sin(mt - \pi) + \frac{5}{4} e^2 \sin 2(mt - \pi) - \frac{1}{4} \lambda^2 \sin 2(mt - \pi)$$
$$+ \mathrm{P} \sin \alpha + \mathrm{Q} \sin \beta + \ldots \text{ etc.}$$

en négligeant les termes qui renferment e et λ à des puissances supérieures à la deuxième, et représentant par $\mathrm{P} \sin \alpha + \mathrm{Q} \sin \beta \ldots$ les inégalités périodiques qui affectent le mouvement de révolution; $\alpha, \beta\ldots$ sont des angles qui croissent uniformément avec le temps.

On aura donc :

$$v + \psi - \varphi = 2e \sin(mt - \pi) + \frac{5}{4} e^2 \sin 2(mt - \pi) - \frac{1}{4} \lambda^2 \sin 2(mt - \pi)$$
$$+ \mathrm{P} \sin \alpha + \mathrm{Q} \sin \beta + \ldots \text{ etc.}$$

Le sinus et le cosinus de $v + \psi - \varphi$ sont multipliés dans les équations différentielles précédentes par un facteur qui contient θ ou λ, et comme nous sommes convenus de négliger les termes de l'ordre $e\lambda^2$, $e^2\lambda$, $e^2\theta$, nous devrons réduire, dans les seconds membres de ces équations, le cosinus de $(v + \psi - \varphi)$ à l'unité, et le sinus au premier terme $2e \sin(mt - \pi)$: quant aux inégalités périodiques $\mathrm{P} \sin \alpha + \mathrm{Q} \sin \beta + \ldots$ Nous les négligeons, parce qu'ils ne donneraient aucun résultat appréciable dans l'intégration.

Alors si l'on substitue mt à v dans les termes que l'on conserve, les équations différentielles se réduisent à

$$(q)\quad dq - \frac{\mathrm{C} - \mathrm{A}}{\mathrm{B}} pm\,dt = -3m^2 \frac{(\mathrm{C} - \mathrm{A})}{\mathrm{B}} [\theta \sin(mt + \psi) + \lambda \sin(mt - l)]\,dt$$
$$- 9m^2 \frac{(\mathrm{C} - \mathrm{A})}{\mathrm{B}} e\,[\theta \sin(mt + \psi) + \lambda \sin(mt - l)] \cos(mt - \pi)\,dt$$

$$(p)\quad dp + \frac{\mathrm{C} - \mathrm{B}}{\mathrm{A}} qm\,dt = 6m^2 \frac{(\mathrm{C} - \mathrm{B})}{\mathrm{A}} e\,[\theta \sin(mt + \psi) + \lambda \sin(mt - l)]$$
$$\sin(mt - \pi)\,dt.$$

En négligeant d'abord les seconds membres, on trouvera aisément pour les premières parties des expressions de p et de q

$$p = \sqrt{\frac{C - B}{A}}\, \alpha \sin\left(\sqrt{\frac{(C - A)(C - B)}{A B}}\, mt + 6\right)$$
$$q = - \sqrt{\frac{C - A}{B}}\, \alpha \cos\left(\sqrt{\frac{(C - A)(C - B)}{A B}}\, mt + 6\right)$$

α et 6 désignant deux constantes arbitraires. — Puisqu'il résulte de l'observation, que les quantités p et q sont très petites, il faut que la constante α soit elle-même très petite, et de plus que le produit (C-A) (C-B) soit positif : autrement le coefficient de mt étant imaginaire, les sinus et cosinus précédens se transformeraient par les formules connues en exponentielles réelles qui contiendraient le temps t, et croitraient indéfiniment avec cette variable. — Cette seconde condition est en effet remplie dans la nature ; car la lune étant applatie dans le sens des pôles de rotation, le moment d'inertie C, relatif à son axe de rotation, doit être plus grand que les deux autres momens A et B : ainsi les facteurs C—A et C—B sont positifs.

Actuellement on aura égard au terme

$$- 3m^2 \frac{C-A}{B} [\theta \sin (mt + \psi) + \lambda \sin mt - l]\, dt$$

que renferme le second membre de l'équation (q), les parties correspondantes des valeurs de p et q seront de la forme :

$$p = H \theta \sin (mt + \psi) + K \lambda \sin (mt - l)$$
$$q = H' \theta \cos (mt + \psi) + K' \lambda \cos (mt - l)$$

les coefficiens H et H', K et K' s'obtiendront en substituant successivement ces termes et leurs différentielles à la place de p, q, dp, dq, dans les deux équations (q) et (p).

On trouvera ainsi sans difficulté :

$$H = - \frac{3m (C-A)(C-B)}{AB - (C-A)(C-B)} \qquad H' = \frac{3m A (C-A)}{AB - (C-A)(C-B)}$$

$$K = -\frac{3m^2(C\text{-}A)(C\text{-}B)}{m\,[AB-(C\text{-}A)(C\text{-}B)]+2m'AB}$$

$$K' = \frac{3m^2\,A\,(C\text{-}A)}{m\,[AB-(C\text{-}A)(C\text{-}B)+2m'AB}$$

Dans ces deux dernières expressions, on a représenté la longitude l du nœud ascendant de l'orbite lunaire par $\gamma - m't$; et, comme $\frac{m'}{m}$ est une petite fraction, on a négligé son carré. On sait, en effet, que le nœud ascendant de l'orbite lunaire a un mouvement contraire au mouvement de révolution de la lune, en vertu duquel il parcourt l'écliptique en 6793 j., 39, tandis que la lune fait sa révolution sidérale en 27, j. 32166; on a donc sensiblement :

$$\frac{m'}{m} = \frac{27\ \text{j.},\ 32166}{6793\ \text{j.},\ 39} = 0,\ 004022$$

pour que les données de l'observation astronomique soient satisfaites, il faut que les coefficiens H, H', K, K', soient très petits, et cela aura lieu si les rapports $\frac{C-A}{B}$, $\frac{C-B}{A}$ ont de très petites valeurs : bien qu'on ne possède pas, dans l'état actuel de l'astronomie, de données précises sur les grandeurs de ces rapports, nous assignerons plus loin des limites qu'ils ne sauraient dépasser : nous les regarderons dès à présent comme très petits.

(20). Il reste à tenir compte des termes qui sont affectés de l'excentricité e dans les équations (p) et (q); mais d'abord ces termes pourront être réduits à une expression plus simple : en effet, les quatre produits $\sin(mt+\psi)\sin(mt-\pi)$, $\sin(mt-l)\sin(mt-\pi)$, $\sin(mt+\psi)\cos(mt-\pi)$, $\sin(mt-l)\cos(mt-\pi)$, se transformeront en sommes et différences de sinus et de cosinus, dont les uns renfermeront l'angle $2mt$, et les autres en seront indépendans : les premiers resteront insensibles après l'intégration; et, comme tels peuvent être rejetés : les autres qui renferment les angles $(\pi - l)$, $(\psi - l)$, augmenteront par l'intégration qui leur fera acquérir de petits diviseurs : nous allons les considérer.

Les termes de l'équation (q) auxquels nous avons égard, sont :

$$-\frac{9m^2}{2}\cdot\frac{C-A}{B}\,e\,[\theta\sin(\pi+\psi)+\lambda\sin(\pi-l)]\,dt$$

et ceux de l'équation (p) sont :

$$+\,3m^2\cdot\frac{C-B}{A}\,e\,[\theta\cos(\pi+\psi)+\lambda\cos(\pi-l)]\,dt.$$

Soient :

$$\begin{array}{l} L\,e\theta\sin(\pi+\psi)\;+M\,e\lambda\sin(\pi-l) \\ L'e\theta\cos(\pi+\psi)\;+M'e\lambda\cos(\pi-l) \end{array}$$

Les parties correspondantes des inconnues p et q. Pour calculer les coefficiens L, L', M, M', nous représenterons par $\sigma+it$ la longitude π du périgée de la terre vue de la lune : nous aurons entre M et M' les deux équations :

$$B\,M'(i+m')+(C-A)\,M\,m=\frac{9m^2}{2}(C-A)$$

$$A\,M\,(i+m')+(C-B)\,M'm=3m^2\,(C-B)$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$M'+\frac{C-A}{B}\,\frac{m}{i+m'}\,M=\frac{9m^2}{i+m'}\cdot\frac{C-A}{2B}$$

$$M+\frac{C-B}{A}\,\frac{m}{i+m'}\,M'=\frac{3m^2}{i+m'}\cdot\frac{C-B}{A}$$

Vû la petitesse des rapports $\frac{C-A}{B}$, $\frac{C-B}{A}$, on peut négliger les seconds termes des premiers membres, et l'on aura à fort peu près :

$$M=3m\,\frac{C-A}{B}\,\frac{m}{i+m'}\qquad M'=\frac{9m}{2}\,\frac{C-B}{A}\,\frac{m}{i+m'}$$

On trouvera pareillement :

$$L = 3m \frac{C-A}{B} \frac{m}{i} \qquad L' = \frac{9m}{2} \frac{C-B}{A} \frac{m}{i}$$

Le périgée lunaire a un mouvement propre dirigé dans le même sens que le mouvement de la lune, en vertu duquel il décrit une révolution complète dans l'espace de 3232 j., 5753. En conséquence, on a sensiblement :

$$\frac{i}{m} = \frac{27{,}32166}{3232{,}5753} = 0{,}008452$$

Et en réunissant ce rapport à celui de m' à m (n° 19), on trouve :

$$\frac{i+m'}{m} = o,\, 012474$$

Si l'on supposait que les rapports $\frac{C-A}{B}$, $\frac{C-B}{A}$ atteignissent 0,0006 (valeur à laquelle ils ne s'élèvent sans doute pas, comme on le verra plus loin). On pourrait en conclure une évaluation approximative des coefficiens M et M', L, L' : Mais ces résultats sont trop hypothétiques pour que nous devions nous y arrêter.

En réunissant les divers termes que nous venons de calculer, on aura une première approximation des valeurs de p et de q, savoir :

$$\begin{aligned} p = \sqrt{\frac{C-B}{A}}\,\alpha \sin\left(\sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}}\,mt + 6\right) \\ + H\,\theta \sin(mt+\psi) + K\lambda \sin\left((m+m')\,t-\gamma\right) \\ + L\,e\theta \sin(it+\sigma+\psi) + M\,e\lambda \sin\left[(i+m')\,t+\sigma-\gamma\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q = -\sqrt{\frac{C-A}{B}}\,\alpha\left(\cos\sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}}\,mt + 6\right) \\ + H'\theta \cos(mt+\psi) + K\lambda \cos\left((m+m')\,t-\gamma\right) \\ + L'\,e\theta \cos(it+\sigma+\psi) + M'\,e\lambda \cos\left[(i+m')\,t+\sigma-\gamma\right) \end{aligned}$$

Ces expressions vont nous servir pour apprécier l'influence du terme $\frac{B-A}{C} pqdt$ que renferme la première des équations (6), dont l'intégration va maintenant nous occuper.

En substituant les valeurs précédentes de p et de q dans les équations (7), on en déduirait par de nouvelles intégrations les valeurs approchées de θ et de ψ qui feraient connaître les variations de l'inclinaison de l'équateur lunaire, et le mouvement des nœuds de cet équateur; mais il ne paraît pas, qu'en suivant cette marche, on puisse expliquer, du moins avec simplicité, le phénomène remarquable de la coïncidence des nœuds de l'équateur lunaire avec les nœuds moyens de l'orbite: c'est pourquoi nous nous bornons à indiquer sommairement ces calculs, et nous les reprendrons d'une manière plus directe, après que nous aurons discuté la libration en longitude.

Détermination de la libration en longitude.

