HF u. f. 166 (4°) 175

N° D'ORDRE

544.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. E. FABRY,

Ex-Ingénieur des Manufactures de l'État,
Agrégé des Sciences mathématiques, Professeur au Lycée de Tours.

FACULTÉ des SCIENCES
BIBLIOTHÈQUE
PARIS

1re THÈSE. — SUR LES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES A COEFFICIENTS RATIONNELS.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 28 juillet 1885, devant la Commission d'Examen.

BIBLIOTHÈQUE DE L'UNIVERSITÉ DE FRANCE

MM. HERMITE, *Président.*
DARBOUX, POINCARÉ, } *Examinateurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1885

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	MILNE EDWARDS, Professeur.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
PROFESSEUR HONORAIRE	PASTEUR.	
PROFESSEURS	N.	Physique.
	HÉBERT	Géologie.
	DUCHARTRE	Botanique.
	JAMIN	Physique.
	DE LACAZE-DUTHIERS.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BERT	Physiologie.
	HERMITE	Algèbre supérieure.
	BOUQUET	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	TROOST	Chimie.
	FRIEDEL	Chimie organique.
	O. BONNET	Astronomie.
	DARBOUX	Géométrie supérieure.
	DEBRAY	Chimie.
	TISSERAND	Astronomie.
	LIPPMANN	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	HAUTEFEUILLE	Minéralogie.
CHARGÉS DE COURS	APPELL	Mécanique rationnelle.
	POINCARÉ	Mécanique physique et expérimentale.
AGRÉGÉS	BERTRAND, J. VIEILLE	Sciences mathématiques.
	PELIGOT	Sciences physiques.
SECRÉTAIRE	PHILIPPON.	

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
11066 Quai des Augustins, 55.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

PREMIÈRE THÈSE.

SUR LES INTÉGRALES

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

A COEFFICIENTS RATIONNELS.

1. La théorie des équations différentielles linéaires a été étudiée particulièrement en Allemagne depuis quelques années. En 1866, M. Fuchs a publié un premier Mémoire (*Journal de Crelle*, t. 66) sur les équations différentielles linéaires à coefficients uniformes, dans lequel il a examiné les propriétés des intégrales et en a déduit des formes remarquables de ces intégrales pour les valeurs singulières de la variable x. Parmi ces intégrales, il a désigné comme régulières celles qui peuvent s'exprimer par des séries, suivant les puissances positives de $x - a$, a étant une valeur singulière de l'équation, et a déterminé quelles sont les équations dont toutes les intégrales sont régulières. MM. Thomé et Frobenius ont publié divers Mémoires sur cette question (*Journal de Crelle*, t. 74 et suiv.); ils sont arrivés, par des méthodes différentes, à déterminer dans quels cas une équation différentielle peut avoir des intégrales régulières. M. Thomé a généralisé la question en étudiant les intégrales de forme normale. Malheureusement, les intégrales régulières et normales sont exprimées par des séries, et, dans la plupart des cas, on ne sait pas si ces séries sont convergentes; dans quelques cas particuliers seulement, on peut savoir si les intégrales régulières ou normales existent réellement.

M. Fuchs a étudié les équations différentielles du second ordre dont les

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

intégrales sont algébriques (*Journal de Crelle*, t. 81), et M. Jordan a généralisé la question en considérant des équations d'un ordre quelconque. Enfin M. Thomé a publié plusieurs Mémoires dans lesquels il étudie diverses questions relatives à la réductibilité des équations différentielles linéaires et examine une classe particulière de ces équations.

Dans le présent Mémoire, nous étudierons les équations différentielles linéaires à coefficients rationnels; on peut ramener ces équations à la forme

$$P_0 \frac{d^m y}{dx^m} + P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + P_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + P_{m-1} \frac{dy}{dx} + P_m y = 0,$$

les coefficients P étant des fonctions entières de x.

Toutefois la plupart des résultats auxquels nous arriverons peuvent s'appliquer sans difficulté aux équations différentielles linéaires dont les coefficients restent uniformes pour des valeurs déterminées de la variable.

Dans la première Partie, nous rappellerons les principes fondamentaux de la théorie des équations différentielles linéaires. Dans la seconde Partie, nous déterminerons les formes que l'on peut donner aux intégrales lorsque la variable prend des valeurs représentées par les points d'une courbe fermée déterminée. La troisième Partie est relative à l'étude des intégrales régulières, et nous conduit à examiner quelques classes particulières d'équations différentielles. Dans la quatrième Partie, nous étudierons les intégrales de forme normale. Enfin, dans la cinquième Partie, nous examinerons quelques problèmes relatifs à la réductibilité des équations différentielles linéaires.

2. Soit l'équation différentielle linéaire homogène

$$(1) \qquad P_0 \frac{d^m y}{dx^m} + P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + P_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + P_m y = 0,$$

les coefficients P étant des fonctions de x uniformes et continues, au moins pour des valeurs de x représentées par les points intérieurs à une courbe fermée.

Si les fonctions de $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ vérifient cette équation, la fonction $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$ sera aussi une intégrale, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ étant des constantes arbitraires.

On dit que ces n fonctions sont linéairement indépendantes s'il n'existe aucun système de valeurs de $c_1, c_2, \ldots, c_n$, pour lequel $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$ soit identiquement nul, sauf le système $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

Si ces n fonctions sont linéairement indépendantes, le déterminant différentiel

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \cdots & \frac{dy_n}{dx} \\ \frac{d^2y_1}{dx} & \frac{d^2y_2}{dx} & \cdots & \frac{d^2y_n}{dx} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} & \cdots & \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, et réciproquement. On le démontre en considérant l'équation

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n = 0,$$

et les équations obtenues en différentiant celle-ci $n - 1$ fois; on a n équations homogènes en $c_1, c_2, \ldots, c_n$, qui n'admettent pas de solutions différentes de zéro si le déterminant n'est pas nul.

THÉORÈME. — *L'équation différentielle* (1) *ne peut pas avoir plus de m intégrales linéairement indépendantes, et si* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *sont m intégrales distinctes, toute intégrale peut se mettre sous la forme*

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_my_m.$$

En effet, si y_{m+1} est une intégrale, en substituant ces $m + 1$ intégrales dans l'équation (1), on aura $m + 1$ équations homogènes entre $P_0, P_1, \ldots, P_m$, et en éliminant ces quantités, on en déduit

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m & y_{m+1} \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \cdots & \frac{dy_m}{dx} & \frac{dy_{m+1}}{dx} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^my_1}{dx^m} & \frac{d^my_2}{dx^m} & \cdots & \frac{d^my_m}{dx^m} & \frac{d^{m+1}y_{m+1}}{dx^{m+1}} \end{vmatrix} = 0;$$

ces $m + 1$ fonctions ne sont donc pas indépendantes, et l'on peut déterminer les constantes c de façon que

$$y_{m+1} = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_my_m.$$

Il suffit donc de connaître m intégrales distinctes pour en déduire l'intégrale générale. Un système de m intégrales indépendantes se nomme *sys-*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

tème fondamental. S'il existe un système fondamental d'intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_m$, on peut en former un autre en prenant m intégrales de la forme

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_m y_m$$

données par m systèmes de valeurs des constantes c, et le nouveau système sera fondamental si le déterminant des m^2 constantes c est différent de zéro; car le déterminant différentiel du second système d'intégrales est égal au déterminant du premier système multiplié par le déterminant des constantes.

3. Nous allons voir comment on peut obtenir les intégrales de l'équation (1) sous forme de séries.

THÉORÈME. — *Si les coefficients* P *de l'équation* (1) *restent uniformes, finis et continus pour toutes les valeurs de* x *représentées par les points intérieurs à un cercle, et si le premier coefficient* P_0 *ne s'annule pour aucune de ces valeurs de* x, *l'équation différentielle* (1) *sera vérifiée par une fonction de* x *uniforme et continue pour les mêmes valeurs de* x, *les valeurs de cette fonction et de ses* $m - 1$ *premières dérivées étant arbitraires pour la valeur* $x = a$ *qui est représentée par le centre du cercle considéré.*

En effet, divisons le premier membre de l'équation (1) par P_0, et posons

$$\frac{P_1}{P_0} = -q_1, \quad \frac{P_2}{P_0} = -q_2, \quad \ldots, \quad \frac{P_m}{P_0} = -q_m,$$

on aura l'équation

$$\frac{d^m y}{dx^m} = q_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + q_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + q_m y, \tag{2}$$

les coefficients q restant uniformes, finis et continus, pourvu que le module de $(x - a)$ reste inférieur au rayon R du cercle donné.

Représentons par $y_a, y'_a, y''_a, \ldots, y_a^{(m-1)}$ les valeurs de y et de ses $m - 1$ premières dérivées pour $x = a$, nous supposons ces m quantités choisies arbitrairement. L'équation (2) donnera la valeur de la dérivée $y_a^{(m)}$ et les autres dérivées s'obtiendront en posant $x = a$ dans les équations obtenues en différentiant l'équation (2). On aura, en général,

$$\left\{ \begin{aligned} y_a^{(m+\mu)} &= q_1 y_a^{(m+\mu-1)} + (\mu q'_1 + q_2) y_a^{(m+\mu-2)} \\ &\quad + \left[\frac{\mu(\mu-1)}{2} q''_1 + \mu q'_2 + q_3 \right] y_a^{(m+\mu-3)} + \ldots + q_m^{(\mu)} y_a, \end{aligned} \right. \tag{3}$$

x étant remplacé par a dans tous les coefficients.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

On formera la série

$$(4)\qquad y = y_a + y'_a(x-a) + \frac{y''_a}{1.2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}_a}{1.2\ldots n}(x-a)^n + \ldots,$$

qui sera une intégrale de l'équation (1), pourvu qu'elle soit convergente. Pour établir cette convergence, supposons les coefficients q développés en séries, suivant les puissances de $x-a$, sous la forme

$$q_1 = h_0 + h_1\frac{x-a}{R} + h_2\left(\frac{x-a}{R}\right)^2 + \ldots + h_n\left(\frac{x-a}{R}\right)^n + \ldots;$$

ces séries sont convergentes pourvu que le module de $x-a$ reste inférieur ou égal au nombre fixe R; par suite, les coefficients $h_0, h_1, \ldots, h_n$ ont des modules qui sont tous finis; soit M_1 un nombre supérieur à tous ces modules. De même, soit M_2 une limite supérieure des modules des coefficients des termes de la série qui représente q_2; et soient $M_3, M_4, \ldots, M_m$ les quantités analogues pour $q_3, q_4, \ldots, q_m$. Considérons l'équation

$$(2\ bis)\qquad \frac{d^m z}{dx^m} = \frac{M_1}{1-\frac{x-a}{R}}\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + \frac{M_2}{1-\frac{x-a}{R}}\frac{d^{m-2}z}{dx^{m-2}} + \ldots + \frac{M_m}{1-\frac{x-a}{R}}z.$$

Si l'on remplace $\dfrac{1}{1-\frac{x-a}{R}}$ par la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{x-a}{R}\right)^n$, on pourra développer les intégrales de l'équation (2 *bis*) sous la forme (4)

$$(4\ bis)\qquad z = z_a + z'_a(x-a) + \frac{z''_a}{1.2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{z^{(n)}_a}{1.2\ldots n}(x-a)^n + \ldots,$$

les coefficients étant déterminés par l'équation générale

$$(3\ bis)\qquad \begin{cases} z_a^{(m+\mu)} = z_a^{(m+\mu-1)}M_1 + \left(\mu\dfrac{M_1}{R} + M_2\right)z_a^{(m+\mu-2)} \\ \qquad + \left[\dfrac{\mu(\mu-1)}{2}\dfrac{2M_1}{R^2} + \mu\dfrac{M_2}{R} + M_3\right]z_a^{(m+\mu-3)} + \ldots + \dfrac{1.2\ldots\mu M_m}{R^\mu}z_a. \end{cases}$$

Les coefficients de $z_a^{(m+\mu-1)}, \ldots, z_a$ sont tous réels et supérieurs aux modules des coefficients correspondants de l'équation (3), car on a, en général,

$$1.2\ldots n\frac{M_\alpha}{R^n} > \operatorname{mod} q^{(n)}_\alpha(a).$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

Donc, si $z_a, z'_a, \ldots, z_a^{(m-1)}$ sont réels positifs et supérieurs aux modules de $y_a, y'_a, \ldots, y_a^{(m-1)}$, on en déduira

$$z_a^{(m)} > \operatorname{mod} y_a^{(m)}, \quad z_a^{(m+1)} > \operatorname{mod} y_a^{(m+1)}, \quad \ldots, \quad z_a^{(m+\mu)} > \operatorname{mod} y_a^{(m+\mu)},$$

et si la série (4 *bis*) est convergente, la série (4) sera également convergente.

Pour démontrer la convergence de la série (4 *bis*), nous allons la former par une autre méthode. Multiplions les deux membres de l'équation (2 *bis*) par $1 - \frac{x-a}{R}$, puis différentions μ fois l'équation obtenue et posons $x = a$; on aura

$$z_a^{(m+\mu)} = \left(\frac{\mu}{R} + M_1\right) z_a^{(m+\mu-1)} + M_2 z_a^{(m+\mu-2)} + \ldots + M_m z_a^{(\mu)}.$$

Cette équation détermine les coefficients de la série (4 *bis*), et l'on voit que tous les coefficients sont réels et positifs.

Le rapport d'un terme au précédent est

$$\frac{z_a^{(m+\mu)}}{(m+\mu) z_a^{(m+\mu-1)}} (x - a).$$

A partir d'un ordre déterminé, les valeurs des dérivées de z pour $x = a$ croissent constamment; car, si μ est assez grand pour que $\frac{\mu}{R} + M_1 > 1$, on aura

$$z_a^{(m+\mu)} > z_a^{(m+\mu-1)}, \quad z_a^{(m+\mu+1)} > z_a^{(m+\mu)},$$

et ainsi de suite. Ces valeurs augmentent donc constamment, à partir de la dérivée dont l'ordre $m + \mu - 1$ est supérieur à $R - M_1 R + m - 1$.

D'autre part, on a

$$\frac{z_a^{(m+\mu)}}{z_a^{(m+\mu-1)}(m+\mu)} = \frac{\mu + M_1 R}{R(m+\mu)} + \frac{M_2}{m+\mu} \frac{z_a^{(m+\mu-2)}}{z_a^{(m+\mu-1)}} + \ldots + \frac{M_m}{m+\mu} \frac{z_a^{(\mu)}}{z_a^{(m+\mu-1)}};$$

si μ est assez grand, les rapports $\frac{z_a^{(m+\mu-2)}}{z_a^{(m+\mu-1)}}, \ldots, \frac{z_a^{(\mu)}}{z_a^{(m+\mu-1)}}$ seront tous inférieurs à 1 et, si μ augmente indéfiniment les termes du second membre, tendent vers zéro, sauf le premier qui tend vers $\frac{1}{R}$. Donc le rapport $\frac{z_a^{(m+\mu)}}{z_a^{(m+\mu-1)}(m+\mu)}(x-a)$ a pour limite $\frac{x-a}{R}$, et la série (4 *bis*) est convergente si $\operatorname{mod}(x - a) < R$.

Remarque. — La série (4) contient m constantes arbitraires qui sont les

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

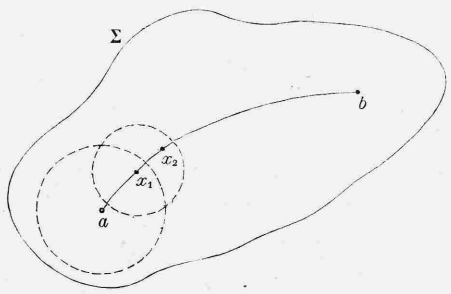
valeurs de y_a, y'_a, y'_a, ..., $y_a^{(m-1)}$: cette série donne donc l'intégrale générale de l'équation (1).

4. Si l'on choisit les valeurs de y et de ses $m-1$ premières dérivées pour $x=a$, l'intégrale sera complètement déterminée; et, si la variable x varie de a jusqu'à b, d'une façon continue, en ne passant que par des valeurs pour lesquelles les coefficients P de l'équation (1) restent uniformes, finis et continus, le coefficient P_0 n'étant jamais nul, l'intégrale y sera déterminée pour $x=b$.

En effet, figurons la courbe, dont les points représentent les valeurs que prend x successivement.

L'intégrale y peut être développée en série, suivant les puissances de $(x-a)$, pourvu que le point qui représente x reste intérieur à un cercle de centre a. Soit x_1 (*fig.* 1) une valeur de x, représentée par un point de la

Fig. 1.



courbe ab intérieur à ce cercle, pour $x=x_1$ les valeurs de y et de ses dérivées seront déterminées, ce qui permet de développer y en série, suivant les puissances de $(x-x_1)$, pour les valeurs de x représentées par les points intérieurs à un cercle de centre x_1; on en déduit les valeurs de y et de ses dérivées pour une nouvelle valeur x_2 de x, et ainsi de suite. Les cercles de convergence des différentes séries doivent être compris entièrement dans une portion du plan limitée par une courbe fermée Σ, dont les points représentent les valeurs de x, pour lesquelles les coefficients P cessent d'être uniformes, finis et continus, le premier P_0 ne s'annulant pour aucun des points intérieurs à cette courbe. On pourra toujours choisir les valeurs x_1, x_2, ..., de façon à arriver jusqu'à b, et la fonction y sera déterminée pour $x=b$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

Nous appellerons valeurs singulières de x celles pour lesquelles l'un au moins des coefficients P de l'équation (1) cesse d'être uniforme, fini, ou continu, ainsi que les valeurs pour lesquelles P_0 devient nul. Une valeur singulière de x sera représentée par un point singulier.

Si l'on remplace la courbe que décrit le point représentant x par une autre qui puisse se ramener à la première d'un mouvement continu, sans jamais rencontrer de point singulier, les valeurs de la fonction y pour $x = b$ seront les mêmes, quelle que soit la courbe que décrit le point x.

Remarque. — Dans le cas où les coefficients P sont des polynômes entiers, les valeurs singulières de x sont les racines de l'équation $P_0 = 0$; si a est une valeur non singulière, on pourra développer toutes les intégrales en séries, suivant les puissances de $(x - a)$, et les cercles de convergence de ces séries passeront, en général, par le point singulier le plus rapproché du point a. Cependant, il peut y avoir des intégrales particulières, dont le cercle de convergence passe par un autre point singulier, et renferme un ou plusieurs points singuliers.

Pour calculer les coefficients des séries (4), il n'est pas nécessaire de mettre l'équation sous la forme (2), on peut différentier directement l'équation donnée (1); chaque coefficient de la série est alors une fonction linéaire d'un nombre déterminé de coefficients précédents.

5. Nous supposerons que les coefficients de l'équation (1) sont des fonctions rationnelles entières de la variable x. Soit $x = a$ une racine de l'équation $P_0 = 0$. Si l'on cherche à développer les intégrales, suivant les puissances entières de $(x-a)$, on devra différentier successivement l'équation (1) pour calculer les valeurs des dérivées de y pour $x = a$. On aura l'équation générale

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} P_0 y_a^{(m+\mu)} + (\mu P'_0 + P_1) y_a^{(m+\mu-1)} + \left[\dfrac{\mu(\mu-1)}{2} P''_0 + \mu P'_1 + P_2\right] y_a^{(m+\mu-2} \\ \quad + \left[\dfrac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} P'''_0 + \dfrac{\mu(\mu-1)}{2} P''_1 + \mu P'_2 + P_3\right] y_a^{(m+\mu-3)} + \ldots = 0, \end{array} \right.$$

x étant remplacé par a dans tous les coefficients. Le premier terme P_0 est nul; supposons que le premier coefficient, qui ne s'annule pas identiquement (quelle que soit la valeur de μ), soit celui de $y_a^{(m+\mu-n)}$, c'est-à-dire que pour $x = a$ on ait

$$P_0 = P'_0 = P''_0 = \ldots = P_0^{(n-1)} = 0, \quad P_1 = P'_1 = P''_1 = \ldots = P_1^{n-2} = 0, \quad \ldots,$$
$$P_{n-2} = P'_{n-2} = 0, \quad P_{n-1} = 0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

Il faut pour cela que

$$P_0 = (x-a)^n q_0, \quad P_1 = (x-a)^{n-1} q_1, \quad \ldots, \quad P_{n-1} = (x-a) q_{n-1},$$

$q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ et P_n étant des polynômes en x, qui ne sont pas tous nuls pour $x = a$.

On pourra choisir arbitrairement les valeurs de $y_a, y'_a, y''_a, \ldots, y_a^{(m-n-1)}$; les équations (5) pour $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ détermineront successivement les valeurs des dérivées suivantes. Si le coefficient de $y_a^{(m+\mu-n)}$ dans l'équation (5), qui n'est pas identiquement nul, ne disparaît pour aucune valeur entière, positive ou nulle, de μ, les dérivées de y pour $x = a$ seront toutes déterminées, et l'on pourra former la série (4), dans laquelle les $m - n$ premiers coefficients sont arbitraires. Cependant cette série ne donne pas toujours les intégrales de l'équation (1); nous verrons, en effet, plus loin qu'elle est souvent divergente, même pour des valeurs très petites de $(x - a)$.

Le coefficient de $y_a^{(m+\mu-n)}$ dans l'équation (5) peut s'annuler pour des valeurs particulières de μ : la dérivée correspondante ne sera pas alors déterminée et pourra prendre une valeur arbitraire; mais on obtiendra une équation entre les dérivées déjà calculées, et, en se servant des équations précédentes (5), on pourra former une équation linéaire entre $y_a, y'_a, \ldots, y_a^{(m-n-1)}$, qui déterminera l'une de ces quantités en fonction des $m - n - 1$ autres. En opérant de même pour toutes les valeurs entières de μ, qui annulent le coefficient de $y_a^{(m+\mu-n)}$ dans (5), on voit que l'on peut choisir arbitrairement les valeurs de y et de $m - n - 1$ de ses dérivées pour $x = a$; mais ces dérivées ne sont pas nécessairement les premières.

Représentons par π_0 la puissance de $(x-a)^{-1}$, par laquelle il faut multiplier P_0 pour que l'expression obtenue $\frac{P_0}{(x-a)^{\pi_0}}$ ne soit ni nulle ni infinie pour $x = a$. De même, soient $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$ les nombres analogues pour les polynômes $P_1, P_2, \ldots, P_m$. L'un au moins de ces nombres devra être nul, car autrement on pourrait diviser tous les coefficients de l'équation (1) par $(x - a)$.

Formons les nombres $\pi_0, \pi_1 + 1, \pi_2 + 2, \ldots, \pi_m + m$, et soit $\pi_\alpha + \alpha = n$ le plus petit de ces nombres et le premier des plus petits s'il y en a plusieurs égaux à n; on aura

$$\pi_\beta \geq n - \beta,$$

quel que soit β; par suite, les expressions

$$\frac{P_0}{(x-a)^n}, \quad \frac{P_1}{(x-a)^{n-1}}, \quad \frac{P_2}{(x-a)^{n-2}}, \quad \ldots, \quad \frac{P_{n-1}}{x-a}, \quad P_n$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

seront toutes entières, et l'une au moins, $\frac{P_\alpha}{(x-a)^{n-\alpha}}$, n'est pas nulle pour $x=a$. On peut donc choisir arbitrairement les valeurs de y et de $m-n-1$ de ses dérivées pour $x=a$, et en déduire une série de forme (4), qui sera une intégrale de l'équation (1), pourvu qu'elle soit convergente; cette série contiendra, en général, $m-n$ constantes arbitraires. Il y a donc, en général, au plus $m-n$ intégrales distinctes développables en séries suivant les puissances positives de $x-a$.

Cependant, il y a des cas particuliers où le nombre des intégrales développables suivant les puissances positives de $(x-a)$ est supérieur à $(m-n)$, si le coefficient de $y_a^{(m+\mu-n)}$, dans l'équation (5), étant nul pour une valeur entière de μ, l'équation correspondante est une conséquence des précédentes; il faut, pour cela, qu'il existe, entre les coefficients P et leurs dérivées, $m-n$ équations de condition qu'on pourrait former facilement.

Si $n=m$, aucune intégrale de l'équation (1) ne pourra se développer sous la forme (4). Pour cela, il faut que les nombres π_0, π_1+1, ..., π_m+m soient tous supérieurs à $m-1$, et, par suite,

$$\pi_0 \geq m, \quad \pi_1 \geq m-1, \quad \pi_2 \geq m-2, \quad \ldots, \quad \pi_{m-1} \geq 1, \quad \pi_m = 0,$$

π_m est nul, car autrement aucun des nombres π ne serait nul.

Cependant il peut arriver que le coefficient de y_a^μ, dans l'équation (5), s'annule pour une valeur entière positive de μ; dans ce cas particulier, quoique $n=m$, l'équation (1) peut avoir une intégrale développable en série suivant les puissances de $(x-a)$; seulement, le premier terme de la série sera $\frac{y_a^{(\mu)}}{1.2\ldots\mu}(x-a)^\mu$, μ étant la plus petite racine entière positive de l'équation

$$\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-m+1)}{1.2\ldots m}P_0^{(m)}+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-m+2)}{1.2\ldots(m-1)}P_1^{(m-1)}+\ldots+\mu P'_{m-1}+P_m=0;$$

car, si l'on pose $y_a=y'_a=y''_a=\ldots=y_a^{(\mu-1)}=0$, y_a^μ ayant une valeur arbitraire, les μ premières équations (5) seront vérifiées, les autres détermineront des dérivées suivantes.

Remarque. — Les résultats précédents peuvent s'appliquer dans le cas où les coefficients de l'équation (1) sont rationnels; les nombres π_0, π_1, π_2, ..., π_m peuvent alors être négatifs, si quelques-uns des coefficients sont infinis pour $x=a$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

Dans ce cas, on prendra pour n la valeur $n = \pi_\alpha + \alpha - \pi_\beta$, π_β étant le plus petit des nombres π.

II.

6. Nous avons vu comment on peut développer les intégrales de l'équation différentielle (1) à coefficients entiers, lorsque la variable x prend des valeurs voisines d'une valeur non singulière a. Nous allons examiner quelles formes on pourra donner aux intégrales lorsque la valeur a est singulière, et plus généralement lorsque x prend des valeurs représentées par les points d'une courbe fermée arbitraire.

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_m$, m intégrales de l'équation (1) linéairement indépendantes; supposons que la variable x parte de la valeur non singulière a et revienne à cette valeur, la courbe dont les points représentent les valeurs que prend successivement x ne passant par aucun point singulier, mais pouvant en renfermer à l'intérieur. Les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_m$ prendront respectivement les nouvelles valeurs $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$, qui seront encore intégrales de l'équation (1), et, comme l'intégrale générale est

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_m y_m,$$

on devra avoir identiquement

$$(6) \qquad \begin{cases} Y_1 = c_{11}\, y_1 + c_{12}\, y_2 + c_{13}\, y_3 + \ldots + c_{1m}\, y_m, \\ Y_2 = c_{21}\, y_1 + c_{22}\, y_2 + c_{23}\, y_3 + \ldots + c_{2m}\, y_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_m = c_{m1} y_1 + c_{m2} y_2 + c_{m3} y_3 + \ldots + c_{mm} y_m, \end{cases}$$

$c_{11}, \ldots, c_{mm}$ étant m^2 constantes déterminées, et l'intégrale

$$v = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_m y_m$$

se changera en

$$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \ldots + c_m Y_m.$$

On peut choisir l'intégrale y ou les constantes $c_1, c_2, \ldots, c_m$, de façon que la fonction y soit multipliée par une constante lorsque x varie de a jusqu'à a, d'après les conditions précédentes, c'est-à-dire de façon que l'on ait identiquement

$$Y = \omega y,$$

ω étant une constante.

En effet, remplaçons Y et y par leurs valeurs, puis $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ par

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

les valeurs (6); on aura une équation linéaire entre $y_1, y_2, \ldots, y_m$, et, comme ces fonctions sont distinctes, les m coefficients doivent être nuls, ce qui donne

$$(6\ bis)\qquad \begin{cases} c_{11}\,c_1 + c_{21}\,c_2 + c_{31}\,c_3 + \ldots + c_{m1}\,c_m = \omega c_1, \\ c_{12}\,c_1 + c_{22}\,c_2 + c_{32}\,c_3 + \ldots + c_{m2}\,c_m = \omega c_2, \\ c_{13}\,c_1 + c_{23}\,c_2 + c_{33}\,c_3 + \ldots + c_{m3}\,c_m = \omega c_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ c_{1m}c_1 + c_{2m}c_2 + c_{3m}c_3 + \ldots + c_{mm}c_m = \omega c_m. \end{cases}$$

Ces équations déterminent $c_1, c_2, \ldots, c_m$; mais, pour qu'elles soient compatibles, il faut que le déterminant des inconnues soit nul

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} c_{11}-\omega & c_{21} & c_{31} & \ldots & c_{m1} \\ c_{12} & c_{22}-\omega & c_{32} & \ldots & c_{m2} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33}-\omega & \ldots & c_{m3} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ c_{1m} & c_{2m} & c_{3m} & \ldots & c_{mm}-\omega \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation détermine ω; les équations (6 *bis*) donnent ensuite des valeurs proportionnelles à $c_1, c_2, \ldots, c_m$, ce qui détermine l'intégrale y telle que $Y = \omega y$. Cette équation (7) est toujours du $m^{\text{ième}}$ degré; on l'a nommée *équation fondamentale,* relative au contour donné qui représente les valeurs successives de x. Pour former l'équation (7), il suffit de connaître les m relations (6) qui lient $y_1, y_2, \ldots, y_m$ et leurs nouvelles valeurs $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$; on y remplace Y_1 par ωy_1, Y_2 par ωy_2, ..., et Y_m par ωy_m, puis on élimine $y_1, y_2, \ldots, y_m$ entre les m équations linéaires obtenues. Nous remarquerons qu'il n'est pas nécessaire pour cela de résoudre les m relations sous la forme (6).

7. Théorème. — *L'équation fondamentale* (7) *est indépendante du système fondamental d'intégrales qui a servi à la former.*

En effet, supposons que l'on remplace le système $y_1, y_2, \ldots, y_m$ par un autre système fondamental $u_1, u_2, \ldots, u_m$; les premières intégrales seront des fonctions linéaires des dernières, et l'on aura

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \ldots + b_{1m}u_m, \\ y_2 = b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \ldots + b_{2m}u_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_m = b_{m1}u_1\,b_{m2} + u_2 + \ldots + b_{mm}u_m, \end{cases}$$

les termes b étant constants.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

Si le point qui représente x décrit la courbe donnée en revenant à la position initiale a, $u_1, u_2, \ldots, u_m$ prendront les nouvelles formes $U_1, U_2, \ldots, U_m$, et $y_1, y_2, \ldots, y_m$ se changeront en

$$\begin{cases} Y_1 = b_{11} U_1 + b_{12} U_2 + \ldots + b_{1m} U_m, \\ Y_2 = b_{21} U_1 + b_{22} U_2 + \ldots + b_{2m} U_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_m = b_{m1} U_1 + b_{m2} U_2 + \ldots + b_{mm} U_m. \end{cases}$$

En portant ces valeurs de $y_1, y_2, \ldots, y_m$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ dans les équations (6), on aura les relations linéaires qui lient les fontions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ à leurs nouvelles valeurs $U_1, U_2, \ldots, U_m$; et, pour former l'équation fondamentale, on posera

$$U_\alpha = \omega u_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots m,),$$

puis on éliminera $u_1, u_2, \ldots, u_m$ entre les équations ainsi déduites de (6). Mais on obtient les mêmes équations en posant d'abord

$$Y_\alpha = \omega y_\alpha,$$

puis en remplaçant partout $y_1, y_2, \ldots, y_m$ en fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

L'élimination des quantités u donnera une équation dont le premier membre est le produit du déterminant (7) par le déterminant des constantes b; ce dernier déterminant n'est pas nul, puisque les intégrales y_1, $y_2, \ldots, y_m$ forment un système fondamental. On voit donc que l'on retrouve bien la même équation fondamentale (7).

Si l'on modifie la courbe qui représente la variation de x, en la remplaçant par une autre courbe qui puisse se ramener à la première d'un mouvement continu sans rencontrer aucun point singulier, les nouvelles fonctions $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ seront les mêmes pour les deux courbes; par suite, l'équation fondamentale sera la même.

Ainsi l'équation fondamentale est indépendante du système d'intégrales qui sert à la former, et de la courbe que décrit le point représentant la variable x; elle dépend seulement des points singuliers compris à l'intérieur de cette courbe.

8. A une racine simple ω_1 de l'équation fondamentale correspond, pour les rapports des constantes $c_1, c_2, \ldots, c_m$, un système unique de valeurs donné par les équations (6 *bis*), car le déterminant des coefficients est nul pour $\omega = \omega_1$, et les déterminants mineurs d'ordre $m - 1$ ne sont pas tous

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

nuls; en effet, la dérivée du déterminant (7) peut s'obtenir en prenant la somme des dérivées partielles prises par rapport à chacune des lettres ω, et ces dérivées partielles sont des déterminants mineurs d'ordre $(m-1)$; donc, si tous ces mineurs étaient nuls pour $\omega = \omega_1$, la dérivée du déterminant (7), par rapport à ω, serait nulle, et ω_1 serait racine multiple de l'équation (7). Par suite, si ω_1 est une racine simple de l'équation (7), on aura un seul système de valeurs pour les rapports des constantes $c_1, c_2, \ldots, c_m$, et l'on en déduira l'intégrale y telle que

$$Y = \omega_1 y.$$

Si l'équation fondamentale (7) n'a que des racines simples, il existera m intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_m$, qui seront multipliées respectivement par les constantes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$, lorsque le point qui représente la variable x décrit la courbe considérée. Ces m intégrales forment un système fondamental; car, s'il existait une relation identique de la forme

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_m y_m = 0,$$

en faisant décrire successivement à la variable la courbe donnée $m-1$ fois, on en déduirait les identités

$$\begin{aligned}
&c_1 \omega_1 y_1 + c_2 \omega_2 y_2 + \ldots + c_m \omega_m y_m = 0,\\
&c_1 \omega_1^2 y_1 + c_2 \omega_2^2 y_2 + \ldots + c_m \omega_m^2 y_m = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&c_1 \omega_1^{m-1} y_1 + c_2 \omega_2^{m-1} y_2 + \ldots + c_m \omega_m^{m-1} y_m = 0,
\end{aligned}$$

et, en éliminant $c_1, c_2, \ldots, c_m$,

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\
\omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \ldots & \omega_m\\
\omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 & \ldots & \omega_m^2\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\omega_1^{m-1} & \omega_2^{m-1} & \omega_3^{m-1} & \ldots & \omega_m^{m-1}
\end{vmatrix} = 0,$$

ce qui est impossible si les m constantes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ sont différentes.

Si l'équation fondamentale a des racines multiples, le nombre des intégrales jouissant de la propriété précédente est inférieur à m, et elles ne forment plus un système fondamental; nous allons chercher le système fondamental qui donne, dans ce cas, le mode de transformation le plus simple.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

Soit ω_1 une racine multiple d'ordre λ de l'équation fondamentale (7); pour cette valeur, les équations (6 *bis*) donneront en général les rapports des constantes $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Cependant, il peut arriver que les équations (6 *bis*) se réduisent à $m-2$, si tous les mineurs d'ordre $m-1$ du déterminant (7) s'annulent pour $\omega = \omega_1$. Dans ce cas, deux au moins des constantes $c_1, c_2, \ldots, c_m$ sont arbitraires et l'intégrale y n'est pas complètement déterminée; mais on peut toujours choisir un système de valeurs des constantes qui vérifie les équations (6 *bis*), et en déduire l'intégrale y telle que

$$\mathrm{Y} = \omega y.$$

Dans le système fondamental $y_1, y_2, \ldots, y_m$, on peut remplacer l'une des intégrales y_1 par

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_m y_m,$$

et le nouveau système sera fondamental, pourvu que c_1 soit différent de zéro, ce que l'on peut supposer, puisque l'une au moins des m constantes c est différente de zéro. Supposons donc que l'on ait

$$\mathrm{Y}_1 = \omega_1 y_1.$$

Dans les équations (6 *bis*), on aura alors

$$c_{11} = \omega_1, \quad c_{12} = c_{13} = \ldots = c_{1m} = 0,$$

et l'équation fondamentale devient

$$\begin{vmatrix} \omega_1 - \omega & c_{21} & c_{31} & \ldots & c_{m1} \\ 0 & c_{22} - \omega & c_{32} & \ldots & c_{m2} \\ 0 & c_{23} & c_{33} - \omega & \ldots & c_{m3} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & c_{2m} & c_{3m} & \ldots & c_{mm} \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(\omega_1 - \omega) \begin{vmatrix} c_{22} - \omega & c_{32} & \ldots & c_{m2} \\ c_{23} & c_{33} - \omega & \ldots & c_{m3} \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{2m} & c_{3m} & \ldots & c_{mm} \end{vmatrix} = 0.$$

Ce dernier déterminant s'annule encore pour $\omega = \omega_1$. Les équations (6 *bis*) pour $\omega = \omega_1$ ne contiennent plus c_1. Les $m-1$ dernières déterminent les rapports de $c_2, c_3, \ldots, c_m$, puisque le déterminant des coefficients est nul :

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

mais la première équation ne sera pas vérifiée. Prenons cependant les valeurs ainsi trouvées pour les constantes c, c_1 restant arbitraire.

L'intégrale ainsi obtenue

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_m y_m$$

ne sera pas multipliée par la constante ω_1 lorsque le point x décrit la courbe donnée, puisque les équations (6 *bis*) ne sont pas vérifiées; nous allons examiner ce que devient la fonction y. On aura

$$\mathrm{Y} = c_1 \mathrm{Y}_1 + c_2 \mathrm{Y}_2 + \ldots + c_m \mathrm{Y}_m,$$

et, en tenant compte des équations (6) et (6 *bis*),

$$\begin{aligned}\mathrm{Y} &= c_1\omega_1 y_1 + (c_2 c_{21} + c_3 c_{31} + c_4 c_{41} + \ldots + c_m c_{m1}) y_1 \\ &\quad + \omega_1 c_2 y_2 + \omega_1 c_3 y_3 + \ldots + \omega_1 c_m y_m \\ &= \omega_1 y + (c_2 c_{21} + c_3 c_{31} + \ldots + c_m c_{m1}) y_1 = \omega_1 y + k_1 y_1,\end{aligned}$$

k_1 étant une constante.

Nous remarquerons que l'intégrale y n'est pas complètement déterminée : elle contient deux constantes arbitraires.

Dans le système d'intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_m$, remplaçons une intégrale, par exemple y_2, par l'une des intégrales y que nous avons formées ci-dessus. Le nouveau système sera fondamental si $c_2 \gtrless 0$, ce que nous pouvons supposer. Nous aurons alors, dans les équations (6),

$$\mathrm{Y}_1 = \omega_1 y_1, \quad \mathrm{Y}_2 = \omega_1 y_2 + k_1 y_1$$

et, par suite,

$$c_{11} = \omega_1, \quad c_{12} = c_{13} = \ldots = c_{1m} = 0,$$
$$c_{21} = k_1, \quad c_{22} = \omega_1, \quad c_{23} = c_{24} = \ldots = c_{2m} = 0.$$

L'équation fondamentale (7) se simplifie et peut s'écrire

$$(\omega_1 - \omega)^2 \begin{vmatrix} c_{33} - \omega & c_{43} & \ldots & c_{m3} \\ c_{34} & c_{44} - \omega & \ldots & c_{m4} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{3m} & c_{4m} & \ldots & c_{mm} - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

Le déterminant du premier membre est encore nul pour $\omega = \omega_1$. Nous pouvons donc choisir $c_3, c_4, \ldots, c_m$, de façon que les $m - 2$ dernières équations (6 *bis*) soient vérifiées pour $\omega = \omega_1$, car c_1 et c_2 disparaissent, et le

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

déterminant des coefficients est nul. Donnons, en outre, à c_1 et c_2 des valeurs arbitraires et formons l'intégrale

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_m y_m.$$

Lorsque le point x décrit la courbe donnée, y se change en

$$\begin{aligned} \mathrm{Y} &= c_1 \mathrm{Y}_1 + c_2 \mathrm{Y}_2 + \ldots + c_m \mathrm{Y}_m \\ &= c_1 \omega_1 y_1 + c_2 (\omega_1 y_2 + k_1 y_1) + \omega_1 c_3 y_3 + \omega_1 c_4 y_4 + \ldots + \omega_1 c_m y_m \\ &\quad + (c_3 c_{31} + c_4 c_{41} + \ldots + c_m c_{m1}) y_1 + (c_3 c_{32} + c_4 c_{42} + \ldots + c_m c_{m2}) y_2 \\ &= \omega_1 y + (k_1 + c_3 c_{31} + \ldots + c_m c_{m1}) y_1 + (c_3 c_{32} + \ldots + c_m c_{m2}) y_2 \\ &= \omega_1 y + k_{31} y_1 + k_{32} y_2, \end{aligned}$$

k_{31} et k_{32} étant deux constantes.

On peut encore remplacer l'intégrale y_3 par celle que nous venons de déterminer, et, en continuant le même raisonnement, on arrive à obtenir un groupe de λ intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_m$ qui, lorsque le point x décrit la courbe considérée, se changent en $\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2, \ldots, \mathrm{Y}_m$, ces nouvelles valeurs étant liées aux premières par les équations

$$(8) \qquad \begin{cases} \mathrm{Y}_1 = \omega_1 y_1, \\ \mathrm{Y}_2 = k_{12} y_1 + \omega_1 y_2, \\ \mathrm{Y}_3 = k_{13} y_1 + k_{23} y_2 + \omega_1 y_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{Y}_\lambda = k_{1\lambda} y_1 + k_{2\lambda} y_2 + \ldots + k_{\lambda-1,\lambda} y_{\lambda-1} + \omega_1 y_\lambda. \end{cases}$$

La première intégrale y_1 sera en général déterminée, mais les autres ne le sont pas complètement. On peut, sans changer les propriétés de ce système d'intégrales, ajouter à chaque fonction une expression linéaire de celles qui précèdent. Il résulte du mode de formation de ces λ intégrales qu'elles sont linéairement indépendantes.

Les valuers des constantes k ne sont pas fixes, elles dépendent du choix du système d'intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_\lambda$, et l'on pourra en général choisir ce système de façon à donner aux quantités k des valeurs arbitraires, dont quelques-unes peuvent même être nulles; pour cela, on remplace l'intégrale y_n par

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n;$$

on cherche sa nouvelle valeur Y à l'aide des équations (8), et l'on dispose des constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, de façon à avoir dans l'expression de Y en fonction de $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ et y les coefficients demandés.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

Si l'équation fondamentale a plusieurs racines multiples, à chaque racine correspondra un groupe d'intégrales défini par les propriétés (8), le nombre total de ces intégrales sera égal à m, et elles formeront un système fondamental.

9. Nous allons chercher quelle forme on pourra donner aux intégrales de l'équation (1), lorsque le point qui représente la variable x décrit une courbe fermée, en partant des propriétés exprimées par les équations (8).

Soit $x = a.$ une valeur représentée par un point intérieur à la courbe donnée. Lorsque x décrit cette courbe, la fonction $(x-a)^{r_1}$ devient

$$(x-a)^{r_1} e^{2\pi r_1 \sqrt{-1}};$$

donc, si l'on pose

$$\omega_1 = e^{2\pi r_1 \sqrt{-1}} \quad \text{ou} \quad r_1 = \frac{\log \omega_1}{2\pi\sqrt{-1}},$$

la fonction $\frac{y_1}{(x-a)^{r_1}}$ ne change pas de valeur, et l'on aura

$$y_1 = (x-a)^{r_1} \varphi_{11}(x),$$

$\varphi_{11}(x)$ étant une fonction uniforme quand x décrit la courbe donnée. La valeur de r_1 n'est pas complètement déterminée; les valeurs possibles de r_1 diffèrent de nombres entiers.

Des équations (8) on déduit

$$\frac{Y_2}{Y_1} = \frac{y_2}{y_1} + \frac{k_{12}}{\omega_1},$$

et la fonction

$$\frac{y_2}{y_1} - \frac{k_{12}}{\omega_1 2\pi\sqrt{-1}} \log(x-a)$$

reste uniforme quand x reste sur la courbe fermée donnée; on peut donc poser

$$y_2 = (x-a)^{r_1}[\varphi_{21} + \varphi_{22}\log(x-a)],$$

où $\varphi_{22} = \frac{k_{12}}{\omega_1 2\pi\sqrt{-1}} \varphi_{11}$, et φ_{21} est une autre fonction de x uniforme pour les variations examinées.

On a de même

$$\frac{Y_3}{Y_1} = \frac{y_3}{y_1} + \frac{k_{23}}{\omega_1}\frac{y_2}{y_1} + \frac{k_{13}}{\omega_1} = \frac{y_3}{y_1} + \frac{k_{23}}{\omega_1}\left[\frac{\varphi_{21}}{\varphi_{11}} + \frac{k_{12}}{\omega_1 2\pi\sqrt{-1}}\log(x-a)\right] + \frac{k_{13}}{\omega_1}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

L'expression

$$\frac{y_3}{y_1}+\frac{k_{12}k_{23}}{8\omega_1^2\pi^2}\log^2(x-a)-\left(\frac{k_{23}}{\omega_1}\frac{\varphi_{21}}{\varphi_{11}}+\frac{k_{13}}{\omega_1}-\frac{k_{12}k_{23}}{2\omega_1^2}\right)\frac{\log(x-a)}{2\pi\sqrt{-1}}$$

ne change pas de valeur, et l'on peut poser

$$y_3=(x-a)^{r_1}[\varphi_{31}+\varphi_{32}\log(x-a)+\varphi_{33}\log^2(x-a)],$$

φ_{31} étant une fonction uniforme pour les variations données à x, φ_{32} est une fonction linéaire de φ_{11} et φ_{21}, et φ_{33} est égal à φ_{11} multiplié par une constante.

En continuant de même, on trouve le groupe de λ intégrales

$$(9)\qquad \begin{cases} y_1=(x-a)^{r_1}\varphi_{11}, \\ y_2=(x-a)^{r_1}[\varphi_{21}+\varphi_{22}\log(x-a)], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y_\lambda=(x-a)^{r_1}[\varphi_{\lambda 1}+\varphi_{\lambda 2}\log(x-a)+\dots+\varphi_{\lambda\lambda}\log^{\lambda-1}(x-a)], \end{cases}$$

les fonctions φ restant uniformes quand le point x reste sur la courbe donnée ; ces fonctions s'expriment linéairement à l'aide de celles dont le second indice est 1, en particulier φ_{11}, φ_{22}, ..., $\varphi_{\lambda\lambda}$ ne diffèrent que par un facteur constant.

Supposons que la courbe qui représente la variation de x soit une circonférence dont le centre correspond à la valeur $x=a$. Si l'on trace deux circonférences concentriques passant par les deux points singuliers les plus rapprochés de la première circonférence, l'un intérieur, l'autre extérieur, de façon que l'espace compris entre ces deux circonférences ne comprenne aucun point singulier de l'équation (1), les fonctions φ resteront uniformes tant que le point représentant la variable x restera entre les deux circonférences concentriques; par suite, ces fonctions seront développables en doubles séries suivant les puissances positives et négatives de $x-a$; les séries à exposants positifs seront convergentes pour les valeurs de x, telles que le module de $x-a$ reste inférieur au rayon de la plus grande circonférence ; les séries à exposants négatifs seront convergentes tant que $\mathrm{mod}(x-a)$ est supérieur au rayon de la plus petite des circonférences.

En particulier, si $x=a$ est une valeur singulière et si la circonférence donnée ne contient pas d'autre point singulier, les fonctions φ seront développables en doubles séries pour des valeurs assez petites de $x-a$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

10. Si la circonférence que décrit le point représentant x comprend à l'intérieur tous les points singuliers de l'équation (1), les fonctions φ seront développables en doubles séries pour des valeurs du module de $x - a$ supérieures à un nombre fixe.

On peut ramener l'étude des intégrales pour ce contour au cas où le cercle comprend un seul point singulier, en posant $x - a = \frac{1}{t}$ dans l'équation (1), a étant ici une valeur arbitraire de x. On aura

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{dy}{dt}t^2,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}t^4 + 2\frac{dy}{dt}t^3,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{d^3y}{dt^3}t^6 - 6\frac{d^2y}{dt^2}t^5 - 6\frac{dy}{dt}t^4,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$(-1)^n\frac{d^ny}{dx^n} = t^{2n}\frac{d^ny}{dt^n} + n(n-1)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}t^{2n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-1)(n-2)\frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}}t^{2n-2} + \dots$$
$$+ \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{1.2\dots p}(n-1)(n-2)\dots(n-p)\frac{d^{n-p}y}{dt^{n-p}}t^{2n-p} + \dots$$
$$+ n(n-1)\dots 2.1\frac{dy}{dt}t^{n+1}.$$

Cette formule se vérifie pour $n = 1, 2, 3$; on démontre ensuite facilement que si elle est vraie pour une valeur de n, elle s'applique encore pour $n + 1$.

En portant ces valeurs dans l'équation (1), on a l'équation

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} (-1)^m\mathrm{P}_0\left[t^{2m}\dfrac{d^my}{dt^m} + m(m-1)t^{2m-1}\dfrac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}} + \dots + m(m-1)\dots 2.1\,t^{m+1}\dfrac{dy}{dt}\right] \\ + (-1)^{m-1}\mathrm{P}_1\left[t^{2(m-1)}\dfrac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}} + \dots + (m-1)\dots 2.1\,t^m\dfrac{dy}{dt}\right] + \dots - \mathrm{P}_{m-1}t^2\dfrac{dy}{dt} + \mathrm{P}_m y = 0, \end{array}\right.$$

x étant remplacé par $a + \frac{1}{t}$ dans les coefficients P.

Le cercle de centre $x = a$ et de rayon R correspond à un cercle de centre $t = 0$ et de rayon $\frac{1}{R}$ et les points du plan représentant x extérieurs au premier cercle correspondent pour t à des points intérieurs au second cercle. Une intégrale de l'équation (1) de la forme

$$(x-a)^r[\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\log(x-a) + \dots + \varphi_\lambda(x)\log^{\lambda-1}(x-a)],$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

où les fonctions $\varphi(x)$ sont uniformes si $\mathrm{mod}(x-a)$ reste supérieur à R, correspond à une intégrale de l'équation (10) de la forme

$$t^{-r}[f_1(t) - f_2(t)\log(t) + \ldots + (-1)^{\lambda-1} f_\lambda(t)\log^{\lambda-1} t],$$

les fonctions f étant développables en doubles séries suivant les puissances positives et négatives de t, convergentes si $\mathrm{mod} t < \frac{1}{R}$.

La valeur $t = 0$ est, en général, singulière pour l'équation (10), car les coefficients sont des fonctions rationnelles que l'on ramènera à être entières en multipliant le premier membre par une puissance de t dont l'exposant sera, en général, supérieur à $\pi_0 - (m+1)$, et le coefficient de $\frac{d^m y}{dt^m}$ sera divisible au moins par t^{m-1}. Il peut y avoir des cas d'exception si les coefficients des dérivées se réduisent de façon qu'ils deviennent divisibles par une même puissance de t.

Ainsi, en général, la valeur $x = \infty$, qui correspond à $t = 0$, est une valeur singulière de l'équation (1).

Remarque. — Les équations fondamentales des équations (1) et (10) pour les deux contours correspondants sont les mêmes; car, si le point représentant t décrit le cercle correspondant à celui donné pour x, les intégrales de l'équation (10) s'obtiendront en remplaçant $x - a$ par $\frac{1}{t}$ dans celles de l'équation (1).

Par suite, les équations (6) et (6 *bis*) seront les mêmes dans les deux cas et conduiront à la même équation fondamentale (7).

Mais on doit remarquer que, si x et t varient en même temps, les points qui représentent ces valeurs décrivent les cercles correspondants dans des sens différents. Il en résulte que, si l'on forme les équations fondamentales des deux équations (1) et (10), pour les cercles de rayons R et $\frac{1}{R}$, en décrivant ces deux cercles dans le sens direct, on ne retrouvera plus la même équation fondamentale. Les deux équations obtenues auront leurs racines inverses; car, si ω_1 est une racine de l'équation fondamentale de l'équation (1), à laquelle correspond le groupe d'intégrales (9) $\omega_1 = e^{2\pi r_1\sqrt{-1}}$, on en déduira, pour l'équation (10), un groupe d'intégrales de même forme, chacune des intégrales contenant le facteur t^{-r_1}; il en résulte que l'équation fondamentale de l'équation (10), correspondant au cercle de centre $t = 0$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

décrit dans le sens direct, aura la racine

$$e^{2\pi(-r_1)\sqrt{-1}} = \frac{1}{\omega_1},$$

et les deux racines ω_1 et $\frac{1}{\omega_1}$ auront le même ordre de multiplicité dans leurs équations respectives.

Nous nommerons équation fondamentale de l'équation (1) relative à la valeur singulière $x = \infty$ l'équation fondamentale de l'équation (10) correspondant à un cercle décrit autour du point représentant $t = 0$, dans le sens direct.

11. Nous avons vu que, si la variable x ne peut prendre que les valeurs représentées par les points d'une courbe fermée qui ne passe par aucun point singulier, il existe m intégrales distinctes de forme (9) et les valeurs de r dans deux groupes différents ont des différences qui ne sont jamais entières, car

$$r_1 - r_2 = \frac{\log\omega_1 - \log\omega_2}{2\pi\sqrt{-1}},$$

expression qui n'est jamais un nombre entier si $\omega_1 \gtrless \omega_2$.

Par suite, toute intégrale de l'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} u = {} & (x-a_1)^{r_1}[\varphi_{11} + \varphi_{12}\log(x-a) + \varphi_{13}\log^2(x-a) + \ldots + \varphi_{1n_1}\log^{n_1-1}(x-a)] \\ & + (x-a)^{r_2}[\varphi_{21} + \varphi_{22}\log(x-a) + \ldots + \varphi_{2n_2}\log^{n_2-1}(x-a)] + \ldots \\ & + (x-a)^{r_\lambda}[\varphi_{\lambda 1} + \varphi_{\lambda 2}\log(x-a) + \ldots + \varphi_{\lambda n_\lambda}\log^{n_\lambda-1}(x-a)], \end{aligned}$$

les exposants $r_1, r_2, \ldots, r_\lambda$ pris deux à deux ayant des différences qui ne sont jamais entières, et la somme $n_1 + n_2 + \ldots + n_\lambda$ étant inférieure ou égale à m; φ étant des fonctions uniformes pour les valeurs que peut prendre x.

THÉORÈME. — *Une fonction de forme u ne peut être identiquement nulle que si les fonctions φ sont toutes identiquement nulles.*

En effet, si le point représentant x décrit successivement k fois la courbe donnée, $(x-a)^r$ est multiplié par $\omega^k = e^{2\pi r\sqrt{-1}k}$ et $\log(x-a)$ est remplacé par $\log(x-a) + 2k\pi\sqrt{-1}$. Si u est identiquement nul, on en déduira k identités, et si $k = n_1 + n_2 + \ldots + n_\lambda$, pour que ces identités puissent être vérifiées sans que les quantités φ soient nulles, il faudrait que le détermi-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

nant d'ordre $m = n_1 + n_2 + \ldots + n_\lambda$

$$\begin{vmatrix} 1 & \log(x-a) & \ldots & \log^{n_1-1}(x-a) & 1 & \ldots & \log^{n_\lambda-1}(x-a) \\ \omega_1 & \omega_1[\log(x-a)+2\pi\sqrt{-1}] & \ldots & [\log(x-a)+2\pi\sqrt{-1}]^{n_1-1} & 1 & \ldots & [\log(x-a)+2\pi\sqrt{-1}]^{n_\lambda-1} \\ \omega_1^2 & \omega_1^2[\log(x-a)+4\pi\sqrt{-1}] & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^m & \omega_1^m[\log(x-a)+2m\pi\sqrt{-1}] & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

fût nul. En ajoutant aux éléments de chaque colonne une fonction linéaire des éléments des autres colonnes, on voit que ce déterminant est égal à

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \omega_1 & \omega_1 & \omega_1 & \ldots & \omega_1 & \omega_2 & \omega_2 & \ldots & \omega_2 & \ldots & \omega_\lambda \\ \omega_1^2 & 2\omega_1^2 & 2^2\omega_1^2 & \ldots & 2^{n_1-1}\omega_1^2 & \omega_2^2 & 2\omega_2^2 & \ldots & 2^{n_2-1}\omega_2^2 & \ldots & 2^{n_\lambda-1}\omega_\lambda^2 \\ \omega_1^3 & 3\omega_1^3 & 3^2\omega_1^3 & \ldots & 3^{n_1-1}\omega_1^3 & \omega_2^3 & 3\omega_2^3 & \ldots & 3^{n_2-1}\omega_2^3 & \ldots & 3^{n_\lambda-1}\omega_\lambda^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^m & m\omega_1^m & m^2\omega_1^m & \ldots & m^{n_1-1}\omega_1^m & \omega_2^m & m\omega_2^m & \ldots & m^{n_2-1}\omega_2^m & \ldots & m^{n_\lambda-1}\omega_\lambda^m \end{vmatrix}$$

$$\left(2\pi\sqrt{-1}\right)^{\sum_1^\lambda \frac{n_\alpha(n_\alpha-1)}{2}}$$

ou encore à l'expression

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots \\ \omega_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & \omega_2 & 1 & \ldots \\ \omega_1^2 & 2\omega_1 & 2 & 0 & \ldots & \omega_2^2 & 2\omega_2 & \ldots \\ \omega_1^3 & 3\omega_1^2 & 3.2\omega_1 & 3.2.1 & \ldots & \omega_2^3 & 3\omega_2^2 & \ldots \\ \omega_1^4 & 4\omega_1^3 & 4.3\omega_1^2 & 4.3.2\omega_1 & \ldots & \omega_2^4 & 4\omega_2^3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^m & m\omega_1^{m-1} & m(m-1)\omega_1^{m-2} & m(m-1)(m-2)\omega_1^{m-3} & \ldots & \omega_2^m & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

$$\times \left(2\pi\sqrt{-1}\right)^{\sum \frac{n_\alpha(n_\alpha-1)}{2}} \omega_1^{\frac{n_1(n_1-1)}{2}} \omega_2^{\frac{n_2(n_2-1)}{2}} \ldots \omega_\lambda^{\frac{n_\lambda(n_\lambda-1)}{2}};$$

les termes ω ne peuvent pas être nuls, et le déterminant précédent est toujours différent de zéro et est égal à

$$(\omega_1-\omega_2)^{n_1n_2} \times (\omega_1-\omega_3)^{n_1n_3}\ldots(\omega_1-\omega_\lambda)^{n_1n_\lambda} \times (\omega_2-\omega_3)^{n_2n_3}\ldots(\omega_{\lambda-1}-\omega_\lambda)^{n_{\lambda-1}n_\lambda},$$

multiplié par un facteur numérique.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

Pour le démontrer formons le déterminant

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
\omega_1 & \omega_1+h & (\omega_1+2h) & \dots & \omega_1+(n_1-1)h & \omega_2 & (\omega_2+h) & \dots & \omega_\lambda+(n_\lambda-1)h \\
\omega_1^2 & (\omega_1+h)^2 & (\omega_1+2h)^2 & \dots & [\omega_1+(n_1-1)h]^2 & \omega_2^2 & (\omega_2+h)^2 & \dots & \dots\dots\dots \\
\omega_1^3 & (\omega_1+h)^3 & (\omega_1+2h)^3 & \dots & [\omega_1+(n_1-1)h]^3 & \omega_2^3 & (\omega_2+h)^2 & \dots & \dots\dots\dots \\
\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\
\omega_1^m & (\omega_1+h)^m & (\omega_1+2h)^m & \dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots
\end{vmatrix}$$

qui est égal au produit des différences des quantités ω_1, ω_1+h, ω_1+2h, ..., $[\omega_\lambda+(n_\lambda-1)h]$ prises deux à deux.

Cette expression est divisible par $h^{\frac{n_1(n_1-1)}{2}+\frac{n_2(n_2-1)}{2}+\dots+\frac{n_\lambda(n_\lambda-1)}{2}}$, et, si l'on divise le déterminant par cette puissance de h et si l'on pose ensuite $h=0$, on trouve à un facteur numérique près le déterminant précédent, qui ne peut pas être nul si les valeurs de ω sont différentes.

Ainsi, l'expression u ne peut pas être identiquement nulle, sauf si toutes les fonctions φ disparaissent séparément. Il en résulte qu'une fonction ne peut prendre cette forme que d'une seule manière.

Si l'équation différentielle (1) admet une intégrale de forme u, chacune des λ parties correspondant aux exposants r_1, r_2, ..., r_λ vérifie séparément l'équation; car, si l'on substitue cette fonction dans l'équation (1), le premier membre devient une expression de même forme qui devrait être identiquement nulle, ce qui n'est possible que si les parties correspondant aux divers exposants r sont nulles séparément; donc, s'il existe une intégrale de forme u, on pourra la décomposer en plusieurs intégrales de forme

$$y=(x-a)^r[\varphi_1+\varphi_2\log(x-a)+\varphi_3\log^2(x-a)+\dots+\varphi_n\log^{n-1}(x-a)].$$

De cette intégrale, on peut en déduire d'autres distinctes; pour cela, supposons que x décrive la courbe fermée donnée k fois, l'expression y devient

$$y_k=\omega^k(x-a)^r\left\{\begin{array}{l}\varphi_1+\varphi_2\left[\log(x-a)+2k\pi\sqrt{-1}\right] \\ \quad+\varphi_3\left[\log(x-a)+2k\pi\sqrt{-1}\right]^2+\dots \\ \quad+\varphi_n\left[\log(x-a)+2k\pi\sqrt{-1}\right]^{n-1}\end{array}\right\}$$

qui sera une intégrale pour toute valeur de k. Or, si l'on remplace dans (1) y par cette valeur, on aura une fonction entière de k de degré $(n-1)$ dont les coefficients seront des fonctions de x; l'expression obtenue sera identiquement nulle pour toute valeur entière de k, ce qui n'est possible que si

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

les coefficients des diverses puissances de k sont nuls. Donc, dans la fonction y_k, les coefficients des puissances de k vérifient séparément l'équation (1); il en résulte que l'équation donnée admettra les intégrales

$$(x-a)^r[\varphi_1+\varphi_2\log(x-a)+\varphi_3\log^2(x-a)+\ldots+\varphi_n\log^{n-1}(x-a)],$$
$$(x-a)^r[\varphi_2+2\varphi_3\log(x-a)+3\varphi_4\log^2(x-a)+\ldots+(n-1)\varphi_n\log^{n-2}(x-a)],$$
$$(x-a)^r[2\varphi_3+2.3\varphi_4\log(x-a)+3.4\varphi_5\log^2(x-a)+\ldots+(n-2)(n-1)\varphi_n\log^{n-3}(x-a)],$$
$$(x-a)^r[1.2.3\varphi_4+2.3.4\varphi_5\log(x-a)+\ldots+(n-3)(n-2)(n-1)\varphi_n\log^{n-4}(x-a)],$$
$$\ldots\ldots\ldots

On peut de même décomposer un contour en un nombre quelconque de contours simples.