(21) Les lois de la libration en longitude dépendent de l'intégration de la première des équations (6).

$$dr + \frac{B-A}{C} pqdt = \frac{3m^2}{2}\left(\frac{B-A}{C}\right) dt \left\{ \left(1 + \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2}\lambda^2\right) \sin 2(\nu+\psi-\varphi) \right.$$
$$- 2\lambda\theta \sin(\nu - l)\cos(\nu+\psi-\varphi)$$
$$\left. + \left[3e\cos(mt-\pi) + \frac{9e^2}{2}\cos 2(mt-\pi) + \frac{\lambda^2}{2}\cos 2(\nu-l)\right]\sin 2(\nu+\psi-\varphi) \right\}$$

En ne tenant compte que des quantités du premier ordre par rapport aux forces perturbatrices, on devait négliger le produit pq, et regarder dans le second membre ψ comme une constante, et φ comme égal à mt : on remplacerait $\nu + \psi - \varphi$ par la valeur trouvée (n° 19), et alors le second membre se développerait en une série de sinus ou cosinus des angles $mt - \pi$, $mt - l$, α, ε. Par suite on obtiendrait pour r une expression de la forme

$$r = m + R\cos(mt - \pi) + s\cos(mt - l) + T\cos\alpha + U\cos\varepsilon + \text{etc}$$

qui ne permettrait pas d'expliquer comment, dans l'hypothèse infiniment vraisemblable où il aurait existé à l'origine une petite différence entre le mouvement de rotation et le moyen mouvement de révolution, l'attraction terrestre a fini par établir entre eux une égalité rigoureuse : c'est pourquoi nous tiendrons compte, dans cette équation, des quantités du second ordre.

A cet effet, nous partirons de cette donnée de l'observation que le moyen mouvement de rotation de la lune est égal à son moyen mouvement de révolution autour de la terre. Or, r étant la vitesse angulaire de la lune autour de son axe de figure, $\int rdt$ représente le mouvement réel de rotation de la lune, et puisque m désigne la vîtesse moyenne angulaire de la lune autour de la terre, $\int mdt$ est son moyen mouvement. Conséquemment la différence $\int rdt - \int mdt$ sera un très petit angle; posons :

$$\int rdt = \int mdt + u$$

L'*angle u*, excès du mouvement réel de rotation sur le mouvement moyen, *exprimera la libration réelle de la lune en longitude*. En différentiant, nous aurons:

$$r = \frac{du}{dt} + m$$

Le mouvement de révolution de la lune est soumis à quelques inégalités séculaires dont la théorie a fait connaître la cause. Laplace a démontré que l'équation séculaire du mouvement de la lune, est due à l'action du soleil sur ce satellite, combinée avec la variation séculaire de l'excentricité de l'orbite terrestre (*).

La valeur de $\frac{dm}{dt}$ qui résulte de cette équation a pour expression :

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{3m'^2}{m}e'\frac{de'}{dt}$$

$m't$ désignant le moyen mouvement sidéral du soleil et e' l'excentricité de l'orbe terrestre.

Cela posé, on aura par une seconde différentiation :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{dm}{dt}$$

D'autre part, nous avons entre les variables φ, ψ, r, l'équation

$$rdt = d\varphi - d\psi$$

qui donne :

$$\varphi - \psi = \int rdt = \int mdt + u$$

De cette équation, et de l'expression générale de ν dont nous avons donné le développement (n° 19) et où l'on remplacera mt par $\int mdt$, on déduit :

$$\nu + \psi - \varphi = -u + 2e\sin(mt - \pi) + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{1}{4}\lambda^2\right)\sin(2mt - \pi)$$
$$+ P\sin\alpha + Q\sin 6 + \ldots \text{ etc.}$$

On substituera cette valeur dans l'équation (8), en ne conservant que les termes d'un ordre inférieur au troisième par rapport à e, λ, θ, u. Par suite le sinus de $2(\nu + \psi - \varphi)$ étant déjà multiplié par $\lambda\theta$ se réduira à l'unité. L'équation (8) prendra la forme :

(*) Mécanique céleste, liv. 7, n° 15.

$$(9)\quad \frac{d^2u}{dt^2}+3m^2\left(\frac{B-A}{C}\right)u=3m^2\left(\frac{B-A}{C}\right)(P\sin\alpha+Q\sin\beta+\ldots)$$
$$+\frac{3m'^2}{m}e'\frac{de'}{dt}+6m^2\left(\frac{B-A}{C}\right)e\sin(mt-\pi)$$
$$+\frac{3m^2}{4}\left(\frac{B-A}{C}\right)(17e^2-\lambda^2)\sin(2\,mt-\pi)$$
$$-\frac{B-A}{C}pq-3m^2\left(\frac{B-A}{C}\right)\lambda\theta\sin(mt-l)$$

(22) Pour l'intégrer, faisons d'abord abstraction des seconds membres qui ne contiennent pas u : l'équation se réduit à

$$\frac{d^2u}{dt^2}+3m^2\frac{B-A}{C}u=o$$

à laquelle on satisfait en posant $u=g\sin(lt+h)$; g et h étant deux constantes arbitraires, et l une constante qu'on déterminera en substi tuant pour u et $\frac{d^2u}{dt^2}$ leurs valeurs, cette substitution donne, après avoir divisé par $g\sin(lt+h)$:

$$-l^2+3m^2\frac{B-A}{C}=o \quad \text{d'où } l=m\sqrt{\frac{3(B-A)}{C}}$$

et par conséquent

$$u=g\sin\left(\sqrt{\frac{3(B-A)}{C}}\,mt+h\right).$$

Actuellement, si l'on tient compte des termes périodiques $P\sin\alpha+Q\sin\beta+\ldots$ que renferme le second membre de l'équation (9), chacun d'eux introduira, dans l'expression de u, un terme de la forme $P'\sin\alpha+Q'\sin\beta+\ldots$etc

On aura pour déterminer P' l'équation :

$$-P'\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2+3m^2\left(\frac{B-A}{C}\right)P'=3m^2\left(\frac{B-A}{C}\right)P$$

d'où l'on tire
$$P' = \frac{-3m^2\frac{B-A}{C}}{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - 3m^2\frac{B-A}{C}} P$$

L'Equation qui donnera φ' sera de même forme, on en tirera :

$$Q' = \frac{-3m^2\frac{B-A}{C}}{\left(\frac{d6}{dt}\right)^2 - 3m^2\frac{B-A}{C}} Q$$

$\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d6}{dt}$... sont des constantes connues.

Pour avoir égard à l'équation séculaire de la lune, on ajoutera à l'expression de u un terme de la forme $Re'\frac{de'}{dt}$, R désignant un coefficient que l'on calculera à l'aide de l'équation :

$$R\frac{d^2(e'de')}{dt^2} + 3m^2\frac{B-A}{C}Re'\frac{de'}{dt} = \frac{3m'^2}{m}\frac{e'de'}{dt}$$

Comme les variations de l'excentricité e' sont excessivement lentes, nous négligerons le premier terme $R\frac{d^2(e'de')}{dt^2}$, et alors l'équation donnera :
$$R = \frac{m'^2}{m^3\frac{(B-A)}{C}}$$

Ainsi le terme de u, provenant des inégalités séculaires qui affectent le mouvement de révolution de la lune, est :

$$\frac{m'^2 e'\frac{de'}{dt}}{m^3\frac{(B-A)}{C}}$$

L'expression de u, calculée jusqu'ici, se compose des termes suivans :

$$u = g \sin\left(\sqrt{\frac{3\,(B-A)}{C}}\,mt + h\right) - \frac{3m^2\,\frac{(B-A)}{C}}{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - 3m^2\,\frac{(B-A)}{C}}\,P \sin\alpha$$

$$- \frac{3m^2\,\frac{(B-A)}{C}}{\left(\frac{d\epsilon}{dt}\right)^2 - 3m^2\,\frac{(B-A)}{C}}\,Q \sin\epsilon - \text{etc.} \ldots + \frac{m'^2\,e'\,\frac{de'}{dt}}{m^3\,\frac{(B-A)}{C}}$$

(23). Avant d'aller plus loin, il convient d'examiner les grandeurs de ces divers termes, afin de faire la part d'influence que chacun d'eux peut avoir sur la libration réelle de la lune.

L'argument $g \sin\left(\sqrt{\frac{3\,(B-A)}{C}}\,mt + h\right)$ n'a point été reconnu par l'observation : en conséquence la constante g doit avoir une valeur très petite ; et de plus la quantité $\sqrt{\frac{3\,(B-A)}{C}}$ est réelle ; autrement le sinus de l'arc imaginaire $\sqrt{\frac{3\,(B-A)}{C}}\,mt$ se transformerait en exponentielles réelles qui pourraient croître indéfiniment avec le temps. Ainsi $\frac{B-A}{C}$ est une quantité positive, en sorte que le moment d'inertie B est plus grand que **A**. Il est aisé d'interpréter cette inégalité, d'après l'effet que l'attraction terrestre a dû produire sur l'équateur lunaire : en effet, le moment d'inertie A est relatif à l'axe principal Lx_1 qui fait l'angle φ avec la ligne des nœuds de l'équateur lunaire ; or, cet axe est précisément dirigé vers la terre pendant toute la durée du mouvement ; car l'expression de la différence $v + \psi - \varphi$, trouvée plus haut (n° 21) fait voir, qu'abstraction faite des petites inégalités périodiques et de la libration, φ est toujours sensiblement égal à $v + \psi$, c'est-à-dire, à l'angle que fait le rayon vecteur mené de la lune à la terre avec la ligne des nœuds de l'équateur lunaire. Ainsi l'axe de l'équateur auquel se rapporte le moment **A**, est toujours à peu près

6

dirigé vers la terre. Dès-lors on conçoit que l'attraction terrestre aura produit un allongement de l'équateur dans le sens de cet axe, et conséquemment le moment d'inertie A doit être moindre que B. Nous donnerons dorénavant à l'axe relatif au moment A le nom de *premier axe principal.*

Parmi les termes qui proviennent des inégalités périodiques du mouvement de révolution, deux seulement peuvent avoir un effet sensible dans l'intégrale; l'un provenant de l'équation du centre, l'autre de l'équation annuelle; nous supposerons que le premier soit le terme multiplié par P sin α, en sorte que α représentera l'anomalie moyenne de la lune; et que le second soit le terme multiplié par Q sin β, β étant l'anomalie moyenne du soleil. — Le premier peut être sensible à cause de la grandeur de l'équation du centre; on a, d'après les tables de Mayer, P = 22681,6 secondes sexagésimales, et $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = m^2.\,0{,}98317$; par conséquent le coefficient du terme correspondant dans l'expression de u, est égal à :

$$-\frac{3\,\frac{(B-A)}{C}\,22681'',6}{0{,}98317-3\,\frac{(B-A)}{C}}$$

Puisque l'observation ne l'a pas encore fait reconnaître, ce terme peut être regardé comme au-dessous de $\frac{1}{2}$ degré ou 1800'', posons donc

$$\frac{3\,\frac{(B-A)}{C}\,22681{,}6}{0{,}98317-3\,\frac{(B-A)}{C}}<1800$$

On en tire

$$\frac{B-A}{C}<\frac{589{,}902}{24481{,}6}=0{,}024095$$

Le terme provenant de l'équation annuelle est sensible à cause que la valeur de $\frac{d\epsilon}{dt}$ est très petite, en sorte que le diviseur $\left(\frac{d\epsilon}{dt}\right)^2 - 3m^2\frac{(B\text{-}A)}{C}$ est lui-même très petit. On a :

$$\left(\frac{d\epsilon}{dt}\right)^2 = m^2.\,0{,}005595 \qquad Q = 668'',7$$

Ainsi le coefficient du terme dont il s'agit est

$$\frac{3\frac{(B - A)}{C}\,668'',7}{0{,}005595 - 3\frac{(B - A)}{C}}$$

M. Nicollet a trouvé, en comparant les résultats d'un grand nombre d'observations, que la valeur de ce coefficient était 288″,7 ; on en conclut :

$$\frac{B - A}{C} = 0{,}0006272$$

Sans regarder cette valeur comme déterminée d'une manière bien précise, nous pouvons du moins affirmer que la quantité $\frac{B - A}{C}$ a, comme nous l'avions annoncé, une très petite valeur.

Le terme provenant de l'équation séculaire de la lune, savoir :

$$\frac{m'^2\, e'\,\frac{de'}{dt}}{m^3\,\frac{B - A}{C}}$$

a augmenté dans l'intégrale, à cause du petit diviseur $\frac{B - A}{C}$; néanmoins l'excentricité varie avec une telle lenteur, que la petitesse de $\frac{de'}{dt}$ rend ce terme insensible. La conséquence importante qui résulte de notre analyse, c'est que les inégalités séculaires du mouvement de révolution de la lune, n'auront point pour effet de découvrir à nos yeux dans la suite des siècles, des parties jusqu'alors invisibles du globe lunaire; car l'attraction terrestre introduit dans l'expression de la libration ces mêmes inégalités séculaires, et conséquemment elle maintient dans la suite des siècles l'égalité entre les moyens mouvemens de rotation et de révolution.

(24) Il ne nous reste plus, pour compléter l'intégration de l'équation (9) qu'à tenir compte des termes qui renferment l'angle $mt - \pi$ et son double, et l'angle $mt - l$, et des termes qu'introduit le produit $\frac{B-A}{C} pq$.

Ces termes sont :

$$6m^2 \frac{(B-A)}{C} e \sin(mt-\pi) + \frac{3m^2}{4} \frac{(B-A)}{C} (17e^2 - \lambda^2) \sin 2(mt - \pi)$$
$$- 3m^2 \frac{(B-A)}{C} \lambda\theta \sin(mt - l) - \frac{(B-A)}{C} pq$$

Les trois premiers ont une courte période, et n'augmenteront pas l'intégration; par exemple le terme $6m^2 \frac{(B-A)}{C} e \sin(mt - \pi)$ donnera dans l'intégrale

$$\frac{-6m^2 \frac{(B-A)}{C}}{\left(m - \frac{d\pi}{dt}\right)^2 - 3m^2 \frac{(B-A)}{C}} e \sin(mt-\pi)$$

Or, on a vu (n° 20), que $\frac{d\pi}{dt} = 0{,}008452 \times m$; d'autre part nous venons de reconnaître que $\frac{B-A}{C}$ est une très petite fraction qui ne surpasse probablement pas 0,0006; le dénominateur du terme précédent diffère donc peu de m^2, tandis que le numérateur renferme le produit très petit $\frac{(B-A)}{C}e$. Ainsi ce terme est insensible, et à plus forte raison les deux autres qui renferment les carrés e^2, λ^2 et le produit $\lambda\theta$, seront-ils insensibles.

Voyons maintenant si le produit pq pourra développer des termes à longue période, dont la grandeur soit appréciable.

Si l'on fait le produit des valeurs de p et q, trouvées dans le n° 20, et qu'on néglige les termes à courte période, on aura :

$$pq = -\sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}}\frac{\alpha^2}{2}\sin 2\left(\sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}}mt + 6\right)$$
$$+\frac{MM'}{2}e^2\lambda^2\sin 2[(i+m')t+\sigma-\gamma]+\frac{LL'}{2}e^2\theta^2\sin 2[it+\psi+\sigma]$$

Nous omettons les termes qui renfermeraient l'angle $(\psi - m't)$, parce que nous verrons plus loin que la valeur moyenne de l'angle ψ, considéré comme variable, est précisément égale à $m't$, en sorte que ces termes s'évanouissent d'eux-mêmes.

Le premier des termes de pq donnera, à fort peu près, dans l'intégrale :

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}}\frac{\alpha^2}{m^2}\sin 2\left(\sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}}mt + 6\right)$$

Ce terme est insensible à cause de l'extrême petitesse de son coefficient.

Le terme de u correspondant à

$$\frac{MM'}{2}e^2\lambda^2\sin 2[(i+m')t+\sigma-\gamma]$$

aura pour coefficient

$$\frac{\frac{(B-A)}{C}\frac{MM'}{2}e^2\lambda^2}{4\frac{(i+m')^2}{m^2}-3\frac{(B-A)}{C}}$$

et donnera naissance à une inégalité dépendant de la différence en longitude du nœud et du périgée lunaire. Si la valeur numérique de $4\left(\frac{i+m'}{m}\right)^2$ différait très peu de $3\left(\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\right)$, ce terme aurait une valeur sensible qui pourrait même être très grande; mais puisque l'observation n'a pas fait reconnaître cette inégalité, la différence $4\left(\frac{i+m'}{m}\right)^2 - 3\left(\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\right)$ ne doit pas être d'une extrême petitesse; effectivement si l'on adopte pour $\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}$ la valeur 0,0006272 fournie par l'équation de la libration en longitude dépendante de l'anomalie du soleil, et qu'on substitue au rapport $\frac{i+m'}{m}$ sa valeur 0,012474 (n° 20), on trouve :

$$3\,\frac{(\mathrm{B}-\mathrm{A})}{\mathrm{C}} - 4\,\frac{(i+m')^2}{m^2} = 0{,}0012592$$

Cette différence est à peu près égale au double de $\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}$, en sorte que le coefficient dont il s'agit diffère peu de $\frac{\mathrm{MM}'}{4}\,e^2\lambda^2$ lequel, vû la petitesse du produit $e^2\lambda^2$, est insensible.

Concluons de cette discussion que les termes de l'expression u, que nous avons calculés dans le n° 22, sont les seuls qui concourent d'une manière sensible au phénomène de la libration en longitude.

(25) L'argument $g \sin\left(\sqrt{\frac{3\,(\mathrm{B}-\mathrm{A})}{\mathrm{C}}}\,mt + h\right)$ détermine un mouvement oscillatoire du grand axe de l'équateur lunaire, de part et d'autre du rayon vecteur mené du centre de la lune à la terre. L'amplitude de ces oscillations est égale à la constante $2g$ et leur période T s'obtient en posant $\sqrt{\frac{3\,(\mathrm{B}-\mathrm{A})}{\mathrm{C}}}\,m\mathrm{T} = 2\pi$

d'où
$$T = \frac{2\pi}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{3(B-A)}{C}}}$$

$\frac{2\pi}{m}$ représente la durée du mois sydéral 27 j., 32166 : et si l'on connaissait avec précision la quantité $\frac{1}{\sqrt{\frac{3(B-A)}{C}}}$, on aurait immédiatement la durée des oscillations du premier axe de l'équateur lunaire. En adoptant la valeur 0,0006272 pour $\frac{B-A}{C}$, on trouverait que cette durée s'élève à 629 jours environ.

La considération du terme $g \sin\left(\sqrt{\frac{3(B-A)}{C}}\, mt + h\right)$ nous permet d'expliquer comment la lune peut nous présenter toujours la même face, sans qu'il soit nécessaire du supposer qu'à l'origine les deux mouvemens de rotation et de révolution de ce corps ait été parfaitement égaux. En effet, la vitesse de rotation r étant en général égale à $m + \frac{du}{dt}$, on aura :

$$r = m + gm\sqrt{\frac{3(B-A)}{C}} \cos\left(\sqrt{\frac{3(B-A)}{C}}\, mt + h\right) + \text{etc}$$

et à l'origine, t étant zéro

$$r = m + gm\sqrt{\frac{3(B-A)}{C}} + \ldots\text{etc}$$

Or, cette valeur initiale de la vitesse de rotation peut être supposée quelconque, à cause de la constante arbitraire g. Il suffit qu'elle ait été peu différente de la vitesse moyenne m, puisque g et $\frac{B-A}{C}$ ont de très petites valeurs. Ainsi l'invraisemblance infinie qu'il y aurait à admettre une égalité rigoureuse entre la vitesse initiale de rotation et la vitesse moyenne de translation de la lune autour de la terre, n'existe plus; et il suffit, pour être d'accord avec les observations, que ces deux vitesses aient été peu différentes l'une de l'autre, cette différence étant d'ailleurs arbitraire.

(26). Nous avons négligé, dans tout ce qui précède, l'action du soleil sur la partie non sphérique de la lune : les inégalités que cette cause peut produire sont en effet négligeables vis-à-vis des inégalités dues à l'attraction de la terre. En effet, de même que les termes provenant de l'attraction terrestre sont de l'ordre $\frac{T}{\rho^3}$ T étant la masse de la terre et ρ sa distance moyenne à la lune, de même les termes provenant de l'action du soleil sont de l'ordre $\frac{S}{\rho'^3}$, S étant la masse du soleil et ρ' sa distance moyenne à la lune. Le rapport de l'action solaire à l'action terrestre est donc $\frac{S}{T}\frac{\rho^3}{\rho'^3}$; or, la théorie de la gravitation de la terre autour du soleil, donne :

$$\frac{\rho'^3}{T^2} = \frac{f(S+T)}{4\pi^2}$$

f désignant l'intensité du pouvoir attractif rapporté à l'unité de masse et de distance, et T désignant le temps de la révolution sidérale de la terre. Les mêmes principes appliqués au mouvement de la lune autour de la terre, donnent :

$$\frac{\rho^3}{T'^2} = \frac{f(T+L)}{4\pi^2}$$

L étant la masse de la lune, et T' la durée de sa révolution sidérale autour de la terre. De ces deux équations, on tire :

$$\frac{\rho^3}{\rho'^3} = \frac{T+L}{S+T}\cdot\frac{T'^2}{T^2}$$

Le rapport $\frac{T+L}{S+T}$ se réduit à peu près à $\frac{76}{75}\cdot\frac{T}{S}$, parce que $L=\frac{1}{75}T$, et que T est négligeable à côté de S. On a donc :

$$\frac{S}{T}\cdot\frac{\rho^3}{\rho'^3}=\frac{76}{75}\cdot\frac{T'^2}{T^2}=0{,}005669=\frac{1}{177}\text{ environ.}$$

Ainsi il est permis de négliger l'action du soleil due à la non-sphéricité de la lune, par rapport à l'action de la terre due à la même cause. C'est ce que nous ferons dans la suite de ce travail.

Du mouvement des nœuds de l'équateur lunaire, et de l'inclinaison de cet équateur sur l'écliptique.

(47) Pour déterminer ces deux élémens, nous reprendrons les deux dernières équations (6), savoir :

$$dq-\frac{C-A}{B}prdt=-3m^2\left(\frac{C-A}{B}\right)[1+3e\cos(mt-\pi)]\,[\theta\sin(\nu+\psi)+\lambda\sin(\nu-l)]\cos(\nu+\psi-\varphi)\,dt.$$

$$dp+\frac{C-B}{A}qrdt=3m^2\left(\frac{C-B}{A}\right)[1+3e\cos(mt-\pi)]\,[\theta\sin(\nu+\psi)+\lambda\sin(\nu-l)]\sin(\nu+\psi-\varphi)\,dt.$$

et nous allons transformer les variables p et q en deux autres qui aient l'avantage de faire connaître, sans nouvelles intégrations, les valeurs de θ et de φ

A cet effet nous poserons :

$$\theta\sin\varphi=s\qquad\theta\cos\varphi=s'$$

Lorsque les variables s et s' seront connues en fonction du temps, on en déduira immédiatement les valeurs de θ et de φ:

$$\theta=\sqrt{s^2+s'^2},\quad\tang\varphi=\frac{s}{s'}$$

Et comme la valeur moyenne de l'inclinaison θ a été trouvée égale à $1^\circ - 28' - 45''$, on voit que s et s' auront toujours de très petites valeurs.