THÉORÈME. — *Si l'on décompose un contour en plusieurs autres, les racines de l'équation fondamentale relative au premier contour ont leur produit égal au produit des racines des équations fondamentales relatives à chacun des contours composants.*

En effet, soient $y_1, y_2, \ldots, y_m$ un système fondamental d'intégrales. Quand le point x décrit le premier contour donné, ces intégrales se changent en $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$. Supposons ce contour décomposé en deux autres; quand le point représentant x décrit le premier contour composant, le système d'intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_m$ se change en $u_1, u_2, \ldots, u_m$; et, si x décrit le second contour composant, ces intégrales $u_1, u_2, \ldots, u_m$ reprennent respectivement les valeurs $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$. Les intégrales de chacun de ces trois systèmes sont liées à celles des deux autres systèmes par des relations linéaires homogènes que nous pourrons mettre sous les formes suivantes :

$$(11)\qquad \begin{cases} u_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \ldots + c_{1m}y_m, \\ u_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \ldots + c_{2m}y_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_m = c_{m1}y_1 + c_{m2}y_2 + \ldots + c_{mm}y_m; \end{cases}$$

$$(11\ bis)\qquad \begin{cases} u_1 = b_{11}Y_1 + b_{12}Y_2 + \ldots + b_{1m}Y_m, \\ u_2 = b_{21}Y_1 + b_{22}Y_2 + \ldots + b_{2m}Y_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_m = b_{m1}Y_1 + b_{m2}Y_2 + \ldots + b_{mm}Y_m. \end{cases}$$

En égalant ces deux systèmes de valeurs de $u_1, u_2, \ldots, u_m$, on obtiendra les m équations linéaires qui lient $y_1, y_2, \ldots, y_m$ à $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$.

L'équation fondamentale relative au premier contour composant s'obtiendra en remplaçant dans les équations (11) u_α par ωy_α pour toutes les valeurs de α; puis, en éliminant $y_1, y_2, \ldots, y_m$, on aura

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} c_{11}-\omega & c_{12} & c_{13} & \ldots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22}-\omega & c_{23} & \ldots & c_{2m} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33}-\omega & \ldots & c_{3m} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \ldots & c_{mm}-\omega \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation fondamentale relative au second contour composant, pour

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

lequel le système d'intégrales u se change en Y, s'obtient de la même manière en remplaçant dans les équations (11 *bis*) Y_α par ωu_α. On aura l'équation fondamentale

$$(12\ bis)\qquad \begin{vmatrix} b_{11}\omega - 1 & b_{12}\omega & b_{13}\omega & \dots & b_{1m}\omega \\ b_{21}\omega & b_{22}\omega - 1 & b_{23}\omega & \dots & b_{2m}\omega \\ b_{31}\omega & b_{32}\omega & b_{33}\omega - 1 & \dots & b_{3m}\omega \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1}\omega & b_{m2}\omega & b_{m3}\omega & \dots & b_{mm}\omega - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Enfin l'équation fondamentale du contour total s'obtient en égalant les valeurs de u dans les équations (11) et (11 *bis*); on remplace ensuite Y_α par ωy_α, et l'on élimine $y_1, y_2, \dots, y_m$, ce qui donne l'équation fondamentale

$$(12\ ter)\qquad \begin{vmatrix} c_{11} - b_{11}\omega & c_{12} - b_{12}\omega & c_{13} - b_{13}\omega & \dots & c_{1m} - b_{1m}\omega \\ c_{21} - b_{21}\omega & c_{22} - b_{22}\omega & c_{23} - b_{23}\omega & \dots & c_{2m} - b_{2m}\omega \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} - b_{m1}\omega & c_{m2} - b_{m2}\omega & c_{m3} - b_{m3}\omega & \dots & c_{mm} - b_{mm}\omega \end{vmatrix} = 0.$$

Le produit des racines de l'équation (12) est égal à

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mm} \end{vmatrix}.$$

Le produit des racines de l'équation (12 *bis*) est

$$\frac{1}{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix}},$$

et le produit des racines de l'équation (12 *ter*) est égal au produit des deux expressions précédentes.

Si le contour donné est décomposé en plusieurs autres, on peut toujours le décomposer d'abord en deux, puis ces nouveaux contours seront encore décomposés, et ainsi de suite, on arrive à démontrer le théorème général.

En particulier, on peut décomposer un contour renfermant n points sin-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

guliers en n contours simples renfermant chacun un seul point singulier. Il en résulte que le produit des racines de l'équation fondamentale relative à un contour donné est égal au produit des racines de toutes les équations fondamentales relatives aux points singuliers compris dans l'intérieur du contour.

Si le contour considéré comprend dans son intérieur tous les points singuliers de l'équation situés à distance finie, l'équation fondamentale aura m racines dont le produit sera égal au produit de toutes les racines des équations fondamentales relatives aux divers points singuliers. Mais l'équation fondamentale du contour que nous examinons a ses racines inverses de celles de l'équation relative au point singulier $x = \infty$ que nous avons définie au n° 10. On peut en déduire le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le produit des racines des équations fondamentales relatives à tous les points singuliers de l'équation différentielle pris chacun isolément (y compris le point $x = \infty$) est égal à* 1.

Supposons que, pour le tour de chaque point singulier, on choisisse le système fondamental d'intégrales défini au n° 9, et formons la somme des exposants r des diverses intégrales, équations (9), les intégrales pour le point $x = \infty$ étant développées suivant les puissances de $\frac{1}{x-a}$. Si l'on fait la somme de tous les exposants ainsi obtenus pour les divers points singuliers, cette somme est un nombre entier, car on aura

$$r = \frac{\log \omega}{2\pi\sqrt{-1}},$$

d'où

$$\Sigma r = \frac{\Sigma \log \omega}{2\pi\sqrt{-1}} = \frac{\log(\omega_1 \omega_2 \dots)}{2\pi\sqrt{-1}} = \frac{\log 1}{2\pi\sqrt{-1}}$$

et

$$\log 1 = 2k\pi\sqrt{-1},$$

k étant un nombre entier arbitraire.

III.

13. Soit $x = a$ une valeur singulière pour l'équation différentielle (1) à coefficients entiers. Si le module de $x - a$ reste toujours assez petit pour que x ne puisse prendre aucune autre valeur singulière, nous avons vu que

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

toute intégrale de l'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$u = (x-a)^{r_1}[\varphi_{11} + \varphi_{12}\log(x-a) + \varphi_{13}\log^2(x-a) + \ldots + \varphi_{1n_1}\log^{n_1-1}(x-a)]$$
$$+ (x-a)^{r_2}[\varphi_{21} + \varphi_{22}\log(x-a) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \varphi_{2n_2}\log^{n_2-1}(x-a)] + \ldots$$
$$+ (x-a)^{r_\lambda}[\varphi_{\lambda 1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \varphi_{\lambda n_\lambda}\log^{n_\lambda-1}(x-a)],$$

les fonctions φ étant développables en séries suivant les puissances positives et négatives de $(x-a)$, convergentes pourvu que le point représentant x reste intérieur à un cercle de centre a. Parmi ces intégrales, M. Thomé désigne sous le nom de *régulières* celles dans lesquelles toutes les fonctions φ renferment un nombre limité de puissances négatives de $(x-a)$; on peut alors ajouter aux exposants r un nombre entier et ramener les fonctions φ à ne contenir que des puissances positives de $(x-a)$. Nous allons chercher quelles sont les intégrales régulières que peut avoir l'équation (1).

Il résulte de résultats obtenus au n° 11 que, si l'équation différentielle admet une intégrale régulière u, elle en admettra $(n_1 + n_2 + \ldots + n_\lambda)$ linéairement indépendantes, que l'on peut réunir en groupes de la forme donnée par les équations (9); et toutes les intégrales régulières de l'équation donnée seront des fonctions linéaires des intégrales de ces divers groupes. Ainsi nous sommes conduits à chercher les groupes d'intégrales régulières de forme (9), et, s'il existe des intégrales de cette forme, il doit y en avoir une de la forme

$$(x-a)^{r_1}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} h_\nu (x-a)^\nu, \quad h_0 \gtrless 0.$$

Nous allons poser dans l'équation (1)

$$y = (x-a)^\rho z$$

et déterminer ρ de façon que l'équation obtenue en z ait une intégrale de la forme

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} h_\nu (x-a)^\nu,$$

en remarquant que, pour que l'équation (1) ait une intégrale de cette dernière forme, où $h_0 \gtrless 0$, il faut (n° 5) que, parmi les nombres π_0, $\pi_1 + 1$, $\pi_2 + 2$, ..., $\pi_{m-1} + m - 1$, il y en ait au moins un inférieur à $\pi_m + m$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

En posant $y = (x-a)^{\rho} z$ et en divisant tous les termes par $(x-a)^{\rho}$, on obtient l'équation

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
&P_0 \frac{d^m z}{dx^m} + [P_0 m \rho (x-a)^{-1} + P_1] \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} \\
&+ \left[P_0 \frac{m(m-1)}{1.2} \rho(\rho-1)(x-a)^{-2} + P_1 (m-1) \rho (x-a)^{-1} + P_2 \right] \frac{d^{m-2} z}{dx^{m-2}} + \dots \\
&+ \left[P_0 \frac{m(m-1)\dots(m-\mu+1)}{1.2\dots\mu} \rho(\rho-1)\dots(\rho-\mu+1)(x-a)^{-\mu} \right. \\
&\quad \left. + P_1 \frac{(m-1)\dots(m-\mu+1)}{1.2\dots(\mu-1)} \rho(\rho-1)\dots(\rho-\mu+2)(x-a)^{-\mu+1} + \dots + P_\mu \right] \frac{d^{m-\mu} z}{dx^{m-\mu}} + \dots \\
&+ [P_0 \rho(\rho-1)\dots(\rho-m+1)(x-a)^{-m} + P_1 \rho(\rho-1)\dots(\rho-m+2)(x-a)^{-m+1} + \dots + P_m] z = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Soient $\pi'_0, \pi'_1, \pi'_2, \dots, \pi'_m$ les puissances de $\frac{1}{x-a}$ par lesquelles il faut multiplier respectivement les coefficients de l'équation (13) pour qu'ils ne soient plus ni nuls ni infinis pour $x = a$. Quelques-uns de ces nombres peuvent être négatifs.

On aura

$$\pi'_0 = \pi_0;$$

π'_1 est égal au plus petit des deux nombres $\pi_0 - 1$ et π_1, et en général π'_μ est égal au plus petit des nombres $\pi_0 - \mu$, $\pi_1 - \mu + 1$, $\pi_2 - \mu + 2$, ..., π_μ. Cependant, si deux de ces nombres sont égaux à la plus petite valeur, le nombre π'_μ peut leur être supérieur, si l'on choisit l'exposant ρ de façon que dans le coefficient de $\frac{d^{m-\mu} z}{dx^{m-\mu}}$ les termes de degré moindre en $(x-a)$ se détruisent. De même, π'_m sera égal au plus petit des nombres $\pi_0 - m$, $\pi_1 - m + 1$, $\pi_2 - m + 2$, ..., π_m, sauf pour des valeurs particulières de ρ.

Si $\pi_\alpha + \alpha$ est le plus petit des nombres π_0, $\pi_1 + 1$, $\pi_2 + 2$, ..., $\pi_m + m$, et le premier des plus petits, on aura

$$\pi'_\mu + \mu > \pi_\alpha + \alpha \text{ si } \mu < \alpha, \quad \pi'_\alpha + \alpha = \pi_\alpha + \alpha$$

et

$$\pi'_\mu + \mu \geq \pi_\alpha + \alpha \text{ si } \mu > \alpha;$$

enfin

$$\pi'_m + m = \pi_\alpha + \alpha,$$

sauf si ρ est choisi de façon que, dans le coefficient de z, le terme de degré moindre en $(x-a)$ disparaisse. Il en résulte

$$\pi'_\mu + \mu \geq \pi'_m + m,$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

et l'équation (13) n'aura pas d'intégrale de la forme

$$1 + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} h_\nu (x-a)^\nu,$$

à moins que le terme de degré moindre en $(x-a)$ disparaisse dans le coefficient de z. Ce terme contient $(x-a)^{\pi_\alpha+\alpha-m}$, et, pour que l'équation (13) ait une intégrale de la forme

$$1 + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} h_\nu (x-a)^\nu,$$

il faut que ρ soit une racine de l'équation

$$(14) \quad \begin{cases} P_\alpha (x-a)^{-\pi_\alpha} \rho(\rho-1)\dots(\rho-m+\alpha+1) \\ \quad + P_{\alpha+1}(x-a)^{-\pi_{\alpha+1}} \rho(\rho-1)\dots(\rho-m+\alpha+2)+\dots \\ \quad + P_{m-1}(x-a)^{-\pi_\alpha+m-\alpha-1}\rho + P_m (x-a)^{-\pi_\alpha+m-\alpha} = 0, \end{cases}$$

où x est remplacé par a dans tous les coefficients.

Si l'équation (14) n'a pas de racines, c'est-à-dire si $\alpha = m$, l'équation (1) ne peut avoir aucune intégrale de la forme

$$(x-a)^r \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} h_\nu (x-a)^\nu,$$

et, par suite, aucune intégrale régulière.

Le nombre α a été nommé *indice caractéristique* de l'équation (1); l'équation (14) est l'équation déterminante relative à la valeur singulière $x = a$. On groupera les racines de cette équation en réunissant celles dont les différences sont entières, et à chaque groupe de racines peut correspondre un groupe d'intégrales régulières de forme (9).

Remarque. — L'équation déterminante (14) peut s'obtenir en multipliant le premier membre de l'équation différentielle (1) par $(x-a)^{-\rho+m-(\pi_\alpha+\alpha)}$, posant $y = (x-a)^\rho$, puis $x = a$.

Pour chercher les intégrales régulières de l'équation (1) d'un groupe déterminé, on formera l'équation (13) en prenant pour ρ la racine ρ_1 de l'équation déterminante du groupe considéré, qui a la plus petite partie réelle; c'est-à-dire que les racines de (14) du même groupe seront égales à ρ_1 augmenté de nombres entiers positifs. Il faudra ensuite chercher les inté-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

grales régulières de cette équation (13) qui ne renferment que des puissances entières de $(x-a)$.

THÉORÈME. — *L'équation déterminante de l'équation* (13) *pour* $\rho=\rho_1$ *admet les racines de l'équation déterminante* (14) *de l'équation* (1) *diminuées de* ρ_1.

En effet, représentons l'équation (1) par $F(y)=0$; son équation déterminante s'obtient en posant $x=a$ dans l'équation

$$(x-a)^{-\rho+m-(\pi_\alpha+\alpha)}\,F[(x-a)^\rho]=0.$$

L'équation (13) peut s'écrire

$$(x-a)^{-\rho_1}F[(x-a)^{\rho_1}z]=0;$$

son indice caractéristique est α et $\pi'_\alpha+\alpha=\pi_\alpha+\alpha$, l'équation déterminante sera donc

$$(x-a)^{-\rho_1-\rho+m(\pi_\alpha+\alpha)}\,F[(x-a)^{\rho_1+\rho}]=0,$$

où $x=a$. On voit qu'elle s'obtient en remplaçant ρ par $\rho+\rho_1$ dans l'équation déterminante de l'équation (1).

Si l'on multiplie le premier membre de l'équation différentielle (1) par une puissance de $(x-a)$, son équation déterminante n'est pas changée.

Les racines de l'équation (14) du groupe de ρ_1 correspondent à des racines entières positives de l'équation déterminante de l'équation (13) pour $\rho=\rho_1$. Cette équation déterminante admettra la racine $\rho=0$ et n'aura pas de racines entières négatives.

On multipliera le premier membre de l'équation (13) par une puissance de $(x-a)$, de façon que les nouveaux coefficients ne soient pas infinis et ne soient pas tous nuls pour $x=a$; l'équation ainsi obtenue aura la forme (1).

14. Il s'agit maintenant, étant donnée une équation différentielle linéaire homogène à coefficients entiers, que nous représenterons par l'équation (1), de trouver les intégrales de la forme

$$u=(x-a)^{r_1}\varphi_1+(x-a)^{r_2}\varphi_2\log(x-a)+\ldots+(x-a)^{r_\nu}\varphi_\nu\log^{\nu-1}(x-a),$$

$r_1, r_2, \ldots, r_\nu$ étant des nombres entiers, φ des fonctions développables suivant les puissances positives de $(x-a)$ et qui ne sont ni nulles ni infinies pour $x=a$. Nous dirons que la fonction u appartient à l'exposant r, qui est le plus petit des nombres $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$.

Si l'équation (1) admet cette intégrale u, on peut en déduire ν intégrales

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

distinctes de la forme donnée au n° 11, et l'on peut remplacer l'intégrale u par une fonction linéaire des ν intégrales qui en sont déduites. Il est facile de déterminer successivement les constantes de cette fonction linéaire, de façon que, pour la nouvelle intégrale de forme u, chaque exposant de la suite $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$ ne soit jamais supérieur à aucun de ceux qui le suivent :

$$r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq r_4 \leq \ldots \leq r_{\nu-1} \leq r_\nu.$$

THÉORÈME. — *Si la fonction u est une intégrale de l'équation* (1) *et si l'un des exposants r_α est inférieur à chacun de ceux qui le suivent $r_{\alpha+1}, r_{\alpha+2}, \ldots, r_\nu$, les $\beta - 1$ exposants qui le précèdent immédiatement $r_{\alpha-1}, r_{\alpha-2}, \ldots, r_{\alpha-\beta+1}$ étant égaux ou supérieurs à r_α, cet exposant r_α sera racine d'ordre β de l'équation déterminante de l'équation* (1) *relative à la valeur singulière $x = a$.*

En effet, si l'on remplace y par la fonction u dans l'équation (1), le premier membre sera de même forme que u, et les coefficients des puissances de $\log(x-a)$ devront être nuls séparément (n° 11). Exprimons que dans les coefficients de $\log^{\alpha-1}(x-a)$, $\log^{\alpha-2}(x-a)$, ..., $\log^{\alpha-\beta}(x-a)$ le terme de degré moindre en $x-a$ disparaît; ces termes proviendront uniquement des fonctions $\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha-1}, \ldots, \varphi_{\alpha-\beta+1}$ et seulement du premier terme de chacune d'elles. Les termes que nous cherchons sont donc les mêmes que si l'on remplaçait y par la valeur

$$h_{\alpha-\beta+1}(x-a)^{r_\alpha}\log^{\alpha-\beta}(x-a) + h_{\alpha-\beta+2}(x-a)^{r_\alpha}\log^{\alpha-\beta+1}(x-a) + \ldots + h_\alpha(x-a)^{r_\alpha}\log^{\alpha-1}(x-a),$$

h_α étant la valeur de φ_α pour $x=a$, qui n'est pas nulle, $h_{\alpha-1}, h_{\alpha-2}, \ldots, h_{\alpha-\beta+1}$ sont des constantes qui peuvent être nulles. Si l'on pose

$$y = (x-a)^r \log^\alpha(x-a),$$

on en déduit

$$\frac{dy}{dx} = (x-a)^{r-1}[r\log^\alpha(x-a) + \alpha\log^{\alpha-1}(x-a)],$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (x-a)^{r-2}\left[r(r-1)\log^\alpha(x-a) + \alpha(2r-1)\log^{\alpha-1}(x-a) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}2\log^{\alpha-2}(x-a)\right]$$

et, en général,

$$\frac{d^m y}{dx^m} = (x-a)^{r-m}\left[\psi_m(r)\log^\alpha(x-a) + \alpha\psi'_m(r)\log^{\alpha-1}(x-a) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}\psi''_m(r)\log^{\alpha-2}(x-a) + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m+1)}{1.2\ldots m}\psi_m^{(m)}(r)\log^{\alpha-m}(x-a)\right],$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

où $\psi_m(r) = r(r-1)\dots(r-m+1)$ et $\psi'_m(r), \psi''_m(r), \dots, \psi^{(m)}_m(r)$ sont les dérivées de $\psi_m(r)$ par rapport à r.

Cette formule se vérifie pour $m = 1, 2, \dots$, et l'on démontre que si elle est vraie pour une valeur de m, elle est encore vraie pour $m+1$.

Quand on remplace y par la fonction

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\beta-1} h_{\alpha-\nu}(x-a)^{r_\alpha}\log^{\alpha-\nu-1}(x-a),$$

les termes de degré moindre en $(x-a)$ dans les coefficients des β dernières puissances de $\log(x-a)$ seront

$$\begin{aligned}
&(x-a)^{r_\alpha-m+n}\log^{\alpha-1}(x-a),\\
&(x-a)^{r_\alpha-m+n-1}\log^{\alpha-2}(x-a),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&(x-a)^{r_\alpha-m+n-\beta+1}\log^{\alpha-\beta}(x-a),
\end{aligned}$$

n étant le nombre défini au n° 5.

Le premier de ces termes ne contiendra que la constante h_α, et en exprimant qu'il a un coefficient nul, on trouve

$$\begin{aligned}
&P_0(x-a)^n\psi_m(r_\alpha) + P_1(x-a)^{n-1}\psi_{m-1}(r_\alpha) + \dots\\
&\quad + P_{m-1}(x-a)^{n-m+1}\psi_1(r_\alpha) + P_m(x-a)^{n-m} = 0,
\end{aligned}$$

où $x = a$.

Cette équation exprime que r_α est racine de l'équation déterminante de l'équation (1).

Le coefficient du terme $(x-a)^{r_\alpha-m+n-1}\log^{\alpha-2}(x-a)$ contient les deux constantes h_α et $h_{\alpha-1}$, mais les termes en $h_{\alpha-1}$ disparaissent en vertu de l'équation déjà trouvée, et ceux en h_α doivent disparaître séparément, ce qui donne

$$P_0(x-a)^n\psi'_m(r_\alpha) + P_1(x-a)^{n-1}\psi'_{m-1}(r_\alpha) + \dots + P_{m-1}(x-a)^{n-m+1}\psi'_1(r_\alpha) = 0$$

pour $x = a$; cette équation exprime que r_α est racine double de l'équation déterminante.

De même, le coefficient de $(x-a)^{r_\alpha-m+n-2}\log^{\alpha-3}(x-a)$ contient des termes en h_α et des termes en $h_{\alpha-1}$ et $h_{\alpha-2}$, qui disparaissent en vertu des deux équations déjà trouvées, et en exprimant que les termes en h_α se détruisent, on obtient une équation qui montre que r_α est racine triple de l'équation déterminante.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

En continuant le même raisonnement, on voit que r_α est racine d'ordre β de l'équation déterminante de l'équation (1).

THÉORÈME. — *Si l'équation* (1) *admet l'intégrale u, l'équation déterminante aura* ν *racines entières positives dont plusieurs peuvent être égales; ces racines seront* $r_1, r_2, \ldots, r_\lambda$ *si ces exposants sont rangés par ordre de grandeur croissante.*

15. Si l'équation (1) admet plusieurs intégrales de forme u

$$u_1 = (x-a)^{r_{11}}\varphi_{11} + (x-a)^{r_{12}}\varphi_{12}\log(x-a) + \ldots + (x-a)^{r_{1\nu_1}}\varphi_{1\nu_1}\log^{\nu_1-1}(x-a),$$
$$u_2 = (x-a)^{r_{21}}\varphi_{21} + (x-a)^{r_{22}}\varphi_{22}\log(x-a) + \ldots + (x-a)^{r_{2\nu_2}}\varphi_{2\nu_2}\log^{\nu_2-1}(x-a),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$u_\lambda = (x-a)^{r_{\lambda 1}}\varphi_{\lambda 1} + (x-a)^{r_{\lambda 2}}\varphi_{\lambda 2}\log(x-a) + \ldots + (x-a)^{r_{\lambda\nu_\lambda}}\varphi_{\lambda\nu_\lambda}\log^{\nu_\lambda-1}(x-a),$$

les exposants r étant tous entiers, on pourra en déduire $(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\lambda)$ intégrales, d'après la méthode du n° 11.

Si les λ fonctions $(x-a)^{r_{1\nu_1}}\varphi_{1\nu_1}$, $(x-a)^{r_{2\nu_2}}\varphi_{2\nu_2}$, $\ldots$, $(x-a)^{r_{\lambda\nu_\lambda}}\varphi_{\lambda\nu_\lambda}$ ne sont pas linéairement indépendantes, les intégrales que l'on en déduit ne sont pas distinctes; mais on pourra toujours remplacer les fonctions données u par des fonctions linéaires des intégrales que l'on en déduit, de façon que dans les nouvelles valeurs de u les λ fonctions qui multiplient les dernières puissances de $\log(x-a)$ soient linéairement indépendantes, et toutes les intégrales déduites des fonctions u données seront des fonctions linéaires des intégrales déduites des nouvelles fonctions u.

Supposons donc que les fonctions $(x-a)^{r_{1\nu_1}}\varphi_{1\nu_1}$, $(x-a)^{r_{2\nu_2}}\varphi_{2\nu_2}$, $\ldots$, $(x-a)^{r_{\lambda\nu_\lambda}}\varphi_{\lambda\nu_\lambda}$ soient linéairement indépendantes; dans ce cas, on peut déduire des fonctions $u(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\lambda)$ intégrales linéairement indépendantes. Nous supposerons également que les exposants r pour chacune des fonctions u sont rangés par ordre de grandeur.

Si les exposants r de deux quelconques des fonctions u ont des valeurs différentes, on voit que l'équation déterminante de l'équation (1) aura $(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\lambda)$ racines entières qui sont les valeurs de ces exposants.

S'il y a des exposants r égaux dans deux fonctions u différentes, on aura encore $(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\lambda)$ racines entières pour l'équation déterminante, mais ces racines ne seront pas toutes égales aux exposants r.

En effet, soit r' le plus petit des exposants qui entre dans deux des fonctions u, et soient $r_{1\alpha_1}, r_{2\alpha_2}, \ldots, r_{\lambda\alpha_\lambda}$ les exposants de chacune des fonctions qui sont immédiatement inférieurs à r'. L'équation déterminante

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

admettra $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\lambda)$ racines entières inférieures à r', qui sont $r_{11}r_{12}\ldots r_{1\alpha_1}$, $r_{21}r_{22}\ldots r_{2\alpha_2}$, $\ldots$, $r_{\lambda\alpha_\lambda}$, plusieurs de ces nombres pouvant être égaux s'ils ont le même premier indice; la racine est alors multiple. Des intégrales u on peut déduire les suivantes, qui ont tous leurs exposants supérieurs ou égaux à r' :

$$u'_1 = 1.2\ldots\alpha_1(x-a)^{r_{1(\alpha_1+1)}}\varphi_{1(\alpha_1+1)} + 2.3\ldots(\alpha_1+1)(x-a)^{r_{1(\alpha_1+2)}}\varphi_{1(\alpha_1+2)}\log(x-a) + \ldots + (\nu_1-\alpha_1)\ldots(\nu_1-1)(x-a)^{r_{1\nu_1}}\varphi_{1\nu_1}\log^{\nu_1-\alpha_1-1}(x-a),$$

$$u'_2 = 1.2\ldots\alpha_2(x-a)^{r_{2(\alpha_2+1)}}\varphi_{2(\alpha_2+1)} + \ldots + (\nu_2-\alpha_2)\ldots(\nu_2-1)(x-a)^{r_{2\nu_2}}\varphi_{2\nu_2}\log^{\nu_2-\alpha_2-1}(x-a),$$

$$\ldots\ldots\ldots

nante des racines comprises entre r' et r'', et l'on forme de nouvelles fonctions, de forme u, n'ayant que des exposants supérieurs à r''. En continuant ainsi, on démontre que l'équation déterminante a $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\lambda$ racines entières, dont plusieurs peuvent être égales.

On peut déduire des intégrales u un nombre d'intégrales régulières distinctes égal à $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\lambda$ et choisir ces intégrales de façon qu'elles appartiennent chacune respectivement à l'un des exposants entiers, qui sont racines de l'équation déterminante.

16. Nous supposons que l'équation déterminante (14) de l'équation (1) admette la racine $\rho = 0$ et n'ait aucune racine entière négative. Le degré de cette équation est $m - \alpha$, et, si l'on pose

$$\pi_\alpha + \alpha = n \quad (\text{n}^\circ 5),$$

on aura, pour toutes les valeurs de μ,

$$\pi_\mu + \mu \geq n,$$

et, si $\mu > n$,

$$\pi_\mu + \mu > n;$$

il en résulte que, dans l'équation (14), les $m - n$ derniers termes disparaissent et cette équation admettra les racines $0, 1, 2, \ldots m - n - 1$; elle peut avoir d'autres racines entières positives.

On cherchera d'abord les intégrales de l'équation (1) de la forme

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} h_\nu (x - a)^\nu,$$

en appliquant la méthode du n° 5.

Supposons qu'aucune des équations (5) ne soit une conséquence des précédentes; on trouvera alors une intégrale de forme (4)

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} h_\nu (x - a)^\nu,$$

dans laquelle $m - n$ coefficients auront des valeurs arbitraires; on peut donc former $m - n$ séries vérifiant l'équation (1), qui seront linéairement indépendantes. Il y aura une de ces intégrales, appartenant à l'exposant ρ,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

qui est la plus grande racine entière de l'équation déterminante, car, si l'on pose

$$y_a = y'_a = \ldots = y_a^{(\rho-1)} = 0,$$

les équations (5) détermineront complètement les autres dérivées, en fonction de $y_a^{(\rho)}$ pour $x = a$. On peut choisir ces $m - n$ intégrales, de façon qu'elles appartiennent à $m - n$ exposants différents, qui sont des racines de l'équation déterminante, et ces $m - n$ racines ne peuvent se déterminer que d'une seule manière.

Posons maintenant dans l'équation (1)

$$y = z + y_1 \log(x - a);$$

y_1 étant l'une des intégrales que nous venons de déterminer, on aura

$$(15)\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{P}_0 \dfrac{d^m z}{dx^m} + \mathrm{P}_1 \dfrac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \ldots + \mathrm{P}_m z \\ \quad = -\mathrm{P}_0 \left[y_1 \dfrac{(-1)^{m-1}.2.3\ldots(m-1)}{(x-a)^m} \right. \\ \qquad\qquad + m \dfrac{dy_1}{dx^m} \dfrac{(-1)^{m-2}.2.3\ldots(m-2)}{(x-a)^{m-1}} + \ldots + m \dfrac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} \left. \dfrac{1}{x-a} \right] + \ldots \\ \qquad -\mathrm{P}_{m-1} \dfrac{y_1}{x-a}. \end{array} \right.$$

Les termes contenant $\log(x - a)$ disparaissent. Si y_1 appartient à l'exposant ρ, le second membre de cette équation appartiendra à l'exposant $\rho + n - m$; et il résulte de ce qui a été vu (n° 14) que le coefficient du terme de degré moindre $(x - a)^{\rho+n-m}$ ne disparaît que dans le cas où ρ est racine double de l'équation déterminante; mais le premier membre de l'équation (15) est une série ne contenant que des puissances positives de $x - a$; le second membre ne peut donc pas contenir de puissances négatives, et, si ρ est racine simple de l'équation déterminante, il faut $\rho \geq m - n$.