Il s'agit d'exprimer p, q, dp, dq, en fonction de s et s'. On tire des équations précédentes :

$$\frac{d\theta}{dt}\sin\varphi + \theta\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi = \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt}\cos\varphi - \theta\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi = \frac{ds'}{dt}$$

Nous allons y remplacer $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{d\varphi}{dt}$ par leurs valeurs fonctions de p, q, r. A cet effet, les équations (2) (n° 7) deviennent, lorsqu'on néglige le carré de θ :

$$\begin{aligned} pdt &= \theta\sin\varphi\, d\psi - \cos\varphi\, d\theta \\ qdt &= \theta\cos\varphi\, d\psi + \sin\varphi\, d\theta \\ rdt &= d\varphi - d\psi \end{aligned}$$

On tire des deux premières :

$$\frac{d\theta}{dt} = q\sin\varphi - p\cos\varphi$$

$$\theta\frac{d\psi}{dt} = p\sin\varphi + q\cos\varphi$$

La troisième donne : $\theta\frac{d\varphi}{dt} = \theta r + \theta\frac{d\psi}{dt}$ et remplaçant $\frac{d\psi}{dt}$ par la valeur précédente, on a :

$$\theta\frac{d\psi}{dt} = \theta r + p\sin\varphi + q\cos\varphi$$

D'après cela les valeurs de $\frac{ds}{dt}$ et $\frac{ds'}{dt}$ deviennent :

$$q + rs' = \frac{ds}{dt}, \qquad p + rs = -\frac{ds'}{dt}$$

On en déduit :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} - r\frac{ds'}{dt} - s'\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{d^2s'}{dt^2} - r\frac{ds}{dt} - s\frac{dr}{dt}$$

expressions dans lesquelles on remplacera r et $\frac{dr}{dt}$ par leurs valeurs tirées de l'équation :

$$r = m + \frac{du}{dt}$$

Comme nous n'avons égard qu'aux termes du second ordre, il sera permis de négliger les produits des variables très petites s et s' par la différenee seconde d^2u ; et aussi les produits des différentielles ds, ds' par du, en sorte qu'on aura simplement :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} - m\frac{ds'}{dt}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{d^2s'}{dt^2} - m\frac{ds}{dt}$$

Cela posé, la seconde et la troisième équation (6) deviennent :

$$\frac{d^2s}{dt^2} - \frac{A+B-C}{B} m\frac{ds'}{dt} + \frac{C-A}{B} m^2 s =$$
$$-3m^2\frac{(C-A)}{B}[1+3e\cos(mt_{\circ}-\pi)]\,[\theta\sin(\nu+\psi)+\lambda\sin(\nu-l)]$$
$$\cos(\nu+\psi-\varphi)\,dt$$

$$\frac{d^2s'}{dt^2} + \frac{A+B-C}{A} m\frac{ds}{dt} + \frac{C-B}{A} m^2 s' =$$
$$-3m^2\frac{(C-B)}{A}[1+3e\cos(mt-\pi)]\,[\theta\sin(\nu+\psi)+\lambda\sin(\nu-l)]$$
$$\sin(\nu+\psi-\varphi)\,dt$$

Examinons maintenant les seconds membres de ces équations :

Nous avons déjà reconnu que l'angle $v - \psi - \varphi$ est un très petit angle, dont l'expression est (n° 21)

$$v + \psi - \varphi = -u + 2e\sin(mt - \pi) + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{1}{4}\lambda^2\right)\sin 2(mt - \pi)$$
$$+ P\sin\alpha + Q\sin 6 + \ldots \text{etc}$$

et puisque nous avons négligé jusqu'ici les termes de troisième dimension par rapport à e, λ, θ, nous devrons réduire dans les seconds membres des équations précédentes, le cosinus de $v + \psi - \varphi$ à l'unité, et le sinus du même angle, au premier terme $2e\sin(mt - \pi)$ qui pourra, par combinaison avec d'autres sinus, amener des termes à longue période. Quant à l'angle u qui représente la libration en longitude, et aux termes périodiques $P\sin\alpha + Q\sin 6 +$ etc., nous les négligeons, parce qu'ils ne donneraient aucun résultat appréciable dans l'intégrale. Enfin, nous remplacerons v par mt et $mt + \psi$ par φ dans les termes que nous conservons; et les seconds membres des équations différentielles se réduiront aux deux expressions suivantes :

$$(1^{re}\ \text{éq}^{n}) \ldots\ldots \quad -3m^2\frac{(C-B)}{B}s - 3m^2\frac{(C-A)}{B}\lambda\sin(mt - l)$$
$$-9m^2\frac{(C-A)}{B}\left[\theta\sin(mt + \psi) + \lambda\sin(mt - l)\right]e\cos(mt - \pi)$$

$$(2^{me}\ \text{éq}^{n}) \ldots \quad 6m^2\frac{(C-B)}{A}\left[\theta\sin(mt + \psi) + \lambda\sin(mt - l)\right]e\sin(mt - \pi)$$

(28) λ désigne l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique fixe d'une époque déterminée ; comme l'inclinaison moyenne de l'orbite lunaire sur l'écliptique mobile est sensiblement invariable, il sera utile de l'introduire à la place de λ dans les expressions précédentes.

Désignons par λ_1 l'inclinaison de l'orbe lunaire sur l'écliptique mobile, par ζ l'inclinaison de l'écliptique mobile sur l'écliptique fixe, et par l la longitude du nœud ascendant de l'écliptique mobile sur le même plan fixe. Cherchons à établir une relation entre λ et λ_1. A cet effet, concevons un point m dans le plan de l'orbite lunaire, dont la distance à la lune soit l'unité. Soit z la distance de ce point à l'écliptique fixe, z' sa distance à l'écliptique mobile; enfin, z'' la partie de la première distance interceptée entre les deux écliptiques; comme l'inclinaison de l'écliptique mobile sur l'écliptique fixe est un angle fort petit, nous pourrons négliger son carré. Or, si mP et mP' (fig. 3) sont les deux distances désignées par z et z', et que P'' soit le point où la première rencontre le plan de l'écliptique mobile, on a en remarquant que l'angle PmP' est égal à ζ :

$$z' = m\text{P}'' \cos \zeta$$

et par conséquent, en négligeant le carré de ζ, z' sera égal mP''; mais $m\text{P}'' = z - z''$ donc

$$z = z' + z''.$$

Cela posé, représentons par x la longitude du point m sur l'écliptique fixe; comme nous sommes convenus de négliger les quantités du troisième ordre, par rapport à λ, λ_1, nous aurons (n° 14) :

$$z = \lambda \sin (x - l), \quad z' = \lambda_1 \sin (x - l), \quad z'' = \zeta \sin (x - l')$$

donc enfin :

$$\lambda \sin (x - l) = \lambda_1 \sin (x - l) + \zeta \sin (x - l')$$

Cette relation ayant lieu quelque soit x, nous pouvons y faire : $x = 0$ et $x = 90^0$, ce qui donne :

$$\lambda \sin l = \lambda_1 \sin l + \zeta \sin l'$$
$$\lambda \cos l = \lambda_1 \cos l + \zeta \cos l'$$

On en déduit :

$$\lambda \sin (mt - l) = \lambda_1 \sin (mt - l) + \zeta \sin (mt - l')$$

On substituera cette valeur dans les expressions du n° 27, et on négligera le produit ζe.

Les équations différentielles à intégrer deviendront enfin :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2s}{dt^2} - \frac{A+B-C}{B}\, m\, \frac{ds'}{dt} + 4\,\frac{(C-A)}{B}\, m^2 s \\
&\qquad = -\,3m^2\,\frac{(C-A)}{B}\,[\lambda_1 \sin(mt-l) + \zeta \sin(mt-l')] \\
&-\,9m^2\,\frac{(C-A)}{B}\,[\theta \sin(mt+\psi) + \lambda_1 \sin(mt-l)]\, e \cos(mt-\pi) \\
&\frac{d^2s'}{dt^2} + \frac{A+B-C}{A}\, m\, \frac{ds}{dt} + \frac{C-B}{A}\, m^2 s' \\
&= -\,6m^2\,\frac{(C-B)}{A}\,[\theta \sin(mt+\psi) + \lambda_1 \sin(mt-l)]\, e \sin(mt-\pi)
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

(29) Pour les intégrer, faisons d'abord abstraction des seconds membres; il est visible qu'alors on pourra satisfaire aux équations, en posant :

$$s = M \sin \alpha t \qquad s' = M \cos \alpha t$$

M et M′ étant deux constantes indéterminées; si l'on substitue ces valeurs et leurs différentielles dans les équations (10), réduites à leurs premiers membres, on aura ces deux équations :

$$\begin{aligned}
&-\,BM\alpha^2 + (A+B-C)\, mM'\alpha + 4\,(C-A)\, m^2 M = o \\
&-\,AM'\alpha^2 + (A+B-C)\, mM\alpha + (C-B)\, m^2 M' = o
\end{aligned}$$

de la seconde on tire $\frac{M'}{M} = \frac{(A+B-C)\, m\alpha}{A\alpha^2 - m^2\,(C-B)}$

et cette valeur, étant substituée dans la première, donnera une équation du 4^e degré en α, savoir :

$$AB\,\alpha^4 - [(A+B-C)^2 + B(C-B) + 4\,A(C-A)]\, m^2\alpha^2 + 4\,(C-A)(C-B)\, m^4 = o$$

Désignons par μ^2 et μ'^2 les deux valeurs de α^2 qu'on tirera de cette équation; deux valeurs particulières de s seront :

$$s = M \sin(\mu t + \varepsilon) \qquad s = N \sin(\mu' t + \varepsilon')$$

ε, ε', M et N étant quatre constantes arbitraires, et deux valeurs particulières de s' seront :

$$s' = M' \cos(\mu t + \varepsilon) \qquad s' = N' \cos(\mu' t + \varepsilon')$$

les constantes M′ et N′ étant liées à M et N par les relations :

$$\frac{M'}{M} = \frac{(A + B - C)\, m\mu}{A\mu^2 - m^2 (C - B)} \qquad \frac{N'}{N} = \frac{(A + B - C)\, m\mu'}{A\mu'^2 - m^2 (C - B)}$$

D'après la théorie des équations linéaires, les valeurs complètes de s et de s', en tant qu'on néglige les seconds membres des équations (10), seront :

$$S = M \sin(\mu t + \varepsilon) + N \sin(\mu' t + \varepsilon')$$
$$S' = M' \cos(\mu t + \varepsilon) + N' \cos(\mu' t + \varepsilon')$$

et elles renferment quatre constantes arbitraires M, N, ε, ε'.

(30). Actuellemeut tenons compte des termes

$$-3m^2 \frac{(C - A)}{B} [\lambda_1 \sin(mt - l) + \zeta \sin(mt - l')]$$

que renferme la première des équations (10).

Les quantités $\zeta \sin l'$ et $\zeta \cos l'$, sont soumises à des inégalités séculaires que l'on peut représenter par un nombre fini de termes de la forme :

$$c \sin(gt + h),\ c \cos(gt + h)\ \ldots(^*)$$

g étant une constante extrêmement petite qui est racine d'une équation d'un degré marqué par le nombre des planètes perturbatrices, et c et h désignant deux constantes dont les valeurs se déduisent des observations. Si dans la quantité $\zeta \sin(mt - l')$, on remplace $\zeta \sin l'$ et $\zeta \cos l'$ par les valeurs précédentes, elle deviendra $c \sin(mt - gt - h)$, et en désignant par la caractérisque Σ une somme de termes semblables, la partie de l'équation différentielle à laquelle nous nous proposons d'avoir égard, se présentera sous la forme :

$$-3m^2 \frac{(C - A)}{B} \Big[\lambda_1 \sin[(m + m')\, t - 6] + \Sigma c \sin(mt - gt - h)\Big]$$

(nous y remplaçons la longitude l par $(6 - m't)$ ainsi que nous l'avons déjà fait dans le n° 19).

Soient : $\quad P \sin[(m + m')\, t - 6]$ et $P' \cos[(m + m')\, t - 6]$

(*) Mécanique céleste, liv. 2, n° 59.

les parties de s et s' correspondantes au terme

$$-3m^2\frac{(C-A)}{B}\lambda_1 \sin[(m+m')t-6]$$

En substituant ces valeurs et leurs différentielles dans les équations (10), on aura pour déterminer P et P' les deux suivantes :

$$BP(m+m')^2-(A+B-C)P'm(m+m')-4(C-A)Pm^2=3m^2(C-A)\lambda_1$$
$$AP'(m+m')^2-(A+B-C)Pm(m+m')-(C-B)P'm^2=0$$

De la seconde on tire le rapport $\frac{P'}{P}$

$$\frac{P'}{P}=\frac{(A+B-C)m(m+m')}{A(m+m')^2-m^2(C-B)}$$

Puis la substitution de ce rapport dans la première équation, donnera la valeur de P :

$$P=\frac{-3m^2(C-A)\lambda_1[A(m+m')^2-(C-B)m^2]}{E}$$

En posant :

$$E=m^2(m+m')^2[(A+B-C)^2+B(C-B)+4A(C-A)]$$
$$-AB(m+m')^4-4(C-A)(C-B)m^4$$

Nous avons déjà vu (n° 19) que m' est une petite fraction de m, puisque $\frac{m'}{m}=0{,}004022$. C'est pourquoi l'on pourra négliger dans le numérateur et le dénominateur de P, le carré $\frac{m'}{m}$, ainsi que les produits de $\frac{m'}{m}$ par les différences $C-A$, $C-B$, $B-A$. Le numérateur se réduira à

$$-3m^4(C-A)(A+B-C)\lambda_1$$

et le dénominateur à

$$-m^3(A+B-C)[2Cm'-3m(C-A)]$$

En négligeant la fraction $\frac{3A(C-A)}{A+B-C}$; on aura donc à fort peu près :

$$P = \frac{3m(C - A)\lambda_1}{2Cm' - 3m(C - A)}$$

Ensuite vu la petitesse de $\frac{m'}{m}$, le rapport $\frac{P'}{P}$ se réduit à peu près à l'unité, en sorte qu'on pourra faire dans les calculs qui vont suivre, $P' = P$.