On peut donc prendre pour y_1 les intégrales déjà trouvées de la forme

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} h_\nu (x - a)^\nu,$$

qui appartiennent à des exposants supérieurs à $m - n - 1$. Si, parmi ces intégrales, il en existe une appartenant à un exposant inférieur à $m - n$, par exemple $m - n - k$ racine multiple de l'équation déterminante, on for-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

mera cette intégrale en posant

$$y_a = y'_a = \ldots = y_a^{m-n-k-1} = 0,$$

et laissant arbitraires les valeurs des dérivées suivantes $y_a^{m-n-k}, \ldots, y_a^{m-n-1}$, qui devront seulement pouvoir vérifier les équations (5). On déterminera ensuite les valeurs arbitraires de façon que, dans le second membre de l'équation (15), les coefficients des puissances négatives de $x - a$, depuis $(x-a)^{-k+1}$ jusqu'à $(x-a)^{-1}$, disparaissent.

On trouvera ainsi $k-1$ conditions pour déterminer $y_a^{m-n-k+1}, \ldots, y_a^{m-n-1}$ en fonction de y_a^{m-n-k}; mais les équations (5) donneront d'autres équations entre les mêmes quantités, de sorte que le problème est, en général, impossible.

Dans tous les cas, on pourra déterminer quelles sont les intégrales que l'on peut prendre pour y_1, parmi celles que nous avons trouvées de la forme

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} h_\nu (x-a)^\nu.$$

Une valeur de y_1 étant ainsi choisie, pour déterminer la fonction z, on différentie successivement l'équation (15), puis on pose $x = a$; on obtient des équations analogues aux équations (5), mais avec des seconds membres constants.

Dans les équations (5), on peut choisir les valeurs de y_a et de $m-n-1$ de ses dérivées pour $x = a$; les autres dérivées sont alors complètement déterminées. Dans les équations déduites de (15), prenons arbitrairement la valeur de z_a et les valeurs pour $x = a$ des dérivées de z, de mêmes ordres que les dérivées de y qui étaient arbitraires dans les équations (5).

Les autres dérivées de z pour $x = a$ seront alors complètement déterminées par les équations déduites de (15), car les inconnues auront les mêmes coefficients que dans les équations (5), et le déterminant de ces coefficients n'est pas nul, puisque nous avons supposé que les équations (5) ont un seul système de solution, quand $m-n$ des quantités $y_a, y'_a, y''_a, \ldots$ sont connues. On trouvera donc pour z une série de la forme

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} h_\nu (x-a)^\nu,$$

dans laquelle $m-n$ coefficients sont arbitraires; mais si deux séries véri-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

fient l'équation (15) leur différence est une intégrale de l'équation (1). Il suffit donc de déterminer l'une des valeurs de z, les autres s'obtiendront en ajoutant à la première l'une quelconque des intégrales de l'équation (1) de même forme que z.

On aura ainsi toutes les intégrales distinctes de la forme

$$\varphi_2 + \varphi_1 \log(x - a).$$

Pour avoir les intégrales contenant $\log^2(x - a)$, on choisit l'une des intégrales précédentes, et l'on pose

$$y = z + \varphi_2 \log(x - a) + \tfrac{1}{2}\varphi_1 \log^2(x - a);$$

on substitue cette valeur dans l'équation (1), tous les termes contenant $\log(x - a)$ disparaissent, et il reste une équation de même forme que l'équation (15). On choisira l'intégrale $\varphi_2 + \varphi_1 \log(x - a)$ de façon que le second membre ne contienne pas de puissances négatives de $x - a$, ce qui a lieu, en particulier, si les fonctions φ_1 et φ_2 appartiennent à des exposants supérieurs à $m - n - 1$; dans les autres cas, on cherchera si l'on peut déterminer les constantes qui entrent dans la fonction φ_2, de façon à annuler les coefficients des puissances négatives de $x - a$ dans l'équation obtenue par la substitution. On aura alors une équation de forme (15); on différentie cette équation successivement, et l'on pose $x = a$, et l'on pourra déterminer les valeurs pour $x = a$ de z et de ses dérivées en fonction de $m - n$ constantes arbitraires; les inconnus ont, en effet, les mêmes coefficients que dans les équations qui ont servi à déterminer la fonction φ_2. On a ainsi toutes les intégrales de la forme

$$\varphi_3 + \varphi_2 \log(x - a) + \tfrac{1}{2}\varphi_1 \log^2(x - a),$$

les fonctions φ ne contenant que des puissances entières de $x - a$.

Pour avoir les intégrales contenant $\log^3(x - a)$, posons

$$y = z + \varphi_3 \log(x - a) + \tfrac{1}{2}\varphi_2 \log^2(x - a) + \frac{1}{2.3}\varphi_1 \log^3(x - a).$$

Il résulte du n° 11 que l'on doit choisir les fonctions φ, de façon que l'expression

$$\varphi_3 + \varphi_2 \log(x - a) + \tfrac{1}{2}\varphi_1 \log^2(x - a)$$

soit l'une des intégrales déjà déterminées.

On remplace y dans l'équation (1) par cette valeur, et il est facile de véri-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

fier que les termes en $\log(x-a)$ disparaissent; il reste une équation de forme (15), et l'on doit choisir les valeurs possibles des fonctions φ, de façon qu'il ne reste aucune puissance négative de $(x-a)$. On aura alors une équation qui pourra servir à déterminer la série z de la forme

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} h_\nu (x-a)^\nu,$$

dans laquelle $(m-n)$ coefficients seront arbitraires.

On continuera de même, jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible de former une équation (15) dont le second membre ne contienne aucune puissance négative de $(x-a)$.

Nous avons supposé que les équations (5) sont toutes distinctes, et qu'il existe $(m-n)$ intégrales de la forme

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} h_\nu (x-a)^\nu.$$

Il peut arriver que quelques-unes des équations (5) soient des conséquences des équations précédentes; soit k le nombre de ces équations, l'équation (1) sera alors vérifiée par une série contenant $(m-n+k)$ constantes arbitraires, soit φ_1 l'une de ces intégrales; on pose

$$y = z + \varphi_1 \log(x-a),$$

et l'on forme l'équation (15); on la différentie et l'on pose $x=a$, ce qui donne des équations qui ne diffèrent des équations (5) que par le second membre. Si on laisse les k équations correspondant à celles qui se déduiraient des autres quand $\varphi_1 = 0$, on pourra choisir arbitrairement $(m-n+k)$ des quantités z_a, z'_a, z''_a, ..., les autres seront déterminées; et si l'on remplace ces dérivées par les valeurs obtenues dans les k équations laissées de côté, les valeurs arbitraires z_a, z'_a, z''_a, ... disparaîtront, et il restera k équations entre les valeurs de φ_1 et de ses dérivées pour $x=a$. Dans la série φ_1 il ne restera donc que $(m-n)$ constantes arbitraires; on pourra choisir $(m-n)$ séries appartenant à des exposants différents, et l'on verra quelles sont celles qui permettent de déterminer z en appliquant la méthode déjà indiquée; seulement, z contiendra ici $(m-n+k)$ constantes arbitraires.

Soit

$$\varphi_2 + \varphi_1 \log(x-a)$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

l'une de ces intégrales; posons

$$y = z + \varphi_2 \log(x - a) + \tfrac{1}{2}\varphi_1 \log^2(x - a),$$

ce qui donne une équation (15) et des équations de forme (5) avec second membre. En éliminant z_a, z'_a, ..., on peut obtenir k équations entre les valeurs de φ_2 et φ_1 et de leurs dérivées pour $x = a$, et, comme φ_1 est en général complètement déterminé, ces équations limiteront les valeurs possibles de la fonction φ_2, qui ne contiendra plus que $(m - n)$ constantes arbitraires; on déterminera ensuite la série z, qui aura $m - n + k$ constantes arbitraires.

En continuant le même raisonnement, on obtiendra toutes les intégrales régulières qui ne renferment que des puissances entières de $(x - a)$.

17. Nous allons démontrer que le nombre des intégrales que nous venons de former est égal au nombre des racines entières de l'équation déterminante.

Soient $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\lambda$ les racines entières distinctes de l'équation déterminante, rangées par ordre de grandeur, et $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\lambda$ leurs ordres de multiplicité, on aura

$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = 1, \quad \ldots, \quad \rho_{m-n} = m - n - 1.$$

On trouve toujours une série vérifiant l'équation (1) de la forme

$$\varphi_1 = \sum_{\nu=\rho_\lambda}^{\nu=\infty} h_\nu (x - a)^\nu.$$

Si l'ordre de la racine ρ_λ de l'équation déterminante est supérieur à 1, en posant dans l'équation (1)

$$y = z + \varphi_1 \log(x - a),$$

on a une équation de forme (15) dont le second membre appartient à l'exposant $\rho_\lambda + n - m + 1$; si l'on pose

$$z_a = z'_a = z''_a = \ldots = z_a^{\rho_\lambda} = 0,$$

les équations obtenues en différentiant l'équation (15) pour $x = a$ détermineront les autres dérivées de z, car la première de ces équations qui n'aura pas ses deux membres identiquement nuls est celle obtenue en différen-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

tiant $(\rho_\lambda + n - m + 1)$ fois et elle détermine la valeur de $z_a^{(\rho_\lambda+1)}$; on aura donc pour z une série de la forme

$$\varphi_2 = \sum_{\nu=\rho_\lambda+1}^{\nu=\infty} h_\nu (x-a)^\nu.$$

On posera

$$y = z + \varphi_2 \log(x-a) + \tfrac{1}{2}\varphi_1 \log^2(x-a),$$

et, si l'ordre ν_λ de la racine ρ_λ est supérieur à 2, on obtiendra une équation de forme (15) dont le second membre appartient encore à l'exposant $\rho_\lambda + n - m + 1$, car le premier terme en $(x-a)^{\rho_\lambda+n-m}$ ne peut provenir que de φ_1 et disparaît si $\nu_\lambda \geq 3$. On peut donc poser

$$z_a = z'_a = z''_a = \ldots = z_a^{\rho_\lambda} = 0,$$

et l'on obtient pour z une série de la forme

$$\varphi_3 = \sum_{\nu=\rho_\lambda+1}^{\nu=\infty} h_\nu (x-a)^\nu;$$

en continuant de la même manière, on aura une intégrale de la forme

$$\gamma_\lambda = \varphi_{11} + \varphi_{12}\log(x-a) + \varphi_{13}\log^2(x-a) + \ldots + \varphi_{1\nu_\lambda}\log^{\nu_\lambda-1}(x-a),$$

la fonction $\varphi_{1\nu_\lambda}$ appartenant à l'exposant ρ_λ, les autres fonctions φ à des exposants supérieurs.

Pour obtenir les intégrales appartenant à l'exposant $\rho_{\lambda-1}$, posons

$$y = z + c\left[\varphi_{11}\log(x-a) + \tfrac{1}{2}\varphi_{12}\log^2(x-a) + \ldots + \frac{1}{\nu_\lambda}\varphi_{1\nu_\lambda}\log^{\nu_\lambda}(x-a)\right].$$

En portant cette valeur dans l'équation (11), les logarithmes disparaissent; on aura une équation de forme (15) dont le second membre appartient à l'exposant $\rho_\lambda + n - m$.

Posons

$$z_a = z'_a = \ldots = z_a^{\rho_{\lambda-1}-1} = 0$$

dans les équations formées en différentiant l'équation ainsi obtenue. La première équation qui restera déterminera $z_a^{\rho_{\lambda-1}+1}$ en fonction de $z_a^{\rho_{\lambda-1}}$ dont la valeur sera arbitraire; les dérivées suivantes pour $x = a$ seront déterminées jusqu'à $z_a^{\rho_\lambda-1}$ par des équations homogènes; la première équation, qui

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

a un second membre, ne contient que les dérivées déjà calculées, car le coefficient de $z_a^{\rho_\lambda}$ y est nul, et le second membre est égal à c multiplié par une expression différente de zéro. Cette équation détermine la valeur de c; $z_a^{\rho_\lambda}$ aura une valeur arbitraire et les dérivées suivantes pourront se déterminer. La valeur de c peut être nulle, mais ne sera jamais infinie. On obtient donc une intégrale de la forme

$$\varphi_1 + \varphi_2 \log(x-a) + \varphi_3 \log^2(x-a) + \ldots + \varphi_{\nu_\lambda+1} \log^{\nu_\lambda}(x-a),$$

la série φ_1 appartenant à l'exposant $\rho_{\lambda-1}$, les autres fonctions n'ont que des exposants supérieurs et peuvent être nulles. Si $\rho_{\lambda-1}$ est racine multiple de l'équation déterminante, on posera dans l'équation (1)

$$v = z + \varphi_1 \log(x-a) + \tfrac{1}{2}\varphi_2 \log^2(x-a) + \ldots + \frac{1}{\nu_\lambda+1}\varphi_{\nu_\lambda+1}\log^{\nu_\lambda+1}(x-a)$$
$$+ c\left[\varphi_{11}\log(x-a) + \tfrac{1}{2}\varphi_{12}\log^2(x-a) + \ldots + \frac{1}{\nu_\lambda}\varphi_{1\nu_\lambda}\log^{\nu_\lambda}(x-a)\right],$$

tous les termes contenant $\log(x-a)$ disparaissent; on posera

$$z_a = z'_a = z''_a = \ldots = z_a^{\rho_{\lambda-1}} = 0,$$

et les équations obtenues en différentiant l'équation formée par la substitution de y dans (1) pour $x = a$ détermineront successivement les valeurs de $z_a^{(\rho_{\lambda-1}+1)}$, $z_a^{(\rho_{\lambda-1}+2)}$, ..., $z_a^{\rho_\lambda - 1}$; on aura ensuite une équation qui sera la première contenant la constante c avec un coefficient différent de zéro; on en déduira la valeur de c, et, en choisissant arbitrairement la valeur de $z_a^{\rho_\lambda}$, on pourra calculer les dérivées suivantes de z pour $x = a$. On aura ainsi une intégrale de la forme

$$\varphi_1 + \varphi_2 \log(x-a) + \ldots + \varphi_{\nu_\lambda+2}\log^{\nu_\lambda+1}(x-a),$$

la fonction φ_2 appartenant à l'exposant $\rho_{\lambda-1}$, les autres à des exposants supérieurs. On posera

$$y = z + \varphi_1 \log(x-a) + \tfrac{1}{2}\varphi_2 \log^2(x-a) + \ldots + \frac{1}{\nu_\lambda+2}\varphi_{\nu_\lambda+2}\log^{\nu_\lambda+2}(x-a)$$
$$+ c\left[\varphi_{11}\log(x-a) + \ldots + \frac{1}{\nu_\lambda}\varphi_{1\nu_\lambda}\log^{\nu_\lambda}(x-a)\right],$$

et l'on déterminera, comme précédemment, la valeur de c et la série

$$z = \sum_{\nu=\rho_{\lambda-1}+1}^{\nu=\infty} h_\nu (x-a)^\nu;$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

on continuera ainsi jusqu'à ce que l'on arrive à l'intégrale

$$y_{\lambda-1} = \varphi_{21} + \varphi_{22}\log(x-a) + \varphi_{23}\log^2(x-a) + \ldots + \varphi_{2\nu_{\lambda-1}}\log^{\nu_{\lambda-1}-1}(x-a) + \ldots,$$

la fonction $\varphi_{2\nu_{\lambda-1}}$ appartenant à l'exposant $\rho_{\lambda-1}$, les autres fonctions φ appartiennent à des exposants supérieurs et peuvent être identiquement nulles.

Pour obtenir les intégrales appartenant à l'exposant $\rho_{\lambda-2}$, on posera, dans l'équation (1),

$$\begin{aligned} y = z &+ c_1\left[\varphi_{21}\log(x-a) + \tfrac{1}{2}\varphi_{22}\log^2(x-a) + \tfrac{1}{3}\varphi_{23}\log^3(x-a) + \ldots\right] \\ &+ c_2\left[\varphi_{11}\log(x-a) + \tfrac{1}{2}\varphi_{12}\log^2(x-a) + \ldots + \frac{1}{\nu_\lambda}\varphi_{1\nu_\lambda}\log^{\nu_\lambda}(x-a)\right]; \end{aligned}$$

on différentie successivement l'équation obtenue et l'on pose $x = a$, puis

$$z_a = z'_a = z''_a = \ldots = z_a^{\rho_{\lambda-2}-1} = 0,$$

et l'on a des équations qui déterminent successivement $z_a^{\rho_{\lambda-2}+1}$, $z_a^{\rho_{\lambda-2}+2}$, ..., $z_a^{\rho_{\lambda-1}-1}$, c_1, $z_a^{\rho_{\lambda-1}+1}$, $z_a^{\rho_{\lambda-1}+2}$, ..., $z_a^{\rho_\lambda-1}$, c_2, $z_a^{\rho_\lambda+1}$, ..., les valeurs de $z_a^{\rho_{\lambda-2}}$, $z_a^{\rho_{\lambda-1}}$ et $z_a^{\rho_\lambda}$ étant choisies arbitrairement; on trouvera ainsi pour z une série de la forme

$$\sum_{\nu=\rho_{\lambda-2}}^{\nu=\infty} h_\nu(x-a)^\nu$$

et une intégrale de la forme

$$y = \varphi_1 + \varphi_2\log(x-a) + \varphi_3\log^3(x-a) + \ldots,$$

φ_1 appartenant à l'exposant $\rho_{\lambda-2}$, et φ_2, φ_3, ... à des exposants supérieurs.

Si $\rho_{\lambda-2}$ est racine multiple de l'équation déterminante, on posera ensuite

$$\begin{aligned} y = z &+ \varphi_1\log(x-a) + \tfrac{1}{2}\varphi_2\log^2(x-a) + \ldots \\ &+ c_1[\varphi_{21}\log(x-a) + \tfrac{1}{2}\varphi_{22}\log^2(x-a) + \ldots] \\ &+ c_2[\varphi_{11}\log(x-a) + \tfrac{1}{2}\varphi_{12}\log^2(x-a) + \ldots], \end{aligned}$$

et l'on peut déterminer les valeurs de c_1 et c_2 et la série z de la forme

$$\sum_{\nu=\rho_{\lambda-2}+1}^{\nu=\infty} h_\nu(x-a)^\nu,$$

de façon que cette fonction y vérifie l'équation (1).

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

En continuant, on arrivera à une intégrale de la forme

$$y_{\lambda-2} = \varphi_{31} + \varphi_{32}\log(x-a) + \varphi_{33}\log^2(x-a) + \ldots,$$

la fonction $\varphi_{3\nu_{\lambda-2}}$ appartenant à l'exposant $\rho_{\lambda-2}$, et les autres fonctions φ à des exposants supérieurs.

On formera ensuite de la même manière les intégrales appartenant aux exposants $\rho_{\lambda-3}$, $\rho_{\lambda-4}$, ..., ρ_{m-n+1}.

En général, si ρ_μ est une racine entière supérieure à $m-n-1$ et d'ordre ν_μ de l'équation déterminante, on aura l'intégrale

$$y_\mu = \varphi_{\lambda-\mu+1,1} + \varphi_{\lambda-\mu+1,2}\log(x-a) + \varphi_{\lambda-\mu+2,3}\log^2(x-a) + \ldots,$$

la fonction $\varphi_{\lambda-\mu+1,\nu_\mu}$ appartenant à l'exposant ρ_μ, et les autres fonctions φ à des exposants supérieurs.

Pour avoir les intégrales appartenant aux exposants 0, 1, 2, ..., $m-n-1$, posons

$$\begin{aligned} y = z &+ c_1\left[\varphi_{11}\log(x-a) + \tfrac{1}{2}\varphi_{12}\log^2(x-a) + \tfrac{1}{3}\varphi_{13}\log^3(x-a) + \ldots\right] \\ &+ c_2\left[\varphi_{21}\log(x-a) + \tfrac{1}{2}\varphi_{22}\log^2(x-a) + \ldots\right] + \ldots \\ &+ c_{\lambda-m+n}\left[\varphi_{\lambda-m+n,1}\log(x-a) + \tfrac{1}{2}\varphi_{\lambda-m+n,2}\log^2(x-a) + \ldots\right]; \end{aligned}$$

on pourra choisir arbitrairement les valeurs de z_a, z'_a, z''_a, ..., z_a^{m-n-1}, $z_a^{\rho_{m-n+1}}$, $z_a^{\rho_{m-n+2}}$, ..., $z_a^{\rho_\lambda}$, et en déduire les valeurs des autres dérivées pour $x=a$ et des constantes $c_1, c_2, \ldots, c_{\lambda-m+n}$; on peut donc, en annulant successivement z_a, z'_a, ..., obtenir $m-n$ intégrales distinctes appartenant aux exposants 0, 1, 2, ..., $m-n-1$. Si parmi ces nombres il y en a qui sont racines multiples de l'équation déterminante, on déterminera par la méthode précédente une intégrale de la forme

$$y_{m-n} = \varphi_{\lambda-m+n+1,1} + \varphi_{\lambda-m+n+1,2}\log(x-a) + \varphi_{\lambda-m+n+1,3}\log^2(x-a) + \ldots,$$

la fonction $\varphi_{\lambda-m+n+1,\nu_{m-n}}$ appartenant à l'exposant $\rho_{m-n} = m-n-1$, les autres fonctions φ à des exposants supérieurs.

Si $\nu_{m-n-1} > 1$, après avoir déterminé l'intégrale

$$\varphi_1 + \varphi_2\log(x-a) + \varphi_3\log^2(x-a) + \ldots,$$

dans laquelle φ_1 appartient à l'exposant $m-n-2$, on posera, dans l'équation (1),

$$\begin{aligned} y = z &+ \varphi_1\log(x-a) + \tfrac{1}{2}\varphi_2\log^2(x-a) + \ldots \\ &+ c_1\left[\varphi_{11}\log(x-a) + \tfrac{1}{2}\varphi_{12}\log^2(x-a) + \ldots\right] + \ldots \\ &+ c_{\lambda-m+n+1}\left[\varphi_{\lambda-m+n+1,1}\log(x-a) + \ldots\right]; \end{aligned}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

il y aura des termes en $(x-a)^{-1}$, et, en égalant le coefficient à zéro, l'on aura une équation qui détermine $c_{\lambda-m+n+1}$; on aura ensuite une équation de forme (15), qui permet de déterminer les constantes c et donnera pour z une série de la forme

$$\sum_{\nu=m-n}^{\nu=\infty} h_\nu (x-a)^\nu;$$

on opère de même sur l'intégrale ainsi formée, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne l'intégrale

$$y_{m-n-1} = \varphi_{\lambda-m+n+2,1} + \varphi_{\lambda-m+n+2,2} \log(x-a) + \ldots,$$

la série $\varphi_{\lambda-m+n+2,\nu_{m-n-1}}$ appartenant à l'exposant $\rho_{m-n-1} = m-n-2$.

On formera de même les intégrales appartenant à l'exposant $m-n-3$; on aura alors des termes en $(x-a)^{-2}$ et $(x-a)^{-1}$ dans l'équation obtenue par la substitution de y, et, en annulant leurs coefficients, on aura des équations déterminant les constantes $c_{\lambda-m+n+1}$ et $c_{\lambda-m+n+2}$.

On arrive ainsi à former un nombre d'intégrales régulières à exposants entiers, égal au nombre des racines entières de l'équation déterminante $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\lambda$; ces intégrales sont distinctes, et nous avons vu (n° 15) qu'il ne peut pas y en avoir un plus grand nombre.

18. La méthode précédente permet de former les intégrales régulières; mais les termes de chacune des séries φ se déduisent des termes des séries déjà formées. On peut calculer séparément les termes de chacune des séries par la méthode suivante : on pose dans l'équation (1)

$$y = \varphi_1 + \varphi_2 \log(x-a) + \varphi_3 \log^2(x-a) + \ldots + \varphi_\nu \log^{\nu-1}(x-a),$$

φ étant des séries arbitraires, et ν un nombre égal ou inférieur au nombre des racines entières de l'équation déterminante. Si $F(y) = 0$ représente l'équation (1), on obtiendra, en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de $\log(x-a)$, les équations

$$F(\varphi_\nu) = 0, \quad F(\varphi_{\nu-1}) = f_1(\varphi_\nu), \quad F(\varphi_{\nu-2}) = f_2(\varphi_\nu, \varphi_{\nu-1}), \quad \ldots,$$
$$F(\varphi_1) = f_{\nu-1}(\varphi_\nu, \varphi_{\nu-1}, \ldots, \varphi_2),$$

f_1 étant une fonction linéaire de $\varphi_\nu, \varphi'_\nu, \varphi''_\nu, \ldots, \varphi_\nu^{m-1}$, f_2 est une fonction linéaire de $\varphi_\nu, \varphi'_\nu, \ldots, \varphi_\nu^{m-2}$ et $\varphi_{\nu-1}, \varphi'_{\nu-1}, \ldots, \varphi_{\nu-1}^{m-1}$; enfin, $f_{\nu-1}$ est une fonction linéaire de $\varphi_\nu, \varphi'_\nu, \ldots, \varphi_\nu^{m-\nu+1}, \ldots, \varphi_2^{m-1}$. Nous allons en déduire une

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

équation différentielle en φ_1 ; pour cela, on différentie la première équation $F(\varphi_\nu) = 0$ un nombre de fois égal à $(m-1)(\nu-1) = k$, la seconde $k+1$ fois, la troisième $k+2$ fois, et ainsi de suite, la dernière étant différentiée $k+\nu-1$ fois. On aura ainsi un nombre d'équations égal à

$$(k+1)+(k+2)+\ldots+(k+\nu) = k\nu + \frac{\nu(\nu+1)}{2},$$

entre lesquelles on éliminera

$$\varphi_\nu,\ \varphi'_\nu,\ \ldots,\ \varphi_\nu^{k+m},\ \varphi_{\nu-1},\ \varphi'_{\nu-1},\ \ldots,\ \varphi_{\nu-1}^{k+m+1},\ \ldots,\ \varphi_2^{k+m+\nu-2};$$

le nombre de ces quantités est

$$\begin{aligned}&(k+m+1)+(k+m+2)+\ldots+(k+m+\nu-1)\\ &= (\nu-1)(k+m)+\frac{\nu(\nu-1)}{2} = k\nu+\frac{\nu(\nu+1)}{2}-1.\end{aligned}$$

Cette élimination donnera une équation différentielle linéaire homogène d'ordre $m\nu$ en φ_1 ; cette équation aura ses coefficients rationnels et peut se ramener à la forme (1).

On peut remarquer que l'équation donnant φ_1 aura aussi comme intégrales les fonctions $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_\nu$.

On peut former de la même manière des équations différentielles d'ordre moindre donnant respectivement les fonctions $\varphi_{\nu-1}, \varphi_{\nu-2}, \ldots, \varphi_2$.

Pour déterminer les séries dans une intégrale de l'équation (1), on calculera les premiers termes des diverses séries φ par les méthodes des n^{os} 16 et 17, puis on prendra les équations ayant pour intégrales les fonctions successives φ et l'on pourra, à l'aide de ces équations, exprimer les termes de chaque série en fonction linéaire d'un nombre limité de termes précédents (n° 5).

Remarque. — Les intégrales régulières à exposants entiers que nous avons formées sont données par des séries; mais ces séries peuvent être divergentes. Pour connaître les intégrales de l'équation (1) de la forme considérée, il faudrait pouvoir reconnaître quelles sont parmi les séries trouvées celles qui sont convergentes; et, dans le cas où plusieurs séries sont divergentes, il faudrait chercher si l'on ne pourrait pas trouver une fonction linéaire des séries obtenues dans laquelle les séries seraient convergentes pour une valeur assez petite de $\mathrm{mod}(x-a)$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

Malheureusement la question n'a pas été résolue dans le cas général; nous examinerons plus loin quelques cas particuliers.

Par les méthodes que nous venons d'indiquer, on peut former toutes les intégrales régulières possibles de l'équation différentielle (1). On prend l'équation déterminante (14) et l'on groupe ensemble les racines dont les différences sont entières, à chaque groupe correspond une équation (13) qui permet de développer les intégrales du groupe. On trouvera ainsi un nombre d'intégrales régulières égal au degré de l'équation déterminante; mais parmi ces intégrales il peut y en avoir qui contiennent des séries divergentes pour toutes les valeurs de $\mathrm{mod}(x-a)$; et l'on ne doit considérer comme intégrales régulières que celles dont les séries sont convergentes.

19. Pour que l'équation différentielle (1) ait toutes ses intégrales régulières pour une valeur singulière $x=a$, il faudra que l'équation déterminante soit de degré m, et pour cela il faut $\alpha=0$ et $n=\pi_0$. Cette condition est suffisante, et si elle est remplie il y aura m intégrales régulières distinctes formées par des séries convergentes. Pour le démontrer, choisissons un groupe de racines de l'équation déterminante (14), et soit ρ la plus petite racine du groupe. En posant $y=(x-a)^\rho z$, on obtient l'équation (13) dont l'équation déterminante sera encore de degré m, admettra la racine 0 et n'aura aucune racine entière négative. Pour simplifier les calculs, représentons cette nouvelle équation, dont les coefficients auront été ramenés à la forme entière, par l'équation (1).

Dans l'équation (1) on aura alors

$$\pi_\mu+\mu\geq\pi_0,$$

quelle que soit la valeur de μ, et

$$\pi_m+m>\pi_0;$$

nous avons vu que l'on peut former des intégrales régulières à exposants entiers en nombre égal au nombre de racines entières de l'équation déterminante. Nous allons démontrer que, dans le cas particulier que nous examinons, toutes les séries que l'on obtiendra sont convergentes.

On formera d'abord les intégrales de la forme

$$v=\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}h_\nu(x-a)^\nu,$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

dont les coefficients h sont déterminés par les équations (5), dans lesquelles on pose

$$y_a^{(\nu)} = 1.2\ldots\nu\, h_\nu.$$

L'équation générale (5) devient alors, si l'on divise tous ses termes par $1.2\ldots(\mu+m)$,

$$h_{m+\mu-n}\frac{1}{(\mu+m)(\mu+m-1)\ldots(\mu+m-n+1)}$$
$$\times\left[\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2\ldots n}P_0^n+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+2)}{1.2\ldots(n-1)}P_1^{n-1}+\ldots+P_n\right]$$
$$+h_{m+\mu-n-1}\frac{1}{(\mu+m)\ldots(\mu+m-n)}\left[\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n)}{1.2\ldots(n+1)}P_0^{n+1}+\ldots+P_{n+1}\right]+\ldots=0,$$

où $x=a$. Si ρ est la plus grande racine entière de l'équation déterminante de l'équation (1), et si $\mu>\rho-m+n$, le coefficient de $h_{m+\mu-n}$ dans l'équation précédente ne peut pas être nul; et, si μ devient infini, ce coefficient a pour limite la valeur de $\frac{P_0^n}{1.2\ldots n}$ pour $x=a$, quantité qui n'est pas nulle, puisque $n=\pi_0$. Les coefficients des autres termes h ont pour $\mu=\infty$ des limites finies qui sont les valeurs de $\frac{P_0^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}$, $\frac{P_0^{n+2}}{1.2\ldots(n+2)}$, $\cdots$ pour $x=a$. Le terme $h_{m+\mu-n}$ est donc une fonction linéaire d'un nombre limité k de termes précédents, et les coefficients de cette fonction linéaire restent finis si μ est assez grand et ont pour $\mu=\infty$ des limites déterminées qui sont les valeurs de $\frac{-P_0^{n+1}}{(n+1)P_0^n}$, $\frac{-P_0^{n+2}}{(n+1)(n+2)P_0^n}$, $\cdots$, $\frac{-P_0^{n+k}}{(n+1)\ldots(n+k)P_0^n}$ pour $x=a$. Soient A_1, A_2, $\ldots$, A_k des nombres positifs supérieurs aux modules de ces coefficients pour toutes les valeurs de μ plus grandes qu'un nombre fixe donné. On aura, quel que soit μ,

$$\operatorname{mod}h_{m+\mu-n}<A_1\operatorname{mod}h_{m+\mu-n-1}+A_2\operatorname{mod}h_{m+\mu-n-2}+\ldots+A_k\operatorname{mod}h_{m+\mu-n-k}.$$

Si l'on pose

$$\operatorname{mod}(x-a)=R,$$

on pourra écrire

$$\operatorname{mod}h_{m+\mu-n}(x-a)^{m+\mu-n}<A_1R\operatorname{mod}h_{m+\mu-n-1}(x-a)^{m+\mu-n-1}+\ldots$$
$$+A_kR^k\operatorname{mod}h_{m+\mu-n-k}(x-a)^{m+\mu-n-k}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

Déterminons R de façon que

$$A_1 R + A_2 R^2 + \ldots + A_k R^k$$

soit inférieur à un nombre donné A plus petit que 1.

Il suffit pour cela que R soit inférieur à la seule racine positive de l'équation

$$A_1 R + A_2 R^2 + \ldots + A_k R^k - A = 0,$$

et soit M le plus grand module des quantités $h_{m+\mu-n-1}(x-a)^{m+\mu-n-1}$, $h_{m+\mu-n-2}(x-a)^{m+\mu-n-2}$, ..., $h_{m+\mu-n-k}(x-a)^{m+\mu-n-k}$.

On aura

$$\begin{aligned}
&\operatorname{mod} h_{m+\mu-n}(x-a)^{m+\mu-n} < (A_1 R + A_2 R^2 + \ldots + A_k R^k) M < AM < M,\\
&\operatorname{mod} h_{m+\mu-n+1}(x-a)^{m+\mu-n+1} < (A_1 R + A_2 R^2 + \ldots + A_k R^k) M < AM,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\operatorname{mod} h_{m+\mu-n+k-1}(x-a)^{m+\mu-n+k-1} < AM.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\operatorname{mod} h_{m+\mu-n+k}(x-a)^{m+\mu-n+k} &< A_1 R \operatorname{mod} h_{m+\mu-n+k-1}(x-a)^{m+\mu-n+k-1} + \ldots\\
&+ A_k R^k \operatorname{mod} h_{m+\mu-n}(x-a)^{m+\mu-n} < (A_1 R + \ldots + A_k R^k) AM < A^2 M
\end{aligned}$$

jusqu'à

$$\operatorname{mod} h_{m+\mu-n+2k-1}(x-a)^{m+\mu-n+2k-1} < A^2 M.$$

Dans la série

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} h_\nu (x-a)^\nu,$$

les k termes suivants seront plus petits que $A^3 M$, et ainsi de suite; on aura donc

$$\sum_{\nu=m+\mu-n}^{\nu=\infty} h_\nu (x-a)^\nu < kAM(1 + A + A^2 + A^3 + \ldots) < \frac{kAM}{1-A}.$$

Donc, si $\operatorname{mod}(x-a)$ est assez petit, la série sera convergente.

Pour avoir les intégrales contenant $\log(x-a)$, on formera une équation de forme (15) dans laquelle le second membre sera une série convergente de la forme

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} H_\nu (x-a)^\nu.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

Soit R_1 le rayon du cercle de convergence de cette série.

De cette équation (15) on déduira des équations de forme (5) contenant des seconds membres de la forme $1.2\ldots\mu H_\mu$. On aura à déterminer une série de la forme

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} h_\nu (x-a)^\nu,$$

et chaque coefficient $h_{m+\mu-n}$ sera une fonction linéaire des k coefficients précédents et de H_μ. On en déduit l'inégalité

$$\operatorname{mod} h_{m+\mu-n} < A_1 \operatorname{mod} h_{m+\mu-n-1} + \ldots + A_k \operatorname{mod} h_{m+\mu-n-k} + \frac{A_{k+1} H_\mu}{(\mu+1)\ldots(\mu+m)},$$

$A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$ étant des nombres positifs déterminés.

Le dernier terme peut s'écrire $\frac{B}{R_1^\mu}$, B étant une quantité qui tend vers o si μ devient infini; nous pourrons donc supposer que B conserve une valeur donnée positive.

Si $\operatorname{mod}(x-a) = R$ et si M est supérieur aux modules de $R^{m+\mu-n-1} h_{m+\mu-n-1}$, $R^{m+\mu-n-2} h_{m+\mu-n-2}$, ..., $R^{m+\mu-n-k} h_{m+\mu-n-k}$, μ étant ici un nombre fixe, on aura

$$\operatorname{mod} h_{m+\mu-n} (x-a)^{m+\mu-n} < (A_1 R + A_2 R^2 + \ldots + A_k R^k) M + B \left(\frac{R}{R_1}\right)^\mu R^{m-n}.$$

Choisissons R assez petit pour que

$$A_1 R + A_2 R^2 + \ldots + A_k R^k + \frac{B}{M} \left(\frac{R}{R_1}\right)^\mu R^{m-n}$$

soit plus petit qu'un nombre positif A inférieur à 1. On aura

$$\operatorname{mod} h_{m+\mu-n} (x-a)^{m+\mu-n} < AM < M,$$

et, si R est plus petit que R_1, on en déduit

$$\operatorname{mod} h_{m+\mu-n+1} (x-a)^{m+\mu-n+1} < (A_1 R + \ldots + A_k R^k) M + B \left(\frac{R}{R_1}\right)^{\mu+1} R^{m-n} < AM,$$

jusqu'à

$$\operatorname{mod} h_{m+\mu-n+k-1} (x-a)^{m+\mu-n+k-1} < AM.$$

Puis

$$\operatorname{mod} h_{m+\mu-n+k} < (A_1 R + \ldots + A_k R^k) AM + B \left(\frac{R}{R_1}\right)^{\mu+k} R^{m-n}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

On peut supposer $\left(\frac{R}{R_1}\right)^k < A$, on aura alors

$$\mod h_{m+\mu-n+k} < \left(A_1 R + \ldots + A_k R^k + \frac{B}{M}\frac{R^{\mu+m-n}}{R_1^{\mu}}\right) AM < A^2 M.$$

En continuant le même raisonnement, on voit que, si R est assez petit, la série

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} h_\nu (x-a)^\nu$$

est convergente.

Le même raisonnement s'applique à toutes les séries que l'on formera successivement, et il en résulte que, si l'équation (1) a une équation déterminante de degré m pour la valeur $x = a$, toutes ses intégrales sont régulières.

20. Supposons que l'équation déterminante soit de degré m et que toutes ses racines soient entières positives ; il peut arriver que les intégrales ne contiennent pas $\log(x-a)$ et soient toutes de la forme

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} h_\nu (x-a)^\nu;$$

dans ce cas, les intégrales n'auraient plus la forme singulière, et l'on dit que $x = a$ est une valeur d'apparence singulière.

Si l'équation déterminante a une racine multiple, nous avons vu (n° 16) que l'on pourra toujours trouver une intégrale contenant $\log(x-a)$. Donc, pour que la valeur $x = a$ soit d'apparence singulière, il faut d'abord que l'équation déterminante de degré m ait toutes ses racines entières, positives et différentes. Cette équation déterminante sera

$$P_0 (x-a)^{-n} \rho(\rho-1)\ldots(\rho-m+1)$$
$$+ P_1 (x-a)^{-n+1} \rho(\rho-1)\ldots(\rho-m+2) + \ldots + P_n \rho(\rho-1)\ldots(\rho-m+n+1) = 0,$$

où $x = a$ et $n = \pi_0$.

Elle admet les racines 0, 1, 2, ..., $m-n-1$. Il faudra que les autres racines $r_1, r_2, \ldots, r_n$ soient entières positives et distinctes. De plus, il faut que, dans les équations (5), il reste m constantes arbitraires, qui seront y_a, y'_a, y''_a, ..., y_a^{m-n-1}, $y_a^{r_1}$, ..., $y_a^{r_n}$, ; il y a alors n des équations (5) qui sont

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

des conséquences des autres. Si $y_a, y'_a, \ldots, y_a^{m-n-1}$ sont arbitraires, on pourra en déduire successivement $y_a^{m-n}, y_a^{m-n+1}, \ldots, y_a^{r_1-1}$; on aura ensuite une équation entre les $m-n$ constantes arbitraires qui ne pourra être vérifiée que s'il existe $m-n$ relations entre les coefficients, la valeur de $y_a^{r_1}$ sera alors arbitraire ; on pourra calculer $y_a^{r_1+1}$ jusqu'à $y_a^{r_2-1}$, puis on aura une relation linéaire entre les constantes qui exigera $m-n+1$ conditions pour être identiquement vérifiée; en continuant, on trouvera entre les coefficients P de l'équation (1) un nombre de relations

$$(m-n)+(m-n+1)+\ldots+(m-1)=\frac{(2m-n-1)n}{2}.$$

On peut obtenir facilement ces équations de condition sous forme de déterminants égalés à zéro.

Remarque. — Les intégrales pour une valeur d'apparence singulière ont la même forme que pour une valeur non singulière de x; elles s'en distinguent cependant par le caractère suivant :

Si $x=a$ est une valeur non singulière, toutes les intégrales contiennent des puissances de $x-a$ d'ordre inférieur à m, tandis que si cette valeur est d'apparence singulière, il existe au moins une intégrale appartenant à un exposant supérieur à $m-1$, de la forme

$$\sum_{\nu=m}^{\nu=\infty} h_\nu (x-a)^\nu.$$

En effet, pour que toutes les intégrales appartiennent à des exposants inférieurs à m, il faudrait que l'équation déterminante admette les racines $0, 1, 2, \ldots, m-1$, et pour cela que $\pi_\mu+\mu>\pi_0$, quel que soit μ; et en particulier $\pi_n+n>n$ ou π_0, d'où $\pi_n>0$.

Si l'on pose $x=a$ dans l'équation (1), on aura alors une équation linéaire entre $y_a, y'_a, y''_a, \ldots, y_a^{m-n-1}$, et ces quantités ne peuvent pas avoir des valeurs arbitraires; par suite, dans l'intégrale

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} h_\nu (x-a)^\nu;$$

il ne peut pas y avoir m coefficients arbitraires, et il y aura des intégrales contenant $\log(x-a)$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

21. Examinons en particulier la valeur singulière $x = \infty$; nous appellerons *intégrale régulière*, pour cette valeur, une intégrale de la forme

$$y = \left(\frac{1}{x-a}\right)^r [\varphi_1 + \varphi_2 \log(x-a) + \varphi_3 \log^2(x-a) + \ldots + \varphi_\nu \log^{\nu-1}(x-a)],$$

les fonctions φ étant des séries qui ne contiennent que des puissances négatives de $x - a$. Pour former ces intégrales, on posera dans l'équation (1)

$$x = a + \frac{1}{t};$$

on obtient l'équation (10) du n° 10, et l'on cherchera ses intégrales régulières pour la valeur singullère $t = 0$. On formera l'équation déterminante en posant dans (10) $y = t^\rho$, puis $t = 0$, après avoir multiplié tous les termes par une puissance de t, α telle que le premier membre ne soit ni nul ni infini pour $t = 0$. Mais on arrive au même résultat en posant dans l'équation (1)

$$y = (x-a)^{-\rho},$$

ce qui donne l'équation

$$\begin{aligned}&(-1)^m P_0 \rho(\rho+1)\ldots(\rho+m-1)(x-a)^{-\rho-m}\\ &\quad + (-1)^{m-1} P_1 \rho(\rho+1)\ldots(\rho+m-2)(x-a)^{-\rho-m+1} + \ldots + P_m (x-a)^{-\rho} = 0,\end{aligned}$$

puis on multiplie par une puissance convenable de $x - a$; on pose

$$x - a = \frac{1}{t} \quad \text{et} \quad t = 0,$$

ce qui revient à égaler à zéro le coefficient du terme de degré le plus élevé en $x - a$.

Soient $\pi'_0, \pi'_1, \ldots, \pi'_m$ les degrés des polynômes $P_0, P_1, \ldots, P_m$ par rapport à x. Formons les nombres $\pi'_0, \pi'_1 + 1, \ldots, \pi'_m + m$, et soit $\pi'_\alpha + \alpha = n$, le plus grand et le premier des plus grands s'il y en a plusieurs égaux. L'équation précédente sera du degré $n - m - \rho$ en x, α est l'indice caractéristique de la valeur $x = \infty$, et l'équation déterminante sera

$$\begin{aligned}&(-1)^\alpha P_\alpha (x-a)^{\alpha-n} \rho(\rho+1)\ldots(\rho+m-\alpha-1)\\ &\quad + (-1)^{\alpha+1} P_{\alpha+1}(x-a)^{\alpha+1-n}\rho(\rho+1)\ldots(\rho+m-\alpha) + \ldots + (-1)^m P_m (x-a)^{m-n} = 0\end{aligned}$$

pour $x = \infty$.

Cette équation est indépendante de la valeur a.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

Pour que les intégrales soient toutes régulières pour la valeur $x = \infty$, il faut et il suffit que l'équation déterminante soit du degré m; pour cela, il faut $\alpha = 0$, d'où $\pi'_\mu + \mu \leq \pi'_0$ pour toutes les valeurs de μ.

La valeur $x = \infty$ peut n'être pas singulière, si la valeur $t = 0$ n'est pas singulière pour l'équation (10); pour cela, il faut que le premier membre de l'équation (10) ordonné par rapport aux dérivées de y et multiplié par $t^{-2m+\pi'_0}$ ne contienne pas de puissances négatives de t.

Il faut donc

$$\pi'_1 + 1 = \pi'_0, \quad \pi'_2 + 2 = \pi'_0, \quad \ldots, \quad \pi'_{m-1} + m - 1 = \pi'_0$$

et

$$\pi'_m \leq \pi'_0 - 2m;$$

le coefficient de $\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ aura alors deux termes en $\frac{1}{t}$, celui de $\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}$ contiendra $\frac{1}{t}$ et $\frac{1}{t^2}$, $\ldots$, et le coefficient de $\frac{dy}{dx}$ contiendra $\frac{1}{t^{m-1}}$, et il devra exister entre les coefficients des polynômes P des relations telles que toutes ces puissances négatives de t disparaissent. Le nombre de ces relations sera $\frac{m(m-1)}{2}$.

Remarque. — On peut obtenir les relations qui doivent exister entre les termes de degré le plus élevé en x dans les fonctions P en exprimant que l'équation déterminante admet les racines $0, 1, 2, \ldots, m-1$. Cette équation déterminante s'obtient en posant $x = \infty$ dans l'équation

$$\begin{aligned} &P_0 (x-a)^{-n} \rho(\rho+1)\ldots(\rho+m-1) \\ &\quad - P_1 (x-a)^{-n+1} \rho(\rho+1)\ldots(\rho+m-2) + \ldots + (-1)^{m-1} P_{m-1} (x-a)^{m-1-n} \rho = 0, \end{aligned}$$

et elle doit être ici de la forme

$$\rho(\rho-1)\ldots(\rho-m+1) = 0,$$

que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} &\rho(\rho+1)\ldots(\rho+m-1) - m(m-1)\rho(\rho+1)\ldots(\rho+m-2) \\ &\quad + \frac{m(m-1)^2(m-2)}{1.2}\rho(\rho+1)\ldots(\rho+m-3) + \ldots \\ &\quad + (-1)^\mu \frac{m(m-1)^2(m-2)^2\ldots(m-\mu+1)^2(m-\mu)}{1.2\ldots\mu}\rho(\rho+1)\ldots(\rho+m-\mu-1) + \ldots \\ &\qquad + (-1)^{m-1} m(m-1)\ldots 3.2.\rho = 0. \end{aligned}$$

On peut former facilement des équations pour lesquelles la valeur $x = \infty$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

ne sera pas singulière, en posant, dans une équation différentielle arbitraire,

$$x - a = \frac{1}{z},$$

$x = a$ étant une valeur non singulière pour la première équation.

La valeur $x = \infty$ peut être également d'apparence singulière; pour cela, il faut que l'équation déterminante ait m racines entières positives et différentes; il doit, en outre, exister certaines relations entre les coefficients de l'équation différentielle.

Si $x = \infty$ est une valeur non singulière, toutes les intégrales pourront se mettre sous la forme

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} h_\nu \frac{1}{(x-a)^\nu},$$

les m premiers coefficients $h_0, h_1, \ldots, h_{m-1}$ n'étant jamais tous nuls.

Si la valeur $x = \infty$ est d'apparence singulière, les intégrales ont la même forme; mais il y en a au moins une dans laquelle le premier terme a un indice ν supérieur à $m - 1$.

22. Nous allons chercher quelle forme doit avoir l'équation (1) pour que ses intégrales soient toutes régulières pour toutes les valeurs singulières de x (y compris $x = \infty$). Soient $a_1, a_2, \ldots, a_\lambda$ les valeurs singulières et soit

$$P_0 = (x - a_1)^{\nu_1}(x - a_2)^{\nu_2}\ldots(x - a_\lambda)^{\nu_\lambda}.$$

Pour que toutes les intégrales soient régulières pour la valeur $x = a_1$, il faut que $P_\mu(x - a_1)^{\mu-\nu_1}$ reste fini pour $x = a_1$, quel que soit μ; par suite, le polynôme P_μ sera divisible par

$$(x - a_1)^{\nu_1-\mu}(x - a_2)^{\nu_2-\mu}\ldots(x - a_\lambda)^{\nu_\lambda-\mu},$$

et, pour que les intégrales soient toutes régulières pour $x = \infty$, il faut que le degré de P_μ soit inférieur ou égal à $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\lambda - \mu$.

Si l'on pose

$$(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_\lambda) = \varphi(x),$$

l'équation (1), qui a toutes ses intégrales régulières pour toutes ses valeurs

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

singulières, pourra se mettre sous la forme

$$(16)\quad \frac{d^m y}{dx^m} + \frac{q_1}{\varphi(x)}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{q_2}{[\varphi(x)]^2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \ldots + \frac{q_{m-1}}{[\varphi(x)]^{m-1}}\frac{dy}{dx} + \frac{q_m}{\varphi(x)^m}y = 0,$$

q_1 étant un polynôme en x du degré $\lambda - 1$, et en général q_μ étant un polynôme du degré $\mu(\lambda - 1)$.

Nous avons vu (n° 12) que, si l'on a pour chaque valeur singulière m intégrales distinctes sous la forme (9), la somme des exposants r est un nombre entier. Si l'équation donnée a la forme (16), on peut choisir les intégrales régulières de façon que les exposants r soient les racines des équations déterminantes. Il en résulte que la somme des racines des équations déterminantes de l'équation (16) relatives à toutes les valeurs singulières est un nombre entier. Nous allons vérifier cette proposition en cherchant la valeur de cette somme.

q_1 étant un polynôme de degré inférieur à λ, on pourra écrire

$$\frac{q_1}{\varphi(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{A_\lambda}{x - a_\lambda}.$$

L'équation déterminante de l'équation (16) pour la valeur $x = a_1$ est

$$\rho(\rho - 1)\ldots(\rho - m + 1) + A_1\rho(\rho - 1)\ldots(\rho - m + 2) + \frac{q_2}{[\varphi(x)]^2}(x - a_1)^2\rho(\rho - 1)\ldots(\rho - m + 3) + \ldots = 0,$$

où $x = a_1$. La somme de ses racines est égale à

$$\frac{m(m-1)}{2} - A_1,$$

et la somme des racines des équations déterminantes pour les valeurs singulières $a_1, a_2, \ldots, a_\lambda$ sera

$$\lambda\frac{m(m-1)}{2} - (A_1 + A_2 + \ldots + A_\lambda).$$

L'équation déterminante pour $x = \infty$ est

$$\rho(\rho + 1)\ldots(\rho + m - 1) - \left[\frac{q_1}{\varphi(x)}x\right]_{x=\infty}\rho(\rho + 1)\ldots(\rho + m - 2) + \ldots = 0,$$

la somme de ses racines est

$$-\frac{m(m-1)}{2} + \left[\frac{q_1}{\varphi(x)}x\right]_{x=\infty} = -\frac{m(m-1)}{2} + A_1 + A_2 + \ldots + A_\lambda.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

La somme des racines des équations déterminantes de toutes les valeurs singulières, y compris $x = \infty$, est donc égale à

$$(\lambda - 1)\frac{m(m-1)}{2}.$$

23. Nous avons vu (n° 18) qu'une équation différentielle linéaire peut avoir un nombre d'intégrales régulières égal au degré de son équation déterminante; mais ces intégrales sont formées par des séries qui ne sont pas toujours convergentes. Nous allons montrer comment on peut obtenir des équations pour lesquelles toutes ces séries seront convergentes; et, pour cela, examinons d'abord quelques propriétés des expressions composées.

Soient $F(y) = 0$ et $f(y) = 0$ deux équations différentielles de forme (1) d'ordres m et m'. Si, dans l'équation $F(z) = 0$, on pose $z = f(y)$, on obtiendra une équation différentielle linéaire d'ordre $m + m'$, que l'on nomme *équation composée*.

Pour qu'une intégrale régulière y vérifie cette équation composée, il faut ou que $f(y) = 0$, ou que $f(y)$ soit une intégrale de l'équation $F(z) = 0$. Si $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ sont des intégrales régulières de l'équation composée, distinctes de celles qui annulent $f(y)$, il en résulte que $f(y_1), f(y_2), \ldots, f(y_\nu)$ seront des intégrales régulières de $F(z) = 0$ linéairement indépendantes, puisque $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_\nu y_\nu$ ne peut pas annuler $f(y)$.

Donc le nombre des intégrales régulières de l'équation composée est égal au moins au nombre des intégrales régulières distinctes de l'équation $f(y) = 0$, et au plus au nombre total des intégrales régulières des deux équations composantes.

Théorème. — *L'équation composée a une équation déterminante dont le degré est la somme des degrés des équations déterminantes des deux équations composantes, pour une même valeur singulière* $x = a$.

En effet, posons

$$F[(x-a)^\rho] = A(\rho)(x-a)^{\rho-m+n} + A_1(x-a)^{\rho-m+n+1} + \ldots,$$
$$f[(x-a)^\rho] = B(\rho)(x-a)^{\rho-m'+n'} + B_1(x-a)^{\rho-m'+n'+1} + \ldots.$$

Les équations déterminantes des deux équations composantes seront

$$A(\rho) = 0 \quad \text{et} \quad B(\rho) = 0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

Pour avoir l'équation déterminante de l'équation composée, on pose

$$y = (x-a)^\rho,$$

d'où

$$z = f[(x-a)^\rho] = B(\rho)\,(x-a)^{\rho-m'+n'} + B_1(x-a)^{\rho-m'+n'+1} + \ldots;$$

il faut porter cette valeur dans $F(z) = 0$ et annuler le premier terme en $x-a$. On aura

$$\begin{aligned} F(z) &= B(\rho)F[(x-a)^{\rho-m'+n'}] + B_1 F[(x-a)^{\rho-m'+n'+1}] + \ldots \\ &= B(\rho)A(\rho - m' + n')\,(x-a)^{\rho-m'+n'-m+n} + \ldots, \end{aligned}$$

et l'équation déterminante est

$$B(\rho)A(\rho - m' + n') = 0;$$

son degré est la somme des degrés des deux équations

$$A(\rho) = 0, \quad B(\rho) = 0.$$

Si $F(y) = 0$ a une équation déterminante de degré zéro, cette équation ne peut pas avoir d'intégrales régulières; supposons, en outre, que $f(y) = 0$ ait toutes ses intégrales régulières pour $x = a$; on voit que l'équation composée aura une équation déterminante de degré m' et admettra m' intégrales régulières distinctes, qui sont celles de $f(y) = 0$. Les séries que l'on obtiendra en cherchant les intégrales régulières seront alors toutes convergentes.

24. Nous allons examiner une classe d'équations différentielles n'ayant aucune intégrale régulière pour $x = a$, bien qu'il y ait une équation déterminante.

THÉORÈME. — *Si l'équation différentielle* (1) *n'a qu'une valeur singulière finie* $x = a$, *et si les intégrales pour* $x = \infty$ *sont toutes régulières, il n'y aura aucune intégrale régulière pour la valeur a, sauf dans le cas particulier où ces intégrales sont des polynômes en x.*

En effet, les intégrales pourront se mettre sous la forme

$$\left(\frac{1}{x-a}\right)^r [\varphi_0 + \varphi_1 \log(x-a) + \ldots + \varphi_\nu \log^{\nu-1}(x-a)],$$

φ étant des séries qui ne contiennent que des puissances négatives de $x-a$, et, comme il n'y a pas d'autres valeurs singulières que $x = a$ et

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

$x = \infty$, ces séries seront convergentes pour toute valeur de x, et seront encore admissibles lorsque $x - a$ est très petit. Aucune de ces intégrales n'est régulière pour $x = a$, et il ne peut pas y avoir d'intégrale régulière. Il n'y a d'exception que si dans l'une des intégrales les séries φ n'ont qu'un nombre limité de termes.

Nous allons vérifier que les séries qui entrent dans les intégrales régulières pour $x = a$ sont divergentes. Pour cela, posons dans l'équation donnée

$$y = (x - a)^{\rho} z,$$

ρ étant une racine de l'équation déterminante; on obtiendra une équation en z de même forme, dont il faudra chercher les intégrales de la forme

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} h_\nu (x - a)^\nu.$$

Soit (1) cette nouvelle équation.

Nous supposons donc que $P_0 = (x - a)^\pi$, le polynôme P_μ étant d'un degré égal ou inférieur à $\pi - \mu$. Et $\pi > n$, $\pi_m + m > n$, π_m et n étant les nombres définis au n° 5 pour la valeur $x = a$, de façon que l'équation déterminante de $x = a$ soit d'un degré inférieur à m et admette la racine $\rho = 0$. Pour obtenir les séries

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} h_\nu (x - a)^\nu,$$

qui vérifient l'équation (1), on formera la suite des équations (5), en remarquant que pour $x = a$ on a

$$P_0 = P_0' = P_0'' = \ldots = P_0^{n-1} = 0$$

et

$$P_0^\pi = 1.2.3\ldots\pi, \quad P_1^\pi = P_2^{\pi-1} = \ldots = P_{m-1}^{\pi-m+1} = P_m^{\pi-m} = 0$$

identiquement. L'équation (5) se réduit donc à

$$y_a^{m+\mu-n}\left[\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+2)}{1.2\ldots(n-1)} P_1^{n-1} + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+3)}{1.2\ldots(n-2)} P_2^{n-2} + \ldots\right]$$
$$+ y_a^{m+\mu-n-1}\left[\frac{\mu\ldots(\mu-n+1)}{1.2\ldots n} P_1^n + \ldots\right] + \ldots$$
$$+ y_a^{m+\mu-\pi}\left[\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\pi+1)}{1.2.3\ldots\pi} P_0^\pi + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\pi+2)}{1.2\ldots(\pi-1)} P_1^{\pi-1} + \ldots\right] = 0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

Posons

$$y_a^{\mu} = 1.2\ldots\mu h_{\mu},$$

on aura

$$h_{m+\mu-n}(x-a)^{m+\mu-n}\left[\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+2)}{1.2\ldots(n-1)}P_1^{n-1} + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+3)}{1.2\ldots(n-2)}P_2^{n-2}+\ldots\right]\frac{(x-a)^n}{(\mu+m-n+1)\ldots(\mu+m)}$$
$$+ h_{m+\mu-n-1}(x-a)^{m+\mu-n-1}\left[\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2\ldots n}P_1^{n}+\ldots\right]\frac{(x-a)^{n+1}}{(\mu+m-n)\ldots(\mu+m)}+\ldots$$
$$+ h_{m+\mu-\pi}(x-a)^{m+\mu-\pi}\left[\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\pi+1)}{1.2\ldots\pi}P_0^{\pi}+\ldots\right]\frac{(x-a)^{\pi}}{(\mu+m-\pi+1)\ldots(\mu+m)}=0.$$

Cette équation détermine chaque terme de la série

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} h_\nu(x-a)^\nu$$

en fonction des précédents; si, x ayant une valeur fixe, μ augmente indéfiniment, les coefficients des divers termes tendent vers zéro, sauf celui de $h_{m+\mu-\pi}(x-a)^{m+\mu-\pi}$, qui a pour limite $(x-a)^{\pi}$. On aura donc une relation de la forme

$$h_{m+\mu-\pi}(x-a)^{m+\mu-\pi} = A_1 h_{m+\mu-\pi+1}(x-a)^{m+\mu-\pi+1} + A_2 h_{m+\mu-\pi+2}(x-a)^{m+\mu-\pi+2}+\ldots+A_{\pi-n}h_{m+\mu-n}(x-a)^{m+\mu-n},$$

les quantités A tendant vers zéro quand μ devient infini. On peut donc prendre μ assez grand pour que les modules de $A_1, A_2, \ldots, A_{\pi-n}$ soient tous inférieurs à un nombre donné A plus petit que $\frac{1}{\pi-n}$; on aura alors

$$\operatorname{mod} h_{m+\mu-\pi}(x-a)^{m+\mu-\pi} < A\,[\operatorname{mod} h_{m+\mu-\pi+1}(x-a)^{m+\mu-\pi+1}+\ldots+\operatorname{mod} h_{m+\mu-n}(x-a)^{m+\mu-n}],$$

et mod $h_{m+\mu-\pi}(x-a)^{m+\mu-n}$ sera inférieur au module de l'un au moins des $\pi-n$ termes qui le suivent dans la série

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} h_\nu(x-a)^\nu.$$

Le terme général de cette série ne peut donc pas tendre vers zéro, et la série est divergente pour toute valeur de x.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

Il n'y a exception que si, à partir d'un certain rang, toutes les dérivées de y pour $x = a$ sont nulles; on aura alors une intégrale de la forme

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\lambda} h_\nu (x-a)^\nu.$$

Ainsi une équation différentielle linéaire qui n'a qu'une valeur singulière finie $x = a$ et qui a toutes ses intégrales régulières pour $x = \infty$ ne peut avoir pour $x = a$ aucune intégrale régulière, sauf s'il existe une intégrale de la forme

$$(x-a)^\rho \sum_{\nu=0}^{\nu=\lambda} h_\nu (x-a)^\nu,$$

que l'on peut écrire

$$\left(\frac{1}{x-a}\right)^{-\rho-\lambda} \sum_{\nu=0}^{\nu=\lambda} \frac{h_\nu}{(x-a)^{\lambda-\nu}}.$$

Mais pour cela il faut que les équations déterminantes pour $x = a$ et $x = \infty$ aient deux racines ρ et $-\rho-\lambda$ dont la somme soit un nombre entier négatif $-\lambda$. Si cette condition est remplie, il devra, en outre, exister des équations de condition entre les coefficients de l'équation différentielle : on peut obtenir ces équations en posant

$$y = (x-a)^\rho z,$$

puis

$$z_a^{\lambda+1} = z_a^{\lambda+2} = \ldots = 0;$$

on aura pour déterminer z_a, z_a', ..., z_a^λ un nombre d'équations supérieur au nombre des inconnues.