Il nous reste à considérer les termes provenant du déplacement séculaire de l'écliptique, dont la somme est

$$-3m^2 \frac{C - A}{B} \Sigma c \sin(mt - gt - h)$$

Les parties correspondantes des inconnues s et s', s'obtiendront par un calcul semblable au précédent. Il suffira de remplacer dans les valeurs de P et P', λ_1 par c et m' par $-g$; mais, à cause de la petitesse extrême de $\frac{g}{m}$, les coefficiens se réduiront à $-c$; en réunissant les différens termes que nous venons d'obtenir, nous aurons les valeurs de s et s':

$$s = M \sin(\mu t + \varepsilon) + N \sin(\mu' t + \varepsilon') + P \sin[(m + m')t - 6] \\ - \Sigma c \sin(mt - gt - h)$$

$$s' = M' \cos(\mu t + \varepsilon) + N' \cos(\mu' t + \varepsilon') + P \cos[(m + m')t - 6] \\ - \Sigma c \cos(mt - gt - h)$$

Elles ne diffèrent de celles que Lagrange a données dans son second mémoire sur la libration de la lune (*), que par les derniers termes où nous avons tenu compte des mouvemens séculaires de l'écliptique.

Mais ce ne sont pas encore les valeurs complètes de ces inconnues, puisque nous n'avons pas encore eu égard aux termes affectés de l'excentricité e dans les seconds membres des équations (10). Toutefois, comme ces termes sont fort petits, nous pourrons adopter, dans une première approximation, les valeurs précédentes de s et s'. Les résultats auxquels leur discussion va nous conduire, touchant les inconnues θ et ψ, seront ensuite mis à profit pour achever l'intégration.

(*) Mémoires de l'académie de Berlin, année 1780, p. 85 et suivans.

(31) Ces valeurs de s et de s' feront connaître, à une époque quelconque, la position des nœuds de l'équateur lunaire, et l'inclinaison θ de son équateur relativement à une écliptique fixe; car on a (n° 27)

$$\theta = \sqrt{s^2 + s'^2} \qquad \text{tang}\, \varphi = \frac{s}{s'}$$

Or, d'après ce qu'on a vu (n° 21), l'angle φ est lié à la longitude ψ du nœud descendant de l'équateur lunaire par l'équation $\varphi - \psi = mt + u$ d'où

$$\psi = \varphi - mt - u$$

Ainsi la connaissance de l'angle φ entraînera celle de l'angle ψ, et permettra conséquemment d'assigner les lois du mouvement des nœuds de l'équateur lunaire; quant à l'angle variable u, qui représente la libration en longitude, sa petitesse fait qu'il n'apportera qu'une inégalité presque insensible dans la valeur moyenne de l'angle ψ.

Mais si nous conservons ces valeurs de s et de s', rapportées à l'écliptique fixe, les résultats que nous en déduirons pour le mouvement des nœuds de l'équateur lunaire, et l'inclinaison de cet équateur, seront affectés des termes dépendans du déplacement séculaire de l'écliptique vraie, que renferment ces expressions. Or, il est très remarquable que si l'on rapporte les valeurs de ces inconnues à l'écliptique vraie ou mobile, ces variations séculaires disparaissent.

(32) Pour mettre en évidence ce résultat, nous allons chercher les valeurs de s et de s' rapportées à l'écliptique mobile. A cet effet, nous aurons recours à des considérations analogues à celles que nous avons développées (n° 28). Concevons un point m (fig. 4) situé sur le premier axe principal de l'équateur lunaire, lequel fait l'angle φ avec le nœud descendant de cet équateur sur l'écliptique fixe, et supposons que la distance de ce point au centre de la lune soit l'unité : soit y la perpendiculaire mP abaissée de ce point sur l'écliptique fixe, y' la distance mP' de ce point à l'écliptique mobile.

Remarquons qu'ici y' sera plus grand que y, si, comme on l'a supposé dans le n° 28, la quantité désignée par z était plus grande que z'. En effet, nous avons dit (n° 2), que le plan de l'écliptique mobile est toujours compris entre le plan de l'équateur lunaire, et le plan de l'orbite lunaire : or, (dans le n° 28), l'équation $z = z' + z''$ suppose que le plan de l'écliptique mobile est plus rapproché du plan de l'orbite lunaire, que le plan de l'écliptique fixe ; donc l'inverse doit avoir lieu relativement au plan de l'équateur lunaire, c'est-à-dire, que le plan de l'écliptique fixe doit être compris entre l'équateur lunaire et le plan de l'écliptique mobile. Mais en négligeant le carré de l'angle des deux écliptiques, on a vu, dans le numéro cité, que la partie de la distance y' comprise entre les deux écliptiques, était égale à l'excès de y' sur y. Ainsi, en désignant cette partie par y'' on aura :

$$y' = y + y''$$

Cela posé, on a rigoureusement $y = \sin\theta \sin\varphi$, et dans l'ordre d'approximation que nous avons adopté

$$y = \theta \sin\varphi$$

désignons par θ_1 et φ_1 l'inclinaison de l'équateur lunaire sur l'écliptique mobile, et la distance angulaire du premier axe principal au nœud descendant de cet équateur sur la même écliptique; on aura :

$$y' = \theta_1 \sin\varphi_1$$

enfin $y'' = \zeta \sin P''LN'$; P'' étant le point où la perpendiculaire désignée par y', rencontre l'écliptique fixe, et N' étant le nœud ascendant de l'écliptique mobile. Or, on a : $\cos\zeta \tang P''LN' = \tang P'LN'$; donc en négligeant le carré de ζ, l'angle $P''LN'$ peut être confondu avec $P'LN'$: on a donc $y'' = \zeta \sin P'LN'$: d'une autre part, remarquons que l'angle $P'LN'$ est sensiblement égal à la longitude de la terre vue de la lune, et comptée à partir du nœud N' ; car on a vu que le premier axe principal Lmx_1 est toujours à peu près dirigé vers la terre (n° 23). Ainsi nous pouvons écrire :

$$y'' = \zeta \sin(mt - l')$$

Il résulte de ces valeurs de y', y'', y, que l'on a :

$$\theta_1 \sin\varphi_1 = \theta \sin\varphi + \zeta \sin(mt - l')$$

Ou bien, en développant les inégalités séculaires renfermées dans le second terme (n° 30)

$$\theta_1 \sin\varphi_1 = \theta \sin\varphi + \Sigma c \sin(mt - gt - h)$$

En prenant un point dans le plan de l'équateur lunaire, dont la distance angulaire à l'axe principal soit égale à 90°, on démontrera par des considérations semblables que

$$\theta_1 \cos \varphi_1 = \theta \cos \varphi + \Sigma c \cos (mt - gt - h)$$

faisons $\theta_1 \sin \varphi_1 = s_1 \quad \theta_1 \cos \varphi_1 = s'_1$

et remplaçons $\theta \sin \varphi$ et $\theta \cos \varphi$ par les valeurs trouvées plus haut, il viendra :

$$s_1 = \mathrm{M} \sin (\mu t + \varepsilon) + \mathrm{N} \sin (\mu' t + \varepsilon') + \mathrm{P} \sin [(m + m')t - 6]$$
$$s'_1 = \mathrm{M}' \cos (\mu t + \varepsilon) + \mathrm{N}' \cos (\mu' t + \varepsilon') + \mathrm{P}' \cos [(m + m')t - 6]$$

On voit que les termes qui dans les expressions de s et de s' représentaient le déplacement séculaire de l'écliptique vraie ont disparu des expressions de s_1 et s'_1. Par conséquent nous sommes conduits à ce résultat remarquable : *le mouvement des points équinoxiaux de la lune et l'inclinaison de son équateur sur l'écliptique vraie sont indépendans des mouvemens séculaires de cette écliptique.* Cette proposition dont nous avons cru devoir développer la démonstration est due à Laplace (*).

(33) Pour que les valeurs de s_1 et de s'_1 que nous venons d'obtenir, s'accordent avec les données de l'observation, il faut qu'elles restent toujours très petites. Cela exige 1° que les coefficiens M, N, P soient fort petits; 2° que les valeurs de μ et de μ' soient réelles, et conséquemment μ^2 et μ'^2 devront être réels et positifs : or ces quantités sont racines de l'équation du deuxième degré :

$$(11) \qquad \mathrm{ABX}^2 - [(\mathrm{A+B-C})^2 + \mathrm{B(C-B)} + 4\mathrm{A(C-A)}]\, m^2 \mathrm{X} + 4\,\mathrm{(C-A)(C-B)}\, m^4 = o$$

on aura donc les trois conditions :

$$(\mathrm{C-A})(\mathrm{C-B}) > o \qquad (\mathrm{A+B-C})^2 + \mathrm{B(C-B)} + 4\,\mathrm{A(C-A)} > o$$
$$[(\mathrm{A+B-C})^2 + \mathrm{B(C-B)} + 4\mathrm{A(C-A)}]^2 > 16\,\mathrm{AB(C-A)(C-B)}$$

Nous avons déjà trouvé (n° 19) la première de ces conditions, et

(*) Mécanique céleste, liv. 5, pag. 365.

nous avons vu qu'elle est une conséquence nécessaire du mouvement de rotation. — Les facteurs C — A, C — B étant positifs, la deuxième condition est remplie d'elle-même. — Quant à la troisième condition, elle fournit une inégalité entre les trois momens d'inertie de la lune qui devra avoir lieu, quelle que puisse être d'ailleurs sa figure.

Enfin la discussion de la libration en longitude nous a conduits à cette quatrième condition $\quad B - A > o$

(34) Puisque les constantes M, N, M', N' doivent être fort petites, supposons-les nulles dans une première approximation ; alors les valeurs de s_1 s'_1 se réduisent respectivement à :

$$P \sin [(m + m') t - 6] \text{ et } P \cos [(m + m') t - 6]$$

par conséquent on aura :

$$\text{tang } \varphi_1 = \frac{s_1}{s'_1} = \text{tang } [(m + m') t - 6]$$

d'où l'on déduit pour φ_1 les deux valeurs :

$$\varphi_1 = mt + m't - 6, \text{ ou bien, } \varphi_1 = 180^0 + mt + m't - 6$$

Voyons laquelle de ces deux valeurs satisfait aux observations. Nous avons vu que l'axe principal auquel se rapporte l'angle φ_1 et le rayon vecteur mené de la lune à la terre, sont toujours, à fort peu près, compris dans le même cercle de latitude. Donc en appelant ψ_1 la longitude du nœud descendant de l'équateur lunaire sur l'écliptique mobile, comptée dans le sens de la rotation de la lune, et négligeant, comme précédemment, le carré de l'angle θ_1, on a :

$$\varphi_1 = mt - \psi_1$$

par conséquent, si l'on adopte la première valeur de φ_1, on aura :

$$\psi_1 = - m't + 6$$

c'est-à-dire que la longitude moyenne du nœud descendant de l'équateur lunaire sera égale à la longitude moyenne du nœud ascendant de l'orbite. Or ce résultat est précisément celui que l'observation a donné à Cassini.

La seconde valeur de φ_1 donnerait $\psi_1 = 180° - m't + 6$. Or $\psi_1 - 180°$ est la longitude du nœud ascendant de l'équateur lunaire ; ainsi ce serait le nœud ascendant de l'équateur qui coïnciderait avec le nœud ascendant de l'orbite, ce qui n'a pas lieu dans la nature. Nous admettrons donc la première valeur de φ_1.

L'équation $\theta_1 \sin \varphi_1 = P \sin (mt + m't - 6)$ donne alors $\theta_1 = P$. Ainsi l'inclinaison de l'équateur lunaire aura une valeur constante, et en remplaçant P par sa valeur, on aura :

$$\theta_1 = \frac{3m(C - A)\lambda_1}{2Cm' - 3m(C - A)}$$

L'observation a donné pour valeur moyenne de θ_1 et de λ_1

$$\theta_1 = 1°\text{-}28'\text{-}45'' = 5325''$$
$$\lambda_1 = 5°\text{-}8'\text{-}49'' = 18529''$$

on a d'ailleurs $\frac{m'}{m} = 0{,}004022$.