Remarque I. — Si l'équation déterminante pour $x = a$ est de degré m, les intégrales seront toutes régulières et, par suite, ne contiendront qu'un nombre limité de puissances de $x - a$. L'équation différentielle est alors de la forme

$$(x-a)^m \frac{d^m y}{dx^m} + c_1 (x-a)^{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + c_{m-1}(x-a)\frac{dy}{dx} + c_m y = 0.$$

Remarque II. — Le théorème précédent s'applique également aux équations qui, outre les deux valeurs singulières a et ∞, auraient d'autres valeurs d'apparence singulière.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

Connaissant une équation $F(y) = 0$ qui, pour la valeur singulière $x = a$, a un nombre d'intégrales régulières distinctes inférieur au degré de l'équation déterminante, on peut en former d'autres en posant

$$z = F(y)$$

dans une équation différentielle linéaire arbitraire $f(y) = 0$; car, si m et m' sont les degrés des équations déterminantes des deux équations composantes, l'équation composée aura un nombre d'intégrales régulières distinctes au plus égal au nombre total des intégrales régulières des deux équations composantes et, par suite, inférieur à $m + m'$, tandis que l'équation déterminante est du degré $m + m'$.

On peut encore généraliser les résultats précédents de la façon suivante. Si l'équation différentielle (1) n'a que deux valeurs singulières $x = a$ et $x = \infty$ autres que celles d'apparence singulière, les intégrales régulières pour l'une de ces valeurs, développées suivant les puissances de $x - a$, s'appliquent, quelle que soit la valeur de x, et sont distinctes. Par suite, s'il n'y a pas d'intégrales contenant un nombre limité de termes, le nombre total des intégrales régulières pour les deux valeurs singulières sera au plus égal à m. Et, en général, si l'on trouve ν intégrales limitées, et si la somme des degrés des deux équations déterminantes pour $x = a$ et $x = \infty$ est supérieure à $m + \nu$, on pourra affirmer que, parmi les intégrales régulières que l'on peut former, il y en a dans lesquelles les séries sont divergentes.

Si parmi ces intégrales il y en a m formées par des séries convergentes, dont α sont de la forme

$$(x-a)^r \left[\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} h_\nu (x-a)^\nu + \log(x-a) \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} h'_\nu (x-a)^\nu + \dots \right],$$

les exposants $r_1, r_2, \dots, r_\alpha$ étant racines de l'équation déterminante pour $x = a$, les $m - \alpha$ autres correspondant aux racines $r'_1, r'_2, \dots, r'_{m-\alpha}$ de l'équation déterminante pour $x = \infty$, on en déduira l'intégrale générale pour $x = a$, puisqu'on connaît m intégrales de forme (9) qui auront les exposants $r_1, r_2, \dots, r_\alpha, -r'_1, -r'_2, \dots, -r'_{m-\alpha}$.

Les intégrales pour $x = \infty$ sont alors les mêmes, et, si on les développe suivant les puissances de $(x - a)^{-1}$, leurs exposants seront $-r_1, -r_2, \dots, -r_\alpha, r'_1, r'_2, \dots, r'_{m-\alpha}$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

Si l'équation (1) n'a que deux valeurs singulières $x = a$ et $x = b$, autres que les valeurs d'apparence singulière, la valeur $x = \infty$ étant non singulière ou d'apparence singulière, les résultats précédents s'appliquent aux deux valeurs a et b. En effet, si l'on pose $x - a = \frac{1}{t}$, on aura une équation n'ayant que les valeurs singulières $t = \infty$ et $t = \frac{1}{b-a}$, et les intégrales régulières de ces deux équations pour les valeurs correspondantes de x et t se correspondent.

IV.

25. M. Thomé a appelé *intégrales normales de l'équation différentielle* (1) les intégrales de la forme

$$e^{v} u,$$

où

$$v = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} h_\nu (x-a)^{-\nu},$$

la fonction u ayant la forme des intégrales régulières; e^{v} se nomme le facteur déterminant de cette intégrale. La fonction $e^{v}u$ sera également de forme normale si v est développable en série ne contenant qu'un nombre limité de puissances négatives de $x - a$. Une équation du premier ordre a toujours son intégrale normale pour toutes les valeurs singulières de x.

Pour chercher les intégrales normales que peut avoir l'équation (1) pour $x = a$, posons

$$y = e^{v} z,$$

et déterminons v de façon que l'équation en z ait des intégrales régulières.

Posons

$$\frac{d^\mu e^{v}}{dx^\mu} = e^{v} t_\mu,$$

on aura, en représentant par v' la dérivée de v,

$$t_0 = 1, \quad t_1 = v', \quad t_2 = t_1' + v' t_1, \quad \ldots, \quad t_\mu = t_{\mu-1}' + v' t_{\mu-1}$$

et

$$\frac{d^\mu e^{v} z}{dx^\mu} = e^{v}\left[z t_\mu + \mu \frac{dz}{dx} t_{\mu-1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} \frac{d^2 z}{dx^2} t_{\mu-2} + \ldots + \frac{d^\mu z}{dx^\mu} t_0 \right];$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

l'équation (1) deviendra, après la substitution,

$$(17)\quad \begin{array}{l} P_0\dfrac{d^m z}{dx^m} + P_0 m t_1 \\ \qquad + P_1 \end{array} \left| \begin{array}{l} \dfrac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + P_0\dfrac{m(m-1)}{2}t_2 \\ \qquad + P_1(m-1)t_1 \\ \qquad + P_2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \dfrac{d^{m-2}z}{dx^{m-2}} + \ldots + P_0 m t_{m-1} \\ \qquad + P_1(m-1)t_{m-2} \\ \qquad + P_2(m-2)t_{m-3} \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad + P_{m-1} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \dfrac{dz}{dx} + P_0 t_m \\ \qquad + P_1 t_{m-1} \\ \qquad + P_2 t_{m-2} \\ \qquad \ldots\ldots\ldots \\ \qquad + P_m \end{array} \right| z = 0.$$

Posons

$$v' = \frac{h_2}{(x-a)^2} + \frac{h_3}{(x-a)^3} + \ldots + \frac{h_\lambda}{(x-a)^\lambda},$$

d'où

$$v = -\sum_{\nu=2}^{\nu=\lambda} \frac{h_\nu}{(\nu-1)(x-a)^{\nu-1}}.$$

Le terme de degré moindre en $x-a$ dans t_1 est $\dfrac{h_\lambda}{(x-a)^\lambda}$; dans t_2, on aura $\left[\dfrac{h_\lambda}{(x-a)^\lambda}\right]^2$, et, en général, dans t_μ le terme de degré moindre sera $\left[\dfrac{h_\lambda}{(x-a)^\lambda}\right]^\mu$. Dans l'équation (17), le coefficient de z ordonné par rapport aux puissances croissantes de $x-a$ aura un premier terme dont le degré est le plus petit des nombres

$$\pi_0 - m\lambda,\ \pi_1 - (m-1)\lambda,\ \pi_2 - (m-2)\lambda,\ \ldots,\ \pi_m;$$

ce terme peut cependant disparaître dans des cas particuliers. De même, le degré du premier terme dans le coefficient de $\dfrac{dz}{dx}$ sera, en général, le plus petit des nombres

$$\pi_0 - (m-1)\lambda,\ \pi_1 - (m-2)\lambda,\ \ldots,\ \pi_{m-1}$$

qui sont les $m-1$ premiers des nombres précédents augmentés de λ. Et, en général, le coefficient de $\dfrac{d^\mu z}{dx^\mu}$ dans l'équation (17) aura un premier terme dont le degré est le plus petit des nombres

$$\pi_0 - (m-\mu)\lambda,\ \pi_1 - (m-\mu-1)\lambda,\ \ldots,\ \pi_{m-\mu}.$$

Donc si $\pi'_0, \pi'_1, \pi'_2, \ldots, \pi'_m$ sont les puissances minima de $x-a$ dans les coefficients de l'équation (17), et s'il n'y a pas de réductions pour le premier terme du coefficient de z, on aura

$$\pi'_{m-1} \geq \pi'_m + \lambda,\quad \pi'_{m-2} \geq \pi'_m + 2\lambda$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

et, en général,

$$\pi'_\mu \geqq \pi'_m + (m-\mu)\lambda$$

ou

$$\pi'_\mu + \mu \geqq \pi'_m + m + (\lambda - 1)(m-\mu) > \pi'_m + m,$$

puisque

$$m > \mu \quad \text{et} \quad \lambda > 1.$$

Dans la suite π'_0, $\pi'_1 + 1$, ..., $\pi'_m + m$, le dernier terme est le plus petit, et l'équation (17) ne peut avoir aucune intégrale (*voir* n° 13).

Ainsi, pour que l'équation (17) puisse avoir une intégrale régulière, il faut que dans le coefficient de z les $\lambda - 1$ plus faibles puissances de $x - a$ disparaissent, de façon que $\pi'_m + m$ soit au moins égal à $\pi'_{m-1} + m - 1$. Mais les $\lambda - 1$ termes de degré moindre dans t_μ sont les mêmes que dans $(\varphi')^\mu$. Donc les $\lambda - 1$ premiers termes du coefficient de z sont les mêmes que dans l'expression

$$P_0 \varphi'^m + P_1 \varphi'^{m-1} + \ldots + P_{m-1}\varphi' + P_m;$$

mais, si α est l'indice caractéristique de l'équation (1) et si $\mu > \alpha$, le premier terme de $P_\mu \varphi'^{m-\mu}$ sera du degré

$$\begin{aligned} &\pi_\mu - (m-\mu)\lambda \geqq \pi_\alpha + \alpha - \mu - (m-\mu)\lambda \\ &\quad = \pi_\alpha - (m-\alpha)\lambda + (\mu - \alpha)(\lambda - 1) \geqq \pi_\alpha - (m-\alpha)\lambda + \lambda - 1; \end{aligned}$$

les expressions P_m, $P_{m-1}\varphi'$, ..., $P_{\alpha-1}\varphi'^{m-\alpha+1}$ n'interviennent donc pas dans les $\lambda - 1$ premiers termes, et il suffira que les $\lambda - 1$ termes de degré moindre disparaissent dans l'expression

$$P_0 \varphi'^\alpha + P_1 \varphi'^{\alpha-1} + \ldots + P_{\alpha-1}\varphi' + P_\alpha. \tag{18}$$

Pour cela il faut qu'aucun des nombres $\pi_0 - \lambda\alpha$, $\pi_1 - \lambda(\alpha - 1)$, ..., π_α ne soit plus petit que tous les autres. Ces nombres pourront se remplacer par les suivants :

$$0,\ \pi_1 - \pi_0 + \lambda,\ \pi_2 - \pi_0 + 2\lambda,\ \ldots,\ \pi_\alpha - \pi_0 + \alpha\lambda;$$

il faut donc que λ ne soit pas supérieur à tous les nombres $\pi_0 - \pi_1$, $\frac{\pi_0 - \pi_2}{2}$, ..., $\frac{\pi_0 - \pi_\alpha}{\alpha}$, car autrement les quantités précédentes seraient positives et la première, qui est nulle, serait inférieure à toutes les autres.

Dans la suite $\pi_0 - \pi_1$, $\frac{\pi_0 - \pi_2}{2}$, $\frac{\pi_0 - \pi_3}{3}$, ..., $\frac{\pi_0 - \pi_\alpha}{\alpha}$, soit $\frac{\pi_0 - \pi_\beta}{\beta} = g$ le

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

plus grand nombre et le dernier des plus grands si plusieurs sont égaux; on aura toujours $g > 1$, car $\pi_0 > \pi_\alpha + \alpha$. Il faut $\lambda \leqq g$.

Si $g < 2$, il n'y aura aucune valeur possible pour λ et aucune intégrale normale.

Si g est un nombre entier supérieur à 1, on pourra prendre $\lambda = g$.

Il peut y avoir d'autres valeurs pour λ inférieures à g; si $\lambda < g$ et si $\mu < \beta$, dans le terme $P_\mu \varphi'^{(\alpha-\mu)}$ de l'expression (18), la plus faible puissance de $x - a$ sera

$$\pi_\mu - \lambda(\alpha - \mu);$$

elle est supérieure à la puissance de degré moindre du terme $P_\beta \varphi'^{(\alpha-\beta)}$, car on a

$$\frac{\pi_0 - \pi_\mu}{\mu} \leqq \frac{\pi_0 - \pi_\beta}{\beta},$$

d'où

$$\pi_\mu \geqq \frac{\pi_0 - \pi_\beta}{\beta}(\beta - \mu) + \pi_\beta > \lambda(\beta - \mu) + \pi_\beta$$

et

$$\pi_\mu - (\alpha - \mu)\lambda > \pi_\beta - (\alpha - \beta)\lambda.$$

Par suite, la première puissance de $x - a$ dans (18) ne peut parvenir que des termes $P_\beta \varphi'^{(\alpha-\beta)} + \ldots + P_\alpha$, et, pour que cette puissance puisse disparaître, il faut que dans la suite $\pi_\beta - (\alpha - \beta)\lambda$, $\pi_{\beta+1} - (\alpha - \beta - 1)\lambda$, ..., π_α aucun nombre ne soit inférieur à tous les autres. En retranchant le premier terme de tous les autres, on a

$$0,\ \pi_{\beta+1} - \pi_\beta + \lambda,\ \pi_{\beta+2} - \pi_\beta + 2\lambda,\ \ldots,\ \pi_\alpha - \pi_\beta + (\alpha - \beta)\lambda;$$

il faut que ces nombres ne soient pas tous positifs, car autrement le premier serait le seul plus petit. Formons la suite

$$\pi_\beta - \pi_{\beta+1},\ \frac{\pi_\beta - \pi_{\beta+1}}{2},\ \frac{\pi_\beta - \pi_{\beta+3}}{3},\ \ldots,\ \frac{\pi_\beta - \pi_\alpha}{\alpha - \beta},$$

soit $\frac{\pi_\beta - \pi_\gamma}{\gamma - \beta} = g'$ le plus grand de ces nombres et le dernier des plus grands si plusieurs sont égaux à g'; il faudra $\lambda \leqq g'$; on a toujours $g' < g$, car

$$\frac{\pi_0 - \pi_\beta}{\beta} > \frac{\pi_0 - \pi_\gamma}{\gamma} \quad \text{ou} \quad (\pi_0 - \pi_\beta)(\gamma - \beta) > (\pi_\beta - \pi_\gamma)\beta.$$

Si g' est un nombre entier supérieur à 1, on pourra prendre $\lambda = g'$.

Pour chercher les valeurs de λ inférieures à g', on remarquera que le

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

premier terme en $x - a$ dans (18) ne peut provenir que de l'expression

$$P_\gamma \varphi'^{(\alpha-\gamma)} + P_{\gamma+1} \varphi'^{(\alpha-\gamma-1)} + \ldots + P_\alpha;$$

on en déduit une valeur maxima de λ, en exprimant qu'il y a au moins deux termes ayant la même puissance minima de $x - a$. En continuant, on arrive à la règle suivante.

α étant l'indice caractéristique de l'équation (1), on forme la suite

$$\frac{\pi_0 - \pi_1}{1}, \frac{\pi_0 - \pi_2}{2}, \ldots, \frac{\pi_0 - \pi_\alpha}{\alpha};$$

soit $\frac{\pi_0 - \pi_\beta}{\beta} = g_1$ le plus grand de ces nombres et le dernier des plus grands. On forme la suite

$$\frac{\pi_\beta - \pi_{\beta+1}}{1}, \frac{\pi_\beta - \pi_{\beta+2}}{2}, \ldots, \frac{\pi_\beta - \pi_\alpha}{\alpha - \beta};$$

soit $\frac{\pi_\beta - \pi_\gamma}{\gamma - \beta} = g_2$ le plus grand et le dernier des plus grands. Dans la suite

$$\frac{\pi_\gamma - \pi_{\gamma+1}}{1}, \frac{\pi_\gamma - \pi_{\gamma+2}}{2}, \ldots, \frac{\pi_\gamma - \pi_\alpha}{\alpha - \gamma},$$

on prendra encore le plus grand nombre

$$\frac{\pi_\gamma - \pi_\delta}{\delta - \gamma} = g_3,$$

et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à une suite dont le dernier terme sera le plus grand,

$$\frac{\pi_\mu - \pi_\alpha}{\alpha - \mu} = g_n;$$

on aura

$$g_1 > g_2 > g_3 > \ldots > g_n > 1;$$

le nombre λ doit être égal à l'une de ces quantités g; mais on ne peut prendre parmi ces valeurs que celles qui sont entières.

26. Après avoir choisi l'une de ces valeurs g, il faudra déterminer la fonction φ'; soit $\frac{\pi_\beta - \pi_\gamma}{\gamma - \beta} = g_\nu$ la valeur que nous prenons pour λ, le nombre g immédiatement inférieur étant

$$\frac{\pi_\gamma - \pi_\delta}{\delta - \gamma} = g_{\nu+1}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

Posons

$$v' = \frac{h_g}{(x-a)^g} + \frac{h_{g-1}}{(x-a)^{g-1}} + \ldots + \frac{h_2}{(x-a)^2},$$

où $g = g_\nu$ et déterminons les coefficients h de façon que, dans l'expression (18), les $g-1$ premières puissances de $x-a$ disparaissent.

La première puissance ne peut provenir que des termes

$$P_\beta v'^{(\alpha-\beta)} + P_{\beta+1} v'^{(\alpha-\beta-1)} + \ldots + P_\alpha;$$

de plus, si $\mu > \gamma$, on a

$$\frac{\pi_\gamma - \pi_\mu}{\mu - \gamma} < g_{\nu+1} < g,$$

d'où

$$\pi_\mu - (\alpha-\mu)g > \pi_\gamma - (\alpha-\gamma)g = \pi_\beta - (\alpha-\beta)g.$$

Le premier terme en $x-a$, dans l'expression (18), sera $(x-a)^{\pi_\beta-(\alpha-\beta)g}$, et comme $h_g \lesseqgtr 0$, en exprimant que son coefficient est nul, on a l'équation

$$(19)\quad P_\beta (x-a)^{-\pi_\beta} h_g^{\gamma-\beta} + P_{\beta+1}(x-a)^{-\pi_\beta+g} h_g^{\gamma-\beta-1} + \ldots + P_\gamma (x-a)^{-\pi_\beta+(\gamma-\beta)g} = 0,$$

où $x = a$.

L'équation (19) détermine la valeur de h_g ; le premier et le dernier terme ne peuvent pas être nuls, et l'on aura, pour h_g, $\gamma - \beta$ valeurs qui ne sont ni nulles ni infinies. Après avoir choisi l'une de ces valeurs de h_g, on portera la valeur de v' dans l'expression (18) et, en annulant les coefficients des premières puissances de $x-a$, on aura $g-2$ équations, qui détermineront successivement h_{g-1}, h_{g-2}, ..., h_2. Dans chacune de ces équations, la quantité h d'indice moindre entre au premier degré avec le même coefficient, qui est

$$(\alpha-\beta) h_g^{\alpha-\beta-1} P_\beta (x-a)^{-\pi_\beta} + (\alpha-\beta-1) h_g^{\alpha-\beta-2} P_{\beta+1}(x-a)^{-\pi_\beta+g} + \ldots + (\alpha-\gamma) h_g^{\alpha-\gamma-1} P_\gamma (x-a)^{-\pi_\beta+(\gamma-\beta)g},$$

où $x = a$.

Cette expression est la dérivée par rapport à h_g du premier membre de l'équation (19) multiplié par $h_g^{\alpha-\gamma}$; elle est donc nulle dans le cas où h_g est racine multiple de l'équation (19).

Supposons que h_g soit racine simple de l'équation (19), on trouvera pour h_{g-1}, ..., h_2 et, par suite, pour v' un seul système de valeurs. Dans l'équation (17) correspondante, le coefficient de $\frac{dz}{dx}$ aura le premier terme

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

$(x-a)^{\pi_\beta-(m-\beta-1)g}$, et le coefficient de ce terme s'obtient en posant $x=a$ dans

$$(m-\beta)h_g^{m-\beta-1}P_\beta(x-a)^{-\pi_\beta}+(m-\beta-1)h_g^{m-\beta-2}P_{\beta+1}(x-a)^{-\pi_\beta+g}+\dots$$
$$+(m-\gamma)h_g^{m-\gamma-1}P_\gamma(x-a)^{-\pi_\beta+(\gamma-\beta)g};$$

ce coefficient n'est pas nul, car c'est la dérivée du premier membre de l'équation (19) multiplié par $h_g^{m-\gamma}$.

On aura donc, dans l'équation (17),

$$\pi'_{m-1}=\pi_\beta-(m-\beta-1)g \quad \text{et} \quad \pi'_m\geq\pi_\beta-(m-\beta)g+g-1,$$

puisque les $g-1$ premiers termes du coefficient de z disparaissent. De plus, on a, si $\mu<m$,

$$\pi'_\mu\geq\pi'_{m-1}+(m-1-\mu)g,$$

d'où

$$\pi'_\mu+\mu>\pi'_{m-1}+m-1 \quad \text{et} \quad \pi'_m+m\geq\pi'_{m-1}+m-1.$$

L'équation (17) a donc l'indice caractéristique $m-1$ et, par suite, a une seule intégrale régulière possible, qui est de la forme

$$(x-a)^\rho\sum_0^\infty h_\nu(x-a)^\nu;$$

cette série peut cependant être divergente.

Ainsi à chaque racine simple de l'une des équations (19) correspond une intégrale et une seule de forme normale.

A chaque valeur entière des nombres g, définis au n° 25, correspond une équation (19). Si tous ces nombres g sont entiers, les degrés de ces équations seront β, $\gamma-\beta$, $\delta-\gamma$, ..., $\alpha-\mu$, et la somme de ces degrés est égale à l'indice caractéristique α; si, en outre, chaque équation (19) n'a que des racines simples, on trouvera α intégrales de forme normale : on peut former $m-\alpha$ intégrales régulières. On aura donc m intégrales régulières ou normales, et les développements des intégrales pour $x=a$ seraient complètement connus si l'on pouvait affirmer que les séries formées sont convergentes, ce qui n'est pas, en général, possible.

Si les nombres g ne sont pas tous entiers, la somme des degrés des équations (19) sera inférieure à α.

27. Supposons maintenant qu'on prenne pour h_g une racine multiple de l'équation (19); dans l'expression (18), le second terme en $x-a$, qui est

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

$(x-a)^{\pi_\beta-(\alpha-\beta)g+1}$, a un coefficient ne contenant que h_g, car les termes en h_{g-1} disparaissent; si ce coefficient n'est pas nul, la valeur h_g ne correspond à aucune intégrale normale. Si les deux premiers termes disparaissent dans l'expression (18), comme le premier terme en $x-a$ du coefficient de $\frac{dz}{dx}$ disparaît dans l'équation (17), il faudra exprimer que les g premières puissances de $x-a$ se détruisent dans le coefficient de z; il restera donc $g-2$ équations pour déterminer h_{g-1}, h_{g-2}, ..., h_2 : ces équations auront en général plusieurs systèmes de solutions. Après avoir formé une valeur de φ', il faudra vérifier si l'équation (17) peut avoir des intégrales régulières; car, s'il y avait des réductions dans le coefficient de $\frac{dz}{dx}$, l'indice caractéristique pourrait être égal à m, et alors la valeur φ' ne correspondrait à aucune intégrale normale.

On peut former plus simplement les intégrales normales correspondant à la valeur h_g de la façon suivante :

Supposons que h_g soit racine multiple d'ordre n de l'équation (19). Posons

$$y = e^{\frac{-h_g}{g-1}(x-a)^{-g+1}} z;$$

l'équation (1), multipliée par

$$e^{\frac{h_g}{g-1}(x-a)^{-g+1}}$$

prendra la forme (17), où

$$\varphi' = \frac{h_g}{(x-a)^g}.$$

Dans le coefficient de $\frac{d^\mu z}{dx^\mu}$, le premier terme en $x-a$ sera

$$(x-a)^{\pi_\beta-(\alpha-\beta-\mu)g}$$

multiplié par

$$\frac{(m-\beta)(m-\beta-1)\ldots(m-\beta-\mu+1)}{1.2\ldots\mu} h_g^{m-\beta-\mu} P_\beta (x-a)^{-\pi_\beta} + \ldots$$

$$+ \frac{(m-\gamma)\ldots(m-\gamma-\mu+1)}{1.2\ldots\mu} h_g^{m-\gamma-\mu} P_\gamma (x-a)^{-\pi_\beta+(\gamma-\beta)g},$$

où $x=a$.

C'est la dérivée d'ordre μ par rapport à h_g du premier membre de l'équation (19) multiplié par $\frac{1}{1.2\ldots\mu} h_g^{m-\gamma}$. Ce premier terme disparaît donc dans

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

les coefficients de z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, ..., $\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$ et n'est pas nul dans le coefficient de $\frac{d^nz}{dx^n}$. On aura donc, dans l'équation (17),

$$\pi'_{m-n} = \pi_\beta - (\alpha - \beta - n)\,g, \quad \pi'_{m-\mu} > \pi_\beta - (\alpha - \beta - \mu)\,g, \quad \text{si} \quad \mu < n,$$

ou

$$\pi'_{m-\mu} > \pi'_{m-n} - (n - \mu)\,g,$$

tandis que, si $\pi > n$, on a

$$\pi'_{m-\mu} \geq \pi'_{m-n} + (\mu - n)\,g.$$

Représentons l'équation (17) par

$$(17') \qquad q_0 \frac{d^mz}{dx^m} + q_1 \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + \ldots + q_m z = 0,$$

et posons

$$z = e^w u, \quad \text{où} \quad w' = \frac{h_\lambda}{(x-a)^\lambda} + \ldots + \frac{h_2}{(x-a)^2} \quad \text{et} \quad \lambda < g,$$

w' étant déterminé de façon que l'équation en u puisse avoir des intégrales régulières; et, pour cela, il faut que, dans l'expression

$$q_0 w'^m + q_1 w'^{m-1} + \ldots + q_{m-1} w' + q_m,$$

les $\lambda - 1$ premières puissances de $x - a$ disparaissent.

Soit α' l'indice caractéristique de l'équation (17), qui est supérieur ou égal à $m - n$; car, si $\mu > n$, on a

$$\pi'_{m-\mu} + m - \mu \geq \pi'_{m-n} + m - n + (\mu - n)(g - 1) > \pi'_{m-n} + m - n.$$

L'équation (17') peut avoir $m - \alpha'$ intégrales régulières qui correspondent à des intégrales normales de l'équation (1), pour lesquelles $w' = 0$. Pour déterminer les autres valeurs de w', il faut exprimer (*voir* n° 25) que les $\lambda - 1$ premiers termes en $x - a$ disparaissent dans l'expression

$$q_0 w'^{\alpha'} + q_1 w'^{\alpha'-1} + \ldots + q_{\alpha'-1} w' + q_{\alpha'};$$

mais, comme $\lambda < g$, si $\mu > n$, on aura

$$\pi'_{m-\mu} - (\alpha' - m + \mu)\lambda \geq \pi'_{m-n} - (\alpha' - m + n)\lambda + (\mu - n)(g - \lambda),$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

et le premier terme en $x - a$ ne peut provenir que de l'expression

$$q_{m-n}\,\omega^{\prime(\alpha'-m+n)} + q_{m-n+1}\,\omega^{\prime(\alpha-m+n-1)} + \ldots + q'_{\alpha'};$$

il faut donc qu'aucun des nombres

$$\pi'_{m-n} - (\alpha' - m + n)\lambda,\ \pi'_{m-n+1} - (\alpha' - m + n - 1)\lambda,\ \ldots,\ \pi'_{\alpha'}$$

ne soit inférieur à tous les autres. On formera la suite

$$\frac{\pi'_{m-n} - \pi'_{m-n+1}}{1},\ \frac{\pi'_{m-n} - \pi'_{m-n+2}}{2},\ \ldots,\ \frac{\pi'_{m-n} - \pi'_{\alpha'}}{\alpha' - m + n};$$

ces nombres sont tous inférieurs à g. Soit

$$\frac{\pi'_{m-n} - \pi'_{m-n+\beta}}{\beta} = g'$$

le plus grand et le dernier des plus grands; il faudra

$$\lambda \leq g'.$$

Si g' est un nombre entier, on peut prendre $\lambda = g'$, et, pour déterminer h_λ, on aura une équation de degré β. On déterminera les valeurs de λ inférieures à g' par la méthode du n° 25, et l'on obtiendra, pour déterminer les diverses valeurs de h_λ, des équations analogues à (19), dont les degrés auront une somme égale ou inférieure à $\alpha' - m + n$.

Si les équations qui donnent h_λ n'ont que des racines simples, à chaque racine correspondra une intégrale normale, et l'équation (17) pourra avoir au plus $\alpha' - m + n$ intégrales normales, telles que $\lambda < g$; on trouve, en outre, $m - \alpha'$ intégrales régulières; par suite, à la racine h_g de l'équation (19) correspond, pour l'équation (1), un nombre d'intégrales normales au plus égal à n; et il n'y en aura aucune si, α' étant égal à m, les nombres g' que l'on déduit de l'équation (17′) sont tous fractionnaires.

Si les équations donnant h_λ ont des racines multiples, on fera pour chaque racine multiple le raisonnement que nous avons fait pour la racine h_g de l'équation (19); et l'on continuera de même jusqu'à ce qu'on obtienne des équations n'ayant que des racines simples; si l'on trouve des racines multiples pour les valeurs successives de h jusqu'à h_2, on formera des équations de forme (17) en posant successivement

$$y = e^{\frac{-h_g}{g-1}(x-a)^{-g+1}} z, \quad \text{jusqu'à} \quad z_\nu = e^{\frac{-h_2}{1}x^{-1}} z_{\nu+1},$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

et, pour la dernière équation, on n'aura plus qu'à chercher les intégrales régulières.

On voit donc que, dans tous les cas, si h_g est une racine multiple d'ordre n de l'une des équations (19), on pourra en déduire des intégrales normales de l'équation (1), dont le nombre est au plus égal à n.

La somme des degrés des équations (19) étant au plus égale à $m - \alpha$, le nombre des intégrales régulières et normales que l'on pourra former pour l'équation (1) est en général inférieur et au plus égal à l'ordre m. En outre, parmi ces intégrales, il peut y en avoir qui contiendront des séries divergentes et qui ne conviennent pas.