On peut déduire de ces données une valeur approchée du rapport $\frac{C - A}{C}$; en effet, on tire de l'équation précédente

$$\frac{C - A}{C} = \frac{2m'}{3m} \cdot \frac{\theta_1}{\theta_1 + \lambda_1} = \frac{0{,}004022 \times 1775}{11927} = 0{,}000598$$

Ce rapport a, comme nous l'avions annoncé, une valeur fort petite. Encore cette valeur doit-elle être considérée comme un maximum; car elle repose sur la supposition que les constantes arbitraires M et N sont nulles, et si on les suppose seulement très petites, on aura en vertu de l'équation $\theta_1 = \sqrt{s_1^2 + s_1'^2}$ une valeur moyenne de θ_1 plus grande que P; par suite l'égalité $\theta_1 = \frac{3m(C - A)\lambda_1}{2Cm' - 3m(C - A)}$ se changera dans l'inégalité $\theta_1 > \frac{3m(C - A\lambda_1}{2Cm' - 3m(C - A)}$ d'où l'on tirera :

$$\frac{C-A}{C} < 0{,}000598$$

(35) Examinons actuellement le cas général où l'on regarde les constantes **M** et N, M′ et N′ comme ayant des valeurs très petites ; et d'abord nous allons faire voir que M′ est à peu près égal à M, et N′ à

$$2N\sqrt{\frac{C-A}{C-B}}$$

A cet effet posons dans l'équation (11) :

$$B = C(1-i) \qquad A = C(1-e)$$

e et i étant des quantités très petites dont nous négligerons les carrés ; on aura en divisant par AB :

$$(1-e-i)X^2 - (1+2e-i)m^2X + 4eim^4 = o$$

d'où l'on tire approximativement :

$$X = \frac{1+2e-i \pm (1+2e-i)(1-8ei)m^2}{2(1-e-i)}$$

Si on a égard successivement aux deux signes, et qu'on effectue les divisions, on trouve que les deux valeurs de X sont, aux secondes dimensions près de e et de i :

$$(1+3e)m^2 \quad \text{et} \quad 4ei\,m^2$$

En extrayant les racines carrées de ces quantités, on aura les valeurs désignées précédemment par μ et μ', savoir :

$$\mu = (1+\frac{3}{2}e)m \qquad \mu' = 2\sqrt{ei}\,.\,m$$

Actuellement on a trouvé (n° 29)

$$\frac{M'}{M} = \frac{(A+B-C)m\mu^2}{A\mu^2 - m^2(C-B)} \qquad \frac{N'}{N} = \frac{(A+B-C)m\mu'}{A\mu'^2 - m^2(C-B)}$$

Substituons à μ et μ' les valeurs précédentes, et il viendra, en négligeant toujours les carrés de e et de i :

$$M' = \left(1 - \frac{3}{2}e\right) M \quad N' = -2\sqrt{\frac{e}{i}}\,(1-i)\,N$$

On aura donc à très peu près :

$$M' = M \qquad N' = -2\,N\sqrt{\frac{e}{i}}$$

or, $i = \frac{C-B}{C}$ $\quad e = \frac{C-A}{C}$; $\qquad$ donc enfin $N' = -2\,N\sqrt{\frac{C-A}{C-B}}$

Cela dosé, divisons s_1 par s'_1, désignons pour abréger $mt + mt' - \mathfrak{G}$ par ω, nous aurons :

$$\text{Tang}\,\varphi_1 = \frac{M\sin(\mu t + \varepsilon) + N\sin(\mu' t + \varepsilon') + P\sin\omega}{M\cos(\mu t + \varepsilon) + 2N\sqrt{\frac{C-A}{C-B}}\cos(\mu' t + \varepsilon') + P\cos\omega}$$

Or, $$\text{tang}\,(\varphi_1 - \omega) = \frac{\text{tang}\,\varphi_1 - \text{tang}\,\omega}{1 + \text{tang}\,\varphi_1\,\text{tang}\,\omega}$$

Remplaçant tang φ_1 par la valeur précédente, et tang ω par $\frac{\sin\omega}{\cos\omega}$, on aura successivement :

$$\text{tang}(\varphi_1 - \omega) = \frac{[M\sin(\mu t + \varepsilon) + N\sin(\mu' t + \varepsilon')]\cos\omega - [M\cos(\mu t + \varepsilon) + 2N\sqrt{\frac{C-A}{C-B}}\cos(\mu' t + \varepsilon')]\sin\omega}{P + [M\cos(\mu t + \varepsilon) + 2N\sqrt{\frac{C-A}{C-B}}\cos(\mu' t + \varepsilon')]\cos\omega + [M\sin(\mu t + \varepsilon) + N\sin(\mu' t + \varepsilon')]\sin\omega}$$

et

$$\text{tang}\,(\varphi_1 - \omega) = \frac{M\sin(\mu t + \varepsilon - \omega) + N\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{C-A}{C-B}}\right)\sin(\mu' t + \varepsilon' + \omega) + N\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{C-A}{C-B}}\right)\sin(\mu' t + \varepsilon' - \omega)}{P + M\cos(\mu t + \varepsilon - \omega) - N\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{C-A}{C-B}}\right)\cos(\mu' t + \varepsilon' + \omega) + N\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{C-A}{C-B}}\right)\cos(\mu' t + \varepsilon' -}$$

Les observations ont appris que l'angle $\varphi_1 - \omega$ reste toujours très petit ; il résulte de là, que le dénominateur de cette expression ne saurait devenir nul pour aucune valeur des angles, μt, $\mu' t$, ω. Autrement, tang $(\varphi_1 - \omega)$ deviendrait infinie, $\varphi_1 - \omega$ serait droit, et comme d'ailleurs le numérateur peut prendre une infinité de valeurs finies, positives ou négatives, à raison des sinus et cosinus qu'il renferme, la valeur de tang $(\varphi_1 - \omega)$ pourrait passer par tous les états de grandeur entre $-\infty$ et $+\infty$, en sorte que l'angle $\varphi_1 - \omega$ pourrait dépasser toute limite, ce qui est contraire aux observations; de plus, le dénominateur de tang $(\varphi_1 - \omega)$ ne devra non plus changer de signe; sans quoi, en passant du positif au négatif, il atteindrait zéro.

Cela exige que la valeur de P soit plus grande que la somme des coefficiens $M + 2N\sqrt{\frac{C-A}{C-B}}$, abstraction faite des signes. Cette condition est d'ailleurs suffisante : car si elle est remplie, comme le numérateur est essentiellement fini, $\varphi_1 - \omega$ sera toujours moindre que 90°, et par conséquent l'angle φ ne fera qu'osciller, de part et d'autre, de l'angle ω qui sera sa valeur moyenne.

Ainsi, nous avions reconnu qu'en supposant nulles les constantes M et N, dépendantes de l'état initial du mouvement de la lune, les nœuds de son équateur coïncidaient rigoureusement à toutes les époques du mouvement avec les nœuds moyens de l'orbite: et nous voyons maintenant que si les constantes arbitraires M et N sont seulement regardées comme très petites, les nœuds de l'équateur lunaire sur l'écliptique mobile feront, de part et d'autre des nœuds moyens de l'orbite, des oscillations dont l'amplitude sera moindre que 90°; en sorte que leur moyen mouvement sera toujours égal au moyen mouvement des nœuds de l'orbite. Ajoutons que cette égalité n'exige pas, *qu'à l'origine il y ait eu coïncidence rigoureuse*, entre la ligne des nœuds de l'équateur et la ligne des nœuds de l'orbite, ce qui serait fort peu vraisemblable : il a pu exister entre elles une *différence arbitraire*, mais *très petite*; que l'attraction terrestre aura empêché de s'accroître, et maintenu constamment entre certaines limites.

La seule condition nécessaire et suffisante pour que les observations soient satisfaites, est l'inégalité

$$P > M + 2N\sqrt{\frac{C-A}{C-B}}$$

laquelle est toujours possible, puisque M et N sont des constantes arbitraires. De plus, comme tang $(\varphi_1 - \omega)$ doit toujours avoir une très petite valeur, les constantes M et N seront très petites par rapport à P. On verra plus loin la modification qu'éprouve la condition précédente, lorsqu'on a égard aux termes affectés de l'excentricité e que renferment les seconds membres des équations (10).

Il nous reste à examiner ce que devient, dans le cas général, la valeur moyenne de l'inclinaison θ_1 ; on a

$$\theta_1^2 = s_1^2 + s_1'^2 = \frac{M^2[1 - \cos 2(\mu t + \varepsilon)]}{2} + \frac{N^2[1 - \cos 2(\mu' t + \varepsilon')]}{2}$$

$$+ \frac{M^2[1 + \cos 2(\mu t + \varepsilon)]}{2} + \frac{4N^2(C - A)}{C - B}\frac{[1 + \cos 2(\mu' t + \varepsilon')]}{2} + P^2 \ldots$$

En ne conservant que les termes qui ne renferment ni sinus ni cosinus, on aura pour valeur moyenne de l'inclinaison θ_1

$$\theta_1 = \sqrt{M^2 + \frac{N^2}{2}\left(1 + \frac{4(C - A)}{C - B}\right) + P^2}$$

Ainsi, nous avons vu précédemment que dans l'hypothèse où M et N étaient nuls, l'inclinaison de l'équateur lunaire sur l'écliptique était rigoureusement constante et égale à P. Dans le cas général, cette inclinaison sera soumise à des variations périodiques toujours très petites, et sa valeur moyenne sera encore à fort peu près égale à la constante P.

(36) Pour compléter l'intégration des équations (10), il nous reste à considérer les termes affectés de l'excentricité e que renferment leurs seconds membres. L'inclinaison θ, relative à l'écliptique fixe, pourra y être remplacée par l'inclinaison θ_1 relative à l'écliptique mobile, sans autre modification, de même que l'inclinaison λ a déja été remplacée par λ_1 (n° 28); car cette substitution ne fait que développer des termes affectés de l'angle ζ, et nous négligeons son produit par e. Puis, comme la discussion du n° précédent nous a appris que θ_1 a une valeur sensiblement constante et égale à

$$\frac{3m(C - A)\lambda_1}{2Cm' - 3m(C - A)}$$

nous considérerons θ_1 comme constant dans les termes dont il s'agit, ce qui sera d'autant plus rapproché de la réalité que cette quantité est fort petite. Enfin, la longitude moyenne du nœud descendant de l'équateur lunaire étant égale à la longitude moyenne du nœud ascendant de l'orbite, et ces deux angles étant comptés en sens contraire, nous avons : $mt + \psi = mt - l$. En conséquence, les termes que nous avons à considérer se présenteront sous la forme :

$$(1^{re}\ \text{éq}^n) \ldots\ldots - 9m^2\left(\frac{C-A}{B}\right)(\theta_1+\lambda_1)\,e\sin(mt-l)\cos(mt-\pi)$$

$$(2^{me}\ \text{éq}^n) \ldots\ldots - 6m^2\left(\frac{C-B}{A}\right)(\theta_1+\lambda_1)\,e\sin mt-l)\sin(mt-\pi)$$

Le produit $\sin(mt-l)\cos(mt-\pi)$ se transformera en une somme de sinus : $\frac{1}{2}[\sin(2\,mt-\pi-l)+\sin(\pi-l)]$, et de même le produit $\sin(mt-l)\sin(mt-\pi)$ se transformera en une différence de cosinus : $\frac{1}{2}[\cos\pi-l)-\cos(2\,mt-\pi-l)]$.