28. Examinons en particulier la valeur $x = \infty$; une intégrale normale sera alors de la forme

$$e^{\sum_{\nu=1}^{\nu=\lambda} h_\nu (x-a)^\nu} \left(\frac{1}{x-a}\right)^\rho \left[\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} h'_\nu (x-a)^{-\nu} + \log(x-a) \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} h''_\nu (x-a)^{-\nu} + \dots\right].$$

La recherche de ces intégrales peut se ramener au cas général en posant

$$x - a = \frac{1}{t}.$$

On peut également les obtenir directement en posant

$$y = e^v z$$

et en déterminant

$$v' = h_\lambda (x-a)^\lambda + h_{\lambda-1}(x-a)^{\lambda-1} + \dots + h_2 (x-a)^2 + h_1 (x-a) + h_0,$$

de façon que l'équation en z ait des intégrales régulières pour $x = \infty$. Soient $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$ les degrés des coefficients de l'équation (1) par rapport à x, $\pi'_0, \pi'_1, \pi'_2 \dots, \pi'_m$ les degrés des coefficients de l'équation (17). π'_μ sera le plus grand des nombres $\pi_0 + \mu\lambda$, $\pi_1 + (\mu - 1)\lambda, \dots, \pi_{\mu-1} + \lambda, \pi_\mu$, sauf si les termes de degré maximum se détruisent dans le coefficient de $\frac{d^{m-\mu} z}{dx^{m-\mu}}$. Donc, s'il n'y a pas de réductions pour le coefficient de z, on aura, quel que soit μ,

$$\pi'_\mu \leq \pi'_m - (m-\mu)\lambda \quad \text{et} \quad \pi'_\mu + \mu \leq \pi'_m + m - (m-\mu)(\lambda+1);$$

il faut donc que les $\lambda + 1$ puissances supérieures de $x - a$ disparaissent

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

dans le coefficient de z, ou dans l'expression

$$P_0 \varphi'^m + P_1 \varphi'^{m-1} + \ldots + P_{m-1} \varphi' + P_m,$$

et qu'aucun des nombres

$$\pi_0 + m\lambda, \ \pi_1 + (m-1)\lambda, \ \ldots, \ \pi_m$$

ne soit supérieur à tous les autres. Par un raisonnement identique à celui déjà fait (n° 25), on est conduit, pour déterminer λ, à une règle analogue à celle trouvée pour une valeur finie de x, et l'on achève la détermination des intégrales normales par la même méthode.

29. Les séries que l'on obtient en cherchant les intégrales normales de l'équation (1) pour $x = a$ sont souvent divergentes. Nous allons former des équations pour lesquelles toutes ces séries sont convergentes. Formons l'équation composée (n° 23)

$$F(z) = 0, \quad z = f(y).$$

Pour avoir les facteurs déterminants e^{ρ} de cette équation, on formera l'équation composée

$$e^{-\rho} F(e^{\rho} z) = 0, \quad z = e^{-\rho} f(e^{\rho} y),$$

ρ étant déterminé de façon que cette nouvelle équation ait une équation déterminante d'un degré supérieur à zéro. Mais le degré de l'équation déterminante est la somme des degrés des équations déterminantes des deux équations composantes

$$e^{-\rho} F(e^{\rho} z) = 0, \quad e^{-\rho} f(e^{\rho} y) = 0;$$

e^{ρ} doit donc être un facteur déterminant de l'une des équations

$$F(z) = 0, \quad f(y) = 0.$$

Donc :

Les facteurs déterminants de l'équation composée sont ceux des équations composantes, et à chacun de ces facteurs e^{ρ} correspond, pour l'équation composée, dans laquelle on a posé $y = e^{\rho} y_1$, une équation déterminante dont le degré est la somme des degrés des équations déterminantes données par les deux équations composantes.

Le nombre des intégrales normales que l'on pourra former pour l'équa-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

tion composée sera donc égal à la somme des nombres d'intégrales obtenus pour les deux équations composantes ; mais ces intégrales peuvent contenir des séries divergentes.

THÉORÈME. — *L'équation composée a un nombre d'intégrales normales distinctes (à séries convergentes), au plus égal à la somme des nombres d'intégrales normales distinctes des deux équations composantes.*

En effet, toute intégrale normale de l'équation $f(y) = 0$ vérifiera l'équation composée. Si y_1 est une intégrale normale de l'équation composée distincte de celles de l'équation $f(y) = 0$, l'expression $z = f(y_1)$, qui a la forme normale, sera une intégrale de $F(z) = 0$, et si $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ sont des intégrales normales de l'équation composée, qui sont linéairement indépendantes avec celles de $f(y) = 0$, l'équation $F(z) = 0$ aura ν intégrales normales distinctes, $f(y_1), f(y_2), \ldots, f(y_\nu)$, car $f(c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_\nu y_\nu)$ ne peut pas être nul.

Supposons que l'équation $F(z) = 0$ n'ait aucune intégrale normale, ni aucun facteur déterminant possible : il suffit pour cela que l'indice caractéristique soit m et que les nombres g (n° 25) soient tous fractionnaires.

Ces conditions seront remplies en particulier si l'on a

$$\pi_m = 0, \quad m < \pi_0 < 2m \quad \text{et} \quad \pi_\mu > m - \mu, \quad \pi_\mu > \pi_0 - 2\mu,$$

quel que soit μ, car alors les nombres $\frac{\pi_0 - \pi_\mu}{\mu}$ sont tous inférieurs à 2. Dans ce cas, les intégrales normales de l'équation composée

$$F(z) = 0, \quad z = f(y)$$

sont celles de l'équation $f(y) = 0$, et, si cette dernière équation a toutes ses intégrales normales, les intégrales de forme normale que l'on trouvera pour l'équation composée n'auront que des séries convergentes, car ce sont les mêmes que pour l'équation $f(y) = 0$.

Pour avoir une équation n'ayant que des intégrales normales, prenons une équation $f_1(y) = 0$ ayant toutes ses intégrales régulières pour $x = a$ (n° 19), et posons

$$e^{v} f_1(e^{-v} y) = 0;$$

cette dernière équation aura toutes ses intégrales normales avec le facteur déterminant e^{v}.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

Soient $f(y) = 0$ et $\varphi(y) = 0$ deux équations ainsi formées d'ordres m et n, ayant toutes leurs intégrales normales, avec des facteurs déterminants différents; ces équations n'ont pas d'intégrales communes. Nous allons former une équation d'ordre $m + n$, admettant toutes les intégrales des deux équations données; pour cela, posons

$$f(y) = z, \quad \varphi(y) = 0,$$

différentions n fois la première équation, m fois la seconde, on aura $m + n + 2$ équations entre lesquelles on peut éliminer y, $\frac{dy}{dx}$, ..., $\frac{d^{m+n}y}{dx^{m+n}}$; on obtient une équation différentielle linéaire en z d'ordre n, soit $\psi(z) = 0$, qui admet les intégrales $f(y_1), f(y_2), \ldots, f(y_n)$, en désignant par $y_1, y_2, \ldots, y_n$, n intégrales normales distinctes de l'équation $\varphi(y) = 0$. L'équation composée

$$\psi(z) = 0, \quad z = f(y)$$

admet donc les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et celles de $f(y) = 0$: elle a donc $m + n$ intégrales normales distinctes, et ne peut pas en avoir d'autres, car elle est du degré $m + n$.

Si plusieurs équations données ont leurs intégrales distinctes, on peut former une équation admettant toutes leurs intégrales, en prenant d'abord les deux premières, puis l'équation qu'on en déduit et la troisième équation donnée, et ainsi de suite.

On peut donc former des équations ayant toutes leurs intégrales normales avec des facteurs déterminants différents et arbitraires, et en déduire des équations pour lesquelles toutes les séries que l'on obtient en cherchant les intégrales normales seront convergentes, le nombre de ces intégrales normales étant arbitraire.

30. Nous allons maintenant examiner des équations pour lesquelles les séries que l'on obtient en cherchant les intégrales normales ne sont pas toutes convergentes.

Si l'équation différentielle (1) n'a qu'une seule valeur singulière finie $x = a$, autre que les valeurs d'apparence singulière, et si l'on développe les intégrales normales pour $x = a$ et $x = \infty$ suivant les puissances de $x - a$, les séries qui seront convergentes seront applicables pour toutes les valeurs de x (*voir* n° 24). Parmi ces intégrales normales il y en a donc au

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

plus m linéairement indépendantes. Mais il résulte du n° 11 que, si ces intégrales ne sont pas distinctes, il devra exister une relation linéaire entre celles dont les puissances de $x - a$ diffèrent de nombres entiers; il faudrait donc que l'une des intégrales, pour $x = a$,

$$e^{\sum_1^{\lambda} \frac{h_\nu}{(x-a)^\nu}} (x-a)^r [\varphi_1 + \varphi_2 \log(x-a) + \ldots + \varphi_\lambda \log^{\lambda-1}(x-a)]$$

soit égale à une des intégrales pour $x = \infty$

$$e^{\sum_1^{\lambda'} h'_\nu (x-a)^\nu} \left(\frac{1}{x-a}\right)^{-r-n} [\varphi'_1 + \varphi'_2 \log(x-a) + \ldots + \varphi'_\lambda \log^{\lambda-1}(x-a)].$$

Les fonctions φ étant des séries convergentes ne contenant que des puissances positives de $x - a$, et φ' des séries n'ayant que des puissances négatives. Si l'on pose

$$y = e^{\sum_1^{\lambda} \frac{h_\nu}{(x-a)^\nu}} e^{\sum_1^{\lambda'} h'_\nu (x-a)^\nu} (x-a)^r z,$$

l'équation en z aura une intégrale régulière pour les deux valeurs $x = a$ et $x = \infty$, qui ne contiendra qu'un nombre limité de puissances de $x - a$. Par suite, les intégrales de l'équation (1), normales pour $x = a$ et pour $x = \infty$, seront de la forme

$$e^{\sum_1^{\lambda} \frac{h_\nu}{(x-a)^\nu} + \sum_1^{\lambda'} h'_\nu (x-a)^\nu} (x-a)^r [A_1 + A_2 \log(x-a) + \ldots],$$

A étant des polynômes entiers en x.

On peut obtenir facilement les intégrales de cette forme : on forme les équations déterminantes des diverses équations obtenues en posant

$$y = e^{\rho} z,$$

ρ étant un facteur déterminant pour $x = a$, puis pour $x = \infty$; on cherche s'il existe deux racines de ces équations déterminantes, l'une r pour $x = a$, l'autre $-r - n$ pour $x = \infty$, dont la somme soit un nombre entier négatif. Si e^{ρ} et e^{ρ_1} sont les facteurs déterminants qui ont fourni ces racines, on posera

$$y = e^{\rho + \rho_1} (x-a)^r z$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

et l'on cherchera si l'équation en z a des intégrales régulières qui ne contiennent qu'un nombre limité de puissances de $x - a$.

Si λ est le nombre des intégrales que l'on forme ainsi, le nombre total des intégrales normales pour $x = a$ et $x = \infty$ sera au plus égal à $m + \lambda$; et si l'on en trouve un nombre supérieur il y aura dans ces intégrales des séries divergentes.

Si l'équation a toutes ses intégrales régulières pour $x = \infty$, ou si, en posant

$$y = e^{\sum_{1}^{\lambda} h_\nu (x-a)^\nu} z,$$

on obtient une équation ayant toutes ses intégrales régulières (n° 19), il ne pourra y avoir pour $x = a$ que des intégrales normales qui seront aussi normales pour $x = \infty$, c'est-à-dire de la forme

$$e^{\sum_{-\lambda}^{+\lambda'} h_\nu (x-a)^\nu} (x-a)^r \left[\sum_{0}^{n} h'_\nu (x-a)^\nu + \log(x-a) \sum_{0}^{n'} h''_\nu (x-a)^\nu + \dots \right];$$

les autres intégrales normales que l'on pourrait former auront leurs séries divergentes.

Connaissant une équation $f(y) = 0$ qui, pour $x = a$, n'a pas toutes les intégrales normales que l'on peut former, on pourra en obtenir d'autres en posant $z = f(y)$ dans une équation arbitraire $F(z) = 0$; la nouvelle équation peut alors avoir d'autres valeurs singulières que $x = a$.

On arrive à des résultats analogues en prenant une équation n'ayant que deux valeurs singulières $x = a$ et $x = b$, si $x = \infty$ est une valeur non singulière ou d'apparence singulière. Ce cas se ramène au précédent en posant

$$x - a = \frac{1}{t}.$$

31. Nous allons généraliser les intégrales de la forme normale, et montrer que l'on peut toujours développer m intégrales; ce qui donnerait l'intégrale générale de l'équation différentielle si les séries que l'on forme étaient toutes convergentes.

Posons dans l'équation (1)

$$x - a = t^n,$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

n étant un nombre entier positif,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n} t^{1-n} \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{n^2} t^{2-2n} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1-n}{n^2} t^{1-2n} \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{n^3} t^{3-3n} \frac{d^3y}{dt^3} + \frac{3(1-n)}{n^3} t^{2-3n} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{(1-n)(1-2n)}{n^3} t^{1-3n} \frac{dy}{dt},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{d^\mu y}{dx^\mu} = \frac{1}{n^\mu} t^{\mu-\mu n} \frac{d^\mu y}{dt^\mu} + c_1 t^{\mu-1-\mu n} \frac{d^{\mu-1} y}{dt^{\mu-1}} + c_2 t^{\mu-2-\mu n} \frac{d^{\mu-2} y}{dt^{\mu-2}} + \ldots + c_{\mu-1} t^{1-\mu n} \frac{dy}{dt}.$$

On aura ainsi une équation différentielle d'ordre m donnant y en fonction de t. Soient π'_0, π'_1, π'_2, ..., π'_m les puissances de t^{-1}, par lesquelles il faut multiplier les coefficients de $\frac{d^m y}{dt^m}$, $\frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}}$, ..., $\frac{dy}{dt}$, y dans la nouvelle équation, pour qu'ils ne soient plus ni nuls ni infinis pour $t = 0$. Les nombres π_0, π_1, ..., π_m étant ceux définis au n° 5 pour l'équation (1), π'_μ sera le plus petit des nombres

$$\begin{aligned}
&n\pi_\mu + (1-n)(m-\mu),\\
&n\pi_{\mu-1} + (1-n)(m-\mu) - n,\\
&n\pi_{\mu-2} + (1-n)(m-\mu) - 2n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&n\pi_0 + (1-n)(m-\mu) - \mu n;
\end{aligned}$$

on aura donc

$$\pi'_\mu + \mu = n(\pi_\nu + \nu) - m(n-1),$$

$\pi_\nu + \nu$ étant le plus petit des nombres π_0, $\pi_1 + 1$, $\pi_2 + 2$, ..., $\pi_\mu + \mu$. Cependant si deux de ces nombres sont égaux, il peut arriver que le terme de degré moindre en t disparaisse dans le coefficient de $\frac{d^{m-\mu} y}{dt^{m-\mu}}$; alors π'_μ aura une valeur supérieure à celle que nous venons de déterminer.

Soit α l'indice caractéristique de l'équation (1), on a

$$\pi_\mu + \mu > \pi_\alpha + \alpha \quad \text{si} \quad \mu < \alpha,$$

et

$$\pi_\mu + \mu \geq \pi_\alpha + \alpha \quad \text{si} \quad \mu > \alpha;$$

on aura donc toujours

$$\pi'_\alpha + \alpha = n(\pi_\alpha + \alpha) - m(n-1),$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

et, si $\mu < \alpha$,

$$\pi'_\mu + \mu > n(\pi_\alpha + \alpha) - m(n-1) = \pi'_\alpha + \alpha,$$

et, si $\mu > \alpha$,

$$\pi'_\mu + \mu \geqq n(\pi_\alpha + \alpha) - m(n-1) = \pi'_\alpha + \alpha;$$

α est donc aussi l'indice caractéristique de l'équation qui donne y en fonction de t.

En adoptant les notations du n° 25, on a

$$\frac{\pi_0 - \pi_\mu}{\mu} < g_1 \quad \text{si} \quad \mu > \beta,$$

et

$$\frac{\pi_0 - \pi_\mu}{\mu} \leqq g_1 \quad \text{si} \quad \mu < \beta,$$

d'où

$$\pi_\mu + \mu \geqq \pi_0 - \mu(g_1 - 1),$$

et, comme $g_1 > 1$, on aura

$$\begin{aligned}
&\pi'_\mu + \mu > n(\pi_0 - \mu g_1 + \mu) - m(n-1) \quad \text{si} \quad \mu > \beta,\\
&\pi'_\beta + \beta = n(\pi_0 - \beta g_1 + \beta) - m(n-1),\\
&\pi'_\mu + \mu \geqq n(\pi_0 - \mu g_1 + \mu) - m(n-1) \quad \text{si} \quad \mu < \beta,\\
&\pi'_0 = n\pi_0 - m(n-1),
\end{aligned}$$

et

$$\pi'_0 - \pi'_\mu - \mu < n\mu(g_1 - 1),$$

cette inégalité pouvant devenir une égalité si $\mu < \beta$,

$$\frac{\pi'_0 - \pi'_\mu}{\mu} < 1 + n(g_1 - 1) = \frac{\pi'_0 - \pi'_\beta}{\beta}.$$

Il en résulte que le plus grand des nombres

$$\frac{\pi'_0 - \pi'_1}{1}, \quad \frac{\pi'_0 - \pi'_2}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{\pi'_0 - \pi'_\alpha}{\alpha}$$

sera

$$\frac{\pi'_0 - \pi'_\beta}{\beta} = g'_1 = 1 + n(g_1 - 1),$$

et ceux qui le suivent seront tous inférieurs à g'_1.

De même, on a

$$\frac{\pi_\beta - \pi_\mu}{\mu - \beta} < g_2, \quad \text{d'où} \quad \pi_\mu > \pi_\beta - (\mu - \beta) g_2 \quad \text{si} \quad \mu > \gamma$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

et

$$\pi_\mu \geqq \pi_\beta - (\mu - \beta) g_2 \quad \text{si } \mu < \gamma$$

ou

$$\pi_\mu + \mu > \pi_\beta + \beta g_2 - \mu(g_2 - 1);$$

et, comme $g_2 > 1$, on aura

$$\begin{aligned}
&\pi'_\mu + \mu > n(\pi_\beta + \beta g_2 - \mu g_2 + \mu) - m(n-1) \quad \text{si } \mu > \gamma,\\
&\pi'_\gamma + \gamma = n(\pi_\beta + \beta g_2 - \gamma g_2 + \gamma) - m(n-1),\\
&\pi'_\mu + \mu \geqq n(\pi_\beta + \beta g_2 - \mu g_2 + \mu) - m(n-1) \quad \text{si } \mu < \gamma,\\
&\pi'_\beta + \beta = n(\pi_\beta + \beta) - m(n-1).
\end{aligned}$$

Donc

$$\pi'_\beta - \pi'_\mu + \beta - \mu < n(g_2 - 1)(\mu - \beta) \quad \text{et} \quad \leqq \text{ si } \mu < \gamma,$$

$$\frac{\pi'_\beta - \pi'_\mu}{\mu - \beta} < 1 + n(g_2 - 1) = \frac{\pi'_\beta - \pi'_\gamma}{\gamma - \beta}.$$

Parmi les nombres

$$\frac{\pi'_\beta - \pi'_{\beta+1}}{1}, \quad \frac{\pi'_\beta - \pi'_{\beta+2}}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{\pi'_\beta - \pi'_\alpha}{\alpha - \beta},$$

le plus grand et le dernier des plus grands sera donc

$$\frac{\pi'_\beta - \pi'_\gamma}{\gamma - \beta} = g'_2 = 1 + n(g_2 - 1).$$

On démontrera de la même manière que le plus grand des nombres

$$\frac{\pi'_\gamma - \pi'_{\gamma+1}}{1}, \quad \frac{\pi'_\gamma - \pi'_{\gamma+2}}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{\pi'_\gamma - \pi'_\alpha}{\alpha - \gamma}$$

est

$$\frac{\pi'_\gamma - \pi'_\delta}{\delta - \gamma} = g'_3 = 1 + n(g_3 - 1),$$

et ainsi de suite.

Dans l'équation qui donne y en fonction de t, les nombres g'_1, g'_2, g'_3, ... seront donc donnés par la relation générale

$$g'_\mu = 1 + n(g_\mu - 1),$$

et, si l'on prend pour n un multiple commun des dénominateurs des nombres g_1, g_2, ..., les nombres g'_1, g'_2, ... seront tous entiers. Soit $F(y) = 0$ l'équation différentielle ainsi obtenue.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

Pour chercher ses intégrales normales pour $t = 0$, on formera les équations analogues à (19); à la valeur g'_μ correspond l'équation obtenue en annulant le terme de degré moindre en t de l'expression

$$e^{\frac{h}{(g'_\mu - 1)\, t^{g'_\mu - 1}}} \mathrm{F}\left(\frac{-h}{e^{g'_\mu - 1}} t^{1 - g'_\mu} \right).$$

Si les équations ainsi formées n'ont que des racines simples, on obtiendra m fonctions de forme normale ou régulière, qui seront des intégrales distinctes de l'équation $\mathrm{F}(y) = 0$ si les séries qu'elles contiennent sont convergentes.

Si l'une des équations en h a une racine multiple, on posera

$$t = t_1^{n'}.$$

n' étant un nombre entier. L'équation $\mathrm{F}(y) = 0$ deviendra $\mathrm{F}_1(y) = 0$ et au nombre g'_μ correspondra

$$g''_\mu = 1 + n'(g'_\mu - 1);$$

les valeurs de h pour la seconde équation seront données par l'équation obtenue en annulant le premier terme en t_1 dans l'expression

$$e^{\frac{h}{(g''_\mu - 1)\, t_1^{g''_\mu - 1}}} \mathrm{F}_1\left(\frac{-h}{e^{g''_\mu - 1}} t^{1 - g''_\mu} \right),$$

qui est le premier terme en t de

$$e^{\frac{h}{n'(g'_\mu - 1)\, t^{g'_\mu - 1}}} \mathrm{F}\left(\frac{-h}{e^{n'(g'_\mu - 1)}} t^{1 - g'_\mu} \right).$$

Les valeurs de h sont celles qu'on trouve pour l'équation $\mathrm{F}(y) = 0$, multipliées par n'.

Si h et hn' sont racines multiples des équations qui les donnent, pour chercher les intégrales normales des deux équations $\mathrm{F}(y) = 0$ et $\mathrm{F}_1(y) = 0$, on formera, d'après la méthode du n° 27, les deux équations

$$e^{\frac{h}{g' - 1} t^{1 - g'}} \mathrm{F}\left(\frac{-h}{e^{g' - 1}} t^{1 - g'} z \right) = 0, \quad e^{\frac{hn'}{g'' - 1} t_1^{1 - g''}} \mathrm{F}_1\left(\frac{-hn'}{e^{g'' - 1}} t_1^{1 - g''} z \right) = 0;$$

mais, comme $g'' - 1 = n'(g' - 1)$, la seconde équation peut s'obtenir en remplaçant t par $t_1^{n'}$ dans la première.

On peut donc choisir n' de façon que les nombres g que l'on aura à former

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

pour cette dernière équation soient tous entiers. On aura alors

$$(x-a)=t^n=t_1^{nn'}.$$

En effectuant plusieurs fois la même transformation, on voit que l'on peut toujours poser, dans l'équation (1), $(x-a)=t^n$, n étant choisi de façon que, dans la nouvelle équation, on puisse former m intégrales normales pour $t=0$, ce qui donnerait l'intégrale générale si les séries étaient toutes convergentes.

Après avoir trouvé les intégrales en fonction de t, on remplacera t par $(x-a)^{\frac{1}{n}}$, ce qui donnera des intégrales de l'équation (1) de la forme

$$u=(x-a)^r e^{A_0+A_1(x-a)^{\frac{1}{n}}+A_2(x-a)^{\frac{2}{n}}+\ldots+A_{n-1}(x-a)^{\frac{n-1}{n}}}\left[B_0+B_1(x-a)^{\frac{1}{n}}+\ldots+B_{n-1}(x-a)^{\frac{n-1}{n}}\right],$$

$A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ étant des expressions de la forme

$$\frac{h_1}{x-a}+\frac{h_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{h_\nu}{(x-a)^\nu},$$

et $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$ des fonctions entières de $\log(x-a)$, dont les coefficients sont des séries

$$\sum_0^\infty h_\nu(x-a)^\nu,$$

que nous supposerons convergentes.

Si les fonctions B ne contiennent pas de logarithmes, de l'intégrale u on peut en déduire n distinctes, en supposant que le point qui représente x décrive des circonférences de centre a; $x-a$ est alors multiplié par $e^{k2\pi\sqrt{-1}}=1$, et $(x-a)^{\frac{\mu}{n}}$ par $e^{k2\pi\frac{\mu}{n}\sqrt{-1}}$. Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les n fonctions obtenues en prenant $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$; si le point qui représente x tourne autour de a, ces n fonctions se changeront respectivement en y_2, $y_3, \ldots, y_n$ et $e^{2\pi nr\sqrt{-1}}y_1$. On peut remplacer ces n intégrales par des fonctions ayant les propriétés données au n° 9. On a, d'après les notations du n° 6,

$$Y_1=y_2,\quad Y_2=y_3,\quad \ldots,\quad Y_{n-1}=y_n,\quad Y_n=y_1 e^{2\pi nr\sqrt{-1}};$$

on en déduit une équation fondamentale (n° 6)

$$\omega^n=e^{2\pi nr\sqrt{-1}},$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

et à chacune des n racines de cette équation correspond l'intégrale

$$\omega^{n-1}y_1 + \omega^{n-2}y_2 + \ldots + \omega y_{n-1} + y_n,$$

qui est multipliée par ω, si l'on multiplie $x - a$ par $e^{2\pi\sqrt{-1}}$.

Si les fonctions B contiennent des logarithmes, et si $\log^{\lambda-1}(x-a)$ est la plus haute puissance de $\log(x-a)$, de l'intégrale u on peut en déduire $n\lambda$ distinctes. Pour cela, on multiplie $x - a$ par $e^{2\pi nk\sqrt{-1}}$, k étant un nombre entier, $\log(x-a)$ se change en $\log(x-a) + 2\pi nk\sqrt{-1}$, $(x-a)^r$ est multiplié par $e^{2\pi nkr\sqrt{-1}}$, les autres termes ne changent pas. Et en prenant $k = 0, 1, 2, \ldots, \lambda - 1$, on aura λ fonctions de forme u linéairement indépendantes (*voir* n° 11).

Si l'on multiplie $x - a$ par $e^{2\pi k\sqrt{-1}}$, où $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, on obtiendra n fonctions de même forme que u, avec des puissances différentes de e, et chacune de ces n fonctions permet d'en former λ distinctes. On aura donc λn fonctions distinctes de forme u.

En appliquant la méthode du n° 6, on pourra remplacer les λn intégrales ayant la même puissance de e par des groupes de λn intégrales de forme (9) (n° 9).

V.

32. La recherche des intégrales de l'équation (1) peut se simplifier si l'on peut ramener cette recherche à l'étude d'équations d'ordres moindres. Pour savoir si l'équation (1) admet toutes les intégrales d'une équation de même forme $f(y) = 0$ d'ordre $n < m$, on différentie $m - n$ fois cette dernière équation, et l'on en déduit $\frac{d^n y}{dx^n}$, $\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}}$, ..., $\frac{d^m y}{dx^m}$ en fonction de y, $\frac{dy}{dx}$, ..., $\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$; en portant ces valeurs dans l'équation (1), il faudra que l'on obtienne une identité. Si cette condition est remplie, on pourra mettre l'équation (1) sous la forme composée

$$\varphi(z) = 0, \quad z = f(y),$$

$\varphi(z) = 0$ étant une équation d'ordre $m - n$ dont les coefficients s'obtiennent en exprimant que l'équation composée a pour coefficients $P_0, P_1, \ldots, P_m$; on dit alors que l'équation (1) est réductible.

Nous allons résoudre quelques problèmes qui permettront, dans certains cas particuliers, de réduire l'équation (1).

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

PROBLÈME. — *Étant donnée une équation différentielle* (1) *à coefficients entiers, trouver s'il existe une équation d'ordre moindre n ayant toutes ses intégrales régulières pour toutes les valeurs de x* [*de forme* 16 *du n°* 22], *et dont les intégrales vérifient l'équation* (1).

Soit

$$q_0 \frac{d^n y}{dx^n} + q_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + q_n y = 0 \tag{20}$$

l'équation cherchée, dont les coefficients sont des polynômes entiers en x. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_\lambda, \infty$ les valeurs singulières de x pour l'équation (1). L'équation (20) aura les mêmes valeurs singulières et peut en avoir d'autres $a_{\lambda+1}, a_{\lambda+2}, \ldots, a_{\lambda+\mu}$ qui seront d'apparence singulière, car les intégrales pour l'une de ces valeurs doivent vérifier l'équation (1) et seront de la forme

$$(x-a)^r \sum_0^\infty h_\nu (x-a)^\nu,$$

où r est entier et inférieur à m.

Les n racines de l'équation déterminante de (20) pour $x = a$ doivent vérifier l'équation déterminante de l'équation (1) pour la même valeur singulière. Il faut donc, pour que le problème soit possible, que le nombre donné n soit inférieur ou au plus égal au plus petit des degrés des équations déterminantes de l'équation (1) pour ses diverses valeurs singulières.

Dans l'équation (20), on doit avoir

$$\frac{q_1}{q_0} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_{\lambda+\mu}}{x-a_{\lambda+\mu}},$$

les quantités A étant des constantes.

L'équation déterminante de l'équation (1) pour $x = a_1$ doit avoir n racines dont la somme est $\frac{n(n-1)}{2} - A_1$; ces racines vérifient l'équation déterminante de l'équation (1), et, en formant les sommes des racines de cette dernière équation prises n à n, on en déduira toutes les valeurs possibles de A_1. On peut facilement former une équation dont les racines seront ces valeurs de A_1. De même pour $A_2, A_3, \ldots, A_\lambda$. Pour $x = a_{\lambda+1}$, l'équation déterminante de l'équation (20) aura n racines entières ou nulles, différentes et inférieures à m; leur somme sera donc supérieure à $\frac{n(n-1)}{2}$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

et inférieure ou égale à $\frac{n(2m-n-1)}{2}$, et, comme cette somme est $\frac{n(n-1)}{2} - A_{\lambda+1}$, on aura

$$0 > A_{\lambda+1} \geqq -n(m-n);$$

$A_{\lambda+1}$, $A_{\lambda+2}$, ..., $A_{\lambda+\mu}$ sont donc des nombres entiers négatifs dont la valeur absolue est au plus égale à $n(m-n)$.

Posons

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_{\lambda+\mu}.$$

La somme des racines de l'équation déterminante de l'équation (20) pour $x = \infty$ est (n° 22) $A - \frac{n(n-1)}{2}$; ces racines vérifient l'équation déterminante pour $x = \infty$ de l'équation (1), qui est connue; on peut donc former une équation qui aura pour racines les valeurs possibles de A.