Nous négligerons les sinus et cosinus qui renferment l'angle $2mt$, parce que ces termes n'augmenteront pas par l'intégration ; mais le sinus et cosinus de l'arc $\pi-l$, acquerront par l'intégration de petits diviseurs, et donneront naissance à une inégalité qui mérite d'être considérée. Remarquons d'ailleurs que $\pi-l$ représente la longitude du périgée de la terre vue de la lune, rapportée au nœud ascendant de l'orbite ; et comme on a désigné l'angle π par $\sigma+it$, et l'angle l par $\epsilon-m't$, on aura :

$$\pi-l=(i+m')\,t+\sigma-\epsilon$$

D'après ces considérations, les équations (10) deviendront en réduisant leurs seconds membres aux termes que nous venons d'indiquer :

$$\frac{d^2s}{dt^2}-\frac{A+B-C}{B}\,m\,\frac{ds'}{dt}+4\,\frac{(C-A)}{B}\,m^2s$$
$$=-\frac{9m^2}{2}\,\frac{(C-A)}{B}\,(\theta_1+\lambda_1)\,e\sin[(i+m')\,t+\sigma-\epsilon]$$

$$\frac{d^2s'}{dt^2} + \frac{A+B-C}{A} m \frac{ds}{dt} + \frac{(C-B)}{A} m^2 s'$$
$$= -3m^2 \frac{(C-B)}{A} (\theta_1 + \lambda_1) e \cos [(i-m') t + \sigma - \varepsilon)$$

(37). Actuellement désignons par R $\sin [(i+m') t + \sigma - \varepsilon]$ et par R' $\cos [(i+m') t + \sigma - \varepsilon]$, les parties de s et s' relatives à ces nouveaux termes : nous aurons, pour déterminer R et R', les équations

$$\left(\frac{i+m'}{m} - 4 \frac{(C-A)}{B} \frac{m}{i+m'}\right) R - \left(1 - \frac{C-A}{B}\right) R'$$
$$= \frac{9m}{2} \frac{(C-A)}{B} \frac{(\theta_1+\lambda_1)}{i+m'} e$$

$$\left(1 - \frac{C-B}{A}\right) R - \left(\frac{i+m'}{m} - \frac{(C-B)}{A} \frac{m}{i+m'} R'\right)$$
$$= -3m . \frac{(C-B)}{A} \frac{(\theta_1+\lambda_1)}{i+m'} e$$

Nous pourrons réduire à l'unité le coefficient de R' dans la première équation, et celui de R dans la seconde, à cause de la petitesse des fractions $\frac{C-B}{A}$, $\frac{C-A}{B}$. Remarquons de plus que $\frac{(i+m')^2}{m^2}$ a une fort petite valeur; car, puisque le rapport $\frac{i+m'}{m} = 0{,}012474$ (n° 20), on a : $\frac{(i+m')^2}{m^2} = 0{,}0001556$. Enfin, le nombre $\frac{(C-A)(C-B)}{AB}$ est sans doute beaucoup plus petit que la valeur précedente. Il suit de là qu'on pourra négliger, dans la résolution des équations précédentes, les termes où les inconnues R et R' seront multipliées par $\frac{(i+m')^2}{m^2}$, ou par $\frac{(C-A)(C-B)}{AB}$, et même par $\frac{(C-A)(C-B)}{AB} \frac{m^2}{(i+m')^2}$, pour ne garder que les termes dont les coefficiens sont égaux à l'unité.

On trouvera ainsi à fort peu près :

$$R = -3m \frac{(C-B)}{A} \frac{(\theta_1 + \lambda_1)}{i + m'} e, \quad R' = -\frac{9m}{2} \frac{(C-A)}{B} \frac{(\theta_1 + \lambda_1)}{i + m'} e$$

(On peut remarquer que la valeur absolue de R′ est plus grande que celle de R; car, B étant plus grand que A (n° 23), si, pour un instant on pose $B = A + \delta$, on aura $\frac{C-A}{B} = \frac{C-B+\delta}{A+\delta}$ et comme $\frac{C-B}{A}$ est une fraction proprement dite, elle augmente par l'addition de δ à ses deux termes ; conséquemment on a $\frac{C-A}{B} > \frac{C-B}{A}$ et par suite $R' > R$.)

En ajoutant ces termes aux valeurs précédemment trouvées pour s_1 et s'_1 (n° 32), on aura les valeurs complettes de ces inconnues :

$$s_1 = M \sin(\mu t + \varepsilon) + N \sin(\mu' t + \varepsilon') + P \sin[(m + m')t - 6] \\ + R \sin[(i + m')t + \sigma - 6]$$

$$s'_1 = M \cos(\mu t + \varepsilon) + 2N \sqrt{\frac{C-A}{C-B}} \cos(\mu' t + \varepsilon') + P \cos[(m + m')t - 6] \\ + R' \cos[(i + m')t + \sigma - 6]$$

elles se réduiront à peu près à leurs deux derniers termes à cause de la petitesse des constantes M et N.

(38) Examinons maintenant quelle sera l'influence des termes que nous venons de calculer sur la valeur de tang $(\varphi_1 - \omega)$ trouvée dans le n° 35.—Il nous suffira de considérer le dénominateur, qui devient :

$$P + M \cos(\mu t + \varepsilon - \omega) + N\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{C-A}{C-B}}\right) \cos(\mu' t + \varepsilon' - \omega)$$
$$-N\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{C-A}{C-B}}\right) \cos(\mu' t + \varepsilon' + \omega) + \frac{(R' + R)}{2} \cos[(m - i)t - \sigma]$$
$$+ \frac{(R' - R)}{2} [(m + i + 2m')t + \sigma - 6]$$

Ce dénominateur doit garder constamment le même signe, pour que l'angle $(\varphi_1 - \omega)$ reste toujours inférieur à 90°; et comme P est positif, cela exige que la valeur de P soit supérieure à la somme des valeurs positives des coefficiens que renferme ce dénominateur. Cette condition a donné (n° 35)

$$P > M + 2N\sqrt{\frac{C-A}{C-B}}$$

inégalité qui est toujours possible, puisque M et N sont des constantes arbitraires.

Dans le cas actuel, la présence des termes affectés des coefficiens R et R′ modifiera cette inégalité, et comme la valeur de R′ prise positivement surpasse celle de R, on voit que le dénominateur gardera invariablement le même signe, si l'on a

$$P > M + 2N\sqrt{\frac{C-A}{C-B}} + R'$$

cette inégalité doit être vérifiée indépendamment des constantes arbitraires, en sorte que l'on doit avoir séparément $P > R'$.

On peut déduire de cette dernière condition une limite supérieure du rapport $\frac{C-A}{B}$; en effet, si l'on remplace P par la valeur moyenne de l'inclinaison θ_1, et R′ par la valeur trouvée dans le n° précédent, on aura :

$$\frac{C-A}{B} < \frac{2\,\theta_1\,(i+m')}{9\,(\theta_1+\lambda_1)\,em} \quad \text{ou} \quad \frac{C-A}{B} < 0{,}011436$$

mais, d'après la valeur déja trouvée pour $\frac{C-A}{C}$ (n° 35) on doit penser que $\frac{C-A}{B}$ est de beaucoup inférieure à la limite précédente.

(39) Actuellement, on peut aisément obtenir de nouvelles valeurs des quantités *p et q*, qui désignent les composantes de la vitesse de

rotation de la lune autour de l'axe du plus petit et du moyen moment d'inertie; on a en effet (n° 27) :

$$p = -ms - \frac{ds'}{dt}, \qquad q = -ms' + \frac{ds}{dt}$$

formules dans lesquelles il faudra mettre pour s et s' les valeurs rapportées à l'écliptique fixe, trouvées dans le n° 30, et augmentées des termes que nous venons de calculer (n° 37). On voit alors que *les termes dépendans du déplacement séculaire de l'écliptique disparaissent des expressions de p et q*, puisqu'ils sont affectés du coefficient insensible g, et en négligeant les termes qui renferment les constantes M et N, on aura :

$$p = m'\mathrm{P}\sin[(m+m')t-6] + [\mathrm{R}'(i+m') - m\mathrm{R}]\sin[(i+m')t+\sigma-6]$$

$$q = m'\mathrm{P}\cos[(m+m')t-6] + [\mathrm{R}(i+m') - m\mathrm{R}']\cos[(i+m')t+\sigma-6]$$

Si on négligeait les produits $\frac{(i+m')\mathrm{R}}{m}$ et $\frac{(i+m')\mathrm{R}'}{m}$ à côté de R et de R', les coefficiens des seconds termes de ces formules se réduiraient à $-m\mathrm{R}$ et $-m\mathrm{R}'$, et d'après les valeurs trouvées (n° 37) pour R et R', ils coïncideraient avec les coefficiens M et M' que nous avions obtenus (n° 20) dans une première approximation.

Ces valeurs de p et q feront connaître les oscillations du pôle de rotation à la surface de la lune. L'inégalité représentée par les premiers termes a une période très peu inférieure au mois lunaire, à cause de la petitesse de la fraction $\frac{m'}{m}$ dont la valeur est 0,004022. L'inégalité représentée par les seconds termes est plus considérable ; elle dépend de la différence en longitude du nœud et du périgée lunaire ; sa période est égale à $1^{\text{mois}} \times \frac{1}{0{,}012474} = 80^{\text{mois}},167$. Peut-être des observations plus précises parviendront à la reconnaître.

Désignons par Δ la distance angulaire de l'axe instantané de rotation à l'axe du plus grand moment d'inertie C, on a (n° 12) :

$$\sin\Delta = \sqrt{\frac{p^2+q^2}{p^2+q^2+r^2}}$$

formule dans laquelle on substituera à la place de p, q, r, leurs valeurs ; si l'on prend pour unité le rayon de la lune, la valeur de $\sin\Delta$ représentera le rayon du cercle que le pôle de rotation décrit à la surface de la lune.

Enfin la vitesse de rotation V, autour de l'axe instantané, se déduira de la formule $V = \sqrt{p^2+q^2+r^2}$; si l'on fait les substitutions précédemment indiquées, on aura, à fort peu près :

$$V = m\,[1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{m'^2}{m^2}\,P^2 + \frac{1}{4}(R^2+R'^2) + \frac{1}{4}(R'^2 - R^2)$$
$$\cos 2\,[(i+m')\,t + \sigma - 6)]$$

Vu et approuvé par le doyen de la faculté des sciences de l'académie de Paris,

J.-B. BIOT.

Permis d'imprimer :

L'inspecteur-général des études, chargé de l'administration de l'académie de Paris,

ROUSSELLE.

RÉSUMÉ

DE LA

THÈSE DE MÉCANIQUE.

RÉSUMÉ

DE LA

THÈSE DE MÉCANIQUE.

De la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique.

La méthode de la variation des constantes arbitraires, a reçu ses premiers développemens dans le calcul des perturbations planétaires. Lorsqu'on a égard à l'action réciproque des planètes, le mouvement elliptique n'est plus l'expression rigoureuse des faits, et on est conduit à regarder le mouvement de la planète comme ayant lieu à chaque instant sur une ellipse, dont les élémens varient par degrés insensibles, et qui n'est autre chose que la courbe osculatrice de l'orbite réelle. Pour traduire cette conception géométrique par l'analyse, on introduit dans les équations différentielles du mouvement, les termes provenant de l'action mutuelle des planètes, et on cherche à satisfaire aux nouvelles équations différentielles en faisant varier les constantes arbitraires qui complètent les intégrales du mouvement elliptique.

Cette méthode peut s'étendre à toutes les questions de mécanique où, après avoir négligé une partie des forces qui agissent sur les mobiles, les équations différentielles du mouvement deviennent intégrales. Ces intégrales fournissent une première solution du problème, d'autant plus approchée que les forces négligées sont plus petites par rapport à celles que l'on a conservées. Pour étendre ensuite cette solution aux forces complètes, on fera varier les constantes arbitraires contenues dans les premières intégrales.

Mais pour que la substitution de ces inconnues aux inconnues primitives du problème ait une véritable utilité, il faut que les différentielles des constantes arbitraires puissent être présentées sous une forme qui se prête aisément aux approximations successives. — Le développement complet de ces différentielles repose sur plusieurs formules générales.

1° on représente par φ, ψ, θ... les variables indépendantes réduites au moindre nombre possible, qui déterminent la position d'un système de corps dans l'espace; par a, b, c... les constantes arbitraires qui complètent les intégrales des équations différentielles du mouvement; par T, la demi-somme des forces vives du système.

Pour abréger l'on pose :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varphi', \quad \frac{d\psi}{dt} = \psi', \quad \frac{d\theta}{dt} = \theta' \ldots \text{ etc.}$$

$$\frac{dT}{d\varphi'} = s, \quad \frac{dT}{d\psi'} = u, \quad \frac{dT}{d\theta'} = v \ldots \text{ etc.}$$

Enfin on suppose que la somme des forces appliquées aux mobiles, multipliées chacune par l'élément de la distance dont elle dépend, soit une différentielle intégrale, on démontre alors qu'on a en général :

$$(1) \quad \frac{d\varphi}{da}\frac{ds}{db} - \frac{d\varphi}{db}\frac{ds}{da} + \frac{d\psi}{da}\frac{du}{db} - \frac{d\psi}{db}\frac{du}{da} + \frac{d\theta}{da}\frac{dv}{db} - \frac{d\theta}{db}\frac{dv}{da} + \ldots \text{ etc.} = \left(\overline{a, b}\right)$$

le symbole $\left(\overline{a, b}\right)$ représentant une *quantité indépendante du temps t.* Cette quantité est en général fonction des constantes arbitraires a, b, c... et peut dans certains cas se réduire à une constante déterminée.