On a

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_\lambda - A = -(A_{\lambda+1} + \ldots + A_{\lambda+\mu}).$$

Il faudra chercher s'il existe parmi les valeurs possibles de A_1, A_2, A_3, ..., A_λ et A un système tel que $\sum_1^\lambda A_\nu - A$ soit un nombre entier positif ou nul. Pour cela, on prendra les équations qui donnent respectivement A_1, A_2, ..., A_λ et A, et l'on en déduira une équation ayant pour racines toutes les valeurs telles que $A_1 + A_2 + \ldots + A_\lambda - A$; on cherchera les racines entières de cette équation et à chaque racine entière positive correspondra un système de valeurs pour A_1, A_2, ..., A_λ et A. On examinera séparément chaque système. Pour connaître $\frac{q_0}{q_1}$, il reste à déterminer l'expression

$$\sum_{\lambda+1}^{\lambda+\mu} \frac{A_\nu}{x - a_\nu};$$

pour cela, remarquons que, A_1 étant connu, on saura quelles sont, parmi les racines de l'équation déterminante de l'équation (1), celles dont la somme est A_1, ce qui permettra de connaître le développement pour $x = a_1$ des intégrales régulières de l'équation (1) qui ont pour exposants ces racines. Supposons que ces intégrales soient complètement déterminées, ce qui a lieu en général; représentons-les par $y_1, y_2, \ldots, y_n$. L'équation (20), qui

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

admet ces intégrales, peut s'écrire sous la forme

$$(21)\qquad \begin{vmatrix} \frac{d^n y}{dx^n} & \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} & \cdots & \frac{dy}{dx} & y \\ \frac{d^n y_1}{dx^n} & \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} & \cdots & \frac{dy_1}{dx} & y_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^n y_n}{dx^n} & \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} & \cdots & \frac{dy_n}{dx} & y_n \end{vmatrix} = 0.$$

Représentons par D le coefficient de $\frac{d^n y}{dx^n}$, on aura

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-2} y_1}{dx^{n-2}} & \cdots & y_1 \\ \frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-2}} & \frac{d^{n-2} y_2}{dx^{n-2}} & \cdots & y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-2} y_n}{dx^{n-2}} & \cdots & y_n \end{vmatrix}.$$

La dérivée D′ de D s'obtient en remplaçant les éléments de la première colonne à gauche par leurs dérivées; le coefficient de $\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$ dans l'équation (21) est donc égal à $-\mathrm{D}'$ et, l'équation (20) étant identique à (21), on aura

$$\frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{D}} = -\frac{q_1}{q_0} = -\sum_{1}^{\lambda+\mu} \frac{\mathrm{A}_\nu}{x - a_\nu};$$

d'où

$$\log \mathrm{D} + \log (x - a_1)^{\mathrm{A}_1} + \ldots + \log (x - a_{\lambda+\mu})^{\mathrm{A}_{\lambda+\mu}} = \mathrm{C}$$

et

$$(x - a_{\lambda+1})^{-\mathrm{A}_{\lambda+1}} (x - a_{\lambda+2})^{-\mathrm{A}_{\lambda+2}} \ldots (x - a_{\lambda+\mu})^{-\mathrm{A}_{\lambda+\mu}} = \mathrm{C}' \mathrm{D} (x - a_1)^{\mathrm{A}_1} \ldots (x - a_\lambda)^{\mathrm{A}_\lambda}.$$

Le premier membre est un polynôme entier en x dont le degré est connu

$$-(\mathrm{A}_{\lambda+1} + \ldots + \mathrm{A}_{\lambda+\mu}) = \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \ldots + \mathrm{A}_\lambda - \mathrm{A}.$$

Au moyen de l'équation (1), on développera les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$ suivant les puissances de $x - a_1$, et l'on prendra les ν premiers termes de chaque série; en les portant dans le déterminant D, on pourra le dévelop-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

per, et le produit $D(x-a_1)^{A_1}$ sera une série de la forme

$$\sum_0^\infty h_\nu (x-a_1)^\nu,$$

dont on connaîtra les ν premiers termes, car la somme des exposants minimum dans $y_1, y_2, \ldots, y_n$ est $\frac{n(n-1)}{2} - A_1$. On développera

$$(x-a_2)^{A_2}(x-a_3)^{A_3}\ldots(x-a_\lambda)^{A_\lambda},$$

suivant les puissances de $(x-a_1)$, et l'on pourra connaître les ν premiers termes du développement de l'expression

$$D(x-a_1)^{A_1}\ldots(x-a_\lambda)^{A_\lambda},$$

qui doit être un polynôme de degré connu; si l'on prend ν égal à ce degré, on aura ainsi la valeur du polynôme; en le divisant par le coefficient de $(x-a_1)^\nu$, on aura le polynôme

$$(x-a_{\lambda+1})^{-A_{\lambda+1}}(x-a_{\lambda+2})^{-A_{\lambda+2}}\ldots(x-a_{\lambda+\mu})^{-A_{\lambda+\mu}},$$

ordonné suivant les puissances de $x-a_1$. Si l'on prend pour ν une valeur supérieure, il faudra que les derniers termes soient identiquement nuls, de façon que l'expression

$$D(x-a_1)^{A_1}\ldots(x-a_\lambda)^{A_\lambda}$$

se réduise à un polynôme du degré connu, sinon le système de valeurs choisi pour $A_1, A_2, \ldots, A_\lambda, A$ est impossible.

On connaîtra ainsi $a_{\lambda+1}, a_{\lambda+2}, \ldots, a_{\lambda+\mu}$, et les nombres entiers $-A_{\lambda+1}, \ldots, -A_{\lambda+\mu}$ et, par suite,

$$\frac{q_1}{q_0} = \sum_1^{\lambda+\mu} \frac{A_\nu}{x-a_\nu};$$

posons

$$\varphi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{\lambda+\mu});$$

les autres coefficients $q_2, q_3, \ldots, q_m$ sont, en général, de la forme

$$\frac{q_\nu}{q_0} = \frac{\psi_\nu(x)}{[\varphi(x)]^\nu},$$

$\psi(x)$ étant une fonction entière de degré $\nu(\lambda+\mu-1)$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

On développera les coefficients de l'équation (21) suivant les puissances de $x - a_1$, en calculant un nombre limité de termes. On peut donc développer l'expression $\frac{q_\nu}{q_0}$; on la multipliera par le polynôme

$$(x - a_1)^\nu (x - a_2)^\nu \dots (x - a_{\lambda+\mu})^\nu,$$

ordonné par rapport aux puissances croissantes de $x - a_1$: on aura ainsi la fonction $\psi_\nu(x)$, développée suivant les puissances de $x - a_1$; il suffit, pour obtenir $\psi_\nu(x)$, de calculer un nombre de termes égal au degré $\nu(\lambda + \mu - 1)$ de ce polynôme. Si l'on calcule un nombre de termes supérieur, il faudra que les derniers termes soient identiquement nuls pour que le problème soit possible.

On peut ainsi déterminer tous les coefficients de l'équation (20). Après avoir formé cette équation, il faudra chercher si toutes ses intégrales vérifient l'équation (1), c'est-à-dire si l'on arrive à une identité en éliminant $\frac{d^n y}{dx^n}$, $\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}}$, ..., $\frac{d^m y}{dx^m}$ entre les équations (1) et (20) et celles obtenues en différentiant successivement $m - n$ fois l'équation (20).

Nous avons supposé que les intégrales y_1, y_2, ..., y_n peuvent être développées suivant les puissances de $x - a_1$. Cependant, si l'équation déterminante de l'équation (1) a plusieurs racines qui diffèrent de nombres entiers, parmi les intégrales qui correspondent à ces racines il peut y en avoir plusieurs sans logarithmes, et l'on peut ajouter à chacune d'elles une fonction linéaire des intégrales qui appartiennent à des exposants supérieurs. Les intégrales y_1, y_2, ..., y_n contiendront alors un nombre limité de constantes arbitraires.

En général, parmi les valeurs singulières a_1, a_2, ..., a_λ, ∞ de l'équation (1), on pourra en trouver une qui ne rentrera pas dans ce cas particulier; mais, si ce n'est pas possible, on formera l'équation (21) en y laissant des constantes arbitraires, et, quand on développera l'expression

$$\mathrm{D}(x - a_1)^{\mathrm{A}_1} \dots (x - a_\lambda)^{\mathrm{A}_\lambda}$$

suivant les puissances de $x - a_1$, on calculera un nombre de termes supérieur au degré connu que doit avoir l'expression égale

$$(x - a_{\lambda+1})^{-\mathrm{A}_{\lambda+1}} \dots (x - a_{\lambda+\mu})^{-\mathrm{A}_{\lambda+\mu}},$$

et, en annulant les derniers termes, on aura des équations qui pourront déterminer les constantes. On pourra encore effectuer le même calcul en par-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

tant de deux valeurs singulières, ce qui donnera deux expressions pour le polynôme

$$(x - a_{\lambda+1})^{-A_{\lambda+1}} \dots (x - a_{\lambda+\mu})^{-A_{\lambda+\mu}},$$

et, en exprimant qu'elles sont identiques, on pourra en général déterminer les constantes.

Dans tous les cas, pour déterminer les coefficients de l'équation (22), il n'est pas nécessaire de connaître explicitement les valeurs de $a_{\lambda+1}$, $a_{\lambda+2}$, ..., $a_{\lambda+\mu}$. On pourra poser

$$\varphi(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_\lambda) P,$$

P étant le polynôme

$$(x - a_{\lambda+1})^{-A_{\lambda+1}} (x - a_{\lambda+2})^{-A_{\lambda+2}} \dots (x - a_{\lambda+\mu})^{-A_{\lambda+\mu}},$$

qui est toujours connu en fonction de constantes arbitraires et, dans l'équation (20), on aura

$$\frac{q_\nu}{q_0} = \frac{\psi_\nu(x)}{[\varphi(x)]^\nu},$$

$\psi_\nu(x)$ étant un polynôme du degré $\nu(n-1)$, n étant le degré de $\varphi(x)$ que l'on connaît.

On pourra donc appliquer la méthode déjà donnée pour calculer les coefficients q_0, q_1, q_2, ..., q_n de l'équation (20), sauf à laisser dans ces coefficients des constantes arbitraires, ce qui pourra, en général, être évité en calculant pour chaque coefficient un nombre de termes supérieur à son degré.

Mais, si l'équation (20) contient encore des constantes, en exprimant que ses intégrales vérifient toutes l'équation (1), on aura entre les coefficients des relations qui détermineront les constantes.

33. Problème. — *Trouver s'il existe une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients rationnels dont les intégrales soient toutes normales avec le même facteur déterminant pour toutes les valeurs singulières de x, telles que les intégrales de cette nouvelle équation vérifient toutes une équation donnée (1) à coefficients entiers.*

L'équation cherchée sera de la forme

$$e^u F(e^{-u} y) = 0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

u étant une fraction rationnelle et $F(y) = 0$ une équation de la forme (16), dont les intégrales sont toutes régulières.

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_\lambda, \infty$ les valeurs singulières de x pour l'équation (1), on devra avoir

$$u = c_1 + c_2 + \ldots + c_\lambda + c_\infty,$$

où

$$c_1 = \sum_1^{n_1} \frac{h_\nu}{(x-a_1)^\nu}, \quad \ldots, \quad c_\lambda = \sum_1^{n_\lambda} \frac{h_\nu}{(x-a_\lambda)^\nu} \quad \text{et} \quad c_\infty = \sum_1^{n_\infty} h_\nu x^\nu,$$

e^{ρ_1}, e^{ρ_2}, $\ldots$, e^{ρ_λ} et e^{ρ_∞} étant des facteurs déterminants de l'équation (1) pour les valeurs singulières $a_1, a_2, \ldots, a_\lambda, \infty$.

Posons

$$F(y) = q_0 \frac{d^n y}{dx^n} + q_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + q_n y,$$

q étant des polynômes entiers en x; on aura

$$\frac{q_1}{q_0} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_{\lambda+\mu}}{x-a_{\lambda+\mu}},$$

A étant des constantes et $A_{\lambda+1}, \ldots, A_{\lambda+\mu}$ des nombres entiers négatifs. Si $f(y) = 0$ représente l'équation (1), l'équation déterminante de $F(y) = 0$ pour $x = a_1$, qui est la même que celle de l'équation

$$e^{u-\rho_1} F(e^{-u+\rho_1} y) = 0,$$

doit avoir n racines qui vérifieront l'équation déterminante de l'équation

$$e^{-\rho_1} f(e^{\rho_1} y) = 0,$$

et la somme de ces n racines est $\frac{n(n-1)}{2} - A_1$.

On formera donc les facteurs déterminants e^{ρ_1} de l'équation (1) pour $x = a_1$, et pour chacun d'eux on formera l'équation déterminante de l'équation

$$e^{-\rho_1} f(e^{\rho_1} y) = 0$$

[ρ_1 pouvant être nul si l'équation (1) a une équation déterminante].

On prendra parmi ces équations déterminantes celles dont le degré n'est pas inférieur à n, et l'on formera des équations ayant pour racines les sommes de n racines de chacune des équations précédentes prises séparément. Les équations ainsi obtenues auront pour racines les différentes va-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

leurs possibles de $\frac{n(n-1)}{2} - A_1$, et l'on pourra en déduire une équation, dont les racines seront toutes les valeurs que l'on peut donner à A_1. On formera, de même, des équations donnant respectivement $A_2, A_3, \ldots, A_\lambda$; et, en cherchant les facteurs déterminants de l'équation (1) pour $x = \infty$, on pourra obtenir une équation ayant pour racines les valeurs de

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_{\lambda+\mu}.$$

On en déduira une équation ayant pour racines les valeurs de

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_\lambda - A,$$

et l'on cherchera les racines entières positives ou nulles de cette dernière équation. A chacune de ces racines entières correspondra un système de valeurs pour $A_1, A_2, \ldots, A_\lambda$ et A, auxquelles correspondent des facteurs déterminants qui seront connus $e^{v_1}, e^{v_2}, \ldots, e^{v_\lambda}$ et e^{v_∞},

$$v_\infty = \sum^{\nu} h_\nu (x-a)^\nu.$$

Soit

$$u = v_1 + v_2 + \ldots + v_\lambda + v_\infty.$$

On formera l'équation

$$e^{-u} f(e^u y) = 0,$$

qui devra admettre toutes les intégrales de l'équation

$$F(y) = 0,$$

puisque l'équation

$$f(y) = 0$$

admet les intégrales de

$$e^u F(e^{-u} y) = 0.$$

On déterminera donc $F(y)$ par la méthode du n° 32.

34. Avant de généraliser les résultats précédents, nous allons faire quelques remarques sur les intégrales de l'équation (1).

Si, en cherchant les intégrales normales de l'équation (1) à coefficients entiers, on trouve une fonction de la forme

$$e^{\sum_1^n \frac{h_\nu}{(x-a)^\nu}} (x-a)^r [A_1 + A_2 \log(x-a) + \ldots + A_\lambda \log^{\lambda-1}(x-a)],$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

A étant des séries qui peuvent être divergentes, et si l'on remplace y par cette valeur dans le premier membre de l'équation (1), on aura une expression de même forme ; mais, si l'on calcule dans les coefficients des puissances de $\log(x-a)$ un nombre limité de termes en $x-a$, on trouvera ces termes identiquement nuls, bien que la fonction précédente ne soit pas une intégrale quand les séries sont divergentes.

Si $y_1, y_2, \ldots, y_m$ sont m fonctions de forme normale pour $x=a$, que l'on a trouvées comme intégrales distinctes de l'équation (1), mais qui ont des séries divergentes, et si l'on forme l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{d^m y}{dx^m} & \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} & \cdots & \frac{dy}{dx} & y \\ \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} & \cdots & \cdot\cdot & y_1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdot\cdot & \cdots \\ \frac{d^m y_m}{dx^m} & \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}} & \cdots & \cdot\cdot & y_m \end{vmatrix} = 0,$$

cette équation sera identique à (1) si les séries sont convergentes ; dans tous les cas, si l'on développe ses coefficients en les divisant par le produit des facteurs déterminants des m intégrales et par une puissance de $x-a$, on aura des coefficients $q_0, q_1, \ldots, q_m$ qui seront des séries divergentes, et, si l'on prend un nombre donné ρ de termes dans chacune, on pourra en déduire les ρ premiers termes du développement des quantités $\frac{q_1}{q_0} P_0, \frac{q_2}{q_0} P_0, \ldots, \frac{q_m}{q_0} P_0$, et ces termes seront les fonctions $P_1, P_2, \ldots, P_m$, si ρ est supérieur à leurs degrés ; les termes suivants que l'on pourrait calculer seront identiquement nuls.

Si l'équation (1) à coefficients rationnels admet toutes les intégrales d'une équation de même forme et d'ordre $n < m$,

$$f(y) = 0,$$

l'équation (1) pourra se mettre sous la forme composée

$$F(z) = 0, \quad z = f(y),$$

$F(z)$ ayant également ses coefficients rationnels. Il en résulte que, si e^v est un facteur déterminant pour $f(y) = 0$, il l'est aussi pour l'équation (1) et

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

les racines de l'équation déterminante de

$$e^{-v} f(e^v y) = 0$$

vérifient l'équation déterminante déduite de la même manière de l'équation (1) (*voir* n^{os} 23 et 29). De plus, si l'on porte dans l'équation (1) et ses dérivées les valeurs de $\frac{d^n y}{dx^n}$ et des dérivées suivantes en fonction de y, $\frac{dy}{dx}$, ..., $\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$, on aura des identités. Il en résulte que, si l'on trouve pour l'équation $f(y) = 0$ une intégrale de forme normale, même ayant des séries divergentes, et si on la porte dans l'équation (1) en développant sous la même forme et en calculant un nombre limité de termes, on trouvera tous les coefficients nuls; cette fonction est donc l'une de celles que l'on obtient en cherchant les intégrales normales de l'équation (1).

Remarquons encore qu'en adoptant les notations du n° 25 pour la valeur singulière $x = a$, on aura

$$\pi_0 - \pi_\beta = \beta g_1, \quad \pi_\beta - \pi_\gamma = (\gamma - \beta) g_2, \quad \ldots, \quad \pi_\mu - \pi_\alpha = (\alpha - \mu) g_n,$$

d'où

$$\pi_0 = \pi_\alpha + \beta g_1 + (\gamma - \beta) g_2 + \ldots + (\alpha - \mu) g_n = \pi_\alpha + S, \quad \pi_0 \leq m - \alpha + S,$$

et, si les nombres g sont tous entiers, S sera la somme des exposants maxima de $(x - a)^{-1}$ dans les facteurs déterminants e^v, chaque exposant étant pris autant de fois qu'il y a d'intégrales correspondantes.

35. De ces considérations, nous allons déduire la solution du problème suivant :

Étant donnée une équation différentielle (1) *à coefficients entiers, trouver s'il existe une équation de même forme et d'ordre n dont les intégrales vérifient l'équation* (1), *cette nouvelle équation n'ayant pas d'autres valeurs singulières que l'équation* (1).

On cherchera les intégrales régulières et normales de l'équation (1) pour $x = a_1$, et supposons d'abord qu'on en trouve m distinctes, c'est-à-dire que les nombres g soient tous entiers, ces intégrales pouvant contenir des séries divergentes.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

Soit

$$q_0 \frac{d^n y}{dx^n} + q_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + q_n y = 0 \tag{20}$$

l'équation cherchée, on doit pouvoir former n intégrales régulières ou normales pour cette équation; car autrement on pourrait poser $x - a_1 = t^\nu$ dans (1) et (20), de façon que la seconde équation ait un facteur déterminant qui ne conviendrait pas à la première, ce qui est impossible; et ces n fonctions, déduites de l'équation (20), sont comprises parmi celles de l'équation (1), même lorsque les séries sont divergentes.

Si, pour une valeur singulière $x = a$ de l'équation (1), on forme les nombres

$$g_1 = \frac{\pi_0 - \pi_\beta}{\beta}, \quad g_2 = \frac{\pi_\beta - \pi_\gamma}{\gamma - \beta}, \quad g_3 = \frac{\pi_\gamma - \pi_\delta}{\delta - \gamma}, \quad \ldots$$

définis au n° 25, et les nombres analogues pour l'équation (20)

$$g'_1 = \frac{\pi'_0 - \pi'_{\beta'}}{\beta'}, \quad g'_2 = \frac{\pi'_{\beta'} - \pi'_{\gamma'}}{\gamma' - \beta'}, \quad \ldots,$$

ces derniers nombres seront compris dans les premiers et leurs dénominateurs β', $\gamma' - \beta'$, ... seront inférieurs ou égaux aux dénominateurs des nombres égaux de la suite g. On le démontre en posant $x - a = t^\nu$ dans les deux équations, de façon à rendre tous les nombres g entiers. On aura donc

$$g'_1 \leqq g_1, \quad g'_2 \leqq g_2, \quad \ldots$$

et

$$\pi'_0 \leqq n + \beta' g'_1 + (\gamma' - \beta') g'_2 + \ldots \leqq n + \beta g_1 + (\gamma - \beta) g_2 + \ldots + (n - \mu) g_\varepsilon,$$

où

$$g_\varepsilon = \frac{\pi_\nu - \pi_\mu}{\mu - \nu} \quad \text{et} \quad \mu > n > \nu;$$

on connaît $\beta g_1 + (\gamma - \beta) g_2 + \ldots + (n - \mu) g_\varepsilon$ et l'on en déduira une valeur maximum de π'_0.

Soient $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\lambda$ les valeurs ainsi obtenues pour les diverses valeurs singulières $a_1, a_2, \ldots, a_\lambda$ de x dans l'équation (1). Posons

$$q_0 = (x - a_1)^{\nu_1} (x - a_2)^{\nu_2} \ldots (x - a_\lambda)^{\nu_\lambda}.$$

Les autres coefficients q de l'équation (20) seront des polynômes entiers qui pourront avoir avec q_0 des facteurs communs.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

Considérons maintenant la valeur singulière $x = \infty$ et soient $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$ les degrés en x des coefficients de l'équation (1), π'_0, π'_1, π'_n ceux des coefficients de l'équation (20). Le nombre g_1 sera le plus grand des nombres

$$\pi_1 - \pi_0, \quad \frac{\pi_2 - \pi_0}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{\pi_m - \pi_0}{m}$$

(*voir* n° 25). Soit

$$\frac{\pi_\beta - \pi_0}{\beta} = g_1, \quad \frac{\pi_\gamma - \pi_\beta}{\gamma - \beta} = g_2, \quad \ldots$$

et, pour l'équation (20),

$$\frac{\pi'_{\beta'} - \pi'_0}{\beta'} = g'_1, \quad \ldots,$$

on aura, quel que soit μ,

$$\pi'_\mu \leq \pi'_0 + \mu g'_1 \leq \pi'_0 + \mu g_1.$$

Comme g_1 est connu ainsi que

$$\pi'_0 = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\lambda,$$

on en déduira les degrés maxima des coefficients $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

On cherchera les intégrales régulières et normales de l'équation (1) pour une valeur singulière $x = a_1$; supposons qu'on en trouve m, et que chaque groupe ne puisse se former que d'une seule manière, c'est-à-dire que l'on ne trouve pas deux intégrales sans logarithmes ayant le même facteur déterminant, et des puissances de $x - a_1$ qui diffèrent de nombres entiers, n de ces intégrales seront celles que l'on peut former pour l'équation (20). On groupera donc les m intégrales obtenues n à n de toutes les manières possibles, en remarquant que, lorsqu'on prend une intégrale contenant $\log^\lambda(x - a_1)$, on doit prendre en même temps les $\lambda - 1$ intégrales qui s'en déduisent (n° 11). On aura ainsi un nombre limité de groupes de n fonctions de forme normale ou régulière, et à chaque groupe peut correspondre une équation (20). On portera les n fonctions choisies dans l'équation (21), en prenant pour chaque série un nombre limité ν de termes. Les logarithmes devant disparaître, on pourra les supprimer dans les éléments du déterminant (21), on développera ensuite le déterminant en multipliant tous les coefficients par le produit des n facteurs déterminants de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et par une puissance de $x - a_1$. En calculant les ν premiers termes de

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

chaque coefficient, on aura une équation de la forme

$$q'_0 \frac{d^n y}{dx^n} + q'_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + q'_n y = 0,$$

q' étant des séries qui peuvent être divergentes et dont on connaîtra les ν premiers termes. On formera les expressions

$$\frac{q'_1}{q'_0} q_0, \quad \frac{q'_2}{q'_0} q_0, \quad \ldots, \quad \frac{q'_n}{q'_0} q_0,$$

et on les développera suivant les puissances de $x - a_1$, en calculant pour chaque expression un nombre de termes supérieur au degré connu; on aura ainsi les polynômes $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Si, pour l'un de ces polynômes, on trouve des termes d'un degré supérieur au degré qu'il doit avoir, on pourra en conclure que le système de n intégrales examiné ne donnera pas d'équation de forme (20).

Après avoir formé une équation (20), il faudra vérifier si l'équation donnée (1) admet toutes ses intégrales.

Il peut arriver que les groupes d'intégrales normales de l'équation (1) puissent se former d'une infinité de manières; mais on pourra toujours prendre n de ces intégrales, et l'on aura un nombre limité de groupes possibles de n intégrales, si on laisse dans les séries des constantes arbitraires. On développera les coefficients $q_1, q_2, \ldots, q_n$ de la même manière, en y laissant ces constantes, et l'on calculera pour chaque fonction q un nombre de termes supérieur à son degré, en exprimant que les derniers termes disparaissent; on aura des équations qui détermineront les constantes; s'il reste encore des constantes arbitraires dans les coefficients de l'équation (20), on les déterminera en exprimant que toutes les intégrales de cette équation vérifient l'équation donnée (1).

Si, pour $x = a_1$, le nombre des intégrales de forme normale ou régulière qu'on obtient pour l'équation (1) est inférieur à m, on peut être ramené au cas que nous venons d'examiner en posant

$$x - a_1 = t^\nu;$$

on aura une équation donnant y en fonction de t; on résoudra la question pour cette dernière équation et, dans les équations qu'on aura obtenues, on posera

$$t = (x - a_1)^{\frac{1}{\nu}}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

On aura ainsi des équations différentielles dont les intégrales vérifieront l'équation (1); mais on ne devra conserver parmi ces équations que celles dans lesquelles les puissances fractionnaires de $x - a_1$ disparaissent.

On peut aussi traiter directement la question en partant de l'équation (1). Pour cela, on forme les intégrales normales et régulières de l'équation (1) et celles de la forme obtenue au n° 31 qui deviennent normales en posant

$$x - a_1 = t^\nu.$$

Le nombre des intégrales distinctes qu'on peut ainsi former est toujours égal à m, ces intégrales contenant des séries qui peuvent être divergentes. On cherchera tous les groupes possibles de ces m intégrales prises n à n, en remarquant que, si un groupe contient une fonction ayant des séries avec des puissances fractionnaires de $x - a_1$ ou des logarithmes, on devra prendre en même temps toutes les intégrales qui peuvent s'en déduire (n° 31). A chaque groupe de n intégrales correspondra une équation de forme (21); on développera ses coefficients en les multipliant par le produit des puissances de e qui entrent dans les n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et par une puissance convenable de $x - a_1$. Les coefficients de l'équation obtenue seront alors des séries ne contenant que des puissances positives entières de $x - a_1$, qui peuvent être divergentes; les puissances fractionnaires disparaîtront toutes; on calculera un nombre limité de termes de chaque série, et l'on en déduira un nombre limité de termes du développement des divers coefficients $q_1, q_2, \ldots, q_n$ de l'équation (20); on achève le calcul comme dans le cas précédent.

36. La méthode précédente permettrait de déterminer toutes les équations à coefficients rationnels dont les intégrales vérifient l'équation donnée (1), si l'on pouvait connaître les valeurs singulières de x pour la nouvelle équation.

Car, si $a_{\lambda+1}, a_{\lambda+2}, \ldots, a_{\lambda+\mu}$ sont les valeurs singulières de l'équation (20) qui ne sont pas singulières pour l'équation (1), ces μ valeurs devront être d'apparence singulière (n° 20); si l'on pose

$$q_0 = (x - a_1)^{\nu_1} (x - a_2)^{\nu_2} \ldots (x - a_\lambda)^{\nu_\lambda} (x - a_{\lambda+1})^n \ldots (x - a_{\lambda+\mu})^n,$$

les autres coefficients $q_1, q_2, \ldots, q_n$ de l'équation (20) seront des polynômes entiers, et l'on pourra les déterminer complètement par la méthode du n° 35.

On peut encore déterminer les équations de forme (20) dans le cas où,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

sans connaître les nouvelles valeurs d'apparence singulière $a_{\lambda+1}$, $a_{\lambda+2}$, ..., $a_{\lambda+\mu}$, on connaît leur nombre μ ou une limite supérieure de leur nombre. Pour cela, on pose

$$c(x-a_{\lambda+1})(x-a_{\lambda+2})\dots(x-a_{\lambda+\mu})=\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant un polynôme en x de degré μ (que nous supposons connu), les $\mu+1$ coefficients de ce polynôme étant des constantes arbitraires. Dans l'équation (20), on posera

$$q_0=(x-a_1)^{\nu_1}(x-a_2)^{\nu_2}\dots(x-a_\lambda)^{\nu_\lambda}[\varphi(x)]^n;$$

les autres coefficients doivent être des polynômes de degrés inférieurs à des nombres connus, et $\frac{q_1}{[\varphi(x)]^{n-1}}$, $\frac{q_2}{[\varphi(x)]^{n-2}}$, ..., $\frac{q_{n-1}}{\varphi(x)}$ seront aussi des polynômes entiers en x.

On cherchera pour $x=a_1$ les fonctions de la forme régulière, normale (ou de la forme analogue obtenue au n° 31), qui pourraient vérifier l'équation (1), et l'on formera les divers groupes possibles de ces m intégrales n à n; on en déduira les diverses équations (21) que l'on développera sous la forme

$$q'_0\frac{d^n y}{dx^n}+q'_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+q'_n y=0,$$

les coefficients q' étant des séries, en général divergentes, suivant les puissances positives de $x-a_1$, dont on connaîtra un nombre limité de termes.

On formera les expressions

$$\frac{q'_1}{q'_0}q_0[\varphi(x)]^{n-1},\ \frac{q'_2}{q'_0}q_0[\varphi(x)]^{n-2},\ \dots,\ \frac{q'_{n-1}}{q'_0}q_0\varphi(x),\ \frac{q'_n}{q'_0}q_0,$$

et on les développera suivant les puissances de $x-a_1$, les coefficients contenant les constantes arbitraires qui entraient dans $\varphi(x)$. Les fonctions précédentes doivent être des polynômes dont on connaît les degrés maxima; on calculera un nombre de termes supérieur au degré de chaque fonction, et, en exprimant que les derniers termes sont nuls, on aura des équations qui détermineront les coefficients de $\varphi(x)$, et en même temps les constantes arbitraires que l'on pourrait avoir été obligé d'introduire dans les intégrales $y_1, y_2, \dots, y_n$. On vérifiera ensuite si l'équation (1) admet toutes les intégrales de l'équation (20) ainsi formée, ce qui permettra de déterminer

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

ner toutes les constantes arbitraires, s'il en reste encore dans les coefficients q.

En résumé, les méthodes précédentes permettraient de trouver par un nombre d'opérations limité, quoique très grand en général, toutes les équations différentielles linéaires à coefficients rationnels, dont les intégrales vérifient toutes une équation donnée de même forme, pourvu que l'on connaisse une limite supérieure du nombre des valeurs singulières de x pour la nouvelle équation.

Vu et approuvé :

Paris, le 5 juin 1885.

POUR LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES EMPÊCHÉ,

E. HÉBERT.

Permis d'imprimer :

Paris, le 6 juin 1885.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GRÉARD.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Exposer la méthode donnée par M. Poincaré dans le Journal américain de Mathématiques (t. VII), pour l'étude des intégrales des équations différentielles linéaires.

Vu et approuvé :

Paris, le 5 juin 1885.

POUR LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES EMPÊCHÉ,

E. HÉBERT.

Permis d'imprimer :

Paris, le 6 juin 1885.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GRÉARD.

11066 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XVII 5 -4