2° Par une analyse semblable appliquée aux équations générales du mouvement en coordonnés rectilignes, dans lesquels x, y, z, désignant les coordonnés d'un mobile m, et x', y', z', les différences premières $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, on trouve :

$$(2) \quad \Sigma m \left(\frac{dx}{da}\frac{dx'}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dx'}{da} + \frac{dy}{da}\frac{dy'}{db} - \frac{dy}{db}\frac{dy'}{da} + \frac{dz}{da}\frac{dz'}{db} - \frac{dz}{db}\frac{dz'}{da} \right) = (a, b)$$

la notation (a, b) désignant encore une quantité constante relativement au temps.

Les formules (1) et (2) bien que déduites d'une même analyse, se distinguent l'une de l'autre en ce que dans la première, on a eu égard aux conditions particulières auxquelles les mobiles peuvent être assujettis, tandis que la seconde en est indépendante.

3° Si l'on imagine que les intégrales complètes des équations du mouvement aient été résolues par rapport aux constantes arbitraires, en sorte que chacune d'elles soit une fonction connue du temps t et des variables φ, ψ, θ... s, u, v... on démontre cette troisième formule qui est comme l'inverse de la formule (1).

$$(3) \quad \frac{da}{ds}\frac{db}{d\varphi} - \frac{da}{d\varphi}\frac{db}{ds} + \frac{da}{du}\frac{db}{d\psi} - \frac{da}{d\psi}\frac{db}{du} + \frac{da}{dv}\frac{db}{d\theta} - \frac{da}{d\theta}\frac{db}{dv} \ldots = [a, b]$$

$[a, b]$ désignant une quantité indépendante du temps t.

Ces formules posées, on suppose qu'on ait intégré complètement les équations du mouvement en négligeant une partie des forces appliquées aux mobiles; les expressions des variables indépendantes φ, ψ, θ... sont des fonctions connues du temps t et des constantes arbitraires a, b, c... Or, les équations du mouvement sont du second ordre et en même nombre que les variables indépendantes; par conséquent les constantes arbitraires sont en nombre double de ces mêmes variablas. — Si donc on introduit les forces négligées dans les équations du mouvement, et que pour satisfaire à ces nouvelles équations on regarde a, b, c... comme des fonctions inconnues du temps t, on aura un nombre d'inconnues double de celui des inconnues primitives. Par conséquent, il sera permis de leur imposer un nombre de conditions égal au nombre des variables φ, ψ, θ... Ces conditions étant d'ailleurs arbitraires, on choisira les plus propres à simplifier la détermination des nouvelles inconnues. A cet effet, on convient d'égaler à zéro les parties de chaque différentielle $d\varphi$, $d\psi$, $d\theta$... qui proviennent de la variation des constantes. Par ce moyen, les équations différentielles secondes du mouvement sont remplacées par un nombre double d'équations différentielles du premier ordre.

Il s'agit actuellement de déduire de ce système d'équations les valeurs des différentielles des constantes devenues variables da, db, dc...

Représentons les termes qu'introduisent dans les équations du mouvement les forces perturbatrices, par $(\varphi), (\psi), (\theta)$... ces quantités sont des fonctions connues des variables φ, ψ, θ... qui peuvent n'être pas les différences partielles d'une même fonction de φ, ψ, θ... et désignons par la notation (a), la quantité

$$(\varphi)\frac{d\varphi}{da} + (\psi)\frac{d\psi}{da} + (\theta)\frac{d\theta}{da} + \ldots = (a)$$

a étant l'une quelconque des constantes arbitraires, on démontre que la quantité $(a)\, dt$ peut être exprimée en fonction linéaire des différentielles da, db, dc... sans renfermer le temps t explicitement, et ces expressions sont :

$$\left.\begin{array}{l}(a)\, dt = (\overline{a, b})\, db + (\overline{a, c})\, dc + \ldots \\ (b)\, dt = (\overline{b, a})\, da + (\overline{b, c})\, dc + \ldots \\ (c)\, dt = (\overline{c, a})\, da + (\overline{c, b})\, db + \ldots \\ \text{etc.}\end{array}\right\}(4)$$

Dans lesquelles la notation $(\overline{a, b})$ a la signification qui lui a été donnée dans la formule (1).

Dans chaque cas particulier, on déduira de ces équations les valeurs des différentielles da, db, dc... en fonction de $(a)\, dt$, $(b)\, dt$, $(c)\, dt$... Cela suffira dans la pratique, mais pour compléter la théorie il importe de trouver des formules qui donnent les expressions générales de ces différentielles ; ces formules sont :

$$\left.\begin{array}{l}da = [a, b]\,(b)\, dt + [a, c]\,(c)\, dt + \ldots \\ db = [b, a]\,(a)\, dt + [b, c]\,(c)\, dt + \ldots \\ dc = [c, a]\,(a)\, dt + [c, b]\,(b)\, dt + \ldots \\ \text{etc.}\end{array}\right\}(5)$$

où la notation $[a, b]$ a la signification qui lui a été donnée dans la formule (3).

La méthode de la variation des constantes ne doit être considérée que comme méthode d'approximation. Les forces perturbatrices étant supposées très petites par rapport à celles que l'on a d'abord considérées, les variations des constantes dues à ces forces sont aussi fort petites, en sorte que dans une première approximation on peut regarder $a, b, c\ldots$ comme des constantes dans les expressions de $da, db, dc\ldots$ par là *le calcul des parties variables de a, b, c... se réduit aux quadratures*, et c'est là un caractère spécial de la méthode que nous exposons.

Ces parties variables servent de base à la deuxième approximation, dans laquelle on a égard aux quarrés des forces perturbatrices, et ainsi de suite, etc.

Lorsque les forces perturbatrices rempliront la condition, que la somme des produits de chacune d'elles multiplée par l'élément de sa de sa direction, soit la différentielle exacte d'une certaine fonction Ω des variables indépendantes, alors les quantités $(a)\,dt$, $(b)\,dt$, $(c)\,dt\ldots$ ne seront autre chose que les différences partielles $\frac{d\Omega}{da}, \frac{d\Omega}{db}, \frac{d\Omega}{dc}, \ldots$ et l'on pourra les remplacer par ces différences partielles dans les équations (4) et (5).

Pour appliquer les formules précédentes à la solution d'un problème de mécanique, il faudra d'abord calculer les diverses fonctions des constantes a, b, c, représentées par la notation $(\overline{a, b})$, si l'on fait usage des équations (4); ou par la notation $[a, b]$, si l'on fait usage des équations (5). Le nombre de ces coefficiens est égal à celui des combinaisons deux à deux, qu'on peut faire avec les lettres $a, b, c\ldots$ M. Poisson s'est livré à cette recherche dans deux problèmes particuliers, savoir, le mouvement d'un point matériel attiré par une force centrale et le mouvement de rotation d'un corps solide. Les constantes arbitraires qui complètent les intégrales relatives à chacun de ces problèmes, sont au nombre de six, et ont une signification analogue dans les deux questions, savoir : 1° la constante h qui entre dans l'équation des forces vives; 2° la constante c ajoutée au temps; 3° la constante k qui représente dans le second problème la somme des aires décrites dans l'unité de temps, projetées sur le plan du maximum des aires, et dans le premier l'aire décrite pendant l'unité de temps dans le plan de la trajectoire, qui peut être regardé comme un plan principal de projection; 4° la constante ω qui indique un angle compté dans le plan du maximum des aires, à partir de son intersection avec un plan fixe; 5° la constante α qui est la longitude de cette intersection comptée à partir d'une ligne fixe; 6° la constante γ qui est l'inclinaison des deux plans.

L'analyse conduit aux *mêmes valeurs pour les différentielles de même nom* dans les deux problèmes; en sorte que leur solution est ramenée aux mêmes formules.

Une coïncidence si remarquable doit être une conséquence nécessaire des lois fondamentales de la mécanique. En effet, on fait voir, en partant des équations générales du mouvement d'un système de points matériels, que les différentielles des constantes arbitraires qui complètent les intégrales premières, fournies par le principe des forces vives et par le principe des aires, peuvent être déterminées à *priori*, et ont la même expression dans tous les problèmes.

Tous les résultats précédens ne supposent nullement que la somme des forces perturbatrices, multipliées chacune par l'élément de sa direction, soit une différentielle exacte. Ils conviennent donc, sans modification, au cas où la force perturbatrice serait la résistance d'un milieu.

En appliquant les formules générales au calcul des altérations, produites dans le mouvement elliptique d'une planète par la résistance d'un éther répandu autour du soleil, on parvient très simplement à exprimer les variations des élémens elliptiques, en fonction de l'anomalie vraie de la planète à l'époque que l'on considère. Par conséquent, en négligeant le carré de la force perturbatrice, on déduira de ces expressions, par la méthode des quadratures, ou la réduction en série, les valeurs des parties variables de ces élémens.

FIN.

ERRATA.

Page 14, ligne 3. Supprimez : (*fig.* 1).

Page 23 et suivantes. Au lieu de cette phrase : ψ *sera la longitude du nœud ascendant de l'équateur lunaire, lequel est en même temps le nœud descendant de l'écliptique, par rapport au même équateur, c'est-à-dire l'équinoxe d'automne de la lune*, lisez : ψ *sera la longitude du nœud descendant de l'équateur lunaire.*

Page 23, ligne 6. Au lieu de (*fig.* 2), lisez : (*fig.* 1).

Ibid., ligne 9. Au lieu de : *nœud ascendant*, lisez : *nœud descendant.*

Page 25, ligne 7. Au lieu de : (*fig.* 3), lisez : (*fig.* 2).

Page 38, avant-dernière ligne. Au lieu de : *par suite le sinus*, lisez : *par suite le cosinus.*

Ibid., ligne 14. Au lieu de : $\sin(2mt - \pi)$, lisez : $\sin 2(mt - \pi)$.

Page 39, ligne 3. Au lieu de : $\sin(2\,mt - \pi)$, lisez : $\sin 2\,(mt - \pi)$.

Page 40, ligne 2. Au lieu de : *l'équation qui donnera* φ', lisez : *l'équation qui donnera* Q'.

Page 45, en tête de la formule. Au lieu de : $\frac{1}{2}$ lisez : $\frac{1}{6}$.

Page 48, lignes 17 et 26. Au lieu de T^2, dans les deux formules, lisez : T_1^2.

Ibid., ligne 31. Au lieu de : T, lisez : T_1.

Page 50, ligne 3. Au lieu de $\theta\,\frac{d\psi}{dt}$, lisez : $\theta\,\frac{d\varphi}{dt}$.

Page 52, ligne 11. Au lieu de $\frac{C-B}{B}$ dans la formule, lisez : $\frac{C-A}{B}$.

Page 68, ligne 2. Au lieu de : $(i-m')t$ dans la formule, lisez : $(i+m')t$.

Page 76, ligne 14. Au lieu de *intégrale*, lisez : *intégrable.*

Fig. 1.

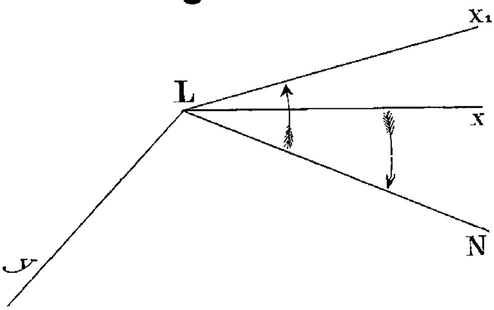

Fig. 2.

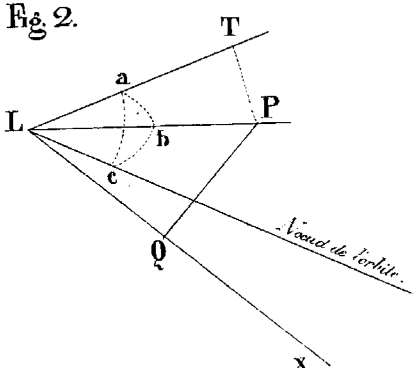

Fig. 3.

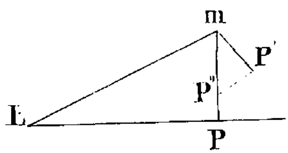

Fig. 4.